

计算电磁学

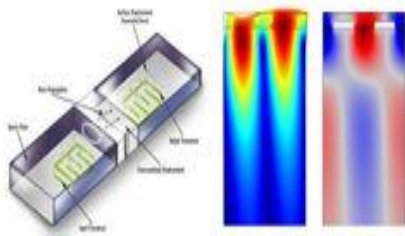
Computational Electromagnetism

第5章 时域有限差分法 (FDTD) (三)

张洪欣
电子工程学院

- 常见周期性边界条件
- 1. 连续性周期边界 (Continuity), 源和目标边界上的场值相等;
- 2. 反对称周期边界 (Antiperiodicity), 源和目标边界上场值符号相反;
- 3. 弗洛奎特周期性边界 (Floquet periodicity), 源和目标边界上场值相差一个相位因子, 相位因子由波矢和边界相对距离确定。Continuity和Antiperiodicity边界可以认为是Floquet periodicity边界在位相分别为0和 π 情况下的两个特例。
- 4. 循环对称性边界 (Cyclic Symmetry), 源和目标边界上场值相差一个相位因子, 相位因子由计算域所对应的扇形角和角向模式数决定。

- 超材料能带结构计算
- 作为压电传感器件的声表面波器件 (Surface Acoustic Wave, SAW) 的本征频率分析。

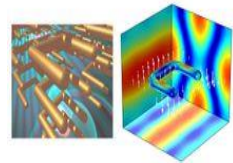


5.7 周期性吸收边界条件

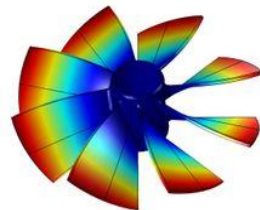
- 周期性边界条件
- 周期性边界条件 (Periodic Boundary Conditions, PBC) 是边界条件的一种, 反映的是如何利用边界条件替代所选部分 (系统) 受到周边环境的影响。
- 可以看作是如果去掉周边环境, 保持该系统应该附加的条件, 也可以看作是由部分的性质来推广表达全局的性质。
- 主要用于数学建模和计算机仿真中, 将具有时空周期性的物理问题简化为单元进行处理。

一、计算机仿真中应用周期性边界条件

- 微纳光学领域内的光子晶体 (Photonic Crystal)、表面等离子体激元 (Surface Plasmon) 列阵结构及超材料 (Metamaterial) 等;
- 这几种结构均由空间上周期性重复的散射体构成, 当计算透射率及能带结构时, 常常可采用Floquet周期边界将结构简化。

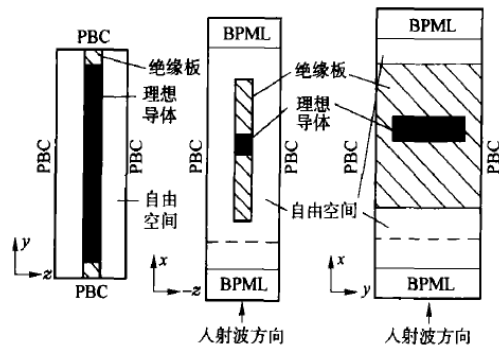
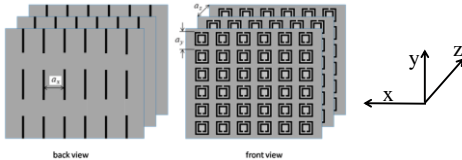


- 飞机、轮船、风力发电机中的涡轮机, 或是旋转电机结构往往具有旋转对称性, 在进行电磁场或振动模态分析时, 可采用Cyclic Symmetry类型周期性边界简化。



二、周期性边界条件的实现

- 将超材料在yz平面无限扩展成为无穷大,在yz平面上,选定材料结构中的一个单元为研究对象;
- 并设金属丝为理想导体,其周围采用周期性边界条件(PBC).波的入射方向沿x方向,可根据研究的需要来决定所选的周期数。



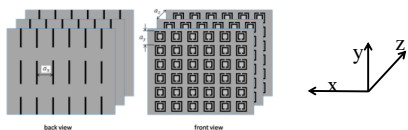
PBC与PML的结合

整个计算区域由3部分组成:

