

第七章 有限元法

以变分原理为基础建立起来的有限元法，因其理论依据的普遍性，已被普遍推广并成功地用来解决其他工程领域中的问题，例如热传导、渗流、流体力学、空气动力学、土壤力学、机械零件强度分析、电磁场工程问题等等。

有限元法是以变分原理为基础，将要求解的微分方程型数学模型——边值问题，首先转化为相应的变分问题，即泛函求极值问题；然后，利用剖分插值将变分问题离散化为普通多元函数的极值问题，最终归结为一组多元的代数方程组，求解该方程组，从而获得边值问题的数值解。

7.1 概述

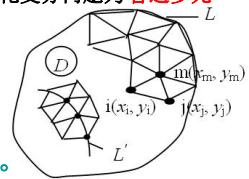
- 有限元思想最早由 Courant于1943年提出，而有限元法（Finite Element Method，简称FEM）这个名称由 Clough于1960年在其著作中首先提出。
- 以变分原理为基础建立起来的有限元法，广泛地被应用于各种结构工程，而且作为一种声誉很高的数值分析方法已被普遍推广；
例如：热传导、渗流、流体力学、空气动力学、土壤力学、机械零件强度分析、电磁工程问题等等。
- 1965年 Winslow首次将有限元法应用于电气工程问题，1969年 Silvester将其推广于时谐电磁场问题。

有限元法一般原理

- 有限元法是一种积分数值方法。
- 有限元法是逼近论、偏微分方程、变分和泛函分析的巧妙结合。利用积分法求解微分方程。
- 从数学上看，有限元法是 Rayleigh-Ritz-Galerkin 法的推广。Ritz 法并不直接用于微分方程，而是用于对应的变分形式。
- 有限元法中的试探函数都是分片多项式。实际上构成了索伯洛夫空间。
- 微分数值方法使用差分代替微分，是变化率意义上的逼近；积分数值方法用切分区域上的近似函数去逼近，其平均意义上的近似解是函数意义上的近似。

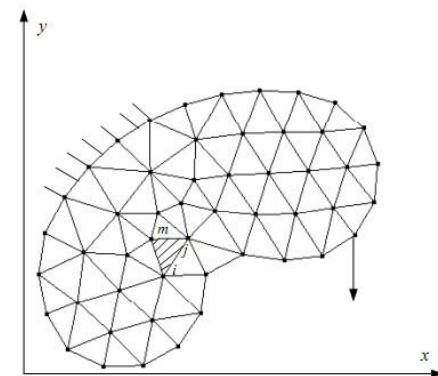
有限元思想 1

- 传统的有限元以变分原理为基础，把所要求解的微分方程型数学模型——边值问题，首先转化为相应的变分问题，即 泛函求极值 问题；
- 然后利用 剖分插值， 离散化变分问题为 普通多元 函数的极值 问题；
最终归结为一组多元的代数方程组，解之既得待求边值问题的数值解。



普遍意义下的有限元法

- 有限元法将考查的连续场分割为有限个单元，再用比较简单的函数表示每个单元的解；
- 并不要求每个单元的试探解都满足边界条件，边界条件并不进入有限元的关系式中；
- 对求解区域的内部和边界都可以采用同样的函数；
- 边界条件只在集合体的方程中引入，过程简单，并只考虑强迫边界条件。



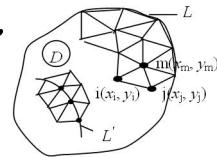
有限元思想2

有限元法的核心在于 **剖分插值**，

将所研究的连续场分割为有限

个单元，用比较简单的 **插值函**

数来表示每个单元的解：



计算域离散剖分为有限个互不重叠且相互连接的单元，在**每个单元内选择基函数**，用单元的线形组合来逼近单元中的真解，整个计算域上总体的基函数由每个单元基函数组成，整个计算域内的解可以看作是由**所有单元上的近似解构成**。

有限元思想2

- 由于变分原理的应用，使第二、三类及不同媒质分界面上的边界条件作为**自然边界条件**在总体合成时将隐含地得到满足；
- 也就是说，自然边界条件将被包含在泛函达到极值的要求之中，不必单独列出，而唯一考虑的仅是**强制边界条件**（第一类边界条件）的处理，这就进一步简化了方法的构造。

有限元法的优点

- 最终求解的线性代数方程组一般为正定的稀疏系数矩阵；
- 特别适合处理具有复杂几何形状的物体和边界问题；
- 方便于处理具有多种介质和非均匀连续媒质问题；
- 便于计算机上实现，并作成标准软件包。
- 有限元法对整个系统的性质通过n个有限参数 a_i ($i=1, 2, \dots, n$) 来描述
- 描述整个系统的n个方程 $F(a_i)=0$, ($i=1, 2, \dots, n$) 是由所有子区域的贡献项通过简单的叠加得到；
- 子区域把整个系统分成许多可识别的实体，不重叠又不遗漏。

有限元法主要特点1

- 离散化过程保持了明显的物理意义。因为变分原理描述了支配物理现象的物理学中的**最小作用原理**（如力学中的最小势能原理、静电学中的汤姆逊定理等）。
- 基于问题固有的物理特性而予以离散化处理，列出计算公式，当可保证方法的正确性、数值解的存在与稳定性等前提要素。

有限元法主要特点2

- 优异的解题能力。与其他数值方法相比较，在适应场域边界几何形状以及媒质物理性质变异情况的复杂问题求解上，有突出的优点：
- 不受几何形状和媒质分布的复杂程度限制；
- 不同媒质分界面上的边界条件是自动满足的；不必单独处理第二、三类边界条件；
- 离散点配置比较随意，通过控制有限单元剖分密度和单元插值函数的选取，可以充分保证计算精度。

有限元法主要特点3

- 可方便地编写通用计算程序，使之构成模块化的子程序集合。
- 从数学理论意义上讲，有限元作为应用数学的一个分支，它使微分方程的解法与理论面目一新，推动了泛函分析与计算方法的发展。

§ 7.2 变分原理与尤拉方程

在微积分学形成初期，以数学物理问题为背景，与多元函数的极值问题相对应，已在几何、力学上提出了若干个求解泛函极值的问题。

如图 7.1 中的质点最速降线问题所述，质点 A 从定点 (x_1, y_1) 自由下滑到定点 $B(x_2, y_2)$ ，试求使滑行时间最短的质点下滑轨道 $y = y(x)$ 。只受重力作用。

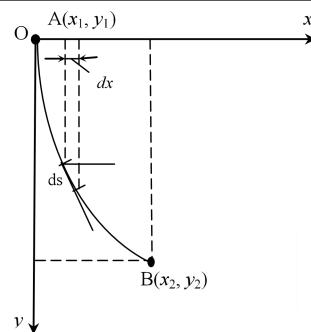


图 7.1 最速降线问题

图示滑行弧段 ds 所需时间为

$$\begin{aligned} mgy &= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \\ dt &= \frac{ds}{v} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{2gy}} = \frac{\sqrt{1+y'^2}dx}{\sqrt{2gy}} \end{aligned}$$

滑行总时间为

$$J[y(x)] = T[y(x)] = \int_0^T dt = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx \quad (7-1)$$

$$J[y(x)] = T[y(x)] = \int_0^T dt = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx$$

(7-1) 式 $J = J[y(x)]$ 不仅取决于积分端点 x_1 和 x_2 ，而且取决于 $y = y(x)$ 的选取。 J 取决于 $y(x)$ ，所以 J 是函数 $y(x)$ 的函数，称之为 $y(x)$ 的泛函，记作 $J[y(x)]$ 。

