

北京邮电大学

计算电磁学中的数值方法 课程设计



有限差分法求解静态电磁场边界值问题

姓 名 姚成

学 院 电子工程学院

学 号 2016110619

任课教师 吕英华 张洪欣

2017 年 1 月

一、引言

通过边值条件求解坐标系内的静态电场分布，是电磁场中的常见问题之一。求解方法一般为泊松方程或拉普拉斯方程，对于满足一定条件的边界面 S ，则电位函数在该区域中除了任意常数外是唯一确定的。

利用唯一性定理求解边值问题，分为解析法和数值法两大类，常用的解析法有分离变量法、镜像法、复变函数法、保角变换法、格林函数法等，通常可以得到解析函数表示的闭合解，适于求解各种形状规则的边界下的电位函数。

随着大型快速计算机的广泛应用，近似解析计算和数值法的发展迅速。目前，分析电磁工程常用的数值法有矩量法、有限元法和有限差分法。还有解析和近似计算结合的一些近似解析算法，如逐步逼近算法、微扰法、变分法、几何光学法、物理光学法、几何绕射方法和物理绕射方法等。数值法的主要缺点是不能用一数学公式将所研究的电磁问题和各参数之间的内在关系及变化趋势表示出来。

二、有限差分法

有限差分法 (FDM)，是一种微分方程数值方法，是通过有限差分来近似导数，从而寻求微分方程的近似解。

由泰勒展开式可得有限差分法的基本形式。首先假设要近似函数的各级导数都有良好的性质，依照泰勒定理，可以形成以下的泰勒展开式：

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + R_n(x),$$

其中 $n!$ 表示是 n 的阶乘， $R_n(x)$ 为余数，表示泰勒多项式和原函数之间的差。可以推导函数 f 一阶导数的近似值：

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + R_1(x),$$

设定 $x_0=a$ ，可得：

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + R_1(x),$$

除以 h 可得：

$$\frac{f(a + h)}{h} = \frac{f(a)}{h} + f'(a) + \frac{R_1(x)}{h}$$

求解 $f'(a)$ ：

$$f'(a) \approx \frac{f(a + h) - f(a) - R_1(x)}{h}$$

假设 $R_1(x)$ 相当小，因此可以将“ f ”的一阶导数近似为：

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

局部截尾误差为

$$R_n(x_0 + h) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (h)^{n+1},$$

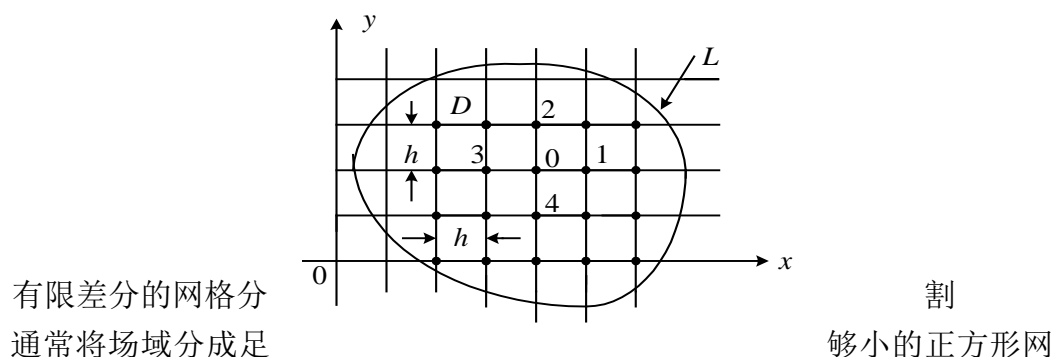
其中 $x_0 < \xi < x_0 + h$

现在，以静电场边值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} = F \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\begin{cases} \varphi|_L = f(s) \end{cases} \quad (2.2)$$

为例，说明有限差分法的应用。 $f(s)$ 为边界点 s 的点函数，二位场域 D 和边界 L 示于图中。



格, 网格线之间的距离为 h (步距), 节点 $0, 1, 2, 3, 4$ 上的电位分别用 $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ 和 φ_4 表示。

设函数 φ 在 x_0 处可微，则沿 x 方向在 x_0 处的泰勒公式展开为

$$\varphi_x = \sum_{K=0}^n \frac{\varphi^{(K)}}{K!} (x - x_0)^K + o((x - x_0)^n) \quad (2.3)$$

将 $x = x_1$ 和 $x = x_3$ 分别代入式 (2.3), 得

$$\varphi_1 = \varphi_0 + h\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_0 + \frac{1}{2!}h^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)_0 + \frac{1}{3!}h^3\left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}\right)_0 + \dots \quad (2.4)$$

$$\varphi_3 = \varphi_0 - h\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_0 + \frac{1}{2!}h^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)_0 - \frac{1}{3!}h^3\left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}\right)_0 + \dots \quad (2.5)$$

