第六章　矩量法

矩量法是将待求的积分或微分问题转化为一个矩阵方程问题，借助于计算机，求得其数值解。R. F. Harrington对用矩量法求解电磁场问题做了全面和深入的分析，其经典著作已于1968年出版。

矩量法**已成功地用于求解许多实际的电磁问题。**

§8.1 矩量法原理

根据线性空间理论，N 个线性方程的联立方程组、微分方程、差分方程及积分方程均属于希尔伯特空间中的算子方程，它们可化作矩阵方程予以求解，在求解过程中需计算广义矩量，故此法称为矩量法。

希尔伯特空间：完备的内积空间。

本节主要介绍矩量法的基本原理，包括矩量法的求解步骤，基函数和权函数的选择。

令算子方程为：

$L(f)=g$　　　(1)

L 为**算子**，g 为已知激励函数，f 为未知响应函数。

算子 L 的**定义域**为算子作用于其上的函数 f 的集合，算子 L 的**值域**为算子在其定义域上运算而得到的函数 g。 L 取不同形式，便可描绘不同的电磁工程场问题

例：

$$-\frac{d^2 f}{dx^2}=1+4x^2 , \quad \le x \le 0$$

$$f(0)=f(1)\quad 0$$

算子 $L=-\dfrac{d^2}{dx^2}$

特定源 $g(x)=1+4x^2$

定义域为满足边界条件的函数 f 的集合

$\{f(x)\,|\,f(0)=f(1)=0,\ \ 0\le x\le 1\}$

$$\nabla^2\phi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

应于静电场的泊松方程，已知电荷密度，求电位ϕ。

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\int_{l'}\frac{1}{4\pi R}\tau dl'=\phi$$

应于静电场中带电导线 上的线电荷密度 分布问题，则若给定激励源项 定该导线的电位，求$\tau(\bar{r})$。

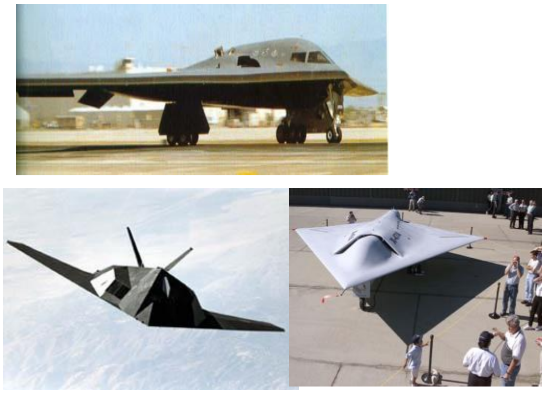
为最大可能地达到隐身效果，F—117A隐形战机采用多面体外形设计。由于雷达探测范围一般在飞机水平面上下30度的角度内，因此F—117A的大多数表面与垂直面的夹角均大于30度，这样可以把雷达波上下偏转出去，以避开辐射源。另一方面，F—117A的前后缘被设计得尖锐笔直，机体表面其它边缘设计成与主波束方向一致，对方雷达接收不到连续的信号，难以确定该飞机是一个实在目标还是一种瞬变噪声。

F—117A隐形战斗轰炸机的全动V型尾翼和机翼均采用菱形翼剖面设计，2台发动机装入机体内部，进气口采用特殊的复合材料格栅设计，可保证进气口对10λ或更长的雷达波的隐身效果。这种格栅进气口同时还具有向发动机提供均匀气流的优点，从而使F—117A更适应大仰角和侧滑飞行。

F—117A的发动机尾喷口设计采用展向“开缝”式喷口设计，喷口下缘底面阻止红外探测器及雷达从后面探测到涡轮部件。发动机排出的气流能够与从发动机旁经过的冷空气迅速混合，使排气速下降到66摄氏度，这样即可以有效地降低发动机的红外辐射特征。这种埋入式发动机设计及特殊的进，排气设计可有效降低发动机噪声。

