Correction du partiel 2

Exercice 1 : Soient $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$.

On a

$$AU = V \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & X \\ x & + & 3y & + & 7z & = & Y \\ -3x & - & 7y & - & 14z & = & Z \end{array} \right.$$

En effectuant $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1$, le système devient

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & = & X \\ & & y & + & 4z & = & Y - X \\ & & -y & - & 5z & = & Z + 3X \end{array} \right.$$

En effectuant alors $L_3 \leftarrow L_2 + L_3$, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & = & X \\ & & y & + & 4z & = & Y - X \\ & & & - & z & = & 2X + Y + Z \end{array} \right.$$

En remontant le système, on trouve alors

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & = & -7X & - & 7Y & - & 5Z \\ y & = & 7X & + & 5Y & + & 4Z \\ z & = & -2X & - & Y & - & Z \end{array} \right.$$

Cela équivaut à

$$U = \begin{pmatrix} -7 & -7 & -5 \\ 7 & 5 & 4 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} V$$

Donc

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -7 & -5 \\ 7 & 5 & 4 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 :

a. On a $d^\circ(F) = 1$. En effectuant la division euclidienne de $X^3 + X - 1$ par $X^2 + X - 6$, la partie entière de F est $X - 1$. Ainsi,

$$F = X - 1 + \frac{a}{X-2} + \frac{b}{X+3}$$

En multipliant F par $X - 2$, puis en faisant $X = 2$, on trouve $a = \frac{9}{5}$.
En multipliant F par $X + 3$, puis en faisant $X = -3$, on trouve $b = \frac{31}{5}$.
Donc,

$$F = X - 1 + \frac{9}{5(X-2)} + \frac{31}{5(X+3)}$$

b. $d^\circ(G) = -3$, d'où la décomposition en éléments simples de G est

$$G = \frac{a}{X} + \frac{b}{X^2} + \frac{c}{X-1}$$

En multipliant G par X^2, puis en faisant $X = 0$, on trouve $b = -1$.
En multipliant G par $X - 1$, puis en faisant $X = 1$, on trouve $c = 1$.
En faisant $\lim\limits_{X\to+\infty} XG(X)$, on trouve $0 = a + c$. Ainsi, $a = -1$.
Donc,

$$G = -\frac{1}{X} - \frac{1}{X^2} + \frac{1}{X-1}$$

c. $d^\circ(H) = -4$, d'où la décomposition en éléments simples de H est

$$H = \frac{a}{X-1} + \frac{bX+c}{X^2+1} + \frac{dX+e}{(X^2+1)^2}$$

En multipliant H par $X - 1$, puis en faisant $X = 1$, on trouve $a = 1$.
En multipliant H par $(X^2+1)^2$, puis en faisant $X = i$, on trouve $di + e = \frac{i+3}{i-1} = -1 - 2i$. D'où, $d = -2$ et $e = -1$.
En faisant $\lim\limits_{X\to+\infty} XH(X)$, on trouve $0 = a + b$. Ainsi, $b = -1$.
En calculant $H(0)$, on trouve $-3 = -a + c + e$. D'où, $c = -1$.
Donc,

$$H = \frac{1}{X-1} - \frac{X+1}{X^2+1} - \frac{2X+1}{(X^2+1)^2}$$

Exercice 3 :

a. Soient $(P, Q) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{array}{rcl} f(\lambda P + Q) & = & X(\lambda P + Q)' + (\lambda P + Q) \\ & = & X(\lambda P' + Q') - \lambda P - Q \\ & = & \lambda(XP' - P) + (XQ' - Q) \\ & = & \lambda f(P) + f(Q) \end{array}$$

Donc, $f \in \mathscr{L}(E)$.

b. Soit $P = aX^2 + bX + c \in E$. On a

$$\begin{array}{rcl} P \in \mathrm{Ker}(f) & \Longleftrightarrow & f(P) = 0 \\ & \Longleftrightarrow & X(2aX + b) - aX^2 - bX - c = 0 \\ & \Longleftrightarrow & aX^2 - c = 0 \\ & \Longleftrightarrow & a = c = 0 \\ & \Longleftrightarrow & P = bX \end{array}$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(X)$. Or (X) est une famille libre donc c'est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
Par conséquent $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$.

c. Par le théorème du rang, on a $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3 - 1 = 2$.
De plus, on sait que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(\{f(1), f(X), f(X^2)\}) = \mathrm{Vect}(\{-1, 0, X^2\}) = \mathrm{Vect}(\{1, X^2\})$. La famille $(1, X^2)$ étant libre, c'est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

d. Comme $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0_E\}$, f n'est pas injective, et comme $\mathrm{Im}(f) \neq E$, f n'est pas surjective. Du coup, f n'est pas bijective.

e. On a $f(1) = -1$, $f(X) = 0$ et $f(X^2) = X^2$. Donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

f. Montrons que $\mathcal{B}'$ est libre : soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha + \beta(X + 2) + \gamma(X - 1)^2 = 0$.
Alors, $\alpha + 2\beta + \gamma + (\beta - 2\gamma)X + \gamma X^2 = 0$. Ainsi,

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \alpha & + & 2\beta & + & \gamma & = & 0 \\ & & \beta & - & 2\gamma & = & 0 \\ & & & & \gamma & = & 0 \end{array} \right.$$

Donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$.
On en déduit que $\mathcal{B}'$ est libre. Or, $\mathrm{Card}(\mathcal{B}') = 3 = \dim(E)$. On peut donc conclure que $\mathcal{B}'$ est une base de E.

g. On a $f(1) = -1$, $f(X + 2) = -2$.
De plus, $f((X - 1)^2) = X^2 - 1 = (X - 1)^2 + 2(X + 2) - 6$. Ainsi,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

h. Via les calculs précédents, on a immédiatement

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De plus, on a $f(1) = -1$, $f(X) = 0$ et $f(X^2) = X^2 = (X - 1)^2 + 2(X + 2) - 5$. Ainsi,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 :

a. Comme $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p)$ est un sev de E, on a $\{0_E\} \subset \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p)$.
Soit $x \in \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p)$. Alors, $x \in \mathrm{Ker}(p)$ et $x \in \mathrm{Im}(p)$. Ainsi, $p(x) = 0_E$ et $\exists\ y \in E$ tel que $x = p(y)$.
On a alors, $p(x) = p(p(y)) = p \circ p(y) = p(y) = x$ car p est un projecteur.
On en déduit donc que $x = 0_E$.
On a bien démontré que $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p) = \{0_E\}$.

b. Montrons que $E = \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Im}(p)$.
On sait déjà que $\mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Im}(p) \subset E$.
De plus, comme $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p) = \{0_E\}$, on a $\dim(\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p)) = 0$.
Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\dim\left(\mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Im}(p)\right) &= \dim(\mathrm{Ker}(p)) + \dim(\mathrm{Im}(p)) - \dim(\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p)) \\
&= \dim(\mathrm{Ker}(p)) + \dim(\mathrm{Im}(p)) \\
&= \dim(E) \quad \text{par le théorème du rang}
\end{aligned}$$

On a donc $\mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Im}(p) = E$.
Via la question 1, on peut donc conclure que $\mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p) = E$.