于是最速降线问题，在数学上就归结为研究泛函 $J[y(x)]$ 的极值问题，即

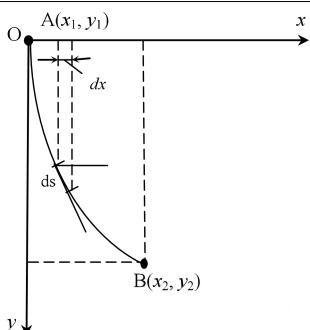


图 7.1 最速降线问题

$$\left\{ \begin{array}{l} J[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx = \min \\ y(x_1) = 0 \quad y(x_2) = y_2 \end{array} \right. \quad (7-2)$$

泛函的极值（max 或 min）问题就称为变分问题。一般，可导出下列对应于一个自变量 x 、单个函数 $y(x)$ 及其导数 $y'(x)$ 的已知函数

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx \quad (7-3)$$

式中 F 为 x 、 y 和 y' 的已知函数。泛函 $J[y]$ 的自变量不是一般的自变量，而是一个或几个函数所属的函数族 $y(x)$ 。

在端点 x_1 和 x_2 上分别等于给定值的无数个函数 $y(x)$ 中，仅有一个 $\bar{y}(x)$ 能使定积分 $J[y]$ 达到极小值，此函数 $\bar{y}(x)$ 称为极值函数。

变分问题在于寻求使泛函达到极值的该极值函数 $\bar{y}(x)$ ，即分析研究泛函的极值问题。

泛函变分问题的经典解法有两种，一种称之为直接解法，另一类是间接解法。

直接解法是直接把泛函的极值问题近似地转化为一般多元函数的极值问题，用有限维子空间中的函数去逼近无穷维空间中的极值函数，近似求得泛函的极值。例如瑞利—里兹法、康脱洛维奇法、迦辽金法等。

间接解法是将变分问题转化为尤拉方程（微分方程）的定解问题，即边值问题来求解。

- 对于微分方程求解，在实际应用中比较灵活、通用的有限差分法所代替。
- 但有限差分法在理论上没有以变分原理为基础，因而其收敛性和数值稳定性往往得不到保证。
- 有限元法是里兹法与有限差分法相结合的成果，它取长补短地在理论上以变分为基础，在具体方法构造上又利用了有限差分法网格离散化处理的思想。
- 有限元法解题，首先把待求的边值问题转化为等价的变分问题，构造一个分片解析的有限元子空间，把变分问题近似地转化为有限元子空间中的多元函数极值问题，直接探求变分问题的近似解（极值函数解），作为边值问题的近似解，这就是有限元的变分原理。

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx$$

以式 (7-3) 推导尤拉方程。

设函数 $y(x)$ 稍有变化，记作 $y + \delta y$ ， δy 称之为 $y(x)$ 的变分，它反映了整个函数的變化量。这样泛函 $J[y]$ 的值也应随之变动，相当于变分 δy 的泛函增量为

$$\begin{aligned} \Delta J &= J[y + \delta y] - J[y] \\ &= \int_{x_1}^{x_2} [F(x, y + \delta y, y' + \delta y') - F(x, y, y')] dx \end{aligned} \quad (7-4)$$

考虑到 y 及 y' 的增量：

将 (7-4) 式由多元函数的泰勒公式展开

$$\begin{aligned} \Delta J &= \int \left\{ \left[\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right] + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} (\delta y)^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \delta y \delta y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} (\delta y')^2 \right] + \dots \right\} dx \end{aligned}$$

$$\Delta J = \delta J + \delta^2 J + \delta^3 J + \dots \approx \delta J \quad (7-5)$$

式中作为泛函增量 ΔJ 的线性主部为

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right] dx \quad (7-6)$$

δJ 称为泛函 $J[y]$ 的一次变分（简称变分）。而 $\delta^2 J$ 、 $\delta^3 J$ ……分别是函数变分 δy 及其导数 $\delta y'$ 的二次、三次齐次式……等的积分，依次称为二次变分，三次变分……

令变分问题的解为 $y = y(x)$, 且设极值解 $y = y(x)$ 稍有变动 $y + \delta y$, 且令

$$\delta y = \varepsilon \eta(x) \quad (7-7)$$

式中 ε 为任意给定的微量实参数, ε 值就确定了 $y = y(x, \varepsilon)$ 函数族中的某一曲线, 进而确定泛函 $J[y(x, \varepsilon)]$ 之值; $\eta(x)$ 是区间 $[x_1, x_2]$ 且满足 $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ 齐次边界条件的可微函数。泛函 $J[y + \varepsilon \eta] = J[y(x, \varepsilon)] = \Phi(\varepsilon)$ 就成为变量 ε 的函数, 且当 $\varepsilon = 0$ 时获极值函数的解。(下面证明)

证明: $\Phi(\varepsilon)$ 在 $\varepsilon = 0$ 时取得极值的必要条件是

$$\Phi'(\varepsilon)|_{\varepsilon=0} = \Phi'(0) = 0 \quad (7-8)$$

$$\therefore \Phi(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} F[x, y(x, \varepsilon), y'(x, \varepsilon)] dx$$

$$\begin{aligned} \Phi'(\varepsilon) &= \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} F[x, y(x, \varepsilon), y'(x, \varepsilon)] \cdot \frac{\partial}{\partial \varepsilon} y(x, \varepsilon) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial y'} F[x, y(x, \varepsilon), y'(x, \varepsilon)] \cdot \frac{\partial}{\partial \varepsilon} y'(x, \varepsilon) \right\} dx \end{aligned} \quad (7-9)$$

$$\because \frac{\partial}{\partial \varepsilon} y(x, \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} [y(x) + \varepsilon \eta(x)] = \eta(x)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} y'(x, \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} [y'(x) + \varepsilon \eta'(x)] = \eta'(x)$$

故

$$\begin{aligned} \Phi'(\varepsilon) &= \int_{x_1}^{x_2} \left\{ F_y[x, y(x, \varepsilon), y'(x, \varepsilon)] \eta(x) + \right. \\ &\quad \left. F_{y'}[x, y(x, \varepsilon), y'(x, \varepsilon)] \eta'(x) \right\}|_{\varepsilon=0} dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left\{ F_y[x, y(x), y'(x)] \eta(x) + F_{y'}[x, y(x), y'(x)] \eta'(x) \right\} dx \end{aligned} \quad (7-10)$$

$$\text{简写为 } \Phi'(0) = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' \right] dx \quad (7-11)$$

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right] dx \quad (7-6)$$

(7-11) 与 (7-6) 式比较, 只差一个数值因子 ε , 故极值函数解 $y = y(x)$ 必须满足的必要条件 (7-8) 等同于 $\delta J = \Phi'(0) = 0$ (7-12)

$$\text{还可写成 } \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right] dx = 0 \quad (7-13)$$

第二项利用分部积分, 并根据变分与微分顺序可互换原理, (7-13) 可写为

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y} \delta y dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{d}{dx} (\delta y) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y} \delta y dx + \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \delta y \right) \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx + \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \delta y \right) \Big|_{x_1}^{x_2} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (7-14)$$

在变分问题中, 变分通常在端点保持为零, 即

$$\delta y \Big|_{x=x_1} = 0 \quad \delta y \Big|_{x=x_2} = 0$$

于是 (7-14) 可写为

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx = 0 \quad (7-15)$$

由于 (7-15) 对任意 δy 均成立，
故只有

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \quad (7-16)$$

方程 (7-16) 就称为泛函 (7-3) 的极值问题的尤拉方程。

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx \quad (7-3)$$

与上述过程类似，可继续推导出各种复杂情况下的泛函极值存在的必要条件。

例如在二维电磁场问题中，对应的泛函取决于一个二元函数 $u(x, y)$ ，相应的泛函

$$J[u(x, y)] = \iint_D F[x, y, u(x, y), \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}] dx dy \quad (7-17)$$

