

第5章 时域有限差分法(1)

计算电磁学—时域有限差分法 (FDTD)

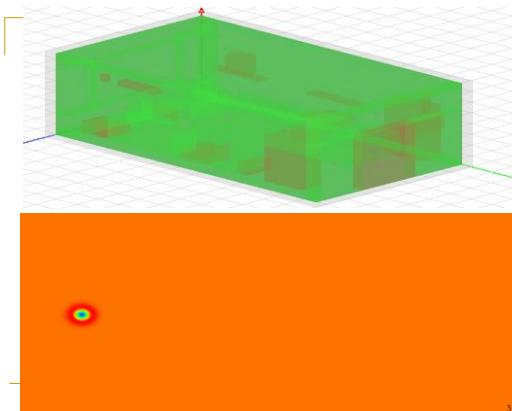
张洪欣
电子工程学院

主要内容

- 一、 Maxwell偏微分方程的离散问题
- 二、 Yee元胞
- 三、 FDTD差分格式
- 四、 跳跃格式
- 五、 FDTD稳定性和数值色散
- 六、 FDTD截断边界条件
- 七、 FDTD激励源
- 八、 一维仿真实例
- 九、 二维仿真实例

1

2



3

FDTD介绍

- 时域有限差分法 (Finite-Difference Time-Domain, FDTD) 是直接离散时域 Maxwell 偏微分方程组的方法。
- 计算电磁学领域的时域有限差分法起源于 20 世纪 60 年代美籍华人 K.S.Yee 提出 Yee 离散格式。
- K. S. Yee Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media [K. S. Yee, IEEE Trans. Antennas Propagat. Page(s): 302-307, 1966, Volume: AP-14]
- FDTD 方法提出之后，随着计算技术，特别是电子计算机技术的发展，FDTD 方法得到了长足的发展，在电磁学，电子学，光学等领域都得到了广泛的应用

4

有限差分法

- 为求解由偏微分方程定解问题所构造的数学模型，有限差分法是将定解区域（场区）离散化为网格离散节点的集合。
- 并以各离散点上函数的差商来近似该点的偏导数，使待求的偏微分方程定解问题转化为一组相应的差分方程

5

时域有限差分法的特点

(1) 直接时域计算。

时域有限差分法直接把含时间变量的 Maxwell 旋度方程在 Yee 氏网格空间中转换为差分方程，直接反映电磁波的时域特性。

能直接给出非常丰富的电磁场问题的时域信息。如果需要频域信息，则只需对时域信息进行 Fourier 变换。也是一种频域分析方法。

为获得宽频带的信息，只需在宽频谱的脉冲激励下进行一次计算。

6



时域和频域的麦克斯韦方程

时域

频域

$$\begin{cases} \nabla \times \bar{E} = -\mu \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} \\ \nabla \times \bar{H} = \bar{J} + \varepsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}, \quad \bar{J} = \sigma \bar{E} \\ \nabla \cdot \bar{E} = \rho / \varepsilon \\ \nabla \cdot \bar{B} = 0 \end{cases}$$

频域麦克斯韦方程只适用于正弦稳态时变电磁场

(2) 广泛的适用性。

直接利用 Maxwell 方程——具有最广泛的适用性。

媒质的非均匀性、各向异性、色散特性和非线性等均能很容易地进行精确模拟。

任何问题只要能正确地对源和结构进行模拟，时域有限差分法就能够给出正确的解答；不管是散射、辐射、传输、透入或吸收中的哪一种，也不论是瞬态问题还是稳态问题。

7

8

计算电磁学方法的比较

- 低频方法：MoM、FEM，谐振点以下的问题；
- 中频方法：FDTD，第一谐振点附近4个量级；
- 高频：GTD几何绕射，远高于谐振点的问题；
- 混合方法：例如，GTD+FDTD
- FDTD最适于分析瞬态响应问题。
- FDTD用于分析低频响应问题时计算时间很长，例如电力线传输；而矩量法在分析高响应时往往误差过大，例如封闭金属体内接近谐振点问题，对于低频响应问题则存在优势。

9

10

Maxwell方程组

- 各分量组成的6个方程

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right)$$

- 场分量是时间、空间的四个变量函数。 $u(x, y, z, t)$
- 各场分量关于时间、空间的一阶偏导的方程组，并且各场量相互嵌套。

11

离散取样

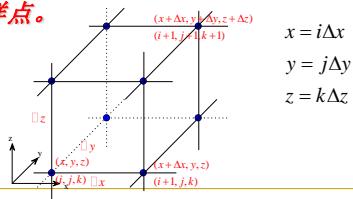
- 根据有限差分法，对包含时间t、空间(x,y,z)的场分量偏导数采用中心差分法，进行差分离散。首先对连续场量进行离散，包含时间离散和空间离散。

- 时间离散：假设在时间轴上均匀离散，离散的时间步长为 Δt ，用字符n分别表示时间 $n\Delta t$ 的时刻标示。用 u^n 上标时间取样点。

12

离散取样

- 空间离散：假设在各方向上均匀离散，网格步长 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ ，用字符 i, j, k 分别表示 x, y, z 方向上的网格标示。这样连续的空间 (x, y, z) 离散为用 (i, j, k) 表示的 离散空间点——空间取样点。



13

场量时空离散

- 场量 $u(x, y, z, t)$ 的时空离散

$$u(x, y, z, t) = u(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t)$$

- 通常表示为

$$u(x, y, z, t)|_{i,j,k}^n = u^n(i, j, k)$$

- 在一定体积内和一段时间上对连续电磁场的数据离散取样。

14

场量偏导的中心差分

- 场量 $u(x, y, z, t)$ 对空间一阶偏导的差分格式

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial x}|_{i,j,k}^n &\approx \frac{u(i\Delta x + \Delta x/2, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t) - u(i\Delta x - \Delta x/2, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t)}{\Delta x} \\ &= \frac{u^n(i+1/2, j, k) - u^n(i-1/2, j, k)}{\Delta x} \end{aligned}$$

- 场量 $u(x, y, z, t)$ 对时间一阶偏导的差分格式

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial t}|_{i,j,k}^n &\approx \frac{u(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t + \Delta t/2) - u(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t - \Delta t/2)}{\Delta t} \\ &= \frac{u^{n+1/2}(i, j, k) - u^{n-1/2}(i, j, k)}{\Delta t} \end{aligned}$$

15

场量方程的离散问题？

- 是否可以把上面对空间、时间偏导的差分格式代入6个Maxwell偏微分方程组?????

- 6个场分量如何离散?????

$$\begin{aligned} E_x(x, y, z, t), E_y(x, y, z, t), E_z(x, y, z, t) \\ H_x(x, y, z, t), H_y(x, y, z, t), H_z(x, y, z, t) \end{aligned}$$

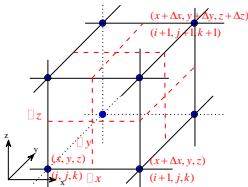
- 如果6个分量都在一个空间点、一个时间点上，有什么问题?????

