1 Définitions

1.1 Convergence et divergence

Définition 1

Soit (u_n) une suite réelle. La *série de terme général* u_n notée $\sum u_n$ est la suite des sommes partielles (S_n) où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. On dit que $\sum u_n$ *converge* si (S_n) converge. On dit qu'elle *diverge* sinon.

Exemple de la série géométrique

Soit $q \in \mathbb{R}$. Alors $\sum q^n$ converge ssi $|q| < 1$.

$\sum q^n$ est appelée *série géométrique*.

Proposition 1

Soient $\sum u_n$, $\sum v_n$ deux séries numériques et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

1. $\left(\sum u_n \text{ converge et } \sum v_n \text{ converge}\right) \Longrightarrow \sum(u_n + v_n)$ converge.
2. $\sum u_n$ converge $\Longrightarrow \sum \lambda u_n$ converge.
3. $\left(\sum u_n \text{ converge et } \sum v_n \text{ diverge}\right) \Longrightarrow \sum(u_n + v_n)$ diverge.

1.2 Somme et reste d'une série convergente

Définition 2

Soit $\sum u_n$ une série numérique convergente. On appelle *somme* de la série le nombre réel

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} S_n$$

et on appelle *reste* de la série la suite (R_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

1.3 Télescopage

Proposition 2

Soit (u_n) une suite réelle. Alors

$$(u_n) \text{ converge } \iff \sum(u_n - u_{n-1}) \text{ converge}$$

1.4 Condition nécessaire de convergence

Proposition 3

Soit (u_n) une suite réelle. Alors

$$\sum u_n \text{ converge } \Longrightarrow u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

1 Séries à termes positifs

1.1 Définition

Définition 1

On dit qu'une série numérique $\sum u_n$ est *à termes positifs* si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$.

Condition de convergence

Proposition 1

Soient $\sum u_n$ une série termes positifs et (S_n) la suite de ses sommes partielles. Alors

$$\sum u_n \text{ converge} \Longleftrightarrow (S_n) \text{ est majorée}$$

1.2 Théorème de comparaison

Proposition 2

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq v_n$.

$$\text{Alors } \begin{cases} \sum v_n \text{ converge } \Longrightarrow \sum u_n \text{ converge} \\ \text{et} \\ \sum u_n \text{ diverge } \Longrightarrow \sum v_n \text{ diverge} \end{cases}$$

1.3 Série de Riemann

Définition 2

On appelle *série de Riemann*, toute série de la forme $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Théorème 1

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$.

1.4 Comparaisons de Landau

Définition 3

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

1. $u_n = O(v_n)$ si $u_n = \varepsilon_n v_n$ où (ε_n) est une suite bornée.
2. $u_n = o(v_n)$ si $u_n = \varepsilon_n v_n$ où (ε_n) est une suite tendant vers 0.
3. $u_n \sim v_n$ si $u_n = \varepsilon_n v_n$ où (ε_n) est une suite tendant vers 1.

Proposition 3

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles positives telles que $u_n = O(v_n)$.
Alors $\sum v_n$ converge $\Longrightarrow \sum u_n$ converge.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles positives telles que $u_n = o(v_n)$.
Alors $\sum v_n$ converge $\Longrightarrow \sum u_n$ converge.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles positives telles que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.
Alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

1.5 Règle de Riemann

Proposition 4

Soit (u_n) une suite réelle positive.

S'il existe $\alpha > 1$ tel que $n^\alpha u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors $\sum u_n$ converge.

1 Règle de d'Alembert

Théorème 1 (règle de d'Alembert)

Soit (u_n) une suite réelle strictement positive telle que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \text{ où } \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

Alors $\begin{cases} \ell < 1 \Longrightarrow \sum u_n \text{ converge} \\ \text{et} \\ \ell > 1 \Longrightarrow \sum u_n \text{ diverge} \end{cases}$

2 Règle de Cauchy

Théorème 2 (règle de Cauchy)

Soit (u_n) une suite réelle strictement positive telle que

$$\sqrt[n]{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \text{ où } \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

Alors $\begin{cases} \ell < 1 \Longrightarrow \sum u_n \text{ converge} \\ \text{et} \\ \ell > 1 \Longrightarrow \sum u_n \text{ diverge} \end{cases}$

1 Séries alternées

Définition

Définition 1

Soit (u_n) une suite réelle.

