计算电磁学

Computational Electromagnetism

第5章 时域有限差分法（FDTD）（二）

张洪欣
电子工程学院

- 时域Maxwell微分方程组（理想介质）

1. Maxwell偏微分方程的离散问题

- Faraday's Equation

$$\nabla\times\vec{E}(x,y,z,t)=-\frac{\partial\vec{B}(x,y,z,t)}{\partial t}$$

- Ampère's Equation

$$\nabla\times\vec{H}(x,y,z,t)=\frac{\partial\vec{D}(x,y,z,t)}{\partial t}$$

§5.5 吸收边界条件

时域有限差分法的一个重要特点是，需要在计算的全部区域建立 **Yee** 氏网格计算空间。

对辐射，散射等开放性问题，所需网格空间无限大，然而，计算机存储空间有限，因此，在实际计算中总是在某处将网格空间截断，这必然会在截断处产生非物理的电磁波反射。导致计算精度下降，必须设法消除之。

要求一种截断边界网格点处场的特殊计算方法，不仅要保证边界场计算的精度，还要消除非物理因素引起的截断边界处的波的反射，使得用有限网格空间就能模拟电磁波在无界空间中的传播。加于边界场的这种算法称为辐射边界条件或吸收边界条件。

MUR吸收边界条件

- 吸收边界是在截断边界上吸收传输过来的电磁波，在截断边界处只有向外传输的波即只有一个方向的单向波。
- 波动方程有两个解：前向波和后向波。这样在截断边界上的场满足其中一个单向波解，就像正常空间中的电磁波一样传输（吸收），这是MUR吸收边界条件的原理
- 采用数学算子分解方法说明MUR吸收边界的处理过程

1. 一维单向波与吸收边界条件

令场量ϕ沿$-\hat{x}$方向传播，则ϕ必满足如下方程

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\right]\phi(x,t)=0 \qquad (5\text{-}45)$$

上式称为沿-x方向的单向波，方程解的形式为

$$\phi(x,t)=f(x+vt)$$

通常在一维情况下，会存在x 和-x方向的两个单向波。此时它们满足

$$(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t})\phi=0 \qquad (\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t})\phi=0$$

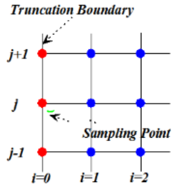
令算子 $L_1^-=\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}$ $\quad L_1^+=\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}$

则算子 $L=L_1^-\cdot L_1^+=\frac{\partial^2}{\partial^2 x}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial^2 t}$

显然，$L\phi=0$是一维情况下的波动方程。

可得到一维情况下的差分格式。

$$L_1^-\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{1}{v}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$



设截断边界面为x=0处，由上式

$$\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,t)\,|_{x=0}^{n} = \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\phi(x,t)\,|_{x=0}^{n}$$

采用前向差商近似，x方向的空间步长为Δx，时间步长为Δt，并且令x=0时，则差分形式为

$$\frac{\phi^n(1)-\phi^n(0)}{\Delta x} = \frac{1}{v\Delta t}\left[\phi^{n+1}(0)-\phi^n(0)\right]$$

$$\phi^{n+1}(0) = \phi^n(0)\left(1-\frac{v\Delta t}{\Delta x}\right) + \frac{v\Delta t}{\Delta x}\phi^n(1) \qquad (5\text{-}45)$$

$$\phi^{n+1}(0) = \phi^n(0)\left(1-\frac{v\Delta t}{\Delta x}\right) + \frac{v\Delta t}{\Delta x}\phi^n(1)$$

若 $\Delta x = v\Delta t$， 则

$$\phi^{n+1}(0) = \phi^n(1) \qquad （5\text{-}48）$$

意味着，在满足稳定性条件下，满足（5-45）的波具有如下特性：

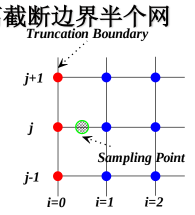
处于 i=0 处时间步为n+1时的波，正好是处于i=1时间步n时的波。说明该波的运动在一个时间步长内移动一个网格步长，好像不存在反射，不存在边界一样，故以上条件称为吸收边界条件。

MUR1差分格式

$$\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial U}{\partial t} = 0$$

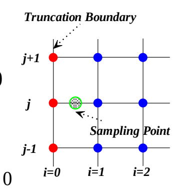
- 一阶近似解析吸收边界条件进行差分离散，如何进行差分离散？
- 因为Yee元胞上有限差分是二阶精度。在截断边界上，只有一方向上有网格，若在截断边界上对一阶空间偏导数进行差分，只有一阶精度。
- 因此对公式的离散取样点放在离截断边界半个网格上

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial U}{\partial t}\right|_{(1/2,j)}^{n+1/2} = 0$$



MUR1差分格式

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial U}{\partial t}\right|_{(1/2,j)}^{n+1/2} = 0$$



- 进行差分离散

$$\frac{U^{n+1/2}(1,j)-U^{n+1/2}(0,j)}{\Delta x} - \frac{1}{c}\left(\frac{U^{n+1}(1/2,j)-U^{n}(1/2,j)}{\Delta t}\right) = 0$$

- 取样点在时间和空间半取样，但截断边界上电场分量是整网格和整时间步长上取样，因此对半取样进行插值平均计算

$$U^{n+1/2}(1,j) = \frac{1}{2}\left[U^{n+1}(1,j)+U^{n}(1,j)\right]$$

$$U^{n}(1/2,j) = \frac{1}{2}\left[U^{n}(0,j)+U^{n}(1,j)\right]$$

MUR1差分格式

- 整理成显式格式

$$U^{n+1}(0,j) = U^{n}(1,j) + \frac{c\Delta t-\Delta x}{c\Delta t+\Delta x}\left[U^{n+1}(1,j)-U^{n}(0,j)\right]$$

- 同理，在x最大方向

$$U^{n+1}(i_{\max},j) = U^{n}(i_{\max}-1,j) + \frac{c\Delta t-\Delta x}{c\Delta t+\Delta x}\left[U^{n+1}(i_{\max}-1,j)-U^{n}(i_{\max},j)\right]$$

- 各截断边界的一阶吸收边界条件写成统一格式

$$U^{n+1}(m_b) = U^{n}(m_n) + \frac{c\Delta t-\delta}{c\Delta t+\delta}\left[U^{n+1}(m_n)-U^{n}(m_b)\right]$$

2. 二维和三维单向波方程

与一维波动问题相仿，设二维问题中任一场分量为 $\phi(x,y,t)$ ，则对无源区有波动方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial^2 t}\right)\phi = 0 \qquad （5\text{-}49）$$

定义算子，并因子分解

$$L_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \qquad （5\text{-}50）$$

$$L_2\phi = L_2^{+}L_2^{-}\phi = 0 \qquad (5\text{-}51)$$

其中

$$L_2^{+}=\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{1-s^2}$$

$$L_2^{-}=\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{1-s^2}$$

$$s=v\frac{\partial}{\partial y}/\frac{\partial}{\partial t}$$

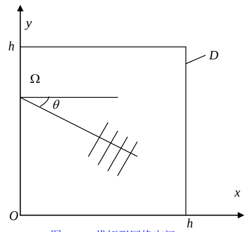


图 5.5 二维矩形网格空间

在二维和三维的问题中，波可以以任何方向投射到边界上。D为二维域内部，边界为Ω。

以FDTD模拟沿任何方向传播，要求抵达边界 D 的均为外行数字波（无反射），而边界对外行数字波而言相当于计算网格空间无限扩展。即边界处场量满足单向波方程。

所需的吸收边界条件不仅要求在 $\theta=0$ 时不存在截断边界的反射，而且应在尽量大的 θ 取值范围内满足单向波条件。

可以证明，当把 L_2^{-} 作用到边界 $x=0$ 的 $\phi(x,y,t)$ 时，ϕ 可以是从任意角度从 Ω 内部入射到 $x=0$ 边界的平面波，都会被边界所吸收。

$$L_2^{-}=\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{1-s^2}$$

也就是说

$$L_2^{-}\phi=0 \quad (x=0) \qquad \textbf{(5-53)}$$

就是保证从 Ω 内部以任意角度入射到 $x=0$ 边界的平面波 ϕ 的精确的解析吸收边界条件。

同样，将 L_2^{+} 作用到边界 $x=h$ 的 $\phi(x,y,t)$，即

$$L_2^{+}\phi=0 \quad (x=h) \quad \textbf{(5-54)}$$

$$L_2^{+}=\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{1-s^2}$$

就是 $x=h$ 处的吸收边界条件。

对图 5.5 中 $y=0$ 和 $y=h$ 的两个边界，只要将以上分析中的 x,y，$\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}$ 互换，就可获得 y 坐标的两个边界面的精确的吸收边界条件。