F—117A机体材料以铝合金结构为主，整体外表涂满黑色的磁性铁氧体雷达吸波材料，可以有效地吸收高频率雷达波或低频率雷达波，增强隐形效果。

这些技术使F—117A的隐身效果极佳，雷达反射截面积仅0.001~0.01平方米。它可以在敌防空火力上空任何高度飞行，可以在高空借助机载激光器指示目标并进行轰炸。一般以7600米高度接近目标，实施攻击时，下降到1000米左右的高度，在水平飞行时进行投弹攻击。演飞中对红外目标的攻击精度约为1米量级。F—117A采用有利于隐身的内置式武器舱，弹舱长5.18米，宽1.83米，可携带2枚908千克的BLU—109型激光制导炸弹或战术战斗机使用的各种武器。武器载荷可达2270千克。炸弹由机头座舱前下部安装的激光照射器提供目标指示。



MoM 法基本步骤：

<1> 展开未知函数 f 为有限个线性无关的已知简单函数 f_n 之和

$$f=\sum_{n=1}^{N}\alpha_n f_n \qquad (2)$$

其中 $f_1, f_2, f_3, \cdots f_N$ 称为展开函数或基函数。

$L(f)=g \qquad (1)$

代入（1）式再应用算子 L 的线性得到

$$\sum_{n=1}^{N}\alpha_n L(f_n)=g \qquad (3)$$

为 N 个未知数

<2>使用权函数（或称为检验函数）构成求 α_n 的矩阵方程

选一组线性无关的函数 w_m（权函数，m=1,2...N），分别与 $L(f)$ 和 g 作内积

$$<w_m, L(f)>=<w_m, g>$$

$$\sum_n \alpha_n <w_m, L(f_n)>=<w_m, g>$$

因为 m=1,2...N，所以得到 N 个方程：

$$\sum_n \alpha_n <w_m, L(f_n)>=<w_m, g>$$

$$\begin{cases}\sum_{n=1}^{N}\alpha_n <w_1, L(f_n)>=<w_1, g> \\ \sum_{n=1}^{N}\alpha_n <w_2, L(f_n)>=<w_2, g> \\ \qquad\vdots \\ \sum_{n=1}^{N}\alpha_n <w_N, L(f_n)>=<w_N, g>\end{cases}$$

内积：

内积 $<f, g>$ 是三维空间向量点积 $a\cdot b=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3$ 的推广。不同的希尔伯特空间有不同的内积形式，在矩量法中应用的内积一般是：

一维：$<f, g>=\int f(x)g(x)dx$

二维：$<f, g>=\int f(x,y)g(x,y)dxdy$

三维：$<f, g>=\int f(x,y,z)g(x,y,z)dxdydz$

方程组(4)可写成如下的矩阵形式：

$$[l_{mn}][\alpha_n]=[g_m] \quad (5)$$

式中

$$[l_{mn}]=\begin{bmatrix} <w_1,L(f_1)> & <w_1,L(f_2)> & \cdots\cdots \\ <w_2,L(f_1)> & <w_2,L(f_2)> & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \end{bmatrix}$$

即

$$[\alpha_n]=\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \qquad [g_m]=\begin{bmatrix} <w_1,g> \\ <w_2,g> \\ \vdots \end{bmatrix}$$

<3>矩阵求逆解得 α_n

$$[\alpha_n]=[l_{mn}]^{-1}[g_m]$$

$$f=\sum_{n=1}^{N}\alpha_n f_n$$

$$f=[\tilde{f}_n][\alpha_n]=[\tilde{f}_n][l_{mn}]^{-1}[g_m]$$

$$[\tilde{f}_n]=[f_1, f_2\ldots f_N]$$

f_n 必须线性无关，选择适当可使 $\sum_{n=1}^{N}\alpha_n f_n$ 很快逼近 f 。

权函数 w_m 的选择也应当适当，当 $f_n=w_n$ 时称**伽略金法**（GarlerKin’s methord）

影响 f_n 和 w_m 的选择的一些因素是

（1）所求解的精度；

（2）计算矩阵元的难易；

（3）能够反演的矩阵大小；

（4）良态矩阵[l_{mn}]的可实现性。

§6. 2 基函数与权函数选择

基函数：

MoM 法的一个重要问题是基函数 f_n 的选取，理论上有许多基函数可供选择，只要它们是线性独立的即可。但实际上，人们往往只能有少量的某些函数可较好地逼近待求的 f ，通常选取的基函数应使矩阵有较少的阶次，求逆阵方便，收敛快等性质。