其极值存在的必要条件为偏微分方程

$$F_u - \frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} - \frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} = 0 \quad (7-18)$$

式中 $F_u = \frac{\partial F}{\partial u}$, $F_p = \frac{\partial F}{\partial p}$, $F_q = \frac{\partial F}{\partial q}$

$$(且 p = \frac{\partial u}{\partial x}, q = \frac{\partial u}{\partial y})。 \quad (7-19)$$

在这里， $\frac{\partial}{\partial x} \{F_p\}$ 就是对 x 的全偏导函数，此时 y 应看作是固定的，而把 u 、 p 和 q 看作是依赖于 x 的，因此有

$$\frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} = F_{px} + F_{pu} \frac{\partial u}{\partial x} + F_{pp} \frac{\partial p}{\partial x} + F_{pq} \frac{\partial q}{\partial x}$$

同理

$$\frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} = F_{qy} + F_{qu} \frac{\partial u}{\partial y} + F_{qp} \frac{\partial p}{\partial y} + F_{qq} \frac{\partial q}{\partial y} \quad (7-20)$$

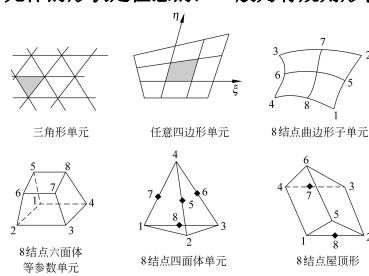
§ 7.3 有限元基本原理

通常有限元法的应用步骤为

- i 给出于待求边值问题相应的泛函及其等效变分问题；
- ii 应用有限单元剖分场域，选取相应的插值函数
- iii 将变分问题离散化为一个多元函数的极值问题，导出一组联立的代数方程；
- iv 选择适当的代数解法，解有限元方程，即可得边值问题的近似解（数值解）。

有限元法的场域离散化

- 将场域分割成有限个单元体的集合。
- 单元体的形状是任意的，一般为有规则形状。



场域离散化注意事项

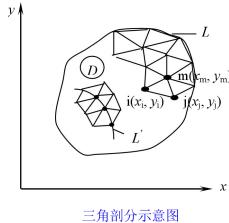
- 各单元只能在顶点处相交, 图 7.3 中的 a 点是非法的。



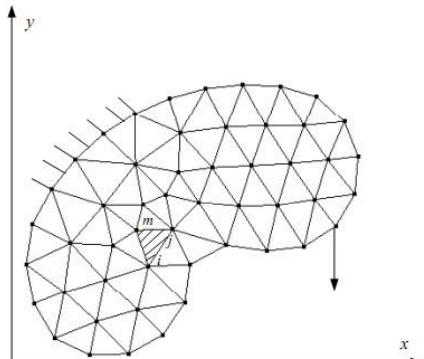
- 不同单元在边界相连, 既不能相互分离又不能相互重叠。
- 各单元结点编号应一致, 按逆时针方向, 从最小结点号开始。

三角元剖分: 不同媒质的分界线, 不容许跨越分界线的三角元, 三角元的边逼近边界, 三角形要求不要太尖或太钝。

顶点编号相差不能太悬殊, 对多区域的编号, 按区域连续编号。三角形节点编号按逆时针顺序编号。



三角剖分示意图



1. 电磁场边值问题及其等价变分问题

变分原理的应用实质上是对物理学定律的一种重新描述, 如电磁边值问题中解电学的 **汤姆逊定律** 即是描述静电现象的“最小作用原理”。

汤姆逊定律指出: 处于介质中一个固定的带电导体系统, 其表面上电荷的分布, 应使合成的静电场具有最小的静电能量。

因此, 任一由 n 个带电导体构成的二维静电场问题的规律性可通过能量积分表示为

$$\begin{aligned} W_e &= \iint_D \left(\frac{1}{2} \varepsilon E^2 \right) ds = \iint_D \frac{\varepsilon}{2} |\nabla \Phi|^2 ds \\ &= \int_D \frac{\varepsilon}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = \min \end{aligned} \quad (7-21)$$

式中 ε 为媒质介电系数, W_e 为静电场能量, E 为静电场场强, Φ 为静电场电位, D 为研究域, 且每一带电导体的电位 Φ 的边值条件为

$$\Phi|_{L_i} = u_i(\bar{r}_b) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (7-22)$$

$$J[u(x, y)] = \iint_D F[x, y, u(x, y), \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}] dx dy \quad (7-17)$$

对照 (7-21) 和 (7-17), 静电能量积分即是一类取决于二元位函数 $\varphi(x, y)$ 分布的泛函。因而, 根据汤姆逊定理, 二维静电场的规律性就归结为下述变分问题

$$\left\{ \begin{array}{l} J[\Phi] = \iint_D F[x, y, \Phi(x, y), \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}] dx dy \\ \quad = \iint_D \frac{\varepsilon}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = \min \\ \Phi|_{L_i} = u_i(\bar{r}_b) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{array} \right\} \quad (7-23)$$

(7-23) 式的解答, 即其极值函数 $\Phi(x, y)$ 的解答应满足尤拉方程 (7-18)。并在边界上满足相应的边界条件 (7-22)。

将 (7-23) 式中函数以 (7-18) 尤拉方程中相关各项的运算, 即得场与变分问题 (7-23) 对应的尤拉方程为

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} &= 0 & (7-24) \\ F_u - \frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} - \frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} &= 0 & (7-18) \end{aligned}$$

证明:

$$F_u - \frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} - \frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} = 0 \quad p = \frac{\partial u}{\partial x} \quad q = \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$F_p = \frac{\partial F}{\partial p} \quad F_q = \frac{\partial F}{\partial q} \quad F_u = \frac{\partial F}{\partial u}$$

$$J[\Phi] = \iint_D \frac{\varepsilon}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = \min \quad F_u = \frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial F}{\partial \Phi} = 0$$

而, $p = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$, $F_p = \frac{\partial F}{\partial p} = 2 \frac{\partial \Phi}{\partial x}$ $\frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} = 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$
 $q = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$, $F_q = \frac{\partial F}{\partial q} = 2 \frac{\partial \Phi}{\partial y}$ $\frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} = 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$

所以: $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$

可见, 由变分问题 (7-23) 给出的极值函数 $\Phi(x, y)$ 应满足具有给定边值 (7-22) 的拉普拉斯方程 (7-24), 显然 (7-24) 和 (7-22) 一起构成大家熟知的第一类边值问题。

$$\left\{ \begin{array}{l} J[\Phi] = \iint_D \frac{\varepsilon}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = \min \\ \Phi|_{L_i} = u_i(\bar{r}_b) \quad (i=1, 2, \dots, n) \end{array} \right\} \quad (7-23)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad (7-24)$$

与此相仿, 通过尤拉方程, 可知与下述变分问题

$$\left\{ \begin{array}{l} J[\Phi] = \iint_D \left\{ \frac{\varepsilon}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] - \rho \Phi \right\} dx dy = \min \\ \Phi|_{L_i} = u_i(\bar{r}_b) \quad (i=1, 2, \dots, n) \end{array} \right\} \quad (7-25)$$

等价的边值问题是

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \\ \Phi|_{L_i} = u_i(\bar{r}_b) \quad (i=1, 2, \dots, n) \end{array} \right. \quad (7-26)$$

(7-26) 式即泊松方程的第一类边值问题。

对第二、三类边值问题(式中 $f_1(\bar{r}_b) = 0$ 即为第二类边值问题)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (x, y) \in D \\ \left[\frac{\partial \Phi}{\partial n} + f_1(\bar{r}_b) \Phi \right]|_L = f_2(\bar{r}_b) \end{array} \right. \quad (7-27)$$