对三维空间域，波动方程为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi=L_3\phi=0 \quad (5\text{-}55)$$

令 $L_3=L_3^{+}L_3^{-}$，则 $L_3^{\pm}=\frac{\partial}{\partial x}\pm\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{1-D^2}$

$$D=v\left[\left(\frac{\partial}{\partial y}/\frac{\partial}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial z}/\frac{\partial}{\partial t}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \qquad \textbf{(5-56)}$$

垂直于x轴边界面处的吸收边界条件

同理，可得 y 和 z 轴的另外四个边界面处的吸收边界条件。由于 x,y,和 z 坐标的等价性，易求得与（5-56）类似的精确吸收边界条件。

一维情况下的波动方程

在x 和−x方向的两个单向波。此时它们满足

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\right)\phi=0 \qquad \left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\right)\phi=0$$

令算子 $L_1^{-}=\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}$ $\quad L_1^{+}=\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}$

则算子 $L=L_1^{-}\cdot L_1^{+}=\frac{\partial^2}{\partial^2 x}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial^2 t}$

显然，$L\phi=0$ 是一维情况下的波动方程。

二维：$L_2^{+}=\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{1-s^2}$

$L_2^{-}=\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{1-s^2}$，$s=v\frac{\partial}{\partial y}/\frac{\partial}{\partial t}$

三维：$L_3=L_3^{+}L_3^{-}$，则 $L_3^{\pm}=\frac{\partial}{\partial x}\pm\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{1-D^2}$

$$D=v\left[\left(\frac{\partial}{\partial y}/\frac{\partial}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial z}/\frac{\partial}{\partial t}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

3. 近似吸收边界条件

理论推出的精确吸收边界条件的算子中，包含一个根号部分。它不适合直接进行数值计算。在 $FDTD$ 中是将此根号部分以近似形式给出。故称为近似吸收边界条件。

这种近似会在边界上出现某种数量的反射，问题是取怎样的近似能使反射在尽管宽的入射角范围内减到最小。

以二维空间场为例，G.Mur于1981年给出了 $FDTD$ 吸收边界条件的二阶近似形式，即将根号部分以Taylor级数展开：

$\sqrt{1-s^2}\approx 1-\frac{s^2}{2}$ ⟶ $L_2^{-}=\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{1-s^2}$

$s=v\frac{\partial}{\partial y}/\frac{\partial}{\partial t}$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{v}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2/\frac{\partial}{\partial t}\right]f=0 \quad (5\text{-}58)$$

以 $\frac{\partial}{\partial t}$ 乘上式两边　　**二阶近似的单向波方程**

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}-\frac{1}{v}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{v}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]f=0 \quad (5\text{-}59)$$

（5-59）是G.Mur二阶近似吸收边界条件，适用于二维问题的求解，此外，Trefethen和Holpern于1985年提出了一般性的七种近似方法，它们是：

- **Pade法**
- 亚区间上的Chebyshev法
- Chebyshev点插值法
- 最小二乘法
- Chebushev--- Pade法
- Newman点插值法
- Chebyshev法

例如，考虑三维空间中 $x=0$ 的边界的吸收边界条件为式（5-56），

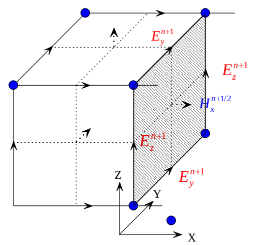
$L_3^{-}\phi=0 \quad (x=0)$

利用近似 $\sqrt{1-D^2}\approx 1-\frac{D^2}{2}$，则可导出 G.Mur 的一种近似吸收边界条件：

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}-\frac{1}{v}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{v}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right]f=0 \quad (5\text{-}65)$$

二阶近似
$\left[\frac{1}{c}\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right]f\Big\rvert_{x=0}=0$
$\left[\frac{1}{c}\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right]f\Big\rvert_{x=a}=0$
$\left[\frac{1}{c}\frac{\partial^2}{\partial y\partial t}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\right]f\Big\rvert_{y=0}=0$
$\left[\frac{1}{c}\frac{\partial^2}{\partial y\partial t}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\right]f\Big\rvert_{y=b}=0$
$\left[\frac{1}{c}\frac{\partial^2}{\partial z\partial t}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\right]f\Big\rvert_{z=0}=0$
$\left[\frac{1}{c}\frac{\partial^2}{\partial z\partial t}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\right]f\Big\rvert_{z=d}=0$

- 截断边界涉及电场的切向分量和磁场的法向分量。
- 以x＝a界面为例，仅有Hx，Ey，Ez。由于FDTD中Hx的计算式不涉x>a区域，即不涉及截断边界界面外节点。
- 因而，吸收边界只考虑电场切向分量Ey，Ez
- 以Ez为例．有



$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}-\frac{1}{v}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{v}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right]E_z=0$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}-\frac{1}{v}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{v}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right]E_z=0$$

$$\left.\frac{\partial^2 E_z}{\partial x\partial t}\right|^{n}_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\Delta t\delta}\left[\begin{array}{l}E_z^{n+1}(i+1,j,k+\frac{1}{2})-E_z^{n-1}(i+1,j,k+\frac{1}{2})\\-E_z^{n+1}(i,j,k+\frac{1}{2})+E_z^{n-1}(i,j,k+\frac{1}{2})\end{array}\right]$$

$$\left.\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}\right|^{n}_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}=\frac{1}{(\Delta t)^2}\left[\begin{array}{l}E_z^{n+1}(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2})-2E_z^{n}(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2})\\+E_z^{n-1}(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2})\end{array}\right]$$

$$\left.\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2}\right|^{n}_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}=\frac{1}{\delta^2}\left[\begin{array}{l}E_z^{n}(i+\frac{1}{2},j+1,k+\frac{1}{2})-2E_z^{n}(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2})\\+E_z^{n}(i+\frac{1}{2},j-1,k+\frac{1}{2})\end{array}\right]$$

$$\left.\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}\right|^{n}_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}=\frac{1}{\delta^2}\left[\begin{array}{l}E_z^{n}(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{3}{2})-2E_z^{n}(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2})\\+E_z^{n}(i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2})\end{array}\right]$$

利用插值公式：

$$E_z{}^{n}(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\left[E_z{}^{n}(i+1,j,k+\frac{1}{2})+E_z{}^{n}(i,j,k+\frac{1}{2})\right]$$

$$\begin{aligned}E_z^{n+1}\left(i,j,k+\frac{1}{2}\right)&=-E_z^{n-1}\left(i+1,j,k+\frac{1}{2}\right)+\frac{c\Delta t-\delta}{c\Delta t+\delta}\\&\times\left[E_z^{n-1}\left(i+1,j,k+\frac{1}{2}\right)+E_z^{n-1}\left(i,j,k+\frac{1}{2}\right)\right]\\&-\frac{2(c\Delta t-\delta)}{\delta}\left[E_z^{n}\left(i,j,k+\frac{1}{2}\right)+E_z^{n}\left(i+1,j,k+\frac{1}{2}\right)\right]\\&+\frac{(c\Delta t)^2}{2\delta(c\Delta t+\delta)}\left[E_z^{n}\left(i,j+1,k+\frac{1}{2}\right)+E_z^{n}\left(i,j-1,k+\frac{1}{2}\right)\right.\\&+E_z^{n}\left(i+1,j+1,k+\frac{1}{2}\right)+E_z^{n}\left(i+1,j-1,k+\frac{1}{2}\right)\\&+E_z^{n}\left(i,j,k+\frac{3}{2}\right)+E_z^{n}\left(i,j,k-\frac{1}{2}\right)+E_z^{n}\left(i+1,j,k+\frac{3}{2}\right)\\&\left.+E_z^{n}\left(i+1,j,k-\frac{1}{2}\right)\right]\end{aligned}$$