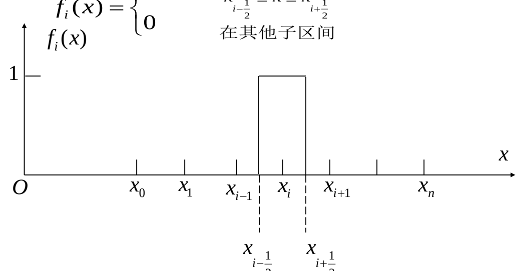
（a）整域基函数 在待求函数 f 的全部定义域中存在且不为“0”， 如：

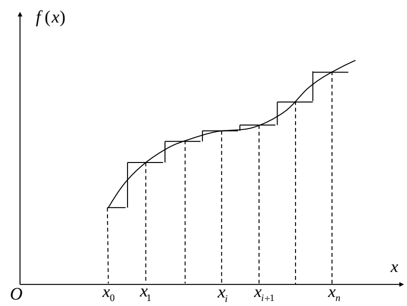
- 幂级数 $f_n=x-x^{n+1}$
- 傅立叶级数 $f_n=\cos n\theta$或$\sin n\theta$等
- 麦克劳林级数 $f_n=x^n$

（b）分域基函数：在 f 的全部定义域中存在，但部分为“0”。 如

- **脉冲函数**（分段均匀）

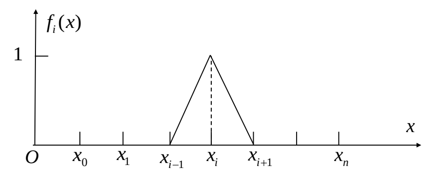
$$f_i(x)=\begin{cases}1 & x_{i-\frac{1}{2}}\le x\le x_{i+\frac{1}{2}} \\ 0 & \text{在其他子区间}\end{cases}$$

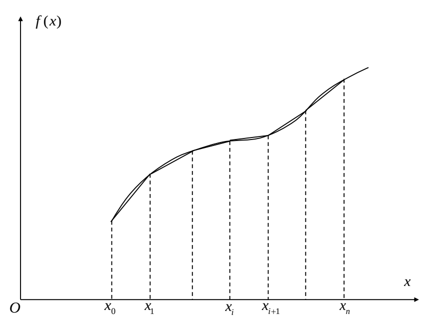


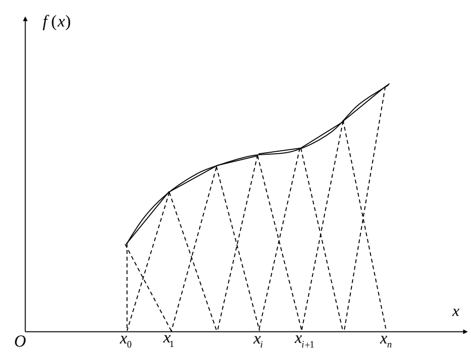


- 一维分段线性插值（三角形函数）

$$f_i(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} & (x_{i-1}\le x\le x_i)\\ \dfrac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}} & (x_i\le x\le x_{i+1})\\ 0 & \text{(在其他子区间)}\end{cases}$$







拉格朗日插值多项式

已知函数 $f(x)$的函数值 $y_k=f(x_k)$, $k=0,1,2,\ldots$。构造一个多项式 $P(x)$，使得 $P(x_k)=y_k$。用 n 次多项式

$$P_n(x)=y_k l_k(x)+y_{k+1}l_{k+1}(x)+\cdots+y_{k+n}l_{k+n}(x)=\sum_{i=k}^{k+n}y_i l_i(x)\quad (x_k\le x\le x_{k+n})$$

