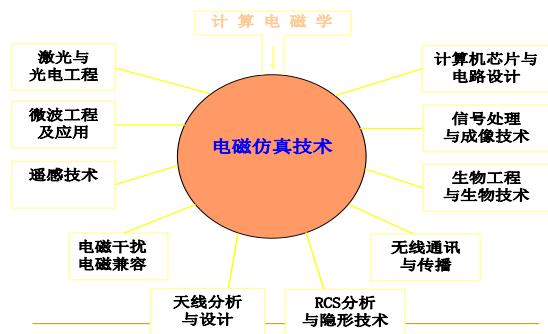


第四章 有限差分法

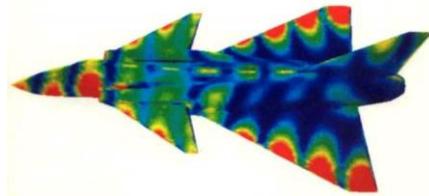
- 一、差分与差商
- 二、欧拉近似、梯形法则和龙格-库塔法
- 三、Poisson方程差分格式
- 四、媒质边界的差分格式
- 五、边界条件的差分格式
- 六、差分方程求解
- 七、差分实例分析
- 八、Helmholtz方程的差分法

计算电磁学的应用



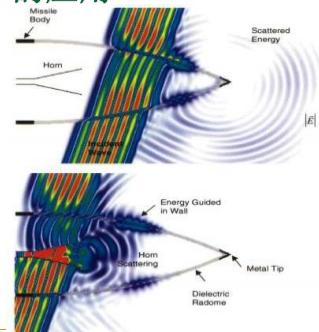
计算电磁学的应用

■ 军事方面的应用



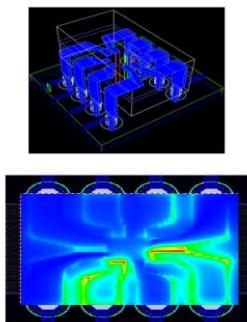
计算电磁学的应用

■ 军事方面的应用



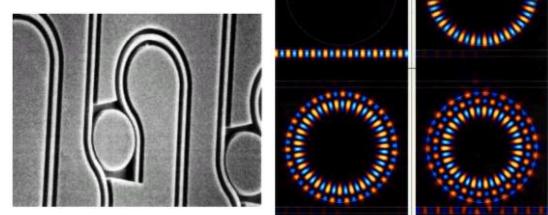
计算电磁学的应用

■ 高速电子电路方面的应用



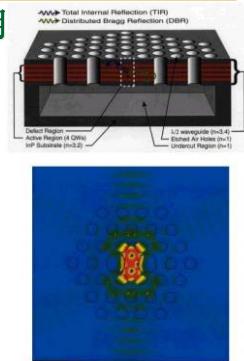
计算电磁学的应用

- 超高速光集成电路的应用
- 光栅、光子晶体



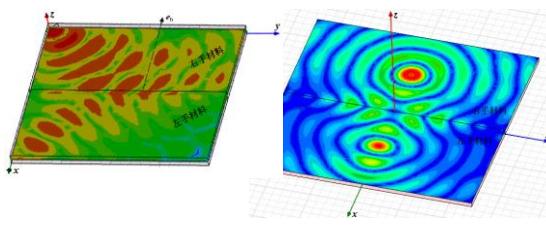
计算电磁学的应用

超高速光集成电路的应用



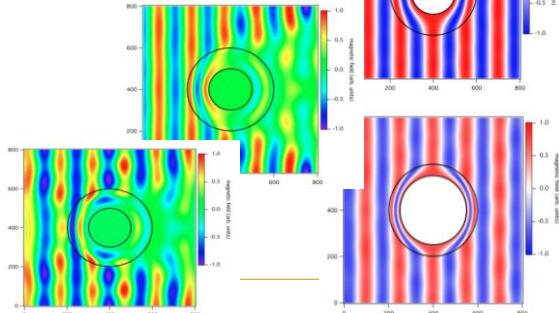
计算电磁学的应用

左手材料的仿真



计算电磁学的应用

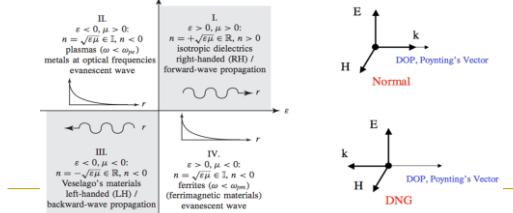
隐身衣的仿真



计算电磁学的应用

左手材料的仿真

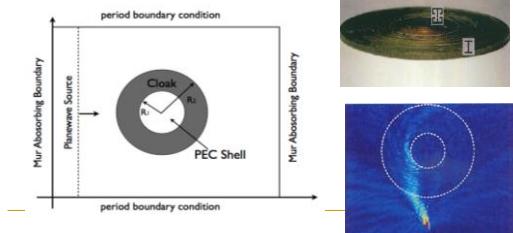
由苏联理论物理学家Veselago于1968年最早提出^[1]，并预言了这种材料可能具有奇特的性质。双负材料的研究工作成为科学界关注的焦点，被美国Science杂志评为2003年度十大科技进步



计算电磁学的应用

隐身衣的仿真

隐身斗篷的运作秘诀就在于它能令微波的路径弯折。这种斗篷其实以数千块细小的“特异材料”片制成。这种人造纤维玻璃般的物料能控制光线。



电磁仿真软件介绍

常见的仿真软件

系统仿真软件

- Agilent ADS
- Microwave Office
- Ansoft Designer
- CST Design Studio

光学仿真软件:

- ZEMAX**
- (MOM+解析法)
- GRASP**
- (MOM+解析法)

电磁场仿真软件

- 2.5D
 - Ansoft Ensemble
 - Sonnet
 - IE3D
- 3D
 - Ansoft HFSS
 - Ansys
 - CST Microwave Studio
 - CST Mafia
 - EMPIRE
 - XFDTD
 - FEKO
 - Super NEC

粒子仿真软件:

- MAGIC**
- MAFIA**

FDTD有限积分法

Wireless Insite

关于仿真软件

- 我们应该学习那种仿真工具呢？从哪个入手更容易一点儿？
 - 应该根据自己的专业领域和正在研究的项目内容来决定。
- 一、HFSS与ADS比较：**
- ADS主要用来仿真电路（比如：微波射频电路、RFIC、通信电路），HFSS主要用来仿真器件（比如：滤波器、天线等等）；
 - 1、大的方向，如果做电路，建议ADS。如果天线、微波无源器件等建议HFSS或CST。

二、CST与HFSS比较：

- 1、CST是基于FDID（时域有限积分法）电磁场求解算法的仿真器，适合仿真宽带频谱结果，因为只需要输入一个时域脉冲就可以覆盖宽频带。
HFSS基于FEM（有限元法）电磁场求解算法仿真器，适合仿真三维复杂结果，但是电长度较小。
- 建议：在VHF的宽频天线设计使用CST设计优化，然后再HFSS中去细化和确认。
- 2、运行速度比较：CST速度要快，HFSS差些，CST资源利用高，HFSS耗资源，而且HFSS有太多的临时文件要存到硬盘上；

三、综合比较：

- CST适合仿真宽带频谱结果。HFSS适合仿真三维复杂结果，但是电长度较小。
- ADS内含矩量法，非常适合仿真第三维度上均匀变化的结构，例如多层板PCB，陶瓷等电路板，常见无源电路，如滤波器等结构。仿真速度极快，同时保证和HFSS相同的精度。效率高于HFSS和CST。
- 安捷伦推出基于有限元法的电磁场仿真器--EMDS，嵌入到ADS中，解决了ADS与全波三维电磁场仿真器之间的连接。HFSS不再是有限元的唯一选。
- 推出了基于时域有限差分法的AMDS，可以做天线仿真，CST也不再是唯一选择。

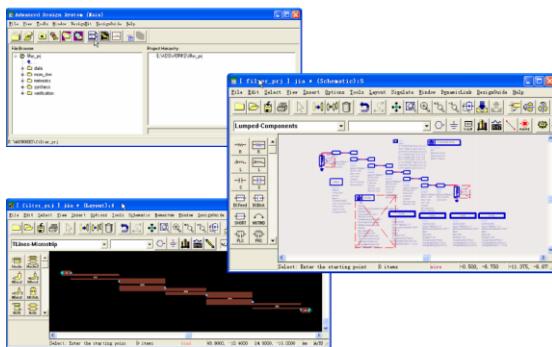
- 2、仿真结果来看，HFSS计算电磁场结果一般更可靠，ADS是计算电路或者两维半电磁场可以参考。
- 3、从电磁场性质来看，ADS不能仿三维电磁场，适用于微波高速平面电路的设计，对于这种平面电路的电磁场仿真一般都是2.5维的，HFSS适用于三维电磁场；
- 4、从微波器件有源无源性来说，HFSS不能仿有源器件，但是ADS可以仿真有源器件；

- 3、仿真精度比较：CST精度不如HFSS,仿真电小物体HFSS更精确,CST对电大物体较好（hfss仿辐射器比较精确,cst仿滤波器比较好）；
- 4、仿真宽度比较：带宽宽，cst比较方便。hfss仿宽带需要分段，速度相对较慢；
- 5、HFSS是闭场比较准，而CST开场比较准
- 6、CST的画图比ADS方便。FSS在作天线方面的仿真比较好的。如果要结合电路进行系统仿真，将ADS和CST结合起来进行。

