Lucas Engels
R0629309

Modellering en Simulatie Lage-rang Benaderingen

Bewijzen

Opdracht 3

Te bewijzen:

$$A - E_k = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2 x_i^2 y_i^2 = A_k$$

Bewijs:

Uit het Eckhart-Young theorem volgt dat de beste rang r benadering van de matrix A gegeven wordt door de SVD van A af te knotten na r termen:

$$min_{rank(B)\leq r} \|A - B\|_F = \|A - \sigma_1 u_1 v_1^T\|_F$$

Uit **stap 4** van het gegeven algoritme volgt na de eerste stap dat:

$$j = 1$$
$$E_{j-1} = E_0 = A$$

en aangezien:

$$rank(B) \leq 1 \leq r$$

Geldt nu dat:

$$\|A - \alpha_1 x_1 y_1^T\|_F = min_{rank(B)\leq 1} \|A - B\|_F = \|A - \sigma_1 u_1 v_1^T\|_F$$

Vervolgens zien we nu op **stap 5** dat:

$$E_1 = E_0 - \alpha_1 x_1 y_1^T = A - \sigma_1 u_1 v_1^T = \sum_{i=2}^{r} \sigma_i u_i v_i^T$$

Door inductie valt nu te bewijzen dat:

$$E_n = \sum_{i=n+1}^{r} \sigma_i u_i v_i^T$$

waardoor geldt dat:

$$A - E_k = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i v_i^T - \sum_{i=k+1}^{r} \sigma_i u_i v_i^T = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i u_i v_i^T = A_k$$

Opdracht 4

R0629309 => C = 9

Aantal elementen in A:
$280000 \times 58000 = 16.24 \times 10^9$

Geheugen nodig voor de volledige voorstelling in dubbele precisie floating points:
$129.92 \times 10^9 B = 129.92 GB$

Totaal PC-geheugen (RAM+SWAP):
$8GB + (2 + 9^2)GB = 91GB$

Besluit:
Als we niet kunnen garanderen dat de rang-1 benadering over hetzelfde ijlheidspatroon als A bezit dan kunnen we de berekening, gegeven het totaal PC-geheugen van 91GB, niet doorvoeren.

Indien dit wel lukt:

Geheugen nodig voor iteratie k (16 bytes: 4 voor de positie en 8 voor de waarde zelf):
$(27 \times 10^6 + k(280000 + 58000 + 1)) \times 16$ bytes $= 437MB$

=> 91GB is ruim voldoende voor meerdere iteraties door te voeren!

Opdrachten

Omwille van praktische redenen heb ik verkozen om te werken met een Matlab Notebook, de antwoorden en bijhorende code zijn te vinden op de volgende pagina's. De experimenten kunnen op deze manier opnieuw worden gedraaid aan de hand van het meegeleverde .mlx bestand.

Evaluatie

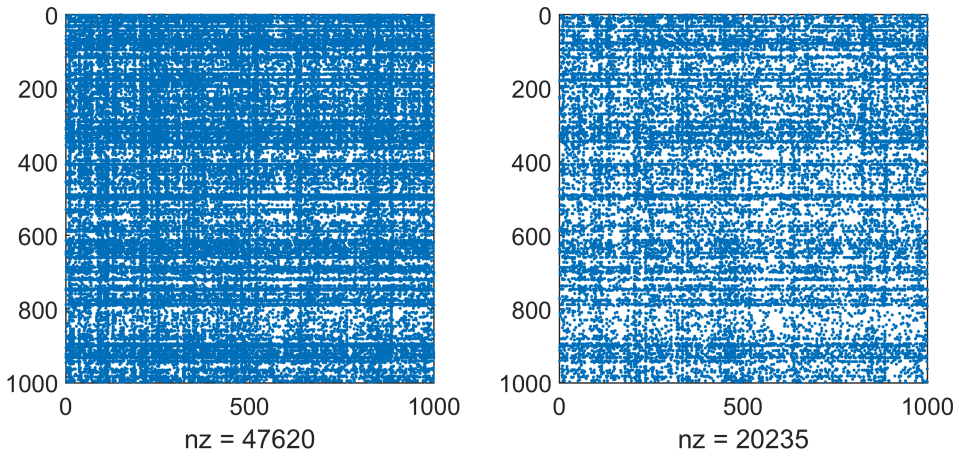
Voor het oplossen van de opdrachten: **16 uur.**
Voor het opstellen van het (Matlab notebook) verslag: **6 uur.**