在区间 $(x_k\le x\le x_{k+n})$ 内逼近函数 $f(x)$，即 $f(x)\approx P_n(x)$，且满足

$P_n(x_i)=y_i\quad (i=k,k+1,\cdots,k+n)$。其中基函数

$$l_i(x)=\frac{\prod\limits_{\substack{j=k\\ j\ne i}}^{k+n}(x-x_j)}{\prod\limits_{\substack{j=k\\ j\ne i}}^{k+n}(x_i-x_j)}\quad (i=k,k+1,\cdots,k+n)$$

当 n=1 时，线性插值 $P_1(x)=y_k l_k(x)+y_{k+1}l_{k+1}(x)$，$(x_k\le x\le x_{k+1})$

其中基函数 $l_k(x)=\dfrac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}$，$l_{k+1}(x)=\dfrac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}$

当 n=2 时，就是二次插值。二次多项式

$$P_2(x)=y_k l_k(x)+y_{k+1}l_{k+1}(x)+y_{k+2}l_{k+2}(x),\quad (x_k\le x\le x_{k+2})$$

其中基函数

$$l_k(x)=\frac{(x-x_{k+1})(x-x_{k+2})}{(x_k-x_{k+1})(x_k-x_{k+2})}$$

$$l_{k+1}(x)=\frac{(x-x_k)(x-x_{k+2})}{(x_{k+1}-x_k)(x_{k+1}-x_{k+2})}$$

$$l_{k+2}(x)=\frac{(x-x_k)(x-x_{k+1})}{(x_{k+2}-x_k)(x_{k+2}-x_{k+1})}$$

其他分域基函数还有分段正弦函数、二次插值函数、正弦插值函数等。

分域基具有“局部化”的特点，即其只在一个局部范围内不为零，其余为零。这样，离散的节点值的变化将只直接影响到与其相衔接的子域，从而保证了当节点数递增时插值过程的数值稳定性。

一般地说，分域基的数值稳定性较高，而整域基的收敛性较好。

权函数：

- 全部基函数均可作为权函数

  （ $f_n = w_n$ 时为伽略金法）

- 点匹配法：选取 δ 函数为权函数

点匹配法是广泛使用的权函数，所得的解在一些离散点上严格地满足所要求解的方程。

δ 函数的定义是

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = \begin{cases} 0 & (\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{r}') \\ \infty & (\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}') \end{cases}$$

$$\int_V \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V = \begin{cases} 1 & (\boldsymbol{r}' \text{ 在 } V \text{ 内}) \\ 0 & (\boldsymbol{r}' \text{ 在 } V \text{ 外}) \end{cases}$$

δ 函数是一个偶函数，即

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r})$$

它具有一个重要性质，若 $f(\boldsymbol{r})$ 是一连续函数，则有

$$\int_V f(\boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V = f(\boldsymbol{r}') \quad (\boldsymbol{r}' \text{ 在 } V \text{ 内})$$

此性质说明 δ 函数具有抽样特性，可以把连续函数 $f(\bar{r})$ 在 $\bar{r}=\bar{r}'$ 点上的值 $f(\bar{r}')$ 抽选出来。

因而可知矩量法中矩阵方程元素的计算结果为：

$$l_{mn} =< w_m, L(f_n) >= \int_V \delta(\bar{r}-\bar{r}_m)L(f_n)dV$$
$$= L(f_n)|_{\bar{r}=\bar{r}_m}$$

$$g_m =< w_m, g >= \int_V \delta(\bar{r}-\bar{r}_m)g dV$$
$$= g(\bar{r}_m)$$

由此表明 和 的计算归结为只需计算 所在点处的对应值，因此称这种方法为点匹配法。

§6.3 应用示例

1. 导电平板的静电场

设正方形导电板，边长为 2a，位于 Z=0 平面上，中心点如图示(图 6.1)，若导电平板电位 $\varphi=V$ ，试求导电板上的电荷分布。

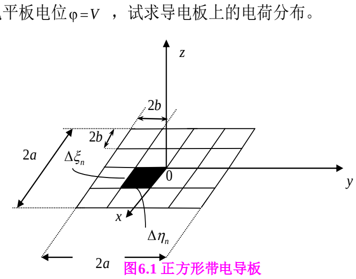


图6.1 正方形带电导板

解： 空间任一点的静电势

$$\phi_{(x,y,z)} = \int_{-a}^{a} d\xi \int_{-a}^{a} d\eta \frac{\sigma(\xi,\eta)}{4\pi\varepsilon_0 R} \qquad (6)$$