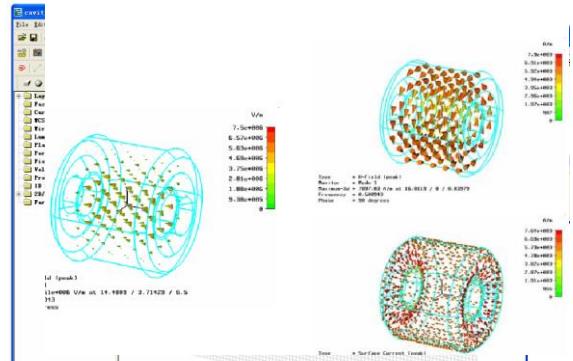
- 总之，对于三维电磁场来说，没有最好的工具，只有根据实际需要选择一个最合适的工具。

 - 1、混合集成电路设计，PCB板级设计，无源板级器件设计，RFIC/MMIC设计：ADS+momentum；
 - 2、天线设计：首推Agilent AMDS，CAD导入，建模很方便，CST备选；
 - 3、微波腔体，衰减器，微波转接头，波导滤波器等设计：Agilent EMDS or HFSS，有限元法的最佳发挥场所。

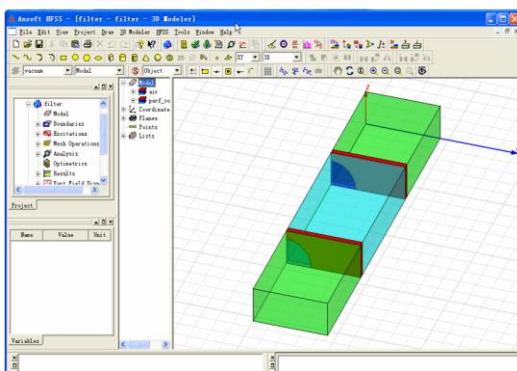
ADS界面



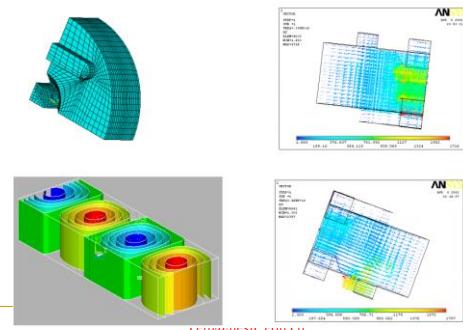
CST MWS 线性分析结果场图



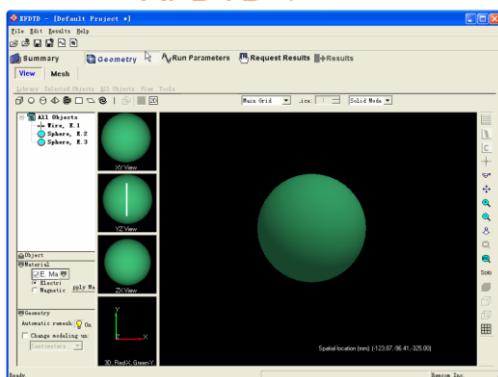
HFSS 9.0



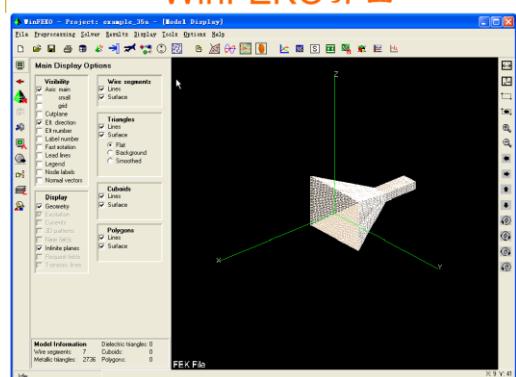
Ansys界面



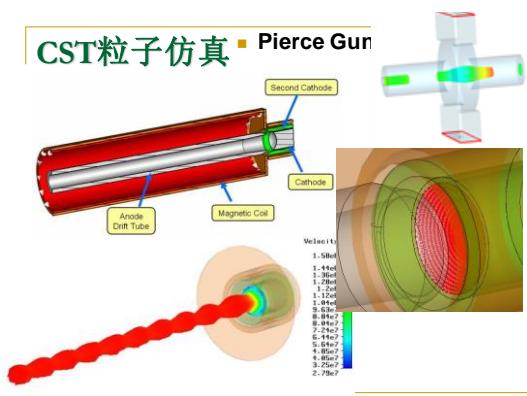
XFDTD界面



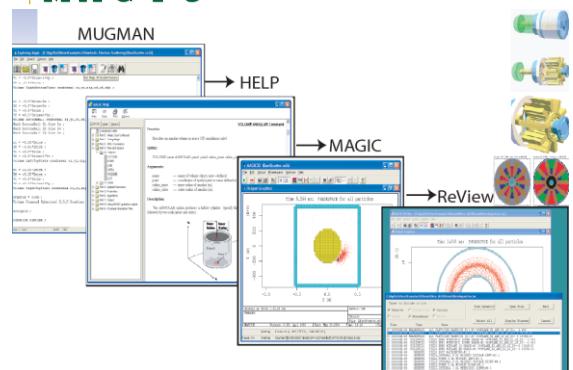
WinFEKO界面



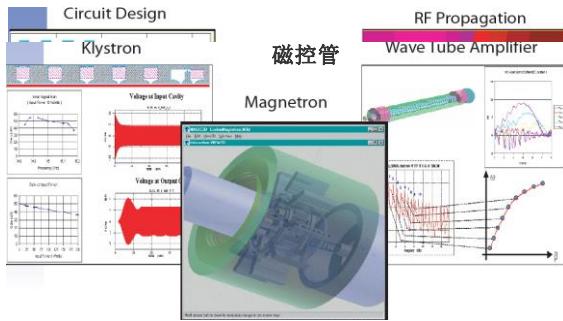
CST粒子仿真 ■ Pierce Gun



M A G I C



M A G I C



有限差分法介绍

- 有限差分方法是一种**微分方法**，自上世纪五十年代以来得到了广泛应用。概念清晰，**方法简单，直观**。
- 其与变分法相结合所形成的有限元法更有效。但有限差分还是以其固有特点在数值计算中有其重要地位，是应用最多的一种数值方法。
- 为求解由偏微分方程定解问题所构造的数学模型，有限差分法是将**定解区域（场区）离散化**为网格离散节点的集合。
- 以各离散点上**函数的差商来近似该点的偏导数**，使待求的偏微分方程定解问题转化为一组相应的**差分方程**。根据差分方程组解出各离散点处的待求**函数值——离散解**。

1、差分与差商

- 用**差分代替微分**，是有限差分法的基本出发点。这一点由**微分原理**保证的，当自变量的差分趋于零时，差分变成微分

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x), \quad h = \Delta x$$

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) \approx \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

差分与差商

■ 前向差分

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

■ 后向差分

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

■ 中心差分

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

差分与差商

- 通过泰勒公式分析上面差分精度，在某点上的一阶导数的逼近度可由泰勒公式展开

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{1}{2!}h^2 f''(x_0) + \dots$$

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{1}{2!}h^2 f''(x_0) - \dots$$

$$f(x_0 + h) - f(x_0 - h) = 2hf'(x_0) + \frac{2}{3!}h^3 f'''(x_0) + \dots$$

- 两式相减

差分与差商

- 前向、后向差分截断于 $h^2 f''(x_0)/2!$ ，具有 h 的一阶精度，而中心差分法截断于 $2h^3 f'''(x_0)/3!$ ，具有 h 的二阶精度，中心差分的精度比较高。

二阶导数的差分格式

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f}{dx^2} &= \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{df}{dx} \Big|_{x+\Delta x} - \frac{df}{dx} \Big|_x \right) \\ &\approx \frac{1}{h} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \right] \\ &= \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \end{aligned}$$

前向差分
后向差分

差分与差商

- 对偏导数，可仿照上述方法，将表示为：

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u(x+h, y, z) - u(x-h, y, z)}{2h}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u(x+h, y, z) - 2u(x, y, z) + u(x-h, y, z)}{h^2}$$

2、欧拉近似、梯形法则和龙格-库塔法

- 除了用最简洁差分去代替微分外，还可以从微分方程的解为积分形式出发，利用数值积分计算的手段处理差分格式，通过直观图形法去分析。

设有初值问题

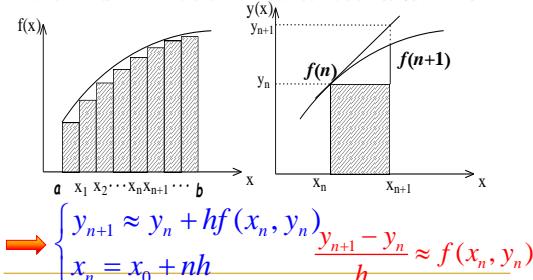
$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y|_{x=x_0} = y_0 \end{cases}$$

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

欧拉近似

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y|_{x=x_0} = y_0 \end{cases} \quad y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

- 欧拉近似法在函数图上用阶梯的折线代替曲线



欧拉近似法的精度

- 利用泰勒展开

$$\begin{aligned} y(x_{n+1}) &= y(x_n) + y'(x_n) \Delta x + \frac{1}{2!} \Delta x^2 y''(x_n) + L \\ &= y(x_n) + f(x_n, y_n) h + O(h^2) \end{aligned}$$

欧拉近似法的误差量级为 $O(h^2)$ ，为一阶精度。

欧拉近似法适用于区间不大、精度要求不高的场合。

梯形近似

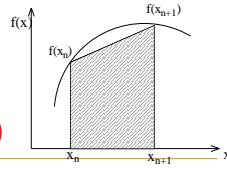
$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y|_{x=0} = y_0 \end{cases} \quad y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

- 改善数值分析的精度关键是**如何更好地近似曲边梯形的面积**。用**函数曲线的端点连线代替曲线**，而不是用矩形的平行线。

$$y_{n+1} \approx y_n + \frac{h_n}{2} (f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}))$$