当空间步长$\Delta x=\Delta y=\Delta z=\Delta s$时，可得(5-65)差分格式为：

$$\phi^{n+1}(0,j,k)=-\phi^{n-1}(1,j,k)+\frac{v\Delta t-\Delta s}{v\Delta t+\Delta s}\cdot\left[\phi^{n+1}(1,j,k)+\phi^{n-1}(0,j,k)\right]+$$

$$\frac{2\Delta s}{v\Delta t+\Delta s}\left[\phi^{n}(0,j,k)+\phi^{n}(1,j,k)\right]+\frac{(v\Delta t)^2}{2\Delta s(v\Delta t+\Delta s)}\left[\right.$$

$$\phi^{n}(0,j+1,k)-2\phi^{n}(0,j,k)+\phi^{n}(0,j-1,k)\quad+\phi^{n}(1,j+1,k)-2\phi^{n}(1,j,k)$$

$$+\phi^{n}(1,j-1,k)+\phi^{n}(0,j,k+1)-2\phi^{n}(0,j,k)+\phi^{n}(0,j,k-1)+\phi^{n}(1,j,k+1)$$

$$\left.-2\phi^{n}(1,j,k)+\phi^{n}(1,j,k-1)\right]\quad(5\text{-}66)$$

当采用稳定条件$\Delta s=2v\Delta t$时上式中系数还可再简化，(5-66)式已在诸多实际问题中采用。

二维边界条件：二阶方程转化为一阶方程

$$\left.\frac{\partial^2 E_z}{\partial x\partial t}-\frac{1}{c}\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}+\frac{c}{2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2}\right|^{n}_{(1/2,j)}=0$$

沿z方向传播

- TM波，在二维的情况下（Hx，Ez，Hy，x, y的函数）

$$\frac{\partial Hx}{\partial t}=\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial E_y}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial y}\right)\to\frac{\partial E_z}{\partial y}=-\mu\frac{\partial Hx}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x\partial t}-\frac{1}{c}\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}-\frac{c}{2}\mu\frac{\partial^2 Hx}{\partial y\partial t}=0$$

二边对t积分：

$$\frac{\partial E_z}{\partial x}-\frac{1}{c}\frac{\partial E_z}{\partial t}-\frac{c}{2}\mu\frac{\partial Hx}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x}-\frac{1}{c}\frac{\partial E_z}{\partial t}-\frac{c}{2}\mu\frac{\partial Hx}{\partial y}\Big|_{(1/2,j)}^{n+1/2}=0$$

利用插值公式：

(两个**一维Mur**)

$$U^{n+1/2}(1,j)=\frac{1}{2}\left[U^{n+1}(1,j)+U^{n}(1,j)\right]$$

$$U^{n}(1/2,j)=\frac{1}{2}\left[U^{n}(0,j)+U^{n}(1,j)\right]$$

二阶中心差分格式为：

$$E_z^{n+1}(i,j)=E_z^{n}(i,j)+\frac{c\Delta t-\Delta x}{c\Delta t+\Delta x}\left[E_z^{n+1}(i+1,j)-E_z^{n}(i,j)\right]-\frac{c^2\mu\Delta t}{2(c\Delta t+\Delta y)}$$

$$\times\left[H_x^{n+1/2}(i,j+\frac{1}{2})-H_x^{n+1/2}(i,j-\frac{1}{2})+H_x^{n+1/2}(i+1,j+\frac{1}{2})-H_x^{n+1/2}(i+1,j-\frac{1}{2})\right]$$

TM和TE波的吸收边界条件

截断边界位置	二阶 Mur 吸收边界条件	
	TM	TE
$x=0$，左边界	$\left[\frac{\partial E_z}{\partial x}-\frac{1}{c}\frac{\partial E_z}{\partial t}-\frac{c\mu}{2}\frac{\partial H_x}{\partial y}\right]_{x=0}=0$	$\left[\frac{\partial H_z}{\partial x}-\frac{1}{c}\frac{\partial H_z}{\partial t}+\frac{c\varepsilon}{2}\frac{\partial E_x}{\partial y}\right]_{x=0}=0$
$x=a$，右边界	$\left[\frac{\partial E_z}{\partial x}+\frac{1}{c}\frac{\partial E_z}{\partial t}+\frac{c\mu}{2}\frac{\partial H_x}{\partial y}\right]_{x=a}=0$	$\left[\frac{\partial H_z}{\partial x}+\frac{1}{c}\frac{\partial H_z}{\partial t}-\frac{c\varepsilon}{2}\frac{\partial E_x}{\partial y}\right]_{x=a}=0$
$y=0$，下边界	$\left[\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{1}{c}\frac{\partial E_z}{\partial t}+\frac{c\mu}{2}\frac{\partial H_y}{\partial x}\right]_{y=0}=0$	$\left[\frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{1}{c}\frac{\partial H_z}{\partial t}-\frac{c\varepsilon}{2}\frac{\partial E_y}{\partial x}\right]_{y=0}=0$
$y=b$，上边界	$\left[\frac{\partial E_z}{\partial y}+\frac{1}{c}\frac{\partial E_z}{\partial t}-\frac{c\mu}{2}\frac{\partial H_y}{\partial x}\right]_{y=b}=0$	$\left[\frac{\partial H_z}{\partial y}+\frac{1}{c}\frac{\partial H_z}{\partial t}+\frac{c\varepsilon}{2}\frac{\partial E_y}{\partial x}\right]_{y=b}=0$

MUR2差分格式

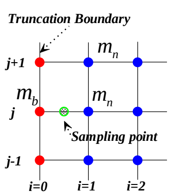
$$L^{-}U=\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial t}-\frac{1}{c}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}+\frac{c}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\Big|_{(1/2,j)}^{n}=0$$

- 场量的二阶偏导，为方便离散和处理，对半网格取样点上的时间离散为整时间步长，对时间的一阶、二阶偏导同样采用中心差分离散。得到二阶吸收边界条件的统一格式

$$U^{n+1}(m_b)=-U^{n-1}(m_n)+\frac{c\Delta t-\delta}{c\Delta t+\delta}\left[U^{n+1}(m_n)+U^{n-1}(m_b)\right]+$$

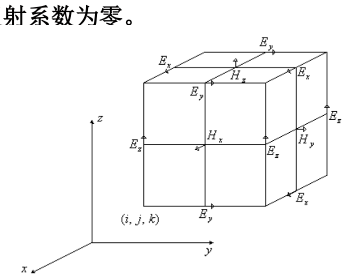
$$\frac{2\delta}{c\Delta t+\delta}\left[U^{n}(m_n)+U^{n}(m_b)\right]+$$

$$\frac{(c\Delta t)^2}{2\delta(c\Delta t+\delta)}\left[\begin{array}{l}U^{n}(m_b)_{u1}-2U^{n}(m_b)+U^{n}(m_b)_{u2}+\\U^{n}(m_n)_{u1}-2U^{n}(m_n)+U^{n}(m_n)_{u2}\end{array}\right]$$



5.6 PML吸收边界条件

- PML分为麦克斯韦方程组分裂式和非分裂式两种方法，今介绍非分裂式。
- 目的：就是让反射系数为零。



$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mu\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}-\sigma_m\boldsymbol{H}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}+\sigma_e\boldsymbol{E}$$

$$\begin{cases}\frac{\partial E_x}{\partial t}=\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}-\sigma_e E_x\right)\\ \frac{\partial E_y}{\partial t}=\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial H_x}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial x}-\sigma_e E_y\right)\\ \frac{\partial H_z}{\partial t}=\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial E_x}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial x}-\sigma_m H_z\right)\end{cases}\qquad\begin{cases}\frac{\partial H_x}{\partial t}=\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial E_y}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial y}-\sigma_m H_x\right)\\ \frac{\partial H_y}{\partial t}=\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial E_z}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial z}-\sigma_m H_y\right)\\ \frac{\partial E_z}{\partial t}=\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}-\sigma_e E_z\right)\end{cases}$$

TE 波　　　　TM 波

1. PML的差分格式

- 考虑TE波的情况。在二维情况下，考虑笛卡儿坐标系中TE波的电磁场3个分量Ex, Ey, Hz
- 瑕设媒质的电导率和磁导率分别为σ和σ*，麦克斯韦方程组可以写成（二维）

$$\varepsilon_0\frac{\partial E_x}{\partial t}+\sigma E_x=\frac{\partial H_z}{\partial y}\qquad\varepsilon_0\frac{\partial E_y}{\partial t}+\sigma E_y=-\frac{\partial H_z}{\partial x}$$

$$\mu_0\frac{\partial H_z}{\partial t}+\sigma^* H_z=\frac{\partial E_x}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial x}$$

如果$\sigma/\varepsilon_0=\sigma^*/\mu_0$，媒质的阻抗就和真空的阻抗相等，当平面波垂直入射到真空一介质表面时就不会发生反射现象。

