6.1 矩量法的基本原理

- 首先以有 Ω 域内满足第一类边值条件的本征值问题为例说明矩量法的基本原理。本征值问题写成一般的形式为

$$Lf = \lambda f \qquad (6.1\text{-}1)$$

其中算子L 可以是微分算子也可以是积分算子。在横截面为Ω 的柱状空心波导中电磁波的传播规律，即

$$\left(\nabla_T^2 + K_c^2\right) E_{zm} = 0$$

在波导壁上$E_{zm} = 0$

其中 $K_c^2 = \omega_2 / c_2 - k_z^2$，$k_z$是沿柱状导轴向的传播常数，这是一典型的本征值问题, 本征值 $\lambda = k_c^2$ 算子 $L = -\nabla_T^2$ ，本征函数 $f = E_{zm}$ 。

•矩量法的解体步骤:

- 第一步是将式（6.1-1）中的未知函数 f 近似表示成函数 N_n 的线性组合，即

$$f \approx f_a = \sum_{n=1}^{M} a_n f_n \qquad (6.1\text{-}2)$$

其中函数 f_n 是已知的独立函数，称为基数;a_n 是未知的待定系数，将式（6.1-2）代入式（6.1-1）得

$$L\sum_{n=1}^{M} a_n f_n = \lambda \sum_{n=1}^{M} a_n f_n \qquad (6.1\text{-}3)$$

- 第二步是用权函数W_m（又称检验函数）对式（6.1-3）两边取内积，即有

$$\left\langle W_m, L\sum_{n=1}^{M} a_n f_n \right\rangle = \left\langle W_m, \lambda \sum_{n=1}^{M} a_n f_n \right\rangle \qquad (6.1\text{-}4)$$

式（6.1-4）可以重新写成

$$\sum_{n=1}^{M} a_n \int_\Omega (W_m L f_n) d\Omega = \lambda \sum_{n=1}^{M} a_n \int_\Omega (W_m f_n) d\Omega \quad (m = 1, 2, \cdots, M) \qquad (6.1\text{-}5)$$

将式（6.1-5）写成矩阵的形式

$$[K_{mn}][a_n] = \lambda [B_{mn}][a_n] \qquad (6.1\text{-}6)$$

其中:

$$K_{mn} = \int_\Omega (W_m L f_n) \mathrm{d}\Omega$$

$$B_{mn} = \int_\Omega (W_m f_n) \mathrm{d}\Omega$$

矩阵$[K_{mn}]$是 $M \times N$ 阶矩阵,$[a_n]$ 是$M \times 1$ 阶矩阵,$[B_{mn}]$ 是 $M \times N$ 阶矩阵。

所以矩量法利用基函数和权函数将最初的本征值问题（式（6.1-1））转换成了矩阵的本征值问题（式（6.1-6））, 通过求解矩阵方程可到近似解。

为使矩阵方程（6.1-6)$[a_n]$ 有非零解, 其系数矩阵 $[K_{mn}] - \lambda [B_{mn}]$ 的行列式必须为零，即

$$\det([K_{mn}] - \lambda [B_{mn}]) = 0 \qquad (6.1\text{-}7)$$

解方程（6.1-7）可求得 M 个本征值 $\lambda_i (i = 1, 2, \cdots, M)$, 对每一个本征值 λ_i , 由式（6.1-6）可求得本征矢量$[a_n]_i = [a_{in}]$

最后求得相应的本征函数

$$f_i = \sum_{n=1}^{M} a_n f_n$$

- 例1. 求不定解域的本征值问题。

$$\left.\begin{aligned} -\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \lambda\varphi \\ \varphi|_{x=0} = \varphi|_{x=1} = 0 \end{aligned}\right\}$$

解　将本征函数近似表示成

$$\phi \approx \phi_a = \sum_{n=1}^{M} a_n f_n$$

选定基函数和权函数分别为

$$f_n = x(1-x^n) \qquad L = -\frac{d^2\phi}{dx^2}$$
$$W_m = x(1-x^m)$$

将选定的基函数和权函数代入式（6.1-6）

其中：$[K_{mn}][a_n] = \lambda[B_{mn}][a_n]$

$$K_{mn} = \int_0^1 \chi(1-\chi^m)\left\{-\frac{d^2}{d\chi^2}\left[\chi(1-\chi^n)\right]\right\} d\chi = \frac{mn}{m+n+1}$$

$$B_{mn} = \int_0^1 \chi^2(1-\chi^m)(1-\chi^n)\, d\chi = \frac{mn(m+n+6)}{3(m+3)(n+3)(m+n+3)}$$

为简单起见，选$M=2$，则方程（6.1-6）变成

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \frac{1}{30} & \frac{1}{20} \\ \frac{1}{20} & \frac{8}{105} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a1 \\ a2 \end{bmatrix} \qquad (6.1\text{-}7)$$