- 上式为**梯形近似法**，又称改进的欧拉折线法，改进后的误差具有**二阶精度**，比欧拉折线法小一个数量级（证明见P112）

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h_n} \approx \frac{1}{2} (f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}))$$



例题 改进欧拉法的近似计算

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y \\ y|_{x=0} = 1 \end{cases}$$

求x=0.01的近似值

解： $y_{n+1} = y_n + \frac{h_n}{2} (f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1}))$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2} (f(x_0, y_0) + f(x_1, \bar{y}_1))$$

- 由于 $f(x, y) = y$

法1： $y_1 = y_0 + \frac{h}{2} (y_0 + \bar{y}_1)$ → $\bar{y}_1 = y_0 (1 + \frac{h}{2}) / (1 - \frac{h}{2})$

梯形近似

- 可以看出方程两边都包含**n+1步的待求未知量**，是隐式格式，如何求解？

$$\begin{aligned} y_{n+1} &\approx y_n + \frac{h}{2} (f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})) \\ \bar{y}_{n+1} &= y_n + hf(x_n, y_n) \end{aligned}$$

- 先用**欧拉折线法**计算出**0到n+1步的未知值的预估值**，然后，再用**梯形近似法计算**。就是“**预估-校正法**”。该方法截断误差仍然为O(h³)。

→ $y_{n+1} = y_n + \frac{h_n}{2} (f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1}))$

龙格-库塔法

- 一般梯形近似法不能一步计算得到所要求的精度，需要采用**多次迭代**才能够得到积分精度要求

$$\begin{cases} y_{n+1}^{[0]} = y_n + hf(x_n, y_n) & \text{零时间步：用欧拉近似算初值} \\ y_{n+1}^{[s+1]} = y_n + \frac{h}{2} (f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{[s]})), & s = 0, 1, 2, \dots \\ \bar{y} = y_{n+1}^{[s]} \end{cases}$$

用新的 y_n 计算并代替 \bar{y}_{n+1}

- 当迭代到一定的次数时，即满足精度 $\max_{n \in [0, N]} |y_{n+1}^{[s+1]} - y_{n+1}^{[s]}| < \varepsilon$ 时，就认为获得所要求的精度积分。

龙格-库塔法

- 采用预估计-校正法的梯形近似法，只计算一次就能得到的截断误差为O(h³)结果，但当期望一步到达r阶精度，就发展了**龙格-库塔法**

- 设K作为 y_n 到 y_{n+1} 的增量，得到n+1步长处的结果

$$y_{n+1} = y_n + \bar{K}$$

- K是用ω常数对K1, K2, ...进行**线性组合构造函数**

$$\bar{K} = \omega_1 K_1 + \omega_2 K_2 + \dots + \omega_r K_r$$

龙格-库塔法

- K1, K2, ... 用 α, β 常数及 K 构造的自变量表示的函数 f 的一系列值

$$\begin{cases} K_1 = hf(x_n, y_n) \\ K_2 = hf(x_n + \alpha_1 h, y_n + \beta_{11} K_1) \\ K_3 = hf(x_n + \alpha_2 h, y_n + \beta_{21} K_1 + \beta_{32} K_2) \\ \vdots \\ K_r = hf(x_n + \alpha_r h, y_n + \beta_{r1} K_1 + \beta_{r2} K_2 + \dots + \beta_{r,r-1} K_{r-1}) \end{cases}$$

$\alpha_2, \beta_{21}, \alpha_3, \beta_{31}, \beta_{32}, \dots, \alpha_r, \beta_{r1}, \beta_{r2}, \dots, \beta_{r,r-1}$ 及 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r$

- 选取与函数 f 无关又与步长数 n 无关的常数
- 这些与计算函数无关的常数如何去确定? 这也是龙格-库塔法的关键, 思路是: 即要计算函数的增量, 就要想到泰勒展开方法, 上式中每个 K 值就是在展开处附近的近似值。

龙格-库塔法

$$K_r = hf(x_n + \alpha_r h, y_n + \beta_{r1} K_1 + \beta_{r2} K_2 + \dots + \beta_{r,r-1} K_{r-1})$$

$$y_{n+1} = y_n + \bar{K} = y_n + \omega_1 K_1 + \omega_2 K_2 + \dots + \omega_r K_r$$

- 右端 (x_n, y_n) 处做泰勒展开, 重新按 h 阶整理, 合并同类项, 得

$$y_{n+1} = y_n + \gamma_1 h + \frac{1}{2!} \gamma_2 h^2 + \frac{1}{3!} \gamma_3 h^3 + \dots$$

- 同样对微分方程的解 $y(x)$ 在点 (x_n, y_n) 进行泰勒展开

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + f'_n h + \frac{1}{2!} f''_n h^2 + \frac{1}{3!} f'''_n h^3 + \dots$$

- 比较上面两式, 只要它们前面项的系数尽可能多的相等, 就保证了截断精度。

龙格-库塔法

- 选取 α, β, ω 系数, 使两式每项的系数相等

$$\gamma_1 = f_n, \gamma_2 = f'_n, \gamma_3 = f''_n, \gamma_4 = f'''_n, \dots$$

- 如果该关系式能够一直维持到第 m 阶仍能成立, 但 $m+1$ 阶不再成立, 就称为 m 阶龙格-库塔法

$$\gamma_j = f_n^{(j-1)}, j = 1, 2, \dots, m$$

则:

$$y_{n+1} = y_n + h(\omega_1 + \omega_2)y_n' + h^2 \{\omega_2 a_2 \frac{\partial f}{\partial x} + \omega_2 \beta_{21} y_n' \frac{\partial f}{\partial y}\} + O(h^3)$$

将 $y(x_{n+1})$ 进行泰勒基数展开:

$$y(x_{n+1}) = y_n + hy_n' + \frac{h^2}{2!} y_n'' + O(h^3)$$

比较以上两式得:

$$\begin{cases} \omega_1 + \omega_2 = 1 \\ \alpha_2 \omega_2 \frac{\partial f}{\partial x} + \beta_{21} \omega_2 y_n' \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} y_n'' \end{cases}$$

$$y_n'' = \frac{\partial y'}{\partial x} = \frac{\partial(f(x, y))}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{带入上式, 整理得}$$

二阶龙格-库塔法:

- 二阶龙格-库塔法的形式解

$$y_{n+1} = y_n + \omega_1 K_1 + \omega_2 K_2$$

$$K_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$K_2 = hf(x_n + \alpha_2 h, y_n + \beta_{21} K_1)$$

$$\text{展开 } K_2: K_2 = h\{f(x_n, y_n) + a_2 h \frac{\partial f}{\partial x} + \beta_{21} K_1 \frac{\partial f}{\partial y} + O(h^2)\}$$

则:

$$y_{n+1} = y_n + \omega_1 K_1 + \omega_2 hf(x_n, y_n) + \omega_2 h^2 \{a_2 \frac{\partial f}{\partial x} + \beta_{21} f(x_n, y_n) \frac{\partial f}{\partial y}\} + O(h^3)$$

龙格-库塔法

$$\begin{cases} \omega_1 + \omega_2 = 1 \\ \alpha_2 \omega_2 = \beta_{21} \omega_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

- 这是一个不定方程组, 也就是方程的变量的数目多于方程个数, 因而方程的解有多个。上式如果取 $\alpha_2 = \beta_{21} = 1, \omega_1 = \omega_2 = 1/2$

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + K_1/2 + K_2/2 \\ K_1 = hf(x_n, y_n) \\ K_2 = hf(x_n + h, y_n + K_1) \end{cases}$$

- 这就是梯形近似的预估计-校正法。其他阶的龙格-库塔法可以类推

三阶龙格-库塔法公式:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(K_1 + 4K_2 + K_3) \\ K_1 = hf(x_n, y_n) \\ K_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}K_1\right) \\ K_3 = hf\left(x_n + h, y_n - K_1 + 2K_2\right) \\ y(x_{n+1}) - y_{n+1} = O(h^4) \end{cases}$$

四阶龙格-库塔法公式:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ K_1 = hf(x_n, y_n) \\ K_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}K_1\right) \\ K_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}K_2\right) \\ K_4 = hf(x_n + h, y_n + K_3) \\ y(x_{n+1}) - y_{n+1} = O(h^5) \end{cases}$$

例题 龙格-库塔法的近似计算(4阶)

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y - \frac{2x}{y} \\ |y|_{x=0} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y_{n+1} = y_n + K_1/2 + K_2/2 \\ K_1 = hf(x_n, y_n) \\ K_2 = hf(x_n + h/2, y_n + K_1/2) \end{cases}$$

解: 取步长 $h=0.2$

$$\begin{aligned} K_1 &= 0.2(y_n - \frac{2x_n}{y_n}) & K_2 &= 0.2(y_n + \frac{K_1}{2} - \frac{2(x_n + 0.1)}{y_n + K_1/2}) \\ K_3 &= 0.2(y_n + \frac{K_2}{2} - \frac{2(x_n + 0.1)}{y_n + K_2/2}) & K_4 &= 0.2(y_n + K_3 - \frac{2(x_n + 0.2)}{y_n + K_3}) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \end{aligned}$$

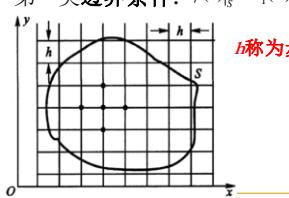
精确解为 $y(x) = \sqrt{1+2x}$, 精确解和数值解结果比较

x_n	0	0.2	0.4	0.8	1.0
y_n	1	1.183 23	1.341 67	1.612 51	1.732 14
$y(x_n)$	1	1.183 22	1.341 64	1.612 45	1.732 05

