# 计算电磁学中的数值方法

Computational Electromagnetism

矩量法（二）

北京邮电大学

## 2) 细直线天线积分方程（II）——Hallen 方程

Pocklington 方程激励方式为 $E_z^i$，通常工程上细直线天线的激励是在天线输入端馈以电压 V，当输入端子间隙很近（点源），相当于输入端加了一个片电压，即 $E_z^i = V\delta_{(z)}$

表示在z处有激励。

$$E_z^s\big|_{\tan} = [\frac{1}{j\omega\mu\varepsilon}(\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + k^2 A_z)]\big|_{\tan}$$

则此时矢量位函数 $\overline{A}$ 的波函数为

$$\frac{d^2 A_z}{dz^2} + k^2 A_z = -j\omega\mu\varepsilon V\delta_{(z)} \quad (17)$$

边界条件 $E_z^i = -E_z^s$

$$E_z^s\big|_{\tan} = [\frac{1}{j\omega\mu\varepsilon}(\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + k^2 A_z)]\big|_{\tan}$$

$$E_z^i = V\delta_{(z)}$$

$A_z$ 之通解 $\frac{d^2 A_z}{dz^2} + k^2 A_z = 0$

选 $A_{z_1} = B\cos kz$ （因为细天线对称性）

$A_z$ 之特解

$$\frac{d^2 A_z}{dz^2} + k^2 A_z = -j\omega\mu\varepsilon V\delta_{(z)} \quad (18)$$

利用一维格林函数 $G_{(z,z')} = \frac{-j}{2k} e^{-jk|z-z'|}$ 可求得 $A_z$ 在式（18）和辐射条件下的特解为：

$$A_{z_2} = \sqrt{\varepsilon\mu}\frac{V}{2} e^{-jk|z|}$$

于是

$$A_z = A_{z_1} + A_{z_2} = B\cos kz + \sqrt{\mu\varepsilon}\frac{V}{2} e^{-jk|z|} \quad (19)$$

$$\because A_z = \mu\int I'_{(z)} G_{(R,R')} dz' \quad (20)$$

$$R = \sqrt{a^2 + (z-z')^2}$$

由（19）（20）式不难得到

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} I_{(z')} \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} dz' = \frac{1}{\eta}\frac{V}{2}[\cos k|z| - j\sin k|z|] + B'\cos kz \quad (21)$$

式中 $B' = \frac{B}{\mu}$；$\eta = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$ 为波助抗

将（21）式同类项合并，则

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} I_{(z')} \frac{e^{-jk\sqrt{a^2+(z-z')^2}}}{4\pi\sqrt{a^2+(z-z')^2}} dz' = -\frac{j}{\eta}\frac{V}{2}\sin k|z| + C\cos kz \quad (22)$$

式中 $C = \frac{1}{\eta}\frac{V}{2} + \frac{B}{\mu}$

式（22）即为 **Hallen 方程**

# § 6.5 MoM 法解 Hallen 方程

算子方程

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} I_{(z')} \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} dz' - C\cos kz = -\frac{j}{\eta}\frac{V}{2}\sin k|z| \qquad (23)$$

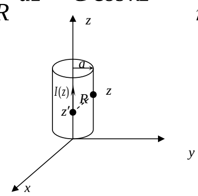


图 3.4

### （a） 选基函数

$$I_{(z')} = \sum_{n=1}^{N} B_n I_n$$

$$I_n = \sin[\frac{2\pi n\left(\frac{l}{2} - |z'|\right)}{\lambda}]$$

（注：$B_n$ 为待定系数，$I_n$ 为整数基函数，因为从物理概念上可判断出 $I(z')$ 是近似正旋分布，所以 $I_n$ 选 sin 形式，同时还要满足

$z' = \pm\frac{l}{2}$ 时 $I_{(z')} = 0$）

选 N＝2 则算子方程展开为

$$B_1 \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \sin[\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{l}{2} - |z'|\right)] G_{(z,z')} dz'$$
$$+ B_2 \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \sin[\frac{4\pi}{\lambda}\left(\frac{l}{2} - |z'|\right)] G_{(z,z')} dz' \quad (24)$$
$$- C\cos kz = -\frac{j}{\eta}\frac{V}{2}\sin k|z|$$

$B_1$，$B_2$ 和 C 为待定系数，V 为激励，$I_{(z')}$ 为响应

### （b）选权函数 $w_m = \delta_{(z-z_m)}$ 点选配法

为确定 $B_1$，$B_2$，C 三个系数，应选三个观察点处作内积，不妨以 $l = \frac{\lambda}{2}$ 为例，给出 $z_m$=0，$\frac{\lambda}{8}$ 和 $\frac{\lambda}{4}$ 三个观察点