为使上述方程有非零解，其系数矩阵的行列式必须为零，即本征值心须满足方程

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3}-\frac{\lambda}{30} & \frac{1}{2}-\frac{\lambda}{20} \\ \frac{1}{2}-\frac{\lambda}{20} & \frac{4}{5}-\frac{8\lambda}{105} \end{vmatrix} = 0 \qquad (6.1\text{-}8)$$

求得两个本征值分别为$\lambda_1 = 10, \lambda_2 = 42$ 。

从而对应的$\lambda_1 = 10$ 本体征函数为:

$$\phi_1 = a_{11} f_1 = a_{11}\chi(1-\chi)$$

其中a_{11}可任意选取，选择它满足$\int_0^1 \varphi_1^2\, d\chi = 1$

求得：$a_{11} = 30^{1/2} = 5.4772$

同理可求得：$a_{21} = 43.474$

因此本征值问题的近似解为:

$$\varphi_1 \approx 5.4772\chi(1-\chi), \quad \lambda_1 = 10$$

$$\varphi_2 \approx 43.474\left[\chi(1-\chi) - \frac{2}{3}\chi(1-\chi^2)\right], \quad \lambda_2 = 42$$

其精确解是$\varphi_1 = \sqrt{2}\sin\pi\chi, \quad \lambda_1 = \pi^2 = 9.8696$

$\varphi_2 = \sqrt{2}\sin\pi\chi, \quad \lambda_2 = (2\pi)^2 = 39.4784$

图1中给出了φ 的精确解（图中实线）和用矩量法求得的近似解（图中虚线）的曲线，图中可以看出两者是非常接近的。

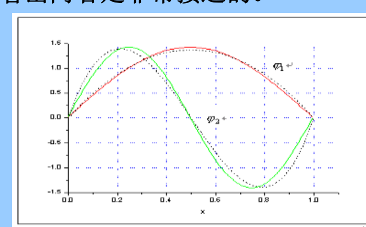


图1 本征值问题的矩量法解与精确解的比较

6.2.基函数和权函数的选择

在例1中选用的是整个定解域上的基函数，称为全域基函数。除了全域基函数外也可采用分域基函数，它只定义在函数定义域的子域上。常用的分域基函数有脉冲函数与三角形函数。

1.脉冲函数

脉冲函数定义为:

$$P_n(r) = \begin{cases} 1 & \left(r\text{位于}\left(r_n - \frac{\Delta r}{2}, r_n + \frac{\Delta r}{2}\right)\text{中}\right) \\ 0 & \left(r\text{位于}\left(r_n - \frac{\Delta r}{2}, r_n + \frac{\Delta r}{2}\right)\text{外}\right) \end{cases}$$

对于一维问题，如图2所示，假定函数的定义域为$0 \le \chi \le 1$，将定义域分成M个宽度相同的子区间，每个子区间的宽度为$\Delta\chi_n (n = 1, 2, \cdots, M)$，其中$\Delta\chi_n = 1/M$

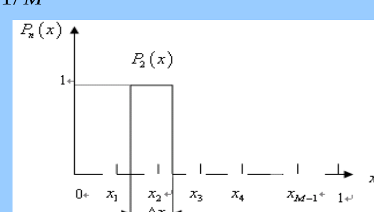


图 2 脉冲基函数

则脉冲基函数为

$$P_n(x)=\begin{cases}1(当x位于\Delta x_n内)\\0(当x不在\Delta x_n内)\end{cases}$$

待求的函数用脉函数的线组合近似，于是有

$$\varphi(\chi)=\sum_{n=1}^{M}a_n p_n(\chi)$$

其中: $a_n=\varphi(\chi_n)$

系数a_n 等于函数φ 在$\chi=\chi_n$ 处的值，但是对包含二阶导数 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\chi^2}$ 的算子不能选脉冲函数作为基函数，这是因为脉冲函数的二阶导数包含有对δ 函数的导数

•2. 三角形函数

如图4所示，三角形基函数定义为:

$$N_n(\chi)=\begin{cases}\dfrac{\chi-\chi_n-1}{\Delta\chi_n-1} & (\chi_n-1\le\chi\le\chi_n)\\ \dfrac{\Delta\chi-(\chi-\chi_n)}{\Delta\chi_n} & (\chi_n\le\chi\le\chi_{n+1})\\ 0 & (\chi>\chi_n+1<\chi_{n-1})\end{cases}$$

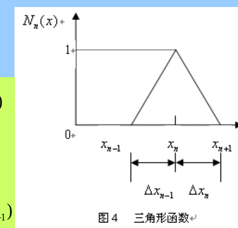


图4 三角形函数

函数 $\varphi(\chi)$ 可近似地用三角形基函数的线性组合来表示，即有

$$\phi(\chi)\approx\sum_{n=1}^{M}a_n f_n(\chi)$$

其中: $a_n=\varphi(\chi_n)$

•3. 权函数的选择

前已述及，矩量法的第二步是用权函数w_m求内积是很困难的，但如果将权数选为δ 函数，即 $W_m=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_m)$

$$K_{mn}=<W_m,Lf_n>=\int_{\Omega}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_m)Lf_n\,\mathrm{d}\Omega$$

$$=Lf_n(\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_m)$$

$$B_{mn}=<W_m,f_n>=f_n(\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_m)$$