16

2.Yee元胞

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right)$$

- 在一个空间点上的离散比较复杂。
- 有没有更为简便的离散方式？
- Yee元胞



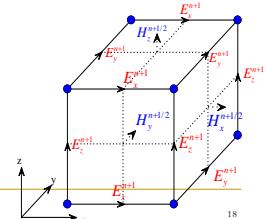
17

Yee元胞场量分布

- 6个场分量在Yee元胞的表面上进行离散。

- 在空间上，各电场分量 E_x, E_y, E_z 在Yee元胞的棱边中间取样，方向与棱边一致；各磁场分量 H_x, H_y, H_z 在Yee元胞表面的中间取样，方向垂直元胞面。

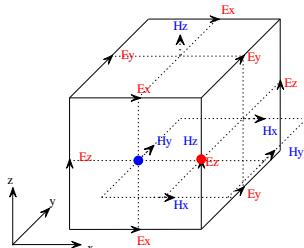
- 在时间上，电场分量在棱边上，在整数网格线上，电场分量在整时刻离散；磁场分量在元胞面中间，在半网格位置，磁场分量在半时刻离散。（或者磁场整数取样，电场半时刻取样）



18

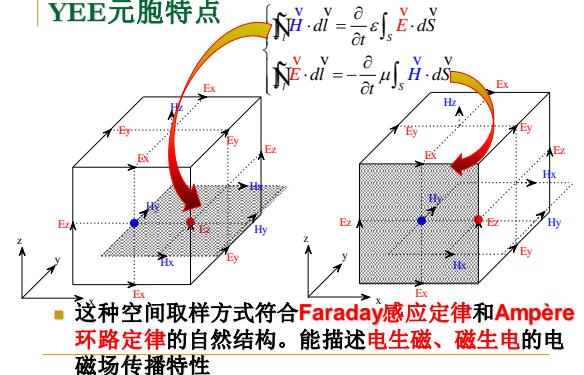
YEE元胞特点

- 每一磁场分量由四个电场分量环绕；同样，每个电场分量由四个磁场分量环绕。



19

YEE元胞特点



20

利用 Yee 式网格，用 Δx ， Δy ， Δz 分别代

表在， x, y, z 坐标方向上的网格空间步长，网
格点的空间坐标以下式简单表示，即

$$(i, j, k) = (i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z)$$

其中 i, j 和 k 均为整数，分别表示 x, y 和 z 坐标
方向的网格标号或空间步长个数，**时间步长用
 Δt 表示，以 n 表示时间步长的个数。**

21

在电磁场方程中，时变参量既与空间坐标有关，也与时间变量有关。为方便表示时间变量与空间变量之间的关系，以简化形式，令

$$F^n(i, j, k) = F(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t)$$

22

■ 电磁场量在YEE网格上的定义法：

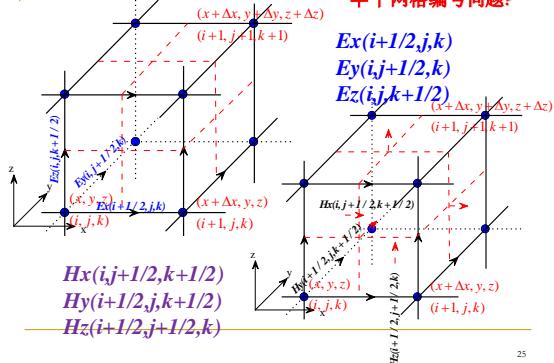
- 电场在棱上，磁场在面上：电场分量在相对应的坐标方向上少一个（例如 E_x 在 x 方向上少一个），在其它两个方向上多一个（即 E_y, E_z 在 x 方向上比 E_x 多一个）。
- 磁场分量在各个方向上对应的个数正好相反。
- 对于理想金属表面场的模拟，在面上能直接满足切向电场为零，法向磁场为零的条件。这是比较方便的。

23

- 磁场在棱上，电场在面上。磁场分量在相对应方向上少一个，在其它两个方向上多一个。
- 电场分量在各个方向上对应的个数正好相反。
- 对于理想金属表面的模拟，切向电场为零，法向磁场为零，要考虑半个空间的步长。
- 这种情况对于计算表面电流比较方便。

24

YEE元胞网格编号

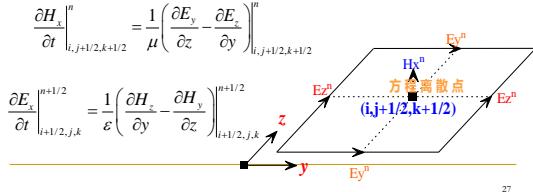


偏微分方程离散

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \right)$$

以场分量 H_x 的 Yee 元胞面为例, 偏微分方程在 YEE 元胞上的离散

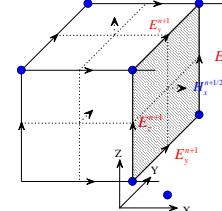
方程离散问题, 空间上以 H_x 在点 $(i,j+1/2,k+1/2)$, 时间整时刻 n 取样



3.Yee元胞的Maxwell差分格式

分析 Maxwell 的一偏微分方程

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \right)$$



26

偏微分方程离散

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} \Big|_{i,j+1/2,k+1/2}^n = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_y}{\partial z} \Big|_{i,j+1/2,k+1/2} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \Big|_{i,j+1/2,k+1/2} \right)^n$$

写成场量的离散格式

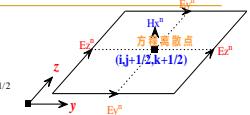
$$\frac{\partial H_x^n(i, j+1/2, k+1/2)}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_y^n(i, j+1/2, k+1/2)}{\partial z} - \frac{\partial E_z^n(i, j+1/2, k+1/2)}{\partial y} \right)$$

由中心差分法

$$\frac{\partial H_x^n(i, j+1/2, k+1/2)}{\partial t} \rightarrow \frac{H_x^{n+1/2}(i, j+1/2, k+1/2) - H_x^{n-1/2}(i, j+1/2, k+1/2)}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial E_y^n(i, j+1/2, k+1/2)}{\partial z} \rightarrow \frac{E_y^n(i, j+1/2, k+1) - E_y^n(i, j+1/2, k)}{\Delta z}$$

$$\frac{\partial E_z^n(i, j+1/2, k+1/2)}{\partial y} \rightarrow \frac{E_z^n(i, j+1, k+1/2) - E_z^n(i, j, k+1/2)}{\Delta y}$$



28

偏微分方程离散

■整理后得

$$H_x^{n+1/2}\left(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right) = H_x^{n-1/2}\left(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right) + \frac{\Delta t}{\mu} \left\{ \begin{aligned} & \frac{E_y^n\left(i, j + \frac{1}{2}, k + 1\right) - E_y^n\left(i, j + \frac{1}{2}, k\right)}{\Delta z} \\ & + \frac{E_z^n\left(i, j, k + \frac{1}{2}\right) - E_z^n\left(i, j + 1, k + \frac{1}{2}\right)}{\Delta y} \end{aligned} \right\}$$

