# 第七章 有限元法举例

- 泛函的变分与欧拉方程--静电学中汤姆逊定理的数学描述

$$\begin{cases} J[\varphi]=\iint\limits_D \left\{\frac{\varepsilon}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right]-\rho\varphi\right\}dxdy=\min \\ \varphi\big|_{Li}=u_i(\mathbf{r}_b) \qquad (i=1,2,\cdots n) \end{cases}$$

等价的边值问题为

$$\begin{cases} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon} \qquad (x,y)\in D \\ \varphi\big|_{Li}=u_i(\mathbf{r}_b) \qquad (i=1,2,\cdots n) \end{cases}$$

## 有限元法过程

有限元法的应用步骤是：

- 给出与待求边值问题相应的泛函及其等价变分问题。
- 应用有限单元剖分场区域，并选取相应的插值函数。
- 把变分问题离散化为一个多元函数的极值问题，导出一组联立的代数方程（有限元方程）。
- 选择适当的代数解法，解有限元方程，即得待求边值问题的近似解（数值解）。

## 有限元网格剖分

三角元剖分：

- ①不同媒质的分界线，不容许跨越分界线的三角元
- ②三角元的边逼近边界
- ③三角形要求不要太尖或太钝

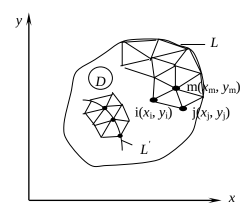
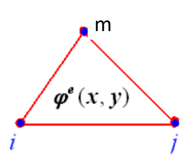



图 7.2 场域 D 的三角剖分示意图

④顶点编号相差不能太悬殊，对多区域的编号，按区域连续编号，三角形节点编号按逆时针顺序编号

## 三角面元数据结构

- 编写顶点数据结构
- **struct struPoint**
- **{**
- **…**
- **};**
- 编写三角面元的数据结构
- **struct struTriElement**
- **{**
- **…**
- **}**




$$a_i=x_jy_m-x_my_j \qquad b_i=y_j-y_m$$
$$a_j=x_my_i-x_iy_m \qquad b_j=y_m-y_i$$
$$a_m=x_iy_j-x_jy_i \qquad b_m=y_i-y_j$$

$$c_i=x_m-x_j$$
$$c_j=x_i-x_m \qquad \Delta=\frac{1}{2}(b_ic_j-b_jc_i)$$
$$c_m=x_j-x_i$$

## 系数计算函数

- 编写线性基系数计算函数
- void CmpCeoTriElement(struTriElement *pElement,double a[3],double b[3],doublec[3],double &ds)
- {
- …
- }

## 有限元分片插值及基函数

- 在一有限单元上进行分片线性插值
- 基函数：

$$\alpha_1 = \begin{vmatrix} \varphi_i & x_i & y_i \\ \varphi_j & x_j & y_j \\ \varphi_m & x_m & y_m \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix}$$

$$\tilde{\varphi}^e(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y$$

$$\begin{cases} \varphi_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i \\ \varphi_j = \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j \\ \varphi_m = \alpha_1 + \alpha_2 x_m + \alpha_3 y_m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = (a_i\varphi_i + a_j\varphi_j + a_m\varphi_m)/2\Delta \\ \alpha_2 = (b_i\varphi_i + b_j\varphi_j + b_m\varphi_m)/2\Delta \\ \alpha_3 = (c_i\varphi_i + c_j\varphi_j + c_m\varphi_m)/2\Delta \end{cases}$$

## 有限元分片插值

- 三角元上的线性插值函数为：

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}^e(x,y) &= \frac{1}{2\Delta}[(a_i + b_i x + c_i y)\Phi_i + \\ &\quad (a_j + b_j x + c_j y)\Phi_j + \\ &\quad (a_m + b_m x + c_m y)\Phi_m] \\ &= \sum_{i,j,m} \Phi_s N_s^e(x,y)\end{aligned}$$

- 形函数：

$$N_s^e(x,y) = \frac{1}{2\Delta}(a_s + b_s x + c_s y) \quad s = i,j,m$$

（7-39）

$$\tilde{\Phi}^e(x,y) = \begin{bmatrix} N_i^e & N_j^e & N_m^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \\ \Phi_m \end{bmatrix} = [N]_e[\Phi]_e$$

## 单元泛函分析

$$J_e[\Phi] \approx J_e[\tilde{\Phi}^e] = \iint_{D_e} \frac{\varepsilon}{2}[(\frac{\partial\tilde{\Phi}^e}{\partial x})^2 + (\frac{\partial\tilde{\Phi}^e}{\partial y})^2]dxdy$$

$$\frac{\partial\tilde{\Phi}^e}{\partial x} = (b_i\Phi_i + b_j\Phi_j + b_m\Phi_m)/2\Delta$$

$$\iint_{D_e} \varepsilon(\frac{\partial\tilde{\Phi}^e}{\partial x})^2 dxdy = \frac{\varepsilon}{4\Delta}(b_i\Phi_i + b_j\Phi_j + b_m\Phi_m)^2$$

$$= \frac{\varepsilon}{4\Delta}\begin{bmatrix} \Phi_i & \Phi_j & \Phi_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_ib_i & b_ib_j & b_ib_m \\ b_jb_i & b_jb_j & b_jb_m \\ b_mb_i & b_mb_j & b_mb_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \\ \Phi_m \end{bmatrix} = [\Phi]_e^T[K_1]_e[\Phi]_e$$

$$\iint_{D_e} \varepsilon(\frac{\partial\tilde{\Phi}^e}{\partial y})^2 dxdy = [\Phi]_e^T[K_2]_e[\Phi]_e$$