式中 $R = [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2]^{1/2}$

$\sigma(\xi,\eta)$ 为待求之面电荷密度

边界条件 $\phi(x,y,0) = \phi_0$ （ $|x| \le a, |y| \le a$ ）

算子方程 $\phi_0=\int_{-a}^{a}d\eta\int_{-a}^{a}d\xi\frac{\sigma(\xi,\eta)}{4\pi\varepsilon_0 R}=L(\sigma)$

算子 $L=\int_{-a}^{a}d\xi\int_{-a}^{a}d\eta\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}$

<1>首先把导板分为 N 个均匀小块 ΔS_n，并选基函数为分域脉冲函数。

$$\sigma=\sum_{n=1}^{N}\alpha_n p_n$$

$$p_n=\begin{cases}1 & 在\Delta S_n上\\ 0 & 在其他\Delta S_m上\end{cases}$$

<2>用点匹配法选权函数为 $w_m=\delta(x-x_m)\delta(y-y_m)$ ，(x_m,y_m)为ΔS_m的中心点。求内积

$$l_{mn}=<w_m,L(p_n)>=\iint_{\substack{|x|\le a\\|y|\le a}}\delta(x-x_m)\delta(y-y_m)L(p_n)dxdy$$

$$=\iint_{\substack{|x|\le a\\|y|\le a}}\delta(x-x_m)\delta(y-y_m)\frac{1}{4\pi\varepsilon\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}dxdy$$

$$=L(p_n)|_{\vec r=\vec r_m}=\int_{\Delta\xi_n}d\xi\int_{\Delta\eta_n}d\eta\frac{1}{4\pi\varepsilon\sqrt{(x_m-\xi)^2+(y_m-\eta)^2}} \quad (7)$$

抽取

l_{mn} 是ΔS_n处单位均匀电荷密度（$p_n=1$）在ΔS_m 处中心点的电位

式（7）适用于 m $\neq n$ 时之l_{mn} 求解，

当 m= n 时

$$l_{nn}=\int_{-b}^{b}d\xi\int_{-b}^{b}d\eta\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{\xi^2+\eta^2}}$$

$$=\frac{2b}{\pi\varepsilon_0}\ln\left(1+\sqrt{2}\right) \quad (9)$$

其中 $2b=\frac{2a}{\sqrt{N}}$

<3> 矩阵求逆解得

$[g_m]=[V,V,\ldots.V]^T$

$[\alpha_n]=[l_{mn}]^{-1}\ [g_m]$

$$\sigma=\sum_{n=1}^{N}\alpha_n p_n$$

$$p_n=\begin{cases}1 & 在\Delta S_n上\\ 0 & 在其他小块上\end{cases}$$

2. 空心波导中电磁波的传播

- 首先以有Ω 域内满足第一类边值条件的本征值问题为例说明矩量法的基本原理。本征值问题写成一般的形式为

$$Lf=\lambda f \qquad (8.1\text{-}1)$$

其中算子L 可以是微分算子也可以是积分算子。在横截面为Ω 的柱状空心波导中电磁波的传播规律，即

$$\left(\nabla_T^2+K_c^2\right)E_{zm}=0$$

在波导壁上$E_{zm}=0$

其中 $K_c^2=\omega_2/c_2-k_z^2$，k_z是沿柱状导轴向的传播常数，这是一典型的本征值问题，本征值 $\lambda=k_c^2$ 算子 $L=-\nabla_T^2$ ，本征函数 $f=E_{zm}$ 。