On dit que (u_n) est *alternée* s'il existe une suite réelle (a_n) positive telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n a_n$ $\big($ou pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^{n+1} a_n\big)$.

On dit qu'une série numérique $\sum u_n$ est *alternée* si la suite (u_n) est alternée.

Critère spécial des séries alternées

Théorème 1 (Critère spécial des séries alternées)

Soit (u_n) une suite réelle alternée.

Si $\big(|u_n|\big)$ est décroissante et converge vers 0 alors

1. $\sum u_n$ converge.
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \big|R_n\big| \leqslant |u_{n+1}| \quad$ où $\big(R_n\big)$ est la suite des restes associée à $\sum u_n$.

Exemple

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 0$.

2 Convergence absolue

Définition 2

On dit qu'une série numérique $\sum u_n$ *converge absolument* si la série $\sum |u_n|$ converge.

Théorème 2

Soit $\sum u_n$ une série numérique convergeant absolument. Alors $\sum u_n$ converge.

Définition 3

Une série convergente mais non absolument convergente est dite *semi-convergente*.

1 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2

Définition 1

On appelle déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, noté $\det(A)$, le scalaire défini par

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

2 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3

Définition 2

On appelle déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$, noté $\det(A)$, le scalaire défini par

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}. \end{aligned}$$

3 Mineur et cofacteur

Définition 3

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- On appelle **mineur** d'indice (i, j) le déterminant Δ_{ij} de la matrice obtenue en supprimant la i-ième ligne et la j-ième colonne de la matrice A.
- On appelle **cofacteur** d'indice (i, j) et on note A_{ij} le scalaire $A_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$.

4 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre n

Définition 4

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le déterminant de la matrice A est

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}$$

si on développe par rapport à la j-ième colonne et

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}$$

si on développe par rapport à la i-ième ligne.

5 Propriétés du déterminant

Proposition 1

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors
- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$,
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$,
- $\det(A) = \det({}^tA)$, où ${}^tA$ est la matrice transposée de A.

6 Condition nécessaire & suffisante d'inversibilité d'une matrice

Définition 5

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est inversible s'il existe une matrice B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$AB = BA = I_n.$$

Proposition 2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$. De plus,

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

L'ensemble des matrices inversibles est noté $GL_n(\mathbb{K})$.

7 Méthodes de calcul du déterminant

Théorème 1

1. Un déterminant ayant deux colonnes (resp. lignes) identiques est nul.
2. Un déterminant qui a une colonne (resp. ligne) combinaison linéaire des autres colonnes (resp. lignes) est nul.
3. Un déterminant dont une colonne (resp. ligne) est formée de 0 est nul.
4. On ne change pas la valeur du déterminant en ajoutant à une colonne (resp. ligne) une combinaison linéaire des autres colonnes (resp. lignes).
5. Si on permute deux colonnes (resp. lignes) d'un déterminant, le déterminant est multiplié par -1.
6. Si on multiplie une colonne (resp. ligne) par un scalaire λ, on multiplie le déterminant par λ.