同理, 可以推导其他偏微分方程的差分格式

$$H_y^{n+1/2}\left(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}\right) = H_y^{n-1/2}\left(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}\right)$$

$$+ \frac{\Delta t}{\mu} \left[\frac{E_z^n\left(i + 1, j, k + \frac{1}{2}\right) - E_z^n\left(i, j, k + \frac{1}{2}\right)}{\Delta x} - \frac{E_x^n\left(i + \frac{1}{2}, j, k + 1\right) - E_x^n\left(i + \frac{1}{2}, j, k\right)}{\Delta z} \right]$$

$$H_z^{n+1/2}\left(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k\right) = H_z^{n-1/2}\left(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k\right)$$

$$+ \frac{\Delta t}{\mu} \left[\frac{E_x^n\left(i + \frac{1}{2}, j + 1, k\right) - E_x^n\left(i + \frac{1}{2}, j, k\right)}{\Delta y} - \frac{E_y^n\left(i + 1, j + \frac{1}{2}, k\right) - E_y^n\left(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k\right)}{\Delta x} \right]$$

29

30

$$E_x^{n+1}(i+\frac{1}{2}, j, k) = E_x^n(i+\frac{1}{2}, j, k)$$

$$+ \frac{\Delta t}{\varepsilon} \left[\frac{H_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - H_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k)}{\Delta y} - \frac{H_y^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}) - H_y^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k-\frac{1}{2})}{\Delta z} \right]$$

$$E_y^{n+1}(i, j+\frac{1}{2}, k) = E_y^n(i, j+\frac{1}{2}, k)$$

$$+ \frac{\Delta t}{\varepsilon} \left[\frac{H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) - H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2})}{\Delta z} - \frac{H_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - H_z^{n+\frac{1}{2}}(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta x} \right]$$

$$E_z^{n+1}(i, j, k+\frac{1}{2}) = E_z^n(i, j, k+\frac{1}{2})$$

$$+ \frac{\Delta t}{\varepsilon} \left[\frac{H_y^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}) - H_y^{n+\frac{1}{2}}(i-\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2})}{\Delta x} - \frac{H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) - H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2})}{\Delta y} \right]$$

31

5.2 有耗媒质麦克斯韦方程的差分格式

■ 假定媒质为线性，各向同性，有耗媒质，于是无源区内 Maxwell 方程组中的两个旋度方程为：

$$\nabla \times \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \sigma \vec{E}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \sigma_m \vec{H}$$

式中 ε 为介电常数 (F/m)； μ 为磁导率 (H/m)； σ 为电导率； σ_m 为等效磁导率，其引入是为使方程具有对称性。

32

■ 六个分量所满足的方程

$$\frac{\partial Ex}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \sigma E_x \right) \quad \frac{\partial Hx}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} - \sigma_m H_x \right)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial Hx}{\partial z} - \frac{\partial Hz}{\partial x} - \sigma E_y \right) \quad \frac{\partial Hy}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial Ez}{\partial x} - \frac{\partial Ex}{\partial z} - \sigma_m H_y \right)$$

$$\frac{\partial Ez}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial Hy}{\partial x} - \frac{\partial Hx}{\partial y} - \sigma E_z \right) \quad \frac{\partial Hz}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial Ex}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} - \sigma_m H_z \right)$$

33

空间场量之间相距半个步长，时间间隔半个步长给出。中心差商形式近似替代 Maxwell 旋度方程中的微商，就可获得 Yee 氏形式的差分方程。

直接写出 (n+1/2) 时间步长对 $[i, j, k]$ 空间点的 E_x 的中心差商近似

34

$$\frac{\partial Ex}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \sigma E_x \right)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} \Big|_{(i+\frac{1}{2}, j, k, n+\frac{1}{2})} \approx \frac{E_x^{n+1}(i+\frac{1}{2}, j, k) - E_x^n(i+\frac{1}{2}, j, k)}{\Delta t}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon(i, j, k)} \frac{H_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - H_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k)}{\Delta y}$$

$$- \frac{H_y^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}) - H_y^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k-\frac{1}{2})}{\Delta z} - \sigma E_x^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k)$$

35

式中包含相隔半个步长 $\frac{1}{2} \Delta t$ 的三个 E_x 值 (E_x^{n+1} , E_x^n , $E_x^{n+\frac{1}{2}}$) 这给实际编程带来不便，为此，采用如下近似：

$$E_x^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k) =$$

$$\frac{1}{2} \left[E_x^{n+1}(i+\frac{1}{2}, j, k) + E_x^n(i+\frac{1}{2}, j, k) \right]$$

36

可使仅出现 E^{n+1}_x 和 E^n_x 两个 E_x 值，为：

$$E^{n+1}_x(i+\frac{1}{2}, j, k) = \frac{1 - \frac{\sigma(i, j, k)\Delta t}{2\varepsilon(i, j, k)}}{1 + \frac{\sigma(i, j, k)\Delta t}{2\varepsilon(i, j, k)}} \cdot E^n_x(i+\frac{1}{2}, j, k) +$$

$$\frac{\frac{\Delta t}{\varepsilon(i, j, k)} \frac{g}{1 + \frac{\sigma(i, j, k)\Delta t}{2\varepsilon(i, j, k)}} g}{\left[\frac{H_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - H_z^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k)}{\Delta y} - \frac{H_y^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}) - H_y^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k-\frac{1}{2})}{\Delta z} \right]} \quad 37$$

$$H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) =$$

$$1 - \frac{\sigma_m(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2})\Delta t}{2\mu(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2})} H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) +$$

$$1 + \frac{\sigma_m(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2})\Delta t}{2\mu(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2})} \frac{g}{\frac{\Delta t}{\mu(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2})} \frac{g}{1 + \frac{\sigma_m(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2})\Delta t}{2\mu(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2})}}} \quad 38$$

$$\left[\frac{E_y^n(i, j+\frac{1}{2}, k+1) - E_y^n(i, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta z} - \frac{E_z^n(i, j+1, k+\frac{1}{2}) - E_z^n(i, j, k+\frac{1}{2})}{\Delta y} \right]$$

任一网格点上的电场分量只与其上一个时间步的值及周围围绕它的磁场分量有关；同样，任一网格点上的磁场分量也只与其上一个时间步的值及周围围绕它的电场分量有关。

ε, μ, σ 和 σ_m 均为空间坐标的函数。可以设置为非均匀的或各向异性。
有限差分在处理各向异性方面是有效的和方便的。

39

40

1. 均匀立方体网格中的差分方程

以上方程组是在网格空间步长 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ 可取不同值时的一般情况。通常，在无特殊要求情况下，常把三个空间步长取成相等，构成为均匀立方体网格，此时令

$$\Delta x = \Delta y = \Delta z = \Delta s$$

式中的系数可简化为：

$$CA(i, j, k) = \frac{1 - \frac{\sigma(i, j, k)\Delta t}{2\varepsilon(i, j, k)}}{1 + \frac{\sigma(i, j, k)\Delta t}{2\varepsilon(i, j, k)}}$$

$$CB(i, j, k) = \frac{\Delta t}{\varepsilon(i, j, k)\Delta s} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\sigma(i, j, k)\Delta t}{2\varepsilon(i, j, k)}}$$

