Функциональный анализ

Курс Виденского И.В.

Осень 2023

Оглавление

Часть I

Метрические пространства

Глава 1

Введение

День рождения функционального анализа — 1932 год. В этом году вышла книжка «Теория линейных операторов», автор — С. Банах. Главная цель функционального анализа — изучение линейных операторов (но не только их). Главным объектом у нас будет X — линейное топологическое пространство. Оно же линейное пространство над $\mathbb{C}$ (или $\mathbb{R}$). Есть непрерывные операции

1. $(x, z) \to x + z \quad x, z \in X$
2. $(\alpha, x) \to \alpha x \quad \alpha \in \mathbb{C}$

Если у нас есть топологическое пространство, то у нас есть все любимые объекты из математического анализа — пределы, непрерывность, производные, интегралы.

Пусть есть X, Y — линейные топологические пространства. Также есть линейное отображение $A : X \to Y$

Определение 1.1 (Линейное отображение)**.**

$$A(\alpha x + \beta z) = \alpha A x + \beta A z$$

Если $\dim X < +\infty, \dim Y < +\infty$, то это линейная алгебра.

$$A : X \to X, \dim X = n, A = A^* \Rightarrow \exists \text{ ОНБ}\{u_j\}_{j=1}^n$$

λ_j — j-е собственное число

$$Au_j = \lambda_j u_j$$

Теорема 1.1 (Гильберт). X — гильбертово (сепарабельное) пространство. $A = A^*, A : X \to X \Rightarrow \exists$ ОНБ из собственных векторов.

Если $\dim Y = 1$, т.е. $Y = \mathbb{C}$ (или $\mathbb{R}$), то $A : X \to \mathbb{C}$, A — линейный функционал.

В математическом анализе мы изучаем $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. В функциональном анализе же у нас X — пространство функций, $f \in X$

$$D(f) = f' \quad D : X \to Y$$

и здесь мы задаемся вопросами о следующих свойствах $D(f)$

- компактность
- самосопряжённость
- непрерывность

Отцы-основатели функционального анализа:

- Ф. Гильберт (1862–1943) Гильбертовы пространства;
- С. Банах (1892–1945) Банаховы пространства;
- Ф.Рисс (1880–1956) пространства Лебега L^p.

Ну и хочется ещё упомянуть для вас, компьютер саентистов, отцов основателей кибернетики, которые оставили немалый след в функциональном анализе

- Н. Винер (1894–1964);
- Д. фон Нейман (1903–1957). Про его архитектуру, наверное, что-то слышали?

1.1. Зачем изучать функциональный анализ

Во-первых, он позволяет посмотреть на задачу с высокого уровня абстракции.

Рассмотрим пространство непрерывных функций $C[a, b]$, там введём норму $|f| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$. Рассмотрим пространство многочленов $P_n = \{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k, a_k \in \mathbb{R}\}$ Существует ли такой многочлен, на котором инфимум достигается? И если да, то единственный ли он?

$$E_n(f) = \inf_{p\in P_n} ||f - p|| = \min_{p\in P_n} ||f - p||$$

На первый вопрос ответ да, это следует из общей теоремы функционального анализа.

$$\dim P_n = n + 1 < +\infty$$

На второй же вопрос ответ тоже да, и тут функциональный анализ ни при чём. Суть в том, что у многочлена степени n не может быть больше n корней.

Ну и ещё немаловажные причины

1. язык функционального анализа — междисциплинарный язык математики;
2. его результаты применяются в математической физике, которая у нас будет в следующем семестре;
3. это интересно и важно. $0, 1, 2 = o(3)$;
4. у нас будет экзамен, на котором придется говорить уже нам.

Дополнительная литература по курсу. Первая рассчитана на студентов: в некоторых местах рассказывается, как придумать доказательство, как прийти к тому, что требуется, а не в обратную сторону, как обычно. Остальные же книги поумнее.

1. А.Н.Колмогоров, С.В. Фомин «Элементы теории функций и Ф.А.»;
2. М.Рид, Б. Саймон. 1 том «методы современной физики». Тонкая (можно осилить), рассказывается также про применение ФА;
3. А.В. Канторович, Г.Г Акилов «Функциональный анализ». Похожа на энциклопедию. Но там можно найти всё;
4. К. Итосида «Функциональный анализ»;
5. У. Рудин.

Глава 2

Метрические пространства

Начнём с того, что все знают, надо ведь с чего-то начать. Мы будем несколько раз возвращаться к метрическим пространствам, а не изучим всё сразу. Один из полезных результатов, который мы получим, этоновое описание компакта в метрических пространствах. Он будет самым рабочим. А компакт — вещь очень полезная. Компакты в гигантских пространствах напоминают компакты в $\mathbb{R}^n$ или в $\mathbb{C}^n$ и обладают теми же полезными свойствами.

Определение 2.1 (Метрика). X — множество. $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$, ρ — **метрика**, если при $\forall\, x \in X$, $\forall\, y \in X$, $\forall\, z \in X$ она обладает следующими свойствами

1. $\rho(x, y) \geq 0 \wedge (\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y)$
2. $\rho(y, x) = \rho(x, y)$
3. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$

Введём стандартное обозначение открытого шара. $x \in X, r > 0$

$B_r(x) = \{y \in X : \rho(x, y) < r\}$ — шар с радиусом r. $\{B_r(x)\}_{r>0}$ — база окрестности в точке x.

G — открытое, если $\forall\, x \in G\, \exists\, r > 0 B_r(x) \subset G$.

F — замкнутое $\Leftrightarrow F \subset X \wedge X \setminus F$ — открытое.

В метрическом пространстве удобно характеризовать замкнутое множества с помощью последовательностей. Вспомним, что такое сходящаяся последовательность.

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность и $\forall\, n \in \mathbb{N} x_n \in X \wedge \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, x_0) = 0$

(X, ρ) — метрическое пространство $\Rightarrow$ (F — замкнутое $\Leftrightarrow \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность $\land \forall\, n \in \mathbb{N}\, x_n \in F$ и $(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow x_0 \in F)$)

> **Определение 2.2** (Фундаментальная последовательность). $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальная $\Leftrightarrow$ $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N \in \mathbb{N}\, \forall\, n \in \mathbb{N}\, \forall\, m \in \mathbb{N}\, ((n > N \land m > N) \Rightarrow \rho(x_n, x_m) < \varepsilon) \Leftrightarrow \lim\limits_{n,m\to\infty} \rho(x_n, x_m) = 0$

Замечание 2.1. $\exists\, x_0 \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальная

> **Определение 2.3** (Полное метрическое пространство). (X, ρ) — полное, если все фундаментальные последовательности имеют предел, лежащий в X

Почему хорошо жить в полном метрическом пространстве?

Замечание 2.2 (о пользе полноты). $F : X \to \mathbb{R}, (X, \rho)$ — метрическое пространство, F — непрерывная.

Стоит задача найти $x_0 \in X$ т.ч. $F(x_0) = 0$.
Алгоритм: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\lim\limits_{n\to\infty} F(x_n) = 0$, $\lim\limits_{n,m\to\infty} \rho(x_n, x_m) = 0$ Если (X, ρ) — полное, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0, F(x_0) = 0$. А если нет, то из наших вычислений вообще ничего не следует, возможно, решения вообще нет.

Пример 2.1. $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ — полные.

Пример 2.2. $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbb{0}_n\}$ — неполное.

Пример 2.3. $\mathbb{Q}$ — неполное.

Потом приведем примеры поинтереснее. Кстати, древние греки пришли в ужас, когда узнали, что $\mathbb{Q}$ — неполное.

> **Определение 2.4** (ограниченное множество). (X, ρ) — метрическое пространство, $A \subset X, A$ — ограниченное, если
> $$\exists\, R > 0\, \exists\, x_0 \in X : A \subset B_R(x_0)$$

Теорема 2.1 (Свойства фундаментальных последовательностей)**.** (X, ρ) — метрическое пространство, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальная последовательность, тогда выполняется:

1. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ограниченная, т.е. $\exists\, R > 0\, \exists\, x_0 \in X\, \forall\, n \in \mathbb{N}\, x_n \in B_R(x_0)$
2. $\exists\, \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ — подпоследовательность $\Rightarrow (\exists\, a \in X \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a \Rightarrow \exists\, a \in X \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k})$
3. $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность действительных чисел, $\forall\, k \in \mathbb{N}\, \varepsilon_k > 0 \Rightarrow \exists\, \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ — подпоследовательность $\forall\, j \in \mathbb{N}\, (j > k \Rightarrow \rho(x_{n_k}, x_{n_j}) < \varepsilon_k)$

1 утверждение. Возьмём $\varepsilon = 1$, тогда из фундаментальности $\exists N \forall\, n \in \mathbb{N}\, (n > N \Rightarrow \rho(x_n, x_N) < 1)$.

Возьмём $R = \max\{\rho(x_1, x_N), \ldots, \rho(x_{N-1}, x_N)\} + 1$. Единичка на всякий случай.

Тогда $\forall\, n \in \mathbb{N}\, x_n \in B_R(x_N)$. □

2 утверждение. Возьмём $\varepsilon > 0$, тогда по фундаментальности $\exists N \forall\, n \in \mathbb{N}\, \forall\, m \in \mathbb{N}\, ((\underline{n > N} \wedge m > N) \Rightarrow \underline{\rho(x_n, x_m)} < \varepsilon)$. Возьмём это N.

$\exists\, a \lim x_{n_k} = a \Rightarrow \exists\, n_k(\overline{\rho(x_{n_k}, a)} < \varepsilon \wedge \underline{n_k > N})$. Возьмём это n_k.

Возьмём некоторое $m > N$. Тогда $\rho(x_m, a) < \underline{\rho(x_m, x_{n_k})} + \rho(x_{n_k}, a) < 2\varepsilon$ □

3 утверждение. Докажем по индукции:

$\varepsilon_1 : \exists n_1 \forall\, n \in \mathbb{N} \forall\, m \in \mathbb{N}((n > n_1 \wedge m > n) \Rightarrow \rho(x_m, x_n) < \varepsilon_1)$. Выберем n_1, тогда $\forall\, m \in \mathbb{N}(m > n_1 \Rightarrow \rho(x_m, x_{n_1}) < \varepsilon_1)$.

ε_k : по индукции выбрали $n_1, \ldots, n_{k-1}$, $k \geq 2$. $\forall\, j \in (1 \ldots k-1) \forall\, m \in \mathbb{N}(m > n_j \Rightarrow \rho(x_m, x_{n_j}) < \varepsilon_j)$. Из фундаментальности исходной последовательности $\exists\, n_k(n_k > n_{k-1} \wedge \forall\, m \in \mathbb{N}(m > n_k \Rightarrow \rho(x_m, x_{n_k}) < \varepsilon_k))$ □

Следствие 2.1. (X, ρ), $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность, тогда

$$\exists\, \{x_{n_k}\} \text{ т.ч. } \sum_{k=1}^{\infty} \rho(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < +\infty$$

Доказательство. По 3 свойству при $\varepsilon_k = \frac{1}{2^k}$. □

Теорема 2.2 (О замкнутом подмножестве). (X, ρ) — метрическое пространство, тогда

1. (X, ρ) — полное, $Y \subseteq X$, Y — замкнутое $\Rightarrow (Y, \rho)$ — полное
2. $Y \subseteq X$, (Y, ρ) — полное $\Rightarrow Y$ — замкнутое

1 утверждение. Доказательство следует прямо из определения. Знаем, что Y — замкнутое подмножество полного пространства. Берем фундаментальную последовательность. $Y \subset X$, пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \forall n \in \mathbb{N}\, x_n \in Y$ — фундаментальная. $\forall n \in \mathbb{N}\, x_n \in X, X$ — полное $\Rightarrow \exists\, x_0 \in X \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Y — замкнутое, значит $x_0 \in Y \Rightarrow (Y, \rho)$ — полное. □

2 утверждение. Второй пункт не труднее первого. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — произвольная фундаментальная последовательность в Y.

Y — полное $\Rightarrow \exists\, x_0 \in Y \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow Y$ — замкнутое из-за произвольности последовательности. □

2.1. Банаховы пространства

Сначала введём понятие полунормы.

Определение 2.5 (полунорма). Пусть X — линейное пространство над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Отображение $p : X \to \mathbb{R}$ называется полунормой, если при $\forall\, x \in X\ \forall\, y \in X\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$

1. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ (полуаддитивность)
2. $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$

Свойство 2.1. p — полунорма $\Rightarrow$

$$\forall\, x \in X\ (p(x) \geq 0 \wedge p(\mathbb{0}) = 0)$$

Доказательство. $p(\mathbb{0}) = p(0 \cdot \mathbb{0}) = 0 \cdot p(\mathbb{0}) = 0$. Пусть $x \in X \Rightarrow \mathbb{0} = x + (-x) \Rightarrow p(\mathbb{0}) \leq p(x) + \underbrace{p(-x)}_{p(x)} = 2p(x) \Rightarrow p(x) \geq 0$ □

Определение 2.6 (Норма)**.** X — линейное пространство, $p : X \to \mathbb{R}$. p — норма $\Leftrightarrow$ (p — полунорма $\wedge$ $(p(x) = 0 \Leftrightarrow x = \mathbb{0})$). Будем обозначать $||x|| := p(x)$.

$(X, ||\cdot||)$ будем обозначать нормированное пространство. и при $(x \in X \wedge y \in X)$ $\rho(x, y) := ||x - y||$. Тогда $(X, ||\cdot||)$ — метрическое пространство.

Определение 2.7 (банахово пространство)**.** $(X, ||\cdot||)$ — банахово, если оно полное

Еще пару определений перед критерием банахова пространства.

Определение 2.8 (подпространство в алгебраическом смысле)**.** X — линейное пространство, $L \subset X$. L — подпространство в алгебраическом смысле $\Leftrightarrow$

$$\forall\, x \in L\, \forall\, y \in L\, \forall\, \alpha \in K\, \forall\, \beta \in K\ \alpha x + \beta y \in L$$

Определение 2.9 (подпространство)**.** $(X, ||\cdot||)$, $L \subset X$, L — подпространство, если

1. L подпространство в алгебраическом смысле
2. $L = \overline{L}$ ($\overline{L}$ — замыкание)

Теперь нам потребуется сходимость рядов. Для того, чтобы говорить о сходимости, нужна топология.

Определение 2.10 (Сходимость)**.**

$$(X, ||\cdot||) \quad \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$$

$\sum_{k=1}^{\infty} x_k (*)$, $(*)$ сходится, если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \in X$
$(*)$ сходится абсолютно, если $\sum_{k=1}^{\infty} ||x_k||$ сходится

В $\mathbb{R}^n$ (или в $\mathbb{C}^n$) если у нас была абсолютная сходимость, то была и обычная, но вообще говоря, это не так.

Теорема 2.3 (Критерий полноты нормированного пространства). $(X, ||\cdot||)$ - полное $\Leftrightarrow$ из абсолютной сходимости ряда следует сходимость ряда.

Доказательство. Предположим, что наше пространство полное ($\Rightarrow$). (X, ρ) — полное, $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность, при этом

$$\sum_{k=1}^{\infty} ||x_k|| \text{ сходится} \tag{**}$$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$. Цель такая: последовательность S_n — фундаментальная. Сейчас применим критерий Коши к ряду (**). Это ряд из чисел, так что всё в порядке. Пусть $\varepsilon > 0$. По критерию Коши $\exists\, N \in \mathbb{N}$: $\forall\, n \in \mathbb{N}\, \forall\, p \in \mathbb{N}\, (n > N \Rightarrow \sum_{k=n+1}^{n+p} ||x_k|| < \varepsilon)$.

$$||S_{n+p} - S_n|| = \left|\left|\sum_{k=1}^{p} x_{n+k}\right|\right| \leq \sum_{k=1}^{p} ||x_{n+k}|| = \sum_{k=n+1}^{n+p} ||x_k|| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \{S_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ — фундаментальная}, (X, \rho) \text{ — полное}$$

$$\Rightarrow \exists\, S \in X \lim_{n\to\infty} S_n = S$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} x_k \text{ сходится}$$

Мы так запаслись номерами, чтобы выражение было меньше ε.

Теперь ($\Leftarrow$). У нас кроме определения ничего нет. Возьмём какую-то фундаментальную последовательность. Откуда взять предел? Есть соотношения между элементами последовательности. Возьмём подпоследовательность, ведь у нас есть следствие 2.1! Из свойств фундаментальных последовательностей, мы знаем, что

$$\exists\, \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \text{ — подпоследовательность} ||x_{n_1}|| + \sum_{k=1}^{\infty} ||x_{n_{k+1}} - x_{n_k}|| \text{ сходится}$$

$$\Rightarrow \text{последовательность } x_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) \text{ сходится}$$

Но её последовательность частичных сумм — это в точности оригинальная подпоследовательность:

$$S_m = x_{n_1} + \sum_{k=1}^{m-1} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) = x_{n_m} \Rightarrow \exists\, S \in X \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = S$$

Далее из части 2 Теоремы 2.1

$$\exists\, S \in X \lim_{m\to\infty} x_{n_m} = S \Rightarrow \exists\, S \in X \lim_{n\to\infty} x_n = S$$

$\square$

2.2. Пространства ограниченных функций

Определение 2.11. Пусть A — произвольное множество. Стандартное обозначение $m(A)$ — множество всех ограниченных функций из него в комплексные (или только в действительные, не важно) числа

$$m(A) = \{f | f : A \to \mathbb{C} \wedge \sup_{x\in A} |f(x)| < +\infty\}$$

$f \in m(A) \Rightarrow ||f||_\infty = \sup_{x\in A} |f(x)|$.

Теорема 2.4. $(m(A), ||\cdot||_\infty)$ — банахово пространство

Доказательство. Нужно проверить две вещи. Во-первых, что $||\cdot||_\infty$ удовлетворяет аксиомам нормы. А во-вторых, что пространство с таким определением является полным. Просто по определению, никаких хитрых критериев — возьмём фундаментальную подпоследовательность и покажем, что у нее есть предел.

Проверяем, что $||\cdot||_\infty$ удовлетворяет аксиомам нормы.

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{C} ||\lambda f||_\infty = \sup_{x\in A} |\lambda| \cdot ||f(x)|| = |\lambda| \cdot \sup_{x\in A} ||f(x)|| = |\lambda| \cdot ||f||_\infty$$

Нужно проверить неравенство треугольника.

$$\forall\, f \in m(A) \forall\, g \in m(A) \forall\, x \in A |f(x) + g(x)| \le |f(x)| + |g(x)| \le ||f||_\infty + ||g||_\infty$$
$$\Rightarrow \forall\, f \in m(A) \forall\, g \in m(A) ||f+g||_\infty = \sup_{x\in A} |f(x) + g(x)| \le ||f||_\infty + ||g||_\infty$$

Следующая аксиома нормы:

$$||f||_\infty = 0 \Leftrightarrow \forall\, x \in A f(x) = 0 \text{ т.е. } f \text{ — нулевая функция}$$

Теперь мы проверили аксиомы нормы. Доказываем полноту. $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ — фундаментальная в $m(A)$.

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N \in \mathbb{N}\, \forall\, m \in \mathbb{N}\, \forall\, n \in \mathbb{N}$$
$$((m > N \wedge n > N) \Rightarrow ||f_n - f_m||_\infty < \varepsilon) \text{ т.е. } \sup_{x\in A} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Первый вопрос: откуда взять претендента на роль предела? Еще желательно, чтобы он был единственный. Берём ε, N из формулы выше, фиксируем x. Если для супремума есть неравенство, то и для x тем более. $\forall\, x \in A((n > N \wedge m > N) \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon)$. $\Rightarrow \{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ — фундаментальная последовательность чисел в $\mathbb{C}$.

$\Rightarrow \forall\, x \in A\, \exists\, L \in \mathbb{C}\, \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = L$

Определим $f \coloneqq (x \in A \mapsto \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x))$

$$(n > N \wedge m > N \Rightarrow \forall\, x \in A |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon) \quad \text{пусть } m \to \infty$$
$$\Rightarrow (n > N \Rightarrow \forall\, x \in A |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon)$$
$$\Rightarrow (n > N \Rightarrow ||f_n - f||_\infty = \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon)$$

Последнее соображение, которое нужно добавить, это то, что f — элемент A. Для $n > N$ можем записать f как $f = (f - f_n) + f_n, f_n \in m(A), f - f_n \in m(A)$.

$$\Rightarrow ||f||_\infty = ||(f - f_n) + f_n||_\infty \le ||f - f_n||_\infty + ||f_n||_\infty < +\infty \Rightarrow f \in m(A)$$

□

Давайте заметим, что у нас получилось определение равномерной непрерывности из математического анализа.

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \in m(A) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| = 0 \Leftrightarrow f_n \underset{\substack{x\in A\\ n\to\infty}}{\rightrightarrows} f$$

Определение 2.12 (Топологический компакт)**.** Множество K — топологический компакт, если оно обладает следующими свойствами

1. $(\forall\, \alpha \in A\, G_\alpha$ — открытое множество $\wedge K \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \Rightarrow \exists \{\alpha_j\}_{j=1}^n$ — конечная подпоследовательность $K \subseteq \bigcup_{j=1}^n G_{\alpha_j})$
2. Хаусдорфовость $\forall\, x \in K \forall\, y \in K (x \neq y \Rightarrow \exists\, U \exists\, V (U$ — открытое множество $\wedge V$ — открытое множество $\wedge x \in U \wedge y \in V \wedge U \cap V = \varnothing))$

Определение 2.13. $C(K) = \{f | f : K \to \mathbb{R} \wedge f$ непрерывна$\}$

$$||f||_{C(K)} = ||f||_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)| = \max_{x \in K} |f(x)|$$

Следствие 2.2. K — топологический компакт $\Rightarrow C(K)$ — банахово

Доказательство. $C(K) \subset m(K)$. $C(K)$ — подпространство в алгебраическом смысле. Проверим, что $C(K)$ — замкнуто в $m(K)$

$$\{f_n\}, f_n = C(K), \lim_{n \to \infty} |f - f_n|_\infty = 0 \Leftrightarrow f_n \underset{K, n \to \infty}{\rightrightarrows} f \Rightarrow f \in C(K) \Rightarrow C(K)$$

тогда $m(K)$ — полное и $C(K)$ — полное. □

2.3. Пространство последовательностей с $\sup$ нормой

Определение 2.14. $\mathbb{C}^n, n \in \mathbb{N}, l_n = \{x^\infty = (x_1, \ldots, x_n), x_j \in \mathbb{C}\}$

$$||x||_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$$

$A = \{1, 2, \ldots, n\}, l_n^\infty = m(A) \Rightarrow l_n^\infty$ — полное Удобно думать, что последовательность — это функция на множестве натуральных чисел.

Определение 2.15 (l^∞)**.**

$$l^\infty = \{X = \{x_j\}_{j=1}^\infty, \sup_{j \in \mathbb{N}} |x_j| < +\infty\}$$

$$||x||_\infty = \sup_{j \in \mathbb{N}} |x_j| \quad A = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$$
$$X = \{x\}_{j=1}^\infty \in m(A), f : A \to \mathbb{C}, j \mapsto x_j$$
$$l^\infty := m(\mathbb{N}) \Rightarrow l^\infty \text{ — полное}$$

Определение 2.16.

$$c = \{X = \{x\}\, j_{j=1}^\infty, x_j \in \mathbb{C} \quad \exists \lim_{n \to \infty} x_n = x_0\}$$
$$c \subset l^\infty, ||x|| = ||x||_\infty = \sup ||X||$$
$$c_0 = \{x = \{x\}_{j=1}^\infty, \lim_{n \to \infty} x_j = 0\}, c_0 \subset c \subset l^\infty$$

c, c_0 — замкнутые подпространства в $l^\infty \Rightarrow c, c_0$ — банаховы.

2.4. Пространства n раз непрерывно дифференцируемых функций на отрезке

Определение 2.17 (норма n-ой производной)**.**

$$n \in \mathbb{N} \quad C^{(n)}[a, b] = \{f : [a, b] \to \mathbb{R}\} \exists\ f^{(n)} \in C[a, b]$$

$$||\, ||f||_{C^{(n)}[a,b]} = \max_{0 \le k \le n} \{||f||_\infty^{(k)}\} f^{(0)} = f$$

Теорема 2.5. В $C^{(n)}[a, b]$ — банахово.

Доказательство.

$$\{f_m\}_{m=1}^{\infty} \text{ — фундаментальная последовательность в } C^{(n)}[a,b]$$
$$\varepsilon > 0\, \exists\, N : (m > N \wedge q > N) \Rightarrow ||f_m - f_q||_{C^{(n)}} < \varepsilon \Rightarrow ||f_m^{(k)} - f_q^{(k)}||_\infty < \varepsilon$$
$$k = 0, 1, \ldots, n$$

$$\{f_m^{(k)}\} \text{ — фундаментальная в полном пространстве } C[a,b]$$
$$\Rightarrow \exists\, \varphi_k \in C[a,b], f_m^{(k)} \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} \varphi_k, k = 0, 1, \ldots, n$$
$$\overset{\text{Анализ}}{\Rightarrow} (f_k^{(0)} \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} \varphi_0 \wedge f_k' \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} \varphi_1) \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_0', \varphi_2 = \varphi_0'', \ldots, \varphi_n = \varphi_0^{(n)}$$
$$\Rightarrow \max \left\{ \left|\left| f_m^{(k)} - \varphi_0^{(k)} \right|\right|_\infty \right\} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

а этот максимум это и есть $||f_m - \varphi_0||_{C^{(n)}[a,b]}$ $\square$

Глава 3

Пространство суммируемых функций (Лебега L^p)

Сейчас будет небольшой экскурс в теорию меры, которая была на математическом анализе. Мы ничего доказывать не будем и поверим, что все утверждения верны и в общем случае.