### (c) 求内积

$$g_m = \langle w_m, -\frac{jV}{2\eta}\sin k|z| \rangle$$

$$g_1 = \langle \delta_{(z-0)}, -\frac{jV}{2\eta}\sin\frac{2\pi}{\lambda}|z| \rangle = 0$$

$$g_2 = \langle \delta_{\left(z-\frac{\lambda}{8}\right)}, -\frac{jV}{2\eta}\sin\frac{2\pi}{\lambda}|z| \rangle = -\frac{jV}{2\eta}\sin(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{8}) = -\frac{jV}{2\eta}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$g_3 = \langle \delta_{\left(z-\frac{\lambda}{4}\right)}, -\frac{jV}{2\eta}\sin\frac{2\pi}{\lambda}|z| \rangle = -\frac{jV}{2\eta}$$

$l_{mn} = \langle w_m, LI_n \rangle$,

于是对应的相关矩阵为

$$\begin{bmatrix} \int_{-\frac{\lambda}{4}}^{\frac{\lambda}{4}} \cos k|z'| G_{(0,z')} dz', & \int_{-\frac{\lambda}{4}}^{\frac{\lambda}{4}} \sin 2k|z'| G_{(0,z')} dz', & 1 \\ \int_{-\frac{\lambda}{4}}^{\frac{\lambda}{4}} \cos k|z'| G_{\left(\frac{\lambda}{8},z'\right)} dz', & \int_{-\frac{\lambda}{4}}^{\frac{\lambda}{4}} \sin 2k|z'| G_{\left(\frac{\lambda}{8},z'\right)} dz', & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \int_{-\frac{\lambda}{4}}^{\frac{\lambda}{4}} \cos k|z'| G_{\left(\frac{\lambda}{4},z'\right)} dz', & \int_{-\frac{\lambda}{4}}^{\frac{\lambda}{4}} \sin 2k|z'| G_{\left(\frac{\lambda}{4},z'\right)} dz', & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ -C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{jV}{2\eta}\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{jV}{2\eta} \end{bmatrix}$$

（25）

解（25）式，可得 $B_1$,$B_2$ 和 C 值，代入 I（$z'$）可给出半波阵子（$l = \frac{\lambda}{2}$）上之电流分布。

## § 6.6 任意形状细天线的 MM 解

Pockington 和 Hallen 方程仅适用于细直线，对图 3.5 所示之任意形状线天线，它们不适用，不妨仍以位函数方程来分析。

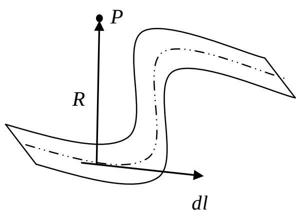


图 3.5　任意形式线辐射体

**假设：**

- 电流只沿轴向流动
- 面电流 $\bar{J}_S$ 和面电荷 $\sigma_S$ 可近似认为是线电流 $I$ 及轴线上之线电荷σ
- 导体表面切向分量只考虑轴向分量，即 $\bar{E}_l^s + E_l^i = 0$

于是 $\bar{E}^s, \bar{A}, \phi, I$ 和 $\sigma$ 的关系如下：

$$\begin{cases} -E_l^i = E_l^s = -j\omega A_l - \dfrac{\partial \phi}{\partial l} \\ \bar{A} = \mu \displaystyle\int_l \bar{I}_{(l)} \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} dl \\ \phi = \dfrac{1}{\varepsilon} \displaystyle\int_l \sigma_{(l)} \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} dl \\ \sigma_{(l)} = -\dfrac{1}{j\omega} \nabla \cdot \bar{I}_{(l)} = -\dfrac{1}{j\omega} \dfrac{dI_{(l)}}{dl} \end{cases} \quad (26)$$

$$\nabla \cdot \bar{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$i = -\frac{dq}{dt}$$

$$dI_{(l)} = dl \cdot \sigma \cdot j\omega$$

式中 $l$：沿线轴向的长度变量；R：轴上源点指向导线表面场点的距离。

在采用 MoM 法时，应使 $\bar{E}^s, \bar{A}, \phi, I$ 和 $\sigma$ 综合为

$E_l^i = LI_{(l')}$ 形式

为避免公式过于冗长，可采用：

$$\begin{cases} L_1 I_{(l)} = A_l \\ L_2 I_{(l)} = \phi \end{cases}$$

再将式 $E_l^i = j\omega A_l + \dfrac{\partial \phi}{\partial l}$ 中 $A_l$ 与 $\phi$ 作为激励分别进行分析。