其等价变分问题可表示为

$$\begin{aligned} J[\Phi] &= \iint_D \left\{ \frac{\varepsilon}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] - \rho \Phi \right\} dx dy + \\ &\quad \int_L \varepsilon \left(\frac{1}{2} f_1 \Phi^2 - f_2 \Phi \right) dl = \min \end{aligned} \quad (7-28)$$

由 (7-28) 式可见, 第二类或第三类边界条件在变分问题中已被包含在泛函达到极值的要求之中, 不必单独写出和另行处置, 自动满足, 故称此种边界条件为自然边界条件, 其相应的变分问题称为无条件变分问题。

但对于第一类边界条件, 必须作为定解条件列出 (式 (7-25)), 其变分问题求极值函数时必须在满足这一类边界条件的函数中去寻求

因此, 称这类边界条件为强加边界条件, 其相应的变分问题 (7-25) 称条件变分问题。

在上述能量积分对应的泛函中, 二次地依赖于函数及其偏导数, 故又称为函数的二次泛函。

2. 变分问题的离散化与有限元方程

对平面域 D 进行离散化（剖分）处理时，可采用多种几何剖分与相应的分片插值法。

这里以常用的三角剖分及相应的三顶点线性插值为例，讨论场域 D 的三角剖分问题，如图 7.2 所示。

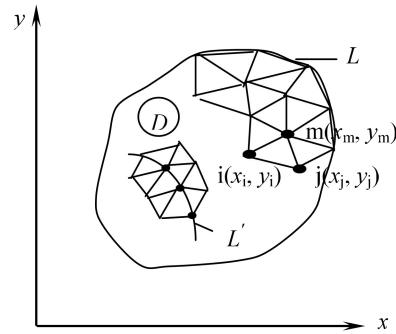


图 7.2 场域 D 的三角剖分示意图

将 D 域剖分为有限个互不重叠的三角形有限单元（简称三角元）。要求任意三角元的顶点必须也是其相邻三角元的顶点，而不能是相邻三角元边上的内点。

当有不同媒质的分界线时，不允许有跨越分界线的三角元。剖分一直延到边界 L ，如边界线为曲线，则应以三角元的一边去逼近。

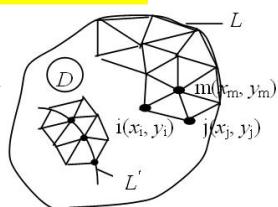
三角元可大可小，应根据计算精度要求，确定剖分密度。

对三角元顶点的编号，以压缩存储量，简化计算程序及计算量为准。图中给出一种三顶点编号。对任一三角元 e （单元编号 $e=1, 2, \dots, e_0$ ）其三顶点的节点编号，以逆时针顺序建立局部编码序，标记为 i, j, m 。

基于上述剖分，在三角元 e 内，分别给定对 x, y 呈线性变化的插值函数

$$\tilde{\Phi}^e(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad (7-36)$$

以此近似替代该三角元内的待求变分问题的解 $\Phi(x, y)$ 。



- 在一有限单元上进行分片线性插值
- 基函数：

$$\alpha_1 = \begin{vmatrix} \varphi_i & x_i & y_i \\ \varphi_j & x_j & y_j \\ \varphi_m & x_m & y_m \end{vmatrix} / \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix}$$

$$\tilde{\varphi}^e(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad (7-36)$$

$$\begin{cases} \varphi_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i \\ \varphi_j = \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j \\ \varphi_m = \alpha_1 + \alpha_2 x_m + \alpha_3 y_m \end{cases} \quad \xrightarrow{\text{red arrow}} \quad \begin{cases} \alpha_1 = (a_i \varphi_i + a_j \varphi_j + a_m \varphi_m) / 2\Delta \\ \alpha_2 = (b_i \varphi_i + b_j \varphi_j + b_m \varphi_m) / 2\Delta \\ \alpha_3 = (c_i \varphi_i + c_j \varphi_j + c_m \varphi_m) / 2\Delta \end{cases}$$

式(7-36)中待定系数 α_1 、 α_2 和 α_3 ，可由如下联立方程求解：

$$\begin{cases} \alpha_1 = (a_i\Phi_i + a_j\Phi_j + a_m\Phi_m)/2\Delta \\ \alpha_2 = (b_i\Phi_i + b_j\Phi_j + b_m\Phi_m)/2\Delta \\ \alpha_3 = (c_i\Phi_i + c_j\Phi_j + c_m\Phi_m)/2\Delta \end{cases} \quad (7-37)$$

式中 $a_i = x_jy_m - x_my_j$, $a_j = x_my_i - x_iy_m$

$$a_m = x_iy_j - x_jy_i$$

$$b_i = y_j - y_m, \quad b_j = y_m - y_i, \quad b_m = y_i - y_j$$

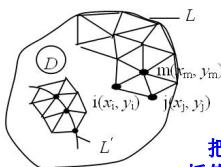
$$c_i = x_m - x_j, \quad c_j = x_i - x_m, \quad c_m = x_j - x_i$$

$$\Delta = \frac{1}{2}(b_i c_j - b_j c_i) \text{ 为三角元面积。}$$

而 $a_i, b_j, c_j, \dots, c_m$ 各系数可按 i, j, m 下标
顺序置换而得。

于是可得定义于三角元e上的线性插值函数为

$$\begin{aligned} \Phi^e(x, y) &= \frac{1}{2\Delta} [(a_i + b_i x + c_i y)\Phi_i + \\ &\quad (a_j + b_j x + c_j y)\Phi_j + \\ &\quad (a_m + b_m x + c_m y)\Phi_m] \\ &= \sum_{i,j,m} \Phi_s N_s^e(x, y) \end{aligned} \quad (7-38)$$



把单元内部的电位通过节点电位插值出来。

式中 $N_s^e(x, y)$ 称三角元 e 上的线性插值基函数（或称形状函数），它取决于单元的形状及其相应节点的配置，记作

$$N_s^e(x, y) = \frac{1}{2\Delta} (a_s + b_s x + c_s y) \quad s = i, j, m \quad (7-39)$$

由此，式(7-38)可简洁的以矩阵形式写为：

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}^e(x, y) &= \begin{bmatrix} N_i^e & N_j^e & N_m^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \\ \Phi_m \end{bmatrix} \\ &= [N]_e [\Phi]_e \end{aligned} \quad (7-40)$$

由于相关的三角元的公共边及公共节点上的函数取值相同，故可以将每个三角元上构造的线性插值函数 $\tilde{\Phi}^e(x, y)$ 进行拼合，使整个 D 域用拼合的分片线性插值函数描述。

显然，它取决于待求函数在各个节点上的值 $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{n_0}$ (n_0 为总结点数)。

下面以二维拉普拉斯场的第一类边值问题所对应的变分问题为例，说明变分问题的离散化过程。

i 单元分析

根据三角剖分，二次泛函可表示为遍及所有单元的能量积分的总和，即

$$J[\Phi] = \sum_{e=1}^{e_0} J_e[\Phi] \quad (7-41)$$

式中 $J_e[\Phi]$ 表示三角元 e 所对应的能量积分，且

$$J_e[\Phi] \approx J_e[\tilde{\Phi}^e] = \iint_{D_e} \frac{\varepsilon}{2} \left[\left(\frac{\partial \tilde{\Phi}^e}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}^e}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

$$\tilde{\Phi}^e(x, y) = \frac{1}{2\Delta} [(a_i + b_i x + c_i y)\Phi_i + (a_j + b_j x + c_j y)\Phi_j + (a_m + b_m x + c_m y)\Phi_m] = \sum_{i,j,m} \Phi_s N_s(x, y)$$