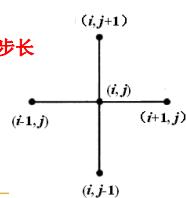
3、有限差分法基础

■ 设在一个边界为 S 的二维区域内, 电位 φ_{ij} 满足第一类边界条件, 电位函数满足泊松方程或者拉普拉斯方程。

第一类边界条件: $\varphi(r)|_S = u_1(S)$



h 称为步长



■ 与节点 (x_i, y_j) 在 x 方向直接相邻的节点上的电位值表示为

$$\varphi_{i-1,j} = \varphi(x_i - h, y_j) = \varphi_{i,j} - h \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{i,j} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \Big|_{i,j} - \dots$$

$$\varphi_{i+1,j} = \varphi(x_i + h, y_j) = \varphi_{i,j} + h \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{i,j} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \Big|_{i,j} + \dots$$

将以上两式相加, 并略去 h^2 以上的高阶项得

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \Big|_{i,j} = \frac{\varphi_{i-1,j} + \varphi_{i+1,j} - 2\varphi_{i,j}}{h^2}$$

■ 与节点 (x_i, y_j) 在 y 方向直接相邻的节点电位表示为

$$\begin{aligned}\varphi_{i,j-1} &= \varphi(x_i, y_j - h) = \varphi_{i,j} - h \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{i,j} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \Big|_{i,j} - \dots \\ \varphi_{i,j+1} &= \varphi(x_i, y_j + h) = \varphi_{i,j} + h \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{i,j} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \Big|_{i,j} + \dots\end{aligned}$$

将以上两式相加，并略去 h^2 以上的高阶项得

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \Big|_{i,j} = \frac{\varphi_{i,j-1} + \varphi_{i,j+1} - 2\varphi_{i,j}}{h^2}$$

代入拉普拉斯方程 $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$

$$\varphi_{i,j} = \frac{1}{4} (\varphi_{i-1,j} + \varphi_{i,j-1} + \varphi_{i+1,j} + \varphi_{i,j+1})$$

V_{grid}

代入泊松方程 $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\frac{\rho_s}{\epsilon_0}$

$$\varphi_{i,j} = \frac{1}{4} (\varphi_{i-1,j} + \varphi_{i,j-1} + \varphi_{i+1,j} + \varphi_{i,j+1} + \frac{\rho_s}{\epsilon_0} h^2)$$

① 简单迭代法

按照如下公式反复迭代，直到误差小于给定的迭代阈值。

对求解域内的节点赋予迭代初值 $\varphi_{i,j}^0$ ，可以设为0。

$$\varphi_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{4} (\varphi_{i-1,j}^k + \varphi_{i,j-1}^k + \varphi_{i+1,j}^k + \varphi_{i,j+1}^k), \quad i, j = 1, 2, \dots$$

② 超松弛迭代法

利用超松弛迭代法加快迭代速度，其迭代过程为

$$\varphi_{i,j}^{k+1} = \varphi_{i,j}^k + \gamma (\varphi_{i,j}^{k+1} - \varphi_{i,j}^k)$$

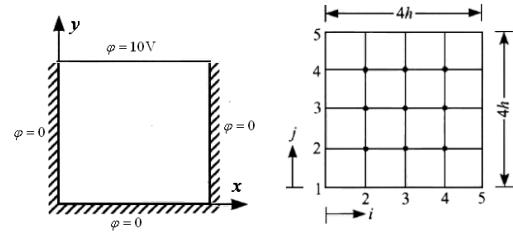
γ 为松弛因子。

$$\varphi_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{4} (\varphi_{i-1,j}^{k+1} + \varphi_{i,j-1}^{k+1} + \varphi_{i+1,j}^k + \varphi_{i,j+1}^k)$$

$$\gamma_{\text{opt}} = 2/[1 + \sin(\frac{\pi}{M-1})]$$

M为节点数。

例题 设有一个截面为正方形的无限长接地金属槽，如图(a)所示，其导体盖板电位为10V，并与侧壁绝缘。求其槽内电位分布。



槽体截面划分为 4×4 的16个正方形网格，共有25个节点，其中沿边界的16个节点的电位是已知的，即

$$\varphi_{1,1-5} = \varphi_{1-5,1} = \varphi_{1-5,5} = 0V$$

$$\varphi_{5,2-4} = 10V$$

所求解的节点电位为 $\varphi_{i,j}$, $i = 2 \sim 4$, $j = 2 \sim 4$

经过 $k=16$ 次的迭代运算

	1 φ	2 φ	3 φ
1 φ	0.7144 φ	0.9823 φ	0.7144 φ
2 φ	1.8751 φ	2.5002 φ	1.8751 φ
3 φ	4.2857 φ	5.2680 φ	4.2857 φ

差分与差商

- 前向差分 $\frac{df}{dx} \approx \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$
- 后向差分 $\frac{df}{dx} \approx \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$
- 中心差分 $\frac{df}{dx} \approx \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u(x+h, y, z) - u(x-h, y, z)}{2h}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u(x+h, y, z) - 2u(x, y, z) + u(x-h, y, z)}{h^2}$$

4、Poisson方程差分格式

■ 二维Poisson方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u(x+h, y, z) - 2u(x, y, z) + u(x-h, y, z)}{h^2}$

$$\nabla^2 \varphi(x, y) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = F(x, y)$$

■ 如何离散方程的有限差分格式?

■ 首先是空间离散, 采用什么样离散?

■ 通常采用完全有规律的分布方式, 这样可使每个离散点上得到相同形式的差分方程, 有效的提高解题速度。对能填满平面域的三种规则网格(正方形, 正三角形和正六边形)的划分方式, 经常采用的是矩形网格划分,

$$\varphi_{i,j} = \frac{1}{4}(\varphi_{i-1,j} + \varphi_{i,j-1} + \varphi_{i+1,j} + \varphi_{i,j+1} + \frac{\rho_s}{\epsilon_0} h^2)$$

Poisson差分格式

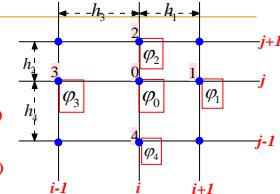
■ 一阶偏导数差分格式

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_0 \approx \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{h_1} + O(h_1^2) \\ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_0 \approx \frac{\varphi_0 - \varphi_3}{h_3} + O(h_3^2) \end{cases}$$

■ 如何得到高精度的差分格式? 可采用待定系数的分析方法, 它的思路: 1、3结点与0结点在x方向的差分用泰勒公式展开, 它们各自占有一定的权系数, 以截断误差来计算系数

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_0 h_1 + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_0 h_1^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} \right)_0 h_1^3 + \dots$$

$$\varphi_3 = \varphi_0 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_0 h_3 + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_0 h_3^2 - \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} \right)_0 h_3^3 + \dots$$



Poisson差分格式

$$\alpha(\varphi_1 - \varphi_0) + \beta(\varphi_3 - \varphi_0) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_0 (\alpha h_1 - \beta h_3) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_0 (\alpha h_1^2 + \beta h_3^2) + \dots$$

■ 一阶偏导数差分格式, 忽略 h^3 以上的高次幂的项, 并且令 $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$ 项的系数为零, 这样处理可以保证得到的差分格式误差为 h^3 级量。系数为零的条件

$$\alpha h_1^2 + \beta h_3^2 = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{h_3^2}{h_1^2} \beta$$

■ 求出具有二阶精度精度为一阶偏导数差分格式

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_0 \approx \frac{\alpha(\varphi_1 - \varphi_0) + \beta(\varphi_3 - \varphi_0)}{\alpha h_1 - \beta h_3} = \frac{h_3^2(\varphi_1 - \varphi_0) - h_1^2(\varphi_3 - \varphi_0)}{h_1 h_3 (h_1 + h_3)}$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_0 \approx \frac{h_4^2(\varphi_2 - \varphi_0) - h_2^2(\varphi_4 - \varphi_0)}{h_2 h_4 (h_2 + h_4)}$$

Poisson差分格式

$$\alpha(\varphi_1 - \varphi_0) + \beta(\varphi_3 - \varphi_0) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_0 (\alpha h_1 - \beta h_3) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_0 (\alpha h_1^2 + \beta h_3^2) + \dots$$

■ 二阶偏导数的差分格式, 令方程右边的一阶偏导数的系数为0, 得到系数间的表达式

$$(\alpha h_1 - \beta h_3) \Rightarrow \alpha = \frac{h_3}{h_1} \beta$$

■ 代入上式得到精度为 $O(h^3)$ 的二阶偏导数的差分格式

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_0 \approx 2 \frac{\alpha(\varphi_1 - \varphi_0) + \beta(\varphi_3 - \varphi_0)}{\alpha h_1^2 + \beta h_3^2} = 2 \frac{h_3(\varphi_1 - \varphi_0) + h_1(\varphi_3 - \varphi_0)}{h_1 h_3 (h_1 + h_3)}$$

Poisson差分格式

■ 当 $h_1 = h_3 = h$ 时, 上式可以简化为

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_0 \approx \frac{\varphi_1 - 2\varphi_0 + \varphi_3}{h^2} \quad \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)_0 \approx \frac{\varphi_2 - 2\varphi_0 + \varphi_4}{h^2}$$

■ 得到Poisson方程的五点差分格式

$$\varphi_{i+1,j} + \varphi_{i-1,j} + \varphi_{i,j+1} + \varphi_{i,j-1} - 4\varphi_{i,j} = h^2 F_{i,j}$$

$$\varphi_{i+1,j} + \varphi_{i-1,j} + \varphi_{i,j+1} + \varphi_{i,j-1} - 4\varphi_{i,j} = 0$$

5、媒质分界面上的差分格式

$$\nabla^2 \varphi(x, y) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = F(x, y)$$