Ce théorème peut s'écrire, en remplaçant la matrice A par l'écriture en colonne $(C_1, \cdots, C_n)$

1. $\det(C_1, \cdots, C_i, \cdots, C_i, \cdots, C_n) = 0$,
2. $\det(C_1, \cdots, C_{i-1}, \sum_{k=1, k\neq i}^{n} \lambda_k C_k, C_{i+1}, \cdots, C_n) = 0$, où $\lambda_k \in \mathbb{K}$,
3. $\det(C_1, \cdots, C_{i-1}, 0_{\mathbb{K}^n}, C_{i+1}, \cdots, C_n) = 0$,
4. $\det(C_1, \cdots, C_{i-1}, C_i + \sum_{k=1, k\neq i}^{n} \lambda_k C_k, C_{i+1}, \cdots, C_n) = \det(C_1, \cdots, C_n)$,
5. $\det(C_1, \cdots, C_i, \cdots, C_j, \cdots, C_n) = -\det(C_1, \cdots, C_j, \cdots, C_i, \cdots, C_n)$,
6. $\det(C_1, \cdots, \lambda C_i, \cdots, C_n) = \lambda \det(C_1, \cdots, C_n)$, où $\lambda \in \mathbb{K}$.

8 Déterminant par blocs

Proposition 3

Si $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, avec $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$, alors

$$\det(M) = \det(A)\det(C).$$

En particulier, $\det \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & A & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline \times & \cdots & \times & \alpha \end{array}\right) = \alpha \det(A)$, où $\alpha \in \mathbb{K}$.

9 Déterminant de quelques matrices particulières

9.1 Matrice diagonale

Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale, c'est-à-dire,

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$

alors

$$\det(D) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

9.2 Matrice triangulaire supérieure

Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire supérieure, c'est-à-dire,

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix},$$

alors

$$\det(T) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

9.3 Matrice triangulaire inférieure

Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire inférieure, c'est-à-dire,

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix},$$

alors

$$\det(T) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

1 Valeurs propres, vecteurs propres

Définition 1

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. On dit que λ est une **valeur propre** de A s'il existe un vecteur v dans $\mathbb{K}^n$ non nul, tel que $Av = \lambda v$.
2. Le vecteur v est dit **vecteur propre** associé à la valeur propre λ.
3. L'ensemble des valeurs propres de A dans $\mathbb{K}$ s'appelle le **spectre** de A dans $\mathbb{K}$, noté $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$.

Remarque 1

Un vecteur propre, par définition, est non nul. En revanche, une valeur propre peut être nulle.

2 Sous-espace propre

Définition 2

Soit λ une valeur propre de A. Alors

$$E_\lambda = \{v \in \mathbb{K}^n | Av = \lambda v\} = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$, appelé **sous-espace propre** de A associé à la valeur propre λ.

Définition 3

Un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{K}^n$ est **stable** (ou A-stable) par A si, pour tout v dans F, $Av \in F$. On écrit $AF \subset F$.

Proposition 1

Un espace propre d'une matrice A est stable par A.

3 Somme directe de sous-espaces

Définition 4

Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et $F_1, F_2, \ldots, F_p$, p sous-espaces vectoriels de E.

– La partie de E, notée $F_1 + F_2 + \ldots + F_p$, définie par

$$F_1 + F_2 + \ldots + F_p = \Big\{v_1 + v_2 + \ldots + v_p | \ \forall i \in \{1, \ldots, p\}, \quad v_i \in F_i\Big\}$$

est un sous-espace vectoriel de E, appelé somme des sous-espaces F_i.

– La somme $F_1 + F_2 + \ldots + F_p$ est dite **directe** si la décomposition de tout vecteur v dans $F_1 + F_2 + \ldots + F_p$ est **unique**, c'est-à-dire si

$$\forall v \in F_1 + \ldots + F_p, \ \exists!(v_1, \ldots, v_p) \in F_1 \times \ldots \times F_p, \ v = v_1 + \ldots + v_p.$$

Notation : la somme directe des sous-espaces $F_1, F_2, \ldots, F_p$ est notée

$$F_1 \oplus F_2 \oplus \ldots \oplus F_p.$$

Proposition 2

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. La somme de p sous-espaces vectoriels $F_1, F_2 \ldots, F_p$ de E est directe si et seulement si, on a la propriété

$$\forall (v_1, \ldots, v_p) \in F_1 \times \ldots \times F_p, \quad v_1 + \ldots + v_p = 0_E \implies \forall i \in \{1, \ldots, p\}, \ v_i = 0_E.$$

Théorème 1

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ des valeurs propres distinctes deux à deux d'une matrice carrée A. Alors les sous-espaces propres $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_k}$ sont en somme directe.