由上式可得

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}^e}{\partial x} = (b_i \Phi_i + b_j \Phi_j + b_m \Phi_m)/2\Delta$$

所以

$$\iint_{D_e} \varepsilon \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}^e}{\partial x} \right)^2 dx dy = \frac{\varepsilon}{4\Delta} (b_i \Phi_i + b_j \Phi_j + b_m \Phi_m)^2$$

$$= \frac{\varepsilon}{4\Delta} \begin{bmatrix} \Phi_i & \Phi_j & \Phi_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_i b_i & b_i b_j & b_i b_m \\ b_j b_i & b_j b_j & b_j b_m \\ b_m b_i & b_m b_j & b_m b_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \\ \Phi_m \end{bmatrix}$$

$$= [\Phi]_e^T [K_1]_e [\Phi]_e$$

$$\text{式中 } [K_1]_e = \frac{\varepsilon}{4\Delta} \begin{bmatrix} b_i b_i & b_i b_j & b_i b_m \\ b_j b_i & b_j b_j & b_j b_m \\ b_m b_i & b_m b_j & b_m b_m \end{bmatrix} \quad (7-43)$$

$$\text{同理可得: } \iint_{D_e} \varepsilon \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}^e}{\partial y} \right)^2 dx dy = [\Phi]_e^T [K_2]_e [\Phi]_e \quad (7-44)$$

式中

$$[K_2]_e = \frac{\varepsilon}{4\Delta} \begin{bmatrix} c_i c_i & c_i c_j & c_i c_m \\ c_j c_i & c_j c_j & c_j c_m \\ c_m c_i & c_m c_j & c_m c_m \end{bmatrix}$$

$$(7-45)$$

因此

$$J_e[\tilde{\Phi}^e] = \frac{1}{2} [\Phi]_e^T [K_1]_e [\Phi]_e + \frac{1}{2} [\Phi]_e^T [K_2]_e [\Phi]_e$$

$$= \frac{1}{2} [\Phi]_e^T [K]_e [\Phi]_e$$

$$(7-46)$$

其中

$$[K]_e = [K_1]_e + [K_2]_e = \begin{bmatrix} K_{ii}^e & K_{ij}^e & K_{im}^e \\ K_{ji}^e & K_{jj}^e & K_{jm}^e \\ K_{mi}^e & K_{mj}^e & K_{mm}^e \end{bmatrix} \quad (7-47)$$

$$\text{式中 } [K]_e = [K_1]_e + [K_2]_e = \begin{bmatrix} K_{ii}^e & K_{ij}^e & K_{im}^e \\ K_{ji}^e & K_{jj}^e & K_{jm}^e \\ K_{mi}^e & K_{mj}^e & K_{mm}^e \end{bmatrix}$$

$$(7-47)$$

此三阶方阵 $[K]_e$ 式单元电场能的离散矩阵，称为单元电场能系数矩阵，是对称阵，其元素一般式为：

$$K_{rs}^e = K_{sr}^e = \frac{\varepsilon}{4\Delta} (b_r b_s + c_r c_s) \quad (r, s = i, j, m)$$

$$(7-48)$$

ii 总体合成

由式(7-41)可知,为得到 \mathbf{D} 域内 $J[\Phi]$ 关于节点电位的离散表达时,首先应将式(7-46)中的 $[\Phi]_e$ 扩充为 $[\Phi]$,此矩阵 $[\Phi]$ 式全部节点处电位值按节点编号顺序排列成的一个 n_0 阶列阵;

$$J[\Phi] = \sum_{e=1}^{e_0} J_e [\Phi] \quad (7-41)$$

同时将 $[K]_e$ 扩充为 $[\bar{K}]_e$,此 $[\bar{K}]_e$ 系在式(7-47)所示 $[K]_e$ 的基础上,按节点编号顺序展开与列,构成 n_0 阶方阵,其中除行、列数分别为 i, j, m 时有九个原 $[K]_e$ 的元素外, n_0 阶方阵中,其余元素均为零。

于是 (7-46) 式可改写为:

$$J_e [\tilde{\Phi}^e] = \frac{1}{2} [\Phi]^T [\bar{K}]_e [\Phi] \quad (7-49)$$

总体能量积分二次泛函可离散为

$$\begin{aligned} J[\Phi] &= J_e [\tilde{\Phi}] = \sum_{e=1}^{e_0} J_e [\tilde{\Phi}] \\ &= \frac{1}{2} [\Phi]^T \left(\sum_{e=1}^{e_0} [\bar{K}]_e \right) [\Phi] \quad (7-50) \\ &= \frac{1}{2} [\Phi]^T [K] [\Phi] \end{aligned}$$

式中 $[K]$ 称为总电场能系数矩阵。

因为 $[K] = \sum_{e=1}^{e_0} [\bar{K}]_e$, 可见其元素应为

$$K_{ij} = \sum_{e=1}^{e_0} K_{ij}^e \quad (i, j = 1, 2, \dots, n_0) \quad (7-51)$$

由以上可判定, $[K]$ 是对称阵(即 $K_{ij} = K_{ji}$)。

由式(7-50)可将变分问题(7-23)离散化为:

$$\begin{aligned} J[\Phi] &\approx J(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{n_0}) = \frac{1}{2} [\Phi]^T [K] [\Phi] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n_0} K_{ij} \Phi_i \Phi_j = \min \end{aligned} \quad (7-52)$$

根据函数极值条件,应有

$$\frac{\partial J}{\partial \Phi_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n_0)$$

故由式(5-52)可得

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n_0} K_{ij} \Phi_i \Phi_j \right)}{\partial \Phi_i} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n_0} K_{ij} \Phi_j = 0$$

$$\text{即 } \sum_{i,j=1}^{n_0} K_{ij} \Phi_j = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n_0)$$

或以矩阵表示为待解的多元线性代数方程组

$$[K][\Phi] = \{P\} \quad (5-53)$$

此方程即为有限元方程。

有限元方程的求解与强制边界条件处理

- 迭代法求解，凡遇到边界节点所对应的方程均不迭代，节点值始终保持给定值，不必单独处理边界。
- 直接法求解，设m节点为边界节点， $\Phi_m = \Phi_0$
则将对角线元素 $K_{mm} = 1$ ，再把m行和m列的其他元素设为零，方程右端改为给定的电位。

其他元素乘去未处理前的对应列的特征元素与 Φ_0 的乘积。（直接法求解）

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \\ \varphi_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K_{11}\varphi_0 \\ -K_{21}\varphi_0 \\ \vdots \\ -K_{(n-1)1}\varphi_0 \end{bmatrix} \quad [K']\{\varphi\} = \{P'\}$$

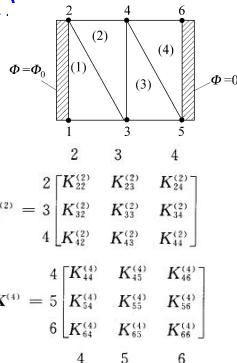
3. 有限元应用实例（1）

区域分割及编号举例

全域有4个三角形

每个三角形的矩阵为

$$\begin{aligned} & \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} 2 & 3 & 4 \end{array} \\ & \begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ 2 \end{array} \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{13}^{(1)} & K_{12}^{(1)} \\ K_{31}^{(1)} & K_{33}^{(1)} & K_{32}^{(1)} \\ K_{21}^{(1)} & K_{23}^{(1)} & K_{22}^{(1)} \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{bmatrix} K_{22}^{(2)} & K_{23}^{(2)} & K_{24}^{(2)} \\ K_{32}^{(2)} & K_{33}^{(2)} & K_{34}^{(2)} \\ K_{42}^{(2)} & K_{43}^{(2)} & K_{44}^{(2)} \end{bmatrix} \\ & \begin{array}{c} 3 \\ 5 \\ 4 \end{array} \begin{bmatrix} K_{33}^{(3)} & K_{35}^{(3)} & K_{34}^{(3)} \\ K_{53}^{(3)} & K_{55}^{(3)} & K_{54}^{(3)} \\ K_{43}^{(3)} & K_{45}^{(3)} & K_{44}^{(3)} \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{bmatrix} K_{44}^{(4)} & K_{45}^{(4)} & K_{46}^{(4)} \\ K_{54}^{(4)} & K_{55}^{(4)} & K_{56}^{(4)} \\ K_{64}^{(4)} & K_{65}^{(4)} & K_{66}^{(4)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$