- 一部分为自由空间, $\epsilon_r = \mu_r = 1$;
- 一部分为支撑理想导体的印制板, ϵ_r 、 μ_r 为印制板的相对介电常数和磁导率;
- 还有一部分是理想导体,在理想导体表面,电场的切向分量为零,在理想导体内部,电场和磁场的各个分量均为零。
- 在计算区域的周期性边界(PBC)上,既可以全部采用为电场边界,也可以全部采用为磁场边界,或一部分为电场边界,一部分为磁场边界。

Floquet定理

- 当周期阵列无限大,且馈电或者平面波均匀照射时,结构的周期性将导致其附近的场幅度的分布具有同样的周期性。
- 在相位上,由于馈电相位线性分布或者平面波的斜入射而具有规律的相位差,则在时域上表现为有规律的延时,即一种准周期条件。
- 假想将阵面上的网格线(垂直传播方向)无限平移,将空间划分为无数个周期性子单元,选定其中一个为研究对象,其四壁用PBC截断,则一个周期性单元就代表了整个阵面。



- 选择在yz平面上的一个周期单元,周围用PBC截断;
- 设y方向上的周期长度为 a_y ,z方向上的周期长度为 a_z ,根据Floquet定理,在周期性边界(PBC)上有:
- 磁场边界

$$H_x(x, y + a_y, z) = H_x(x, y, z) \exp(-jk_y a_y)$$

$$H_x(x, y, z + a_z) = H_x(x, y, z) \exp(-jk_z a_z)$$

$$H_z(x, y + a_y, z) = H_z(x, y, z) \exp(-jk_y a_y)$$

$$H_y(x, y, z + a_z) = H_y(x, y, z) \exp(-jk_z a_z)$$

- 电场边界

$$E_x(x, y + a_y, z) = E_x(x, y, z) \exp(-jk_y a_y)$$

$$E_x(x, y, z + a_z) = E_x(x, y, z) \exp(-jk_z a_z)$$

$$E_z(x, y + a_y, z) = E_z(x, y, z) \exp(-jk_y a_y)$$

$$E_y(x, y, z + a_z) = E_y(x, y, z) \exp(-jk_z a_z)$$

- 设电磁波沿x方向垂直入射，则 $k_y=k_z=0$;
- 上述公式简化为:

$$H_x(x, y+a_y, z) = H_x(x, y, z)$$

$$H_x(x, y, z+a_z) = H_x(x, y, z)$$

$$H_z(x, y+a_y, z) = H_z(x, y, z)$$

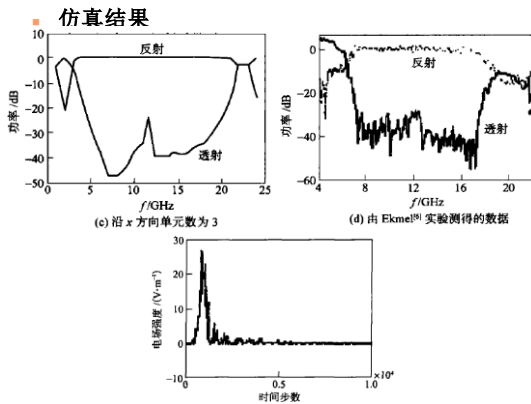
$$H_y(x, y, z+a_z) = H_y(x, y, z)$$

$$E_x(x, y+a_y, z) = E_x(x, y, z)$$

$$E_x(x, y, z+a_z) = E_x(x, y, z)$$

$$E_z(x, y+a_y, z) = E_z(x, y, z)$$

$$E_y(x, y, z+a_z) = E_y(x, y, z)$$



连接边界条件:

- (1)最直接的好处就是为散射场的计算提供了方便;
- (2)使散射体的设置变得比较简单;
- (3)分区计算可以增大动态范围.
- (4) 可以设置任意的入射平面波.

- 在x方向上用PML截断，差分方程同前;
- 在PBC吸收边界上，采用磁场边界时，对于x轴左侧边界，在 $j=j_m$ 的边界上，有:

$$H_x(i, j_m + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) = H_x(i, \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})$$

$$H_z(i + \frac{1}{2}, j_m + \frac{1}{2}, k) = H_x(i + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, k)$$