41

42

$$DA(i, j, k) = \frac{1 - \frac{\sigma_m(i, j, k)\Delta t}{2\mu(i, j, k)}}{1 + \frac{\sigma_m(i, j, k)\Delta t}{2\mu(i, j, k)}}$$

$$DB(i, j, k) = \frac{\Delta t}{\mu(i, j, k)\Delta s} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\sigma_m(i, j, k)\Delta t}{2\mu(i, j, k)}}$$

43

使用这些简化系数后：

$$E^{n+1}_x(i + \frac{1}{2}, j, k) = CA(i + \frac{1}{2}, j, k) E^n_x(i + \frac{1}{2}, j, k)$$

$$+ CB(i + \frac{1}{2}, j, k) \left[H_z^{n+1}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) - \right.$$

$$H_z^{n+1}(i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}, k) + H_y^{n+1}(i + \frac{1}{2}, j, k - \frac{1}{2}) -$$

$$\left. H_y^{n+1}(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) \right]$$

44

$$H_x^{n+1}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) = \\ DA(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) H_x^{n-1}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) + \\ DB(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) [E_y^n(i, j + \frac{1}{2}, k + 1) - E_y^n(i, j + \frac{1}{2}, k) + \\ E_z^n(i, j, k + \frac{1}{2}) - E_z^n(i, j + 1, k + \frac{1}{2})]$$

45

若网格单元为 N , 则场量方程中每一分量和媒质空间特征均须在存储单元存储, 它们各为 N 个, 故存储空间与 N 成正比。

由于每一时间步总的计算时间为每个网格点计算时间乘以网格数 N , 所以时域有限差分法所需的 CPU 时间也与 N 成正比。

46

当计算空间中的媒质是分区均匀时, 则媒质参数的表示方法还可进一步简化。如大多数实际电磁工程问题, 尤其是电磁散射问题, 计算空间不包括磁性媒质时, 其 $\mu = \mu_0$, $\sigma_m = 0$, 可进一步简化, 从而使所需要的存储空间进一步减小。

47

2. FDTD的蛙跳计算

■ Maxwell两个矢量方程

$$\nabla \times \vec{E}(x, y, z, t) = -\frac{\partial \vec{B}(x, y, z, t)}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{H}(x, y, z, t) = \frac{\partial \vec{D}(x, y, z, t)}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{E}^n(x, y, z) \Big|^{n+1} = -\mu \frac{\vec{H}^{n+1/2}(x, y, z) - \vec{H}^{n-1/2}(x, y, z)}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \vec{H}^{n+1/2}(x, y, z) = \vec{H}^{n-1/2}(x, y, z) - \frac{\Delta t}{\mu} \nabla \times \vec{E}^n(x, y, z)$$

$$\nabla \times \vec{H}^{n+1/2}(x, y, z) \Big|^{n+1/2} = \epsilon \frac{\vec{E}^{n+1}(x, y, z) - \vec{E}^n(x, y, z)}{\Delta t}$$

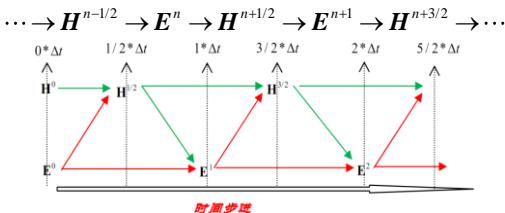
$$\Rightarrow \vec{E}^{n+1}(x, y, z) = \vec{E}^n(x, y, z) + \frac{\Delta t}{\epsilon} \nabla \times \vec{H}^{n+1/2}(x, y, z)$$

48

蛙跳格式

$$\begin{aligned} H^{n+1/2}(x, y, z) &= H^{n-1/2}(x, y, z) - \frac{\Delta t}{\mu} \nabla \times E^n(x, y, z) \\ E^{n+1}(x, y, z) &= E^n(x, y, z) + \frac{\Delta t}{\epsilon} \nabla \times H^{n+1/2}(x, y, z) \end{aligned}$$

■ FDTD的电场、磁场矢量是相差半个时间步长，两个方程式显示格式。



■ FDTD步进计算过程如同青蛙上下跳跃向前进的过程

49

§ 5.3 FDTD的稳定性

1. 影响FDTD的因素

- 单元尺寸、时间步长、入射场、散射体结构、场计算、吸收边界条件、资源等；精度0.1dB–120dB
- 由空间步长确定单元尺寸；粗网格、中网格、细网格。
- 由稳定性条件决定时间步长；
- 边界条件：Mur, PML
- 时间步数足够多，得到稳定的周期解。
- 估算存储空间和总花费。

50

$$\begin{aligned} E^{n+1}(x, y, z) &= E^n(x, y, z) + \frac{\Delta t}{\epsilon} \nabla \times H^{n+1/2}(x, y, z) \\ H^{n+1/2}(x, y, z) &= H^{n-1/2}(x, y, z) - \frac{\Delta t}{\mu} \nabla \times E^n(x, y, z) \end{aligned}$$

- FDTD方程组是时间离散上的显式格式，必须要满足一定的稳定条件才能计算，否则会发散
- 如何分析时间偏导差分离散的稳定性？ $\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u^{n+1/2} - u^{n-1/2}}{\Delta t}$
- 任意场量 $u(x, y, z, t)$ 在时域上可以分解为各时谐场的叠加，因此这里考虑时谐场情形

$$u(x, y, z, t) = U_0(x, y, z) \exp(j\omega t)$$

- 一阶偏导 $\frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial t} = j\omega u(x, y, z, t)$

51

2. Courant稳定条件 $\frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial t} = j\omega u(x, y, z, t)$

■ 中心差分离散 $\frac{u^{n+1/2} - u^{n-1/2}}{\Delta t} = j\omega u^n$

■ 定义数值时间增长因子 q $q = \frac{u^{n+1/2}}{u^n} = \frac{u^n}{u^{n-1/2}}$

■ 得到时间增长因子的方程

$$q^2 - j\omega \Delta t q - 1 = 0 \quad q = \frac{j\omega \Delta t}{2} \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right)^2}$$

52

Courant稳定条件

$$q = \frac{j\omega \Delta t}{2} \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right)^2}$$

■ 增长因子 q 满足 $|q| < 1$,那么时间步进不会发散

$$\frac{\omega \Delta t}{2} \leq 1$$

$$\nabla^2 u - \mu \epsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

一个场量对时间离散要满足的稳定性要求

■ 对于Maxwell方程组，包含6个场分量，如何分析稳定性？

■ 通过等价的频域波动方程来稳定性分析

$$\frac{\partial^2 u(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, z)}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} u(x, y, z) = 0$$

■ 平面波解

$$u(x, y, z, t) = U_0 \exp\left(-j(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)\right)$$

53

Courant稳定条件

■ 中心差分离散 $\frac{\partial^2 u(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, z)}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} u(x, y, z) = 0$

$$\frac{u(x + \Delta x, y, z) - 2u(x, y, z) + u(x - \Delta x, y, z)}{(\Delta x)^2} +$$

$$\frac{u(x, y + \Delta y, z) - 2u(x, y, z) + u(x, y - \Delta y, z)}{(\Delta y)^2} +$$

$$\frac{u(x, y, z + \Delta z) - 2u(x, y, z) + u(x, y, z - \Delta z)}{(\Delta z)^2} + \frac{\omega^2}{c^2} u(x, y, z) = 0$$