3.1. Теория меры

Определение 3.1 (Мера). (X, U, μ) — пространство с мерой. X — множество, U — σ-алгебра подмножества X

1. $\varnothing \in U$
2. $A \in U \Rightarrow X - A \in U$
3. $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}, A_n \in U, A\infty_{n=1}A_n \Rightarrow A \in U$

$$\mu : U \to [0, +\infty]$$

— мера, если

1. $\mu(\varnothing) = 0$
2. $A = U_{n=1}^{\infty}\{A_n\}, A_n \cap A_m = \varnothing, n \neq m, A_n \in U \Rightarrow \mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n$ (счетная аддитивность)

Предположения:

1. μ — полная мера, то есть $A \in U, \mu(A) = 0 \Rightarrow (\forall B \subset A \Rightarrow B \in U, (\Rightarrow \mu B) = 0)$

2. μ — σ-конечна, то есть $X = \cup_{j=1}^{\infty} X_j, \mu(X_j) < +\infty$

Пока можем думать, что речь идет о мере Лебега. Потом приведём другие примеры. В теории пространств будем считать, что функция действует из X в $\mathbb{R}$ или в $\mathbb{C}$ (не особо важно).

Определение 3.2 (Измеримая функция). $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. f — измерима, если

$$\forall\, c \in \mathbb{R}, x\ \underbrace{\{x : c < f(x)\}}_{\text{измеримое множество}} \in U$$

$$f : X \to \mathbb{C} \Rightarrow f = u + iv, u, v : X \to \mathbb{R}$$

f — измерима, если u, v — измеримы

Как же определяется интеграл? Пусть есть какой-то элемент σ-алгебры $e \in U$, $\chi_e(x) = \begin{cases} 1, x \in E \\ 0, x \notin e \end{cases}$. Множество простых функций определяется как

$$S = \{g(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{e_k}, c_k \in \mathbb{C}, e_k \in U\}$$

$g \in S, \int_X g(x) d\mu = \sum_{k=1}^n c_k \mu e_k$.

$f(x)$ — измеримая, если $f(x) \geq e, x \in X$

Определение 3.3 (Произвольно измеримая функция).

$$\int_X f d\mu = \sup\left\{\int_X g(x) d\mu : 0 \leq g(x) \leq g(x), x \in X, c_k \in \mathbb{R}, c_k > 0\right\}$$

Определение 3.4 (Измеримая функция). f — измерима, если

$$f_+(x) = \max_(f(x), 0) \wedge f_-(x) = \max(-f(x), 0) \Rightarrow f = f_+ - f_-$$

Если $\int_X f_+ d\mu$ — конечен или $\int_X f_- d\mu$ — конечен, то $\int_X f d\mu = \int_X f_+ d\mu - \int_X f_- d\mu$ Если f — измеримая, $f : X \to \mathbb{C} \Rightarrow f = u + iv$

$$\int_X f d\mu = \int_X u d\mu + i \int_X v d\mu$$

Определение 3.5 (Множество суммируемых функций). $L(X, \mu)$ — множество суммируемых функций =

$$\left\{ f_i : \int_X |f| d\mu < +\infty \right\}, |f| = f_+ + f_-$$

Прежде чем двигаться дальше, приведем примры других мер (кроме мер Лебега)

Пример 3.1. $E \subset \mathbb{R}^n$, E — измерима по Лебегу, λ — мера Лебега, $w(x) \geq 0, x \in E$, w — измерима по Лебегу.

$e \subset E, e$ — измеримо по Лебегу. $\mu e = \int_e w(x) d\lambda, w(x)$ — плотность меры μ, $w(x)$ — её вес.

Вторая мера в каком-то смысле противоположная. Она сосредоточна на наборе точек и называется дискретной.

Пример 3.2. X — множество ($X \neq \varnothing$), $a \in X$

$$\sigma_n, e \subset X, \sigma_a(e) = \begin{cases} 1, a \in E \\ 0, a \notin e \end{cases}$$

$\forall\, e, e \subset X, e$ — измеримо

Пример 3.3 (Дискретная мера). X — бесконечное множество. $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}, a_j \in X, a_j \neq a_k, j \neq k$

$\{h_j\}_{j=1}^{\infty}, h_j > 0$

$$\mu - \sum_{\gamma=1}^{\infty} h_j \delta_{a_j}, e \subset X \quad \mu E = \sum_{\{j : a_j \in E\}} h_j$$

План такой: хотим ввести норму на множестве интегрирумеых функций. Для этого нам надо ввести некоторые неравенства.

3.2. Классические неравенства

Теорема 3.1 (Неравенство Юнга). $p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (q — сопряженный показатель)

$$\Rightarrow ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^p}{q}$$

Доказательство. Пусть b — фиксировано, $\varphi(x) = \frac{x^p}{p} - xb, x \in [0, +\infty)$. Хотим найти $\min_{x \in [0,+\infty)} \varphi(x)$. Для этого посмотрим, где производная обращается в 0. $\varphi'(x) = x^{p-1} - b$, $\varphi'(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 = b^{\frac{1}{p-1}} \Rightarrow \varphi(x) > \varphi(x) > \varphi(x_0) \, \forall \, x \neq x_0, x \geq 0$. Таким образом, x_0 — строгий локальный минимум.

$$\varphi(x_0) = \frac{1}{p} b^{\frac{p}{p-1}} - b^{\frac{p}{p-1}} = b^{\frac{p}{p-1}} \left(\frac{1}{p} - 1 \right) = \frac{b^q}{q}$$
$$-\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p} \Rightarrow q = \frac{p}{p-1}$$
$$\varphi(x) \geq -\frac{b^q}{q} \, \forall \, x \in [0, +\infty) \text{ то есть ОК}$$

$$\varphi(x_0) = \frac{1}{p} b^{\frac{p}{p-1}} - b^{\frac{p}{p-1}} = b^{\frac{p}{p-1}} \left(\frac{1}{p} - 1 \right) = \frac{b^q}{q}$$

□

Замечание 3.1. Равенство в неравенстве Юнга достигается только при $a = b^{\frac{1}{p-1}}$

Теорема 3.2 (Неравенство Гельдера)**.** (X, U, μ) —- пространство с мерой. f, g — измеримые, $p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow$

$$\int_X |fg| d\mu \leq \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_X |g|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \tag{*}$$

Если $p = q = 2$, то это «Неравенство Коши-Бунаковского-Шварца», или на молодёжном математическом сленге неравенство КБШ

Доказательство. Для начала отбросим какие-то простые случаи. $A = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, B = \left(\int_X |g|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$. Если $A = 0 \Leftrightarrow |f| = 0$ почти всюду по $\mu \Leftrightarrow f(x) = 0$ почти всюду по μ (то есть $\mu\{x : f(x) \neq 0\} = 0$) На всякий случай поясним, почему функция равна 0 почти всюду по мере μ

$$\int_X |f| d\mu = 0 \Rightarrow e = \{x : f(x) = 0\}, m \in \mathbb{N}, e_m = \{x : |f(x)| > \frac{1}{m}\}$$

$$e = \cup_{m=1}^{\infty} e_m \quad \int_X |f| d\mu \geq \int_{e_m} |f| d\mu \geq \frac{1}{m} \mu e_m \Rightarrow \mu e_m = 0 \Rightarrow \mu E = 0$$

$$\Rightarrow f(x) \cdot g(x) = 0 \text{ п.в.} \quad 0 \leq 0 \tag{*}$$

Если $A = +\infty$, то (*)

$$\text{пусть } 0 < A < +\infty, 0 < R < +\infty$$

Неравенство Гельдера однородное, то есть если мы f умножим на константу, то левая и правая часть умножится на неё же, аналогично с g. Иногда бывает удобно ввести нормировку.

$$f_1(x) = \frac{f(x)}{A}, g_1(x) = \frac{g(x)}{B}, \int_X |f_1(x)|^p d\mu = \frac{A^p}{A^p} = 1, \int_X |g_1(x)|^q d\mu = 1$$

Пусть x — фиксирован, $a = |f(x)|$, $b = |g(x)| \overset{\text{н.Юнга}}{\Rightarrow}$

$$|f_1(x)| \cdot |g_1(x)| \leq \frac{|f_1(x)|^p}{p} + \frac{|g_1(x)|^q}{q} \text{ проинтегрируем } X \text{ по } \mu$$

$$\Rightarrow \int_x |f_1| \cdot |g_1| d\mu \leq \frac{1}{p} \int_X |f_1|^p d\mu + \frac{1}{q} \int_X |g_1|^q d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Умножаем на $AB \Rightarrow \int_X |fg| d\mu \leq AB$ □

Теорема 3.3 (Неравенство Минковского). (X, U, μ), f, g — измеримые, $1 \leq p < +\infty \Rightarrow$

$$\underbrace{\left(\int_X |f(x) + g(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}}_{C} \leq \underbrace{\left(\int_X |f(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}}_{A} + \underbrace{\left(\int_X |g(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}}_{B} \tag{*}$$

Доказательство. Сначала разберём простые случаи. $p = 1, x$ — фиксирован. $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$ проинтегрируем по $X \Rightarrow (*)$ при $p = 1$. Теперь пусть $p > 1$. Если $A = +\infty$, или $B = +\infty$, или $C = 0$, то (*).

Теперь же пусть $A < +\infty, B < +\infty, C > 0$. Доказателсьвто будет в два этапа. На первом этапе получим гораздо более слабое утверждение, вообще не то, что требуется в теореме, но оно нам понадобится. Докажем, что $C < +\infty$.

$a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow |a+b| \leq |a|+|b| \leq 2\max(|a|, |b|) \Rightarrow |a+b|^p \leq 2^p \max(|a|^p, |b|^p) \leq 2^p(|a|^p + |b|^p) \Rightarrow$ при фиксированном x

$$|f(x) + g(x)|^p \leq 2^p(|f(x)|^p + |g(x)|^p) \text{ проинтегрируем по } X$$

$\Rightarrow C^p \le 2^p(A^p + B^p) \Rightarrow C < +\infty$. Первая часть доказательства закончена.

$$C^p = \int_X |f+g|^p d\mu = \int_X |f+g|\cdot|f+g|^{p-1} d\mu \le \int_X |f|\cdot|f+g|^{p-1} d\mu + \int_X |g|\cdot|f+g|^{p-1} d\mu$$

$$\int_X |f|\cdot|f+g|^{p-1} d\mu \overset{\text{н. Гельдера}}{\le} \left(\int_X |f+g|d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\underbrace{\int_X |f+g|d\mu}_{A}\right)^{(p-1)q} = AC$$

$$\int_X |g|\cdot|f+g|^{p-1} d\mu \overset{\text{аналогично}}{\le} BC^{\frac{p}{q}} \Rightarrow$$
$$C^p \le (A+B)C^{\frac{p}{q}}, \quad 0 < C < +\infty \Rightarrow$$
$$C^{p-\frac{p}{q}} = C \Rightarrow C \le A + B (\text{ это } (*))$$

□

3.3. Пространство Лебега

Отсюда и до определения L^∞ очень аккуратно с $\mathcal{L}$ и L читать. Тут точно есть путаница, но записи лекции нет, чтобы ее устранить.

Определение 3.6. (X, U, μ) — пространство с мерой. $L(X, \mu)$ — пространство суммируемых функций. $1 \le p < +\infty \quad \mathcal{L}^p(X, \mu) = \{f : |f|^p \in L(X, \mu)\}$

$$f \in L^p(X, \mu), ||f||_p = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

Проверим, что $||f||_p$ — это полунорма на $L^p(X, \mu)$. $c \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$). $||cf||_p = |c|||f||_p$

$$||f+g||_p \le ||f||_p + ||g||_p \text{ — неравенство Минковского}$$

$||f|| = 0 \Leftrightarrow \int_X |f(x)|^p d\mu = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ почти всюду по мере μ на X.

Пример 3.4. $L[0,1], \lambda$ — мера Лебега на $[0,1]$.

функция Дирихле $\varphi(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad \int_0^1 |\varphi(x)| d\lambda = 0.$

$N = \{f$ — измерима $\wedge$ $f(x) = 0$ почти всюду на Xпо $\mu\}$. $||f||_p = 0 \Leftrightarrow f \in N$ (не зависит от p). Рецепт приготовления пространства с нормой из полуфбриката. пространство с полунормой. N — подпространство в L^p, $L^p = L^p/N$ — факторпространство.

$g, f \in L^p, f\ g \Leftrightarrow f - g \in N \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ почти всюду по μ. $\overline{f}$ — класс эквивалентности, $\overline{f} = \{g : f\ g\}$.

$||\overline{f}||_p := ||f||$, то есть можно взять любую функцию из класса эквивалнентности.

$$||\overline{f}||_p = 0 \Leftrightarrow \int_X |f|^p d\mu = 0 \Leftrightarrow f \in N \Rightarrow \overline{f} = N = \overline{0} \Rightarrow$$

$||\overline{f}||_p$ — норма на L^p. Говорят, что $f \in L^p$, возьмём функцию из L^p, но имеют в виду, что возьмут класс экивалентности, а из него возьмут функцию

Одна из главных целей — доказать, что эти пространства Банаховы. Сначала определим $L^\infty(X, \mu)$ (существенно ограниченные функции).

Определение 3.7 ($L^\infty(X,\mu)$). $f \in L^\infty(X, \mu)$, если

$$\exists\, c > 0 |f(x)| \leq c \text{ почти всюду на } X \text{ по } \mu(\mu\{x : |f(x)| > c\} = 0)$$

Возьмём точную нижнюю грань этой константы. $||f||_\infty = \inf\{c \geq 0 : \mu\{x : ||f(x)|| > c\} = 0\}$ (существуенный sup, или на подлом англосаксонском $\text{ess sup}_X f$)

Свойство 3.1. $f \in \mathcal{L}^\infty(X, \mu) \Rightarrow \mu\{f(x) > ||f||_\infty\} = 0$

Доказательство. $e = \{x : |f(x) > ||f||_\infty\}, m \in \mathbb{N}$.
$e_m = \{x : |f(x)| > ||f||_\infty + \frac{1}{m}\} \Rightarrow \mu e_m = 0$ по определеннию $\text{ess sup}_X f$
$\Rightarrow e = \cup_{m=1}^\infty e_m \Rightarrow \mu e = 0$ □

$$||f||_\infty \text{ — полунорма на } \mathcal{L}^\infty$$
$$\lambda \neq 0 \quad |\lambda f(x)| \leq |\lambda| \cdot c \Leftrightarrow |f(x) \leq c \Rightarrow ||\lambda f||_\infty = |\lambda| ||f||_\infty,$$
$$f, g \in \mathcal{L}^\infty, x \in X \Rightarrow |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty \text{ для п.в. } x \text{ на } X$$
$$\Rightarrow ||f + g||_\infty < ||f||_\infty + ||g||_\infty$$

$||f||_\infty = 0 \Leftrightarrow \mu\{x : |f(x)| > 0\} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ п.в. на $X \Leftrightarrow f \in N = \{f$ — измерима, $f(x) = 0$ п.в. на $X\}$

$$L^\infty = \mathcal{L}^\infty / N$$

Все, что Н.А. доказал для меры Лебега, верно и для других мер. Те доказательства и так были не особо веселые, чтобы их повторять.

Теорема 3.4 (Фату). (X, U, μ), $\{g_n\}_{n=1}^\infty, g_n$ — измеримые, $g_n(x) \geq 0$

$$g_n(x) \underset{\text{п.в.}}{\longrightarrow} g(x) \quad \int_X g_n(x) d\mu \leq C \text{ не зависит от n}$$
$$\Rightarrow \int_X g(x) d\mu \leq C$$

Первая существенная теорема, которая нам встретилась.

Теорема 3.5 (полнота пространства Лебега). $(X, U, \mu), 1 \leq p \leq +\infty \Rightarrow L^p(X, \mu)$ — банаховы.

Доказательство. при $1 \leq p < +\infty$ воспользуемся критерием полноты (если сходится ряд из норм, то сам ряд сходится)

$$\{f_n\}_{n=1}^\infty, f_n \in L^p, \sum_{n=1}^\infty ||f_n||_p \leq C < +\infty$$
$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$$

Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} ||S_n(x) - f(x)||_p = 0$. Существует ли $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$ почти всюду на X?
Рассмотрим $\sigma_n(x) = \sum_{k=1}^n |f_k(x)| \Rightarrow \sigma_n(x)$ возрастает $\Rightarrow \exists\, \sigma(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n(x)$. Возможно, $\sigma(x) = +\infty$ для некоторых x.

$$||\sigma_n||_p \leq \sum_{k=1}^n ||f_k||_p \leq C$$

$$\int_X |\sigma_n(x)|^p d\mu \leq C^p \wedge \sigma_n(x)^p \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sigma_(x)^p \,\forall\, x \in X \overset{\text{т. Фату}}{\Rightarrow}$$

$\int_X \sigma(x)^p d\mu \leq c^p$ Самое главное, что мы из этого заключаем: $\sigma(x) < +\infty$ п.в. на X по μ.

$$x \in X \quad \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| < +\infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \text{ — сходится}$$

$$f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \text{ определена п.в. на } X, \lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} ||f_k||_p < +\infty, \varepsilon > 0$$

Применим критерий Коши: $\exists\, N \in \mathbb{N} \quad m > n > N \Rightarrow \sum_{k=n+1}^{m} ||f_k||_p < \varepsilon \Rightarrow ||S_m(x) - S_n(x)||_p \leq \sum_{k=n+1}^{m} ||f_k||_p < \varepsilon$

$$\int_x |S_m(x) - S_n(x)|^p d\mu < \varepsilon^p (n \text{ фиксировано}) \wedge |S_m(x) - S_n(x)|^m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} |f(x) - S_n(x)|$$

$$\overset{\text{Фату}}{\Rightarrow} \int_X |f - S_n|^p d\mu \leq \varepsilon^p \Rightarrow ||f - S_n|| \leq \varepsilon$$

$f - S_n \in L_p, S + n \in L^p \Rightarrow f = (f - S_n) + S_n \Rightarrow f \in L_p$ и $||f - S_n||_p \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$
Теперь осталось рассмотреть случай $p = \infty$. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальная, $f_n \in L^{\infty}$,

$$|f_n(x)| \leq ||f_n||_{\infty} \quad x \in X \setminus e_n, \mu e_n = 0 \quad n \in \mathbb{N}$$

$e = \cup_{n=1}^{\infty}, X_1 = X \setminus e \Rightarrow f_n \in m(X_1)$ — ограниченная функция. $m(X_1)$ — полное $\Rightarrow \{f_n\}$ — фундаментальна в $m(X_1) \Rightarrow \exists\, f \in m(X_1) \quad \sup_{x\in X_1} |f(x) - f_n(x)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Положим $f(x) = 0$ если $x \in e \Rightarrow \lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_{L^\infty} = 0 \quad \square$

3.4. Пространства l_n^p, l^p

$n \in \mathbb{N}, 1 \leq p < +\infty$.

Определение 3.8.

$$l_n^p = \left\{ \mathbb{R}^n, x = (x_1, \ldots, x_n), x_j \in \mathbb{R}, ||x||_p = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\}$$

Рассмотрим $X = \{1, 2, \dots, n\}$. Возьмём дискретную меру $\mu(j) = 1$ при $1 \leq j \leq n$, $l_n^p = L^p(X, \mu)$. $f \in L^p(X, \mu), f(j) = x_j \Rightarrow l_n^p$ — полное.

Посмотрим, что будет обозначать сходимость этой нормы.

Теорема 3.6. $\{x^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}, x = (x_1, \dots, x_n), x^{(m)} = (x_1^{(m)}, \dots, x_n^{(m)})$, $x^{(m)} \in l_n^p, q \leq p \leq +\infty$

$$\lim_{m\to\infty} ||x - x^{(m)}||_p = 0 \Leftrightarrow \lim_{m\to\infty} x_j^{(m)} = x_j, 1 \leq j \leq n$$

Доказательство. $\Rightarrow$
Пусть j — фиксировано, $\lim\limits_{m\to\infty} x^{(m)} = x$ в l_n^p.
При $p < +\infty$ $||x - x^{(m)}||_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - x_i^{(m)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq |x_j - x_j^{(m)}$. Так как $||x - x^{(m)}||_p \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \lim\limits_{m\to\infty} |x_j - x_j^{(m)}| = 0$.
При $p = \infty$ $\quad ||x - x^{(m)}||_\infty = \max_{1\leq i\leq m}\{|x_i - x_i^{(m)}|\} \geq |x_j - x_j^{(m)}|$. Так как $||x - x^{(m)}||_\infty \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \lim\limits_{m\to\infty} |x_j - x_j^{(m)}| = 0$
Теперь $\Leftarrow$

$$1 \leq j \leq n \quad \lim_{m\to\infty} |x_j - x_j^{(m)}| = 0 \Rightarrow \left(\sum_{j=1}^n ||x_j - x_j^{(m)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\text{и } \Rightarrow \max_{1\leq j\leq n} |x_j - x_j^{(m)}| \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

□

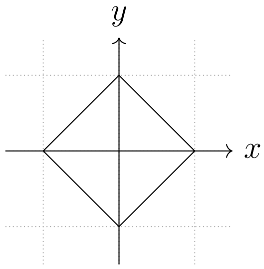
Определение 3.9. $l_p = \{x : \{x_j\}_{j=1}^{\infty}, x_j \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \wedge \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < +\infty\}$

$$||x||_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

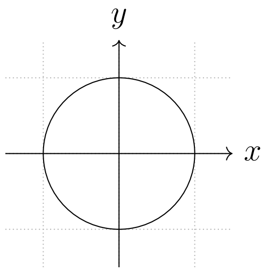
$X = \mathbb{N}$, $\mu(j) = 1$, $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n$

$$l^p = L^p(\mathbb{N}, \mu) \Rightarrow \text{ полное} \quad 1 \leq p < +\infty$$

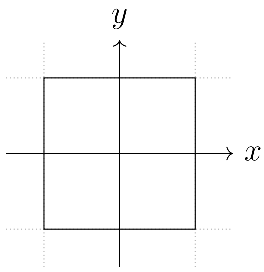
Замечание 3.2. $\{x^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}, x^{(m)} \in l^p$, $\lim\limits_{m\to\infty} ||x^{(m)} - x||_p = 0 \Rightarrow \forall j \lim\limits_{m\to\infty} x_j^{(m)} = x_j$ Например, $\not\Leftarrow$ при $e_m = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots)$



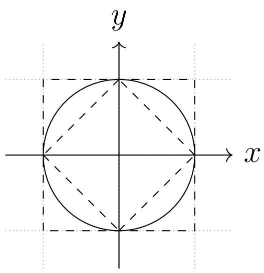
(a) $B_1^1(0,0)$



(b) B_1^2(0,0)



(c) B_1^∞(0,0)



(d) B_1^p(0,0)

Рис. 3.1: Примеры единичных шаров в l_2^p

Пусть j фиксировано. $\lim\limits_{m\to\infty}(e_m)_j = 0 \quad ||e_m - \mathbb{0}||_p = 1 \quad \forall\, p, 1 \le p \le +\infty$. В качестве упражнения доказать, что l^p — полное непосредственно.
На рисунке 3.1 приведены примеры единичных шаров в $l_2^p = \{(x,y) : (|x|^p + |y|^p)^{\frac{1}{p}}\}, 1 \le p < +\infty$. Для l_2^∞ норма определяется $||(x,y)||_\infty = \max(|x|,|y|)$

3.5. Неполное нормированное пространство

Определение 3.10 (Финитное линейное пространство).

$$F = \{x - \{x_j\}_{j=1}^{\infty}, x_j \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \exists\ N(x) \in \mathbb{N} : n > N(x) \Rightarrow x_n = 0\}$$

$F \subset l^p \quad 1 \le p \le +\infty$. $(F, ||\cdot||_p)$ — не полное, F — не замкнуто. Будем брать геометрическую прогрессию и обрывать ее на некотором члене.

$$x^{(m)} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^m}, 0, 0, 0, \dots\right\} \in F$$

$$X = \left\{\frac{1}{2^k}_{k=1}^{\infty}\right\} \in l^p$$

$$1 \le p < +\infty \quad ||x - x^{(m)}||_p = \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^{kp}}\right)^{\frac{1}{p}} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Следовательно, F — не замкнуто.

В качестве упражнения проверить, что $\overline{F}$ в $l^p =?$ при $p < +\infty$ и при $p = \infty$.

Теорема 3.7. $C[a,b], ||f||_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, 1 \le p < +\infty$

$$(C[a,b], ||\cdot||) \text{ — не полное}$$

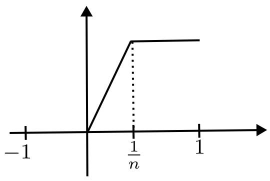
Доказательство. При $p = 1$, $[a,b] = [-1,1], f \in C[a,b], \int_a^b |f(x)|^p dx = 0 \Leftrightarrow f(x) \equiv 0$. Предъявим фундаментальную последовательность, предел которой не будет непрерывной функцией.

$$f_n = \begin{cases} 0 & -1 \le x \le 0 \\ nx & x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 1 & x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}, f \in C[-1,1]$$

f_n — фундаментальная в $(C[-1,1], p = 1)$

Пусть $m > n$.

$$\int_{-1}^{1} |f_m(x) - f_n(x)| dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right) \le \frac{1}{2n} \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$



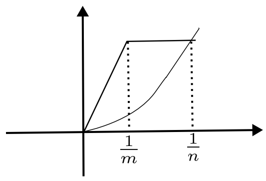


Рис. 3.2: Доказательство теоремы 3.7

Пусть $\exists\ f \in C[-1,1] : ||f - f_n||_1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

$$m \geq n \quad \int_{\frac{1}{n}}^{1} \underbrace{|f(x) - 1|}_{=0} dx \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} |f(x) - 1| dx \leq \int_{0}^{1} |f(x) - f_m(x)| dx \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$\Rightarrow f(x) = 1, x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \forall n$

$$\begin{cases} \Rightarrow f(x) = 1, x \in (0,1], f \text{ непрерывна }, f(0) = 1 \\ \text{аналогично } f(x) \equiv 0 \text{ на } [-1,0] \end{cases} \Rightarrow \text{ противоречие}$$

□

3.6. Пополнение метрического пространства

Мы привели несколько примеров нормированных пространств, не являющихся полными. Приведём еще один пример.