总系数矩阵由各个单元的系数矩阵累加而成。在累加前，各个单元的系数矩阵按照总节点数扩展成全局矩阵。

按照全域节点顺序重新排列顺序，没有数值的元素补零。

$$\bar{K}^{(1)} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{13}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ K_{31}^{(1)} & K_{33}^{(1)} & K_{32}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ K_{21}^{(1)} & K_{23}^{(1)} & K_{22}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{K}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{22}^{(2)} & K_{23}^{(2)} & K_{24}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & K_{32}^{(2)} & K_{33}^{(2)} & K_{34}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & K_{42}^{(2)} & K_{43}^{(2)} & K_{44}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ 2 \end{array} \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{13}^{(1)} & K_{12}^{(1)} \\ K_{31}^{(1)} & K_{33}^{(1)} & K_{32}^{(1)} \\ K_{21}^{(1)} & K_{23}^{(1)} & K_{22}^{(1)} \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{bmatrix} K_{22}^{(2)} & K_{23}^{(2)} & K_{24}^{(2)} \\ K_{32}^{(2)} & K_{33}^{(2)} & K_{34}^{(2)} \\ K_{42}^{(2)} & K_{43}^{(2)} & K_{44}^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} 3 \\ 5 \\ 4 \end{array} \begin{bmatrix} K_{33}^{(3)} & K_{35}^{(3)} & K_{34}^{(3)} \\ K_{53}^{(3)} & K_{55}^{(3)} & K_{54}^{(3)} \\ K_{43}^{(3)} & K_{45}^{(3)} & K_{44}^{(3)} \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{bmatrix} K_{44}^{(4)} & K_{45}^{(4)} & K_{46}^{(4)} \\ K_{54}^{(4)} & K_{55}^{(4)} & K_{56}^{(4)} \\ K_{64}^{(4)} & K_{65}^{(4)} & K_{66}^{(4)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ 2 \end{array} \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{13}^{(1)} & K_{12}^{(1)} \\ K_{31}^{(1)} & K_{33}^{(1)} & K_{32}^{(1)} \\ K_{21}^{(1)} & K_{23}^{(1)} & K_{22}^{(1)} \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{bmatrix} K_{22}^{(2)} & K_{23}^{(2)} & K_{24}^{(2)} \\ K_{32}^{(2)} & K_{33}^{(2)} & K_{34}^{(2)} \\ K_{42}^{(2)} & K_{43}^{(2)} & K_{44}^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} 3 \\ 5 \\ 4 \end{array} \begin{bmatrix} K_{33}^{(3)} & K_{35}^{(3)} & K_{34}^{(3)} \\ K_{53}^{(3)} & K_{55}^{(3)} & K_{54}^{(3)} \\ K_{43}^{(3)} & K_{45}^{(3)} & K_{44}^{(3)} \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{bmatrix} K_{44}^{(4)} & K_{45}^{(4)} & K_{46}^{(4)} \\ K_{54}^{(4)} & K_{55}^{(4)} & K_{56}^{(4)} \\ K_{64}^{(4)} & K_{65}^{(4)} & K_{66}^{(4)} \end{bmatrix}$$

总系数矩阵为：

$$K_{ij} = \sum_{e=1}^{n_0} K_{ij}^e \quad (i, j = 1, 2, \dots, n_0)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & K_{13}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} + K_{23}^{(1)} & K_{23}^{(1)} + K_{24}^{(1)} & K_{24}^{(1)} & 0 & 0 \\ K_{31}^{(1)} & K_{32}^{(1)} + K_{33}^{(1)} & K_{33}^{(1)} + K_{34}^{(1)} & K_{34}^{(1)} + K_{35}^{(1)} & K_{35}^{(1)} & 0 \\ 0 & K_{42}^{(1)} & K_{43}^{(1)} + K_{44}^{(1)} & K_{44}^{(1)} + K_{45}^{(1)} + K_{46}^{(1)} & K_{45}^{(1)} + K_{46}^{(1)} & K_{46}^{(1)} \\ 0 & 0 & K_{53}^{(1)} & K_{54}^{(1)} + K_{55}^{(1)} & K_{55}^{(1)} + K_{56}^{(1)} & K_{56}^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & K_{64}^{(1)} & K_{65}^{(1)} + K_{66}^{(1)} & K_{66}^{(1)} \end{bmatrix}$$

式中一般元素为：

$$K_{ii} = \sum_{\text{以} i \text{为顶点的} e} K_{ii}^e$$

$$K_{ij} = \sum_{\text{以} ij \text{为公共边的} e} K_{ij}^e$$

总系数矩阵特点：

1. K 为对称；
2. K 为正定，主对角占优；
3. K 为带状结构。

整理： $[K][\Phi] = P$

P为节点的外作用量。

$$\begin{array}{l} P_1 = F_1, \quad P_2 = F_1 + F_2, \quad P_3 = F_1 + F_2 + F_3, \\ P_4 = F_2 + F_3 + F_4, \quad P_5 = F_3 + F_4, \quad P_6 = F_4 \end{array}$$

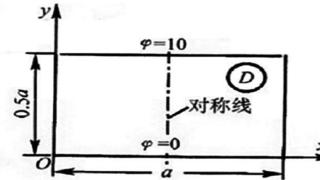
在三角形1中：

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial J^{(1)}}{\partial \Phi_1} \\ \frac{\partial J^{(1)}}{\partial \Phi_3} \\ \frac{\partial J^{(1)}}{\partial \Phi_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{13}^{(1)} & K_{12}^{(1)} \\ K_{31}^{(1)} & K_{33}^{(1)} & K_{32}^{(1)} \\ K_{21}^{(1)} & K_{23}^{(1)} & K_{22}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_3^{(1)} \\ F_2^{(1)} \end{bmatrix}$$

全域方程:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial J}{\partial \Phi_1} = \sum \frac{\partial J^{(1)}}{\partial \Phi_i} \\ \frac{\partial J}{\partial \Phi_2} = \sum \frac{\partial J^{(2)}}{\partial \Phi_i} = \frac{\partial J^{(1)}}{\partial \Phi_i} + \frac{\partial J^{(2)}}{\partial \Phi_i} \\ \frac{\partial J}{\partial \Phi_3} = \sum \frac{\partial J^{(3)}}{\partial \Phi_i} = \frac{\partial J^{(1)}}{\partial \Phi_i} + \frac{\partial J^{(2)}}{\partial \Phi_i} + \frac{\partial J^{(3)}}{\partial \Phi_i} \\ \frac{\partial J}{\partial \Phi_4} = \sum \frac{\partial J^{(4)}}{\partial \Phi_i} = \frac{\partial J^{(2)}}{\partial \Phi_i} + \frac{\partial J^{(3)}}{\partial \Phi_i} + \frac{\partial J^{(4)}}{\partial \Phi_i} \\ \frac{\partial J}{\partial \Phi_5} = \sum \frac{\partial J^{(5)}}{\partial \Phi_i} = \frac{\partial J^{(3)}}{\partial \Phi_i} + \frac{\partial J^{(4)}}{\partial \Phi_i} \\ \frac{\partial J}{\partial \Phi_6} = \sum \frac{\partial J^{(6)}}{\partial \Phi_i} = \frac{\partial J^{(4)}}{\partial \Phi_i} \end{array} \right\}$$