- 在单轴各向异性的媒质中，TE波（$H_{xz}\neq0$，$E_{xz}=0$）及TM波（$H_{xz}=0$，$E_{xz}\neq0$）的平面波为：

$$\vec{H}=\vec{H}_0 e^{-j\beta_x^i x-j\beta_z^i z}$$

根据算符的等效性： $\nabla\times\vec{E}=-\mathrm{j}\vec{k}\times\vec{E}$

$$\vec{\beta}^\alpha\times\vec{E}=\omega\mu_0\mu_r\overline{\overline{\mu}}\vec{H},\qquad \vec{\beta}^\alpha\times\vec{H}=-\omega\varepsilon_0\varepsilon_r\overline{\overline{\varepsilon}}\vec{E}$$

其中，$\beta^\alpha=\vec{x}\beta_x^\alpha+\vec{z}\beta_z^\alpha$，$\overline{\overline{\varepsilon}}$ 和 $\overline{\overline{\mu}}$ 为介电常数和磁导率张量。

设媒质沿Z轴对称 $\overline{\overline{\varepsilon}}=\begin{bmatrix}a&0&0\\0&a&0\\0&0&b\end{bmatrix}$ $\overline{\overline{\mu}}=\begin{bmatrix}c&0&0\\0&c&0\\0&0&d\end{bmatrix}$

- 把式中的电场消去，导出磁场波动方程的表示式：

$$\vec{\beta}^\alpha\times\overline{\overline{\varepsilon}}^{-1}\vec{\beta}^\alpha\times\vec{H}+k^2\overline{\overline{\mu}}\vec{H}=0$$

TM波

$$k^2=\omega^2\mu_0\mu_r\varepsilon_0\varepsilon_r$$

用矩阵来表示波动方程式：

$$\begin{bmatrix}k^2c-a^{-1}\beta_z^{\alpha 2}&0&\beta_x^i\beta_z^\alpha a^{-1}\\0&k^2c-a^{-1}\beta_z^{\alpha 2}-\beta_x^{i2}b^{-1}&0\\\beta_x^i\beta_z^\alpha a^{-1}&0&k^2d-a^{-1}\beta_x^{i2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}H_x\\H_y\\H_z\end{bmatrix}=0$$

- 得出满足TM波的条件为（Hx=0, Hz=0）

$$k^2c-a^{-1}\beta_z^{\alpha 2}-\beta_x^{i2}b^{-1}=0$$

同理，满足TE波的条件为：

$$k^2a-c^{-1}\beta_z^{\alpha 2}-\beta_x^{i2}d^{-1}=0$$

现在考虑入射波为TM波的情况，设入射面为Z=0的平面：

$$\vec{H}=\vec{y}H_0 e^{-j\beta_x^i x-j\beta_z^i z}$$

则反射波和透射波为：

$$\vec{H}_1=\hat{y}H_0(1+\Gamma e^{2j\beta_z^i z})e^{-j\beta_x^i x-j\beta_z^i z}$$

$$\vec{E}_1=\left[\hat{x}\frac{\beta_z^i}{\omega\varepsilon}(1-\Gamma e^{2j\beta_z^i z})-\hat{z}\frac{\beta_x^i}{\omega\varepsilon}(1+\Gamma e^{2j\beta_z^i z})\right]H_0 e^{-j\beta_x^i x-j\beta_z^i z}$$

$$\vec{H}_2=\hat{y}H_0\tau e^{-j\beta_x^i x-j\beta_z^\alpha z}$$

$$\vec{E}_2=\left[\hat{x}\frac{\beta_z^\alpha a^{-1}}{\omega\varepsilon}-\hat{z}\frac{\beta_z^i b^{-1}}{\omega\varepsilon}\right]H_0\tau e^{-j\beta_x^i x-j\beta_z^\alpha z}$$

- 根据界面的边界条件可以求得反射系数和透射系数

$$\Gamma=\frac{\beta_z^i-\beta_z^\alpha a^{-1}}{\beta_z^i+\beta_z^\alpha a^{-1}}\qquad \tau=1+\Gamma=\frac{2\beta_z^i}{\beta_z^i+\beta_z^\alpha a^{-1}}$$

可见，当 $\beta_z^i=\beta_z^\alpha a^{-1}$ 时，$\Gamma=0$，对任意角度入射的入射波都没有反射。

将 $\beta_z^i=\beta_z^\alpha a^{-1}$ 代入TM波的条件

$$k^2c-a^{-1}\beta_z^{\alpha 2}-\beta_x^{i2}b^{-1}=0$$

- 得： $$\beta_z^{i2}=k^2ca^{-1}-\beta_x^{i2}b^{-1}a^{-1}$$

其中，$\beta_z^{i2}=k^2-\beta_x^{i2}$，可得：

$$c=a,\ b=a^{-1}$$

同理可得：$c=a,\ d=c^{-1}$

即当 $\overline{\overline{\varepsilon}}=\overline{\overline{\mu}}$ 时可以得到沿xz方向传播的平面波无反射的传输条件：

$$\overline{\overline{\varepsilon}}=\overline{\overline{\mu}}=\begin{bmatrix}a&0&0\\0&a&0\\0&0&\frac{1}{a}\end{bmatrix}\qquad a=1+\frac{\sigma}{j\omega\varepsilon_o}$$

- 推广到三维情况，在PML中，麦克斯韦方程表示为

$$\nabla\times\vec{H}=j\omega\varepsilon_o\varepsilon_r\overline{\overline{\varepsilon}}\vec{E},\quad \nabla\times\vec{E}=-j\omega\mu_0\overline{\overline{\mu}}\vec{H}$$

$$\overline{\overline{\varepsilon}}=\overline{\overline{\mu}}=\begin{bmatrix}\frac{s_y s_z}{s_x}&0&0\\0&\frac{s_x s_z}{s_y}&0\\0&0&\frac{s_x s_y}{s_z}\end{bmatrix}$$

- 其中

$$s_x = 1+\frac{\sigma_x}{j\omega\varepsilon_o} \qquad s_y = 1+\frac{\sigma_y}{j\omega\varepsilon_o} \qquad s_z = 1+\frac{\sigma_z}{j\omega\varepsilon_o}$$

可以保证入射到PML中的电磁波几乎得以无反射地吸收。为方便计算可以引入电通量密度将麦克斯韦方程组加以简化：

$$D_x = \varepsilon_o\varepsilon_r\frac{s_y}{s_x}E_x \qquad D_y = \varepsilon_o\varepsilon_r\frac{s_z}{s_y}E_y \qquad D_z = \varepsilon_o\varepsilon_r\frac{s_x}{s_z}E_z$$

以 E_x为例来推导其差分格式：

引入电通量密度后，麦克斯韦方程组的磁场旋度方程表示为

$$\nabla\times\vec{H} = j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r\begin{bmatrix}\frac{s_y s_z}{s_x} & 0 & 0\\ 0 & \frac{s_x s_z}{s_y} & 0\\ 0 & 0 & \frac{s_x s_y}{s_z}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_x\\ E_y\\ E_z\end{bmatrix} = j\omega\begin{bmatrix}s_z & 0 & 0\\ 0 & s_x & 0\\ 0 & 0 & s_y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D_x\\ D_y\\ D_z\end{bmatrix}$$

- 又因为：

$$\nabla\times\vec{H} = (\frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z})\vec{e_x}+(\frac{\partial H_x}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial x})\vec{e_y}+(\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y})\vec{e_z}$$

比较上面的两个表达式，取其 D_x项得

$$\frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z} = j\omega s_z D_x = j\omega(1+\frac{\sigma_z}{j\omega\varepsilon_0})D_x$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z} = j\omega(1+\frac{\sigma_z}{j\omega\varepsilon_0})D_x$$

- 做替换 $j\omega\rightarrow\frac{\partial}{\partial t}$ 并差分得 $\frac{\partial D_x}{\partial t}+\frac{\sigma_z}{\varepsilon_0}D_x = \frac{\Delta H_z}{\Delta y}-\frac{\Delta H_y}{\Delta z}$

$$\frac{D_x^{n+1}-D_x^n}{\Delta t}+\frac{\sigma_z}{2\varepsilon_0}(D_x^{n+1}+D_x^n) = \frac{\Delta H_z}{\Delta y}-\frac{\Delta H_y}{\Delta z}$$

$$D_x^{n+1} = \frac{2\varepsilon_0-\sigma_z\Delta t}{2\varepsilon_0+\sigma_z\Delta t}D_x^n+\frac{2\varepsilon_0\Delta t}{2\varepsilon_0+\sigma_z\Delta t}\left(\frac{\Delta H_z}{\Delta y}-\frac{\Delta H_y}{\Delta z}\right)$$

$$D^{n+1}_{x|i+\frac{1}{2},j,k} = \frac{2\varepsilon_0-\sigma_z\Delta t}{2\varepsilon_0+\sigma_z\Delta t}D^n_{x|i+\frac{1}{2},j,k}+\frac{2\varepsilon_0\Delta t}{2\varepsilon_0+\sigma_z\Delta t}\left(\frac{H^{n+1/2}_{z|i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}-H^{n+1/2}_{z|i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k}}{\Delta y}-\frac{H^{n+1/2}_{y|i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}-H^{n+1/2}_{y|i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}}}{\Delta z}\right)$$