4 Polynômes annulateurs

Définition 5

Soit $P \in \mathbb{K}_p[X]$, qu'on écrit $P(X) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_p X^p$. Le polynôme $P(A) = a_0 I_n + a_1 A + \ldots + a_p A^p$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que le polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme annulateur de A, si

$$P(A) = \begin{pmatrix} 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & & & . \\ . & & . & & . \\ . & & & . & . \\ 0 & . & . & . & 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}.$$

On écrit par abus $P(A) = 0$.

1 Définition du polynôme caractéristique

Définition 1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle polynôme caractéristique de A, noté en général P_A, le polynôme de $\mathbb{K}[X]$ défini par

$$P_A(X) = \det(A - XI_n).$$

2 Propriétés

Proposition 1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le polynôme caractéristique P_A de la matrice A est un polynôme de degré n à coefficients dans $\mathbb{K}$ et dont le coefficient dominant est $(-1)^n$.

Proposition 2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors
- $P_A(0) = \det(A)$.
- $P_A = P_{{}^tA}$, où ${}^tA$ est la transposée de A.

Définition 2

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est semblable à B s'il existe une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$A = PBP^{-1}.$$

Proposition 3

Si A et B sont deux matrices semblables alors $P_A = P_B$.

Théorème 1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathrm{KerA} = \{0\}$;
2. $\det(A) \neq 0$.

3 Ordre de multiplicité d'une valeur propre

Définition 3– Si λ est une racine simple de P_A, on dit que λ est valeur propre simple ou de multiplicité 1.

– Si λ est une racine d'ordre α de P_A, on dit que λ est valeur propre de multiplicité α.

4 Théorème de Cayley-Hamilton

Théorème 2 (de Cayley-Hamilton)

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P_A \in \mathbb{K}[X]$ le polynôme caractéristique de A. Alors

$$P_A(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}.$$

1 Définition d'une matrice diagonalisable

Définition 1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est diagonalisable s'il existe une matrice inversible P dans $GL_n(\mathbb{K})$ et une matrice diagonale D dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$A = PDP^{-1}.$$

2 Dimension d'un sous-espace propre

Proposition 1

Une matrice carrée A d'ordre n est diagonalisable si et seulement si $\mathbb{K}^n$ est somme directe des sous-espaces propres.

Proposition 2

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ une racine de P_A (donc une valeur propre de A) d'ordre de multiplicité α. Alors

$$1 \leq \dim(E_\lambda) \leq \alpha.$$

Remarque 1– Si $\dim(E_\lambda) = 0$ alors λ n'est pas une valeur propre.

– si λ est une racine simple alors le sous-espace propre E_λ est de dimension 1.

3 Condition nécessaire et suffisante de diagonalisation

Théorème 1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, A est diagonalisable si et seulement si
(i) P_A est scindé dans $\mathbb{K}$, ce qui veut dire que $P_A(X)$ s'écrit

$$P_A(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{\alpha_1} \cdots (X - \lambda_p)^{\alpha_p}$$

avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ et $\alpha_1 + \ldots + \alpha_p = n$.
(ii) Pour chaque racine (valeur propre) λ_i de multiplicité α_i, on a

$$\dim(E_{\lambda_i}) = \alpha_i.$$

4 Diagonalisation : cas de valeurs propres simples

Théorème 2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A admet n valeurs propres deux à deux distinctes alors A est diagonalisable.

1 Calcul de la puissance d'une matrice carrée

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, qu'on suppose diagonalisable, c'est-à-dire qu'il existe deux matrices D diagonale et P inversible telles que $D = P^{-1}AP$.