- 矩量法的解体步骤：

- 第一步是将式（8.1-1）中的未知函数近似表示成函数N_n 的线性组合，即

$$f\approx f_a=\sum_{n=1}^{M}a_n f_n \qquad (8.1\text{-}2)$$

其中函数 f_n 是已知的独立函数，称为基数;a_n 是未知的待定系数，将式（8.1-2）代入式（8.1-1）得

$$L\sum_{n=1}^{M} a_n f_n = \lambda \sum_{n=1}^{M} a_n f_n \qquad (8.1\text{-}3)$$

- 第二步是用权函数W_m（又称检验函数）对式（8.1-3）两边取内积，即有

$$\left\langle W_m, L\sum_{n=1}^{M} a_n f_n \right\rangle = \left\langle W_m, \lambda \sum_{n=1}^{M} a_n f_n \right\rangle \qquad (8.1\text{-}4)$$

式（8.1-4）可以重新写成

$$\sum_{n=1}^{M} a_n \int_\Omega (W_m L f_n) d\Omega = \lambda \sum_{n=1}^{M} a_n \int_\Omega (W_m f_n) d\Omega \quad (m=1,2,\cdots,M)$$

（8.1-5）

将式（8.1-5）写成矩阵的形式

$$[K_{mn}][a_n] = \lambda [B_{mn}][a_n] \qquad (8.1\text{-}6)$$

其中：$K_{mn} = \int_\Omega (W_m L f_n) \mathrm{d}\Omega$

$B_{mn} = \int_\Omega (W_m f_n) \mathrm{d}\Omega$

矩阵$[K_{mn}]$是 $M\times N$ 阶矩阵，$[a_n]$是$M\times 1$阶矩阵，$[B_{mn}]$是 $M\times N$ 阶矩阵。

所以矩量法利用基函数和权函数将最初的本征值问题（式（8.1-1））转换成了矩阵的本征值问题（式（8.1-6）），通过求解矩阵方程可到近似解。

为使矩阵方程（8.1-6）$[a_n]$有非零解，其系数矩阵 $[K_{mn}]-\lambda[B_{mn}]$ 的行列式必须为零，即

$$\det([K_{mn}]-\lambda[B_{mn}]) = 0 \qquad (8.1\text{-}7)$$

解方程（8.1-7）可求得 M 个本征值 $\lambda_i (i=1,2,\cdots,M)$，对每一个本征值 λ_i，由式（8.1-6）可求得本征矢量$[a_n]_i = [a_{in}]$

最后求得相应的本征函数

$$f_i = \sum_{n=1}^{M} a_n f_n$$

- 例1．求不定解域的本征值问题。

$$\left.\begin{aligned} -\frac{d^2\varphi}{dx^2} &= \lambda\varphi \\ \varphi|_{x=0} = \varphi|_{x=1} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

解　将本征函数近似表示成

$$\phi \approx \phi_a = \sum_{n=1}^{M} a_n f_n$$

选定基函数和权函分别为

$$f_n = x(1-x^n) \qquad L = -\frac{d^2\phi}{dx^2}$$
$$W_m = x(1-x^m)$$

将选定的基函数和权函数代入式（6.1-6）

其中：$[K_{mn}][a_n] = \lambda[B_{mn}][a_n]$

$$K_{mn} = \int_0^1 \chi(1-\chi^m)\left\{-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\chi^2}\left[\chi(1-\chi^n)\right]\right\}\mathrm{d}\chi = \frac{mn}{m+n+1}$$

$$B_{mn} = \int_0^1 \chi^2(1-\chi^m)(1-\chi^n)\,\mathrm{d}\chi = \frac{mn(m+n+6)}{3(m+3)(n+3)(m+n+3)}$$

为简单起见，选$M=2$，则方程（8.1-6）变成

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \frac{1}{30} & \frac{1}{20} \\ \frac{1}{20} & \frac{8}{105} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a1 \\ a2 \end{bmatrix} \qquad (8.1\text{-}7)$$

为使上述方程有非零解，其系数矩阵的行列式必须为零，即本征值心须满足方程

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3}-\frac{\lambda}{30} & \frac{1}{2}-\frac{\lambda}{20} \\ \frac{1}{2}-\frac{\lambda}{20} & \frac{4}{5}-\frac{8\lambda}{105} \end{vmatrix} = 0 \qquad (8.1\text{-}8)$$