由 $D_x = \varepsilon_o\varepsilon_r\frac{s_y}{s_x}E_x$ 得 $j\omega(1+\frac{\sigma_x}{j\omega\varepsilon_o})D_x = \varepsilon_o\varepsilon_r j\omega(1+\frac{\sigma_y}{j\omega\varepsilon_o})E_x$

即：

$$\frac{\partial D_x}{\partial t}+\frac{\sigma_x}{\varepsilon_o}D_x = \varepsilon_o\varepsilon_r(\frac{\partial E_x}{\partial t}+\frac{\sigma_y E_x}{\varepsilon_o})$$

- 因此：

$$E_x^{n+1} = \frac{2\varepsilon_0-\sigma_y\Delta t}{2\varepsilon_0+\sigma_y\Delta t}E_x^n+\frac{1}{(2\varepsilon_0+\sigma_y\Delta t)\varepsilon_0\varepsilon_r}\left((2\varepsilon_0+\sigma_x\Delta t)D_x^{n+1}-(2\varepsilon_0-\sigma_x\Delta t)D_x^n\right)$$

$$E^{n+1}_{x|i+1/2,j,k} = \frac{2\varepsilon_0-\sigma_y\Delta t}{2\varepsilon_0+\sigma_y\Delta t}E^n_{x|i+1/2,j,k}+\frac{(2\varepsilon_0+\sigma_x\Delta t)D^{n+1}_{x|i+1/2,j,k}-(2\varepsilon_0-\sigma_x\Delta t)D^n_{x|i+1/2,j,k}}{(2\varepsilon_0+\sigma_y\Delta t)\varepsilon_0\varepsilon_r}$$

- 同理，可得其它电场分量的差分表达式如下：

$$D^{n+1}_{y|i,j+\frac{1}{2},k} = \frac{2\varepsilon_0-\sigma_x\Delta t}{2\varepsilon_0+\sigma_x\Delta t}D^n_{y|i,j+\frac{1}{2},k}+\frac{2\varepsilon_0\Delta t}{2\varepsilon_0+\sigma_x\Delta t}\left(\frac{H^{n+1/2}_{x|i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}-H^{n+1/2}_{x|i,j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}}{\Delta z}-\frac{H^{n+1/2}_{z|i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}-H^{n+1/2}_{z|i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}}{\Delta x}\right)$$

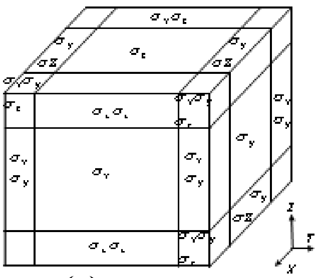
$$E^{n+1}_{y|i,j+1/2,k} = \frac{2\varepsilon_0-\sigma_z\Delta t}{2\varepsilon_0+\sigma_z\Delta t}E^n_{y|i,j+1/2,k}+\frac{(2\varepsilon_0+\sigma_y\Delta t)D^{n+1}_{y|i+1/2,j,k}-(2\varepsilon_0-\sigma_y\Delta t)D^n_{y|i+1/2,j,k}}{(2\varepsilon_0+\sigma_z\Delta t)\varepsilon_0\varepsilon_r}$$

$$D^{n+1}_{z|i,j,k+\frac{1}{2}} = \frac{2\varepsilon_0-\sigma_y\Delta t}{2\varepsilon_0+\sigma_y\Delta t}D^n_{z|i,j,k+\frac{1}{2}}+\frac{2\varepsilon_0\Delta t}{2\varepsilon_0+\sigma_y\Delta t}\left(\frac{H^{n+1/2}_{y|i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}-H^{n+1/2}_{y|i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}}{\Delta x}-\frac{H^{n+1/2}_{x|i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}-H^{n+1/2}_{x|i,j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}{\Delta y}\right)$$

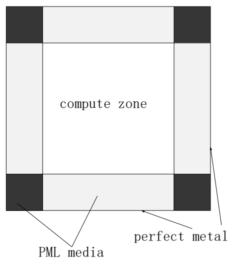
$$E^{n+1}_{z|i,j,k+1/2} = \frac{2\varepsilon_0-\sigma_x\Delta t}{2\varepsilon_0+\sigma_x\Delta t}E^n_{z|i,j,k+1/2}+\frac{(2\varepsilon_0+\sigma_z\Delta t)D^{n+1}_{z|i,j,k+1/2}-(2\varepsilon_0-\sigma_z\Delta t)D^n_{z|i,j,k+1/2}}{(2\varepsilon_0+\sigma_x\Delta t)\varepsilon_0\varepsilon_r}$$

2 PML的空间布局及电导率的选取

- 对于三维的PML边界条件，整个边界分成26块，6个面，8个角，12条棱。其中最外层用理想导体封闭。



（a）三维情况



（b）二维情况

- 在PML物质中，介电常数ε和磁导率数μ分别为计算空间（真空）中的数值。
- 实验表明，如果σ为常数，由于电磁场量和电磁参数的离散近似导致在自由空间和PML的边界处产生阻抗不匹配，在边界处引起较大的反射。
- 因此，在PML中σ是由自由空间到最外层边界逐渐增加的。PML的特点是：
  - 在棱区域中与坐标轴平行方向的电导率分量为零，只存在与坐标轴垂直的电导率分量，并且随着进入PML的深度增加而增大，在PML与计算空间的交界处为最小值，在最外层达到最大值；
  - 在角区域中存在着沿两个方向变化的电导率，这不难推广到三维空间。

- PML吸收层中电导率的选取可以依据经验公式：

$$\sigma(\rho)=\sigma_{\max}\left(\frac{\rho}{\delta}\right)^m$$

其中，ρ为进入到PML层的深度，δ为PML吸收层的厚度，$\sigma_{\max}$为固定参数，m一般选为4。在PML层与计算空间的交界处为零，σ在PML层与PEC的交界处为最大值。

PML吸收层的反射系数为：

$$R(\theta)=\exp\left[-2\varepsilon_r\cos\theta\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\int_0^\delta\sigma(\rho)d\rho\right]$$

- 将经验公式代入可得反射系数为：

$$R(\theta)=\exp\left(-\frac{2\sigma_{\max}\delta\varepsilon_r\cos\theta}{m+1}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\right)$$

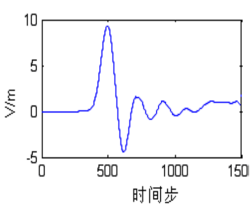
$$\sigma_{\max}=-\frac{(m+1)\ln[R(0)]}{2\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}$$

例如：取$R(0)=10^{-2}$，m=4。PML层为9层。

3. PML-FDTD的验证方法

（1）收敛性的验证

- 为验证算法的收敛性，利用高斯脉冲作为激励源，由于激励源只占据一个空间线度，可以采用强迫设置的方法。例如，在柱坐标系下，计算空间为30×30×30。高斯脉冲激励源位于（0,10,15）处。

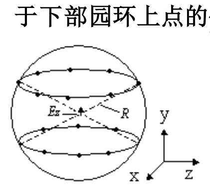


$$E_z=E_0\exp\left(-\frac{(t-t_0)^2}{T^2}\right)$$

其中$t_0=3T$；E_0=100V/m；空间步长$\lambda/20$，PML取9层。观察计算区间内坐标为(5,10,15)点的电场在激励源作用前后的数值如图所示。可见激励消失后，观察点的电场也逐渐趋于零，算法满足收敛性的条件。

（2）对称性的验证

- 用等距离线法验证算法的对称性，在距离激励源为***R***=8个空间步长，与***z***轴垂直的园环上取若干个取样点，计算这些点的场值。
- 计算1000时间步的结果如表所示，其中前3行是位于上部园环上点的电场值（第一组），后3行是位于下部园环上点的值（第二组）。