De opdracht was duidelijk, het project was makkelijk in zijn opzet, ik heb bijgevolg geen verdere bedenkingen. De opgaves waren eveneens van een gepaste moeilijkheidsgraad en zijn naar mijn mening op het niveau van een goed programmeur en student die reeds wat ervaring heeft met Matlab. De verwoording van de vraagstellingen was steeds duidelijk. Enkel is het soms verwarrend waar uitleg begint en de vraag eindigt (wat meer spatie of een ander lettertype voor de opgaves zou kunnen helpen).

Opdrachten

Oefening 1

```
load('MovieLens_Subset.mat');
figure('Name','Sparsity plots');
subplot(1,2,1);
spy(R(1:1000,1:1000));
subplot(1,2,2);
spy(T(1:1000,1:1000));
```



Oefening 2

Voor de volle matrix R vinden we het aantal matrixwaarden vermenigvuldigd met de 8 bytes voor hun vlottendekommavoorstelling: 2206*12488*8 bytes = 220 388 224 B

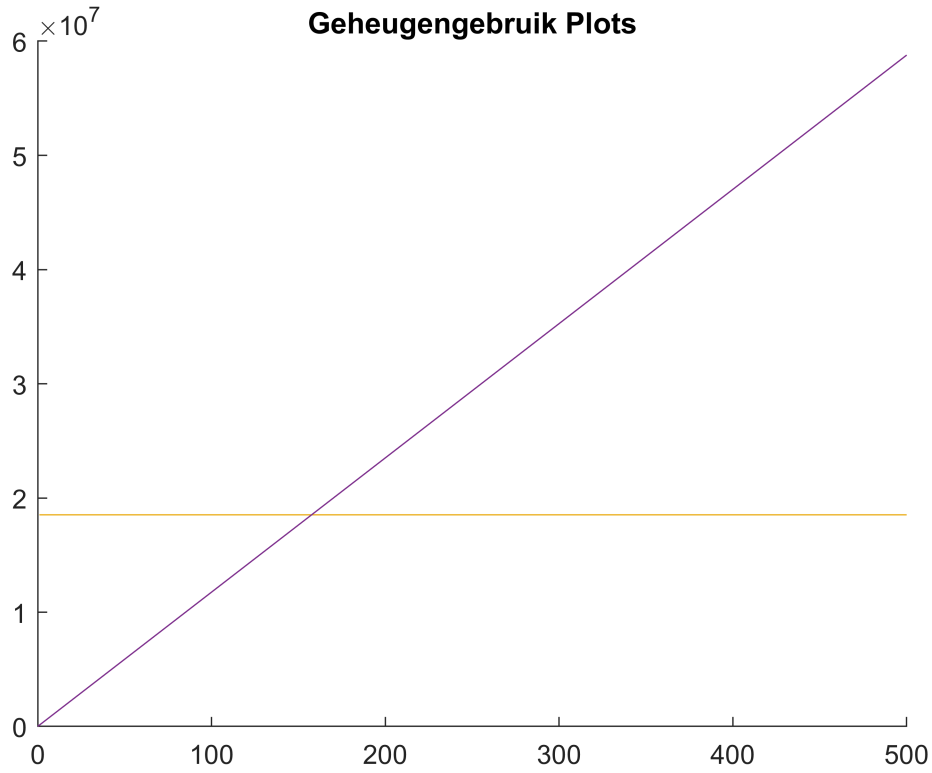
Voor de spaarse matrix R vinden we: 1157858*(2*4+8) bytes = 18 525 728 B, namelijk voor de 2 coordinaatgetallen en de bijhorende vlottendekommawaarde.