Определение 3.11.

$$\mathcal{P} = \left\{ p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, a_k \in \mathbb{R}, n \geq 0 \right\}$$

$\mathcal{P}$ (подпространство в алгебраическом смысле) $\subset C[a,b]$, $||p||_\infty = \max_{x\in[a,b]} |p(x)|$ $e^x \notin \mathcal{P}$, $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}, \Rightarrow p_n \underset{[a,b], n\to\infty}{\rightrightarrows} e^x$ это не многочлен, потому что если сколько-то раз продифференцировать многочлен, он станте тождественным $0 \Rightarrow \overline{\mathcal{P}} \setminus \mathcal{P} \ni e^x \Rightarrow \mathcal{P}$ — не замкнуто $\Rightarrow \mathcal{P}$ — не полное.

$$\overline{\mathcal{P}} = C[a,b]$$

Теорема 3.8 (Вейерштрасса, 1885). $f \in C[a,b], \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, p \in \mathcal{P}$ т.ч. $||f-p|| < \varepsilon$ (любую функцию на отрезке можно приблизить многочленами)

$$p_n \underset{G}{\rightrightarrows} f \Rightarrow f \text{ аналитическая в } G$$

Несколько простых свойств метрики, и все следуют из неравенства треугольника

Теорема 3.9 (Свойства метрики). (X, ρ) — метрическое

1. $x, y, z, u \in X \quad \Rightarrow |\rho(x,u) - \rho(y,z)| \leq \rho(x,y) + \rho(u,z)$
2. $\rho : X \times X \to \mathbb{R} \Rightarrow \rho(x,y)$ — непрерывная функция
3. $A \subset X, A$ — подмножество, $\rho(x,A) = \inf_{y\in A} \rho(x,y) \Rightarrow$ $\rho(x,A)$ — непрерывная функция от x
4. $A \subset X, A = \overline{A}, x_0 \notin A \Rightarrow \rho(x_0, A) > 0$

Доказательство. 1. $\rho(x,u) \leq \rho(x,y) + \rho(y,u) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z) + \rho(z,u) \Rightarrow \rho(x,u) - \rho(y,z) \leq \rho(x,y) + \rho(z,u)$ Аналогично $\rho(y,z) - \rho(x,u) \leq \ldots$ из всего $\Rightarrow 1)$

2. Докажем непрерывность с помощью последовательности.
   $\rho(x,y)$ — непрерывная?

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \lim_{n\to\infty} y_n = y \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0 = \lim_{n\to\infty} \rho(y_n, y)$$

   $\rho(x,y) - \rho(x_n,y_n)| \overset{(1)}{\leq} \rho(x,x_n) + \rho(y,y_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \rho(x_n,y_n) = \rho(x,y)$

3. $A \subset X$, $x, z \in X$, $|\rho(x,A) - \rho(z,A)| \leq ?$
   Пусть $y \in A$

$$\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y) \Rightarrow \rho(x,A) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)\, \forall\, y \in A$$
$$\Rightarrow \rho(x,A) \leq \rho(x,z) + \inf_{y\in A} \rho(z,y) = \rho(x,z) + \rho(z,A) \Rightarrow$$
$$\rho(x,A) - \rho(z,A) \leq \rho(x,z)$$

Но нам нужен модуль. Можем сказать, что x и z ничем не отличаются, аналогично $\rho(z, A) - \rho(x, A) \leq \rho(x, z) \Rightarrow 3$

4.
$$x_0 \notin A \Rightarrow x_0 \in X \setminus A \text{ открытое}$$
$$\Rightarrow \exists\, \delta > 0 \quad B_\delta(x_0) \subset X \setminus A \Rightarrow \rho(x_0, A) \geq \delta$$

□

Перед определением пополнения нам потребуется несколько определений, связанных с отображениями в метрических пространствах.

$(X, \rho), (Y, d)$ — метрические простарнства. $T : X \to Y$.

Определение 3.12 (Изометрическое вложение)**.**

$$d(T_x, T_z) = \rho(x, z) \quad \forall\, x, z \in X$$

Обозначение: $X \hookrightarrow Y$

Определение 3.13 (Изометрия)**.** T — изометрическое вложение, $T(X) = Y$

Определение 3.14 (Изометричность пространств)**.** $(X, \rho), (Y, d)$ изометричны, если $\exists\, T : X \to Y, T$ — изометрия

Свойство 3.2. T — изометрическое вложение $\Rightarrow T$ — инъективное, непрерывное

Доказательство. $x, z \in X, T : X \to Y$, пусть $T_x = T_z \Rightarrow d(T_x, T_z) = 0$ Значит, исходное расстояние тоже 0 по свойству метрики. $d(x, z) = 0 \Rightarrow x = z$

Инъективность проверили, теперь непрерывность, это еще проще.

$$\lim_{n\to\infty} = x \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \rho(x, x_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} d(T_{X_n}, T_x) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} T_{X_n} = T_x$$

□

Свойство 3.3. Если T — изометрия, то $\exists\, T^{-1}$ — изометрия.

Свойство 3.4. «Изометричность» — отношение эквивалентности на множестве метрических пространств

И наконец

Определение 3.15 (Пополнение м. пространства)**.** (X, ρ) — метрическое пространство. (Z, d) — полное метрическое пространство. (Z, d) — пополнение (X, ρ), если существует $T : X \to Z$

1. T — изометрическое вложение
2. $\overline{T(X)} = Z$

Замечание 3.3. Не обязательно искать пространство, удовлетворяющее и второму свойству. Достаточно найти такое, которое удовлетворяет первому. (X, ρ) — метрическое пространство, (U, d) — полное метрическое пространство. Пусть $\exists\, T : X \to U$ — изометрическое вложение. Если 2 свойство не выполняется, то легко такое Z построить. Возьмём замыкание образа. $Z = \overline{T(X)} \Rightarrow (Z, d)$ — пополнение X.

Теперь обещанная теорема. Возьмём любое метрическое пространство и покажем, что у него есть пополнение.

Теорема 3.10 (О пополнении метрического пространства)**.** (X, ρ) — метрическое $\Rightarrow\ \exists$ пополнение (Z, d)

Доказательство. Есть классическое доказательство с рассмотрением всех фундаметнальных последовательностей, рассмотрением фактор-пространства, муторным разбором случаев. Мы пойдем другим путём. Будет короткое, но **фантастически** непонятное доказательство в том смысле, что непонятно, как его придумать.
Мы собираемся использовать $m(X) = \{f : X \to \mathbb{R}, \sup_{x \in X} |f(x)| < +\infty\}$

$$||f||_{m(X)} = ||f||_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

$m(X)$ — полное пространство.
Каждой точке мы сопоставим функцию. Вот такая идея! $\varphi : X \to m(X)$. Оно же будет изометрическим вложением, то есть будет сохранять расстояния.

Сначала будет маленькое облегчающее предположение про X, от которого мы потом откажемся. Пусть X — ограниченное, то есть $\exists\, M > 0$ т.ч. $\forall\, x, y \in X\ \rho(x, y) \leq M$. Единственная цель предположения — формула для φ будет чуть проще. Вообще, можно было бы обойтись и без него.
$t \in X, t$ — фиксирован, $f_t(x) = \rho(x, t)$. При фиксированном t — это функция на X. Именно сюда наше отображение будет отображать t. Одной точке — целая функция, понятно?

$$\varphi(t) := f_t(x) \text{ т.е. } \varphi : t \to f_t(x)$$
$$|f_t(x)| \leq M \Rightarrow f_t \in m(X)$$

Самое главное. Проверим, что отображение сохраняет расстояния. Это очень легко. Возьмём 2 точки.

$$\text{Пусть } t, s \in X, \quad ||f_t - f_s||_\infty = \sup_{x\in X} |\rho(x, y) - \rho(x, s)|$$
$$|\rho(x, t) - \rho(x, s)| \leq \rho(t, s), \ \text{ Пусть } x = t \Rightarrow |\rho(t, t) - \rho(t, s)| = \rho(t, s)$$

$$\Rightarrow ||\varphi(t) - \varphi(s)||_\infty = \rho(t, s) \Rightarrow \varphi \text{ — изометрическое вложение}$$

Посмотрим, что будет, если откажемся от этого облегчающего предположения. Надо будет чуть исправить отображение φ. X — любое метрическое пространство. $a \in X$ — фиксированная точка.
$t \in X, f_t(x) = \rho(x, t) - \rho(x, a) \Rightarrow |f_t(x)| \leq \rho(a, t) \Rightarrow f_t \in m(X)$

Раньше мы могли так брать и не вылетать из пространства из-за ограниченности. Вычтем эту штуку, чтоыб попасть, куда надо.

$$t, s \in X \Rightarrow f_t(x) - f_s(x) = \rho(x, t) - \rho(x, s) \overset{(1)}{\Rightarrow} ||f_t - f_s||_\infty = \rho(s, t)$$

Пополнение X: $\overline{\varphi(X)}^{||\cdot||_\infty} = Z, (Z, ||\cdot||_\infty)$ □

Таким образом, изучение метрических пространств можно свести к изучению подмножества пространства непрерывных функций.

Замечание 3.4. Забегая далеко вперёд. $(X, ||\cdot||)$ — нормированное, X^* — множество непрерывных линейных функционалов на X, X^* — полное (ВСЕГДА).

Мы построим каноническое вложение $\pi : X \to \underbrace{(X^*)^*}_{\text{полное}}$, $\overline{\varphi(x)}^{X^{**}}$ — пополнение X.

3.7. Теорема о вложенных шарах

Когда-то в анализе была теорема Кантора о том, что если есть последовательность вложенных друг в друга отрезков, то их пересечение не пусто. Мы докажем похожее утверждение для метрических пространств. Оказывается, то утверждение было связано с полнотой вещественной прямой $\mathbb{R}$. (X, ρ) — метрическое пространство, $r > 0, x \in X$ Введём стандартное обозначение замкнутого шара.

$$D_r(x) = \{y \in X : \rho(x, y) \le r\}$$

Теорема 3.11 (О вложенных шарах)**.** (X, ρ) — метрическое пространство. X — полное $(| \Leftrightarrow (\forall \{D_n\}_{n=1}^{\infty}, D_n = D_{r_n}(x_n))$, $D_{n+1} \subset D_n, \lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0 \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{+\infty} D_n \ne \varnothing)$. По сранению с теоремой Кантора у нас есть дополнительное предположение о стремлении к нулю, которое здесь важно, а на прямой было как данность.

Доказательство. $\Rightarrow$ $\quad X$ — полное

$$\{D_n\}_{n=1}^{\infty}, D_n = D_{r_n}(x_n), D_{n+1} \subset D_n, \lim_{n\to\infty} r_n = 0$$

Надо проверить, что центры шаров образуют фундаментальную последовательность, то есть что $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальная.
Пусть $\varepsilon > 0 \quad \exists\ N \in \mathbb{N} \quad r_n < \varepsilon$ при $n \ge N$.

$$(n > N \ \wedge\ m > N) \Rightarrow (x_n \in D_n \ \wedge\ x_m \in D_n) \Rightarrow \rho(x_n, x_m) \le$$
$$\le \rho(x_n, x_N) + \rho(x_m, x_N) \le 2\varepsilon$$

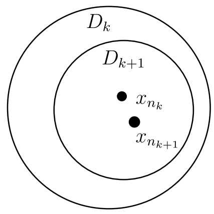
$$X \text{ — полное } \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} x_n = x$$

$$\text{любое фиксированное } m \in \mathbb{N} \quad x_n \in D_m\, \forall\, n \ge m, D_m \text{ — замкнутое}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty, n \ge m} x_n = x \in D_m$$

$$\Rightarrow x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} D_m$$

$\Leftarrow$
Ничего кроме определения для доказательства полноты у нас нет. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальная. Возьмём достаточно быстро убывающую последовательность $\varepsilon_k = \frac{1}{2^k}$. Существует $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}, \rho(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) <$



$\frac{1}{2^{k+1}}$.
$D_k = D_{\varepsilon_k}(x_{n_k})$

$$\begin{cases} y \in D_{k+1} \Rightarrow \rho(y, x_{n_{k+1}}) \le \frac{1}{2^{k+1}} \\ \rho(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < \frac{1}{2^{k+1}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\rho(y, x_{n_k}) \le \rho(y, x_{n_{k+1}}) + \rho(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) < \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^k}$$
$$\Rightarrow y \in D_k \Rightarrow D_{k+1} \subset D_k$$

Мы взяли произвольный элемент из D_{k+1} и показали, что он принадлежит D_k, то есть показали вложенность элементов последовательности.

$$\Rightarrow \exists\, x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} D_k \quad \rho(x, x_{n_k}) \le \frac{1}{2^k} \Rightarrow \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$$

По свойству фундаметнальных последовательностей из первой лекции $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ □

Замечание 3.5. В условиях теоремы пересечение вложенных шаров $\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$ состоит из одной точки.

Доказательство. Пусть $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n, \Rightarrow \rho(x, x_n) \in r_n, \lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. А мы знаем, что предел в метрическом пространстве единственный. □

Замечание 3.6. Условие, что $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$ в теореме существенно.

Пример 3.5 (Замкнутые множества). $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}, F_n$ — замкнутое, $F_{n+1} \subset F_n, F_n \subset \mathbb{R}, \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \varnothing, F_n = [n, +\infty)$

Пример 3.6 (По теореме)**.**

$$X[1.+\infty) \quad \rho(x,y)=\begin{cases}1+\frac{1}{x+y}, & x\neq y\\ 0, & x=y\end{cases}$$

Проверим, что ρ — метрика. x,y,z

$$\rho(x,y)+\rho(y,z)=1+\frac{1}{x+y}+1+\frac{1}{y+z}>1+1>1+\frac{1}{x+z}=\rho(x,z)$$

Проверяем полноту. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальная, $\varepsilon=\frac{1}{2}\Rightarrow$

$$\exists\ N\in\mathbb{N}:(n\geq N\ \wedge\ m\geq N)\rho(x_n,x_m)<\frac{1}{2}\Rightarrow\left(\rho(x_n,x_N)<\frac{1}{2}\ \wedge\ \rho(x_m,x_N)<\frac{1}{2}\right)\Rightarrow$$

$$x_N=x_{N+1}=x_{N+2}=\dots$$
$$\Rightarrow\exists\lim_{n\to\infty}x_n=X_N\Rightarrow(X,\rho)\text{ — полное}$$

Полноту проверили.
$r_n=1+\frac{1}{2n},x_n=n;D_n=D_{r_n}(n),h\in D_n$. Пусть $x\neq n,x\in D_n\Rightarrow\rho(x,x_n)=1+\frac{1}{x+n}\leq 1+\frac{1}{2n}$

Замечание 3.7 (Домашнее задание)**.** Если $(X,||\cdot||)$ — банахово, то $D_{n+1}\subset D_n\{D_n\}_{n=1}^{\infty}\Rightarrow\bigcap_{n=1}^{\infty}D_n\neq\varnothing$ (требование $\lim\limits_{n\to\infty}r_n=0$ лишнее)

3.8. Сепарабельные пространства

(X,ρ) — метрическое пространство,

Определение 3.16 (A плотно в C)**.** $A\subset X,C\subset X$. A плотно в C, если $C\subset\overline{A}\Leftrightarrow$

$$\forall\,x\in C\,\forall\,\varepsilon>0\,\exists\,a\in A\,\rho(x,A)<\varepsilon\Leftrightarrow\forall\,\varepsilon>0\,C\subset\bigcup_{a\in A}B_\varepsilon(a)$$

Любой элемент C можно сколь угодно хорошо приблизить элементами из A.

Определение 3.17 (A всюду плотно в C)**.** A — всюду плотно в X, если $\overline{A}=X$

Чем же полезно это свойство? Если хотят доказать свойство для X, то часто доказывают сначала для всюду плотного подмножества.

Определение 3.18 (Сепарабельное пространство)**.** (X, ρ) — **сепарабельное**, если $\exists\, E \subset X, E = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \overline{E} = X$

Теорема 3.12. $n \in \mathbb{N}, q \leq p \leq +\infty$,

$$l_n^p \text{ — сепарабельное}$$

Доказательство.

$$l_n^p = (\mathbb{R}^n, ||\cdot||_p) = \{x = (x_1, \dots, x_n), x_j \in \mathbb{R}, ||x||_p\}$$
$$E = \mathbb{Q}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n), x_j \in \mathbb{Q}\}$$

Если $(\mathbb{C}^n, ||\cdot||_p), \tilde{\mathbb{Q}} = \{x + iy,\ x, y \in \mathbb{Q}\}, E = \tilde{\mathbb{Q}}^n$ □

Теорема 3.13. F — финитные последовательности, $1 \leq p \leq +\infty$

$$(F, ||\cdot||_p) \text{ — сепарабельно}$$

Доказательство. $E = \bigcup_{n=1}^{\infty}, \mathbb{Q}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_{N(x)}, 0, 0, \dots,), x_j \in \mathbb{Q}\}$. Попросту говоря, все финитные последовательности, координаты которых рациональны. □

Теорема 3.14. $l^p, 1 \leq p < +\infty, C_0$ — сепарабельные

Доказательство. На прошлой лекции мы доказали, что

$$(F, ||\cdot||_p), \overline{F}^{||\cdot||_p} = l^p \text{ при } 1 \leq p < +\infty$$
$$\begin{cases} E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}^n \text{ — всюду плотно в } F \\ F \text{ — всюду плотное в } l^p \end{cases} \Rightarrow$$
$$E \text{ всюду плотно в } l^p, 1 \leq p < +\infty$$

Почему любой элемент из l^p может быть приближен финитной последоватностью? Мы ее просто отрезаем. □

Ответ на упражнение для читателя, которое было на прошлой лекции: F — подпространство в алгебраическом смысле, $F \subset l^\infty$, $\overline{F}^{||\cdot||_\infty} = C_0$

$$x_0 \in C_0 \Leftrightarrow x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

берем первые m координат и дополняем их нулями

$$x^{(m)} = (x_1, \dots, x_m, 0, 0, \dots, 0, \dots) \Rightarrow x^{(m)} \in F$$

$$||x - x^{(m)}||_\infty = \sup_{k>m} |x_k| \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Остаётся вопрос, почему C_0 — замкнутое множество. Можно в лоб, а можно по-учёному рассудить.

$$\text{пусть } \left\{y^{(m)}\right\}_{m=1}^{\infty}, y^{(m)} \in C_0,\ y^{(m)} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} y \text{ в } C_0$$

$$\Rightarrow \lim_{m\to\infty} ||y - y^{(m)}||_\infty = 0 \qquad y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}, \lim_{n\to\infty} y_n = 0 \ ???$$

А это равномерная сходимость на множестве натуральных чисел, то есть это тот случай, когда можно менять местами пределы.

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{m\to\infty} \underbrace{\lim_{n\to\infty} y_n^{(m)}}_{=0} = 0$$

Упражнение: C — сепарабельное, $C \subset l^\infty$

Теорема 3.15. l^∞ — не сепарабельное

Какой бы шарик из X мы бы не предъявили, там всегда будет элемент всюду плотного множества.

Доказательство.

$$A \subset \mathbb{N} \quad X_n^A = \begin{cases} 1, n \in A \\ 0, n \notin A \end{cases}$$

Мощность $\{A, A \subset \mathbb{N}\}$ — континуум ($>$ счётное). Это и будет центр пересекающихся шариков. Посмотрим, каким будет расстояние между двумя разными точками.

$$A \subset \mathbb{N}, C \subset \mathbb{N}, A \notin \mathbb{C}$$

$$X_n^A - X_n^c = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases} \Rightarrow ||x^A - x^C||_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |X_n^A -_n^C| = 1$$

То есть если 2 множества не равны, то расстояние между ними — единица.

$$B_{\frac{1}{2}}(x^A) \cap B_{\frac{1}{2}}(x^C) = \varnothing$$

Мы предъявили несчётный набор дизъюнктных шариков. E — всюду плотно в $l^\infty \Rightarrow \forall\, A \subset \mathbb{N}\, \exists\, e_A \in B_{\frac{1}{2}}(x^A)$

$$A \neq C \Rightarrow e_A \neq e_C, \qquad \underbrace{\{e_A\}_{a\subset\mathbb{N}}}_{\text{несчётно}} \subset E \Rightarrow E \text{ несчётно}$$

То, что у всех шариков одинаковый радиус — это просто приятный бонус. □

Теорема 3.16. (X, ρ) — сепарабельное, $Y \subset X \Rightarrow (Y, \rho)$ — сепарабельное.

Доказательство. $\exists\ E = \{x_n\}_{n=1}^\infty$ — всюду плотно в X, $x_0 \in X$

$$\rho(x_n, Y) = \inf_{y\in Y} \rho(x_n, y) \Rightarrow$$
$$\exists\ \{y_{n,k}\}_{k=1}^\infty \quad \lim_{k\to\infty} \rho(x_n, y_{n,k}) = \rho(x_n, Y)$$
$$y_{n,k} \in Y,\ F = \{y_{n_k}\}_{n,k} \ \text{— счётное },F \subset Y$$

Проверим, что F — всюду плотно в Y. Пусть $y \in Y, \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\, x_n$: $\rho(y, x_n) < \varepsilon$. Из этого неравенства мы делаем вывод, что $\rho(x_n, Y) < \varepsilon$. Значит, $\exists\, k : \rho(x_n, y_{n,k}) < \varepsilon \Rightarrow$

$$\rho(y, y_{n,k}) \leq \rho(y, x_n) + \rho(x_n, y_{n,k}) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

□

Следствие 3.1. X — бесконечное множество $\Rightarrow m(X)$ — не сепарабельное.

Доказательство. Можно слово в слово повторить доказательство для l^∞, но мы воспользуемся последними доказанными теоремами.

$$\exists\ \{a_j\}_{j=1}^{\infty}, a_j \in X, a_j \neq a_i \text{ при } i \neq j$$
$$Y = \{f \in m(X), f(x) = 0 \text{ если } x \neq a_j\} \sup_{j\in\mathbb{N}} |f(a_j)| < +\infty$$
$$Y \text{ изометрично } l^\infty, f \in Y, T(f) = \{f(a_j)\}_{j=1}^{\infty} \in l^\infty$$
$$Y \text{ — не сепарабельно } \Rightarrow \text{ и по последней теореме}$$
$$m(X) \text{ — не сепарабельно}$$

□

Теорема 3.17.
$$C[a,b] \text{ — сепарабельно}$$

1 часть.

$$L = \{\text{ ломаные }\} \quad a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b \quad \{y_k\}_{k=0}^{n}, y_k \in \mathbb{R}$$
$$L(x) \text{ — ломаные}$$
$$L(x_k) = y_k,\ k = 0, 1, \ldots, n \quad l(x) \text{ линейная на } [x_k, x_{k+1}]$$

Отметим, что L — всюду плотное множество в пространстве непрерывных функций. Это связано с равномерной непрерывностью. Никаких надежд на то, что оно будёт счётным нет.

$$\text{пусть } f \in C[a,b],\ \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\, \delta > 0 : |x - y| < \delta$$
$$\Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$
$$\exists\ \{x_k\}_{k=0}^{n} \text{ — разбиение} \quad x_{k+1} - x_k < \delta$$
$$y_k := f(x_k) \quad L(x) \text{ — ломаная}$$
$$\Rightarrow |f(x) - L(x)| < \varepsilon \Rightarrow ||f - L||_\infty \leq \varepsilon \Rightarrow \overline{\mathcal{L}} = C[a,b]$$

как сделать так, чтобы множество ломаных было счётным? возьмём в качестве вершин элементы $\mathbb{Q}$

$$E = \{L \in \mathcal{L},\ x_k, y_k \in \mathbb{Q}\} \text{ — счетное множество}$$
$$\begin{cases} \mathcal{L} \subset \overline{E} \\ \overline{\mathcal{L}} = C[a,b] \end{cases} \Rightarrow E \text{ — всюду плотно, т.е. } \overline{E} = C[a,b]$$

□

2 часть. по т. Вейерштрасса замыкание многочленов — тоже пространство непрерывных функций.

$$\mathcal{P} = \{p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k\} \quad \overline{\mathcal{P}} - C[a,b]$$

$$E = \{p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,\ a_k \in \mathbb{Q}\}$$

$$\begin{cases} \mathcal{P} \subset \overline{E} \\ \overline{\mathcal{P}} = C[a,b] \end{cases} \Rightarrow \overline{E} = C[a,b]$$

□

3.9. Нигде не плотные множества

Определение 3.19. (X,ρ) — метрическое пространство. $A \subset X, A$ — **нигде не плотно** в X, если

$$\forall\, B_r(x) \text{ при } r > 0, x \in X \quad B_r(x) \not\subset \overline{A} \Leftrightarrow \operatorname{Int}(\overline{A}) = \varnothing \Leftrightarrow$$

Если мы рассмотрим замыкание, никакого шарика там не будет. Иначе: если мы рассмотрим внутренность замыкания, она будет пустой.

$$\forall\, r > 0, x \in X \quad B_r(x) \,\exists\, B_{r_1}(x_1) \subset B_r(x), B_{r_1}(x_1) \cap A = \varnothing$$
$$\Leftrightarrow \forall\, r > 0, x \in X D_r(x) \,\exists\, D_{r_1}(x_1) \subset D_r(X), D_{r_1}(x_1) \cap A = \varnothing$$

Скоро докажем связь между нигде не плотными множествами и полными пространствами. Но сперва определение, которое не будет часто встречаться, но сам факт — полезный.

Определение 3.20 (множество первой категории)**.** $M \subset X, (X,\rho)$. M — **множество первой категории**, если

$$M = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j, E_j \text{ нигде не плотно в } X$$

M — **множество второй категории**, если M нельзя представить в виде объединения счетного числа нигде не плотных множеств.

Теорема 3.18 (Бэр, о категориях)**.** (X, ρ) — полное $\Rightarrow X$ — множество второй категории.