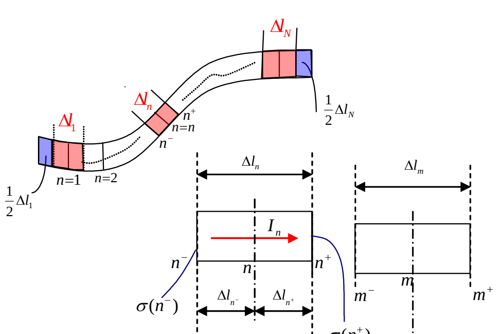


图 3.6 线天线分段示意图

### 1．基函数选取，使用脉冲基函数

将任意形状天线分作 N+1 段，可得如图 3.6 所示。图中 n=1,2,... N 表示源端，以每中点作为标记。m=1,2...N 表示场端。

选 $I_{(l)} = \sum_{n=1}^{N} I_n f_n$，$f_n = \begin{cases} 1 & \Delta l_n 内 \\ 0 & \Delta l_n 外 \end{cases}$

$$\sigma_{(l)} = \sum_{n=1}^{N} \sigma_{n^-} f_{n^-} + \sum_{n=1}^{N} \sigma_{n^+} f_{n^+}$$

$$f_{n^-} = \begin{cases} 1 & \Delta l_n^- 内 \\ 0 & \Delta l_n^- 外 \end{cases}, \quad f_{n^+} = \begin{cases} 1 & \Delta l_n^+ 内 \\ 0 & \Delta l_n^+ 外 \end{cases}$$

值得注意的是第 n 段由始点 $n^-$，中点 n 和终点 $n^+$ 组成，这是因为**天线端点处 $I$=0**，按上述组成分段，可在两端点 $\frac{1}{2}\Delta l_1$ 和 $\frac{1}{2}\Delta l_N$ 处 $I$=0，而 $\Delta l_1$ 至 $\Delta l_N$ 内 $f_1 = f_2 = \ldots = f_N = 1$。

$$E_l^i = j\omega A_l + \frac{\partial \phi}{\partial l}$$

## 2. 权函数 $w_m$，点选配法

$$< w_m, A_l >= A_{l(m)}$$

$$\text{选 } w_m = \delta_{(l-m)} \Rightarrow \quad < w_m, \frac{\partial \phi}{\partial l} >= \frac{\partial \phi}{\partial l}|_m$$

$$< w_m, E_l^i >= E^i{}_{l(m)}$$

## 3. 以差分方式代替 $\frac{\partial \phi}{\partial l}|_m$ 使

$$\frac{\partial \phi}{\partial l}|_m = \frac{\phi_{(m+\Delta m)} - \phi_{(m-\Delta m)}}{\Delta l_m} = \frac{\phi_{m^+} - \phi_{m^-}}{\Delta l_m}$$

于是

$$E_{l_{(m)}}^i = j\omega \bar{A}_{l(m)} \cdot \Delta \hat{l}_m + \frac{\phi_{m^+} - \phi_{m^-}}{\Delta l_m}$$

## 4. 求 $\bar{A}_{l(m)}$ 和 $\phi_m$

$$\bar{A}_{l(m)} = \mu \int_l \bar{I}_{(l)} \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} dl$$

$$\bar{A}_{l(m)} = \mu \sum_n \bar{I}_n \int_{\Delta l_n} \frac{e^{-jkR_{mn}}}{4\pi R_{mn}} dl \qquad (27)$$

(只 $\Delta l$ 上 $f_n = 1$ 其余为 0)

$R_{mn}$：场点到源点之距，如图 3.7 所示

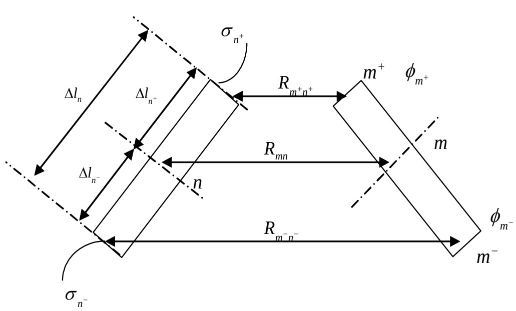


图 3.7 源段及场段相对位置示意图

$$\bar{A}_{l(m)} = \mu \sum_n \bar{I}_n \int_{\Delta l_n} \frac{e^{-jkR_{mn}}}{4\pi R_{mn}} dl$$