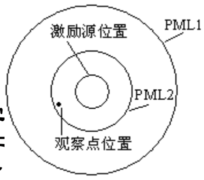


-0.2400	-0.2400	-0.2400	-0.2400	-0.2400
-0.2400	-0.2400	-0.2400	-0.2400	-0.2400
-0.2400	-0.2400	-0.2400	-0.2400	-0.2400
-0.2408	-0.2408	-0.2408	-0.2408	-0.2408
-0.2408	-0.2408	-0.2408	-0.2408	-0.2408
-0.2408	-0.2408	-0.2408	-0.2408	-0.2408

- 由于点激励源在数值空间中占有一定的线度，并且沿不同的方向存在不同的色散误差，因此两组数据并不严格相等，可见误差小于0.33%，对称性较好。从下面反射特性的测试中可以看出，误差精度能够满足一般工程上的要求。

（3） PML吸收程度的测试

在柱坐标系下，为模拟柱面波的传播，将柱面波源设在总场-散射场连接边界上。程序中设置两套计算空间，要考察的PML所在的空间（第二套计算空间，PML2）位于另一套计算空间（第一套计算空间，PML1）之中，其平面图如图所示。



- 为了满足测试精度，第一套计算空间必须足够大，以至于**PML1**的反射波到达不了观察点。
- 取第一套计算空间为**50×30×90**个网格，第二套计算空间取**16×30×90**个网格。空间步长取**λ/20**，设柱面波沿径向传播，激励源位于总场—散射场连接边界上，该连接边界在径向占**3**个网格，轴向占**6**个网格。柱面波源采用调制高斯脉冲：

$$E_z = E_0 \exp\left(-\frac{(t-t_0)^2}{T^2}\right)\sin(\omega(t-t_0))$$

$$\Delta t = \frac{1}{c}\left(\frac{1}{\Delta r^2}+\frac{4}{(\Delta r\Delta\beta)^2}+\frac{1}{\Delta z^2}\right)^{-1/2}$$

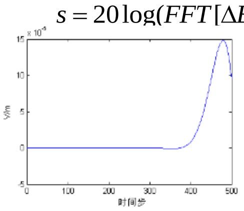
计算可知，源点的扰动经过PML1反射后至少需600个时间步才能影响到观察点。在测试时取500个时间步，并保证PML2反射波的最大值已经达到了观察点。

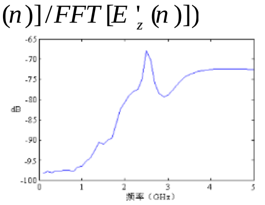
- 由**PML2**引起的反射波模值为：

$$\Delta E_z(n) = \left|E'_z(n) - E_z(n)\right|$$

$E'_z(n)$为第二套计算空间中得到的电场（总场），$E_z(n)$为在第一套计算空间中得到的电场。可通过快速傅立叶变换（FFT）计算期望频率范围内PML的反射系数： 反射误差-80dB

$$s = 20\log(FFT[\Delta E_z(n)]/FFT[E'_z(n)])$$

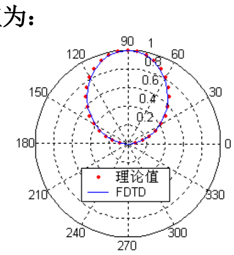




(4) 半波天线方向图的计算

- 通过**FDTD**计算半波天线的方向图，并与理论值相比较可以验证**FDTD**及近场-远场程序与算法的正确性。每隔**3**度取一个数据点，利用傅立叶变换可以得到在调制频率处的方向图。
- 半波天线方向图的理论值为：

$$F(\theta,\varphi) = \frac{\cos(kl\cos\theta) - \cos(kl)}{\sin\theta}$$



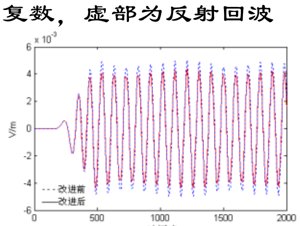
(5)PML吸收效果的改善

- 为了进一步减少**PML**引起的反射，这里用一阶**Mur**边界条件代替了**PML**最外层的**PEC**。

设激励源采用正弦电场：$E_z = E_0\sin(\omega(t-t_0))$

计算空间的场值为复数，虚部为反射回波

减小了近20%的反射强度。



4.FDTD的激励源

- **FDTD**是对时域电磁波在空间中传输情况进行仿真的数值算法，能直观地仿真电磁波的时空信息。有源的激励才能有电磁波的传输。
- **1、时谐场源**

$$U_{inc}(t) = \begin{cases} A\sin(\omega t) & t \ge 0 \\ 0 & \text{other} \end{cases}$$

激励源

- 2、脉冲源
- 高斯脉冲

$$U_{inc}(t)=\exp\left(-\frac{4\pi(t-t_0)^2}{\tau^2}\right)\qquad \tau=2/f_{\max},t_0=\tau$$

- 升余弦脉冲

$$U_{inc}(t)=\begin{cases}0.5\left(1-\cos(2\pi t/\tau)\right) & 0\le t\le\tau\\ 0 & \text{other}\end{cases}$$

$$\tau=2/f_{\max},\ first\ zero$$

激励源

- 微分高斯脉冲

$$U_{inc}(t)=\frac{t-t_0}{\tau}\exp\left(-\frac{4\pi(t-t_0)^2}{\tau^2}\right)$$

- 截断三余弦脉冲

$$U_{inc}(t)=\begin{cases}\beta\left(10-15\cos(\omega_1 t)+6\cos(\omega_2 t)-\cos(\omega_3 t)\right)\\ 0\le t\le\tau\\ 0 \qquad \text{other}\end{cases}$$

$$\omega_i=2\pi i/\tau,\tau=3/f_{\max}$$

激励源

- 双指数脉冲

$$U_{inc}(t)=A\left(\exp(-\alpha t)-\exp(-\beta t)\right)$$

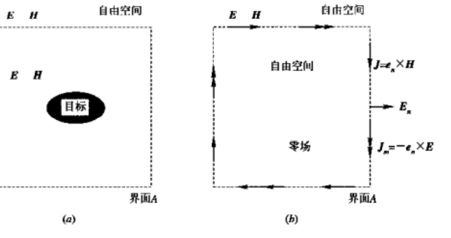
$$A_0=5.25e4V/m,\ \alpha=4e^6 s^{-1},\ \beta=4.76e^8 s^{-1}$$

Bell波形，应用在核电脉冲和雷电脉冲的研究

5.近场-远场转换

- 可以利用等效电流和等效磁流来完成近场-远场的转换。在用一个假想的闭合面***S***把散射体包围住；
- 先由**FDTD**方法求出表面***S***上的切向电场$\boldsymbol{E}_s$和切向磁场$\boldsymbol{H}_s$，然后根据等效原理，可以求得***S***面上的等效电流密度和等效磁流密度：

$$\boldsymbol{J}_s=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}_s,\qquad \boldsymbol{J}_m=-\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}_s$$



根据等效电流和等效磁流，得到辐射矢A和F为：

$$\boldsymbol{A}=\int_S \boldsymbol{J}_s e^{jk(\boldsymbol{r}'.\boldsymbol{r})}dS\qquad \boldsymbol{F}=\int_S \boldsymbol{J}_m e^{jk(\boldsymbol{r}'.\boldsymbol{r})}dS$$

r是原点到远场点的单位矢，r'是原点到S面上积分源点的矢量。

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\times\boldsymbol{F}+\frac{1}{j\omega\epsilon}\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}$$

$$=-\nabla\times\boldsymbol{F}-j\omega\mu\boldsymbol{A}+\frac{1}{j\omega\epsilon}\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})$$

$$\boldsymbol{H}=\nabla\times\boldsymbol{A}+\frac{1}{j\omega\mu}\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{F}$$

$$=\nabla\times\boldsymbol{A}-j\omega\epsilon\boldsymbol{F}+\frac{1}{j\omega\mu}\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{F})$$

对于辐射场的频域表示，可以对其求逆傅立叶变换得到时域为：

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi rc}\frac{\partial}{\partial t}\left[\iint_S \boldsymbol{J}_s\left(t-\frac{r-\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{r}}{c}\right)dS\right]$$

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi rc}\frac{\partial}{\partial t}\left[\iint_S \boldsymbol{J}_m\left(t-\frac{r-\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{r}}{c}\right)dS\right]$$