$$= \left[\begin{array}{cccccc} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & \Phi_1 \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)+(2)} & K_{23}^{(1)+(2)} & K_{24}^{(2)} & 0 & \Phi_2 \\ K_{31}^{(1)} & K_{32}^{(1)+(2)} & K_{33}^{(1)+(2)+(3)} & K_{34}^{(2)+(3)} & K_{35}^{(3)} & 0 \\ 0 & K_{42}^{(2)} & K_{43}^{(2)+(3)} & K_{44}^{(2)+(3)+(4)} & K_{45}^{(3)+(4)} & \Phi_4 \\ 0 & 0 & K_{53}^{(3)} & K_{54}^{(3)+(4)} & K_{56}^{(3)+(4)} & \Phi_5 \\ 0 & 0 & 0 & K_{64}^{(4)} & K_{66}^{(4)} & \Phi_6 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)+(2)} \\ F_3^{(1)+(2)+(3)} \\ F_4^{(2)+(3)+(4)} \\ F_5^{(3)+(4)} \\ F_6^{(4)} \end{array} \right]$$

3. 有限元应用实例 (2)**实例**

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 & (0 < x < 0.5a, 0 < y < 0.5a) \\ \varphi \Big|_{\substack{x=0 \\ 0 < y < 0.5a}} = \varphi \Big|_{\substack{0 < x < 0.5a \\ y=0}} = 0 \\ \varphi \Big|_{\substack{0 < x < 0.5a \\ y=0.5a}} = 10 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\substack{x=0.5a \\ 0 < y < 0.5a}} = 0 \end{cases}$$

实例**上述边值问题等价的变分问题**

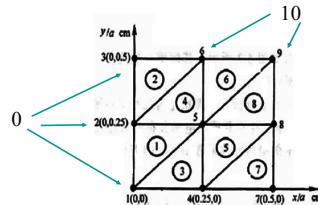
$$\begin{cases} J[\varphi] = \iint_{D/2} \frac{\varepsilon}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = \min \\ \varphi \Big|_{\substack{x=0 \\ 0 < y < 0.5a}} = \varphi \Big|_{\substack{0 < x < 0.5a \\ y=0}} = 0 \\ \varphi \Big|_{\substack{0 < x < 0.5a \\ y=0.5a}} = 10 \end{cases}$$

剖分场域

1 (0,0); 2 (0,0.25); 3 (0,0.5); 4 (0.25,0); 5 (0.25,0.25); 6 (0.25,0.5); 7 (0.5,0); 8 (0.5,0.25); 9 (0.5,0.5)。

三角元e的三顶点编号*e* (*i_e, j_e, m_e*) 的信息:

1 (1,5,2); 2 (2,6,3); 3 (1,4,5); 4 (2,5,6); 5 (4,8,5); 6 (5,9,6); 7 (4,7,8); 8 (5,8,9)。



强制边界条件对应的节点编号 *f_{n1}* 与其上电位值 *φ_{n1}* 的信息 (*f_{n1}, φ_{n1}*):
(1,0); (2,0); (3,0); (4,0); (7,0); (6,10); (9,10)。

系统矩阵

三 角 元 编 号	系数 a/cm		三角元 e 的面积 a ² (cm ²)	系 数 矩 阵 的 元 素 $K_{rs} = K_{rs} + \sum_{i=1}^q K_{ri}^e$ (或 K_{is}^e)
	b _i = y _j - y _m	c _i = x _m - x _j		
1	b ₁ = 0	c ₁ = -0.25	$\Delta = \frac{1}{2}(b_1 c_j - b_j c_i)$	$K_{11} = \frac{\varepsilon}{4\Delta} (b_1 b_j + c_i c_j)$ (<i>r, s</i> = i,j,m)
	b ₂ = 0.25	c ₂ = 0		$K_{12} = \frac{\varepsilon}{4\Delta} (b_1 b_j + c_i c_j)$
	b ₃ = -0.25	c ₂ = 0.25		$K_{22} = \frac{\varepsilon}{4\Delta} (b_2 b_j + c_i c_j)$
			$\Delta = 0.03125$	$K_{13} = \frac{\varepsilon}{4\Delta} (b_1 b_m + c_i c_m)$
				$K_{23} = \frac{\varepsilon}{4\Delta} (b_2 b_m + c_i c_m)$
				$K_{33} = \frac{\varepsilon}{4\Delta} (b_3 b_m + c_i c_m)$
				$K_{14} = \frac{\varepsilon}{4\Delta} (b_1 b_j + c_i c_j)$
				$K_{24} = \frac{\varepsilon}{4\Delta} (b_2 b_j + c_i c_j)$
				$K_{34} = \frac{\varepsilon}{4\Delta} (b_3 b_j + c_i c_j)$
				$K_{15} = \frac{\varepsilon}{4\Delta} (b_1 b_m + c_i c_m)$
				$K_{25} = \frac{\varepsilon}{4\Delta} (b_2 b_m + c_i c_m)$
				$K_{35} = \frac{\varepsilon}{4\Delta} (b_3 b_m + c_i c_m)$
				$K_{16} = \frac{\varepsilon}{4\Delta} (b_1 b_j + c_i c_j)$
				$K_{26} = \frac{\varepsilon}{4\Delta} (b_2 b_j + c_i c_j)$
				$K_{36} = \frac{\varepsilon}{4\Delta} (b_3 b_j + c_i c_j)$

构成主矩阵为

$K_{11} + K_{12}$	$K_{12} + K_{21} + K_{22}$	$K_{13} + K_{23} + K_{31} + K_{32}$	$K_{14} + K_{24} + K_{34} + K_{41} + K_{42}$	$K_{15} + K_{25} + K_{35} + K_{45} + K_{51}$	$K_{16} + K_{26} + K_{36} + K_{46} + K_{56} + K_{61}$
K_{11}^e	K_{12}^e	K_{13}^e	K_{14}^e	K_{15}^e	K_{16}^e
0	K_{21}^e	0	$K_{24}^e + K_{34}^e + K_{41}^e$	0	$K_{25}^e + K_{35}^e + K_{45}^e + K_{51}^e$
K_{21}^e	0	0	0	$K_{26}^e + K_{36}^e + K_{46}^e + K_{56}^e + K_{61}^e$	0
$K_{31}^e + K_{32}^e$	$K_{32}^e + K_{33}^e$	0	$K_{34}^e + K_{43}^e$	$K_{35}^e + K_{45}^e + K_{53}^e + K_{54}^e$	$K_{36}^e + K_{46}^e + K_{56}^e + K_{63}^e + K_{64}^e$
0	$K_{41}^e + K_{42}^e$	$K_{42}^e + K_{43}^e$	0	$K_{45}^e + K_{54}^e$	$K_{46}^e + K_{56}^e + K_{64}^e$
0	0	0	K_{44}^e	0	K_{47}^e
0	0	0	$K_{45}^e + K_{54}^e$	0	$K_{47}^e + K_{57}^e + K_{64}^e$
0	0	0	0	$K_{56}^e + K_{65}^e$	$K_{57}^e + K_{67}^e$

构成有限元方程

$$\begin{array}{l} \text{5,8节点电位未知} \\ \begin{array}{c|ccccc} \varphi_1 & 1.0 & & & & \\ \varphi_2 & -0.5 & 2.0 & & & \\ \varphi_3 & 0 & -0.5 & 1.0 & & \\ \varphi_4 & -0.5 & 0 & 0 & 2.0 & \\ \varphi_5 & 0 & -1.0 & 0 & -1.0 & 4.0 \\ \varphi_6 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & -1.0 & 2.0 \\ \varphi_7 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & 1.0 \\ \varphi_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.0 & 0 & -0.5 & 2.0 \\ \varphi_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & -0.5 & 1.0 \end{array} \end{array}$$