■ 分界面与网格线重合的情况

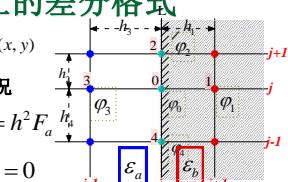
$$\varphi_{a1} + \varphi_{a3} + \varphi_{a4} + \varphi_{a2} - 4\varphi_{a0} = h^2 F_a$$

$$\varphi_{b1} + \varphi_{b3} + \varphi_{b4} + \varphi_{b2} - 4\varphi_{b0} = 0$$

■ 在0, 2, 4点的电位值相等

$$\varphi_{ai} = \varphi_{bi} = \varphi_i \quad (i = 0, 2, 4)$$

■ 两式中 φ_{a1} 和 φ_{b3} 是假设“虚”电位, 可以利用分界面上场量遵循的边界条件, 削去它们



媒质界面的差分格式

- 由边界条件，假设没有电荷

$$\varepsilon_a \frac{\partial \varphi_a}{\partial n} = \varepsilon_b \frac{\partial \varphi_b}{\partial n}$$

Boundary condition:
 $\vec{n} \cdot (\vec{D}_a - \vec{D}_b) = \rho_s = 0$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n}$$

- 中心差分格式表示

$$\varepsilon_a (\varphi_{a1} - \varphi_{a3}) \approx \varepsilon_b (\varphi_{b1} - \varphi_{b3})$$

- 把前面关于 φ_{a1} 和 φ_{b3} 式子代入上式

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= \frac{1}{4} \left(\frac{2}{1+K} (\varphi_{b1} + \varphi_2 + \frac{2K}{1+K} \varphi_{a3} + \varphi_4) - \frac{K}{1+K} h^2 F_a \right) \\ K &= \varepsilon_a / \varepsilon_b\end{aligned}$$

斜媒质界面上的差分格式

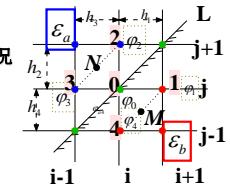
- 分界面与网格线呈对角线的情况

$$\begin{aligned}\varphi_{a3} + \varphi_{a2} + \varphi_{a1} + \varphi_{a4} - 4\varphi_{a0} &= h^2 F_a \\ \varphi_{b1} + \varphi_{b4} + \varphi_{b3} + \varphi_{b2} - 4\varphi_{b0} &= 0\end{aligned}$$

- 在0点上的电位值相同

$$\varphi_{ai} = \varphi_{bi} = \varphi_i \quad (i=0)$$

- 两式中 $\varphi_{a1}, \varphi_{a4}$ 和 $\varphi_{b2}, \varphi_{b3}$ 是假设“虚”电位，可以利用分界面上场量遵循的边界条件，削去它们



不同媒质界面上的差分格式

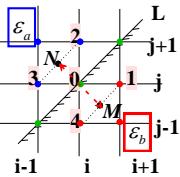
Boundary: $\vec{n} \cdot (\vec{D}_a - \vec{D}_b) = \rho_s = 0$

- 由边界条件，假设界面上没有电荷

$$\varepsilon_a \frac{\partial \varphi_a}{\partial n} = \varepsilon_b \frac{\partial \varphi_b}{\partial n} \rightarrow \varepsilon_a (\varphi_{aM} - \varphi_{aN}) \approx \varepsilon_b (\varphi_{bM} - \varphi_{bN})$$

- 对M、N结点应用线性插值

$$\begin{cases} \varphi_{aM} = \frac{\varphi_{a1} + \varphi_{a4}}{2} \\ \varphi_{aN} = \frac{\varphi_{a2} + \varphi_{a3}}{2} \\ \varphi_{bN} = \frac{\varphi_{b2} + \varphi_{b3}}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} \varphi_{a2} = \frac{\varphi_{a1} + \varphi_{a3}}{2} \\ \varphi_{a3} = \frac{\varphi_{a1} + \varphi_{a4}}{2} \\ \varphi_{b1} = \frac{\varphi_{b2} + \varphi_{b4}}{2} \\ \varphi_{b2} = \frac{\varphi_{b3} + \varphi_{b4}}{2} \end{cases}$$



不同媒质界面上的差分格式

- 把前面的 $\varphi_{a1} + \varphi_{a4}$ 和 $\varphi_{b2} + \varphi_{b3}$ 代入上式，得网格线呈对角线的差分格式：

$$\varphi_0 = \frac{1}{4} \left(\frac{2}{1+K} (\varphi_{b1} + \varphi_{b4}) + \frac{2K}{1+K} (\varphi_{a2} + \varphi_{a3}) - \frac{K}{1+K} h^2 F_a \right)$$

$$K = \varepsilon_a / \varepsilon_b$$

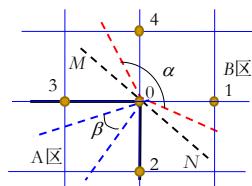
对于矢量磁位的情况：

$$2(A_{b1} + A_{b4}) + 2R(A_{a3} + A_{a2}) - 4(1+R)A_0 + Rh^2 F_a = 0$$

分界面与网格线重合，有拐点（编号与课本不同）

- α 在 $\pi/2 \sim 3\pi/2$, β 在 $0 \sim \pi/2$ 之间变化时，差分方程和边界条件不受影响。

- (1) β 在 $0 \sim \pi/2$ 之间变化时



B区媒质满足拉普拉斯方程： $A_{b1} + A_{b2} + A_{b3} + A_{b4} - 4A_0 = 0$

(2) $\alpha = \pi$ 时，退化为分界面与网格线呈对角线的情况

$$2(A_{b1} + A_{b4}) + 2R(A_{a3} + A_{a2}) - 4(1+R)A_0 + Rh^2 F_a = 0$$

- 上述 (1) 为空间只有B区媒质的边界条件差分格式；

(2) 为一半空间填充A区媒质的情况下边界条件差分格式： $(B+B/2+A/2)/2: A/4$

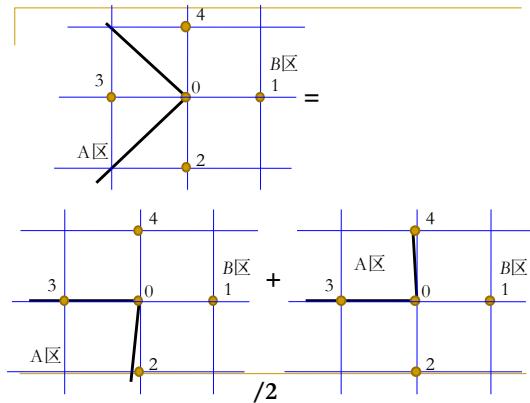
- 取两者的平均，则得到1/4空间填充A区媒质的情况下边界条件差分格式：

$$A_{b1} + A_{b4} + \frac{1}{2}(1+R)(A_3 + A_2) - (3+R)A_0 + \frac{1}{4}Rh^2 F_a = 0$$

也可以利用唯一性定理：(边界条件不变)

- (1) 两种情况下，节点1、4均在B区，取平均不变；
- (2) 节点2、3在A、B区边界，取平均不变；

$$A_3 = A_{a3} = A_{b3}, \quad A_2 = A_{a2} = A_{b2}$$



■ 根据

$$A_{b1} + A_{b4} + \frac{1}{2}(1+R)(A_3 + A_2) - (3+R)A_0 + \frac{1}{4}Rh^2F_a = 0$$

$$A_{b1} + A_{b4} + \frac{1}{2}(1+R)(A_3 + A_{b2}) - (3+R)A_0 + \frac{1}{4}Rh^2F_a = 0$$

根据对称性, 同理

$$A_{b1} + A_{b2} + \frac{1}{2}(1+R)(A_3 + A_{b4}) - (3+R)A_0 + \frac{1}{4}Rh^2F_a = 0$$

两式相加, 除以2

$$A_{b1} + \frac{1}{2}(1+R)A_3 + \frac{1}{4}(3+R)(A_{b4} + A_{b2}) - (3+R)A_0 + \frac{1}{4}Rh^2F_a = 0$$

媒质分界面差分格式 (积分法)

■ 媒质分界面上电位移矢量连续

$$\nabla \cdot (\epsilon \nabla \varphi) = 0$$

■ 对上式在边界进行面积分, 利用Gauss定律 (注意线积分方向)

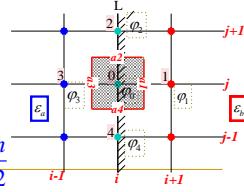
$$\iint_S \nabla \cdot (\epsilon \nabla \varphi) ds = \oint \nabla \varphi \cdot \hat{n} dl$$

■ 对a1,a2,a3,a4四个边积分, 如a2

(只考虑大小)

$$\int_{a2} \epsilon \nabla \varphi \cdot \hat{n} dl_{a2} =$$

$$\epsilon_b \frac{\varphi_2 - \varphi_0}{h} \frac{h}{2} + \epsilon_a \frac{\varphi_2 - \varphi_0}{h} \frac{h}{2}$$



媒质分界面差分格式 (积分法)

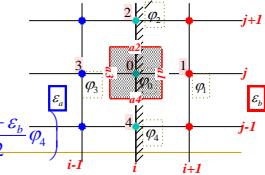
■ 其他3个边类似处理, 4个边的和

$$\left[\epsilon_b \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{h} \frac{h}{2} \right]_{a1} + \left[\epsilon_b \frac{\varphi_2 - \varphi_0}{h} \frac{h}{2} + \epsilon_a \frac{\varphi_2 - \varphi_0}{h} \frac{h}{2} \right]_{a2} \\ - \left[\epsilon_a \frac{\varphi_3 - \varphi_0}{h} \frac{h}{2} \right]_{a3} - \left[\epsilon_b \frac{\varphi_4 - \varphi_0}{h} \frac{h}{2} + \epsilon_a \frac{\varphi_4 - \varphi_0}{h} \frac{h}{2} \right]_{a4} = 0$$