- 根据辐射矢在球坐标系下的分量可以求得远场为：

$$A_\theta=A_{r|柱}\cos\theta-A_{z|柱}\sin\theta$$

$$F_\theta=F_{r|柱}\cos\theta-F_{z|柱}\sin\theta$$

$$A_\varphi=A_{\varphi|柱},\quad F_\phi=F_{\varphi|柱}$$

根据辐射势和电场的关系，远区散射电场为：

利用关系式： $\nabla\times\vec{E}=\mathrm{j}\vec{k}\times\vec{E}$

$$\boldsymbol{E}=\mathrm{j}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{F}-\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{A}-\frac{\boldsymbol{k}}{\mathrm{j}\omega\varepsilon}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{A})$$

$$\boldsymbol{H}=-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{A}-\mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{F}-\frac{\boldsymbol{k}}{\mathrm{j}\omega\mu}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{F})$$

$$\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{A}+\frac{\boldsymbol{k}}{\mathrm{j}\omega\varepsilon}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{A})=\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{A}+\boldsymbol{e}_r\frac{k^2}{\mathrm{j}\omega\varepsilon}A_r=\mathrm{j}\omega\mu(\boldsymbol{e}_\theta A_\theta+\boldsymbol{e}_\varphi A_\varphi)$$

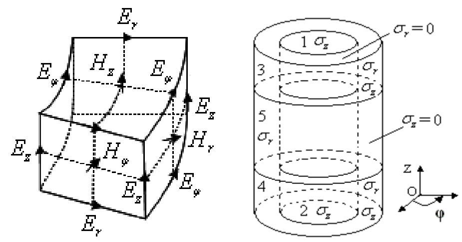
$$\mathrm{j}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{F}=\mathrm{j}k\boldsymbol{e}_r\times(\boldsymbol{e}_r F_r+\boldsymbol{e}_\theta F_\theta+\boldsymbol{e}_\varphi F_\varphi)=\mathrm{j}k(\boldsymbol{e}_\varphi F_\theta-\boldsymbol{e}_\theta F_\varphi)$$

得到：

$$E_\theta(r,t)=-\eta_0 A_\theta(r,t)-F_\varphi(r,t)$$
$$E_\varphi(r,t)=-\eta_0 A_\varphi(r,t)+F_\theta(r,t)$$

5.7 圆柱坐标系下的PML吸收边界条件

- 在圆柱坐标系下坐标变量分别为***r***、***φ***、***z***，假设介质为各向同性的均匀媒质。圆柱坐标系下**Yee**氏网格如图所示。



- 在圆柱坐标系下，**FDTD**仿真区中的**PML**必须在两个方向的边界面截断，即在沿***r***，***z***方向上边界面截断。
- 采用如下的相对介电常数和相对导磁率张量：

$$\bar{\bar{\varepsilon}}=\bar{\bar{\mu}}=\begin{bmatrix}\frac{s_z}{s_r} & 0 & 0\\ 0 & s_z s_r & 0\\ 0 & 0 & \frac{s_r}{s_z}\end{bmatrix}$$

其中：

$$s_r=1+\frac{\sigma_r}{\mathrm{j}\omega\varepsilon_0}\qquad s_z=1+\frac{\sigma_z}{\mathrm{j}\omega\varepsilon_0}$$

- 克斯韦方程组表示成张量形式为

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mathrm{j}\omega\mu_o\mu_r\bar{\bar{\boldsymbol{\mu}}}\boldsymbol{H},\quad \nabla\times\boldsymbol{H}=\mathrm{j}\omega\varepsilon_o\varepsilon_r\bar{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}\boldsymbol{E}$$

利用变换关系 $\mathrm{j}\omega\to\frac{\partial}{\partial t}$

磁场旋度方程

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial H_\varphi}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_r+\left(\frac{\partial H_r}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial r}\right)\boldsymbol{e}_\varphi+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rH_\varphi)}{\partial r}-\frac{\partial H_r}{\partial\varphi}\right)\boldsymbol{e}_z=\mathrm{j}\omega\varepsilon_0\varepsilon_r\bar{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}\boldsymbol{E}$$

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial H_\varphi}{\partial z}\\ \frac{\partial H_r}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial r}\\ \frac{H_\varphi}{r}+\frac{\partial H_\varphi}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial H_r}{\partial\varphi}\end{bmatrix}=\mathrm{j}\omega\varepsilon_0\varepsilon_r\begin{bmatrix}\frac{s_z}{s_r} & 0 & 0\\ 0 & s_z s_r & 0\\ 0 & 0 & \frac{s_r}{s_z}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_r\\ E_\varphi\\ E_z\end{bmatrix}$$

- 引入如下的电通量密度

$$D_r=\varepsilon_o\varepsilon_r\frac{1}{s_r}E_r\qquad D_\varphi=\varepsilon_o\varepsilon_r s_z E_\varphi\qquad D_z=\varepsilon_o\varepsilon_r\frac{1}{s_z}E_z$$

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial H_\varphi}{\partial z}\\ \frac{\partial H_r}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial r}\\ \frac{H_\varphi}{r}+\frac{\partial H_\varphi}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial H_r}{\partial\varphi}\end{bmatrix}=\mathrm{j}\omega\varepsilon_0\varepsilon_r\begin{bmatrix}s_z & 0 & 0\\ 0 & s_r & 0\\ 0 & 0 & s_r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D_r\\ D_\varphi\\ D_z\end{bmatrix}$$

- 表示为时域形式为

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial H_\varphi}{\partial z}\\ \frac{\partial H_r}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial r}\\ \frac{H_\varphi}{r}+\frac{\partial H_\varphi}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial H_r}{\partial\varphi}\end{bmatrix}=\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D_r\\ D_\varphi\\ D_z\end{bmatrix}+\frac{1}{\varepsilon_0}\begin{bmatrix}\sigma_z & 0 & 0\\ 0 & \sigma_r & 0\\ 0 & 0 & \sigma_r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D_r\\ D_\varphi\\ D_z\end{bmatrix}$$

中的第一项为： $\frac{\partial D_r}{\partial t}+\frac{\sigma_z}{\varepsilon_0}D_r=\frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial H_\varphi}{\partial z}$

表示成差分格式

$$\frac{D^{n+1}_{r|i+1/2,j,k}-D^{n}_{r|i+1/2,j,k}}{\Delta t}+\frac{\sigma_z}{2\varepsilon_0}\left(D^{n+1}_{r|i+1/2,j,k}+D^{n}_{r|i+1/2,j,k}\right)=$$
$$\frac{1}{(r+1/2)\Delta\varphi}\left(H^{n+1/2}_{z|i+1/2,j+1/2,k}-H^{n+1/2}_{z|i+1/2,j-1/2,k}\right)-\frac{1}{\Delta z}\left(H^{n+1/2}_{\varphi|i+1/2,j,k+1/2}-H^{n+1/2}_{\varphi|i+1/2,j,k-1/2}\right)$$

- 整理得：

$$D_{r|i+1/2,j,k}^{n+1}=\frac{2\varepsilon_0-\sigma_z\Delta t}{2\varepsilon_0+\sigma_z\Delta t}D_{r|i+1/2,j,k}^{n}+$$
$$\frac{2\varepsilon_0\Delta t}{2\varepsilon_0+\sigma_z\Delta t}\left\{\frac{1}{(r+1/2)\Delta\varphi}\left(H_{z|i+1/2,j+1/2,k}^{n+1/2}-H_{z|i+1/2,j-1/2,k}^{n+1/2}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\Delta z}\left(H_{\varphi|i+1/2,j,k+1/2}^{n+1/2}-H_{\varphi|i+1/2,j,k-1/2}^{n+1/2}\right)\right\}$$

由于： $(1+\frac{\sigma_r}{j\omega\varepsilon_0})D_r=\varepsilon_0\varepsilon_r E_r$

两边同乘以jω，并转换到时域，

$$E_{r|i+1/2,j,k}^{n+1}=E_{r|i+1/2,j,k}^{n}+\frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon_r}\left\{\frac{2\varepsilon_0+\sigma_r\Delta t}{2\varepsilon_0}D_{r|i+1/2,j,k}^{n+1}-\frac{2\varepsilon_0-\sigma_r\Delta t}{2\varepsilon_0}D_{r|i+1/2,j,k}^{n}\right\}$$