Lemme 1– Si $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice diagonale, c'est-à-dire $D = \mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, alors pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$D^p = \mathrm{diag}(\alpha_1^p, \alpha_2^p, \ldots, \alpha_n^p).$$

– Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a

$$A^p = PD^pP^{-1}.$$

2 Résolution d'un système de suites récurrentes

Soient $A = (a_{ij})_{0 \leq i,j \leq n}$, qu'on suppose diagonalisable et une suite vectorielle $(U_p)_{p\in\mathbb{N}} = \left((u_p^{(i)})_{p\in\mathbb{N}}\right)_{1\leq i\leq n} \in (\mathbb{K}^n)^{\mathbb{N}}$, telles que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $U_p \in \mathbb{K}^n$ et pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $(u_p^{(i)})_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite numérique à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On souhaite résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{rlcr} u_{p+1}^{(1)} = & a_{11}u_p^{(1)}+ & \ldots & +a_{1n}u_p^{(n)}, \\ \vdots & & & \vdots \\ u_{p+1}^{(n)} = & a_{n1}u_p^{(1)}+ & \ldots & +a_{nn}u_p^{(n)} \end{array}\right. \text{ et telles que } \left\{\begin{array}{l} u_0^{(1)} = b_1, \\ \quad\vdots \\ u_0^{(n)} = b_n, \end{array}\right.$$

où les a_{ij} et les b_i, $1 \leq i,j \leq n$ sont des constantes.
Matriciellement, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on écrit :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} u_{p+1}^{(1)} \\ \vdots \\ u_{p+1}^{(n)} \end{pmatrix}}_{U_{p+1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} u_p^{(1)} \\ \vdots \\ u_p^{(n)} \end{pmatrix}}_{U_p} \quad \text{et} \quad U_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

On écrit chaque $u_p^{(i)}$ en fonction de p en diagonalisant A, puis on démontre aisément que

$$\forall p \in \mathbb{N},\ U_p = A^pU_0.$$

Donc, il suffit de calculer A^p (calcul de la puissance d'une matrice).

3 Système différentiel linéaire à coefficients constants

Soit le système différentiel suivant

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{dx_1}{dt} & = & a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ & \vdots & \\ \dfrac{dx_n}{dt} & = & a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n \end{array}\right.$$

avec $a_{ij} \in \mathbb{R}$ et $x_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions dérivables, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.
La forme matricielle de ce système est

$$\frac{dX}{dt} = AX, \qquad \text{où } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Si A est diagonalisable, alors il existe une matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et une matrice inversible P telles que $D = P^{-1}AP$. Comme $\dfrac{dX}{dt} = AX = PDP^{-1}X$, alors $P^{-1}\dfrac{dX}{dt} = DP^{-1}X$.

En posant $Y = P^{-1}X$, le système ci-dessus s'écrit

$$\frac{dY}{dt} = DY,$$

Résoudre le système $\frac{dY}{dt} = DY$, revient à résoudre n équations différentielles indépendantes d'ordre 1 de la forme $\frac{dy_i}{dt} = \lambda_i y_i$, pour tout i dans $\{1, \ldots, n\}$. Les solutions sont $y_i(t) = C_i e^{\lambda_i t}$, où les C_i sont des constantes.

1 Définitions

1.1 Intégrale impropre sur un intervalle $[a, b[$

Définition 1

Soit $[a, b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ vérifiant $-\infty < a < b \leqslant +\infty$.

Soit f continue de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$ et non définie en b.

$\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est appelée *intégrale impropre* de f sur $[a, b[$.

Si la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie quand x tend vers b, on dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge*.

On a alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to b}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$

On dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *diverge* sinon.

1.2 Intégrale impropre sur un intervalle $]a, b]$

Définition 2

Soit $]a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ vérifiant $-\infty \leqslant a < b < +\infty$.

Soit f continue de $]a, b]$ dans $\mathbb{R}$ et non définie en a.

$\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est appelée *intégrale impropre* de f sur $]a, b]$.

Si la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie quand x tend vers a, on dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge*.

On a alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to a}\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$

On dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *diverge* sinon.