因此

$$J_e\left[\tilde{\Phi}^e\right] = \frac{1}{2}[\Phi]_e^T[K_1]_e[\Phi]_e + \frac{1}{2}[\Phi]_e^T[K_2]_e[\Phi$$

$$= \frac{1}{2}[\Phi]_e[K]_e[\Phi]_e$$

（7-46）

## 单元系数矩阵计算函数

- 编写单元系数矩阵计算函数
- **void CmpCeofMxElement(struTriElement**
- ***pElement,double Ke[3][3])**
- **{**
- **…**
- **}**

## 总单元泛函分析

- **总体合成：改写扩充单位阵 $\bar{K}_e$ 到所有单位，即把扩充部分添零，为方便总体矩阵的处理。**

$$J_e[\tilde{\varphi}]=\frac{1}{2}\{\varphi\}^T\{\bar{K}_e\}\{\varphi\}$$

$$\bar{K}_e=\begin{pmatrix} 0 & & 0 & & 0 \\ & K_{ii}^e & K_{ij}^e & K_{im}^e & \\ 0 & K_{ji}^e & K_{jj}^e & K_{jm}^e & 0 \\ & K_{mi}^e & K_{mj}^e & K_{mm}^e & \\ 0 & & 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

$$J[\varphi]\approx\sum_{e=1}^{N}J_e[\tilde{\varphi}]$$

$$=\frac{1}{2}\{\varphi\}^T\left(\sum_{e=1}^{N}\{\bar{K}_e\}\right)\{\varphi\}=\frac{1}{2}\{\varphi\}^T\{K\}\{\varphi\}$$

$$where\ K_{ij}=\sum_{e=1}^{N}K_{ij}^e \quad (i,j=1,2,\cdots N)$$

## 变分问题的有限元方程

- **变分问题被离散化的多元二次函数的极值问题：**

$$J[\varphi]\approx J(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_N)=\frac{1}{2}\{\varphi\}^T\{K\}\{\varphi\}=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}K_{ij}\varphi_i\varphi_j=\min$$

- **根据函数极值理论：** $\dfrac{\partial J}{\partial \varphi_i}=0 \quad (i=1,2,\cdots,N)$

$$\sum_{i,j=1}^{N}K_{ij}\varphi_j=0 \quad (j=1,2,\cdots,N)$$

$$\{K\}\{\varphi\}=\{0\}$$

## 总系数矩阵计算函数

- 编写总体系数矩阵计算函数
- **void CmpCeofMxFEM(map<int ,struTriElement *> &mpElement,double **K, int N)**
- **{**
- **…**
- **}**

## 有限元方程强制边界条件处理

- **迭代法求解，凡是遇到边界节点所对应的方程均不迭代，节点值始终保持给定值，不必单独处理边界。**
- **直接法求解，边界节点的电位值为 $\varphi_0$，这时应将主对角线元素 $K_{nn}$ 设为1，其他元素设为0，右端电位为 $\varphi_0$**

$$\varphi_n\big|_s=\varphi_0$$

$$\begin{pmatrix} & & K_{1n} & & \\ & & \vdots & & \\ K_{n1} & \cdots & K_{nn} & \cdots & K_{nN} \\ & & \vdots & & \\ & & K_{Nn} & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \vdots\\ \varphi_n\\ \vdots\\ \varphi_N\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ \varphi_0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} & & 0 & & \\ & & \vdots & & \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & \\ & & 0 & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \vdots\\ \varphi_n\\ \vdots\\ \varphi_N\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-K_{1n}\varphi_0\\ \vdots\\ \varphi_0\\ \vdots\\ -K_{Nn}\varphi_0\end{pmatrix}$$

## 总系数矩阵边界处理

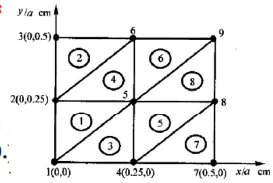
- 编写总体系数矩阵第一类边界处理函数
- **void**
- **ProcCeofMxFEMByFirstBdy(map<int,double>**
- **&mpNodeFirstBdy,double **K,double *b,int N)**
- **{**
- **…**
- **}**

# 实例

➢剖分场域，按基本的三角形网格剖分，与有限差分法一样矩形编号一样，从下到上，从左到右的顺序编号。分为节点编号和三角形编号。

➢节点编号：1(0,0);2(0,0.25);3(0,0.5);4(0.25,0); 5(0.25,0.25);6(0.25,0.5); 7(0.5,0);8(0.5,0.25);9(0.5,0.5)

➢三角形单元e编号e(i,j,m)：
1(1,5,2);2(2,6,3);3(1,4,5); 4(2,5,6);5(4,8,5); 6(5,9,6); 7(4,7,8); 8(5,8,9)




➢强制边界条件(编号,值)：
(1,0.);(2,0.);(3,0.);(4,0.); (7,0.
(6,10.);( 9,10.)