Voor de lage-rang benadering vinden we de som van de dimensies van R vermenigvuldigd met de rank en 8 bytes. R kan namelijk compact voorgesteld worden door R voor te stellen als het product van F en W. Waarbij F met dimensie [2206 r] en W dimensie [12488 r], bestaande uit dubbele-precisie vlottendekommawaarden. Dit geeft rank*117552 B.

```
r = 0:1:500;
[m,n] = size(R);    % Dimensions of matrix R
```

```
y0 = 8*m*n;          % y0 = Memory req. for dense matrix
y1 = 16*nnz(R);      % y1 = Memory req. for sparse matrix
y2 = 8*r*(m+n);      % y2 = Memory req. for lower rank est.

figure;
title('Geheugengebruik Plots')
hold on
% plot(ones(500)*y0);
plot(ones(500)*y1);
plot(r,y2);
hold off
```



In de figuur wordt grafisch voorgesteld dat voor rank = 1157858/117552 = 158 de twee laatste functieverlopen snijden.

Oefening 5

```
function [ X ] = r0629309_sparseModel(F, W, A)
    [is, js, ~] = find(A);
    vs = zeros(length(is), 1);

    parfor c = 1:length(is)
        vs(c) = F(is(c),:) * W(js(c), :)'; % in-place multiplication
    end

    X = sparse(is, js, vs); % Reconstruct sparse matrix
```

```
    end
```

We gebruiken enkel de coordinaten van onze (niet-nul) spaarse-matrix elementen om de berekeningen door te voeren. Voor elk coordinatenpaar (i,j) vermenigvuldigen we de i'de rij van F met de j'de kolom van W. De uitkomsten van deze vermenigvuldigingen worden bijgehouden in een lijst en worden vervolgens gebruikt om de resulterende spaarse matrix op te stellen.

Oefening 7

```
mu = r0629309_userMeans(R);
[muSorted,indices] = sort(mu);
lowestAVG= muSorted(1:3);
userIndices = indices(1:3);
lowAVG= horzcat(lowestAVG,userIndices)
```

```
lowAVG = 3×2
         0.51          488
      0.57273        11381
      0.89835         4205
```

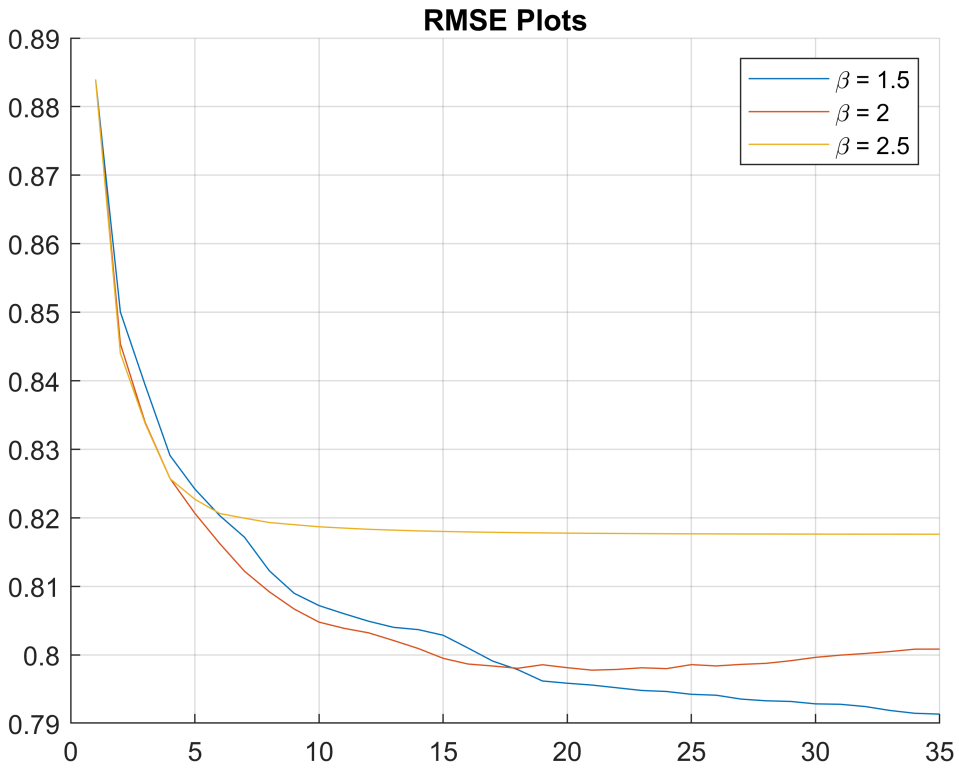
```
nmbHR = nnz(mu==5)
```

```
nmbHR =
    13
```