令 $$Q_{(m,n)} = \frac{1}{\Delta l_n} \int_{\Delta l_n} \frac{e^{-jkR_{mn}}}{4\pi R_{mn}} dl \qquad (28)$$

则式（27）可得为

$$\bar{A}_{l(m)} = \mu \sum_n I_{(n)} \Delta \bar{l}_n Q_{mn} \qquad (29)$$

式中 $\Delta \bar{l}_n$ 与 $\bar{I}_{(n)}$ 方向一致，故以 $\Delta \bar{l}_n$ 代替 $\bar{I}_{(n)}$ 的方向。

标量位$\phi$ 为

$$\phi=\frac{1}{\varepsilon}\int_l \sigma_{(l)}\frac{e^{-jkR}}{4\pi R}dl$$

$$\phi_{(m^+)}=\frac{1}{\varepsilon}\sum_n\left(\Delta l_{n^-}\right)\sigma_{(n^-)}[\frac{1}{\Delta l_{n^-}}\int_{\Delta l_{n-}}\frac{e^{-jkR_{m^+n^-}}}{4\pi R_{m^+n^-}}dl]$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\sum_n\left(\Delta l_{n^+}\right)\sigma_{(n^+)}[\frac{1}{\Delta l_{n^+}}\int_{\Delta l_{n+}}\frac{e^{-jkR_{m^+n^+}}}{4\pi R_{m^+n^+}}dl]$$

利用式（28）假设，则

$$\phi_{(m^+)}=\frac{1}{\varepsilon}[\sum_n\left(\Delta l_{n^-}\right)\sigma_{(n^-)}Q_{(m^+n^-)}+\sum_n\left(\Delta l_{n^+}\right)\sigma_{(n^+)}Q_{(m^+n^+)}]$$

（30）

同理

$$\phi_{(m^-)}=\frac{1}{\varepsilon}[\sum_n\left(\Delta l_{n^-}\right)\sigma_{(n^-)}Q_{(m^-n^-)}+\sum_n\left(\Delta l_{n^+}\right)\sigma_{(n^+)}Q_{(m^-n^+)}]$$

（31）

## 5．将$\sigma$变换为电流 $I$

$$\sigma=-\frac{1}{j\omega}\frac{dI}{dl}$$

用差分形式近似计算微分

$$\sigma_{n^+}=-\frac{1}{j\omega}[\frac{I_{(n+1)}-I_{(n)}}{\Delta l_{n^+}}]$$

由于式（30）（31）式中$\phi_{m^+}$和$\phi_{m^-}$是以各段贡献之总和而获得，所以只考虑**孤立的第 n 段**对$\phi$的贡献时，只有$I_n$有贡献，此时$I_{n+1}$和$I_{n-1}$均为“0”，于是对于**孤立的 n 段而言**

$$\sigma_{n^+}=\frac{1}{j\omega}[\frac{I_{(n)}}{\Delta l_{n^+}}],\quad \sigma_{n^-}=-\frac{1}{j\omega}\frac{I_{(n)}}{\Delta l_{n^-}}]$$ （32）

**将式（32）代入（30）和（31）**

$$\phi_{(m^+)}=\frac{1}{\varepsilon}[\sum_n\left(\Delta l_{n^+}\right)\frac{I_{(n)}}{j\omega\Delta l_{n^+}}Q_{(m^+n^+)}+\sum_n\left(\Delta l_{n^-}\right)\frac{-I_{(n)}}{j\omega\Delta l_{n^-}}Q_{(m^+n^-)}]$$

$$\phi_{(m^-)}=\frac{1}{\varepsilon}[\sum_n\left(\Delta l_{n^+}\right)\frac{I_{(n)}}{j\omega\Delta l_{n^+}}Q_{(m^-n^+)}+\sum_n\left(\Delta l_{n^-}\right)\frac{-I_{(n)}}{j\omega\Delta l_{n^-}}Q_{(m^-n^-)}]$$

$$\phi_{(m^+)}-\phi_{(m^-)}=\frac{1}{j\omega\varepsilon}\sum I_{(n)}[Q_{(m^+n^+)}+Q_{(m^+n^-)}-Q_{(m^-n^+)}-Q_{(m^-n^-)}]$$

(33)