由 (2.4) - (2.5) 得

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{x=x_0} \approx \frac{\varphi_1 - \varphi_3}{2h} \quad (2.6)$$

(2.4) + (2.5) 得

$$\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)_{x=x_0} \approx \frac{\varphi_1 - 2\varphi_0 + \varphi_3}{h^2} \quad (2.7)$$

同理

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{y=y_0} \approx \frac{\varphi_1 - \varphi_3}{2h} \quad (2.8)$$

$$\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)_{y=y_0} \approx \frac{\varphi_1 - 2\varphi_0 + \varphi_3}{h^2} \quad (2.9)$$

将式 (2.7)、(2.9) 代入式 (2.1)，得到泊松方程的五点差分格式

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 - 4\varphi_0 = Fh^2 \quad \Rightarrow \quad \varphi_0 = \frac{1}{4}(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 - Fh^2)$$

当场域中 $\rho = 0$ ，得到拉普拉斯方程的五点差分格式：

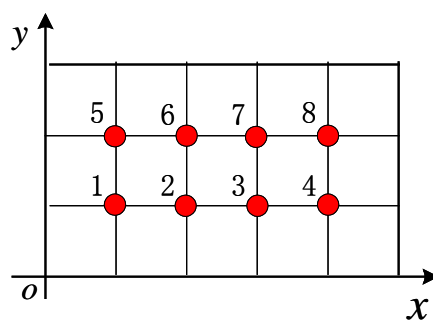
$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 - 4\varphi_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_0 = \frac{1}{4}(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) \quad (2.10)$$

从这个公式我们可以看出，当我们将一个二维无源区场域剖分为一系列正方形网格时，场域内任何一个节点的电位都等于它周围四个节点电位的算术平均值。这就是规则正方形网格内某点的电位所满足的拉普拉斯方程的差分格式，或差分方程^[8]。对于场域内的每一个结点，关系式 (2.10) 式都成立，都可以列出。

三、有限差分法的求解

求解差分方程组的解可使用高斯-赛德尔迭代法及改进的超松弛迭代法。

网格节点一般按“自然顺序”排列，即从左到右，再从下到上顺序排列。迭代也按自然顺序进行。



网格节点排列方法

首先对节点 (x_i, y_i) 取迭代初值 $\phi_{i,j}^{(0)}$ 。再按下式反复迭代

$$\phi_{i,j}^{(k+1)} = \frac{1}{4} \left(\phi_{i-1,j}^{(k+1)} + \phi_{i,j-1}^{(k+1)} + \phi_{i+1,j}^{(k)} + \phi_{i,j+1}^{(k)} \right) \quad i, j = 1, 2, \dots$$

其中 $\phi_{i,j}^{(k)}$ 上角标 (k) 表示 k 次近似值，下脚标 i, j 表示节点所在位置，即第 i 行第 j 列的交点。(在迭代过程中遇到边界点式，需将边界条件 $\phi_{i,j} = f_{i,j}$ 带入。)

所有内节点满足以下条件时迭代停止

$$\left| \phi_{i,j}^{(k+1)} - \phi_{i,j}^{(k)} \right| < W$$

W 是预定的最大允许误差

高斯-赛德尔迭代法德变形。为加速收敛，相应的迭代公式为

$$\phi_{i,j}^{(k+1)} = \phi_{i,j}^{(k)} + \frac{\alpha}{4} \left(\phi_{i-1,j}^{(k+1)} + \phi_{i,j-1}^{(k+1)} + \phi_{i+1,j}^{(k)} + \phi_{i,j+1}^{(k)} - 4\phi_{i,j}^{(k)} \right)$$

α 称为“加速收敛因子”，且 $1 \leq \alpha < 2$ 。(逐次超松弛法收敛的快慢与 α 有明显关系。如何选择最佳 α ，是个复杂问题。)