Er zijn 13 gebruikers met een gemiddelde gelijk aan 5.

Oefening 9

```
figure;
title('RMSE Plots')
for beta = [1.5 2 2.5]
    err = zeros(35,1);
    [F,W] = r0629309_constructModel(R,length(err),beta);
    for k = 1:length(err)
        err(k) = r0629309_RMSE(T, r0629309_sparseModel(F(:,1:k),W(:,1:k),T));
    end
    hold all; plot(err); drawnow;
end
legend('\beta = 1.5', '\beta = 2', '\beta = 2.5');
grid on;
```



Oefening 10

```
[F20,W20] = r0629309_constructModel(R,20,2);
codeFragmentOutput = round(F(1987,:))
```

```
codeFragmentOutput = 1×35
     1    -4     0    -3     3    -2     2    -1     1    -1     1    -1     1 ···
```

Oefening 12

```
function [ movieIDs, score ] = r0629309_predictedBestMovies(F,W)
    [m, ~] = size(F);
    [n, ~] = size(W);
    totals = sum((F((1:m)',:)*W'), 2);
    means = totals / n;
    [score,movieIDs] = sort(means,'desc');
end
```

Sinds we enkel de gemiddeldes bijhouden en nooit de volledige matrix F*W' berekenen krijgen we een O(max(m,n)) geheugencomplexiteit.

Elk element (i; j) berekenen we in-place door de i'de rij van F te vermenigvuldigen met de j'de kolom van W.