Доказательство. Можно было бы даже от противного. Но мы возьмём семейство $\{M_j\}_{j=1}^{\infty}$, M_j — нигде не плотно в X, $E - \bigcup_{j=1}^{\infty} M_j$. Мы докажем, что найдётся хоть одна точка, которая принадлежит X и не принадлежит E. Это и будет обозначать, что X невозможно представить в виде такого объединения.

$$x_0 \in X \quad D_0 = \{y : \rho(x_0, y) \le 1\}$$
$$M_1 \text{ — нигде не плотно } \Rightarrow \exists\, D_1 = D_{r_1}(x_1) \subset D_0, D_1 \cap M_1 = \varnothing$$
$$r_1 < 1$$

Теперь мы то же соображение применим к множеству M_2, которое тоже нигде не плотно

$$\exists\, D_2 = D_{r_2}(x_2) \subset D_1, D_2 \cap M_2 = \varnothing$$
$$r_2 < \frac{1}{2}$$

и так далее $\begin{cases} \{D_n\}_{n=1}^{\infty}, D_n = D_{r_n}(x_n), D_{n+1} \subset D_n \\ D_n \cap M_n = \varnothing, r_n < \frac{1}{n} \end{cases}$ по теореме о вложенных шарах $\Rightarrow \exists\, x \in \cap_{n=1}^{\infty} D_n, (x \in D_n \wedge x \in X \setminus E) \Rightarrow x \notin M_n \,\forall\, n \Rightarrow x \notin E$ □

3.10. Полные семейства элементов

Теперь мы будем понимать полноту в совершенно другом смысле. Сначала вспомним, что такое линейная оболочка пространства.

Определение 3.21 (Линейная оболочка)**.** X — линейное пространство над $\mathbb{R}(\mathbb{C})$. Рассмотрим семейство $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — семейство элементов, $x_\alpha \in X$.

$$\mathcal{L}\,\{x_\alpha\}_{\alpha \in A} = \left\{ \sum_{k=1}^{n} c_k x_{\alpha_k}, c_k \in \mathbb{R}(\mathbb{C}), n \in \mathbb{N} \right\}$$

Определение 3.22 (Полное семейство). $(X, ||\cdot||)$, $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — **полное семейство**, если $\overline{\mathcal{L}\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}} = X$. То есть линейная оболочка всюду плотна в X.

Пример 3.7. $C[a,b]$, $\{x^n\}_{n=0}^{+\infty}$ — полное семейство в $C[a,b]$, так как $\mathcal{P} = \mathcal{L}\{x^n\}_{n=0}^{+\infty}$, $\overline{\mathcal{P}} = C[a,b]$

Пример 3.8. l^p, $1 \le p < +\infty$, C_0

$$e_n = (1, 0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_{n}, 0, \dots), \{e_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ — полное семейство}$$

$$\mathcal{L}\{e_n\}_{n=1}^{\infty} = F \text{ — финитная последовательность}$$

Упражнение: C — что будет полным семейством?

Утверждение 3.1. $(X, ||\cdot||)$ - нормированное пространство. В нём существует $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — полное семейство

$$X \text{ — сепарабельное}$$

Доказательство. Рассмотрим линейную оболочку $L = \mathcal{L}\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{x = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, c_j \in \mathbb{R}(\mathbb{C})\right\}$. $\overline{L} = X$.

$$E = \{x = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, c_j \in \mathbb{Q}\} \text{ — счётное всюду плотное}$$

$$(L \subset \overline{E} \wedge \overline{L} = X) \Rightarrow \overline{E} = X$$

□

Замечание 3.8. $l^\infty, E = \{x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in \mathbb{Q}, \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < +\infty\}$. $\overline{E} = l^\infty$, E — не счётное.

3.11. Полные и плотные множества в L^p

Сначала небольшое замечание. (X, U, μ) — пространство с мерой $e \in U$ — измеримые множества, $\chi_e(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$ — характеристическая функция. $\chi \in L^\infty(X, \mu)$, $\forall\, e \in U$

$$\chi_e \in L^p(X, \mu) \text{ при } 1 \le p < +\infty \Leftrightarrow \int_X (\chi_e(x))^p d\mu < +\infty \Leftrightarrow \mu e < +\infty$$

Теорема 3.19. (X, U, μ) — пространство с мерой $\Rightarrow$

$$\{\chi_e\}_{e\in U} \text{ — полное семейство в } L^\infty(X,\mu)$$
$$\{\chi_e\}_{e\in U, \mu E < +\infty} \text{ — полное семйество в } L^p(X,\mu), 1 \le p < +\infty$$

Для доказательства этой теоремы нужно будет вспомнить теорему Лебега из анализа (она у нас уже была).

Теорема 3.20 (Лебег). $\{h_n(x)\}_{n=1}^\infty$ — измеримые, $\varphi(x)$. $\int_X \varphi(x)d\mu < +\infty, |h_n(x)| \le \varphi(x)$ п.в. на X

$$h_n(x) \underset{n\to\infty \text{ п.в. по } \mu}{\longrightarrow} h(x) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_X h_n(x)d\mu = \int_X h(x)d\mu$$

Доказательство. Вспомним конструкцию, которая была в математическом анализе. f — измеримая, $f(x) \ge 0, x \in X$. Рассмотрим разбиение множества X, а по нему построим соотвествующую простую функцию

$$n \in \mathbb{N} \quad e_k = \left\{x \in X : \frac{k}{n} \le f(x) < \frac{k+1}{n}\right\}, k = 0, 1, \dots, n^2 - 1$$

$$e_{n^2} - \{x : f(x) \ge n\} \Rightarrow X = \bigcup_{k=0}^{n^2} e_k, e_k \cap e_j = \varnothing (k \ne j)$$

Теперь построим измеримые функции, потом они будут простыми.

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{k}{n}\chi_{e_k} \quad 0 \le g_n(x) \le f(x), x \in X$$

$f(x) \le g_n(x) + \frac{1}{n}, x \in \bigcup_{k=0}^{n^2-1} e_k$

Теперь все готово, чтобы обсудить случай L^∞. Пусть $f \in L^\infty(X,\mu) \Rightarrow$ $n \ge ||f||_\infty \Rightarrow \mu(e_{n^2}) = 0. \Rightarrow |f(x) - g_n(x)| \le \frac{1}{n}$ для п.в. $x \in X$
$\Rightarrow ||f - g_n||_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, g_n \in \mathcal{L}\{\chi_e\}_{e\in U}$
$\Rightarrow f \in \overline{\mathcal{L}\{\chi_e\}_{e\in U}}$
Посмотрим теперь, что происходит с конечными p. Тут вспоминаем теорему Лебега, она была верна для интеграла Лебега, но верна и для

произвольной меры.

$$\begin{cases} f(x) \in L^p(X,\mu), 1 \le p < +\infty & |f(x) - g_n(x)|^p \le |f(x)|^p \\ g_n(x) \underset{\text{п.в.}}{f(x)} & \Rightarrow |f(x) - g_n(x)|^p \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{cases} \overset{\text{Лебег}}{\Rightarrow}$$

все, что надо — убедиться, что мера конечная $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\int_X |f-g_n|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = 0$

$$f \in L^p \Rightarrow \mu e_k < +\infty \quad f(x) \ge \frac{k}{n}, x \in e_k \Rightarrow \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \ge \left(\int_{e_k}\left(\frac{k}{n}\right)^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$\frac{k}{n}(\mu e_k)^{\frac{1}{p}} \Rightarrow \mu e_k < +\infty$$
$$\Rightarrow f \in \overline{\mathcal{L}\left\{\chi_e\right\}_{e\in U, \mu e < +\infty}}$$

Теперь покажем, что для произвольных f рассуждение тоже верно. Рассмотрим замыкание линейное оболчоки

$$\begin{cases} f : X \to \mathbb{R}, \Rightarrow f = f_+ - f_-, f_+(x) \ge 0, f_-(x) \ge 0 \\ f : X \to \mathbb{C} \Rightarrow f = u + iv; u, v : X \to \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow$$
$$\forall\, f \in L^p, f \in \overline{\mathcal{L}\left\{\chi_e\right\}_{e\in U}}$$
$$(p = \infty\, \forall\, e, p < +\infty, \mu e < +\infty)$$

□

Теперь, зная эту теорему, посмотрим, какое множество будет полным в пространстве l^∞

Следствие 3.2. $l^\infty, A \subset \mathbb{N}, X^A = \left\{x_n^A\right\}_{n=1}^\infty, X_n^A = \begin{cases} 1, & n \in A \\ 0, & n \notin A \end{cases} \Rightarrow$

$$\left\{X^A\right\}_{A\subset\mathbb{N}} \text{ — полное семейство в } l^\infty$$

Доказательство. $l^\infty = L^\infty(\mathbb{N}, \mu), \mu(n) = 1\,\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \forall\, A \subset \mathbb{N}, A$ — измеримо

$$\chi_A = X^A \Rightarrow \left\{X^A\right\}_{A\subset\mathbb{N}} \text{ — полное семейство}$$

□

Теорема 3.21. $(\mathbb{R}^n, U, \lambda)$, λ — классическая мера Лебега. U — измеримые по Лебегу множества.

$$\mathcal{R} = \left\{\Delta = \prod_{j=1}^{n}[a_j, b_j), a_j < b_j; a_j, b_j \in \mathbb{R}\right\} \text{ — множество ячеек}$$

$$\Rightarrow \{\chi_\Delta\}_{\Delta\in\mathcal{R}} \text{ — полное семейство в } L^p(\mathbb{R}^n, \lambda), 1 \le p < +\infty$$

Достаточно рассмотреть характеристические множества ячеек.

Доказательство. Собираемся приблизить множество линейной комбинацеий характеристических функций ячеек. Вспомним определение внешней меры.

$$e \in U, \lambda(e) < +\infty$$

$$\lambda(e) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\lambda(\Delta_k), e \subset \bigcup_{k=1}^{\infty}\Delta_k, \Delta_k \in \mathcal{R}, \Delta_k \cap \Delta_j = \varnothing\right\}$$

Сначала просто по определению нижней грани. $\forall\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\ \{\Delta_k\}_{k=1}^{n}$.
$\lambda(e) \le \sum_{k=1}^{\infty}\lambda(\Delta_k) < \lambda(e) + \varepsilon$.
$e \subset \cup_{k=1}^{\infty}\Delta_k, \Delta_k \in \mathcal{R}, \Delta_k \cap \Delta_j = \varnothing$ при $k \ne j$.

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty}\Delta_k, e \subset A, \lambda(A \setminus e) < \varepsilon$$

$$\exists\, N \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=N+1}^{\infty}\lambda(\Delta_k) < \varepsilon, B = \bigcup_{k=1}^{n}\Delta_k$$

$$\Rightarrow \lambda(A \setminus B) < \varepsilon$$

$$||\chi_e - \chi_b||_p \le ||\chi_e - \chi||_p - ||\chi_A - \chi_B||_p \le \left(\int_{A\setminus e}\mathbb{1}d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{A\setminus B}\mathbb{1}d\mu\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon^{\frac{1}{p}} + \varepsilon^{\frac{1}{p}} = 2\varepsilon^{\frac{1}{p}}$$

$$\chi_b = \sum_{k=1}^{N}\chi_{\Delta_k} \in \mathcal{L}\{\chi_\Delta\}_{\Delta\in\mathcal{R}}$$

$$\begin{cases}\overline{\mathcal{L}\{\chi_e\}_{e\in U}} = L^p \\ \chi_e \in \overline{\mathcal{L}\{\chi_\Delta\}_{\Delta\in\mathcal{R}}}\end{cases} \Rightarrow \overline{\mathcal{L}\{\chi_\Delta\}_{\Delta\in\mathcal{R}}} = L^p, 1 \le p < +\infty$$

$\square$

Следствие 3.3. $E \subset \mathbb{R}^n$, E — измеримые по Лебегу, $1 \leq p < +\infty$

$$\Rightarrow L^p(E, \lambda) \text{ — сепарабельные}$$

(λ — мера лебега)

Доказательство. Докажем, что $L^p(\mathbb{R}^n, \lambda)$ — сепарабельное.

$$\mathcal{R} = \left\{ \Delta = \prod_{j=1}^{n} [a_j, b_j), a_j < b_j,\ a_j, b_j \in \mathbb{R} \right\} \text{ — полные семейства в } L^p$$

Теперь мы возьмём только такие ячейки, полуинтервалы которых мы перемножаем, имеют рациональные концы. Пока что можем сказать, что это счётное множество.

$$R_0 = \left\{ \Delta = \prod_{j=1}^{n} [a_j, b_j), a_j < b_j,\ a_j, b_j \in \mathbb{Q} \right\} \text{ — счётное множество}$$

$$\Delta \in \mathcal{R} \quad 0$$
$$\Rightarrow \exists\, \Delta_0 \in R_0, \Delta \subset \Delta_0, \lambda(\Delta_0 \setminus \Delta) < \varepsilon$$
$$\Rightarrow ||\chi_{\Delta_0} - \chi_\Delta||_p = ||\chi_{\Delta_0 \setminus \Delta}||_p = \left(\int_{\Delta_0 \setminus \Delta} \mathbb{1} dx \right)^{\frac{1}{p}} = (\lambda(\Delta_0 \setminus \Delta))^{\frac{1}{p}} < \varepsilon^{\frac{1}{p}}$$
$$\Rightarrow \forall\, \Delta \in \mathcal{R}\, \chi_\Delta \in \overline{\mathcal{L}\left\{\chi_\Delta\right\}_{\Delta \in R_0}}$$

$$R_0 \text{ — полное счётное семейство} \overset{\text{утверждение}}{\Rightarrow} L^p(\mathbb{R}^n, \lambda) \text{ — сепарабельное.}$$

$$E \subset \mathbb{R}^n, E \text{ — измеримое }, f \in L^p(E, \lambda)$$
$$\text{пусть } f(x) = 0, x \in \mathbb{R}^n \setminus E \Rightarrow f \in L^p(\mathbb{R}^n, \lambda)$$
$$\Rightarrow L^p(E, \lambda) \text{ — подпространство } L^p(\mathbb{R}^n, \lambda) \Rightarrow L^p(E, \lambda) \text{ — сепарабельно}$$

□

Определение 3.23. (X, U, μ) — пространство с мерой. (X, ρ) — метрическое пространство. μ — **борелевская мера**, если (G — открытое $\Rightarrow G \in U$)

β — минимальная σ-алгебра, содержащая все открытые множества. β — **борелевские множества**, то есть $\beta \subset U$.

Чем же хороши борелевские меры? Оказывается, они безумно связаны с непрерывными функциями

Замечание 3.9. Пусть $f : X \to \mathbb{R}, f$ — непрерывная $\Rightarrow f^{-1}((c, +\infty)), c \in \mathbb{R}, (c,_\infty)$ — открытое в $\mathbb{R}$. Определение непрерывной функции из топологии: прообраз любого открытого множества открыт. Так как прообраз f открыт в $X \Rightarrow f$ — измеримая по μ, если μ — борелевская.

Замечание 3.10. λ — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$, тогда λ — борелевская.

Еще более специальное определение. Этим свойством мера Лебега тоже обладает.

Определение 3.24 (регулярная мера)**.** (X, U, μ), (X, ρ), μ — борелевская. μ — **регулярная мера**, если $\forall\, e \in U$

$$\sup_{\{F \subset e, F \text{ — замкнутое}\}} \{\mu(F)\} = \mu e = \inf_{\{e \subset G, G \text{ — открытое}\}} \mu G$$

Замечание 3.11. λ-мера Лебега — регулярная.

На самом деле эти 2 свойство друг из друга следуют, но мы это доказывать не будем.

Теорема 3.22. (X, U, μ), (X, ρ), μ — регулярная мера $\Rightarrow$ непрерывная функция плотна В $L^p(X, \mu), 1 \leq p < +\infty$.

$$\overline{C(X) \cap L^p(X\mu)}^{\|\cdot\|_p} = L^p(X, \mu)$$

Доказательство. Мы уже знаем, что полное семейство — это семейство характеристических функций всех измеримых функций, и мы будем этим изо всех сил пользоваться. Возьмём какую-то характеристическую функцию из множества и ее будем приближать непрерывными функциями.
$\{\chi_e\}_{e \in U, \mu e < +\infty}$ — полное семейство.
пусть $e \in U, \mu e < +\infty$, $0, \mu$ — регулярная $\Rightarrow \exists\, F \subset e \subset G, F$ — замкнутое, G — открытое. $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$

Когда мы попадем в $X \setminus G$ она будет равна нулю.

$$\varphi(x) = \frac{\rho(x, X \setminus G)}{\rho(x, X \setminus G) + \rho(x, F)}$$

Нужно позаботиться о том, чтобы знаменатель не был равен нулю.
$\rho(x, A)$ — непрерывная функция $\forall\, A \subset X$. $X \setminus G$ — замкнутое, F — замкнутое. Если $\rho(x, F) = 0 \Rightarrow x \in F \Rightarrow x \notin X \setminus G \Rightarrow \rho(x, X \setminus G) > 0$

$$\Rightarrow \rho(x, X \setminus G) + \rho(x, F) > 0\, \forall\, x \in X \Rightarrow \varphi \in C(X)$$

$\varphi(x) = 0, x \in X \setminus G, \varphi(x) = 1, x \in F \quad \forall\, x \in X\; 0 \leq \varphi(x) \leq 1$

Понятно, что модуль $\varphi(x)$ совпадает с характеристической функцией множества e.

$$\chi_e(x) - \varphi(x)| \leq 1 \quad \forall\, x \in X$$

$$\chi_e(x) - \varphi(x) = 0 \quad x \in F \text{ или } x \in X \setminus G$$

$$\Rightarrow ||\chi_e - \varphi||_p = \left(\int_X |\chi_e(x) - \varphi(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{G\setminus F} |\chi_e(x) - \varphi(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq (\mu(G \setminus F))^{\frac{1}{p}} < \varepsilon^{\frac{1}{p}}$$

$$\Rightarrow \chi_e \in \overline{C(X)}^{||\cdot||_p}$$

Тем самым мы доказали, что $\chi_e(x)$ может быть приближена непрерывными функциями. Может быть, стоить отметить, что $\mu G < \mu e + \varepsilon < +\infty \quad \int_X |\varphi(x)|^p d\mu - \int_G |\varphi(x)|^p d\mu < \mu G \Rightarrow \varphi \in L^p(X, \mu)$

□

Раз утверждение верно для любых регулярных мер, то оно верно и для меры Лебега.

Глава 4

Метрические компакты

Топологический компакт: из любого подпокрытия можно выбрать конечное подпокрытие.

Утверждение 4.1 (из топологии)**.**
1. (X, ρ) – метрическое пространство, $K \subset X$, K – компакт $\Leftrightarrow$ K – счётно-компактен, то есть

$$\forall \left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in K \quad \exists \left\{x_{n_j}\right\}_{j=1}^{\infty} \text{ т.ч. } \exists \lim_{j\to\infty} x_{n_j} = x_0,\, x_0 \in K$$

2. K – компакт $\Rightarrow$ K – ограниченное замкнутое множество.

Пример 4.1. $\mathbb{R}^n$, K – компакт $\Leftrightarrow$ K – ограниченное, замкнутое

Замечание 4.1. НИ В КОЕМ СЛУЧАЕ из того, что K – ограниченное замкнутое, не следует, что K – компакт

Замечание 4.2. $l^2 = \left\{x = \left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}, ||x||_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty, x_n \in \mathbb{R}(\mathbb{C})\right\}$

$$D = \left\{x \in l^2 : ||x||_2 \le 1\right\} \text{ – ограниченное, замкнутое}$$

$e_n = (0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_{n}, 0, 0, \dots)$, $n \ne m \quad ||e_n - e_m||_2 = \sqrt{2} \Rightarrow \forall \left\{e_{n_j}\right\}$ – не фундаментальная. Тогда $\nexists \lim\limits_{j\to\infty} e_{n_j} \Rightarrow D$ – не компакт.

Ещё одно *напоминание*, кто такие относительно компактные множества.

Определение 4.1 (относительный компакт). $(X, \rho), A \subset X, A$ – относительно компактно, если $\overline{A}$ – компакт. Или можно сказать

$$\Leftrightarrow \forall \left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in A \, \exists \left\{x_{n_j}\right\}_{j=1}^{\infty}, \exists \lim_{j \to \infty} x_{n_j} = x_0, x_0 \in X$$

Предел не обязательно принадлежит A. А в компакте предел обязательно лежит в A.

Мы получим новое описание компактных и относительно компактных множеств. В $\mathbb{R}^n$ мы описывали относительные компакты. Для описания компакта нужно добавить замыкание.

Еще несколько определений:

Определение 4.2 (ε-сеть). (X, ρ) – метрическое пространство. $A \subset X, \varepsilon > 0$
F – ε-сеть для A, если

$$\forall a \in A \, \exists f \in F : \rho(a, f) < \varepsilon$$
$$(\Leftrightarrow \forall a \in A B_\varepsilon(a) \cap F \neq \varnothing) \Leftrightarrow (A \subset \bigcup_{f \in F} B_\varepsilon(f))$$

Определение 4.3. A – **вполне ограниченное множество**, если для $\forall \varepsilon > 0 \, \exists$ конечная ε-сеть для A.

Описание компактных и относительно-компактных множеств в терминах вполне ограниченных — как раз наша главная цель. Мы будем использовать это новое описание так: если мы в полном метрическом пространстве, то там относительная компактность и вполне ограниченность — одно и то же. А проверять вполне ограниченность — гораздо проще, чем проверять относительную компактность. Предъявим ε-сеть и всё!

Замечание 4.3. (X, ρ), A – вполне ограниченное $\Rightarrow$ A – ограничено.

Пример 4.2. $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_2) = l_n^2 \quad A \subset \mathbb{R}^n$. A – ограниченное $\Leftrightarrow$ A вполне ограниченное

Доказательство. A – ограниченное $\Leftrightarrow \exists M > 0, \forall x - (x_1, \ldots, x_n) \in A \Rightarrow |x_j| \leq M$
$A \subset \mathbb{Q} = \{|x_j| \leq M, 1 \leq j \leq n\}$ Как же построить ε–сеть?

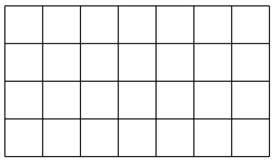


Рис. 4.1: классный поясняющий рисуночек

Пусть $\varepsilon > 0$, $Q = \bigcup Q_j, l$ – сторона Q_j

$$\operatorname{diam} Q_j = \sup_{x,y \in Q_j} \rho(x,y) = \sqrt{n} \cdot l < \varepsilon \Rightarrow l < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$$

$$l = \frac{M}{N}, N \in \mathbb{N}, \exists\, N : \frac{M}{N} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \Rightarrow$$

$$F \text{ – вершины } Q_j \text{ – } \varepsilon\text{-сеть}$$

EC = equicontinuous □

Убедимся в пространстве l^2

Пример 4.3. $D \subset l^2, D = \{x \in l^2 : ||x||_2 \leq 1\}$ Убедимся, что D – не вполне ограниченное.

Доказательство.

$$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}, e_n = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{n}, 0, \ldots), n \neq m, ||e_n - e_m|| = \sqrt{2}$$

$$B_{\frac{1}{2}}(e_n) \cap B_{\frac{1}{2}}(e_m) = \varnothing$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}, F \text{ – } \frac{1}{2}\text{-сеть для } D$$

$\Rightarrow \forall\, n \,\exists\, f_n \in F \cap B_{\frac{1}{2}}(e_n)$, $f_n \neq f_m (n \neq m)$ так как $B_{\frac{1}{2}}(e_n) \cap B_{\frac{1}{2}}(e_m) = \varnothing$

$$\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F \Rightarrow F \text{ – не конечное}$$

□

Теперь посмотрим для l^∞

Пример 4.4. $\Pi = \left\{x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, |x_n| < \frac{1}{2^n}\right\} \subset l^2$. Проверим, что Π – вполне ограничено. 0

$$\exists\, M \in \mathbb{N} \quad \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

$$\Pi^* = \{x = \{x_1, \ldots, x_N, 0, 0, \ldots\}\}, |x_j| \leq \frac{1}{2^j}, 1 \leq j \leq N \quad x_{N+k} = 0, k \in \mathbb{N}$$

Если мы забудем про нули, то можем думать, что Π^* лежит в $\mathbb{R}^n$, и там оно ограниченное, а значит и вполне ограниченное. $\Pi^* \subset \mathbb{R}^n$, Π^* – ограниченное $\Rightarrow$ вполне ограниченное $\Rightarrow \exists\, F \subset \Pi^*$ – конечная ε-сеть. Докажем, что F – 2ε-сеть для Π.

$$x \in \Pi \quad \Rightarrow x = \underbrace{(x_1, \ldots, x_N, 0, \ldots)}_{y} + \underbrace{(0, 0, \ldots, 0, x_{N+1}, x_{N+2}, \ldots)}_{z}$$
$$||z||_2 < \varepsilon \quad y \in \Pi^* \Rightarrow \exists\, f \in F : ||y - f||_2 < \varepsilon \Rightarrow$$
$$||x - f||_2 = ||(y - f) + z||_2 \leq ||y - f||_2 + ||z||_2 < 2\varepsilon$$
$$\Rightarrow \Pi \text{ – вполне ограничено}$$

Таким образом, все множества можно описать в пространстве l^p. Перед тем, как доказывать основную теорему, несколько свойств вполне ограниченных множеств.

Свойство 4.1.
1. A – вполне ограничено $\Rightarrow \overline{A}$ – вполне ограничено
2. $A \subset Y \subset X, A$ – вполне ограничено в $X \Rightarrow A$ – вполне ограниченное в Y.
3. A – вполне ограничено $\Rightarrow (A, \rho)$ – сепарабельно.

1 свойство. $A \subset X, \varepsilon > 0$. F – конечная ε-сеть для A. Проверим, что F – (2ε-сеть) для $\overline{A}$

$$\text{пусть } x \in \overline{A} \Rightarrow \exists\, y \in A : \rho(x, y) < \varepsilon, \exists\, f \in F : \rho(y, f) < \varepsilon$$
$$\Rightarrow \rho(x, f) \leq \rho(x, y) + \rho(y, f) < 2\varepsilon$$

□

2 свойство. Проблема в том, что надо двигать точки. Мы уже так делали, когда доказывали сепарабельность. $A \subset Y \subset X, \varepsilon > 0, \{x_k\}_{k=1}^n$ – ε-сеть для A, $x_k \in X$
$A \subset \bigcup_{k=1}^n B_\varepsilon(x_k)$, если $A \cap B_\varepsilon(x_k) \neq \varnothing$, то пусть $y_k \in A \cap B_\varepsilon(x_k)$ (если $= \varnothing$, то не будем выбирать)

Мы найдем ε-сеть из точек множества A, тогда она точно будет обслуживать и Y. Как же и куда сдвигать точки?