■ 整理得

$$\frac{\epsilon_a + \epsilon_b}{2} \varphi_0 =$$

$$\frac{1}{4} \left(\epsilon_b \varphi_1 + \frac{\epsilon_a + \epsilon_b}{2} \varphi_2 + \epsilon_a \varphi_3 + \frac{\epsilon_a + \epsilon_b}{2} \varphi_4 \right)$$



6、边界条件的差分格式

$$\varphi|_S = f(x, y)$$

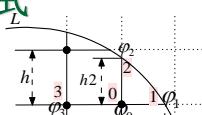
■ 第一类边界条件的差分离散化

■ 应用多元函数的泰勒公式,

结点1、3位函数值通过 φ_0 表示为

$$\begin{cases} \varphi_1 = \varphi_0 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_0 h_1 + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_0 h_1^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} \right)_0 h_1^3 + L \\ \varphi_3 = \varphi_0 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_0 h_2 + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_0 h_2^2 - \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} \right)_0 h_2^3 + L \end{cases}$$

■ 以 h 和 h_1 分别与以上两式相乘且相加, 消除一阶偏导项, 然后截断与 h 的二次项, 便得到关于结点0的二阶偏导数的差分格式



第一类边界差分格式

$$hh_1 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_0 \approx \frac{2h}{h+h_1} \varphi_1 + \frac{2h_1}{h+h_1} \varphi_3 - 2\varphi_0$$

■ 同理, 在0结点处关于y方向的二阶偏导的差分格式

$$hh_2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)_0 \approx \frac{2h}{h+h_2} \varphi_2 + \frac{2h_2}{h+h_2} \varphi_4 - 2\varphi_0$$

■ 代入给定的泊松方程, 得到通常第一类边界条件的邻近点差分格式

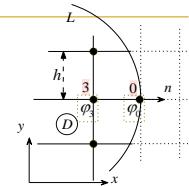
$$\frac{1}{\alpha(1+\alpha)} \varphi_1 + \frac{1}{\beta(1+\beta)} \varphi_2 + \frac{1}{1+\alpha} \varphi_3 + \frac{1}{1+\beta} \varphi_4 - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) \varphi_0 = \frac{1}{2} h^2 F$$

$$\alpha = h_1/h, \beta = h_2/h$$

第三类边界差分格式

■ 第三类边界条件的差分离散化

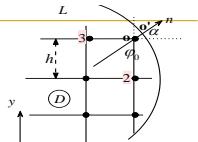
$$\left[\varphi + f_1(r', t) \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right]_S = f_2(r', t)$$



■ 第一种情况，当结点刚好落在边界线L上时，这还取决于边界结点处的外法线与网格线重合，

$$\varphi_0 + f_1(r_0) \frac{\varphi_0 - \varphi_3}{h} = f_2(r_0)$$

第三类边界差分格式



■ 第二种情况，当结点不落于边界线L上时，只需要引入于结点0相关的边界结点O，点的外方向n作为结点0处的“外方向n”，且近似地认为边界条件中给定的函数均在O点上的取值。这样，此种情况下的第三类边界条件的离散格式与上式相似。

$$\varphi_0 + f_1(r_0) \left(\frac{\varphi_3 - \varphi_0}{h} \cos \alpha + \frac{\varphi_0 - \varphi_2}{h} \sin \alpha \right) = f_2(r_0)$$

第三类边界差分格式

■ 外法线与网格线不重合情况，边界结点上的外向法线方向与水平夹角为 α ，其法向导数显然是在x和y方向的导数在法向的投影组合，

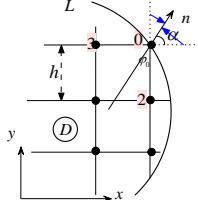
$$\left[\varphi + f_1(r', t) \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right]_S = f_2(r', t)$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_0 = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \sin \alpha \right]_0$$

$$\approx \frac{\varphi_0 - \varphi_3}{h} \cos \alpha + \frac{\varphi_0 - \varphi_2}{h} \sin \alpha$$

$$\varphi_0 + f_1(r_0) \left(\frac{\varphi_0 - \varphi_3}{h} \cos \alpha + \frac{\varphi_0 - \varphi_2}{h} \sin \alpha \right)$$

$$= f_2(r_0)$$



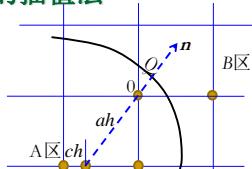
第二类边界差分格式的插值法

■ 做法线PQ；

■ $OP = ah$, $PR = bh$, $VP = ch$

■ 节点0与P间满足差分格式

$$\frac{\varphi_0 - \varphi_P}{ah} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_0 + O(h)$$



P点电位由V和R的插值来求出： $\varphi_P = b\varphi_V + c\varphi_R + O(h^2)$

$$\text{代入上式，并考虑到 } \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_0 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_0 + O(h)$$

$$\frac{1}{ah} (\varphi_0 - b\varphi_V - c\varphi_R) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_0 + O(h)$$

第二类边界差分格式

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$$

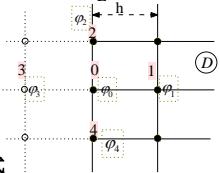
■ 第二类边界条件的差分离散化

■ 第二类齐次边界条件为第三类边界条件的特殊情况，即。我们这里讨论最常见的一种情况

加一层虚拟边界

$$\varphi_1 = \varphi_3$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{4} (2\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_4 - h^2 F)$$



■ 上面也是对称边界条件的离散公式

■ 第二类边界差分格式为

$$\frac{1}{ah} (\varphi_0 - b\varphi_V - c\varphi_R + \alpha(Q)\varphi_G) = g(Q)$$

其中， $\alpha=0$ 为第二类边界的情况， $\alpha \neq 0$ 为第三类边界的情况

边界差分格式可推广到正三角形六点、六边形三点式、正方形九点式等情况，见P124
直角坐标系拉普拉斯方程的边界的差分格式，见P125

抛物型和双曲型偏微分方程的有限差分法

■ 抛物型偏微分方程的有限差分法

$$\begin{cases} Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & 0 < x < L, 0 < t < T \\ u|_{t=0} = \phi(x), u|_{x=0} = u_1(t), u|_{x=L} = u_2(t) \end{cases}$$

空间步长: $h=L/J$, 时间步长: $\tau=T/N$

1. 最简单的显式差分格式

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\tau} - a^2 \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{h^2} = 0$$

$$j=1, 2, \dots, J-1$$

令 $r = \frac{a^2 \tau}{h^2}$

$$U_j^{n+1} = rU_{j+1}^n + (1-2r)U_j^n + rU_{j-1}^n$$

初始条件离散化:

$$U_j^0 = \phi(x_j), \quad j=1, 2, \dots, J-1$$

左、右端点有关系:

$$U_0^n = U_1(n\tau), \quad U_J^n = U_2(n\tau)$$

另一方法: 泰勒展开的“逐项逼近法”

■ 一阶展开

$$\frac{u(x_{j+1}, t_{n+1}) - u(x_j, t_n)}{\tau} = \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_j^n + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t_n + \theta h, t_n) + O(\tau^2)$$

■ 二阶展开

■ 利用差分与差商的关系

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{df}{dx} \Big|_{x+\Delta x} - \frac{df}{dx} \Big|_x \right) \approx \frac{1}{h} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \right]$$

前向和后向差分为:

$$\frac{u(x_{j+1}, t_n) - u(x_j, t_n)}{h} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_j^n + \frac{h}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j + \theta h, t_n)$$

$$+ \frac{h^2}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_j + \theta h, t_n) + \frac{h^3}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j + \theta h, t_n) + O(h^4)$$

$$\frac{u(x_j, t_n) - u(x_{j-1}, t_n)}{h} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_j^n - \frac{h}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j - \theta h, t_n)$$

$$+ \frac{h^2}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_j - \theta h, t_n) - \frac{h^3}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j - \theta h, t_n) + O(h^4)$$

■ 以上两式相减得:

$$\frac{u(x_{j+1}, t_n) - 2u(x_j, t_n) + u(x_{j-1}, t_n)}{h^2} =$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_j + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j + \theta h, t_n) + O(h^5)$$

此即P136的二阶泰勒展开的逼近形式。

2. 最简单的隐式差分格式

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\tau} - a^2 \frac{U_{j+1}^{n+1} - 2U_j^{n+1} + U_{j-1}^{n+1}}{h^2} = 0$$

$$U_j^n = -rU_{j-1}^{n+1} + (1+2r)U_j^{n+1} - rU_{j+1}^{n+1}$$

$$U_j^0 = \phi(x_j), \quad j=1, 2, \dots, J-1$$

$$U_0^n = U_1(n\tau), \quad U_J^n = U_2(n\tau)$$

通过线性方程组求解。 $j=0, 1, 2, \dots, N$

3. 六点对称格式

显式格式与隐式格式结合起来

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\tau} = \theta a^2 \frac{U_{j+1}^{n+1} - 2U_j^{n+1} + U_{j-1}^{n+1}}{h^2} + (1-\theta) a^2 \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{h^2}$$