■ 平面波代入上式

$$u(x, y, z, t) = U_0 \exp\left(-j(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)\right)$$

$$\frac{u(x + \Delta x, y, z) - 2u(x, y, z) + u(x - \Delta x, y, z)}{(\Delta x)^2} + \frac{\exp(jk_x \Delta x) - 2 + \exp(-jk_x \Delta x)}{(\Delta x)^2} u(x, y, z)$$

$$= \frac{e^{\frac{jk_x \Delta x}{2}} (e^{\frac{jk_x \Delta x}{2}} - e^{-\frac{jk_x \Delta x}{2}}) - e^{-\frac{jk_x \Delta x}{2}} (e^{\frac{jk_x \Delta x}{2}} - e^{-\frac{jk_x \Delta x}{2}})}{(\Delta x)^2} u(x, y, z) = -\frac{\sin^2(k_x \Delta x / 2)}{(\Delta x)^2} u(x, y, z)$$

54

Courant稳定条件

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2$$

得到 $\frac{\sin^2(k_x \Delta x / 2)}{(\Delta x / 2)^2} + \frac{\sin^2(k_y \Delta y / 2)}{(\Delta y / 2)^2} + \frac{\sin^2(k_z \Delta z / 2)}{(\Delta z / 2)^2} - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = 0$

波动方程差分离散后的传播常数 $k(x, y, z)$ 与频率 ω 之间，即 **数值色散关系**。

当 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ 为零时， $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2$

由前面推导的时谐场量时间离散要求 $\frac{\omega \Delta t}{2} \leq 1$

色散关系不等式（上式两侧同乘 $\left(\frac{c \Delta t}{2}\right)^2$ ）

$$\left(\frac{c \Delta t}{2}\right)^2 \left[\frac{\sin^2(k_x \Delta x / 2)}{(\Delta x / 2)^2} + \frac{\sin^2(k_y \Delta y / 2)}{(\Delta y / 2)^2} + \frac{\sin^2(k_z \Delta z / 2)}{(\Delta z / 2)^2} \right] = \left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right)^2 \leq 1$$

55

Courant稳定条件

$$\left(\frac{c \Delta t}{2}\right)^2 \left\{ \frac{\sin^2(k_x \Delta x / 2)}{(\Delta x / 2)^2} + \frac{\sin^2(k_y \Delta y / 2)}{(\Delta y / 2)^2} + \frac{\sin^2(k_z \Delta z / 2)}{(\Delta z / 2)^2} \right\} = \left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right)^2 \leq 1$$

式中 $\because \sin^2(v) \leq 1$

$$\frac{\sin^2(k_x \Delta x / 2)}{(\Delta x / 2)^2} + \frac{\sin^2(k_y \Delta y / 2)}{(\Delta y / 2)^2} + \frac{\sin^2(k_z \Delta z / 2)}{(\Delta z / 2)^2} < \frac{1}{(\Delta x / 2)^2} + \frac{1}{(\Delta y / 2)^2} + \frac{1}{(\Delta z / 2)^2}$$

得 $(c \Delta t)^2 \left\{ \frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2} \right\} \leq 1$

即时间、空间步长的稳定条件，**Courant稳定条件**

$$c \Delta t \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2}}} \quad \text{---} \quad \Delta t \leq \frac{1}{v \sqrt{\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2}}}$$

56

Courant稳定条件

$$c \Delta t \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2}}}$$

假设均匀网格，即

$$\Delta x = \Delta y = \Delta z = \delta$$

三维FDTD

$$c \Delta t \leq \frac{\delta}{\sqrt{3}}$$

二维FDTD

$$c \Delta t \leq \frac{\delta}{\sqrt{2}}$$

一维FDTD

$$c \Delta t \leq \delta$$

57

FDTD空间步长要求

Courant条件，是对FDTD离散的**时间步长与空间步长**之间的关系要求，那么**空间步长**如何确定？

空间步长反映场量在空间上**离散取样**的情况，由取样定理可知，一个波长必须取样**两个点以上**才能还原信号，空间离散越紧密，越能还原信号。对于电磁场量离散满足**什么样的取样**？

还是用波动方程推导的**色散关系**进行分析

$$\frac{\sin^2(k_x \Delta x / 2)}{(\Delta x / 2)^2} + \frac{\sin^2(k_y \Delta y / 2)}{(\Delta y / 2)^2} + \frac{\sin^2(k_z \Delta z / 2)}{(\Delta z / 2)^2} - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = 0$$

讨论一维情况

$$\frac{\sin^2(k \Delta x / 2)}{(\Delta x / 2)^2} - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = 0 \quad \frac{\sin(k \Delta x / 2)}{(\Delta x / 2)} = \frac{\omega}{c}$$

58

FDTD空间步长要求

$$\frac{\sin(k \Delta x / 2)}{(\Delta x / 2)} = \frac{\omega}{c}$$

当 $\Delta x \rightarrow 0$ $k = \omega / c$

写为相速形式 $v_p = \frac{\omega}{k} = c \left| \frac{\sin(k \Delta x / 2)}{k \Delta x / 2} \right|$

当 $\frac{\sin(k \Delta x / 2)}{k \Delta x / 2} \approx 1$

也就是 $\frac{k \Delta x}{2} \leq \frac{\pi}{12} \quad k = 2\pi / \lambda$

把代入上式，得 $\Delta x \leq \frac{\lambda}{12}$

对于宽带时域信号，满足信号**最小波长**(fmax)，那么其它小于最大频率的波也都满足，并且**离散精度更高**。

59

3. 数值色散

物理色散：非线性媒质中速度随波长的变化。

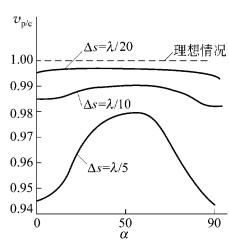
数值色散：Yee网格抽样的间断性，使得不同频率的电磁波在网格传播中表现不同的速度，并且与传播方向有关。

量化时各波列采用固定的步长，有的波长为整数倍关系，有的不是，则造成跳跃式传播，在速度和方向上都造成误差；

Yee网格在网格节点处才有意义，与物理空间相比存在缺陷，只能近似表达物理规律和过程；

60

■ 数值色散规律

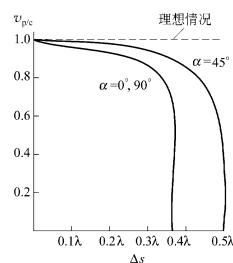


$\Delta s = \lambda/5$ 时，比要求的标准网格大；

$\Delta s = \lambda/10$ 时，基本满足要求的标准网格；

$\Delta s = \lambda/20$ 时，比要求的标准网格细；

61



- 相速度最大值出现在45度，最小值出现在0和90度；
- 当网格空间步长 Δs 减小时，网格中的速度与实际物理空间的速度偏差减小；
- 相速度随空间步长的增加而减小，直到为零；
- 不同的入射角，相速度下降对应的 Δs 不同；
- 在45度，急剧下降的临界步长值最大。
- 一定频率、入射角的平面波在Yee网格中有一空间步长极限，超过该极限电磁波将不能在此空间传播。
- 一个给定的Yee网格相当于一个低通滤波器，给宽频脉冲的计算带来困难。高频分量被截至。取 $\Delta s = \lambda/10$
- 非均匀网格还会导致折射效应。