1.3 Intégrale impropre sur un intervalle $]a, b[$

Définition 3

Soit $]a, b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ vérifiant $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.

Soit f continue de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$ et non définie en a et en b.

$\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est appelée *intégrale impropre* de f sur $]a, b[$.

On dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge* s'il existe un c dans $]a, b[$ tel que les intégrales impropres $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent toutes les deux.

Dans ce cas $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

On dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *diverge* sinon.

2 Propriétés

Proposition 1

Soit f continue de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$, avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, et non définie en b.

Soit c un réel tel que $a < c < b$.

Les intégrales : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

De plus, si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Proposition 2

Soient f et g continues sur $[a, b[$ avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$.

- Supposons que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent.

  Alors, pour tout réel λ, $\displaystyle\int_a^b \big(\lambda f(t) + g(t)\big)\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\int_a^b \big(\lambda f(t) + g(t)\big)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

- Supposons que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

  Alors $\displaystyle\int_a^b \big(f(t) + g(t)\big)\,\mathrm{d}t$ diverge.

1 Intégrale impropre d'une fonction positive

1.1 Proposition fondamentale

Proposition 1

Soit $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue et *positive* sur $[a, b[$ où $-\infty < a < b \leqslant +\infty$.

Soit φ la primitive de f sur $[a, b[$ définie pour tout $x \in [a, b[$ par

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

- $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge ssi φ est majorée.
- $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge ssi $\displaystyle\lim_{x\to b} \varphi(x) = +\infty$.

1.2 Fonctions de Riemann

Théorème 1 (Riemann)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge $\iff \alpha < 1$.
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge $\iff \alpha > 1$.

1.3 Théorèmes de comparaison

Proposition 2

Soient $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ et $g : [a, b[\to \mathbb{R}$ continues et positives sur $[a, b[$ où $-\infty < a < b \leqslant +\infty$.

Supposons qu'au voisinage de b, $0 \leqslant f(t) \leqslant g(t)$. Alors

- $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ converge $\implies \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge ;
- $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ diverge $\implies \displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ diverge.

Définition 1

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b[$.

- $f \underset{b}{=} O(g)$ si $f = \varepsilon\, g$ où ε est une fonction bornée sur $[a, b[$.
- $f \underset{b}{=} o(g)$ si $f = \varepsilon\, g$ où ε est une fonction tendant vers 0 en b.
- $f \underset{b}{\sim} g$ si $f = \varepsilon\, g$ où ε est une fonction tendant vers 1 en b.

Proposition 3

Soient $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ et $g : [a, b[\to \mathbb{R}$ continues et positives sur $[a, b[$ où $-\infty < a < b \leqslant +\infty$.

- Si $f \underset{b}{=} O(g)$ alors $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ converge $\implies \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge.
- Si $f \underset{b}{=} o(g)$ alors $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ converge $\implies \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge.
- Si $f \underset{b}{\sim} g$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ sont de même nature.

1 Autres critères

1.1 Critère intégral de Cauchy

Théorème 1

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $f : [n_0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue positive et décroissante sur $[n_0, +\infty[$.

Alors $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\sum f(n)$ sont de même nature.

1.2 Intégration par parties

Proposition 1

Soient f et g de classe C^1 sur $[a, b[$ avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$ telles que fg admette une limite finie en b.

Alors $\displaystyle\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Si elles convergent, on a

$$\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{t\to b}\big(f(t)g(t)\big) - f(a)g(a) - \int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$$

1.3 Intégration par changement de variable

Proposition 2

Soient $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b[$ avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$ et $\varphi : [\alpha, \beta[\to [a, b[$ de classe C^1 et strictement croissante sur $[\alpha, \beta[$ avec $-\infty < \alpha < \beta \leqslant +\infty$ telles que $\varphi(\alpha) = a$ et $\displaystyle\lim_{t\to\beta} \varphi(t) = b$.

Alors $\displaystyle\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature et si elles convergent, elles sont égales.