求得两个本征值分别为$\lambda_1 = 10, \lambda_2 = 42$ 。

从而对应的$\lambda_1=10$本体征函数为:

$$\phi_1 = a_{11} f_1 = a_{11}\chi(1-\chi)$$

其中a_{11}可任意选取，选择它满足$\int_0^1 \varphi_1^2\,\mathrm{d}\,\chi = 1$

求得：$a_{11} = 30^{1/2} = 5.4772$

同理可求得：$a_{21} = 43.474$

因此本征值问题的近似解为:

$$\varphi_1 \approx 5.4772\chi(1-\chi),\quad \lambda_1 = 10$$

$$\varphi_2 \approx 43.474\left[\chi(1-\chi) - \frac{2}{3}\chi(1-\chi^2)\right],\quad \lambda_2 = 42$$

其精确解是$\varphi_1 = \sqrt{2}\sin\pi\chi,\quad \lambda_1 = \pi^2 = 9.8696$

$$\varphi_2 = \sqrt{2}\sin\pi\chi,\quad \lambda_2 = (2\pi)^2 = 39.4784$$

图1中给出了φ 的精确解（图中实线）和用矩量法求得的近似解（图中虚线）的曲线，图中可以看出两者是非常接近的。

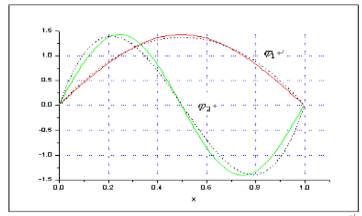


图1 本征值问题的矩量法解与精确解的比较

§8.4 线天线辐射问题求解

稳态单频$e^{j\omega t}$，均匀媒介时电磁场方程为:

$$\begin{cases} \nabla\times\bar{E} = -j\omega\mu\bar{H} \\ \nabla\times\bar{H} = \bar{J} + j\omega\varepsilon\bar{E} \\ \nabla\cdot\bar{E} = \rho/\varepsilon \\ \nabla\cdot\bar{B} = 0 \end{cases}$$

利用第一章位函数 $\bar{A},\phi$ 概念，可得

$$\bar{A} = \mu\int_{V'} \bar{J}\,\frac{e^{-jkr}}{4\pi r}\,dv'$$

$$\phi = \frac{1}{\varepsilon}\int_{V'} \rho\,\frac{e^{-jkr}}{4\pi r}\,dv'$$

式中 r 表示源点与场点之距

$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$$

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\vec{A} = -\mu\varepsilon\frac{\partial\phi}{\partial t}$$ 洛伦兹规范

达朗贝尔方程
(σ=0):

$$\nabla^2\vec{A} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{J}$$

$$\nabla^2\phi - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

位函数ϕ和$\vec{A}$的数学模型

图 3.2 中$\bar{r} = \bar{R} - \bar{R}'$

$$\bar{A} = \mu\int_{V'} \bar{J}\,\frac{e^{-jk|\bar{R}-\bar{R}'|}}{4\pi|\bar{R}-\bar{R}'|}\,dv'$$

$$\phi = \frac{1}{\varepsilon}\int_{V'} \rho\,\frac{e^{-jkr}}{4\pi|\bar{R}-\bar{R}'|}\,dv'$$

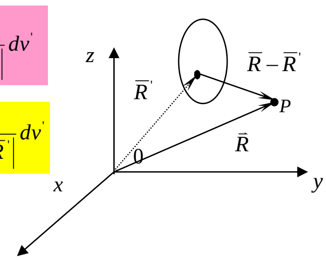


图 3.2 辐射问题坐标关系

令 $G=\dfrac{e^{-jk\left|\bar R-\bar R'\right|}}{4\pi\left|\bar R-\bar R'\right|}$，无界空间的格林函数

则 $\begin{cases}\vec A=\mu\int_{V'}\bar J G dv' \\ \phi=\dfrac{1}{\varepsilon}\int_{V'}\rho G dv'\end{cases}$ (10)