Oefening 13

```
format short g
[ movieIDs, score] = r0629309_actualBestMovies(R);
movieRatings = horzcat(movieIDs,score,r0629309_countVotes(R)')
```

```
movieRatings = 2206×3
        2055       4.4806         506
        2075       4.3258        2620
        2193       4.2982         488
        2181       4.2595          82
        2132       4.2023         384
        1932       4.1995         410
        1972       4.1975         460
         816       4.1723         552
          78       4.1535         367
        2035       4.1467        5505
      ⋮
```

```
[ movieIDsPredicted, scorePredicted] = r0629309_predictedBestMovies(F20,W20);
predictedMovieRatings = horzcat(scorePredicted,movieIDsPredicted);

top25Actual = movieIDs(1:25);
top25Predicted =  movieIDsPredicted(1:25);

topMovieNames = cell(25,2);
for i = 1:1:25
    topMovieNames{i,1} = movieLabel{top25Actual(i)};
    topMovieNames{i,2} = movieLabel{top25Predicted(i)};
end

topMovieNames
```

```
topMovieNames = 25×2 cell array
    {'Planet Earth II (2016)'                              }    {'Inception (2010)'                    }
    {'Black Mirror: White Christmas (2014)'                }    {'Interstellar (2014)'                 }
    {'Won't You Be My Neighbor? (2018)'                    }    {'Whiplash (2014)'                     }
    {'Sherlock - A Study in Pink (2010)'                   }    {'Ex Machina (2015)'                   }
    {'Blue Planet II (2017)'                               }    {'Intouchables (2011)'                 }
    {'Over the Garden Wall (2013)'                         }    {'Django Unchained (2012)'             }
    {'Whiplash (2013)'                                     }    {'The Martian (2015)'                  }
    {'Human Planet (2011)'                                 }    {'Arrival (2016)'                      }
    {'Inception (2010)'                                    }    {'Gone Girl (2014)'                    }
    {'The Night Of (2016)'                                 }    {'Grand Budapest Hotel, The (2014)'    }
    {'The Jinx: The Life and Deaths of Robert Durst (2015)'}    {'Edge of Tomorrow (2014)'             }
    {'Making a Murderer (2015)'                            }    {'Spotlight (2015)'                    }
    {'Piper (2016)'                                        }    {'Inside Out (2015)'                   }
    {'Frozen Planet (2011)'                                }    {'Guardians of the Galaxy (2014)'      }
    {'Whiplash (2014)'                                     }    {'Her (2013)'                          }
    {'Bo Burnham: what. (2013)'                            }    {'Shutter Island (2010)'               }
    {'The Handmaiden (2016)'                               }    {'Nightcrawler (2014)'                 }
    {'Your Name. (2016)'                                   }    {'Room (2015)'                         }
    {'Story of Film: An Odyssey, The (2011)'               }    {'Prisoners (2013)'                    }
    {'Laurence Anyways (2012)'                             }    {'Hunt, The (Jagten) (2012)'           }
    {'Intouchables (2011)'                                 }    {'Big Short, The (2015)'               }
    {'Spotlight (2015)'                                    }    {'King's Speech, The (2010)'           }
```

```
    {'Winter on Fire: Ukraine's Fight for Freedom (2015)'  }    {'Blade Runner 2049 (2017)'            }
    {'John Mulaney: New In Town (2012)'                    }    {'The Imitation Game (2014)'           }
    {'O.J.: Made in America (2016)'                        }    {'Black Mirror: White Christmas (2014)'}
```

Links vinden we de eigenlijke topfilms, rechts de voorspelde.

In de praktijk leunt het voorspelde vaak dichter aan bij de realiteit wegens de eerder beperkte aantal reviews. Indien we een kijkje nemen in de derde kolom dan kan men waarnemen dat het eigenlijke aantal review vaak kleiner is dan 1000. Met een responsgraad < 10% van de populatie is zo'n factuele voorspelling dus niet al te accuraat. In feite zijn, integenstelling tot de factuele lijst, de twee eerste voorspelde films zelfs echte kaskrakers gebleken!.

Oefening 15

Recommendations for user 98

```
[ movieIDs, score] = r0629309_predictedBestMoviesForUser(R,F20,W20,98);
movieRatingsForUser = horzcat(score,movieIDs);
top10 = movieIDs(1:10)';

favMoviePredictions = r0629309_getMovieNamesForIDs(top10)
```

```
favMoviePredictions = 10×1 cell array
    {'The Hunger Games (2012)'                          }
    {'Deadpool (2016)'                                  }
    {'Hobbit: An Unexpected Journey, The (2012)'        }
    {'The Martian (2015)'                               }
    {'The Hunger Games: Mockingjay - Part 1 (2014)'     }
    {'About Time (2013)'                                }
    {'Star Wars: Episode VII - The Force Awakens (2015)'}
    {'Frozen (2013)'                                    }
    {'Her (2013)'                                       }
    {'Iron Man 3 (2013)'                                }
```

```
[idT,colT,valT] = find(T);
ratings = valT(colT==98 & valT >= 4.5);
testIDs = idT(colT==98 & valT >= 4.5);

favMoviePredictions = r0629309_getMovieNamesForIDs(testIDs)
```

```
favMoviePredictions = 15×1 cell array
    {'How to Train Your Dragon (2010)'                  }
    {'The Hunger Games (2012)'                          }
    {'Dark Knight Rises, The (2012)'                    }
    {'Pitch Perfect (2012)'                             }
    {'Hobbit: An Unexpected Journey, The (2012)'        }
    {'Way, Way Back, The (2013)'                        }
    {'Short Term 12 (2013)'                             }
    {'Thor: The Dark World (2013)'                      }
    {'Wolf of Wall Street, The (2013)'                  }
    {'How to Train Your Dragon 2 (2014)'                }
    {'The Hunger Games: Mockingjay - Part 1 (2014)'     }
    {'Deadpool (2016)'                                  }
    {'Guardians of the Galaxy 2 (2017)'                 }
    {'Sherlock: The Abominable Bride (2016)'            }
```

```
    {'Kubo and the Two Strings (2016)'            }
```