1 Convergence absolue

Définition 1

Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b[$ avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$.

On dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge absolument* si $\displaystyle\int_a^b \left|f(t)\right|\mathrm{d}t$ converge.

Théorème 1

Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b[$ avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$.

Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge absolument alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et on a de plus

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b \left|f(t)\right|\mathrm{d}t$$

1 Définitions

1.1 Forme bilinéaire

Définition 1

Soient E un $\mathbb{R}$-ev et $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que φ est une *forme bilinéaire* si

- $\forall x \in E,\ y \longmapsto \varphi(x,y)$ est linéaire
- $\forall y \in E,\ x \longmapsto \varphi(x,y)$ est linéaire

Proposition 1

Soient E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie n, $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E et $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ bilinéaire. Alors

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \varphi(x,y) = {}^tXMY$$

où $M = \big(\varphi(e_i, e_j)\big) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, X et Y sont les coordonnées respectives de x et y dans $\mathscr{B}$.

M s'appelle la matrice de la forme bilinéaire φ relativement à $\mathscr{B}$.

1.2 Forme bilinéaire symétrique

Définition 2

Soient E un $\mathbb{R}$-ev et $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ bilinéaire. On dit que φ est *symétrique* si

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \varphi(x,y) = \varphi(y,x)$$

Proposition 2

Soient E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie, $\mathscr{B}$ une base de E, $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ bilinéaire et $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)$. Alors

$$\varphi \text{ symétrique} \Longleftrightarrow M \text{ symétrique}$$

1.3 Produit scalaire

Définition 3

Soient E un $\mathbb{R}$-ev et $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que φ est un *produit scalaire* si φ est bilinéaire, symétrique, positive et définie i.e. si φ est bilinéaire symétrique et

$$\begin{cases} \varphi \text{ est positive : } \forall x \in E,\ \varphi(x,x) \geqslant 0 \\ \varphi \text{ est définie : } \forall x \in E,\ \big(\varphi(x,x) = 0 \Longrightarrow x = 0\big) \end{cases}$$

On appelle *espace préhilbertien réel* tout $\mathbb{R}$-ev muni d'un produit scalaire.

On appelle *espace euclidien* tout $\mathbb{R}$-ev de dimension finie muni d'un produit scalaire.

1 Théorèmes de Cauchy-Schwarz et de Minkowski

1.1 Théorème de Cauchy-Schwarz

Théorème 1 (Cauchy-Schwarz)

Soit $(E, <, >)$ préhilbertien réel.. Alors

$$\forall (x, y) \in E^2,\ |< x, y >| \leqslant \sqrt{< x, x >}\sqrt{< y, y >}$$

1.2 Théorème de Minkowski

Théorème 2 (Minkowski)

Soit $(E, <, >)$ préhilbertien réel. Alors

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \sqrt{< x + y, x + y >} \leqslant \sqrt{< x, x >} + \sqrt{< y, y >}$$

1.3 Norme issue d'un produit scalaire

Définition 1

Soit E un $\mathbb{R}$-ev. On appelle *norme* sur E, toute application $N : E \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $(x, y) \in E^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{l} N(x) \geqslant 0 \\ N(\lambda x) = |\lambda| N(x) \\ N(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \\ N(x + y) \leqslant N(x) + N(y) \end{array}\right.$$

Proposition 1

Soit $(E, <, >)$ préhilbertien réel.

Alors $N : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in E$ par $N(x) = \sqrt{< x, x >}$ est une norme sur E.

1 Orthogonalité de deux vecteurs et orthogonal d'une partie

1.1 Orthogonalité de deux vecteurs

Définition 1

Soit $(E, <,>)$ préhilbertien réel.

On dit que 2 vecteurs x et y de E sont *orthogonaux* si $< x, y >= 0$.

Théorème 1 (Pythagore)

Soient $(E, <,>)$ préhilbertien réel, x et y deux vecteurs orthogonaux de E. Alors

$$||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$$

1.2 Orthogonal d'une partie d'un espace préhilbertien réel

Définition 2

Soient $(E, <,>)$ préhilbertien réel et $A \subset E$.