## 6．导出阻抗矩阵 $z_{(m,n)}$

$$E^i_{l(m)}=j\omega\bar{A}_{l(m)}\cdot\Delta\hat{l}_{(m)}+\frac{\phi_{(m^+)}-\phi_{(m^-)}}{\Delta l_m}$$

将式（29）和（33）代入上式，则

$$E^i_{l(m)}=j\omega\mu\sum_n I_{(n)}\Delta\bar{l}_n\cdot\Delta\hat{l}_m Q_{(mn)}$$
$$+\frac{1}{j\omega\varepsilon\Delta l_m}\sum I_{(n)}[Q_{(m^+n^+)}+Q_{(m^+n^-)}-Q_{(m^-n^+)}-Q_{(m^-n^-)}]$$ (34)

**将式（34）方程两边乘以 $\Delta l_m$，则**

$$E^i_{l(m)}\Delta l_m=\sum_{n=1}^{N}I_n\{j\omega\mu\Delta\bar{l}_n\cdot\Delta\bar{l}_m Q_{(mn)} + \frac{1}{j\omega\varepsilon}[Q_{(m^+n^+)}+Q_{(m^+n^-)}-Q_{(m^-n^+)}-Q_{(m^-n^-)}]\} \quad (35)$$

$$V_{(m)}=\sum_{n=1}^{N}I_n Z_{mn}$$

写成矩阵形式，$[V_m]=[Z_{mn}][I_n]$，矩阵求逆得

$[I_n]=[Z_{mn}]^{-1}[V_m]$ （37）

$[Z_{mn}]$求得后即可定出 $I_n$，从而

$$I_{(l)}=\sum_{n=1}^{N}I_n f_n=[\tilde{f}_n][Z_{mn}]^{-1}[V_m] \quad (38)$$

阻抗矩阵 $Z_{mn}$ 只取决于线天线的几何形状

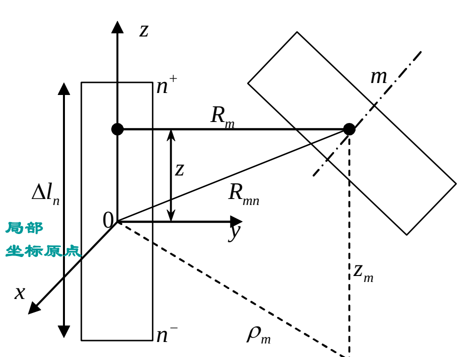


图 3.8 几何坐标关系

令 $E^i_{l(m)}\Delta l=V^i_{(m)}$ ，为激励阵

$$Z_{mn}=j\omega\mu\Delta\bar{l}_n\cdot\Delta\bar{l}_m Q_{(mn)} + \frac{1}{j\omega\varepsilon}[Q_{(m^+n^+)}+Q_{(m^+n^-)}-Q_{(m^-n^+)}-Q_{(m^-n^-)}] \quad (36)$$

$Z_{mn}$ 为阻抗阵，则

## 7. $Z_{mn}$ 求解

**$[Z_{mn}]$中 $Q_{(mn)}$ 和 $Q_{(m^\pm n^\mp)}$ 求得后，$[Z_{mn}]$可解。图 3.8 给出 n 段和 m 段在几何坐标的关系，以 n 段中点作局部坐标原点**

$$R_m=\sqrt{\rho_m^2+(z-z_m)^2}$$

$$R_{mn}=\sqrt{\rho_m^2+z_m^{\ 2}}$$

$$Q_{(m,n)}=\frac{1}{4\pi\Delta l_n}\int_{\Delta l_n}\frac{e^{-jkR_m}}{4\pi R_m}dl$$

由于 $\Delta l_n$ 很小，且当 **m** 段与 **n** 段相隔较远时，

$R_m >> \Delta l_n$，故可使 $R_m \approx R_{mn}$，则

$$Q_{(m,n)} = \frac{1}{4\pi\Delta l_n}\frac{e^{-jkR_{mn}}}{R_{mn}}\int_{n^-}^{n^+} dz = \frac{1}{4\pi}\frac{e^{-jk\sqrt{\rho_m^2+z_m^2}}}{\sqrt{\rho_m^2+z_m^2}}$$

上式在 $m \neq n$ 且 **m,n** 相距较近时，不准确，有一定残留误差，$m \neq n$ 时之 $Q_{(m^\pm n^\mp)}$ 也可仿 $Q_{(mn)}$ 方法求之。