$E = \{y_k\}_{k=1}^n$

$$x \in A \Rightarrow \exists\, x_k : \rho(x, x_k) < \varepsilon \Rightarrow A \cap B_\varepsilon(x_k) \neq \varnothing \Rightarrow y_k \in B_\varepsilon(x_k) \Rightarrow \\ \rho(x_k, y_k) < \varepsilon \Rightarrow \rho(x, y_k) \leq \rho(x, x_k) + \rho(x_k, y_k) < 2\varepsilon \Rightarrow \\ E \text{ -- } (2\varepsilon)\text{-сеть для } A, E \subset A$$

□

3 свойство. $n \in \mathbb{N}, F_n$ – $\left(\frac{1}{n}\right)$-сеть для A, F_n – конечное.

$$F \text{ (счетное)} = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \text{ -- плотно в } A, \text{ то есть } A \subset \overline{F}$$

□

Утверждение 4.2 (о разбиении)**.** $(X, \rho), A \subset X, \varepsilon > 0$. F – конечная ε-сеть для $A \Rightarrow$

$$\exists\ \{C_j\}_{j=1}^n \quad A = \bigcup_{j=1}^n C_j \quad C_j \cap C_k = \varnothing, j \neq k, \operatorname{diam} C_j \leq 2\varepsilon, C_j \neq \varnothing$$

Доказательство.

$$F = \{x_k\}_{k=1}^n, A \subset \bigcup_{k=1}^n B_\varepsilon(x_k)$$
$$C_1 = A \cap B_\varepsilon(x_1)$$
$$C_2 = (A \cap B_\varepsilon(x_2)) \setminus C_1$$
$$C_k = A \cap B_\varepsilon(x_k) \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{k-1}\right) \quad k = 2, \ldots, n$$

если $C_k = \varnothing$, то забудем о нём. $C_k \subset B_{\varepsilon(x_k)} \Rightarrow \operatorname{diam} C_k \leq 2\varepsilon$ □

Теперь у нас всё готово для доказательства теоремы о том, как описывать компакты в терминах вполне ограниченных множеств.

Теорема 4.1 (Хаусдорф). (X, ρ) – метрическое пространство, $A \subset X$.

A – компакт $\Leftrightarrow$

1. A полное, то есть $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A, \{x_n\}$ – фундаментальная $\exists \lim x_n = x_0 \in A$
2. A – вполне ограничено

Высока вероятность, что спросят на экзамене эту теорему, пытаясь вытянуть.

Доказательство. $\Rightarrow$
A – компакт, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – фундаментальная, $x_n \in A$.
A – компакт $\Rightarrow \exists \left\{x_{n_j}\right\}, \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_j} = x_0, x_0 \in A$. Тогда по свойствам фундаментальных последовательностей $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow (A, \rho)$ – полное метрическое пространство. Проверили первое условие. Теперь надо проверить второе: сначала покроем наш компакт безумным количеством шариков, а они ведь открытые множества, и среди них существует конечное подпокрытие.

$$\text{пусть } \varepsilon > 0 \quad A \subset \bigcup_{a\in A} B_\varepsilon(a) \wedge A - \text{компакт } \Rightarrow, \exists \ \{a_j\}_{j=1}^{n}, a_j \in A:$$

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{n} B_\varepsilon(a_j) \Rightarrow F = \{a_j\}_{j=1}^{n} - \varepsilon\text{-сеть для } A$$

Это была тривиальная часть теоремы. $\Leftarrow$.
$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in A$. Собираемся применять лемму о разбиении. $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$. По лемме $\exists \left\{C_j^{(1)}\right\}_{j=1}^{N_1}$. $A = \bigcup_{j=1}^{N_1} C_j^{(1)}, \operatorname{diam} C_j^{(1)} \leq 1$. Когда-то в детстве мы азнимались бесконечным делением пополам. Тут будем делать то же самое. $\exists j : C_j^{(1)}$ содержит бесконечное число элементов $\{x_n\}$. $A_1 :=$

$C_j^{(1)}$.

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2^2}, \text{ по лемме о разбиении к } A_1 \Rightarrow \exists \left\{C_j^{(2)}\right\}_{j=1}^{N_2}$$

$$\operatorname{diam} C_j^{(2)} \leq \frac{1}{2} \quad A_1 = \bigcup_{j=1}^{N_2} C_j^{(2)}$$

$$\exists\, 1 \leq j \leq N_2 \quad C_j^{(2)} \text{содержит бесконечное количетсво элементов в } x_n$$

$$\text{и так далее } \{A_m\}_{m=1}^{\infty}, A_{m+1} \subset A_m, \operatorname{diam}_{A_m} \leq \frac{1}{2^m}$$

$$A_m \text{ содержит бесконечное число элементов } \{x_n\}_{n=1}^{\infty} (*)$$

$$x_{n_1} \in A_1, \quad \exists\, n_2 > n_1 : x_{n_2} \in A_2 \text{ т.к. } (*)$$

$$\text{и так далее } \exists\, n_k \text{ т.ч. } n_k > n_{k-1} \quad x_{n_k} \in A_k$$

$$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}, x_{n_k} \in A_k, \operatorname{diam} A_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \quad A_{k+1} \subset A_k$$

$$\Rightarrow \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \text{ – фундаментальная } \wedge A \text{ – полное}$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0, x_0 \in A$$

□

Часто описывают компакт, но фактически говорят об относительный компкте. Для описания компакта, опять же, надо просто добавить замкнутость.

Следствие 4.1. (X, ρ) – метрическое, $A \subset X$.

1. A – относительно компактно $\Rightarrow A$ вполне ограничено
2. (X, ρ) – полное, A – относительно компактно $\Leftrightarrow A$ вполне ограничено

Будем изо всех сил пользоваться теоремой Хаусдорфа.

1 утверждение. A – относителько компактно, $\Rightarrow \overline{A}$ – компакт, тогда по теореме Хаусдорфа $\overline{A}$ – вполне ограничено, $A \subset \overline{A} \Rightarrow A$ вполне ограничено. □

2 утверждение. (X, ρ) – полное, A – вполне ограничено, тогда по ранее доказанному свойству ($\overline{A}$ – вполне ограничено $\wedge$ $\overline{A}$ – замкнутое в $X \Rightarrow \overline{A}$ – полное) $\Rightarrow$ по теореме Хаусдорфа $\overline{A}$ компакт $\Rightarrow A$ – относительно компактно. □

Оказывется, можно вместо конечных ε-сетей можно утверждать чуть большее.

Следствие 4.2. (X, ρ) – полное, $A \subset X$. Если для $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists$ относительно компактная ε-сеть, то A – относительно компактно

Доказательство. $0, F$ – ε-сеть для A. F – относителько компактно $\Rightarrow F$ вполне ограничено, $\exists\, E$ – конечная ε-сеть для $F \Rightarrow E$ – (2ε)-сеть для $A \Rightarrow A$ – вполне ограничено $\Rightarrow$ – A – относительно компактно. □

4.1. Относительно компактные множества в $C(K)$

Определение 4.4. (K, ρ) – метрический компакт. $C(K) = \{f : K \to \mathbb{R}(\mathbb{C}), f \text{ – непрерывная}\}, ||f|| = \max_{x \in K} |f(x)| \Phi \subset C(K)$. Φ – **равностепенно непрерывно**, если

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0\, \forall\, f \in \Phi, \forall\, x, y \in K, \rho(x, y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

EC – equicontinuous.

Раностепенная непрерывность отличается от равномерной непрерывности тем, что δ не зависит от f, но от ε конечно зависит. Некоторый вариант теоремы Арцелла-Асколи, который, возможно, доказывали на дифурах:

Теорема 4.2 (Асколи-Арцелла). K – компакт, (K, ρ), $\Phi \subset C(K)$. Φ – относительно компактно $\Leftrightarrow$

1. Φ – ограниченное в $C(K)$
2. Φ – равностепенно непрерывно ($\Phi \in EC$ equicontinuous)

Доказательство. С самого начала отметим, что $C(K)$ – полное. Вместо проверки относительной компактности Φ будем проверять вполне ограниченность.

$\Rightarrow$

Φ – относительно компактно $\Rightarrow \Phi$ – вполне ограничено $\Rightarrow \Phi$ – ограничено, то есть $\exists M \geq 0$ т.ч. $||f|| \leq M\, \forall\, f \in \Phi \Leftrightarrow \forall\, x \in K, \forall\, f \in \Phi\, |f(x)| \leq$

M. $\varepsilon > 0\,\exists\,\varepsilon$-сеть $\{\varphi_j\}_{j=1}^n, \varphi_j \in C(K)$, φ_j – равномерно непрерывна
$\exists\,\delta_j > 0$
$x, y \in K, \rho(x, y) < \delta_j \Rightarrow |\varphi_j(x) - \varphi_j(y)| < \varepsilon$
$\delta = \min_{1\le j\le n} \delta_j$
здесь лекция закончилась
при описании относительного компакта мы получили такой результат: $C(K)$ – полное $\Rightarrow \Phi$ относительный компакт $\Leftrightarrow \Phi$ – вполне ограничено. Будем этим пользоваться.
$\Rightarrow \Phi$ – вполне ограниченное $\Rightarrow \Phi$ – ограничено
Пусть $\varepsilon > 0 \Rightarrow\ \exists\ \{\varphi_j\}_{j=1}^n$-$\varepsilon$-сеть для Φ. $\varphi_j \in C(K) \Rightarrow \varphi_j$ – равномерно непрерывна
$\exists\,\delta_j > 0\,\forall\,x, y \in K, \rho(x, y) < \delta_j \Rightarrow |\varphi_j(x) - \varphi_j(y)| < \varepsilon$

$$\delta = \min_{1\le j\le n} \delta_j, \delta > 0$$

$$\text{пусть } f \in \Phi \Rightarrow\ \exists\, j : ||f - \varphi_j|| < \varepsilon \text{ то есть}$$

надо оценить этот модуль через неравенство треугольника; справа, очевидно, будет 3 слагаемых

$$\max_{x\in K} |f(x) - \varphi_j(x)| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\text{пусть } x, y \in K, \rho(x, y) < \delta, |f(x) - f(y)| \le \underbrace{|f(x) - \varphi_j(x)|}_{<\varepsilon} +$$
$$+ \underbrace{|\varphi_j(x) - \varphi_j(y)|}_{<\varepsilon \text{ так как } \delta\le\delta_j} + |\varphi_j(y) - f(y)| < 3\varepsilon$$

мы и проверили равностепенную непрерывность. Тривиальная часть доказательства закончена.
$\Leftarrow$
Φ – ограничено $\Rightarrow\ \exists\, M > 0 : f \in \Phi \Rightarrow ||f|| \le M \Rightarrow |f(x)| \le M\,\forall\,x \in K$. Надо по определению построить конечную ε-сеть в множестве непрерывных функций. Но мы воспользуемся двумя облегчающими хитростями: 1. $\Phi \subset C(K)$, а $C(K) \subset m(K)$, и если множество имеет ε-сеть в большем пространстве, то в меньшем и подавно. Более того, сеть можно построить из элементов меньшего множества. Мы выберем ограниченные функции. 2. выберем относительно компактную ε-сеть в $m(K)$ вместо конечной в $C(K)$, и этого будет достаточно.

$$\varepsilon > 0 \quad \Phi \subset C(K) \subset m(K) = \{f : K \to \mathbb{C}, \sup_{x\in K} |f(x)| < +\infty\}$$

$$\varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta \text{ из определения } (EC)$$

$$\text{применим к этой парочке лемму о разбиении}(K, \rho), \delta > 0$$

$$\exists\ \{C_j\}_{j=1}^n, \operatorname{diam} C_j < \delta, K = \bigcup_{j=1}^n C_j, C_j \bigcap C_i = \varnothing (j \neq i), C_j \neq \varnothing$$

$$\Psi = \left\{ g(x) = \sum_{j=1}^n y_j \chi_{C_j}(x) \right\} \subset m(K), y_j \in \mathbb{C}, 1 \le j \le n$$

$$g \in \Psi, ||g||_\infty = \sup_{x \in K} |g(x)| = \max_{1 \le j \le n} |y_j| = ||y||_{l_n^\infty}, y = (y_1, \ldots, y_n)$$

$$F : l_n^\infty \to \Psi, F(y) = \sum_{j=1}^n y_j \chi_{C_j}(x)$$

Мы выяснили, что F биекция, изометрия, линейное.

$Q = \{y = (y_1, \ldots, y_n), |y_j| \le M\}$ полидиск, что бы это пока не значило

$$Q \text{ – компакт }, F \text{ – непрерывна } \Rightarrow F(Q) \text{ – компакт в } m(K)$$

$$E := F(Q), E = \left\{ g(x) = \sum_{j=1}^n y_j \chi_{C_j}(x), |y_j| \le M \right\}$$

вот у нас есть компакт E, и мы собираемся проверить, что он и будет ε-сетью для Φ. Будет полезно в каждом множестве выбрать по точечке. Пусть $x_j \in C_j, f \in \Phi, y_j := f(x_j)$.

$$g(x) = \sum_{j=1}^n f(x_j) \chi_{C_j}(x), g \in E, |y_j| \le M$$

Пусть $x \in K \Rightarrow \exists\, j, x \in C_j \Rightarrow g(x) = f(x_j) \Rightarrow$

$$|f(x) - g(x)| = |f(x) - f(x_j)| < \varepsilon \text{ т.к. } \rho(x, x_j) < \delta$$

Вот это и то, что было обещано. E – компактная ε-сеть. □

Замечание 4.4. Условия теоремы не зависимы.

Пример 4.5. $C[0,1]$. $f_n(x) = x^2 + n$, $\{f_n\}$ – равностепенно непрерывны, но $\{f_n\}$ не ограничено.

ограниченная, но не равностепенно непрерывная

Пример 4.6. $C[0,1], f_n(x) = x^n$. $\{f_n\}$ – ограничены, но не равностепенно непрерывны.

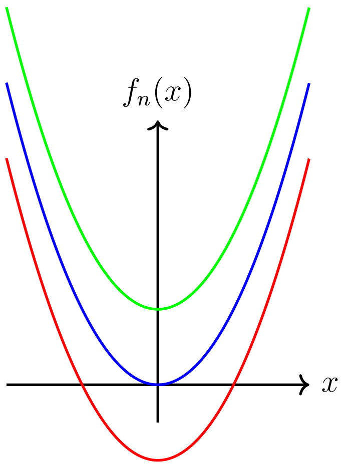


Рис. 4.2: Пример 4.5

Теорема 4.1 (достаточные условия равностепенной непрерывности)**.** (K, ρ) – компакт, $\Phi \subset C(K)$. Сначала какие-то абстрактные множества, потом будут более конкретные.

1. Если $\exists\, M > 0, \alpha > 0, \beta > 0$ такие что

$$\forall\, f \in \Phi, (\forall\, x, y \in K \rho(x, y) < \beta) \Rightarrow |f(x) - f(y)| \le M(\rho(x, y))^{\alpha} \\ \Rightarrow \Phi \in (EC)$$

2. $C[a, b], \Phi \subset C[a, b]$, пусть $\exists\, L > 0$

$$\forall\, f \in \Phi\, \exists\, f'(x), x \in (a, b), |f'(x)| \le L \Rightarrow \Phi \in (EC)$$

3. чуть более общий случай. $K \subset G \subset \mathbb{R}^n$, K – компакт, G – открытое.

$$\exists\, L > 0 : \forall\, f \in \Phi, \exists \left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\right| \le L (1 \le j \le n), \forall\, x \in G \Rightarrow \Phi \in (EC)$$

4. про аналитические функции. предполагать можно будет гораздо меньшее. $K \subset G \subset \mathbb{C}$, G – открытое, K – компакт.

$$\exists\, L > 0, f \in \Phi, f \text{ аналитическая в } G, \exists\, f'(x), \underbrace{|f(x)|}_{\text{тут}} \le L, \forall\, x \in G$$

ТУТ НЕ ПРОИЗВОДНАЯ, НА ЭКЗАМЕНЕ ЧАСТО ОШИБАЮТСЯ!!!!

Аналитичность – фантастическое свойство, в отличие от, например, дифференцируемости. Именно из-за неё ТАМ как раз и не производная.

1. Пусть $\varepsilon > 0$, $x, y \in K$, пусть $\rho(x,y) < \beta$, пусть $\delta < \beta, \rho(x,y) < \delta, \delta(\varepsilon) = ?$.

$$f \in \Phi \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq M\rho(x,y)^\alpha < M\delta^\alpha \leq \varepsilon$$
$$\Rightarrow \delta \leq \left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^{\frac{1}{\alpha}},$$
$$\delta(\varepsilon) = \min\left\{\beta, \left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right\},$$

□

Будем сводить остальные доказательства к первому пункту, находя M, α, β. Второй пункт теперь совсем лёгкий.

2. $\Phi \subset C[a,b]$, $x, y \in [a,b], f \in \Phi$. Для оценки разности $f(x) - f(y)$ воспользуемся теоремой Лагранжа.

$$f(x) - f(y) = f'(c)(x-y) \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq |f(c)||x-y| \leq L|x-y|$$
$$M = L, \alpha = 1, (\beta - \forall) \overset{1}{\Rightarrow} \Phi \in (EC)$$

□

3. Пусть $z, y \in K$ такие что $[z,y] \subset G, f \in \Phi$ Оценим разность $f(y) - f(z)$.

$$\Gamma : [0,1] \to [y,z]$$
$$\Gamma(t) = ty + (1-t)z, \Gamma(0) = z, \Gamma(1) = y$$
опять можем воспользоваться теоремой Лагранжа
$$f(y) - f(z) = f(\Gamma(1)) - f(\Gamma(0)) = (f(\Gamma(c)))'_t$$
$$(f(\Gamma(t)))'_t = (f(ty + (1-t)z))'_t = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\ldots)(y_j - z_j)$$
$$|f(\Gamma(t))'| \leq L\sum_{j=1}^{n}|y_j - z_j| \overset{\text{КБШ}}{\leq} L\sqrt{n}\left(\sum_{j=1}^{n}(y_j - z_j)^2\right)^{\frac{1}{2}} = L\sqrt{n}\rho(y,z)$$

Если выбртаь β достаточно маленьким, то наш отрезок будет лежать в этом компакте. $F = \mathbb{R}^n \setminus G$ – замккнутое, $\rho(x,F)$ – непрерывная

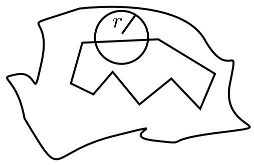


Рис. 4.3: Утопленность компакта

функция в $\mathbb{R}^n \Rightarrow \rho(x,F)$ непрерывна на $K \Rightarrow \exists\, x_o \in K, \rho(x_0,F) = \min_{x\in K}\rho(x,F)$

$$x_0 \notin F \Rightarrow \rho(x_0,F) > 0, r := \rho(x_0,F)$$
$$\forall\, x \in K\; B_r(x) \subset G, \beta = r$$
$$\rho(x,y) < r \Rightarrow y \in B_r(x) \subset G \Rightarrow$$
$$\text{отрезок } [x,y]B_r(x) \subset G$$
$$\Rightarrow |f(x) - f(y)| \le L\sqrt{n}\rho(x,y)$$

z и y, которые с самого начала были выбраны вместо x и y, чтобы не смущаться из-за dx, обратно превратились в x и y, все же поняли? На пальцах: наш компакт настолько утоплен в G, что если мы возьмём шарик радиуса r, то шарик всё еще лежит в G. □

4. Букву r, которую мы нашли в предыдущем пункте, будем изо всех сил использовать. $K \subset G \subset \mathbb{C}$. В 3 пункте выяснили, что $\exists\, r > 0 : B_r(x) \subset G\, \forall\, x \in K, \beta = \frac{r}{3}$.

$$x, y \in K, \rho(x,y) < \beta, \gamma = \{\zeta \in \mathbb{C} : |x - \zeta| = 2\beta\}$$
$$f \in \Phi$$

разницу собираемся оценивать с помощью формулу Коши, поэтому никакие проивзодные и не нужны!!!

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - x}d\zeta$$
$$f(y) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - y}d\zeta$$
$$f(x) - f(y) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(\zeta)\frac{x-y}{(\zeta - x)(\zeta - y)}d\zeta$$

оцениваем самым грубом образом, отправляя модули под интегралы

$$|f(\zeta)| \leq L, |\zeta - x| = 2\beta, |z - y| \geq \beta$$

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2\pi} L \cdot |x - y| \cdot |\gamma| \cdot \frac{1}{(2\beta) \cdot \beta} = |x - y| L \frac{(2\beta) \cdot 2\pi}{(2\pi)(2\beta)\beta} = \\ = \frac{L}{\beta} |x - y|$$

и в обозначениях 1 пункта получаем $M = \frac{L}{\beta}, \alpha = 1, \beta = \frac{r}{3}, \overset{(1)}{\Rightarrow} \Phi \in (EC)$ □

Перед тем, как мы покинем относительно компакты, пара упражнений, которые на экзамене спрашивали в качестве задачи на 5.

Утверждение 4.3. $1 \leq p < +\infty$. $\Phi \subset l^p, \Phi$ – относительно компактно $\Leftrightarrow$

1. Φ – ограничено в l^p
2. $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, N \in \mathbb{N} : \forall x = \{x_j\}_{j=1}^{\infty} \in \Phi, \left(\sum_{j=N+1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$

Утверждение 4.4. $\Phi \subset C_0, \Phi$ – относительно компактно $\Leftrightarrow$

1. Φ – ограничено
2. $\varepsilon > 0 \, \exists \, N \in \mathbb{N} : \forall x \in \Phi \quad \sup_{j \geq N+1} |x_j| < \varepsilon$

Мы сейчас находимся на перепутье функционального анализа. Можно отправиться в Гильбертовы пространства, в линейные операторы или еще куда-то. Изучить-то придётся всё, но мы начинаем линейные операторы.

Часть II

Линейные операторы

Глава 5

Линейные операторы в линейных пространствах

Первый парагарф про линейные пространства будет совсем простой, здесь будут самые тривиальные свойства, следующие из линейности.

5.1. Линейные операторы в линейных пространствах

Определение 5.1 (Линейный оператор). X, Y — линейны над $k(k = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C})$. $A : X \to Y, A$ — **линейный оператор**, если

$$A(\alpha x + \beta z) = \alpha Ax + \beta Az, \quad x, z \in X, \alpha, \beta \in k$$

$\mathrm{Lin}(X, Y)$ — множество линейных операторов из X в Y. Также нам понадобится линейное пространство над k

$$\alpha \in k, A \in \mathrm{Lin}(X, Y), (\alpha A)(x) := \alpha Ax, \mathbb{0}(x) = 0 \text{ (0 в пространстве Y)}$$
$$A, B \in \mathrm{Lin}(X, Y), (A + B)(x) := Ax + Bx$$

Если $X = Y$, пишем только $\mathrm{Lin}(X)$.

Пример 5.1 (интегральный оператор). $C[a, b], K(s, t) \in C([a, b] \times [a, b])$

$$f \in C[a, b], (\mathcal{K}f)(s) = \int_a^b k(s, t) f(t) dt$$
$$(\mathcal{K}f)(s) \in C[a, b], \mathcal{K} \in \mathrm{Lin}(C[a, b])$$

Пример 5.2 (оператор дифференцирования). $X = C^{(1)}[0,1] = \{f : f' \in C[0,1]\}$, $Y = C[0,1]$. $f \in X, D(f) = f', D \in \mathrm{Lin}(X,Y)$

Пример 5.3 (оператор вложения). $l^1 \subset l^2$, $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < +\infty, x \in l^1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty \Rightarrow x \in l^2$

$$Ax = x, A \text{ оператор вложения } l^1 \overset{A}{\hookrightarrow} l^2$$

$$\forall\, 1 \le p_1 < p_2 \le +\infty \Rightarrow l^{p_1} \overset{A}{\hookrightarrow} l^{p_2}, Ax = x$$
$$A \in \mathrm{Lin}(l^{p_1}, l^{p_2})$$

Пример 5.4 (оператор, но не линейный). $\mathrm{x} = X$ — линейное пространство, $x_0 \in X, x_0 \ne 0$, $Ax = x + x_0 \Rightarrow A$ — не линейный.

Перед тем, как доказывать теорему, еще одно небольшое определение.

Определение 5.2 (Выпуклое множество). $B \subset X, X$ — линейное пространство. B — **выпуклое** , если

$$\forall\, x, z \in B, \forall\, t, 0 \le t \le 1 \Rightarrow tx + (1-t)z \in B$$

то есть отрезок, соединяющий любые две точки, полностью лежит в этом множестве

Теорема 5.1 (простейшие свойства линейного оператора). X, Y — линейные пространства над k ($\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), $A \in \mathrm{Lin}(X,Y)$

1. $L \subset X, L$ — подпространство в $X \Rightarrow A(L)$ — подпространство в Y (образ подпространства — подпространство)
2. $M \subset Y, M$ — подпространство в $Y \Rightarrow \underbrace{A^{-1}(M)}_{\text{прообраз}}$ — подпространство в X
3. $B \subset X, B$ — выпуклое $\Rightarrow A(B)$ — выпуклое в Y
4. $C \subset Y, C$ — выпуклое $\Rightarrow A^{-1}(C)$ — выпуклое в X
5. пусть A — биекция $\Rightarrow A^{-1} \in \mathrm{Lin}(Y, X)$

Все 5 свойств доказывать не будем, покажем только несколько и скажем, что остальные доказываются аналогично.

1. L — подпространство, $y, v \in A(L), \alpha \in k$. Наша мечта — проверить $(\overset{?}{\Rightarrow} \alpha y + v \in A(L))$, не обязательно писать α и β.

$$\Rightarrow \exists\, x, y \in L : (Ax = y \wedge Au = v) \Rightarrow A(\alpha x + u) = \alpha Ax + Au = \alpha y + v$$
$$\alpha x + u \in L \Rightarrow A(\alpha x + u) \in A(L) \Rightarrow \alpha y + v \in A(L)$$

$\square$

3 проверяется тютелька в тютельку как 1, а 2 — как 4, поэтому проверим 4.