查阅资料了解到最佳值的计算方法，其值为

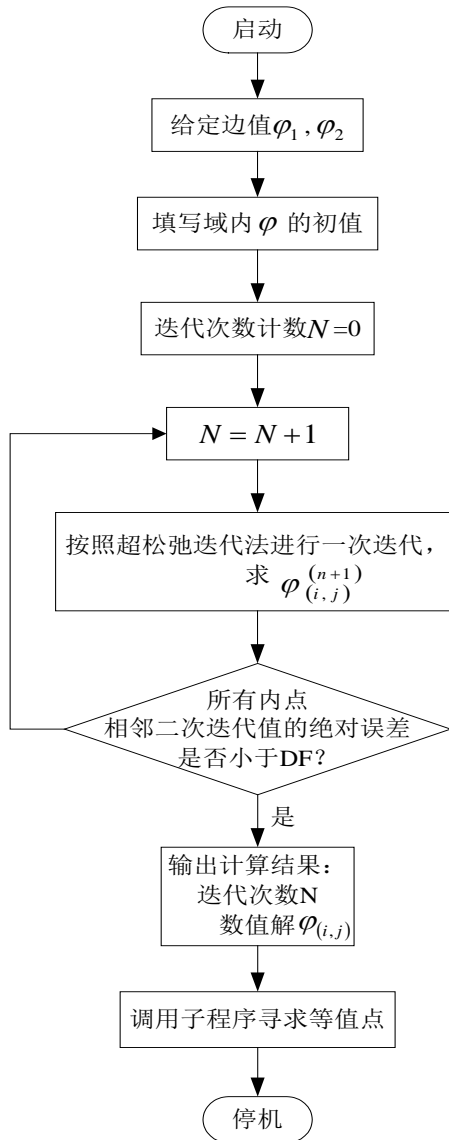
$$\omega_{opt} = \frac{2}{1 + \sin \pi h}$$

四、问题描述及求解

1、问题描述

有一长方形的导体槽， $a = 20$ ， $b = 5$ ，设槽的长度为无限长，槽上有两块与槽绝缘的盖板，电位分别为 $100V$ 和 $50V$ ，其它板电位为 $0V$ ，求槽内的电位分布。