其他边界的情况依此类推。

5.8 总场-散射场区的连接边界条件

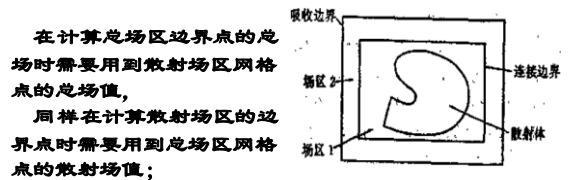
1. 连接边界条件的原理与实现

- 入射波与物体作用产生散射波，散射波与入射波之和为总场;
- 在有些问题中总场正是需要计算的场，例如在吸收和透射等这类问题
- 但是在某些问题中需要的却是散射场，这时就有必要把散射场分离出来。
- 角标 t , s , i 分别表示总场，散射场和入射场;

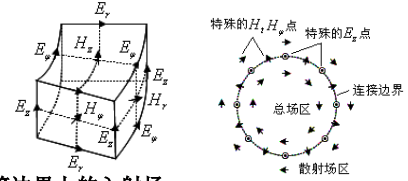
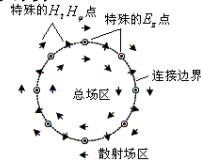
$$E_t = E_s + E_i \quad H_t = H_s + H_i$$

$$E_s = E_t - E_i \quad H_s = H_t - H_i$$

- 讨论总场-散射场区的连接边界条件，利用1D-FDTD方法和线性插值法设置入射波源;
- 在总场和散射场的连接面上设置入射波源，把整个计算空间划分为总场区和散射场区。
- 在总场区和散射场区可以分别用一般的FDTD方程来计算总场和散射场。



- 而散射场区中边界网格点的总场值和总场区中网格边界网格点的散射场值并不存在，所以需要总场-散射场连接面上的场值进行修正。
- 下面给出柱坐标系下总场-散射场区连接边界条件。
- 以柱面边界上的电场为例，在计算时要用到圆柱面外散射场区的磁场 H_ϕ ，
- 由于 $H = H_s + H_p$ ，可以把总场用散射场和入射场之和来代替并带入FDTD方程进行计算。



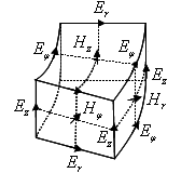
- 首先计算边界上的入射场；
- 设边界上为总场；
- 圆柱面 ($i = ia, j = 0 : ny, k = ka : kb$) :

$$E_{\phi i, j+1/2, k}^{n+1} = \frac{\varepsilon / \Delta t - \sigma / 2}{\varepsilon / \Delta t + \sigma / 2} E_{\phi i, j+1/2, k}^n + \frac{1}{\varepsilon / \Delta t + \sigma / 2} \times \left[\frac{H_{r i, j+1/2, k+1/2}^{n+1/2} - H_{r i, j+1/2, k-1/2}^{n+1/2}}{\Delta z} - \frac{H_{z i+1/2, j+1/2, k}^{n+1/2} - H_{z i-1/2, j+1/2, k}^{n+1/2}}{\Delta r} \right]$$

$$E_{\phi i, j+1/2, k}^{n+1} = \frac{\varepsilon / \Delta t - \sigma / 2}{\varepsilon / \Delta t + \sigma / 2} E_{\phi i, j+1/2, k}^n + \frac{1}{\varepsilon / \Delta t + \sigma / 2} \times \left[\frac{H_{r i, j+1/2, k+1/2}^{n+1/2} - H_{r i, j+1/2, k-1/2}^{n+1/2}}{\Delta z} - \frac{H_{z i+1/2, j+1/2, k}^{n+1/2} - H_{z i-1/2, j+1/2, k}^{n+1/2}}{\Delta r} \right]$$

$$E_{\phi i a, j+1/2, k}^{n+1} = E_{\phi i a, j+1/2, k}^{n+1} - \frac{C}{\Delta r} \cdot H_{i_c i a+1/2, j+1/2, k}^{n+1/2}$$

$$C = 2.0 \Delta t / (2.0 \varepsilon_0 \varepsilon_r + \Delta t \sigma)$$



$$E_{z i, j, k+1/2}^{n+1} = \frac{\varepsilon / \Delta t - \sigma / 2}{\varepsilon / \Delta t + \sigma / 2} E_{z i, j, k+1/2}^n + \frac{1}{\varepsilon / \Delta t + \sigma / 2} \times \left[\left(\frac{1}{2r(i)} + \frac{1}{\Delta r} \right) H_{\phi i+1/2, j, k+1/2}^{n+1/2} + \left(\frac{1}{2r(i)} - \frac{1}{\Delta r} \right) H_{\phi i-1/2, j, k+1/2}^{n+1/2} - \frac{H_{r i, j+1/2, k+1/2}^{n+1/2} - H_{r i, j-1/2, k+1/2}^{n+1/2}}{r(i) \Delta \theta} \right]$$