4. C — выпуклое, $x, u \in A^{-1}(C), 0 \le t \le 1$.

$$(y := Ax \wedge v := Au) \quad y, v \in C \Rightarrow ty + (1-t)v \in C$$
$$A(tx + (1-t)u) = tAx + (1-t)Au = ty + (1-t)v \in C$$
$$\Rightarrow tx + (1-t)u \in A^{-1}(C) \Rightarrow A^{-1}(C) \text{ выпуклое}$$

$\square$

5. $y, v \in Y \Rightarrow x = A^{-1}y, u = A^{-1}v \Rightarrow (Ax = y \wedge Au = v) \Rightarrow$

$$\text{пусть } \alpha \in k, \quad A(\alpha x + u) = \alpha Ax + Au = \alpha y + v \Rightarrow$$
$$\alpha x + u = A^{-1}(\alpha y + v) = \alpha A^{-1}y + A^{-1}v \Rightarrow$$
$$A^{-1} \in \mathrm{Lin}(Y, X)$$

$\square$

Определение 5.3 (Ядро линейного оператора)**.** $A \in \mathrm{Lin}(X, Y)$

$$\mathrm{Ker}\, A = \{x \in X : Ax = 0\} \text{ — ядро } A$$

$$\mathrm{Im}\, A = \{y \in Y : \exists\, x : Ax = y\} = A(X) \text{ — образ } A$$

Следствие 5.1. X, Y — линейные пространства, $\Rightarrow \mathrm{Ker}\, A$ — подпространство в X, $\mathrm{Im}\, A$ — подпространство в Y.

Определение 5.4 (произведение операторов)**.** X, Y, Z — линейные пространства

$$X \overset{A}{\to} Y \overset{B}{\to} Z$$

$A \in \mathrm{Lin}(X, Y), B \in \mathrm{Lin}(Y, Z)$, $C = BA, C(x) := B(Ax), x \in X \Rightarrow C \in \mathrm{Lin}(X, Z), C$ — произведение BA

Всё самое тривиальное для операторов в линейных простаранствах мы вспомнили

5.2. Линейные операторы в нормированных пространствах

Линейные операторы в нормированных пространствах — главный объект, который изучает функциональный анализ.

Определение 5.5 (Огранисченный оператор). $(X, ||\cdot||), (Y, ||\cdot||), A \in \mathrm{Lin}(X, Y)$. A — **ограниченный**, если $\forall\, C \subset X, C$ — ограниченное $\Rightarrow A(C)$ — ограниченное в Y.

Оказывается, для операторов ограниченность эквивалентна непрерывности. Казалось бы, ограниченность сильно слабее, но если к ней добавить линейность, то будет аж непрерывность.
Обычно если в теореме 2 свойства, то говорят «если и только если», а если условий несколько, то говорят «равносильность». Подлые англосаксы говорят Following Conditions are Equivalent.

Теорема 5.2 (эквивалентность ограниченности и непрерывности линейного оператора). $(X, ||\cdot||), (Y, ||\cdot||), A \in \mathrm{Lin}(X, Y)$. Следующие условия равносильны (СУР) (FCE)

1. A непрерывен в точке 0
2. A непрерывен $\forall\, x \in X$
3. $\exists\, C > 0 : ||Ax|| \le C||x|| \,\forall\, x \in X$
4. A ограниченный
5. $\exists\, r > 0\; A(B_r(0))$ — ограниченное множество в Y.

Доказательство очень простое, и, конечно, строится на линейности

$1 \Rightarrow 2$. A непрерывен в точке 0. Пусть $\varepsilon > 0\, \exists \delta > 0$, $||x|| < \delta \Rightarrow ||Ax|| < \varepsilon$ $(A(\mathbb{0})) = \mathbb{0}$. утверждается, что те же самые ε и δ подходят.

$$\text{пусть } x_0 \in X, \text{проверим, что } A \text{ непрерывен в } x_0$$
$$\text{пусть } ||x - x_0|| < \delta \Rightarrow ||A(x - x_0)|| < \varepsilon \Rightarrow ||Ax - Ax_0|| < \varepsilon$$

$\square$

$2 \Rightarrow 1$ очевидно

$1 \Rightarrow 3$. Пусть $\varepsilon > 0 \, \exists \, \delta > 0 : ||x|| < \delta \Rightarrow ||Ax|| < \varepsilon$.

$$z \in X, z \neq 0 \quad x = \frac{z}{||z||} \cdot \delta \Rightarrow ||x|| = \delta \Rightarrow ||Ax|| < \varepsilon$$
$$\Rightarrow ||A\left(\frac{z}{||z||} \cdot \delta\right)|| < \varepsilon \Rightarrow ||Az|| < \frac{\varepsilon}{\delta}||z|| \text{т.е.} C = \frac{\varepsilon}{\delta}$$

□

$3 \Rightarrow 4$. $B \subset X$, B — ограниченное, то есть $\exists \, M > 0 : (\forall \, x \in B \wedge ||x|| < M) \overset{3}{\Rightarrow} ||Ax|| \leq C||x|| \leq CM \, \forall \, x \in B \Rightarrow \{A(B)\}$ — ограниченное. □

$4 \Rightarrow 5$ очевидно ($B_r(0)$ — ограниченное)

$5 \Rightarrow 1$. $\exists \, R > 0 \, A(B^x_r(0)) \subset B^y_R(0)$

$$||x|| < r \Rightarrow ||Ax|| < R$$

непрерывность в 0 означает

$$\text{пусть } \varepsilon > 0 \quad ||x|| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow ||Ax|| < \varepsilon$$
$$\delta(\varepsilon) = \varepsilon \cdot \frac{r}{R}$$
$$||z|| < \varepsilon \cdot \frac{r}{R} \Rightarrow ||z \cdot \frac{R}{\varepsilon}|| < r \Rightarrow ||A\left(z \cdot \frac{R}{z}\right)|| < R \Rightarrow ||Az|| < \varepsilon$$

□

с помощью теоремы, которую мы только что доказали, введём норму в этом пространстве.

Определение 5.6 (норма оператора). $(X, ||\cdot||), (Y, ||\cdot||)$

$$\underbrace{\mathcal{B}(X,Y)}_{\text{bounded}} = \{A \in \text{Lin}(X,Y) \wedge A \text{ — ограниченный}\}$$

$A \in \mathcal{B}(X,Y)$

$$||A|| = \inf\{C : C > 0 \wedge ||Ax|| \leq C \, ||x|| \, \forall \, x \in X\}$$

то бишь точная нижняя грань множества величин, на которые наш оператор увеличивает норму элемента.

Раз мы так объявили норму, то надо проверять аксиомы нормы.

Утверждение 5.1. $(X, ||\cdot||), (Y, ||\cdot||), A \in \mathcal{B}(X, Y)$

1. $\forall\, x \in X\, ||Ax|| \leq ||A||||x||$ (то есть inf в определении нормы $=$ min)

2. $||A||$ удовлетворяет аксиомам нормы

Доказательство. x - фиксирован, $\Rightarrow\ \forall\, c > ||A||, ||Ax|| \leq C||x|| \Rightarrow ||Ax|| \leq ||A||\cdot||x||$. Был фиксирован, теперь любой, первое утверждение доказано. Теперь второе.

$$\alpha \in k, \alpha \neq 0, x \in X, x \text{ — фиксирован}$$
$$(\alpha A)(x) = \alpha Ax$$
$$\forall\, x \in X \quad ||(\alpha A)(x)|| = ||\alpha \cdot Ax|| = |\alpha| \cdot ||Ax|| \leq |\alpha| \cdot ||A|| \cdot ||x||$$
$$\Rightarrow ||\alpha A|| \leq |\alpha|||A||$$

Очевидное замечание по слёзной просьбе двух студенток, которые ничего не понимали. Если мы докажем $||Ax|| \leq M||x||\,\forall\, x \in X$, то $||A|| \leq M$

$$\Rightarrow \left|\left|\frac{1}{\alpha}(\alpha A)\right|\right| \leq \frac{1}{|\alpha|}||\alpha A|| \Rightarrow |\alpha|||A|| \leq ||\alpha A||$$
$$\Rightarrow ||\alpha A|| = |\alpha|||A||$$
$$A, B \in \mathcal{B}(X, Y), x \in X$$

$$||(A+B)(x)|| = ||Ax+Bx|| \leq ||Ax||+||Bx|| \leq ||A||\cdot||x||+||B||\cdot||x|| =$$
$$= (||A||+||B||)||x|| \quad \forall\, x \in X$$
$$\Rightarrow ||A+B|| \leq ||A||+||B||$$

Как только есть какая-то константа, то настоящая норма меньше или равна этой константы. $||A|| = 0 \Rightarrow\ \forall\, x \in X\, ||Ax|| \leq ||A|| \cdot ||x|| = 0$. $\Rightarrow Ax = 0\,\forall\, x \in X \Rightarrow A = \mathbb{0} \Rightarrow ||A||$ — настоящая норма □

Теорема 5.3 (вычисление нормы непрерывного оператора)**.** $(X, ||\cdot||), (Y, ||\cdot||), A \in \mathcal{B}(X, Y) \Rightarrow$

$$||A|| = \underbrace{\sup_{\{||x|| \le 1\}} ||Ax||}_{a} = \underbrace{\sup_{\{||x|| < 1\}} ||Ax||}_{b} = \underbrace{\sup_{\{||x|| = 1\}} ||Ax||}_{c} = \underbrace{\sup_{\{x \in X, x \neq 0\}} \frac{||Ax||}{||x||}}_{d}$$

Доказательство. Очевидно $a \ge b, a \ge c, d \ge c$. Докажем $||A|| \ge a \ge b \ge ||A||, \quad ||A|| \ge d \ge c \ge ||A||$.

$$||Ax|| \le ||A|| \cdot ||x|| \le ||A|| \quad \forall\, x, ||x|| \ge 1 \Rightarrow \sup_{\{||x|| \ge 1\}} ||Ax|| \le ||A|| \Rightarrow a \le ||A||$$

Доказали $||A|| \ge a$.
Пусть $\varepsilon > 0\, z \in X, z \neq 0 \Rightarrow \left|\left|\frac{z}{||z||(1+\varepsilon)}\right|\right| = \frac{1}{1+\varepsilon} < 1$

$$\left|\left|A(\frac{z}{||z||(1+\varepsilon)})\right|\right| \le b \Rightarrow ||Az|| \le b(1+\varepsilon)||z|| \quad \forall\, z \in X$$
$$\Rightarrow ||A|| \le b(1+\varepsilon)\,\forall\, \varepsilon > 0 \Rightarrow ||A|| \le b$$

Закончили с первой цепочкой неравенств.
Пусть $x \neq 0 \Rightarrow ||Ax|| \le ||A|| \cdot ||x|| \Rightarrow \frac{||Ax||}{||x||} \le ||A|| \Rightarrow d = \sup_{\{x \neq 0\}} \frac{||Ax||}{||x||} \le ||A||$.

пусть $z \in X, z \neq 0, \left|\left|\frac{z}{||z||}\right|\right| = 1 \Rightarrow ||A\left(\frac{z}{||z||}\right)|| \le c \Rightarrow ||Az|| \le C||z||\forall\, z \in X$

c — супремум по единичной сфере

$$\Rightarrow ||A|| \le C$$

□

Пример 5.5. $C[a, b]$, $h(x) \in C[a, b]$ — фиксированная функция. $f \in C[a, b], M_h(f) := h(x) \cdot f(x)$.

$$M_h \in \text{Lin}(C[a, b])$$

Проверим, что он непрерывен и сосчитаем его норму.

Доказательство.

$$||M_h(f)||_\infty = \max_{x\in[a,b]} |h(x)\cdot f(x)| \leq \max_{x\in[a,b]} |h(x)| \cdot \max_{x\in[a,b]} |f(x)| = ||h||_\infty \cdot ||f||_\infty$$
$$\Rightarrow M_h \in \mathcal{B}(C[a,b]), ||M_h||_{\mathcal{B}(C[a,b])} \leq ||h||_\infty$$

получили непрерывность; раз есть общая константа, не зависящая от f, то мы получаем и оценку для нормы

$$\chi_{[a,b]}(x) = 1\,\forall\, x \in [a,b], \chi_{[a,b]} \in C[a,b], ||\chi_{[a,b]}||_\infty = 1$$
$$||M_h|| \geq ||M_h(f)||\forall\, f, ||f|| = 1 \Rightarrow ||M_h|| \geq ||M_h(\chi_{[a,b]})||_\infty = ||h||_\infty$$
$$\Rightarrow ||M_h||_{\mathcal{B}(C[a,b])} = ||h||_\infty$$

□

Теперь посмотрим на оператор дифференцирования, это очень важный пример.

Пример 5.6. $Y = C[a,b], X = \{f : \exists\, f' \in C[a,b]\}$, $0 \leq a \leq b$

$$X \subset Y, X \text{ — подпространство } Y, \text{ то есть}$$
$$||f||_X = ||f||_Y = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$$
$$D(f) = f' \Rightarrow D \in \mathrm{Lin}(X,Y),$$
$$D(x^n) = nx^{n-1} \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{||D(x^n)||}{||x^n||} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{nb^{n-1}}{b^n} = +\infty$$

при таком определении нормы оператор дифференцирования D не непрерывен.

Пример 5.7. $Y = C[a,b], X = C^{(1)}[a,b]$

$$||f||_X = \max\{||f||_\infty, ||f'||_\infty\}$$
$$D(f) = f' \quad ||D(f)|| = ||f'||_\infty = \max_{x\in[a,b]} |f'(x)| \leq \underbrace{\max\{||f||_\infty, ||f||_\infty\}}_{||f||_X}$$
$$\Rightarrow D \in \mathcal{B}(X,Y), ||D|| \leq 1$$

Теорема 5.4 (вложение пространств в l^p). Пусть $1 \leq p_1 < p_2 \leq +\infty$. $x \in l^p$. Рассмотрим оператор вложения $Ax = x \Rightarrow A \in \mathcal{B}(l^{p_1}, l^{p_2}), ||A|| = 1$.

Доказательство. То, что он линейный, мы уже обсуждали, это очевидно. Удобно будет рассматривать последовательности из единичной сферы. $x \in l^p, x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in \mathbb{C}$. $||x||_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}, 1 \le p < +\infty$. Возьмём не просто последовательность из l^{p_1}, но и такую, что $||x||_{p_1} = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^{p_1} = 1 \quad Ax = x$.

$$\Rightarrow |x_n| \le 1 \Rightarrow (|x_n|^{p_2}) < |x_n|^{p_1}$$

$$||Ax||_{p_2} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_2}} \le \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_2}} = 1 \Rightarrow A \in \mathcal{B}(l^{p_1}, l^{p_2})$$

$$||A|| = \sup_{\{||x||_{p_1}=1\}} ||Ax||_{p_2} \le 1 \Rightarrow ||A||_{\mathcal{B}(l^{p_1}, l^{p_2})} \le 1 \qquad \text{при } p_2 < +\infty$$

$$\text{теперь } p_2 = +\infty \; ||x||_{p_1} = 1 \Rightarrow \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| \le ||x||_{p_1} \Rightarrow ||x||_{\infty} \le ||x||_{p_1} \Rightarrow$$

$$A \in \mathcal{B}(l^{p_1}, l^{p_2}) \, ||A|| \le 1$$

если $e_1 = (1, 0, \ldots)$, $||e_1||_p = 1 \, \forall \, p : 1 \le p \le +\infty$

$$||A|| = \sup_{\{||x||_{p_1}=1\}} ||Ax||_{p_2} \ge ||Ae_1||_{p_2} = 1 \Rightarrow ||A||_{\mathcal{B}(l^{p_1}, l^{p_2})} = 1 \quad \forall \, p_1 < p_2$$

□

Посмотрим теперь на похожую теорему для больших пространств L^p.

Теорема 5.5 (вложение пространств в $L^p(\mu)$ для конечной меры). $(X, U, \mu), 1 \le p_1 < p_2 \le +\infty, \mu(X) < +\infty$. Рассмотрим $f \in L^{p_2}, Af = f \Rightarrow A \in \mathcal{B}(L^{p_2}, L^{p_1})$. $||A|| = (\mu(X))^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}}, \left(\frac{1}{\infty} = 0\right)$

Доказательство. Начнём с самого простого случая. То есть что называлось существенно ограниченными функциями. $p_2 = \infty, f \in L^{\infty}(\mu), |f(x)| \le ||f||_{\infty}$ п.в. для $x \in X$ по μ.

$$||Af||_{p_1} = ||f||_{p_1} = \left(\int_X |f|^{p_1} d\mu\right)^{\frac{1}{p_1}} \le ||f||_{\infty} \left(\int_X d\mu\right)^{\frac{1}{p_1}} = ||f||_{\infty} \, \mu(X)^{\frac{1}{p_1}}$$

Вот у нас получилась константа, которая обслуживает все функции f. Тогда, во-первых, оператор непрерывен, а во-вторых, это и есть оценка для нормы

$$\Rightarrow A \in \mathcal{B}(L^\infty, L^{p_1}), ||A|| \le (\mu(X))^{\frac{1}{p_1}}$$

$$\text{пусть } p_2 < +\infty, f \in L^{p_2}, \left(\int_X |f|^{p_2} d\mu\right)^{\frac{1}{p_2}} = ||f||_{p_2}$$

$$||Af||_{p_1} = ||f||_{p_1} = \left(\int_X |f|^{p_1} d\mu\right)^{\frac{1}{p_1}} \overset{\text{н. Гёльдера}}{\le} \left[\left(\int_X |f|^{p_2} d\mu\right)^{\frac{1}{p_2}} \left(\int_X \mathbb{1}^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}\right]^{\frac{1}{p_1}} =$$

$$p = \frac{p_2}{p_1}, \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = 1 - \frac{p_1}{p_2}$$

$$= \left(\int_X |f|^{p_2} d\mu\right)^{\frac{1}{p_2}} \cdot (\mu(X))^{\left(1-\frac{p_1}{p_2}\right)\frac{1}{p_1}} = ||f||_{p_2} (\mu(X))^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}}$$

$$\Rightarrow A \in \mathcal{B}(L^{p_2}, L^{p_1}), ||A|| \le (\mu(X))^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}}$$

Почти всё готово. Мы оценили норму сверху, и утверждается, что на самом деле имеет место равенство. На какой пробной функции получить неравенство с другой стороны? Наверное, все уже догадались. Раз есть sup, то мы можем подставить какую-то конкретную функцию. $p_2 < +\infty, \chi_X(x) \equiv 1$

$$||A|| = \sup_{f \neq \mathbb{0}} \frac{||Af||_{p_1}}{||f||_{p_2}} \ge \frac{||A(\chi_X)||_{p_1}}{||\chi_X||_{p_2}} = \frac{\left(\int_X \chi_X^{p_1} d\mu\right)^{\frac{1}{p_1}}}{\left(\int_X \chi_X^{p_2} d\mu\right)^{\frac{1}{p_2}}} =$$

$$= \frac{(\mu(X))^{\frac{1}{p_1}}}{\mu(X)^{\frac{1}{p_2}}} = \mu(X)^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}}$$

если $p_2 = \infty, ||\chi_x||_\infty = 1 \Rightarrow ||A||_{\mathcal{B}(L^\infty, L^{p_1})} \ge \mu(X)^{\frac{1}{p_1}}$ □

Позже вычислим норму интегрального оператора, который часто встречается в анализе и в матфизике.

Теорема 5.6 (полнота пространства операторов, действующих в банахово пространство)**.** $(X, ||\cdot||)$ — нормированное, $(Y, ||\cdot||)$ — банахово $\Rightarrow \mathcal{B}(X, Y)$ — банахово.

Доказательство. Тут без хитростей. По определению возьмём фундаментальную последовательность и покажем, что у нее есть предел. Сначала надо добыть оператор, который будет претендентом на звание предела. $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальная, $A_n \in \mathcal{B}(X,Y)$. Пусть $\varepsilon > 0\, \exists\, N \in \mathbb{N}\, (n > N \wedge m > N) \Rightarrow ||A_n - A_m|| < \varepsilon$. $x \in X, x$ — фиксирован, $\Rightarrow ||A_n x - A_m x|| = ||(A_n - A_m)x|| < \varepsilon\, ||x||$. Тогда $\{A_n x\}_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальная в Y, Y — банахово $\Rightarrow$

$$\exists \lim_{n\to\infty} A_n x \in Y, Ax := \lim_{n\to\infty} A_n x \text{ поточечный предел}$$

$$\lim \text{ — линейная } \Rightarrow A \in \mathrm{Lin}(X,Y)$$

$$x \text{ — фиксирован } ||A_n x - A_m x|| < \varepsilon\, ||x||\,, \text{ пусть } m \to \infty$$

$$\Rightarrow ||A_n x - Ax|| \le \varepsilon\, ||x|| \quad \forall\, x \in X$$

$$\Rightarrow A_n - A \in \mathcal{B}(X,Y), ||A_n - A|| \le \varepsilon \Rightarrow A = (A - A_n) + A_n \Rightarrow A \in \mathcal{B}(X,Y)$$

$\square$

Поговорим немного о линейных функционалах. Вы только не думайте, что мы покидаем линейые операторы, это всё-таки главный объект изучения функционального анализа.

5.3. Линейные функционалы

Определение 5.7 (линейный функционал). X — линейное пространство над k ($\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$). $\mathrm{Lin}(X,k)$ — линейные функционалы на X

Определение 5.8 (сопряжённое пространство). $(X, ||\cdot||), X^* = \mathcal{B}(X,\mathbb{C})$ (или же $X^* = \mathcal{B}(X,\mathbb{R})$) — сопряжённое пространство. X^* — линейные **НЕПРЕРЫВНЫЕ** функционалы.

Про неперывность надо помнить. На экзамене часто спрашивают, что такое сопряжённое пространство, и не могут выпытать непрерывность. Что делают с такими студентами? Выгоняют.

Следствие 5.2. $(X, ||\cdot||), f \in X^* \Rightarrow$

$$||f|| = \sup_{\{||x|| \le 1\}} |f(x)| = \sup_{\{||x|| < 1\}} |f(x)| = \sup_{\{||x|| = 1\}} |f(x)| = \sup_{x \in X, x \ne 0} \frac{|f(x)|}{||x||}$$

Следствие 5.3. $(X, ||\cdot||) \Rightarrow X^*$ — банахово

Доказательство. $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ — полные $\Rightarrow \mathcal{B}(X,\mathbb{C})$ — банахово ($\Rightarrow \mathcal{B}(X,\mathbb{R})$ — банахово). $\square$

Пример 5.8. $X = l^p, (1 \le p \le +\infty), i \in \mathbb{N}$ — фиксированное число

$$x \in l^p \Rightarrow x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in \mathbb{C}, f(x) := x_i \Rightarrow f \in X^*, ||f|| = 1$$

$$|f(x)| = |x_i| \le \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \text{ при } 1 \le p < +\infty \text{ и}$$

$$\le \sup_n ||x_n|| = ||x||_\infty \text{ при } p = +\infty$$

$$\Rightarrow f \in \mathcal{B}(X,\mathbb{C}) = X^*, ||f|| \le 1$$

$$||f|| = \sup_{\{||x||=1\}} |f(x)| \ge |f(e_i)| = 1$$

Со временем мы сосчитаем, что такое сопряженное пространство к l^p для конечных p. По секрету, это l^q, где p и q — сопряжены.

Почему всегда рассматривается компакт? Потому что на компакте функция достигает свой максимум, и иначе непонятно, как норму вводить.

Пример 5.9. $C(K) = \{f : K \to \mathbb{C} \wedge f \text{ непрерывные }\}, x_0 \in K, K$ — компакт.
$f \in C(K), G(f) := f(x_0) \Rightarrow G \in X^*, ||G|| = 1$ (функционал значения в точке,подлые англосаксы говорят point evaluation).

$$G \in \mathrm{Lin}(C(K),\mathbb{C})$$

$$f \in C(K), |G(f)| = |f(x_0)| \le \sup_{x \in K} |f(x)| = ||f||_{C(k)} \Rightarrow$$

$$G \in X^*, ||G|| \le 1$$

$$\begin{cases} \chi_K(x) = 1, \chi_K \in C(K), ||\chi_K|| = 1, \chi_K(x_0) = 1 \\ \Rightarrow ||G|| = \sup_{\{||f||=1\}} |G(f)| \ge |G(\chi_K)| = 1 \end{cases} \Rightarrow ||G|| = 1$$

Когда-то мы опишем пространство непрерывных функций, но доказывать, почему оно так выглядит, не будем, ибо это очень сложно, и придётся просто поверить в это описание. Сейчас докажем теорему про норму интегрального оператора в $C[a, b]$. Мы ей даже когда-то нескоро воспользуемся.

Теорема 5.7. $C[a,b] = \{f | f : [a,b] \to \mathbb{R}, f \text{ непрерывная }\}$. Ядро интегрального оператора $k(s,t) \in C([a,b] \times [a,b])$, пусть $f \in C[a,b]$.

$$(\mathcal{K}f)(s) := \int_a^b k(s,t)f(t)dt \quad \text{ при } s \in [a,b] \Rightarrow$$

$\mathcal{K} \in \mathcal{B}(C[a,b]), ||\mathcal{K}|| = \max_{a \le s \le b} \int_a^b |k(s,t)|dt$

Доказательство начнём с важной леммы, помогающий вычислить норму линейного функционала. Когда мы сосчитаем норму линейного функционала, то будет очень нетрудно применить это для вычисления нормы линейного оператора.

Лемма 5.1. $\varphi(t) \in C[a,b], \varphi$ — фиксирована. $f \in C[a,b], G(f) := \int_a^b f(t)\varphi(t)dt \Rightarrow G \in (C[a,b])^*, ||G|| = \int_a^b |\varphi(t)|dt$.