强制边界条件对应的节点编号 f_{ni} 与其上电位值 φ_{ni} 的信息 (f_{ni}, φ_{ni}) :
 $(1,0); (2,0); (3,0); (4,0); (7,0); (6,10); (9,10)$ 。

强制边界条件对应的节点编号 f_{ni} 与其上电位值 φ_{ni} 的信息 (f_{ni}, φ_{ni}) :
 $(1,0); (2,0); (3,0); (4,0); (7,0); (6,10); (9,10)$ 。

强制边界条件处理

其他节点即 5,8 减去未处理前的对应列的特征元素与 φ_0 的乘积。

$$\begin{array}{c|ccccc} \varphi_1 & 1.0 & & & & \\ \varphi_2 & 0 & 1.0 & & & \\ \varphi_3 & 0 & 0 & 1.0 & & \\ \varphi_4 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & \\ \varphi_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4.0 \\ \varphi_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.0 & 1.0 \\ \varphi_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 \\ \varphi_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.0 & 0 & 0 & 2.0 \\ \varphi_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccc} \varphi_1 & 0 & & & & \\ \varphi_2 & 0 & & & & \\ \varphi_3 & 0 & & & & \\ \varphi_4 & 0 & & & & \\ \varphi_5 & -(-1.0 \times 10) & & & & \\ \varphi_6 & 10 & & & & \\ \varphi_7 & 0 & & & & \\ \varphi_8 & -(-0.5 \times 10) & & & & \\ \varphi_9 & 10 & & & & \end{array}$$

应用实例 2

作为典型示例，选取矩形波导
BJ-100 ($a \times b = 22.86 \times 10.16 mm^2$)
中 TE 波的截止波长 λ_c 的分布问题进
行分析。

对 TE 波导场定解问题等价的无条件变分问题

为

$$J[\Phi] = \frac{1}{2} \iint_D \left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 - \lambda^2 \Phi \right) dx dy = \min$$

令 $J[\Phi] = \sum_{e=1}^{e_0} J_e[\Phi]$

而

$$J_e[\Phi] = J_e[\tilde{\Phi}^e] = \iint_{D_e} \frac{\varepsilon}{2} \left[\left(\frac{\partial \tilde{\Phi}^e}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}^e}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

按 § 7.2 中

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}^e}{\partial x} = (b_i \Phi_i + b_j \Phi_j + b_m \Phi_m) / 2\Delta$$

和

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}^e}{\partial y} = (c_i \Phi_i + c_j \Phi_j + c_m \Phi_m) / 2\Delta$$

可得与式(7-46)相同的 $J_e[\tilde{\Phi}^e]$ 表达式

$$J_e[\tilde{\Phi}^e] = \frac{1}{2} [\Phi]^T_e [K]_e [\Phi]_e$$

其中 $[K]_e$ 与式(7-47)相同,其元素如(7-48)给出。

$$[K]_e = [K_1]_e + [K_2]_e = \begin{bmatrix} K_{ii}^e & K_{ij}^e & K_{im}^e \\ K_{ji}^e & K_{jj}^e & K_{jm}^e \\ K_{mi}^e & K_{mj}^e & K_{mm}^e \end{bmatrix} \quad (7-47)$$

$$K_{rs}^e = K_{sr}^e = \frac{\varepsilon}{4\Delta} (b_r b_s + c_r c_s) \quad (r, s = i, j, m) \quad (7-48)$$

经过总体合成,及运用函数极值条件,可得如下有限元方程:

$$[K][\Phi] = \lambda^2 [T][\Phi] \quad (7-54)$$

其中,对应于所选取的有限单元 e ,其各个单元矩阵的元素分别为

$$K_{ij}^e = \iint_{D_e} \left(\frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} + \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right) dx dy \quad (7-55)$$

$$T_{ij}^e = \iint_{D_e} N_i^e N_j^e dx dy \quad (7-56)$$

N_i^e 和 N_j^e 为形状函数,由式(7-39)给定

$$N_s^e(x, y) = \frac{1}{2\Delta} (a_s + b_s x + c_s y) \quad s = i, j, m \quad (7-39)$$

$$[K][\Phi] = \lambda^2 [T][\Phi] \quad (7-54)$$

式(7-54)是广义代数特征值问题。式中 $[K]$ 为对称阵, $[T]$ 为对称正定矩阵。

为求解该式,应把广义特征值问题变换为对称阵 $[V]$ 的特征值问题,为此,将对称正定阵 $[T]$ 利用平方根法(Cholesky)分解为下三角阵 L 与其转置 L^T 的乘积,

即:

$$[T] = [L][L]^T \quad (7-57)$$

为便于书写,将上式以黑体字写为

$$\mathbf{T} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$$

由式(7-54)可导得

$$(\mathbf{L}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{L}^{-T}) (\mathbf{L}^T \Phi) = \lambda^2 (\mathbf{L}^T \Phi) \quad (7-58)$$

$$[K][\Phi] = \lambda^2 [T][\Phi] \quad (7-54)$$

式中 $\mathbf{L}^{-T} = (\mathbf{L}^{-1})^T$,令 $\mathbf{Z} = (\mathbf{L}^T \Phi)$ 则(7-54)式的广义特征值问题的求解可化为对称阵 $\mathbf{V} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{L}^{-T}$ 的特征值问题,

即 $\mathbf{V}\mathbf{Z} = \lambda^2 \mathbf{Z}$ 的特征值问题

而原问题的特征向量 $[\Phi]$ 现变换为 $\mathbf{L}^T \Phi$,在求得 $\mathbf{L}^T \Phi$ 特征向量后,

$$\text{由} \Rightarrow \mathbf{Z} = (\mathbf{L}^T \Phi)$$

再经过 $(\mathbf{L}^T)^{-1} \mathbf{Z}$ 的变换,方能求得原问题的特征向量 $[\Phi]$ 。

$$[K][\Phi] = \lambda^2 [T][\Phi] \quad (7-54)$$

对应于由 (7-54) 求得的一系列特征值 λ^2

其中非负的最小非零特征值就给出相应导中最低型（主模）的截止波长 λ_c 的解。

$$\nabla Z = \lambda^2 Z$$

根据V, 利用matlab特征值求解函数得到特征值的数值解。

数值解与理论值之间的对比结果如表 (7-1) 给处。

表 7-1 数值计算结果与理论值的比较

波型	理论值 λ_{cl}	截止波长 λ_c (cm)			相对误差 $\delta(\%)$ $\delta = \frac{\lambda_{cl} - \lambda_{c2}}{\lambda_{c2}} \cdot 100\%$ ($N_0 = 65$)	
		数值解				
		$N_0 = 21$	$N_0 = 65$	$N_0 = 153$		
TE ₀₀	4.572	4.512	4.569	4.574	0.066	
TE ₀₁	2.286	2.193	2.262	2.275	1.05	
TE ₀₂	2.032	1.847	1.979		2.61	
TE ₁₁	1.857	1.635	1.790		3.61	
TE ₁₀	1.524	1.410	1.488		2.36	
TE ₂₁	1.519	1.250	1.440		5.20	
TE ₂₀	1.219	1.021	1.141		6.40	
TE ₃₀	1.143	0.943	1.093		4.37	
TE ₀₃	1.016	0.922	0.923		9.15	
TE ₄₀	0.996	0.859	0.916		8.03	
TE ₃₂	0.928	0.795	0.891		3.99	

由表 (7-1) 可见, 剖分越细, 计算结果越逼近理论值。

• 谢 谢!