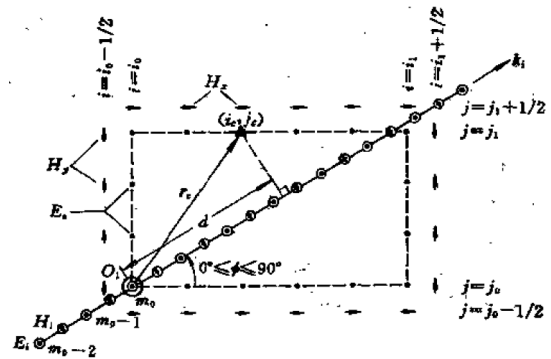
$$E_{z i a, j+1/2, k}^{n+1} = E_{z i a, j+1/2, k}^{n+1} + C \cdot H_{i_c i a+1/2, j+1/2, k}^{n+1/2} \cdot (1/(2ia \cdot \Delta r) + 1/\Delta r)$$

2. 入射波的插值近似

- 由于总场与散射场连接边界上的点到波源的距离并不总是空间步长的整数倍，因此为求出距波源为 d 时的入射波可以采用直接插值近似。
- 用 $E(d)$ 和 $H(d)$ 表示距离波源 d 处的电场和磁场值，则有：

$$d = k_{inc} \cdot r_{comp}, \quad k_{inc} = x \sin \theta \cos \varphi + y \sin \theta \sin \varphi + \hat{z} \cos \theta$$

其中 k_{inc} 为连接边界上的场分量的波矢， r_{comp} 是连接边界上的点到波源的距离矢量。



$$E_i(d) = (d - \text{int}(d))E_i(m_0 + \text{int}(d) + 1) + \{1 - (d - \text{int}(d))\} E_i(m_0 + \text{int}(d))$$

$$H_i(d) = (d' - \text{int}(d'))H_i(m_0 - \frac{1}{2} + \text{int}(d') + 1) + \{1 - (d' - \text{int}(d'))\} E_i(m_0 - \frac{1}{2} + \text{int}(d))$$

其中， int 表示取整， $d' = d + 1/2$

- 根据以上公式，采用一维FDTD方法模拟入射波，然后再考虑入射波的极化方向，将一维波的电磁场分量投影到总场-散射场边界上从而得到其入射波。

为精确地模拟散射体的形状和结构，网格单元取得越小越好。但网格总数增加，计算机存储和CPU时间也会随之增加。

解决这一问题的一般原则是，在基本满足计算精度要求的情况下，尽量节省存储空间和计算时间。与此同时，网格的空间步长对计算误差也有影响。

从色散角度考虑，一般要求满足 $\Delta s \leq \lambda_{\min} / 10$ 。

Δs 为均匀的步长， λ_{\min} 是网格空间内所考虑的电磁波的最短波长。当采用非均匀网格空间时， Δs 应为最大的空间步长。

场区1位于计算网格空间内部，散射体设置在其中，场区1中有入射波及散射波。该区域称为主空间，连接边界以外称作辅助空间，辅助空间要占据构成网格总数的一个较大部分。

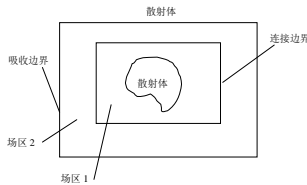


图 56 网格空间场区分

场区2中只允许散射场存在，无入射场，此区域称为主空间。该区域外边界为计算网格空间的截断边界——吸收边界。

场区1和场区2由连接条件衔接。总场区称为主空间，连接边界以外称作辅助空间，辅助空间要占据构成网格总数的一个较大部分。

§ 5.9 FDTD 法在电磁散射中的应用

1. 网格空间与散射体模拟

散射体模拟是FDTD法计算电磁散射问题的关键，只有足够精确地对散射体几何形状，结构组成及其物质特性（ μ, ϵ, σ ）进行模拟的基础上，才有可能求其散射特性。

在散射体模型建模过程中应注意选取网格单元的空间步长，要使构成模型外层网格尽量与散射体边界重合。

电磁波散射问题是一个开放空间中的电磁波问题，一般散射场将充满整个研究空间。而计算机不可能以无限大的网格空间来模拟开放空间，而总是在某处截断网格空间，以吸收边界条件近似地模拟无限空间。