- 同理，D_φ，E_φ，D_z, E_z的差分表达式为

$$D_{\varphi|i,j+1/2,k}^{n+1}=\frac{2\varepsilon_0-\sigma_r\Delta t}{2\varepsilon_0+\sigma_r\Delta t}D_{\varphi|i,j+1/2,k}^{n}+\frac{2\varepsilon_0\Delta t}{2\varepsilon_0+\sigma_r\Delta t}\times$$
$$\left\{\frac{1}{\Delta z}\left(H_{r|i,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2}-H_{r|i,j+1/2,k-1/2}^{n+1/2}\right)-\frac{1}{\Delta r}\left(H_{z|i+1/2,j+1/2,k}^{n+1/2}-H_{z|i-1/2,j+1/2,k}^{n+1/2}\right)\right\}$$

$$E_{\varphi|i,j+1/2,k}^{n+1}=\frac{2\varepsilon_0-\sigma_z\Delta t}{2\varepsilon_0+\sigma_z\Delta t}E_{\varphi|i,j+1/2,k}^{n}+\frac{1}{\varepsilon_r}\frac{2}{2\varepsilon_0+\sigma_z\Delta t}\left\{D_{\varphi|i,j+1/2,k}^{n+1}-D_{\varphi|i,j+1/2,k}^{n}\right\}$$

$$D_{z|i,j,k+1/2}^{n+1}=\frac{2\varepsilon_0-\sigma_r\Delta t}{2\varepsilon_0+\sigma_r\Delta t}D_{z|i,j,k+1/2}^{n}+\frac{2\varepsilon_0\Delta t}{2\varepsilon_0+\sigma_r\Delta t}\times\left\{\left(\frac{1}{2r}+\frac{1}{\Delta r}\right)H_{\varphi|i+1/2,j,k+1/2}^{n+1/2}+\right.$$
$$\left.\left(\frac{1}{2r}-\frac{1}{\Delta r}\right)H_{\varphi|i-1/2,j,k+1/2}^{n+1/2}-\frac{1}{r\Delta\varphi}\left(H_{r|i,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2}-H_{r|i,j-1/2,k+1/2}^{n+1/2}\right)\right\}$$

$$E_{z|i,j,k+1/2}^{n+1}=E_{z|i,j,k+1/2}^{n}+\frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon_r}\left\{\frac{2\varepsilon_0+\sigma_z\Delta t}{2\varepsilon_0}D_{z|i,j,k+1/2}^{n+1}-\frac{2\varepsilon_0-\sigma_z\Delta t}{2\varepsilon_0}D_{z|i,j,k+1/2}^{n}\right\}$$

磁场分量在PML中的FDTD格式

$$B_{r|i,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2}=\frac{2\varepsilon_0-\sigma_z dt}{2\varepsilon_0+\sigma_z dt}B_{r|i,j+1/2,k+1/2}^{n-1/2}-\frac{2\varepsilon_0 dt}{2\varepsilon_0+\sigma_z dt}\times$$
$$\left\{\frac{E_{z|i,j+1,k+1/2}^{n}-E_{z|i,j,k+1/2}^{n}}{rd\varphi}-\frac{E_{\varphi|i,j+1/2,k+1}^{n}-E_{\varphi|i,j+1/2,k}^{n}}{dz}\right\}$$

$$H_{r|i,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2}=H_{r|i,j+1/2,k+1/2}^{n-1/2}+\frac{1}{\mu_0\mu_r}\left\{\frac{2\varepsilon_0+\sigma_r dt}{2\varepsilon_0}B_{r|i,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2}-\frac{2\varepsilon_0-\sigma_r dt}{2\varepsilon_0}B_{r|i,j+1/2,k+1/2}^{n-1/2}\right\}$$

$$B_{\varphi|i+1/2,j,k+1/2}^{n+1/2}=\frac{2\varepsilon_0-\sigma_r dt}{2\varepsilon_0+\sigma_r dt}B_{\varphi|i+1/2,j,k+1/2}^{n-1/2}-\frac{2\varepsilon_0 dt}{2\varepsilon_0+\sigma_r dt}\times$$
$$\left\{\frac{E_{r|i+1/2,j,k+1}^{n}-E_{r|i+1/2,j,k}^{n}}{dz}-\frac{E_{z|i+1,j,k+1/2}^{n}-E_{z|i,j,k+1/2}^{n}}{dr}\right\}$$

$$H_{\varphi|i+1/2,j,k+1/2}^{n+1/2}=\frac{2\varepsilon_0-\sigma_z dt}{2\varepsilon_0+\sigma_z dt}H_{\varphi|i+1/2,j,k+1/2}^{n-1/2}+\frac{2\varepsilon_0}{(2\varepsilon_0+\sigma_z dt)\mu_0\mu_r}$$
$$\left\{B_{\varphi|i+1/2,j,k+1/2}^{n+1/2}-B_{\varphi|i+1/2,j,k+1/2}^{n-1/2}\right\}$$

$$B_{z|i+1/2,j+1/2,k}^{n+1/2}=\frac{2\varepsilon_0-\sigma_r dt}{2\varepsilon_0+\sigma_r dt}B_{z|i+1/2,j+1/2,k}^{n-1/2}-\frac{2\varepsilon_0 dt}{2\varepsilon_0+\sigma_r dt}$$
$$\left\{\left(\frac{1}{2(r+1/2)}+\frac{1}{dr}\right)E_{\varphi|i+1,j+1/2,k}^{n}+\left(\frac{1}{2(r+1/2)}-\frac{1}{dr}\right)E_{\varphi|i,j+1/2,k}^{n}-\frac{1}{rd\varphi}\left(E_{r|i+1/2,j+1,k}^{n}-E_{r|i+1/2,j,k}^{n}\right)\right\}$$

$$H_{z|i+1/2,j+1/2,k}^{n+1/2}=H_{z|i+1/2,j+1/2,k}^{n-1/2}+\frac{1}{\mu_0\mu_r}\left\{\frac{2\varepsilon_0+\sigma_z dt}{2\varepsilon_0}B_{z|i+1/2,j+1/2,k}^{n+1/2}-\frac{2\varepsilon_0-\sigma_z dt}{2\varepsilon_0}B_{z|i+1/2,j+1/2,k}^{n-1/2}\right\}$$

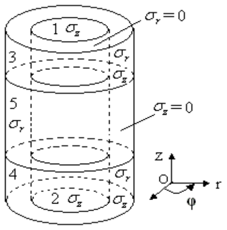
- 选取

$$\sigma_r=\sigma_{\max}\left(\frac{r-r_0}{r_1-r_0}\right)^m \qquad \sigma_z=\sigma_{\max}\left(\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right)^m$$

在PML与PEC的交界处取最大值,在PML与计算空间的交界处为零

$$\sigma_{\max}=-\frac{(m+1)\ln[R(0)]}{150\pi\Delta\sqrt{\varepsilon_r}}$$

- 把**PML**分成五个区域，即一个棱区域（区域**5**），二个面区域（区域**1**、**2**）二个角区域（区域**3**、**4**），如图所示



在区域1、2只存在沿轴向变化的电导率σ_z

在区域5只存在沿径向变化的电导率 σ_r

角区域3、4存在着沿两个方向变化的电导率σ_z σ_r

FDTD计算时间步长的选取

- 在径向不同的单元网格上，沿角方向的横向长度单元是不同的，因此，要取最小的值来计算；
- Yee氏网格横向长度对应为

$$i\Delta r \times \Delta\beta$$

时间步长的取值如下：

$$\Delta t \le \frac{1}{c}\left(\frac{1}{\Delta r^2}+\frac{4}{(\Delta r\Delta\beta)^2}+\frac{1}{\Delta z^2}\right)^{-1/2}$$

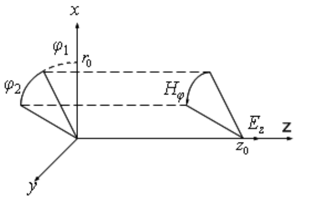
FDTD差分格式中奇点的去除

- 在轴向上，距离数 $i=0$

$$r = i\times\Delta r = 0$$

在计算中会出现奇点，用安培定律来去除

$$\oint_c \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l} = \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}$$



$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi} E_z(0,z,t) r d\varphi dr = \int_0^{2\pi} H_\varphi(r_0,z,t)dl$$

其中 $r_0 = \Delta r/2$ 积分得

$$\frac{r_0}{2}\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}E_z(0,z,t) = H_\varphi(r_0,z,t)$$

进行差分得：

$$E_z|^{n+1}_{0,j,k+1/2} = E_z|^{n}_{0,j,k+1/2} + \frac{4\Delta t}{\varepsilon\Delta r}H_\varphi|^{n+1/2}_{1/2,j,k+1/2}$$

作业4

- 推导FDTD的MUR1吸收边界公式