当 **m=n** 时

$$Q_{(m,n)} = \frac{1}{4\pi\Delta l_n}\int_{n^-}^{n^+}\frac{e^{-jkR_m}}{R_m}dz$$

此时应计及导线周界面上之点对 **m** 点之贡献。

此时 $R_m = \sqrt{\rho_m^2+(z-z_m)^2} = \sqrt{a^2+z^2}$

此时，Rm是z的函数，利用技术展开近似计算。

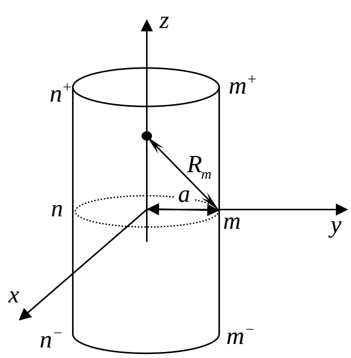


图 3.9 m=n 时的几何关系

将 $e^{-j\omega R_m}$ 展开写成麦克劳林级数，取前两项(由于 m 点与 n 点重合，所以 $R_{mn}\to 0$)。

$$e^{-jkR_m} = 1 - jkR_m - \frac{k^2R_m^2}{2} - \cdots$$

$$Q_{mn} = \frac{1}{4\pi\Delta l_n}\int_{\Delta l_n}\left[\frac{1}{R_m} - jk\right]dz$$

$$= \frac{1}{4\pi\Delta l_n}\int_{-\frac{\Delta l_n}{2}}^{\frac{\Delta l_n}{2}}\frac{dz}{\sqrt{a^2+z^2}} - \frac{jk}{4\pi}$$

$$= \frac{1}{4\pi\Delta l_n}\left[2\ln\left(\frac{\Delta l_n}{a}\right)\right] - \frac{jk}{4\pi} = \frac{1}{2\pi\Delta l_n}\ln\left(\frac{\Delta l_n}{a}\right) - \frac{jk}{4\pi} \quad (39)$$

$Q_{(m^\pm n^\mp)}$ 可照此类推求得,将 $Q_{(mn)}$，$Q_{(m^\pm n^\mp)}$ 代入（36）式可得 $[Z_{mn}]$。

## 8. 线天线和线散射体

众所周知，一根导线在其上一点或多点处以集中电压源来激励，就构成线天线，若导线中第 i 个区间被激励，则称为单线单馈:

$$[V_m] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ V_i \end{bmatrix}$$

由[ $V_m$ ]引起之电流

$$I_{(l)}=[\tilde{f}_n][Z_{mn}]^{-1}[V_m]$$

定义

$[I_n]=[Y_{mn}][V_m]$ (40)

其中$[Y_{mn}]=[Z_{mn}]^{-1}$为导纳矩阵。导纳矩阵中 $Y_{ii}$ 为导线在第 i 区间馈电时的输入导纳; $Y_{ij}$ 为导线在第 i 区间与 j 区间的转移导纳。

单线多馈时

$$[V_m]=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ V_i\\ \vdots\\ V_j\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$$

对线散射体,指的是入射场 $\bar{E}^i$ 激励下的散射场求解,图 3.10 为线散射体在平面波入射场激励下的几何图

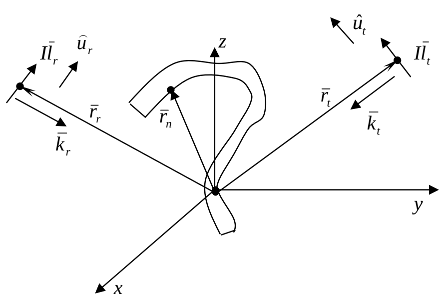


图 3.10 线散射体散射关系图

电流元 $I\bar{l}_t$ 为发射点处之电流元， $I\bar{l}_r$ 为接收点处的电流元，令 $I\bar{l}_t$ 在线散射体远区，其在散射体处产生一单位平面波，则

$\bar{E}^t=\hat{u}_t e^{-j\bar{k}_t\bullet\bar{r}_n}$， $\bar{r}_n$ 为“源点”处之矢径

$\hat{u}_t$ :发射波极化方向单位矢

$\hat{u}_r$ :接收点极化方向单位矢

平面波入射到每个 $\Delta l_n$ 上的激励电压为

$$[V^t]=\begin{bmatrix}\bar{E}_1^t\cdot\Delta\bar{l}_1\\ \bar{E}_2^t\cdot\Delta\bar{l}_2\\ \vdots\\ \bar{E}_N^t\cdot\Delta\bar{l}_N\end{bmatrix}$$

因此，线散射体上电流分布

$$[I_n]=[Z_{mn}]^{-1}[V^t]$$

The end !