由于吸收边界条件在一定入射角范围内有较好的吸波效果，这就要求吸收边界离开散射体要有足够的距离。图5.6示出网格空间的场区分。

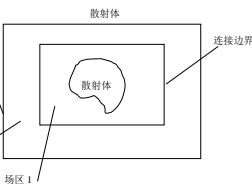


图 56 网格空间场区分

2. 瞬态电磁散射问题

电磁散射问题中瞬态与稳态问题是两个重要方面。如在瞬态问题中，研究散射体对电磁脉冲的响应，可使人们了解核爆炸产生的电磁脉冲对各种军事设备影响，对国防建设有较大作用。

另一方面，可以通过散射体对脉冲波的响应了解散射体宽频带的散射特性。由于脉冲信号包含较宽的频谱，通过Fourier变换，获得其宽频带散射特性。这种宽频带特性的获得只需计算程序的一次运行，体现了FDTD法的优点。

为研究散射体对电磁脉冲的响应，希望入射脉冲有较宽的频谱。尤其是频谱变化平缓且又具有陡峭的截止特性。Gauss脉冲具有这样的特性，其随时间的变化规律为：

$$f(t) = e^{-\frac{(t-t_0)^2}{T^2}} \quad (5-67)$$

其 Fourier 变换为；

$$F(\omega) = \sqrt{\pi} T e^{-\frac{T^2 \omega^2}{4}} \quad (5-68)$$

可见 Gauss 脉冲的频谱仍然为 Gauss 型。

另一种可选择的脉冲形式为：

$$f(t) = \begin{cases} 1 - \cos(2\pi F_b t) & t \leq \frac{1}{F_b} \\ 0 & t > \frac{1}{F_b} \end{cases} \quad (5-69)$$

对无解析形式的入射脉冲波，可采用分区分析表示的方法，即在不同时间步范围执行不同的解析式。对复杂的波形还可采取以数据文件形式按步读入。

由于入射脉冲是依时间顺序分步起作用，其表现形式灵活，从而对脉冲波的模拟可达很高精度。

3. 稳态电磁散射问题

当入射波是一稳态简谐波时，波源可设为，

$$E^i(n\Delta t) = E_0^i \sin(2\pi f n \Delta t) \quad (5-70)$$

f 为入射波频率， n 为迭代步数， Δt 为时间步长。在 $n=0$ ($t=0$) 时，整个网格空间（除波源处外）中的电磁场均设为“零”。

随着 n 的增加，平面波由连接边界向总场区内传播，若总场区内无散射体存在，则总场区内相当于一个均匀媒质空间，在该区内每一网格点的场均按波源同样的规律随时间变化，稳定的电场振幅也为 E_0^i 。

当总场区内存在散射体时，平面波与散射体的作用产生散射场。包含诸多散射状况（如反射，绕射，耦合.....），经过足够的时间步后，网络空间中的电磁场随时间的变化规律将达到稳定。

达到稳定所需时间步数与诸多因素有关，主要取决于散射体结构的复杂程度及其物理性质。目前尚无一种精确的计算方法。A.Taflove&K.R.Umashankar给出了经验值如表5-1所示。

表 5-1 达到稳定所需的时间

散射体结构	稳定所需波源的周期数
凸型二维金属散射体，跨度小于 $1\lambda_0$ ，TM 波有耗的三维结构，特别是由生物体组成的三维结构	≥ 5
凸型二维金属散射体，跨度小于 $1 \sim 5\lambda_0$ ，TM 波有耗的三维结构，特别是由生物体组成的三维结构	5~20
三维金属线或棒，跨度 $1\lambda_0$ ，接近谐振激励	20~40
三维金属散射体，跨度 $10\lambda_0$ ，有角反射器和开放腔	> 40
深度垂入式三维金属散射体，跨度 $10\lambda_0$ 或更高	> 100
三维任意尺寸金属散射体，具有中、高 Q 值的带孔谐振腔，并在接近谐振下激励	> 100