2、流程图



3、程序代码

```

%应用高斯-赛德尔迭代法求矩形导体槽内的电位分布
clc    %清除命令行窗口
clear  %清除工作区
close all
h=input('您所选择的步长为: ');
hx=20/h+1;col_x=hx-2; %计算设置 x 方向网格节点数
hy=5/h+1;line_x=hy-2; %计算设置 y 方向网格节点数
v1=ones(hy,hx); %设置二维数组，且赋初值
v1(hy,:)=ones(1,hx)*100; % 给定 y=a 的边界条件值
v1(1,:)=ones(1,hx)*50; % 给定 y=0 的边界条件值
for i=1:hy;

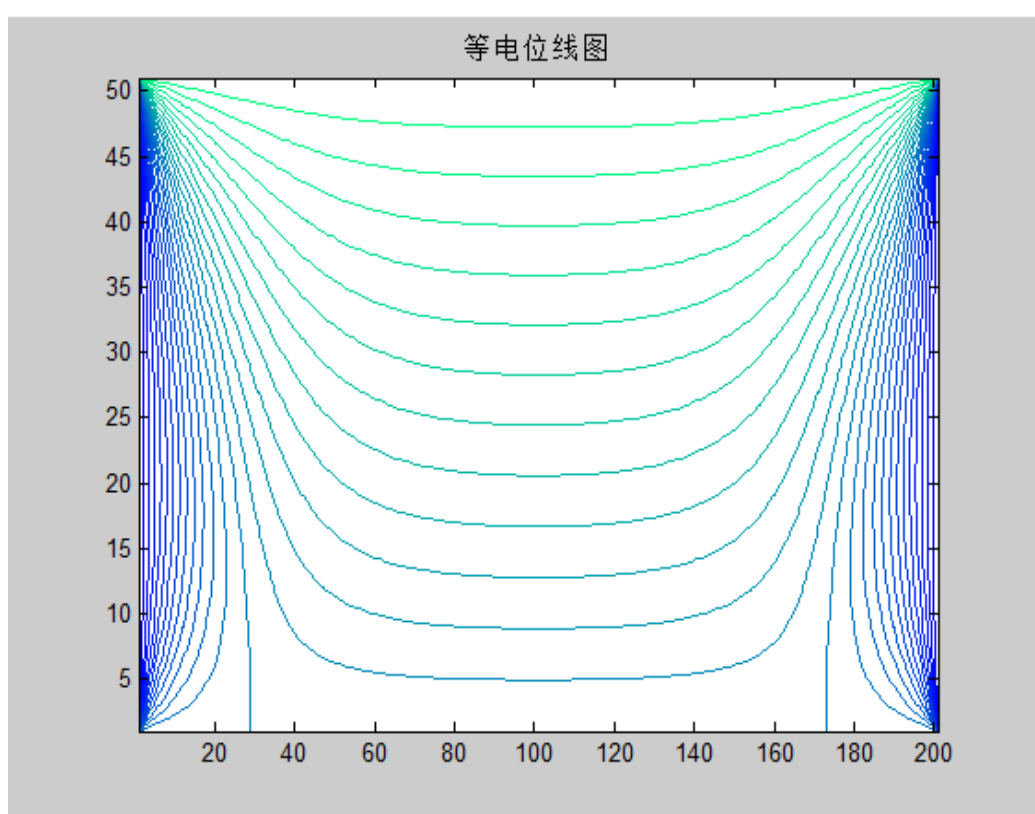
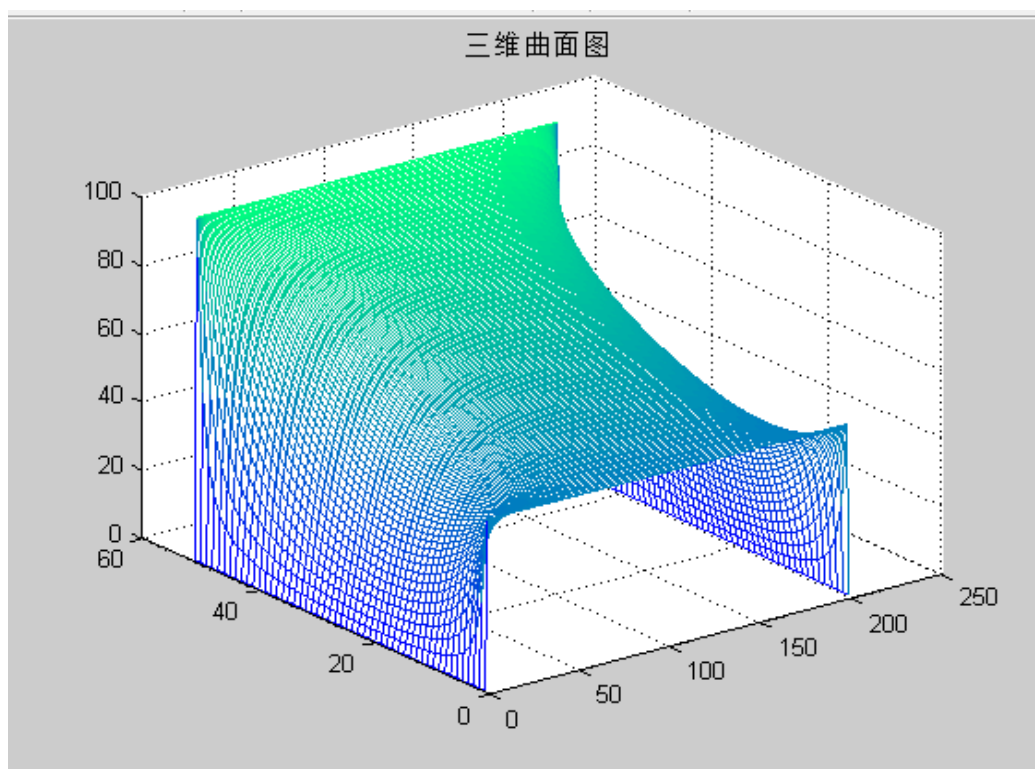
```

```

v1(i,1)=0;    % 给定 x=0 的边界条件值
v1(i,hx)=0;  % 给定 x=a 的边界条件值
end
%m=10;
%w=2/(1+sqrt(1- cos(pi/m)*cos(pi/m))); %计算松弛因子
maxt=1; t=0;    %设置误差和最大误差参量
v2=v1;n=0;
while(maxt>1e-6)    %由 v1 迭代算出 v2，迭代精度为 10-6
n=n+1;    %计算迭代次数
maxt=0;
for i=2:hy-1 ;    %从 2 到 hy-1 行循环
for j=2:hx-1 ;    %从 2 到 hx-1 列循环
%
v2(i,j)=v1(i,j)+(v1(i,j+1)+v1(i+1,j)+v2(i-1,j)+v2(i,j-1)-4*v1(...
i,j))*w/4;    %超松弛差分方程
v2(i,j)=(v1(i,j+1)+v1(i+1,j)+v2(i-1,j)+v2(i,j-1))/4;%高斯-赛德尔差分方程
t=abs(v2(i,j)-v1(i,j)); % 收敛精度判据
if(t>maxt) maxt=t;
end
end
end
v1=v2;
end
n    %打印迭代次数
v2    %打印场域内网格点电位的计算结果表
figure(1);
subplot(1,2,1),mesh(v2);
title(['三维曲面图']); %画三维曲面图
subplot(1,2,2),contour(v2,25);
title(['等电位线图']); %画等电位线图

```

4、仿真结果



五、总结

本文以一简单边界条件的电磁场边值问题为例，建立相应的数学模型，将场域离散为一些网格，运用差分原理，对场域内偏微分方程及边界上的边界条件进行差分离散化处理，在通过差分运算求出场域内电位值。

由此可见使用有限差分法求解电磁场边值问题是可行的，只要将网格取得足够小，是可以将离散的点看成连续的。求出离散的数值解，更符合实际应用的需要，而且随着计算机技术的发展，求解差分方程的过程变得简单，使得有限差分法在电磁场问题计算中更具有优势。