62

■ 获得理想色散关系的条件

$$\frac{\omega^2}{v^2} = K_x^2 + K_y^2 + K_z^2$$

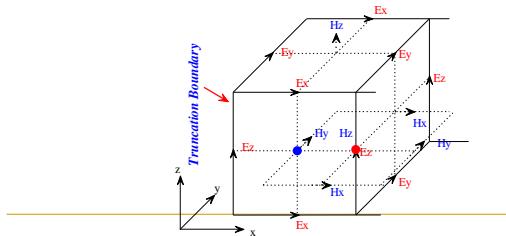
(1) : $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \delta$

(2) : 波沿网格的对角线方向传播。

63

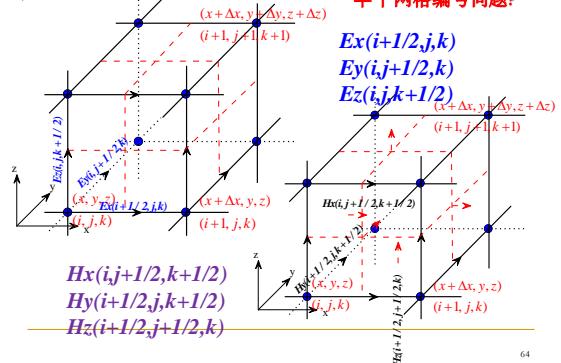
4.FDTD的截断边界条件

- Maxwell方程组在连续空间上离散成一个个Yee元胞，但实际上，仿真的电磁空间不可能把整个空间离散出来，这样计算机无法计算。因此在仿真空间引入截断边界来减少计算资源，这就是截断边界条件。



65

YEE元胞网格编号



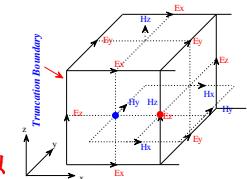
64

PEC边界条件

- PEC边界：边界上的切向电场分量设置为零
- 对于 X_{min} 截断边界

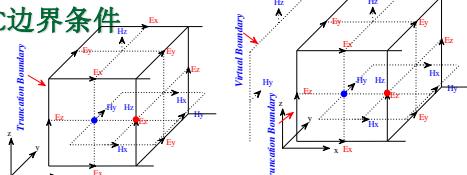
$$\begin{cases} E_y^n(l, j+1/2, k) = 0 \\ E_z^n(l, j, k+1/2) = 0 \end{cases}$$

- 其他方向的PEC边界相似



66

PMC边界条件



■ **PMC边界:** 边界上的切向磁场分量设置为零。但截断边界上没有切向磁场分量, 如何处理?

■ 虚拟磁边界。

■ 对于Xmin截断边界

$$\begin{cases} H_y^{n+1/2}(-1/2, j, k+1/2) = -H_y^{n+1/2}(1/2, j, k+1/2) \\ H_z^n(-1/2, j+1/2, k) = -H_z^n(1/2, j+1/2, k) \end{cases}$$

67

5.FDTD的激励源

■ FDTD是对时域电磁波在空间中传输情况进行仿真的数值算法, 能直观地仿真电磁波的时空信息。**有源的激励**才能有电磁波的传输。

1、时谐场源

$$U_{inc}(t) = \begin{cases} A \sin(\omega t) & t \geq 0 \\ 0 & \text{other} \end{cases}$$

68

激励源

■ 2、脉冲源

■ 高斯脉冲

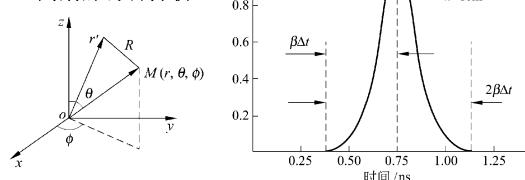
$$U_{inc}(t) = \exp\left(-\frac{4\pi(t-t_0)^2}{\tau^2}\right) \quad \tau = 2/f_{\max}, t_0 = \tau$$

■ 升余弦脉冲

$$U_{inc}(t) = \begin{cases} 0.5(1-\cos(2\pi t/\tau)) & 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & \text{other} \end{cases} \quad \tau = 2/f_{\max}, \text{first zero}$$

69

高斯脉冲源分析:



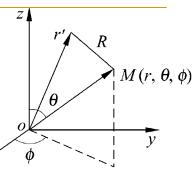
$$\text{球坐标系下: } E_x(I, J, K)^n = E_x \exp(-\alpha(\tau - \beta\Delta t)^2)$$

$$\tau = n\Delta t + \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}}{c} + \frac{R}{c}$$

在计算机中, 高斯脉冲源受到截断。需要确定 β 、 α 、 τ 以保证带宽。

70

$$\begin{cases} E_x = E_\theta \cos\theta \cos\phi - E_\phi \sin\phi \\ E_y = E_\theta \cos\theta \sin\phi - E_\phi \cos\phi \\ E_z = -E_\phi \sin\theta \\ H_x = (E_\theta \sin\phi + E_\phi \cos\theta \cos\phi)/\eta \\ H_y = (-E_\theta \cos\phi + E_\phi \cos\theta \sin\phi)/\eta \\ H_z = (-E_\phi \sin\phi)/\eta \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} &= ((I-1)+0.5)\Delta x \cos\phi \sin\theta + \\ &(J-1)\Delta y \sin\phi \sin\theta + (K-1)\Delta z \cos\theta \end{aligned}$$

71

$$\begin{aligned} E_x^i(I, J, K)^n &= E_x \exp(-\alpha(\tau - \beta\Delta t)^2) \\ \tau &= n\Delta t + \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}}{c} + \frac{R}{c} \end{aligned}$$

■ 首先确定 β 。 β 为从截断点到高斯脉冲峰值的时间步数。即由 $\tau=0$ 持续到 $\tau=2\beta\Delta t$, 峰值在 $\tau=\beta\Delta t$ 处。

■ 截断点: 由 $\tau=0$ 持续到 $\tau=2\beta\Delta t$ 得

$$E_x^i(I, J, K)^n = E_x \exp(-\alpha(\pm\beta\Delta t)^2)$$

选取 α , 避免引入无关的高频浪费时间。取 α 随 β 变化。

$$\alpha = [4/(\beta\Delta t)]^2$$

72

■ 截断点处

$$E_x^{[I, J, K]} = E_x \exp(-16)$$

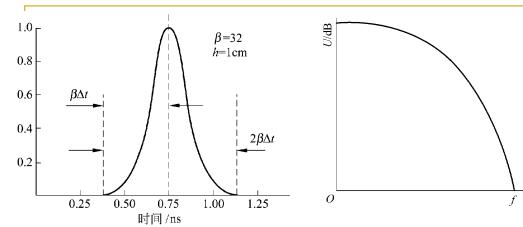
振幅衰减 -140dB

■ 信号源问题:

Yee网格的抽样和信号抽样满足频谱的要求。

例如: Yee网格 $\Delta s=1\text{cm}$, $\Delta t=1.924 \times 10^{-11}$

取 $\beta=32$, 脉冲如下:



73

当波长取 $10\Delta s, \lambda=10\text{cm}, f=3\text{G}$; $c\Delta t \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2}}}$
当波长取 $4\Delta s, \lambda=4\text{cm}, f=7.5\text{G}$; 均能满足精度要求。

当存在介质时, 速度减小, 例如 $\epsilon_r=4, f=3.0\text{G}, \Delta s$ 应取 0.5cm

74

激励源

■ 微分高斯脉冲

$$U_{inc}(t) = \frac{t-t_0}{\tau} \exp\left(-\frac{4\pi(t-t_0)^2}{\tau^2}\right)$$

■ 截断三余弦脉冲

$$U_{inc}(t) = \begin{cases} \beta(10-15\cos(\omega_1 t)+6\cos(\omega_2 t)-\cos(\omega_3 t)) & 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & \text{other} \end{cases}$$

$\omega_i = 2\pi i / \tau, \tau = 3/f_{\max}$

75

激励源

■ 双指指数脉冲

$$U_{inc}(t) = A(\exp(-\alpha t) - \exp(-\beta t))$$

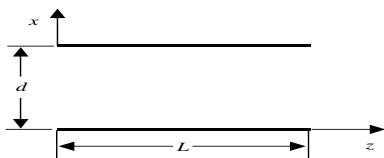
$$A_0 = 5.25e4V/m, \alpha = 4e6s^{-1}, \beta = 4.76e8s^{-1}$$

Bell波形, 应用在核电脉冲和雷电脉冲的研究

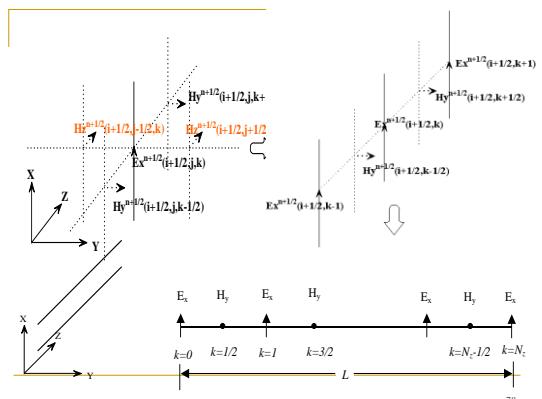
76

6.一维FDTD仿真

■ 仿真平行板传输线主模TEM



77



78

方程简化

$$E_x^{n+1}\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right)=E_x^n\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right)+\frac{\Delta t}{\varepsilon}\left\{\begin{array}{c}H_z^{\frac{n+1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k\right)-H_z^{\frac{n+1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k\right) \\ \Delta y \\ H_y^{\frac{n+1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j, k-\frac{1}{2}\right)-H_y^{\frac{n+1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}\right) \\ +\frac{\Delta z}{\Delta z}\end{array}\right\}$$

$$\rightarrow E_x^{n+1}\left(i+\frac{1}{2}, k\right)=E_x^n\left(i+\frac{1}{2}, k\right)+\frac{\Delta t}{\varepsilon} H_y^{\frac{n+1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}\right)-H_y^{\frac{n+1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}\right)$$

$$\rightarrow E_x^{n+1}(k)=E_x^n(k)+\frac{\Delta t}{\varepsilon} \frac{H_y^{\frac{n+1}{2}}\left(k-\frac{1}{2}\right)-H_y^{\frac{n+1}{2}}\left(k+\frac{1}{2}\right)}{\Delta z}$$

$$\text { 同理: } H_y^{\frac{n+1}{2}}\left(k+\frac{1}{2}\right)=H_y^{\frac{n+1}{2}}\left(k+\frac{1}{2}\right)+\frac{\Delta t}{\mu} \frac{E_x^n(k)-E_x^n(k+1)}{\Delta z}$$

79

参数设置

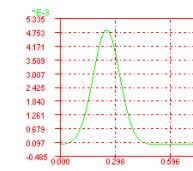
■ 结构参数

$$d=0.18m, L=6m$$

■ 激励源参数 (高斯源)

$$F(t)=\exp[-(t-t_0)^2/T^2]$$

$$f_{\max}=\frac{1}{2T}=1GHz$$



$$T=0.5ns \quad t_0=3T$$

$$E_x(z=0,t)=F(t)$$

$$\rightarrow E_x^n(0)=F(n\Delta t)=F^n$$



仿真参数计算

$$\Delta t? \quad \Delta t \leq \frac{1}{c \sqrt{\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2}}} \Rightarrow \frac{\Delta z}{c}$$

$$\Delta z? \quad \lambda_{\min}/20 < \Delta < \lambda_{\min}/12$$

$$\lambda_{\min}? \quad f_{\max} \quad \leftarrow f_{\max} = \frac{1}{2T}$$

81

仿真参数计算

$$f_{\max}=1GHz, \rightarrow \lambda_{\min}=0.3m \rightarrow \Delta z < \lambda_{\min}/12$$

► 仿真最大频率 --> 仿真最小波长

► 数值色散的条件 --> 网格步长 -->

仿真区域网格分布

► 稳定性条件 --> 时间步长 $\Delta t \leq \frac{1}{c \sqrt{\frac{1}{(\Delta z)^2}}} = \frac{\Delta z}{c}$

$$\Delta z = \frac{\lambda_{\min}}{20} = 0.015m \quad \rightarrow \Delta t = \frac{\Delta z}{2c}$$

$$N_z = \frac{L}{\Delta z} = \frac{6}{0.015} = 400$$

82

边界设置

► 截断边界条件

1、终端短路 $E_x(z=L, t)=0, \rightarrow E_x^n(i_{\max})=0$

2、终端匹配 (吸收边界条件)

$$U^{n+1}(0)=U^n(1)+\left(\frac{c\Delta t-\Delta x}{c\Delta t+\Delta x}\right)[U^{n+1}(1)-U^n(0)]$$

$$U^{n+1}(i_{\max})=U^n(i_{\max}-1)+\left(\frac{c\Delta t-\Delta x}{c\Delta t+\Delta x}\right)[U^{n+1}(i_{\max}-1)-U^n(i_{\max})]$$

83

场量观察设置

► 观测面上点的电压波形

$$V_{ref1}(n\Delta t)=\int_0^d E_x(z=N_{ref1}\Delta z, n\Delta t)dx=d \cdot E_x(z=N_{ref1}\Delta z, n\Delta t), \\ n=0,1,2,\dots,N_t$$

$$V_{ref2}(n\Delta t)=d \times E_x(N_{ref2}), n=0,1,2,\dots,N_t$$

► 观测仿真过程中的面上电场波动情况

$$plot(E_x(0:i_{\max}))$$

84

```

Hxi[0]=ez_lowm2;
ez_lowm2=ez_lowm1;
ez_lowm1=Hxi[1];
Ezi[JE-1]=ez_higm2;
ez_higm2=ez_higm1;
ez_higm1=Ezi[JE-2];
Hxi[j]=Hxi[j]-dt/(m0*mr)*((Ezi[j+1]-Ezi[j])/dy);
Ezi[j]=(2.0*e0*er*dt*sigma)/(2.0*e0*er+dt*sigma)*Ezi[j]
-2.0*dt/(2.0*e0*er+dt*sigma)*((Hxi[j]-Hxi[j-1])/dy);