4. 雷达散射截面（RCS）

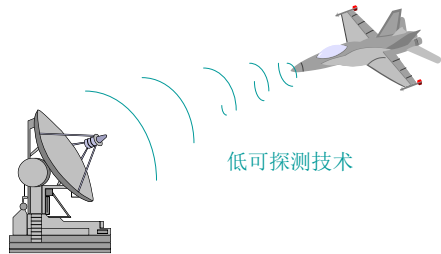
电磁波入射到到任何种类物体上均会产生二次辐射，这种二次辐射过程称之为散射。

散射波的强弱及其空间分布取决于入射波方位及散射体尺寸，形状，及物理参数。

散射波是散射体信息的载体，研究其性质对获取散射体信息具有重要意义。

表征散射体特征与散射波之间的关系可运用一些参量予以描述，其中雷达散射截面（RCS）是主要参数之一。

雷达截面控制



2019年1月2日 星期三

隐身技术

37

雷达散射截面是在给定方向上散射功率的一种量度，它以入射场功率密度归一化。目标在单位立体角内向接收机处散射功率与入射波在目标上的功率密度之比的 4π 倍。其定义为：

$$\sigma = 4\pi \frac{4\pi R^2 W_s / 4\pi}{W_i} = 4\pi \lim_{R \rightarrow \infty} R^2 \frac{|\vec{E}^s|^2}{|\vec{E}^i|^2} = 4\pi \lim_{R \rightarrow \infty} R^2 \frac{|\vec{H}^s|^2}{|\vec{H}^i|^2}$$

R 为源点与场点的距离，其中 \vec{E}^s ， \vec{H}^s 分别为散射电场和散射磁场，而 \vec{E}^i 和 \vec{H}^i 则分别为入射电场和入射磁场。

可见光控制--迷彩伪装

- 降低目标和背景的可见光反差
- 上下表面的迷彩不一致



2019年1月2日 星期三

隐身技术

39

5. 近区场/远区场变换

网格空间划分为总场区和散射场区。散射体位于总场区中，而散射的全部信息由散射场区获取。

由于计算机存储空间的限制，散射场区不可能选取得很大，因此，网格空间中的散射场区属于散射近场。

而通常RCS是远区场的目标散射场特征，故必须寻求一种近/远场变换，以期达到由近场特征求得远场特征的目的。

近场数据可取自完全包围散射体的一个具有**简单形状的虚设表面**上（如长方体的六个长方形平面组成的包面），解出此表面 S_a 上的散射近场的电场及磁场的切向分量，应用等效原理，将此 S_a 面上的**等效电流**和**等效磁流**作为源，再利用熟知的矢量位求解出远区散射场。

表面的设置可以完全不依赖于实际散射体的形状，从而可以使算法具有通用性。

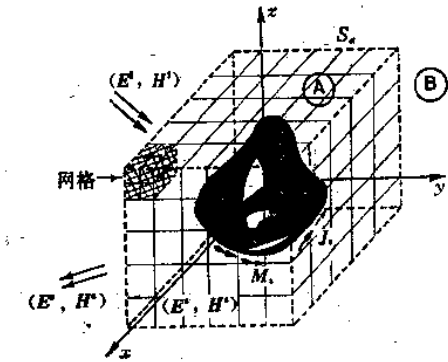


图 5.7 置于散射场区的虚设封闭面

图 5.7 示出置于散射场区的虚构封闭面 S_a ，设 S_a 上的切向电场和切向磁场分别为 \vec{E}^s 和 \vec{H}^s ，于是 S_a 上相应的等效切向电流和切向磁流分别为

$$\vec{J}_{eq}^s = \hat{n} \times \vec{H}^s(\vec{r})$$

$$\vec{M}_{eq}^s = -\hat{n} \times \vec{E}^s(\vec{r}) \quad (5-74)$$

其中 \hat{n} 为 S_a 的外法线单位方向矢量。

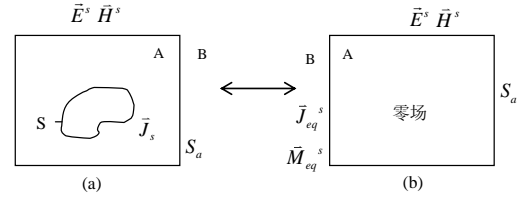


图 5-8 等效原理示意图

图 5-8 (a) 中由散射体表面 S 上的表面电流在无界区 B 区中产生的散射场 (\vec{E}^s, \vec{H}^s) 与图 5-8 (b) 中的由 S_a 上的 \vec{J}_{eq}^s 和 \vec{M}_{eq}^s 所决定的 B 区中的电磁场相同。