Recommendations for user 10100

```
[ movieIDs, score] = r0629309_predictedBestMoviesForUser(R,F20,W20,10100);
movieRatingsForUser = horzcat(score,movieIDs);
top10 = movieIDs(1:10)';

favMoviePredictions = r0629309_getMovieNamesForIDs(top10)
```

```
favMoviePredictions = 10×1 cell array
    {'Guardians of the Galaxy (2014)'            }
    {'Deadpool (2016)'                           }
    {'Captain America: The Winter Soldier (2014)'}
    {'Interstellar (2014)'                       }
    {'Intouchables (2011)'                       }
    {'Big Hero 6 (2014)'                         }
    {'Arrival (2016)'                            }
    {'Logan (2017)'                              }
    {'Edge of Tomorrow (2014)'                   }
    {'Rise of the Planet of the Apes (2011)'     }
```

```
ratings = valT(colT==10100 & valT >= 4.5);
testIDs = idT(colT==10100 & valT >= 4.5);

favMoviePredictions = r0629309_getMovieNamesForIDs(testIDs)
```

```
favMoviePredictions = 19×1 cell array
    {'King's Speech, The (2010)'                 }
    {'Rise of the Planet of the Apes (2011)'     }
    {'Muppets, The (2011)'                       }
    {'Dark Knight Rises, The (2012)'             }
    {'Mission: Impossible - Ghost Protocol (2011)'}
    {'Hobbit: An Unexpected Journey, The (2012)' }
    {'Misérables, Les (2012)'                    }
    {'Star Trek Into Darkness (2013)'            }
    {'World's End, The (2013)'                   }
    {'Thor: The Dark World (2013)'               }
    {'Hobbit: The Desolation of Smaug, The (2013)'}
    {'Interstellar (2014)'                       }
    {'Captain America: The Winter Soldier (2014)'}
    {'Guardians of the Galaxy (2014)'            }
    {'Big Hero 6 (2014)'                         }
    {'Deadpool (2016)'                           }
    {'Doctor Who: Last Christmas (2014)'         }
    {'Piper (2016)'                              }
    {'Baby Driver (2017)'                        }
```

Oefening 17

```
movieIDs = [29;78;86;169;178;492;530;703;1136;1190;1287;1364;1381;1388;1443;1466;1602;1709;184
score = [2.5;5;2.2;3.5;4.2;4.8;4;4;5;5;4.8;4.2;5;5;4;3;2;4;4;5];
nW = r0629309_addUser(F20,W20,movieIDs,score);

[ movieIDs, score] = r0629309_predictedBestMoviesForUser(R,F20,nW,12489);
```

```
movieRatingsForUser = horzcat(score,movieIDs);
top10 = movieIDs(1:10)';
favMoviePredictions = r0629309_getMovieNamesForIDs(top10)
```

```
favMoviePredictions = 10×1 cell array
    {'Edge of Tomorrow (2014)'       }
    {'Looper (2012)'                 }
    {'John Wick (2014)'              }
    {'Cabin in the Woods, The (2012)'}
    {'The Hunger Games (2012)'       }
    {'Snowpiercer (2013)'            }
    {'Pacific Rim (2013)'            }
    {'Gone Girl (2014)'              }
    {'Prometheus (2012)'             }
    {'Arrival (2016)'                }
```

De resultaten stemmen goed overeen met mijn favorieten, namelijk Science Fiction films. Enkel 'The Cabin in the Woods' valt uit de boot aangezien ik geen fan ben van het 'Horror'-concept.