待求之场量 $\bar E,\bar H$ 为

$$\begin{cases}\bar H=\dfrac{1}{\mu}\nabla\times\bar A \\ \bar E=-j\omega\bar A-\nabla\phi\end{cases}\quad（11）$$

1）细直天线的积分方程（I）——Pocklington 积分方程

利用边界条件求细直导线之电流分布。在天线课程中线天线的电流假定是已知的，求出电场，即场源已知；

这里根据电场推出线天线上电流分布的积分方程。

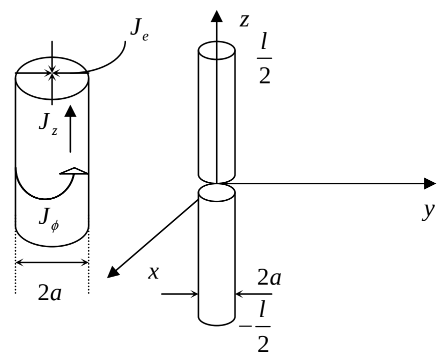


图 3.3 细直天线示意图

令 **a**. 线长 l >>线径 a

b.天线端面处之 $\bar J_e$ 和天线侧面处之 $\bar J_\phi$ 略之不计

由于 a<< λ $\therefore J_e$ 贡献小

由于圆对称:

$$J_\phi=0$$

c. J_{sz} 沿导体周界均匀分布

所以 J_{sz} 面电流分布可视为集中于轴线上的线电流

$$I_{(z)}=2\pi aJ_{sz}$$

根据以上假设可知动态矢量位 $\bar A$ 只有 A_z 分量，即

$$\bar A=\hat zA_z$$

边界条件$\bar{E}^s\big|_t+\bar{E}^i\big|_t=0$（切向分量=0）

导体表面处$\bar{E}\big|_t=\hat{z}E_z$ ；$\hat{z}$ 向分量即为切向分量

$$\bar{E}^s\big|_t=\hat{z}E^s{}_z$$

且$E^s{}_z=-j\omega A_z-\nabla\phi=-j\omega A_z-\dfrac{\partial\phi}{\partial z}$ （12）

利用洛伦兹条件 $\nabla\cdot\bar{A}=-j\omega\varepsilon\mu\phi$

$$\frac{\partial A_z}{\partial z}=-j\omega\mu\phi$$

代入（12）式

则$E^s{}_z=-j\omega A_z+\dfrac{1}{j\omega\mu\varepsilon}\dfrac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}$ （13）

在导体表面处

$$E^s_z\big|_{\tan}=[\frac{1}{j\omega\mu\varepsilon}(\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}+k^2A_z)]\big|_{\tan} \quad (14)$$

导体表面上

$$A_z\big|_{表面}=\mu\int_{V'}JGdv'=\mu\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}I_{(z')}G_{(z,z')}dz'$$

$$=\mu\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}I_{(z')}\frac{e^{-jkr}}{4\pi r}dz'$$

$$r=\sqrt{a^2+(z-z')^2}$$

将A_z代入（14）式，并交换微积分次序，可得

$$E^s_z\big|_{\tan}=\frac{1}{j\omega\varepsilon}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}I_{(z')}[\frac{\partial^2 G_{(z,z')}}{\partial z^2}+k^2G_{(z,z')}]dz' \quad (15)$$

由导体边界条件 $E^i_z=-E^s_z$

于是

$$E^i_z=-\frac{1}{j\omega\varepsilon}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}I_{(z')}[\frac{\partial^2 G_{(z,z')}}{\partial z^2}+k^2G_{(z,z')}]dz' \quad (16)$$

式（16）即为Pocklington's Equation 并写成算子形式为

$$E^i_z=LI_{(z')};\quad L=-\frac{1}{j\omega\varepsilon}\int[\frac{\partial^2 G}{\partial z^2}+k^2G]dz'$$

上述方程即是Pocklington于1897年用来证明细直线天线上电流分布近似正弦且以光速传播电磁波的方程。Pocklington积分方程激励为E^i_z 。