•例2求表示在图5中的微带片状电容器的电容。

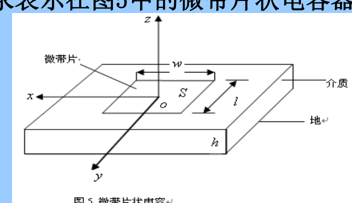
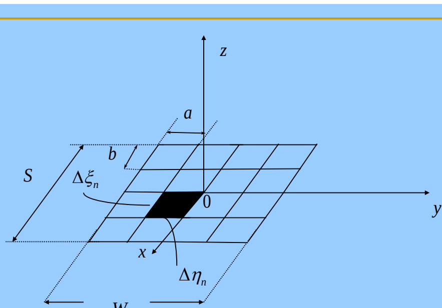


图5 微带片状电容

解 设地为电位参考点，加在微带片上的电压为 U ，根据电容的定义，微带片的电容为:

$$C=Q/U$$



其中Q 是微带片上的总电荷。设微带片的电荷密度为$\rho(\boldsymbol{r}')$，微带片上的电压与电荷密度间满足积分方程：

$$U=\int_s G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{\varepsilon}dS' \qquad L=\int_s G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\frac{1}{\varepsilon}dS'$$

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{1-\xi}{4\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{(\chi-\chi')^2+(y-y')^2}}-(1-\xi)\sum_{P=1}^{\infty}\frac{\xi^{P-1}}{\sqrt{(\chi-\chi')^2+(y-y')^2+(2ph)^2}}\right]$$

其中：$\xi=\dfrac{\varepsilon_0-\varepsilon}{\varepsilon_0+\varepsilon}$

采用矩量法求解积分方程，将微带片的宽ω和长 l 分别等分成 i和j 等分，即将微带片分成$M=ij$个小矩形的宽为a ，长为b ， 每个小矩形的面积为$\Delta S_n=ab$。选用脉冲基函数，将板上的电荷密度ρ表示成

$$\rho(\mathbf{r}')=\sum_{n=1}^{M}a_nP_n(\mathbf{r}')$$

$$Pn(r')=\begin{cases}1 & (\mathbf{r}'\text{位于}\Delta S_i\text{中})\\ 0 & (\mathbf{r}'\text{不位于}\Delta S_i\text{中})\end{cases}$$

它表示ΔS_i上的电荷密度是均匀的，数值为 a_n，采用点配法，权函数为：

$$W_m=\delta(\chi-\chi_m)\delta(y-y_m)$$

•用Wmn 对 $U=\int_s G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\frac{\rho(\mathbf{r}')}{\varepsilon}dS'$ 求内积

求得 $[K_{mn}][a_n]=[B_m]$

其中 $K_{mn}=<W_m,Lf_n>=\int_\Omega\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_m)Lp_n\,\mathrm{d}\Omega=\frac{1-\xi}{4\pi\varepsilon}\left[\boldsymbol{I}_0-(1-\xi)^2\sum_{P=1}^{\infty}\xi^{p-1}\boldsymbol{I}_p\right]$

$p=0,1,2,\cdots$

$$I_p=\int_{\Delta S_n}\frac{dx'dy'}{\sqrt{(x_m-x')^2+(y_m-y')^2+2ph}}$$

上式是可积的。

1. 当$m=n$ 时，求得

$$K_{mn}=\frac{\xi}{2\pi\varepsilon}[b\lg(a+\sqrt{a^2+b^2})+a\lg(b+\sqrt{a^2+b^2})-b\lg b-a\lg a]$$

$$-\frac{(1-\xi)^2}{2\varepsilon}\sum_{p=1}^{\infty}(\sqrt{\frac{\Delta S_n}{\pi}+2ph}-2ph)$$

2. 当$m\neq n$时，求得

$$K_{mn}=\frac{1-\xi}{4\pi\varepsilon}[\frac{\Delta S_n}{\sqrt{(x_m-x_n)^2+(y_m-y_n)^2}}$$

$$-(1-\xi)\sum_{p=1}^{\infty}[\frac{\xi^{p-1}\Delta S_n}{\sqrt{(x_m-x_n)^2+(y_m-y_n)^2+2ph}}$$

而 $B_m=\langle W_m,U\rangle=U$

解方程求得电荷密度

$$[a_n]=[k_{mn}]^{-1}[B_m]$$

因此微带片上的总电荷为 $Q=\sum_{n=1}^{M}a_n\Delta S_n$

将其代入式 $C=Q/U$ 即可求得电容值。