Oefening 20

In de onderstaande output ziet men dat de correlaties, op het voorlaatste voorbeeld na, realistisch zijn. Men kan nagaan dat dit klopt op de gegeven movie-recommendation-systemen. Bij Moneyball zijn er enkele films gerelateerd waarbij het concept actie, ipv. het concept drama overheerst.

De categorieën van elke cluster staan boven de console-output.

```
n = [15;15;15;10;10];
k = [77;178;346;398;312];
str = ["Animation Movies","History, Thriller","Marvel, Superheroes","History, Drama, Action","Y
C = r0629309_correlationMatrix(F20,W20);
for i = 1:1:5
    display(str(i));
    mIDs = r0629309_similarMovies(C,k(i),n(i));
    correlatedMovies = r0629309_getMovieNamesForIDs(mIDs)
    fprintf('\n');
end
```

```
    "Animation Movies"
correlatedMovies = 15×1 cell array
    {'Despicable Me (2010)'             }
    {'Despicable Me 2 (2013)'           }
    {'Tangled (2010)'                   }
    {'Megamind (2010)'                  }
    {'How to Train Your Dragon 2 (2014)'}
    {'Frozen (2013)'                    }
    {'Big Hero 6 (2014)'                }
    {'Brave (2012)'                     }
    {'Monsters University (2013)'       }
    {'How to Train Your Dragon (2010)'  }
    {'Wreck-It Ralph (2012)'            }
    {'Kung Fu Panda 2 (2011)'           }
    {'Zootopia (2016)'                  }
    {'Finding Dory (2016)'              }
    {'Hotel Transylvania (2012)'        }
```

```
    "History, Thriller"
correlatedMovies = 15×1 cell array
    {'King's Speech, The (2010)'      }
    {'Argo (2012)'                    }
    {'Intouchables (2011)'            }
    {'The Imitation Game (2014)'      }
    {'The Theory of Everything (2014)'}
    {'Help, The (2011)'               }
    {'Moneyball (2011)'               }
    {'Spotlight (2015)'               }
    {'Hidden Figures (2016)'          }
    {'Bridge of Spies (2015)'         }
    {'True Grit (2010)'               }
    {'Captain Phillips (2013)'        }
    {'Rush (2013)'                    }
    {'Midnight in Paris (2011)'       }
    {'Life of Pi (2012)'              }

    "Marvel, Superheroes"
correlatedMovies = 15×1 cell array
    {'Captain America: The First Avenger (2011)'  }
    {'Avengers: Age of Ultron (2015)'             }
    {'Captain America: The Winter Soldier (2014)' }
    {'Iron Man 3 (2013)'                          }
    {'Captain America: Civil War (2016)'          }
    {'Ant-Man (2015)'                             }
    {'Thor (2011)'                                }
    {'Thor: The Dark World (2013)'                }
    {'Iron Man 2 (2010)'                          }
    {'Doctor Strange (2016)'                      }
    {'Amazing Spider-Man, The (2012)'             }
    {'X-Men: Apocalypse (2016)'                   }
    {'Wolverine, The (2013)'                      }
    {'Wonder Woman (2017)'                        }
    {'Mission: Impossible - Ghost Protocol (2011)'}

    "History, Drama, Action"
correlatedMovies = 10×1 cell array
    {'Moneyball (2011)'       }
    {'Town, The (2010)'       }
    {'Captain Phillips (2013)'}
    {'Rush (2013)'            }
    {'Zero Dark Thirty (2012)'}
    {'Fighter, The (2010)'    }
    {'Big Short, The (2015)'  }
    {'Argo (2012)'            }
    {'50/50 (2011)'           }
    {'Warrior (2011)'         }

    "Young-Adult, Comedy"
correlatedMovies = 10×1 cell array
    {'Hangover Part II, The (2011)' }
    {'Dictator, The (2012)'         }
    {'Hangover Part III, The (2013)'}
    {'Friends with Benefits (2011)' }
    {'The Interview (2014)'         }
    {'Due Date (2010)'              }
    {'Horrible Bosses (2011)'       }
    {'Hot Tub Time Machine (2010)'  }
    {'Bad Teacher (2011)'           }
    {'No Strings Attached (2011)'   }
```