利用格林函数，图 4.9 标示关系下，矢量位 \vec{A} 和 \vec{F} 为：

$$\vec{A} = \frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi r} \iint_{S_a} \vec{J}_{eq}^s(\vec{r}') e^{jk_0 r' \cos \xi} dS_a'$$

$$\vec{F} = \frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi r} \iint_{S_a} \vec{M}_{eq}^s(\vec{r}') e^{jk_0 r' \cos \xi} dS_a'$$

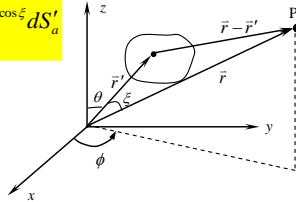


图 5.9 坐标关系

远区电磁场为：

$$\vec{E} = -j\omega \vec{A} - j \frac{1}{\omega \mu \epsilon} \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \frac{1}{\epsilon} \nabla \times \vec{F}$$

$$\vec{H} = -j\omega \vec{F} - j \frac{1}{\omega \mu \epsilon} \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) + \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A}$$

利用球坐标中分量表示式可得

$$E_\theta = (-jk_0 \eta_0) \left[A_\theta + \frac{1}{\eta_0} F_\phi \right]$$

$$E_\phi = (-jk_0 \eta_0) \left[A_\phi - \frac{1}{\eta_0} F_\theta \right]$$

其中，

$$A_\theta = A_x \cos \theta \cos \phi + A_y \cos \theta \sin \phi - A_z \sin \theta$$

$$F_\theta = F_x \cos \theta \cos \phi + F_y \cos \theta \sin \phi - F_z \sin \theta$$

$$A_\phi = -A_x \sin \phi + A_y \cos \phi$$

$$F_\phi = -F_x \sin \phi + F_y \cos \phi$$

雷达散射截面为

$$\sigma = 4\pi r^2 \left[\frac{E_\theta^s{}^2 + E_\phi^s{}^2}{\left[E_{\theta'}^i \right]^2 + \left[E_{\phi'}^i \right]^2} \right], \quad r \rightarrow \infty$$

式中 θ' 和 ϕ' 为源点之方向坐标， θ, ϕ 为观察点处之方向坐标。 $E_{\theta'}^i$ 和 $E_{\phi'}^i$ 为入射波电场分量， (θ', ϕ') 是平面波的入射角。 E_θ^s 和 E_ϕ^s 为远区 (θ, ϕ) 处的散射场分量。

§ 5.10 FDTD 应用示例

下面通过一个例子来说明 FDTD 应用的基本过程。这个例子的任务是计算一个理想的封闭矩形波导内的电磁场。

如图 5.10 所示，封闭的矩形波导由理想导体构成，内部是自由空间。

在 $x=0$ 端面加入一个理想正弦平面波作为激励，电场方向与 z 轴平行，用 FDTD 法求波导内各处的电磁场。

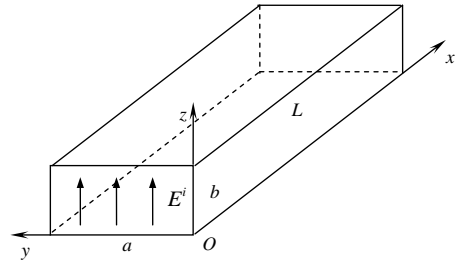


图 4.10 矩形波导

1. 网格划分

这是一个有限空间的电磁场问题，在传播方向可应用 Mur 吸收边界条件。

首先对矩形波导进行网格划分，电场的网格与磁场的网格是不一样的，两者相差半个空间步长，如图 5.11 所示，一个电场的单元格里只包含磁场单元格的一个顶点，同样一个磁场的单元格里只包含电场单元格的一个顶点。

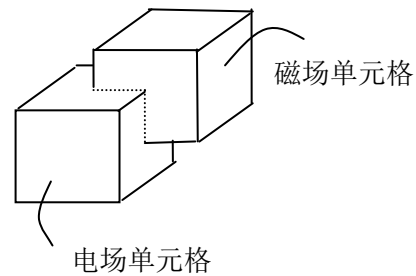


图 5.11 交错电场和磁场单元格

设 x, y, z 方向的电场单元格数分别为 n_x, n_y, n_z ，每个方向磁场的单元格数比电场少 1，分别为 n_x-1, n_y-1, n_z-1 。一般情况下，单元格的划分在 x, y, z 方向上是非均匀的。