```

85

FDTD步进仿真

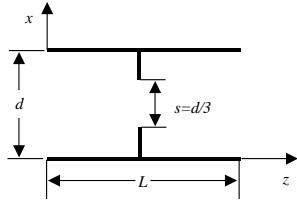
✓ FDTD 仿真步骤

- ✓ 在初始 ($n=0$) 时令所有场量为零。
- ✓ 由FDTD方程算出 $n-1/2$ 时刻所有场点的磁场 $H^{n-\frac{1}{2}}$
- ✓ 由FDTD方程算出 n 时刻所有场点的电场 E^n
- ✓ 将高斯脉冲激励加在输入口 $E_e^n(0) = F^n$
- ✓ 令金属边界上的切向电场分量为零，并在截断边界上使用截断边界条件
- ✓ 记录并输出两个观测面处的电压值 $V_{ref}(n\Delta t)$
- ✓ $n \rightarrow n+1$ 重复上一步骤，直到 ($n=N_t$) 脉冲波全部传出计算区域。

86

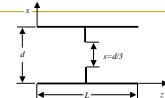
7.二维FDTD仿真

■ 具有开槽挡板的平行板传输线FDTD仿真

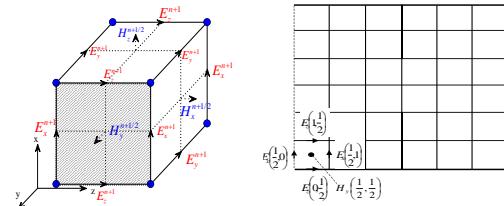


87

二维FDTD仿真



- 由于不连续性的出现，沿x方向场的均匀性遭到破坏，沿y方向Hy场的均匀性仍然保持，此时平行板传输线中的场分量有Ex, Ez, Hy



88

二维FDTD仿真

■ 三个分量Ex, Ez, Hy

$$\begin{aligned}
H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}\right) &= H_y^{n-\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}\right) + \\
&\quad \frac{\Delta t}{\mu} \left\{ \frac{E_z^n\left(i+1, j, k+\frac{1}{2}\right) - E_z^n\left(i, j, k+\frac{1}{2}\right)}{\Delta x} + \right. \\
&\quad \left. \frac{E_x^n\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right) - E_x^n\left(i+\frac{1}{2}, j, k+1\right)}{\Delta z} \right\} \\
H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}\right) &= H_y^{n-\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}\right) + \frac{\Delta t}{\mu} \left\{ \frac{E_z^n\left(i+1, k+\frac{1}{2}\right) - E_z^n\left(i, k+\frac{1}{2}\right)}{\Delta x} + \right. \\
&\quad \left. \frac{E_x^n\left(i+\frac{1}{2}, k\right) - E_x^n\left(i+\frac{1}{2}, k+1\right)}{\Delta z} \right\}
\end{aligned}$$

■ 二维FDTD仿真

■ 三个分量Ex, Ez, Hy

$$\begin{aligned}
E_x^{n+1}\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right) &= E_x^n\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right) + \\
&\quad \frac{\Delta t}{\varepsilon} \left\{ \frac{H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k\right) - H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k\right)}{\Delta y} + \right. \\
&\quad \left. \frac{H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j, k-\frac{1}{2}\right) - H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}\right)}{\Delta z} \right\} \\
E_x^{n+1}\left(i+\frac{1}{2}, k\right) &= E_x^n\left(i+\frac{1}{2}, k\right) + \\
&\quad \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta z} \left(H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}\right) - H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}\right) \right)
\end{aligned}$$

90

二维FDTD仿真

■ 三个分量 E_x, E_z, H_y

$$E_z^{n+1}\left(i, j, k + \frac{1}{2}\right) = E_z^n\left(i, j, k + \frac{1}{2}\right) + \frac{\Delta t}{\epsilon} \left(\frac{H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}\right) - H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i - \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}\right)}{\Delta x} \right)$$

$$\left(\frac{H_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right) - H_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right)}{\Delta y} \right)$$

$$E_z^{n+1}\left(i, k + \frac{1}{2}\right) = E_z^n\left(i, k + \frac{1}{2}\right) + \frac{\Delta t}{\epsilon \Delta x} \left(H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right) - H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right) \right)$$

91

二维FDTD仿真

■ 三个分量 E_x, E_z, H_y

$$H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}\right) = H_y^{n-\frac{1}{2}}\left(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}\right) + \frac{\Delta t}{\mu} \left(\frac{E_z^n\left(i + 1, j, k + \frac{1}{2}\right) - E_z^n\left(i, j, k + \frac{1}{2}\right)}{\Delta x} + \frac{E_x^n\left(i + \frac{1}{2}, j, k\right) - E_x^n\left(i + \frac{1}{2}, j, k + 1\right)}{\Delta z} \right)$$

$$H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right) = H_y^{n-\frac{1}{2}}\left(i + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right) + \frac{\Delta t}{\mu \Delta z} \left(E_x^n\left(i + \frac{1}{2}, k\right) - E_x^n\left(i + \frac{1}{2}, k + 1\right) \right)$$

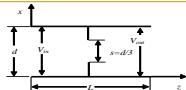
92

二维FDTD仿真

■ 网络S参数提取, 如 S_{11}, S_{21}

$S_{11}(f) = V_{ref1}^{re}(f) / V_{ref1}^{in}(f) |_{\text{短口2匹配 (ABC)}}$

$S_{21}(f) = V_{ref2}^{tr}(f) / V_{ref1}^{in}(f) |_{\text{短口2匹配 (ABC)}}$



93

■ 求二端口网络（终端匹配）的S参数

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \text{ 对称 } \begin{bmatrix} S_{11} & S_{21} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}$$

二维FDTD仿真

■ 网络S参数提取
■ 记录 $V_{ref1}^{total}(t), V_{ref2}^{total}(t)$

$$V_{ref1}^{re}(t) = V_{ref1}^{total}(t) - V_{ref1}^{in}(t) \quad V_{ref2}^{tr}(t) = V_{ref2}^{total}(t)$$

■ 频谱

$$\tilde{G}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t) e^{-j2\pi ft} dt = \sum_{n=1}^{Nt} G(n\Delta t) e^{-j2\pi f(n\Delta t)}$$

$$\Gamma(f) = S11 = V_{ref1}^{re}(f) / V_{ref1}^{in}(f) \quad T(f) = S21 = V_{ref2}^{tr}(f) / V_{ref1}^{in}(f)$$

94

作业1

- 基于Yee网格说明FDTD自然反应电生磁, 磁生电的过程。

95

作业2

- 推导6个Maxwell偏微分方程的FDTD格式。

96