Доказательство леммы. Оценка сверху совершенно тривиальна. $f \in C[a,b]$

$$|G(f)| = \left| \int_a^b f(t)\varphi(t)dt \right| \le \int_a^b |f(t)||\varphi(t)|dt \le \max_{t \in [a,b]} |f(t)| \cdot \int_a^b |\varphi(t)|dt =$$

$$= ||f||_\infty \int_a^b |\varphi(t)|dt \Rightarrow$$

$$G \in (C[a,b])^*, ||G|| \le \int_a^b |\varphi(t)|dt$$

Теперь оценка $||G||$ снизу. Сначала тривиальные замечания. Если $\varphi(t) \ge 0 \,\forall\, t \in [a,b]$, то $\chi_{[a,b]}(x) \equiv 1$

$$|G(\chi_[a,b])| = \left| \int_a^b \varphi(t)dt \right| = \int_a^b \varphi(t)dt$$

Если $\varphi(t) \le 0 \,\forall\, t \in [a,b]$ — то же самое.

$$g(t) = \operatorname{sign} \varphi(t) = \begin{cases} 1 & \varphi(t) > 0 \\ -1 & \varphi(t) < 0 \\ 0 & \varphi(t) = 0 \end{cases}$$

$G(g) = \int_a^b |\varphi(t)|dt$, но $g \notin C[a,b]$. До сих пор мы всегда находили пробную функцию, на котором достигался sup, а здесь такого элемента

нет. Поэтому будем приближать φ непрерывными функциями с точностью до ε, вот такая идея.
Пусть $\varepsilon > 0, \varphi \in C[a,b] \Rightarrow \varphi$ — равномерно непрерывна на $[a,b] \Rightarrow$

$$\exists\, \delta > 0\, |s-t| < \delta \Rightarrow |\varphi(t) - \varphi(s)| < \varepsilon \quad a \le s, t \le b$$

$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b, t_k - t_{k-1} < \delta$.
Рассмотрим $\{\Delta_j\}_{j=1}^n$. Δ_j — интервалы $[t_{k-1}, t_k]$. Нумерация будет не по порядку, как сперва может показаться, а совершенно другая, и она никак не будет зависеть от расположения на отрезке. Разобьём интервал на 2 сорта. Первый — где функция положительна или отрицательна, то есть не меняет знак. Второй — где меняет знак или обращается в 0. $\Delta_1, \ldots, \Delta_r$ — те интервалы, на которых $\varphi(t) > 0, t \in \Delta_j$ или $\varphi(t) < 0, t \in \Delta_j$ $(1 \le j \le r)$
$\Delta_{r+1}, \ldots, \Delta_n$ — те интервалы, для которых $\exists\, s \in \Delta_j : \varphi(s) = 0, n \ge j > r$.

$$\text{пусть } t \in \Delta_j, j > r \Rightarrow \exists\, s \in \Delta_j, \varphi(s) = 0 \Rightarrow$$
$$|\varphi(t)| = |\varphi(t) - \varphi(s)| < \varepsilon \Rightarrow \int_{\Delta_j} |\varphi(t)| dt < \varepsilon |\Delta_j|$$
$$\Rightarrow \int_{\bigcup_{j=r+1}^n \Delta_j} |\varphi(t)|\, dt \le \varepsilon \left(\sum_{j=r+1}^n |\Delta_j| \right) \le \varepsilon(b-a)$$

$$h(t) = \begin{cases} \operatorname{sign} \varphi(t), t \in \Delta_j \quad 1 \le j \le r \\ \text{линейная на } \Delta_j \quad j > r \\ \text{если } [a, t_1] \in \Delta_j, j > r, \text{ то } h(a) = 0 \\ \text{если } [t_{n-1}, b] \in \Delta_j, j > r, \text{ то } h(b) = 0 \end{cases} \qquad h \in C[a,b], |h(t)| \le 1$$

$$||G|| = \sup_{\{||f||\le 1\}} |G(f)| \ge |G(h)| = \left| \int_a^b h(t)\varphi(t)dt \right| =$$

$$= \left| \int_{\bigcup_{j=1}^r \Delta_j} h(t)\varphi(t)dt + \int_{\bigcup_{j=r+1}^n \Delta_j} h(t)\varphi(t)dt \right| =$$

$$= \left| \int_{\bigcup_{j=1}^r \Delta_j} |\varphi(t)|dt + \int_{\bigcup_{j=r+1}^n \Delta_j} h(t)\varphi(t)dt \right| \ge$$

$$\ge \int_{\bigcup_{j=1}^r \Delta_j} |\varphi(t)|dt - \int_{\bigcup_{j=r+1}^n \Delta_j} |h(t)||\varphi(t)|dt \ge$$

$$\ge \int_{\bigcup_{j=1}^r \Delta_j} |\varphi(t)|dt - \int_{\bigcup_{j=r+1}^n \Delta_j} |\varphi(t)|dt = \int_a^b |\varphi(t)|dt - 2\int_{\bigcup_{j=r+1}^n \Delta_j} |\varphi(t)|dt \ge$$

$$\ge \int_a^b |\varphi(t)|dt - 2\varepsilon(b-a) \quad \forall\, \varepsilon > 0$$

$\Rightarrow ||G|| \ge \int_a^b |\varphi(t)|dt$ □

Главной частью доказательства теоремы было доказательство теоремы. Вернёмся к теореме.

Доказательство. Оценим сначала норму оператора сверху. $(\mathcal{K}f)(s) = \int_a^b k(s,t)f(t)dt, f \in C[a,b]$. $M = \max_{a\le s\le b} \int_a^b |k(s,t)|dt$. Мы как раз хотим показать, что норма оператора будет равна M.

$$|(Kf)(s)| \le \int_a^b |k(s,t)||f(t)|dt \le ||f||_\infty \int_a^b |k(s,t)|dt \le M\,||f||_\infty$$

$$||\mathcal{K}f||_\infty = \max_s |\mathcal{K}f(s)| \le M \cdot ||f|| \;\forall\, f \in C[a,b] \Rightarrow \mathcal{K} \in \mathcal{B}(C[a,b])$$

$||K||_{\mathcal{B}(C[a,b])} \le M$
Теперь оценим $||\mathcal{K}||$ снизу.

$$g(s) = \int_a^b |k(s,t)|dt \Rightarrow g \in C[a,b] \Rightarrow$$
$$\exists\, s_0\; g(s_0) = \max g(s) \Rightarrow g(s_0) = M$$

применим к произвольной непрерывной функции оператор

$$f \in C[a,b], ||(\mathcal{K}f)(s)||_\infty = \max_{a\le s\le b} |\mathcal{K}f(s)| \ge |(\mathcal{K}f)(s_0)| = \left| \int_a^b k(s_0,t)f(t)dt \right| = |G(f)|$$

где $\varphi(t) = K(s_0, t), G(f) = \int_a^b k(s_0, t) f(t) dt$.

$$||\mathcal{K}|| = \sup_{\{||f|| \le 1\}} ||\mathcal{K}(f)|| \ge \sup_{\{||f|| \le 1\}} |G(f)| = ||G||_{(C[a,b])^*} \overset{\text{лемма}}{=}$$

$$\int_a^b |\varphi(t)| dt = M \Rightarrow ||K|| = M$$

□

От сопряжённых пространств мы не уходим, а наоборот, углубляемся в них.

5.4. Изоморфные линейные пространства

Определение 5.9 (изоморфность пространств)**.** $(X, ||\cdot||)$, $(Y, ||\cdot||)$ — **линейно изоморфны**, если $\exists\, A \in \mathcal{B}(X, Y)$, $\exists\, A^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X)$. A — **линейный изоморфизм**

Замечание 5.1. «Изоморфность» — отношение эквивалентности на множестве нормированных пространств.

Когда можно сказать, что два пространства изоморфны?

Теорема 5.8 (критерий линейного изоморфизма)**.** $(X, ||\cdot||), (Y, ||\cdot||), A \in \mathrm{Lin}(X, Y), A(X) = Y$ (то есть A — сюрьекция).
A — линейный изоморфизм $\Leftrightarrow$ пусть $0 < c_1 < C_2 < +\infty$ т.ч. $c_1 ||x|| \le ||Ax|| \le C_2 ||x||\, , \forall\, x \in X$

Доказательство. $\Rightarrow$

$$A \in \mathcal{B}(X, Y) \Rightarrow ||Ax|| \le ||A|| \cdot ||X||\ \forall\, x \in X, C_2 = ||A||$$
$$\exists\, A^{-1}\mathcal{B}(Y, X) \Rightarrow \left|\left|A^{-1}y\right|\right| \le \left|\left|A^{-1}\right|\right| ||y||\ \forall\, y \in Y$$
$$\text{пусть } x \in X, y = Ax \Rightarrow \left|\left|A^{-1}(Ax)\right|\right| \le \left|\left|A^{-1}\right|\right| \cdot ||Ax|| \Rightarrow$$
$$\frac{1}{||A^{-1}||} \cdot ||x|| \le ||Ax|| \quad c_1 = \frac{1}{||A^{-1}||}$$

$\Leftarrow$
$||Ax|| \le C_2 ||x|| \Rightarrow A \in \mathcal{B}(X, Y)(||A|| \le C_2)$. Теперь проверим, что A

— инъекция. Без неравенства снизу мы сейчас как раз выведем, что образы различных иксов различны. Пусть $Ax_1 = Ax_2 \Rightarrow A(x_1 - x_2) = 0$

$$0 = ||A(x_1 - x_2)|| \geq c\,||x_1 - x_2|| \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow A \text{ — биекция}$$

$$\overset{\text{доказали}}{\Rightarrow} \exists\, A^{-1} \in \mathrm{Lin}(Y, X)$$

$$\begin{cases} c_1\,||x|| \leq ||Ax|| \;\forall\, x \in X \\ \text{пусть } y \in Y, x = A^{-1}y \end{cases} \Rightarrow$$

$$c_1 \left|\left|A^{-1}y\right|\right| \leq ||y|| \Rightarrow \left|\left|A^{-1}y\right|\right| \leq \frac{1}{c_1}\,||y|| \Rightarrow A^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X) \left(\left|\left|A^{-1}\right|\right| \leq \frac{1}{c_1}\right)$$

□

Раз нам предстоит потом долгий разговор про обратные операторы, сразу отметим некоторое следствия из доказательства теоремы, чтобы не возвращаться к нему потом.

Следствие 5.4 (из доказательства теоремы)**.** $(X, ||\cdot||), (Y, ||\cdot||), A \in \mathrm{Lin}(X, Y), A(X) = Y$

$$\exists\, A^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X) \Rightarrow \exists\, c > 0 : ||Ax|| \geq c\,||x|| \;\forall\, x \in X$$

Доказательство. Следует из доказательства теоремы. □

Часто бывает, что на одном и том же пространстве определены две различные нормы. Какие же нормы будут называться эквивалентными?

Определение 5.10. X — линейное пространство, $||\cdot||_1\,, ||\cdot||_2$ — две нормы на X. $||\cdot||_1$ эквивалентна $||\cdot||_2$, если

$$\lim_{n\to\infty} ||x_n - x_0||_1 = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} ||x_n - x_0||_2 = 0$$

По-другому можно сказать, что топологии, которые задают эти нормы, одинаковые: $\Leftrightarrow G \subset X, G$ — открытое в $(X, ||\cdot||_1) \Leftrightarrow G$ — открытое в $(X, ||\cdot||_2)$

Следствие 5.5. X — линейное, $||\cdot||_1, ||\cdot||_2$ — нормы на X. $||\cdot||_1$ эквивалентна $||\cdot||_2 \Leftrightarrow\ \exists\, 0 < c_1 < c_2 \leq +\infty$ т.ч.

$$c_1 ||x||_1 \leq ||x||_2 \leq C_2 ||x||_1$$

хотя в определении не утверждалось, что одну норму можно оценить через другую

Доказательство. $X = (X, ||\cdot||_1), Y = (X, ||\cdot||_2)$ — как бы 2 разных пространства, но на одном множестве. Рассмотрим оператор $Ix = x$. Ясно, что $I \in \mathrm{Lin}(X, Y)$, I — биекция, $I^{-1} \in \mathrm{Lin}(Y, X)$. Что означает, что $||\cdot||_1$ эквивалентна $||\cdot||_2$? $\Leftrightarrow I, I^{-1}$ непрерывны $\Leftrightarrow I$ — линейный изоморфизм X и $Y \overset{\text{т.критерий линейного изоморфизма}}{\Longleftrightarrow} c_1 ||x||_1 \leq \underbrace{||Ix||_2}_{||x||_2} \leq C_2 ||x||_1$

□

Не очень скоро мы получим обобщение этой теоремы. Окажется, что если пространство банахово в обеих нормах, то только одно из последних неравенств влечёт другое.

Утверждение 5.2. $(X, ||\cdot||), (Y, ||\cdot||)$ — линейно изоморфны. Пусть X — банахово, тогда Y — банахово.

Доказательство.

$$A : X \to Y \quad A \in \mathcal{B}(X, Y) \quad A \text{ — линейный изоморфизм}$$
$$A^{-1} : Y \to X \quad A^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X)$$
$$\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ — фундаментальная в } Y \quad x_n = A^{-1} y_n$$
$$||x_n - x_m|| \leq \left|\left|A^{-1}\right|\right| \cdot ||y_n - y_m|| \Rightarrow \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ фундаментальная в } X$$

теперь применяем наш, слава богу, непрерывный оператор

$$\Rightarrow\ \exists \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} Ax_n = Ax_0 \wedge \lim_{n\to\infty} y_n = Ax_0 \Rightarrow$$
$$Y \text{ полное}$$

□

5.5. Конечномерные пространства

Определение 5.11 (Размерность пространства). X — линейное пространство над $\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$. Если $\exists\, n$ линейно независимых элементов в X, и $\forall\,(n+1)$ элементов линейно зависимы, то $\dim X = n$

Определение 5.12. Если $\forall\, n \in \mathbb{N} \exists n$ линейно незаисимых элементов, то X — **бесконечномерное**

Теорема 5.9. $(X, ||\cdot||), (Y, ||\cdot||)$ — линейные пространства над $\mathbb{C}, \dim X = \dim Y = n$.

$$\Rightarrow X \text{ линейно изоморфно } Y$$

Доказательство. Поскольку мы обсудили, что изоморфность — отношение эквивалентности, то можно зафиксировать

$$X = l_n^2 = \left\{ x = (x_1, \dots, x_n), x_j \in \mathbb{C}, ||X|| = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \right\} \{f_j\}_{j=1}^n \text{ — базис в } Y$$

$$A : l_n^2 \to Y, A(e_j) = f_j$$

утверждается, что это и будет линейный изоморфизм

$$A\left(\sum_{j=1}^n x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^n x_j f_j, A \in \mathrm{Lin}(l_n^2, Y)$$

$$x \in l_n^2, x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$$

$$||Ax|| = \left|\left|\sum_{j=1}^n x_j f_j\right|\right| \leq \sum_{j=1}^n |x_j|\, ||f_j|| \overset{\text{КБШ}}{\leq} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{||x||_{l_n^2}} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^n ||f_j||^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{:=M}$$

мы оценили норму оператора A

$$\Rightarrow ||Ax||_Y \leq ||x||_{l_n^2} \cdot M \Rightarrow A \in \mathcal{B}(l_n^2, Y), ||A|| \leq M$$

$$g(x) := ||Ax|| \text{ — функция на } l_n^2 \Rightarrow g(x) \text{ — непрерывна на } l_n^2$$

Теперь рассмотрим эту функцию не на всём пространстве, а на единичной сфере $S = \{x \in l_n^2, ||x||_2 = 1\}$ — компакт в l_n^2.

$$x \in S, g(x) > 0, g \text{ непрерывная на компакте } S \Rightarrow$$
$$\exists\, x_0 \in S, g(x_0) = \min_{x \in S} g(x), r = g(x_0), r > 0$$
$$\text{пусть } x \in l_n^2, x \neq 0 \quad \frac{x}{||x||} \in S \Rightarrow g\left(\frac{x}{||x||}\right) \geq r \Rightarrow$$
$$\left|\left|A\left(\frac{x}{||x||}\right)\right|\right| \geq r \Rightarrow ||Ax|| \geq r\,||x||\ \forall\, x \in l_n^2$$
$$\Rightarrow \text{ — линейная изометрия}$$

□

Следствие 5.6. $(X, ||\cdot||), \dim X = n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

1. X — банахово
2. $K \subset X, K$ — относительно компактно $\Leftrightarrow K$ — ограничено
3. $K \subset X, K$ — компакт $\Leftrightarrow K$ — ограничено и замкнуто

Мы когда-нибудь выясним, что если в пространстве единичный шар — компакт, то это пространство конечномерное.

Доказательство.

1. l_n^2 — полное, X — линейно изоморфно l_n^2 и по утверждению из конца предыдущего параграфа $\Rightarrow l_n^2 X$ банахово
2. $A \in \mathcal{B}(l_n^2, X), A^{-1} \in \mathcal{B}(X, l_n^2), A, A^{-1}$ — непрерывны
3. аналогично 2

□

Следствие 5.7. $X, \dim X = n, n \in \mathbb{N}$, на X две нормы $||\cdot||_1, ||\cdot||_2 \Rightarrow ||\cdot||_1$ эквивалентна $||\cdot||_2$

Доказательство. $(X, ||\cdot||_1)$ линейно изоморфно $(X, ||\cdot||_2)$. □

Теорема 5.10. $(X, ||\cdot||), (Y, ||\cdot||), \dim X = n, n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \operatorname{Lin}(X, Y) = \mathcal{B}(X, Y)$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "U"] \arrow[d, shift left, "A^{-1}"] & Y \\
l_n^2 \arrow[u, shift left, "A"] \arrow[ur, "T"] &
\end{tikzcd}$$

Доказательство. Рассмотрим сначала частный случай, потом сведём произвольный случай к частному. Пусть $T \in \operatorname{Lin}(l_n^2, Y)$.

$$e_j = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{j}, \ldots, 0)$$

$$x \in l_n^2, x = \{x_j\}_{j=1}^n, x = \sum_{j=1}^n x_j e_j \Rightarrow Tx = \sum_{j=1}^n x_j T e_j$$

оцениваем норму простейшим образом

$$||Tx|| \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \cdot ||Te_j|| \overset{\text{КБШ}}{\leq} \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\left(\sum_{j=1}^n ||Te_j||^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{M} \leq ||x||_2 \cdot M$$

2 множитель не зависит от x, и раз получилась независимая константа, то оператор непрерывен

$$\Rightarrow T \in \mathcal{B}(l_n^2, Y), ||T|| \leq M$$

теперь произвольный случай, пусть $U \in \operatorname{Lin}(X, Y), \dim X = n$

$$A \text{ — линейный изоморфизм}$$
$$T = UA \in \operatorname{Lin}(l_n^2, Y) \overset{\text{доказали}}{\Rightarrow} T \in \mathcal{B}(l_n^2, Y)$$
$$\Rightarrow U = TA^{-1} \quad A, A^{-1} \text{ непрерывны } \Rightarrow U \in \mathcal{B}(X, Y)$$

□

ранее мы сформулировали следствие, и теперь скажем пару слов о доказательстве

Следствие 5.8. $(X, ||\cdot||_1, ||\cdot||_2), \dim X = n < +\infty$

$$\Rightarrow ||\cdot||_1 \text{ эквивалентна } ||\cdot||_2$$

Доказательство. $(X = (X, ||\cdot||_1)), Y = (X, ||\cdot||_2)$

$$\begin{cases} Ix = x \Rightarrow I \in \mathrm{Lin}(X, Y) \overset{\text{теорема}}{\Rightarrow} I \in \mathcal{B}(X, Y) \\ I^{-1}x = x \quad I^{-1} : Y \to X \Rightarrow I^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X) \end{cases} \Rightarrow ||\cdot||_1 \equiv ||\cdot||_2$$

$$(\Leftrightarrow \ \exists \ 0 < c_1 < c_2 : c_1 \, ||x||_1 \leq ||x_2|| \leq c_2 \, ||x_1||)$$

Если последовательность сходится в одной норме, то под действием непрерывного оператора сходится и в другой. □

Последнее, что хочется сказать в этом параграфеЖ

Теорема 5.11. $(X, ||\cdot||), \dim X = n < +\infty \Rightarrow$

$$X^* = \mathcal{B}(X, \mathbb{C}) \quad \dim X^* = n$$

Доказательство.

$$\mathcal{B}(X, \mathbb{C}) = \mathrm{Lin}(X, \mathbb{C})$$

$$\text{пусть } \{e_j\}_{j=1}^n \text{ — базис } X, x \in X \Rightarrow x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$$

$$f_j(x) = x_j, f_j : X \to \mathbb{C}, f_j \in \mathrm{Lin}(X, \mathbb{C})$$

проверим $\{f_j\}_{j=1}^n$ базис в X^*

$$f \in X^*, x = \sum_{j=1}^n x_j e_j \Rightarrow f(x) = \sum_{j=1}^n x_j f(e_j) = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j, \alpha_j = f(e_j)$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j f_j(x) \, \forall \, x \in X$$

$$\Rightarrow f = \sum_{j=1}^n \alpha_j f_j$$

Проверим, что $\{f_j\}_{j=1}^n$ линейно независимы

$$\text{пусть} \sum_{j=1}^n c_j f_j = \mathbb{0}, \text{ то есть } \mathbb{0}(x) = 0 \,\forall\, x \in X$$

$$f_j(e_k) = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\left(\sum_{j=1}^n c_j f_j\right)(e_k)}_{=0} = c_k \Rightarrow c_k = 0, 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow \{f_j\}_{j=1}^n \text{ — базис в } X^*$$

□

Теперь мы расстаёмся с конечномерными пространствами.

5.6. Конечномерные подпространства

Начнём с некоторого общего определения, которое касается метрических пространств.

Определение 5.13. (X, ρ) — метрическое, $Y \subset X, x_0 \in X, \rho(x_0, Y) = \inf_{y \in Y} \rho(x_0, y)$. Если $\exists\, y_0 \in Y$ т.ч.$\rho(x_0, Y) = \rho(x_0, y_0)$, то y_0 — **элемент наилучшего приближения** для x_0 в Y

Возникают вопросы, существует ли он, и если да, то единственный ли? Тривиальное замечание

Замечание 5.2. Если Y компакт, то $\exists\, y_0 \in Y : f(y) = \rho(x_0, y), f(y)$ непрерывна на Y. $\exists\, y_0, f(y_0) = \min_{y \in Y} f(y)$

теперь мы имеем дело с конечномерным подпространством

Теорема 5.12. $(X, ||\cdot||)$ — нормированное, $L \subset X$. L — подпространство (в алгебраическом смысле), $\dim L = n < +\infty \Rightarrow$

1. L — замкнутое

2. $\forall\, x_0 \in X \,\exists\, y_0 \in L$ — элемент наилучшего приближения

1. Естественно, о компактности никакой речи быть не может, но конечномерность нам поможет. Во-первых, мы уже отмечали, что все конечномерные пространства — полные. Ещё мы доказывали линейную изоморфность. Таким образом, L — полное. А ещё почти на первой лекции мы обсуждали, что если есть полное подмножество метрического пространства, то оно автоматически оказывается замкнутым. □

2.

$$\text{пусть } x_0 \in X \setminus L \quad \rho(x_0, L) = d > 0$$
$$\rho(x_0, L) = \inf_{y \in L} ||x_0 - y|| \Rightarrow \exists \ \{y_n\}_{n=1}^{\infty}, y_n \in L$$

План такой: мы докажем что последовательность ограниченная, значит, она относительно компактная, и из неё можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, а так как L замкнуто, то предел будет лежать в L. Для оценки воспользуемся неравенством треугольника

$$d < ||x_0 - y_n|| \le d + \frac{1}{n} \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ ограничена в } L$$
$$\dim L < +\infty \Rightarrow \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ относительно компактна } \Rightarrow$$
$$\exists \ \{n_k\}_{k=1}^{\infty} \ \exists \lim_{k \to \infty} y_{n_k} = y_0, L \text{ — замкнуто } \Rightarrow y_0 \in L$$
$$d \le ||x_0 - y_{n_k}|| \le d + \frac{1}{n_k} \Rightarrow \text{при } k \to \infty \, ||x_0 - y_0|| = d$$

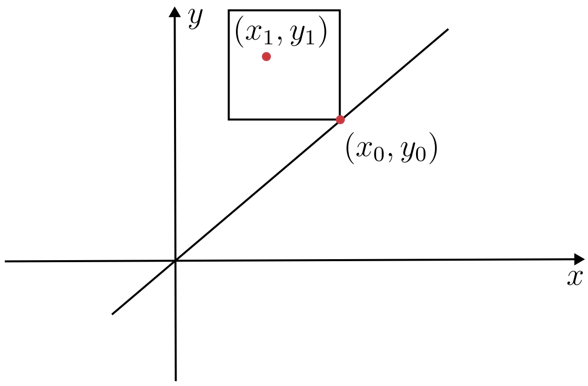
□

Замечание 5.3. $\dim L < +\infty$, элемент наименьшего приближения может быть не единственным.