表达了n和n-1层两层上相邻6个结点的函数值关系，故称为六点差分格式。

4. 一般线性抛物型微分方程

$$\begin{cases} Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - a(x,t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2b(x,t) \frac{\partial u}{\partial x} + c(x,t)u = d(x,t) \\ 0 < x < L, 0 < t < T \\ u|_{t=0} = \phi(x), u|_{x=0} = u_1(t), u|_{x=L} = u_2(t), \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t_n + \theta\tau) \approx \frac{1}{2h} [u(x_{j+1}, t_n + \theta\tau) - u(x_{j-1}, t_n + \theta\tau)] \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_n + \theta\tau) \approx \frac{1}{h^2} [u(x_{j+1}, t_n + \theta\tau) - 2u(x_j, t_n + \theta\tau) + u(x_{j-1}, t_n + \theta\tau)] \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_n) \approx \frac{1}{\tau} [u(x_j, t_{n+1}) - u(x_j, t_n)] \end{cases}$$

■ 令: $r = \frac{\tau}{h^2}$

$$\begin{aligned} U_j^{n+1} - U_j^n - ra_j^{n+\theta} (U_{j+1}^{n+\theta} - 2U_j^{n+\theta} + U_{j-1}^{n+\theta}) \\ - hrb_j^{n+\theta} (U_{j+1}^{n+\theta} - U_{j-1}^{n+\theta}) + \tau C_j^{n+\theta} U_j^{n+\theta} = \tau d_j^{n+\theta} \end{aligned}$$

- ①当 $\theta=0$ 时，可以得出显式格式；
②当 $\theta\neq0$ 时，得隐式格式。

双曲型偏微分方程的有限差分法，P141

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & 0 < x < L, 0 < t < T \\ u(x, 0) = \phi(x), & 0 < x < L \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x), & 0 < x < L \\ u(0, t) = u_1(t), & 0 < t < T \\ u(L, t) = u_2(t), & 0 < t < T \end{cases} \quad (4.5.22)$$

显式格式

$$\begin{cases} U_j^{n+1} = r^2 U_j^n + 2(1-r^2) U_j^n + r^2 U_j^n - U_j^{n-1} \\ U_j^n = \phi_j, \quad 0 < x < L, \quad j = 1, 2, \dots, J-1 \\ U_j^n = \phi_j + \tau \psi_j, \quad r = \frac{a\tau}{h} \\ U_0^n = u_1(n\tau), \quad n = 1, 2, \dots, N \\ U_L^n = u_2(n\tau), \quad n = 1, 2, \dots, N \end{cases} \quad (4.5.23)$$

$$\begin{cases} U_j^{n+1} = r^2 U_{j+1}^n + 2(1-r^2) U_j^n + r^2 U_{j-1}^n - U_j^{n-1} \\ U_j^n = \phi_j, \quad 0 < x < L, \quad j = 1, 2, \dots, J-1 \\ U_j^n = \phi_j + \tau \psi_j + \frac{a^2 \tau^2}{2} \left[\frac{\phi_{j+1} - 2\phi_j + \phi_{j-1}}{h^2} \right], \quad r = \frac{a\tau}{h} \\ U_0^n = u_1(n\tau), \quad n = 1, 2, \dots, N \\ U_L^n = u_2(n\tau) \end{cases} \quad (4.5.24)$$

初速度条件用到了二阶差商格式。

2. 隐式格式

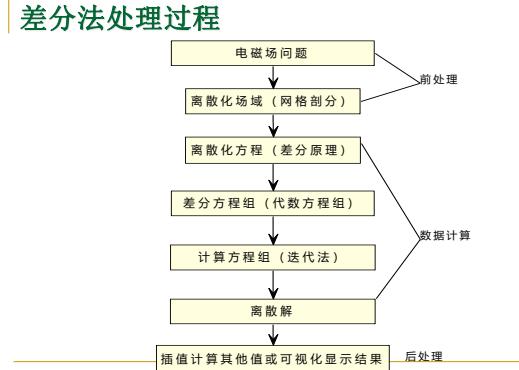
第n-1层、n层、n+1层的中心差商取平均

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_j = \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\tau^2} + O(\tau^2) \\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_j = \theta \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} + (1-2\theta) \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} \\ \quad + \theta \frac{u_{j+1}^{n-1} - 2u_j^{n-1} + u_{j-1}^{n-1}}{h^2} + O(h^2) \end{cases} \quad (4.5.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{r^2}{4} U_{j+1}^{n+1} - \left(1 + \frac{r^2}{2} \right) U_j^{n+1} + \frac{r^2}{4} U_{j-1}^{n+1} = & - \frac{r^2}{2} U_{j+1}^n + 2 \left(1 - \frac{r^2}{2} \right) U_j^n - \frac{r^2}{2} U_{j-1}^n - \frac{r^2}{4} U_{j+1}^{n-1} \\ & + \left(1 + \frac{r^2}{2} \right) U_j^{n-1} - \frac{r^2}{4} U_{j-1}^{n-1} \end{aligned} \quad (4.5.26)$$

7、差分方程组的求解

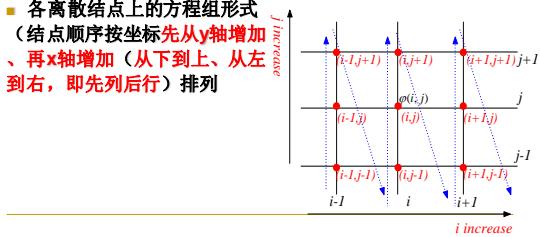
- 综上所述, 对场域D内各结点(包括所有场域内结点和边界结点)逐一列出对应的差分计算格式, 即构成以这些离散结点上的位函数 ϕ 为待求量的差分方程组(代数方程组)。求解这些代数方程组, 得到场域中的电位值
 - 计算步骤通常是:
 - 离散场域, 采用一定的网格剖分方式离散化计算区域。
 - 离散化场方程, 即基于差分原理的应用, 对场域内场的偏微分方程以及定解条件进行差分化处理, 得到方程的差分格式。
 - 计算离散解, 建立的差分格式(与原定解问题对立的离散数学模型—代数方程组), 选用合适的代数方程组解法, 编写相应的计算程序, 算出待求的结点上场值。



有限差分法格式特点

$$\varphi_{i+1,j} + \varphi_{i-1,j} + \varphi_{i,j+1} + \varphi_{i,j-1} - 4\varphi_{i,j} = 0$$

- 仔细分析泊松方程的离散差分方程组，从离散方程式不难看出，该方程组的系数一般是**有规律的**，且方程都很简单，每个方程的项数不多（待求量最多**不超过5项**）
 - 各离散结点上的方程组形式
(结点顺序按坐标先从y轴增加、再x轴增加(从下到上、从左到右, 即先列后行)排列)



有限差分法格式特点

- ### ■ 写成矩阵方程形式

稀疏矩阵：红色的连续

有限差分法格式特点

- 可以看出系数矩阵由如下特点：
 - 系数矩阵是稀疏矩阵，只有少数元素不为零。
 - 系数矩阵在一定边界条件下（边界与结点重合且场域边界类型都一样），是对称正定矩阵。
 - 系数矩阵是方阵，大小为场域中离散结点的总数目 $N=N_x \times N_y$ 。

超松弛迭代法

- 计算上面的线性代数方程组，通常有两种方法可以选择：直接法和迭代法。
- 松弛算法的基础为余数的概念，即余数逼近零的算法

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 - 4A_0 - h^2 f_0 = 0$$

- 而实际计算有一定的误差

$$\Delta = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 - 4A_0 - h^2 f_0 = \begin{cases} 0 \\ R_0 \end{cases}$$

超松弛迭代法

- 要计算出场域内的所有结点上差分格式的解，就要求所有点的差分方程余数为零。通常情况下，根据一定的计算精度要求，各结点分布的余数比较均匀且小于要求的精度，就得到满足精度的近似解。

- 松弛法就是使方程有规则地朝余数减少的方向进化，直到认为得到满足精度的近似值。为加快松弛算法的计算速度，科学家发展多种松弛法

超松弛迭代法

- 求解具有稀疏系数矩阵的大型差分方程组，其中最优的就是超松弛迭代法（Successive Over Relaxation, SOR）。为了说明SOR方法，首先介绍雅可比法和高斯-赛德尔法
- 雅可比法（Jacobi）就是要使迭代值能精确的满足前一次各点的位值所能表示的差分方程

$$\varphi_{i+1,j} + \varphi_{i-1,j} + \varphi_{i,j+1} + \varphi_{i,j-1} - 4\varphi_{i,j} = h^2 F_{i,j}$$

$$\rightarrow \varphi_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{4} (\varphi_{i+1,j}^n + \varphi_{i,j+1}^n + \varphi_{i-1,j}^n + \varphi_{i,j-1}^n - h^2 F_{i,j})$$

超松弛迭代法

- 逐次超松弛法是对高斯-赛德尔法的改进，该方法的核心是借助于一收敛因子 ω 作用到高斯-赛德尔迭代公式。

$$\bar{\varphi}_{i,j} = \frac{1}{4} (\varphi_{i+1,j}^n + \varphi_{i,j+1}^n + \varphi_{i-1,j}^{n+1} + \varphi_{i,j-1}^{n+1} - h^2 F_{i,j})$$

$$\varphi_{i,j}^{n+1} = \varphi_{i,j}^n + \omega (\bar{\varphi}_{i,j} - \varphi_{i,j}^n)$$

$$\varphi_{i,j}^{n+1} = \varphi_{i,j}^n + \frac{\omega}{4} (\varphi_{i+1,j}^n + \varphi_{i,j+1}^n + \varphi_{i-1,j}^{n+1} + \varphi_{i,j-1}^{n+1} - 4\varphi_{i,j}^n - h^2 F_{i,j})$$

- 当时 $\omega=1$ ，就回到高斯-赛德尔法。当 $\omega>2$ 时，迭代过程变得及其不稳定。只有 $1<\omega<2$ ，才能提高收敛速度。

超松弛迭代法

$$\varphi_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{4} (\varphi_{i+1,j}^n + \varphi_{i,j+1}^n + \varphi_{i-1,j}^n + \varphi_{i,j-1}^n - h^2 F_{i,j})$$