2. 差分方程

在矩形波导内部有 $\sigma = 0$ 和 $\sigma_m = 0$ ，在矩形波导边界上有 $\sigma = \infty$ 和 $\sigma_m = 0$ 。

$$H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) = H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) + \frac{\Delta t}{\mu_0} \left[\frac{E_y^n(i, j+\frac{1}{2}, k+1) - E_y^n(i, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta z} - \frac{E_z^n(i, j+1, k+\frac{1}{2}) - E_z^n(i, j, k+\frac{1}{2})}{\Delta y} \right]$$

电场:

$$E_x^{n+1}(i+\frac{1}{2}, j, k) = E_x^n(i+\frac{1}{2}, j, k) + \frac{\Delta t}{\varepsilon(i+\frac{1}{2}, j, k)} \cdot \left[\frac{H_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - H_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k)}{\Delta y} - \frac{H_y^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}) - H_y^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k-\frac{1}{2})}{\Delta z} \right]$$

3. 计算流程

1) 分配变量, 置初值。磁场和电场的所有分量的初值都为0; 置时间步 $n=0$;
 2) 计算激励源。激励源是 $x=0$ 端面处的正弦平面波, 电场方向与 z 轴平行, 因此 $E_z(0, j, k) = \sin(\omega t)$, ω 是正弦波的角频率, t 为当前时间, $t = \Delta t \cdot n$ 。

5) 处理边界条件, 这里的边界条件是, 在矩形波导的边界处, 电场的切向分量为0, 由于所有电场的初值都为0, 因此只要在4) 中不更新各边界的电场切向分量, 就可以保持边界处的电场切向分量为0。
 6) 判断时间步 n 是否达到预定值, 如果已达到则退出计算, 输出当前的电场和磁场值; 如果 n 小于预定值, 则 $n=n+1$, 返回到 2)。

上式中 $i=0, 1, \dots, n_x-1; j=1, 2, \dots, n_y-1; k=1, 2, \dots, n_z-1$ 。

因为根据边界条件, 在矩形波导的边界处, 电场的切向分量为0, 因此 $E_x^n(i, 0, k) = E_x^n(i, n_y, k) = 0$, $E_x^n(i, j, 0) = E_x^n(i, j, n_z) = 0$, 这些值不用计算。 i 的值只取到 n_x-1 而不是 n_x , 是因为在磁场的所有计算式中没有用到 n_x 处的电场 $E_x^n(n_x, j, k)$ 的值, 因此可以省略不算。同理, 对 y 、 z 方向的电场也有类似情况。

3) 更新 $H_x(i, j, k)$, $H_y(i, j, k)$, $H_z(i, j, k)$,

这里 i, j, k 的编号是对各磁场单元格的编号, 对应的坐标分别为

$$(i+\frac{1}{2})\Delta x, (j+\frac{1}{2})\Delta y, (k+\frac{1}{2})\Delta z。$$

4) 更新 $E_x(i, j, k)$, $E_y(i, j, k)$, $E_z(i, j, k)$,

这里 i, j, k 的编号是对各磁场单元格的编号, 对应的坐标分别为 $i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z$ 。

在以上的计算中, 时间步长 Δt 和空间步长 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ 应满足稳定性条件式, 并且为减少数值色散的影响, 空间步长应小于波长的十分之一。

$$\Delta t \leq \frac{1}{c \sqrt{\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2}}}$$

计算结果

图 5.12 是宽为 2.29 厘米、高为 1.02 厘米、长为 5 个波长的矩形波导在 15GHz 平面波激励下的电场分布图。

图中的红色和黄色代表正值，黄色代表最大的强度，红色代表强度接近于 0；蓝色和绿色代表负值，绿色代表最大的强度，蓝色代表强度接近于 0。

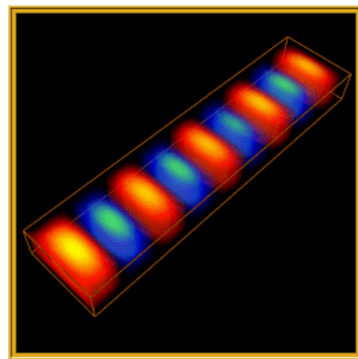


图 5.12 矩形波导里的电场