On appelle *orthogonal* de A l'ensemble noté $A^\perp$ défini par

$$A^\perp = \big\{x \in E,\ \forall y \in A\ \ < x, y >= 0\big\}$$

Proposition 1

Soient $(E, <,>)$ préhilbertien réel et $A \subset E$. Alors $A^\perp$ est un $\mathbb{R}$-ev.

Proposition 2

Soient A et B deux parties d'un espace préhilbertien $(E, <,>)$. Alors

1. $A \subset B \Longrightarrow B^\perp \subset A^\perp$
2. $A^\perp = \big(\text{Vect}(A)\big)^\perp$
3. $A \subset A^{\perp\perp}$
4. $A \cap A^\perp \subset \{0\}$ et, si A est un sev de E, $A \cap A^\perp = \{0\}$.

1 Famille orthogonale/orthonormée

Définition 1

Soient $(E,<,>)$ préhilbertien réel et $X=\{x_1,...,x_n\}\subset E$

On dit que X est une famille *orthogonale* de E si pour tout $(i,j)\in\{1,\dots,n\}^2$,

$$i\neq j \Longrightarrow <x_i,x_j>=0$$

On dit que X est une famille *orthonormée* si pour tout $(i,j)\in\{1,\dots,n\}^2$,

$$<x_i,x_j>=\delta_{ij}$$

où $\delta_{ij}=\begin{cases}1 & \text{si } i=j\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

Proposition 1

Soient $(E,<,>)$ euclidien et $\mathscr{B}=(e_1,...,e_n)$ une base orthonormée de E. Alors pour tout $x\in E$,

$$x=\sum_{i=1}^{n}<x,e_i>e_i$$

Proposition 2

Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls d'un espace préhilbertien réel est libre.

1.1 Théorème de Gram-Schmidt

Théorème 1 (Gram-Schmidt)

Soient $(E,<,>)$ un espace euclidien et $\mathscr{B}=(e_1,...,e_n)$ une base de E.

Alors il existe une base orthogonale $\mathscr{O}=(\varepsilon_1,...,\varepsilon_n)$ de E telle que $\forall k\in\{1,...,n\},\ \varepsilon_k\in \text{Vect}(e_1,...,e_k)$.

1 Théorème du supplémentaire orthogonal

Théorème 1

Soient $(E, <,>)$ un espace euclidien et F un sev de E. Alors

$$E = F \oplus F^{\perp}$$

Corollaire 1

Soient $(E, <,>)$ un espace euclidien et F un sev de E. Alors

$$F^{\perp\perp} = F$$

2 Projection orthogonale

2.1 Définition

Définition 1

Soient $(E, <,>)$ un espace euclidien et F un sev de E.

On appelle *projecteur orthogonal* sur F noté p_F le projecteur sur F parallèlement à $F^{\perp}$ c'est-à-dire $p_F \in \mathscr{L}(E)$, $p_F^2 = p_F$, $\mathrm{Im}(p_F) = F$ et $\mathrm{Ker}(p_F) = F^{\perp}$.

Proposition 1

Soient $(E, <,>)$ un espace euclidien (resp. préhilbertien réel), F un sev (resp. de dimension finie) de E et $(e_1, ..., e_p)$ une base orthonormée de F. Alors pour tout $x \in E$,

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} < x, e_i > e_i$$

2.2 Distance à un sous-espace

Proposition 2

Soient F un sev d'un espace euclidien $(E, <,>)$ et $x \in E$.

Alors l'application $\left\{ \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \|x - y\| \end{array} \right.$ atteint son minimum en $p_F(x)$ c'est-à-dire

$$\underset{y \in F}{\mathrm{Min}} \|x - y\| = \left\| x - p_F(x) \right\|$$

On appelle *distance* de x à F noté $d(x, F)$ le réel $\left\| x - p_F(x) \right\|$.