Partiel 1

Durée : trois heures
Documents et calculatrices non autorisés

Exercice 1 (5 points)

1. Déterminer, via la règle de d'Alembert, la nature de la série $\sum \frac{(n!)^2}{(3n)!}$.

2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer, en fonction de k, via la règle de d'Alembert, la nature de la série $\sum \frac{(n!)^2}{(kn)!}$.

3. Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer, via la règle de Cauchy la nature de la série $\sum \left(\frac{n}{n+a}\right)^{n^2}$.

Exercice 2 (4 points)

Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

A et B sont-elles diagonalisables dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$? Si oui, déterminer D et P.

N.B. : l'obtention des sous-espaces propres sous forme de sous-espaces engendrés doit découler d'un raisonnement clair et non pas d'une manière hasardeuse en prenant directement des valeurs particulières.

Exercice 3 (4 points)

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ a-3 & 0 & 1-a \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Discuter de la diagonalisabilité de A dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ suivant les valeurs de a.

N.B. : la diagonalisation dans les cas favorables n'est pas demandée.

Exercice 4 (4 points)

1. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow \mathbb{R}_3[X] \\ P(X) & \longmapsto 3XP(X) - (X^2-1)P'(X) \end{cases}$.

   a. Déterminer la matrice de f relativement à la base canonique $\mathscr{B} = (1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$.

   b. f est-elle bijective ?

2. Soient $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $f : \begin{cases} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ X \mapsto AX - XA \end{cases}$. Déterminer la matrice de f relativement à la base canonique $\mathscr{B} = \left(E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 5 (4 points)

Soient $(a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 2 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & f \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Discuter de la diagonalisabilité de A suivant les valeurs de a, b, c, d, e et f.