- 高斯-赛德尔法是雅可比法的改进方法，主要针对减少内存消耗，只需存储一组完整的数组。它采取的措施是对每一次迭代尽量采用最新计算的值来替换上一次迭代的旧值。结果收敛速度比雅可比法快一倍。

$$\varphi_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{4} (\varphi_{i+1,j}^n + \varphi_{i,j+1}^n + \varphi_{i-1,j}^{n+1} + \varphi_{i,j-1}^{n+1} - h^2 F_{i,j})$$

超松弛迭代法

- 正方形第一类边界条件时

$$\omega_b = \frac{2}{1 + \sin(\frac{\pi}{L})}$$

- 长方形第一类边界条件时

$$\omega_b = 2 - \pi \sqrt{2 \left(\frac{1}{L^2 + m^2} \right)}$$

场强与电、磁积分量的计算

- 通过上述差分方程组的求解，在获得场域内各结点上待求位函数后，往往还需求场中的场强分布，以及其他有关的积分特性（如磁通量和磁导、电导、电容等磁路及电路参数等）。

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\nabla \varphi = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{e}_y\right) \approx -\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_3}{2h} \mathbf{e}_x + \frac{\varphi_4 - \varphi_2}{2h} \mathbf{e}_y\right) \\ \mathbf{H} &= -\nabla \varphi_m = -\left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial \varphi_m}{\partial y} \mathbf{e}_y\right) \approx -\left(\frac{\varphi_{m1} - \varphi_{m3}}{2h} \mathbf{e}_x + \frac{\varphi_{m4} - \varphi_{m2}}{2h} \mathbf{e}_y\right) \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\partial A_z}{\partial y} \mathbf{e}_x - \frac{\partial A_z}{\partial x} \mathbf{e}_y \approx \frac{A_4 - A_2}{2h} \mathbf{e}_x - \frac{A_1 - A_3}{2h} \mathbf{e}_y\end{aligned}$$

场强与电、磁积分量的计算

- 无论是静电场、恒定电流场或恒定磁场，其通量可一般地表示为

$$\Phi = \int_S \mathbf{K} \cdot d\mathbf{S} \quad \rightarrow \quad \Phi = \sum_{i=1}^n K P_{av}(i) S_i$$

- 所分析的静电场中的电容C、恒定电流场中的电导G或恒定磁场中的磁导等电路或磁路参数P就可按下式计算

$$P = \frac{\Phi}{U} = \frac{\sum_{i=1}^n K P_{av}(i) S_i}{U}$$

收敛因子与收敛性的关系

- 一个稳定的收敛过程，降低任一结点最大误差到预定的误差 ε 所需要的迭代次数N由下式决定：

$$N \approx -F \ln \varepsilon$$

式中：F为渐近收敛速度，是边界形状、边界条件、结点数、差分方程形式、收敛因子的函数。

有限差分法的收敛性和稳定性

- 下面仅就单步法进行探讨。
- 尤拉折线法、龙格—库塔法、泰勒展开法等：单步法的一般形式可以表示为

$$y_{n+1} = y_n + h\psi(x_n, y_n, h)$$

单步法的截断误差为

$$\begin{cases} d_n(h) = y(x_{n+1}) - y(x_n) - h\psi(x_n, y_n, h) \\ a \leq x \leq b, 0 \leq h \leq h_0 \end{cases}$$

一般，单步法的截断误差可以用泰勒展开来估算

$$|d_n(h)| \leq Dh^{K+1}, \quad D > 0$$

D为正数，称为k阶方法

- 在y满足李普西兹(lipschitz)条件；

$$|\psi(x, y, h) - \psi(x, z, h)| \leq L |y - z|$$

计算误差可用下式估计：

$$|y(x_{n+1}) - y_{n+1}| \leq \begin{cases} Dh^k g \frac{e^{L(b-a)} - 1}{L} + e^{L(b-a)} |y(a) - y_0|, & L > 0 \\ |y(a) - y_0| + D(b-a)h^k, & L = 0 \end{cases}$$

$$h = [(x_{n+1} - a)/(n+1)] \leq h_0, \quad L \text{为非负常数。}$$

- 例 显示格式微分方程的稳定性和收敛性

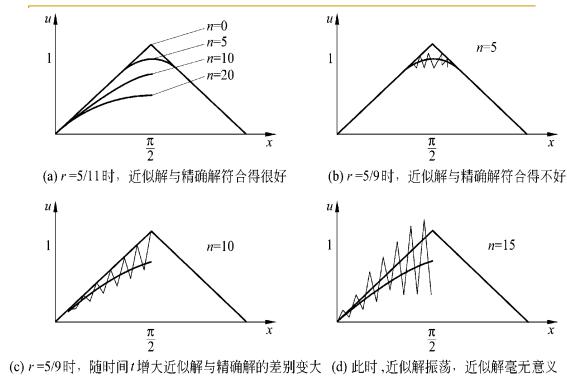
$$\begin{cases} Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < \pi, 0 < t \\ u|_{t=0} = \phi(x), u|_{x=0} = 0, u|_{x=\pi} = 0 \end{cases}$$

空间步长： $h = \pi/20$ ，时间步长： τ ， $r = \frac{\tau}{h^2}$

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\tau} - \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{h^2} = 0$$

$$U_j^0 = \phi(jh), \quad x = jh \quad j = 1, 2, \dots, J-1$$

$$U_0^n = 0, \quad U_J^n = 0, \quad t = n\tau$$



(1) 显式差分格式的稳定性

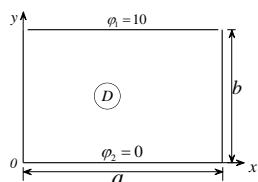
- 如果初值做微小变动时, 差分解也发生微小变动, 如图4.29 (a) 所示, 则称该差分格式为稳定的;
- 反之, 若差分格式不能控制误差的增长, 如图4.29 (b)-(d)所示, 则称该差分格式为不稳定格式。

(2) 隐式差分格式的稳定性

- 可以证明是无条件稳定的。

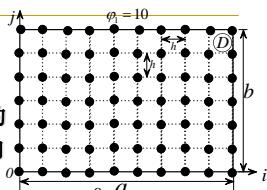
8、典型算例分析

- 设长直接地金属槽的横截面如图所示, 其侧壁与底面电位均为零, 顶盖电位的相对值为10。试求槽中间电位分布



典型算例分析

- ※、**离散场域**。用简洁的**正方形网格**对场域D各方向进行等分割分 nx, ny



- ※、**场域内差分格式**。采用Laplace五点差分格式

$$\varphi_{i+1,j} + \varphi_{i-1,j} + \varphi_{i,j+1} + \varphi_{i,j-1} - 4\varphi_{i,j} = 0$$

典型算例分析

- ※、**场问题分析**。直角坐标系, 槽内电位函数满足Laplace方程, 构成如下的第一类边值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 & (x, y) \in D \\ \varphi|_{(x=0, 0 \leq y \leq b)} = \varphi|_{(y=0, 0 \leq x \leq a)} = \varphi|_{(x=a, 0 \leq y \leq b)} = 0 \\ \varphi|_{(y=b, 0 < x < a)} = 10 \end{cases}$$

典型算例分析

- ※、**超松弛迭代计算**。用超松弛迭代法计算差分方程

$$\varphi_{i,j}^{n+1} = \varphi_{i,j}^n + \frac{\omega}{4} (\varphi_{i+1,j}^n + \varphi_{i,j+1}^n + \varphi_{i-1,j}^{n+1} + \varphi_{i,j-1}^{n+1} - 4\varphi_{i,j}^n)$$

- ※、**边界条件**。本例给定为第一类边值, 边界条件的差分离散化应直接赋值方式

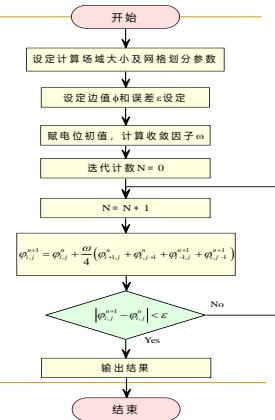
$$\begin{aligned} \varphi_{0,0 \sim ny} &= \varphi_{nx,0 \sim ny} = \varphi_{0 \sim nx,0} = 0 \\ \text{and } \varphi_{1 \sim nx-1,ny} &= 10 \end{aligned}$$

典型算例分析

- ※、**初值**。取零初值
- ※、**收敛条件**指标。规定当网格内点的相邻两次迭代近似值的相对误差值小于给定精度时（计算精度），终止迭代。

典型算例分析

计算流程



9、Helmholtz方程差分法

- 二维均匀媒质波导问题，是Helmholtz方程

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0 & x, y \in \Omega \\ u|_{\Gamma} = 0 & \text{for TM mode} \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} = 0 & \text{for TE mode} \end{cases}$$

- 采用矩形网格，方程中偏导数采用前面分析的差分格式

Helmholtz方程差分法

- 采用二阶精度的中心差分离散后，得到

$$\begin{cases} u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} = -k^2 u_{i,j} \\ u_{i,j}|_{\Gamma} = 0 \quad \text{for TM mode} \\ u_{i-1,j} - u_{i,j}|_{\Gamma} = 0 \quad \text{for TE mode} \end{cases}$$

Helmholtz方程差分法

- 写成矩阵方程

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = -k^2 \mathbf{B}\mathbf{u}$$

- 是广义特征值方程，求解特征值和对应的特征向量，就是对应波导问题的模式。

作业1

- 对二阶导数的差分过程中，推导每个过程采用中心差分法的离散格式

作业2

- 推导通用的Poisson方程的五点差分格式。（各网格步长不是均匀情况）

作业3

- 利用积分方法推导直角角点上的差分格式。