Hulpfuncties

sparseModel

```
function [ X ] = r0629309_sparseModel(F, W, A)
    [is, js, ~] = find(A);
    vs = zeros(length(is), 1);

    parfor c = 1:length(is)
        vs(c) = F(is(c),:) * W(js(c), :)'; % in-place multiplication
    end

    X = sparse(is, js, vs); % Reconstruct sparse matrix
end
```

userMeans

```
function [ mu ] = r0629309_userMeans(A)
  [is,~,v] = find(A');
  mu = accumarray(is,v,[],@mean);
end
```

RMSE

```
function [ err ] = r0629309_RMSE(A,B)
  err = norm(A-B,'fro')/sqrt(nnz(A-B));
end
```

constructModel

```
function [ F, W ] = r0629309_constructModel( R, r, beta )
  if nargin < 3
    beta = 2;
  end
  [m,n] = size(R);
  F = zeros(m,r);
  W = zeros(n,r);
  F(:,1) = 1;
  W(:,1) = r0629309_userMeans(R);
  for k = 2 : r
    R = R - r0629309_sparseModel(F(:,k-1),W(:,k-1),R);
    [U,S,V] = svds(R, 1);
```

```
    F(:,k) = beta*U*S;
    W(:,k) = V;
  end
end
```

actualBestMovies

```
function [ movieIDs, score ] = r0629309_actualBestMovies(R)
  [is,~,v] = find(R);
  [score,movieIDs] = sort(accumarray(is,v,[],@mean),'desc');
end
```

predictBestMovies

```
function [ movieIDs, score ] = r0629309_predictedBestMovies(F,W)
    [m, ~] = size(F);
    [n, ~] = size(W);
    totals = sum((F((1:m)',:)*W'), 2);
    means = totals / n;
    [score,movieIDs] = sort(means,'desc');
end
```

predictedBestMoviesForUser

```
function [ movieIDs, score ] = r0629309_predictedBestMoviesForUser(R,F,W,j)

   [m,~] = size(R);
   [mID,uID,~] = find(R);
   score = zeros(m,0);
   rmID = mID(uID==j);

   for id = 1:1:m
     score(id) = dot(F(id,:),W(j,:));
   end

   % filter recommendations for already viewed/rated movies
   for i = 1:1:length(rmID)
     score(rmID(i)) = NaN;
   end

   [score, movieIDs] = sort(score,'desc'); % sort with NaN values in front

   amount2delete = sum(isnan(score)); % calculate truncation-amount
   score(1:amount2delete) = [];
   movieIDs(1:amount2delete) = [];
```

```
end
```

addUser

```
function [newW] = r0629309_addUser(F, W, i, s)
    U = F(i,:);
    uW = U \ s;
    newW = [W; uW'];
end
```

correlationMatrix

```
function [C] = r0629309_correlationMatrix(F, W)
    [m,~] = size(W);
    R = F * W';
    U = sum(R, 2)/m;
    summ = sum((R - U).^2, 2);
    Sd = sqrt(summ/(m-1));
    D = diag(Sd);
    V = U*ones(1,m);
    C = (inv(D)*(R-V))*(inv(D)*(R-V))';
    C = C/(m-1);
end
```

similarMovies

```
function [movieIDs] = r0629309_similarMovies( C, i, n )
    scores = C(1:end,i);
    [~,movieIDs] = sort(scores,'desc');
    movieIDs(n+1:end) = [];
end
```