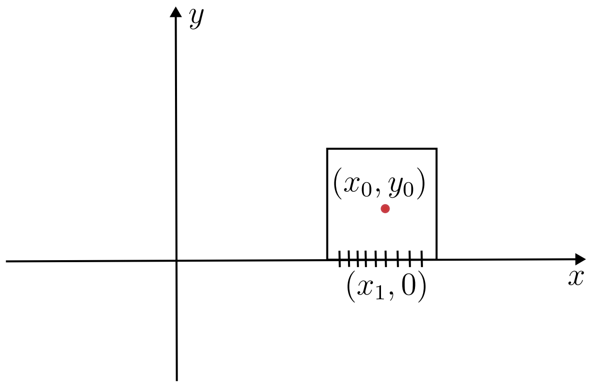
Пример 5.10 (l_2^{∞}). $||(x, y)|| = \max\{|x|, |y|\}$. $L = \{(x, y) : y = kx, k \ne 0\}$. $(\cdot)$ — элемент наилучшего приближения, единственный
Если допустить $k = 0$, то все точки будут лежать на одном и том же расстоянии от (x_1, y_1). $\forall \, x \in [x_1 - y_1, x_1 + y_1], y = 0 \, \forall \, (\cdot)$ — элемент наилучшего приближения

Пример 5.11 (l_2^1). $||(x, y)||_1 = |x| + |y|$, $L = \{(x, y) : y = kx, k \ne \pm 1\}$, тогда $\exists$ единственный элемент наилучшего приближения. Если же $L = \{y = x\}$, все точки отрезка — элементы наилучшего приближения

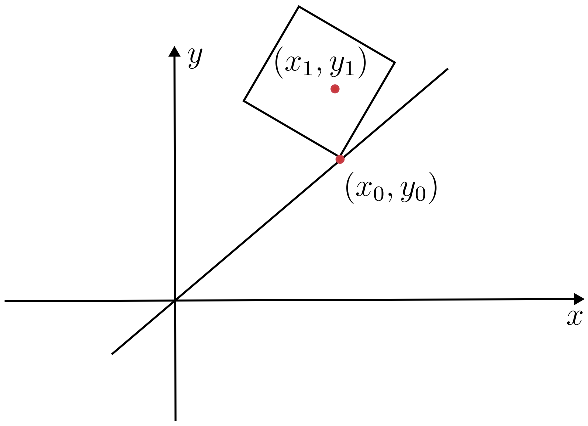
Пример 5.12 (l_2^2). $l_2^2 = \left\{(x, y) : ||(x, y)||_2 = \sqrt{|x|^2 + |y|^2}\right\} \ \forall \, L \ \exists \, !$ элемент наилучшего приближения, при $1 < p < +\infty$ аналогично



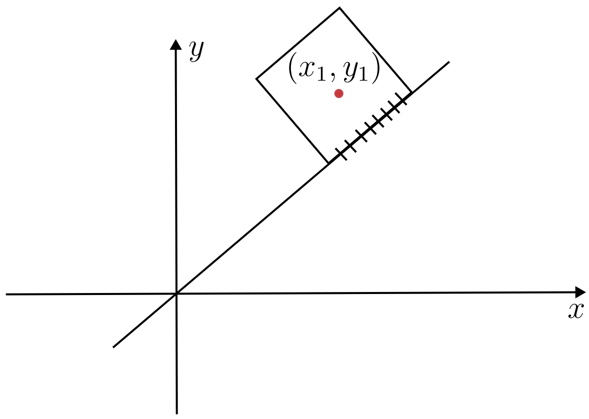
(a) Пример 5.10, $k \neq 0$



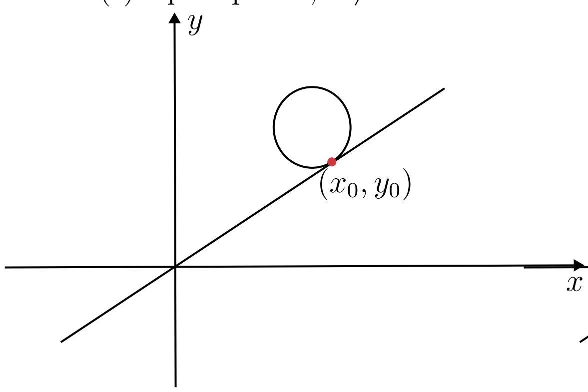
(b) Пример 5.10, $k = 0$



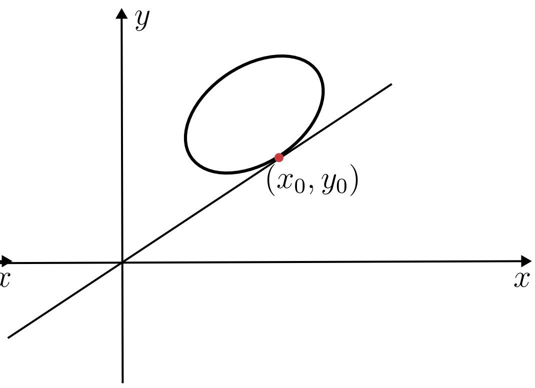
(c) Пример 5.11, $k \neq \pm 1$



(d) Пример 5.11, $k = 1$



(e) Пример 5.12, l_2^2



(f) Пример 5.12, $1 < p < +\infty$

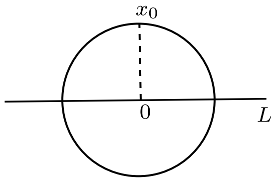


Рис. 5.2: Почти перпендикуляр

Следствие 5.9 (про многочлены)**.** $C_{\mathbb{R}}[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R}\}$,

$$\mathcal{P}_n \left\{ p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, a_k \in \mathbb{R} \right\}$$

$$E_n(f) = \inf_{p \in \mathcal{P}_n} ||f - p||_\infty$$

$$\Rightarrow \exists\, p_0 \text{ т.ч. } E_n(f) = ||f - p_0||_\infty, p_0$$

носит торжественное название многочлена наилучшего приближения

Доказательство. $\dim \mathcal{P}_n = n + 1 \Rightarrow \exists\, p_0$ □

Замечание 5.4. $\exists!\, p_0$, так как $p_0(x) = 0$ только в n точках. В пространстве непрерывных функций единичный шар устроен совершенно кошмарно, хотя норма устроена похожим образом на l^∞. В шаре полно отрезков.

5.7. Конечномерность нормированного пространства с компактным единичным шаром

Лемма 5.2 (Ф.Рисс, о почти перпендикуляре)**.** $(X, ||\cdot||), L \subsetneq X, L$ — замкнутое подпространство, $0 < \varepsilon < 1$

$$\Rightarrow \exists\, x_0, ||x_0|| = 1, \rho(x_0, L) > 1 - \varepsilon$$

На рисунке 5.2 показано, причём тут «почти перпендикуляр». Хочется, чтобы x_0, был элемент на расстоянии 1, но 1 обеспечить нельзя, но $1-\varepsilon$ — можно.

Доказательство.

$$z \in X \setminus L, d = \rho(z, L) = \inf_{y \in L} ||z-y|| \Rightarrow \exists\, y_0 \in L : d \le ||z-y_0|| < d(1+\varepsilon)$$

$$x_0 = \frac{z-y_0}{||z-y_0||}, ||x_0|| = 1$$

оценим норму разности

$$\text{пусть } y \in L \quad ||x_0 - y|| = \left|\left|\frac{z-y_0}{||z-y_0||} - y\right|\right| = \frac{1}{||z-y_0||} \underbrace{\left|\left|z - \overbrace{y_0 - y\,||z-y_0||}^{\in L}\right|\right|}_{\ge d} \ge$$

$$\frac{d}{d(1+\varepsilon)} = \frac{1}{1+\varepsilon}$$

$\forall\, y \in L \Rightarrow \rho(x_0, L) \ge \frac{1}{1+\varepsilon} > 1-\varepsilon$ □

Замечание 5.5. Если $\exists\, y_0 \in L : ||z-y_0|| = d$, то $x_0 = \frac{z-y_0}{||z-y_0||} \Rightarrow \rho(x_0, L) = 1$

Следствие 5.10 (из замечания)**.** $(X, ||\cdot||), L \subsetneq X, L$ — подпространство, $\dim L < +\infty$

$$\Rightarrow \exists\, x_0 \in X \setminus L, ||x_0|| = 1, \rho(x_0, L) = 1$$

А это следствие нам понадобится несколько раз.

Следствие 5.11. $(X, ||\cdot||), \{L_n\}_{n=1}^{\infty}$, L_n — замкнутые подпространства. $L_n \subsetneq L_{n+1}, L_1 \ne \varnothing \Rightarrow$

$$\exists\ \{y_n\}_{n=1}^{\infty}, y_n = L_n, \rho(y_{n+1}, L_n) \ge \frac{1}{2}, ||y_n|| = 1$$

Доказательство. пусть $y_1 \in L_1, ||y_1|| = 1, L_1 \subsetneq L_2 \overset{\text{Лемма}}{\Rightarrow} \exists y_2 \in L_2, ||y_2|| = 1$. $\rho(y_2, L_1) \ge \frac{1}{2}$ и так далее по индукции □

Теорема 5.13 (Ф.Рисс)**.** $(X, ||\cdot||), B = \{x : ||x|| < 1\}$. $\overline{B} = \{x : ||x|| \le 1\}$

$$\overline{B} \text{ — компакт } \Leftrightarrow \dim X < +\infty$$

Доказательство. $\Leftarrow$ уже доказали
$\Rightarrow$
пусть $\dim X = \infty \Rightarrow \ \exists \ \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — линейно независимы

$$L_n = \operatorname{Lin}\{x_j\}_{j=1}^{n}, \dim L_n = n, L_n \subsetneq L_{n+1}$$

$$\overset{\text{Сл.2}}{\Rightarrow} \ \exists \ \{y_n\}_{n=1}^{\infty}, ||y_n|| = 1, \rho(y_n, L_{n-1}) > \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$||y_n - y_m|| > \dfrac{1}{2} \ \forall\, n, m \Rightarrow \ \nexists$ фундаментальной подпоследовательности $\Rightarrow$

$$\nexists \{y_{n_k}\} : \ \exists \lim_{k\to\infty} y_{n_k} \Rightarrow \overline{B} \text{ не компакт}$$

$\square$

Вот так нам удалось установить, что если в пространстве единичный шар — компакт, то пространство конечномерное.

Теорема 5.14 (о продолжении линейного оператора)**.** $(X, ||\cdot||)$ — нормированное, $(Y, ||\cdot||)$ — банахово, $L \subset X, L$ — подпространство в алгебраическом смысле

$$\overline{L} = X, A \in \mathcal{B}(L, Y) \Rightarrow \ \exists!\, V \in \mathcal{B}(X, Y) : ||V||_{\mathcal{B}(X,Y)} = ||A||_{\mathcal{B}(L,Y)}$$

Доказательство. Сначала мы должны распростарнить оператор, то есть определить, как он будет действовать на произвольный элемент X. Пусть $x \in X$.

$$\exists \ \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in L, \lim_{n\to\infty} ||x - x_n|| = 0$$

$$\{Ax_n\}_{n=1}^{\infty}, Ax_n \in Y, \{Ax_n\}_{n=1}^{\infty} \text{— фундаментальная в } Y, ||Ax_n - Ax_m|| \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Раз последовательность имеет предел, то она фундаментальная. Значит мы не зря в условии требовали банаховость. Y — банахово, тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} Ax_n \in Y$

$$Vx := \lim_{n\to\infty} AX_n$$

надо убедиться, что определение корректно, то есть что предел не зависит от изначально выбранной последовательности:

$$\text{пусть } \{z_n\}_{n=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} z_n = x \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} Az_n$$
$$z_n \in L \quad ||Ax_n - Az_n|| \le ||A|| \underbrace{||x_n - z_n||}_{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} Az_n$$

корректность проверена

$$\text{пусть } x \in L, \text{ пусть } x_n = x\,\forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow Vx = \lim_{n\to\infty} Ax_n = Ax \Rightarrow V|_L = A$$
$$\text{пусть } \lim_{n\to\infty} x_n = x \Rightarrow Vx = \lim_{n\to\infty} Ax_n \Rightarrow$$
$$\lim n \to \infty\, ||x_n|| = ||x|| \quad ||Vx|| \le \lim_{n\to\infty} ||A|| \cdot ||x_n|| = ||A||\,||x||$$
$$\Rightarrow ||V|| \le ||A||$$
$$||V|| = \sup_{\{x\in X:||x||=1\}} ||Vx|| \ge \sup_{\{x\in L:||x||=1\}} ||Vx|| = ||A||$$
$$\Rightarrow ||V|| = ||A||$$

□

Следующая конструкция, которая ранее упоминалась, это фактор-пространства.

5.8. Факторпространство

Определение 5.14 (класс эквивалентности). X — линейное пространство над $\mathbb{C}$, Y — подпространство. $X/Y = \{\overline{x}\}_{x\in X}$

$$x \sim z \text{ если } x - z \in Y$$
$$\overline{x} = \{z : z = x + h, h \in Y\}$$
$$\overline{x} + \overline{y} = \overline{x+y}$$
$$\lambda \in \mathbb{C}, \lambda\overline{x} = \overline{(\lambda x)}$$
$$\varphi : X \Rightarrow X/Y \quad \varphi(x) = \overline{x}$$

φ — линейное (канонический гомоморфизм).

Если пространство будет не замкнутым, то будут ненулевые элементы с нулевой нормой (те, что лежат в замыкании).

Определение 5.15. $(X, ||\cdot||)$ — нормированное, Y — замкнутое подпространство. $X/Y = \{\overline{x}\}_{x\in X}$,

$$||\overline{x}|| = \inf_{z\in\overline{x}} ||z|| = \inf_{y\in Y} ||x - y|| = \rho(x, Y)$$

Теорема 5.15. $(X, ||\cdot||), Y$ — замкнутое подпространство $\Rightarrow$

1. $||\overline{x}||$ в X/Y удовлетворяет аксиомам нормы
2. $\varphi : X \to X/Y, \varphi(x) = \overline{x} \Rightarrow \varphi \in \mathcal{B}(X, X/Y), ||\varphi|| = 1$
3. Если X — банахово, то X/Y — банахово

1.

$$\lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0, x \in X$$
$$\left|\left|\overline{\lambda x}\right|\right| = \inf_{z\in\overline{x}} ||\lambda z|| = |\lambda| \inf_{z\in\overline{x}} ||z|| = |\lambda| \cdot ||\overline{x}||$$
$$\text{пусть } \overline{x}, \overline{u} \in X/Y, z \in \overline{x}, v \in \overline{y}$$
$$||\overline{x} + \overline{u}|| \leq ||z + v|| \leq ||z|| + ||v|| \quad \forall\, z \in \overline{x}, \forall\, v \in \overline{y}$$
$$\Rightarrow ||\overline{x} + \overline{u}|| \leq \inf_{z\in\overline{x}} ||z|| + \inf_{v\in\overline{u}} ||v|| = ||\overline{x}|| + ||\overline{u}||$$

теперь проверяем в 0, тут как раз нужна замкнутость

$$||\overline{x}|| = 0 \quad ||\overline{x}|| = \rho(x, Y) = 0 \Rightarrow x \in Y \Rightarrow \overline{x} = Y = \overline{0}$$

□

2. $||\varphi(x)|| = ||\overline{x}|| = \inf_{z\in\overline{x}} ||z|| \leq ||x|| \Rightarrow \varphi \in \mathcal{B}(X, X/Y), ||\varphi|| \leq 1$. По лемме о почти перпендикуляре, пусть $\varepsilon > 0\, \exists\, x_0, ||x_0|| = 1$

$$\rho(x_0, Y) > 1 - \varepsilon \Rightarrow ||\varphi(x_0)|| = \rho(x_0, Y) > 1 - \varepsilon$$
$$\Rightarrow ||\varphi|| = \sup_{\{x:||x||=1\}} ||\varphi(x)|| > 1 - \varepsilon\, \forall\, \varepsilon > 0 \Rightarrow ||\varphi|| = 1$$

□

3. Воспользуемся критерием полноты: если сходится ряд из норм, то сходится и сам ряд. X/Y — полное?

$$\text{пусть } \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} ||\overline{x_n}|| < +\infty \left(\overset{?}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} \overline{x_n} \text{сходится в } X/Y \right)$$

$$||\overline{x_n}|| = \inf_{z \in \overline{x_n}} ||z|| \Rightarrow \exists\, z_n \in \overline{x_n} : ||z_n|| \leq 2\, ||\overline{x_n}||$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} ||z_n|| < +\infty X \text{ — банахово, и по критерию полноты} \Rightarrow$$

$$\exists\, S = \sum_{n=1}^{\infty} z_n, s \in X$$

рассмотрим частичные суммы

$$\begin{cases} S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k, \lim\limits_{n\to\infty} s_n = s \\ \varphi(s_n) = \sum_{k=1}^{n} \varphi(z_k) = \sum_{k=1}^{n} \overline{x_k} \end{cases} \quad \varphi \text{ непрерывна} \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(s_n) = \varphi(s) \in X/Y$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \overline{x_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{x_k} \Rightarrow X/Y \text{ — банахово}$$

$\square$

Часть III

Гильбертовы пространства

Глава 6

Гильбертовы пространства

6.1. Введение

Кто-то говорил, что матобесам в курсе ФА надо читать только гильбертовы пространства. Но неизвестно, как жить без трех китов функционального анализа, которые нас ждут дальше :(. А вы бы хотели 32 лекции про гильбертовы пространства?

Определение 6.1. H — линейное пространство над $\mathbb{C}$. Скалярное произведение $H \times H \to \mathbb{C}$, $x, y \in H, (x, y)$ — скалярное произведение удовлетворяет следующим аксиомам

1. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y), \lambda \in \mathbb{C},\ x, y \in H$
2. $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$
3. $(y, x) = \overline{(x, y)}$ (комплексное сопряжение)
4. $(x, x) \geq 0, (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

если H над $\mathbb{R}$, то 3 выглядит как $(y, x) = (x, y)$

Снабдим H нормой: $||x|| := \sqrt{(x, x)}$ — норма, порожденная скалярным произведением. $(H, ||x||)$ называется предгильбертовым пространством.

Если $(H, ||\cdot||)$ полное, то H — гильбертово.

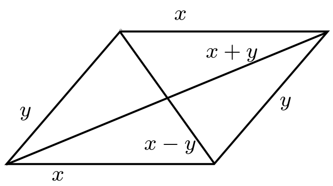


Рис. 6.1: Тождество параллелограмма

Свойство 6.1 (скалярное произведение)**.**

1. $x, y \in H \Rightarrow |(x,y)| \le ||x|| \cdot ||y||$ (неравенство К-Б)
2. $||x|| = \sqrt{(x,x)}$ удовлетворяет аксиомам нормы
3. $||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$ (тождество параллелограмма)
4. непрерывность (x,y), то есть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (x,y)$

2.

$$||x|| = 0 \Leftrightarrow (x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$
$$||\lambda x||^2 = (\lambda x, \lambda x) = \lambda \cdot \overline{\lambda}(x,x) = |\lambda|^2\,||x||^2$$

$$||x+y||^2 = (x+y, x+y) = ||x||^2 + (x,y) + (y,x) + ||y||^2 =$$
$$= ||x||^2 + 2\operatorname{Re}(x,y) + ||y||^2 \le ||x||^2 + 2\,||x|| \cdot ||y|| + ||y||^2 =$$
$$= (||x|| + ||y||)^2$$

□

Кто не верит в тождество параллелограмма, может проверить сам

4.

$$|(x,y) - (x_n,y_n)| \le |(x,y) - (x,y_n)| + |(x,y_n) - (x_n,y_n)| =$$
$$= |(x, y - y_n)| + |(x - x_n, y_n)| \overset{\text{К-Б}}{\le}$$
$$\le ||x|| \cdot \underbrace{||y - y_n||}_{\to 0} + \underbrace{||x - x_n||}_{\to 0}\,\underbrace{||y_n||}_{\le M} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$\lim\limits_{n\to\infty} ||y_n|| = ||y|| \Rightarrow \exists\, M : ||y_n|| \le M$ □

Пример 6.1.

$$l_n^2 = \{x : x = \{x_1, \dots, x_n\}, x_j \in \mathbb{C}\}, ||x||_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_j|^2}$$

$$(x, y) = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j}, l_n^2 \text{ — гильбертово}$$

$$y = (y_1, \dots, y_n), y_j \in \mathbb{C}, \overline{y_j} \text{ — комплексное сопряжение}$$

Пример 6.2 (l^2)**.** $l^2 = \left\{x : x = \{x_j\}_{j=1}^{\infty}, ||x|| = \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2} < +\infty\right\}$. $(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \overline{y_j}$. l^2 — гильбертово

Главый пример

Пример 6.3. (X, U, μ) — пространство с мерой. $L^2(X, \mu)$,

$$||f|| = \left(\int_X |f(x)|^2 \, d\mu\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty$$

$(f, g) = \int_X f(x) \cdot \overline{g(x)} d\mu, L^2(X, \mu)$ — полное, $\Rightarrow$ гильбертово

Пример 6.4 (пространство Харди)**.** H^2 — пространство Харди

$$H^2 = \left\{f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, ||f||^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 < +\infty\right\}$$

H^2 линейно изометрически изоморфно l^2.

$$(f, g) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{b_n}, g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \Rightarrow H^2 \text{ гильбертово}$$

Отметим, где f будет аналитической

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 < +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \Rightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \le 1$$
$$\Rightarrow R \ge 1$$

где R — радиус круга сходимости ряда $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}, f \in H^2 \Rightarrow f \text{ аналитическая в } \{z : |z| < 1\}$$

Теперь примеры предгильбертовых пространств

Пример 6.5. F — финитные последовательности.
$(x,y) \in F, (x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \overline{y_j}$ (конечная сумма $F \subset l^2, ||x|| = \sqrt{\sum_{j=1}^{N} |x_j|^2}), x_{N+k} = 0$ $k \in \mathbb{N}$. F — предгильбертово (не полное)

Пример 6.6. $C[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{C}\}$

$$||f|| = \left(\int_a^b |f(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}, (f,g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$$

не полное $\Rightarrow$ предгильбертово

Пример 6.7. $\mathcal{P} = \left\{ p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, a_k \in \mathbb{C}, n \geq 0 \right\}$.
$q(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k, (p,q) = \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{b_k}$ предгильбертово. $\mathcal{P}$ — линейно изометрически изоморфно $F : p(x) \to (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in F$. Пополнение p по этой норме до гильбертова пространства есть l^2.

Пример 6.8. $\mathcal{P}, \mathcal{P} \subset C[a,b]$. $(p,q) = \int_a^b p(x)\overline{q(x)}dx$ — предгильбертово, пополнением $\mathcal{P}$ будет $L^2(a,b)$ по мере Лебега.

Определение 6.2. H — гильбертово,

1. $x, y \in H, (x,y) = 0$, то $x \perp y$ (x ортогонален y)
2. $M \subset H, M$ — подмножество. Ортогональным дополнением к нему будем называть

$$M^{\perp} = \{y \in H : (y,x) = 0 \, \forall \, x \in M\}$$

Свойство 6.2. $M \subset H$ — гильбертово $\Rightarrow M^{\perp}$ — замкнутое подпространство

Доказательство.

$$y, z \in M^{\perp}, \lambda \in \mathbb{C}, \text{ пусть } x \in M$$
$$(\lambda y + z, x) = \lambda \underbrace{(y,x)}_{=0} + \underbrace{(z,x)}_{=0} \Rightarrow \lambda y + z \in M^{\perp}$$
$$\text{пусть } \{y_n\}_{n=1}^{\infty}, y_n \in M^{\perp}, \lim_{n\to\infty} y_n = y_0, \text{ пусть } x \in M$$
$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{(y_n, x)}_{=0} = (y_0, x) \Rightarrow (y_0, x) = 0 \Rightarrow y_0 \in M^{\perp}$$

□

В гильбертовом пространстве всегда существует элемент наилучшего приближения, он ещё и единственный!

Теорема 6.1 (о существовании элемента наилучшего приближения в гильбертовом пространстве)**.** H — гильбертово, $M \subset H, M$ — замкнутое подпространство, $\forall x \in H \Rightarrow \ \exists\, !z \in M$: $||x-z|| = \min_{h\in M} ||x-h|| = \rho(x, M)$

Для произвольного метрического пространства мы доказывали, что если есть конечномерное подпространство, то элемент существует. Доказательство начнём с простой леммы.

Лемма 6.1. H — гильбертово, замкнутое подпространство $M \subset H$. $x \in H \setminus M$, $u, v \in M$, $d = \inf_{h\in M} ||x-h||$

$$\Rightarrow ||u-v||^2 \le 2(||u-x||^2 + ||v-x||^2) - 4d^2$$

Доказательство. Применим тождество параллелограмма к $(u-x), (v-x)$

$$||u-v||^2 + ||u+v-2x||^2 = 2(||u-x||^2 + ||v-x||^2)$$

тут 3 слагаемых из 4 участвуютв формулировке леммы, нужно оценить только второе слагаемое.

$$||2x-u-v|| = 2\left|\left|x - \frac{u+v}{2}\right|\right| \ge 2d$$

$$\frac{u-v}{2} \in M \Rightarrow ||u-v||^2 \le 2(||u-x||^2 + ||v-x||^2) - 4d^2$$

□

Доказательство. Обозначим $d = \rho(x, M)$. Мы ещё не знаем, достигается ли расстояние, но знаем, что $\exists \left\{y_n\right\}_{n=1}^{\infty}, y_n \in M.\ \lim\limits_{n\to\infty} ||x-y_n|| = d$. План такой: мы докажем, что последовательность фундаментальная, значит, предел лежит в M и всё доказано.

воспользуемся леммой и устремим в получившемся неравенстве n, m к ∞

$$||y_n - y_m||^2 \overset{\text{лемма}}{\leq} 2(\underbrace{||x - y_n||^2}_{d^2} + \underbrace{||x - y_m||^2}_{d^2}) - 4d^2 \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\Rightarrow \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ — фундаментальная, } H \text{ — гильбертово } \Rightarrow$$

$$\exists \lim_{n\to\infty} y_n = z, z \in M, \text{ т.к. } M \text{ замкнуто } \Rightarrow$$

$$d = \lim_{n\to\infty} ||x - y_n|| = ||x - z||$$

теперь проверим единственность

$$\text{пусть } ||x - z|| = d, ||x - u|| = d \quad z, u \in M$$

воспользуемся ещё раз леммой

$$\Rightarrow ||z - u||^2 \leq 2(\underbrace{||x - z||^2}_{=d^2} + \underbrace{||x - u||^2}_{=d^2}) - 4d^2 = 0 \Rightarrow z = u$$

□

Теорема 6.2 (о проекции на подпространство). H — гильбертово, $M \subset H$, M — замкнутое подпространство

$$\forall x \in X \, \exists\, !z, w : x = z + w, z \in M, w \in M^{\perp}$$

Этот элемент z как раз будет ближайшим элементом, который появился в предыдущей теореме.

Доказательство.

$$d \coloneqq \rho(x, M) \quad \exists\, z \in M \quad ||x - z|| = d \quad w \coloneqq x - z$$

проверим, что $w \perp M$; будем пользоваться тем, что для любой точки расстояние до M больше или равно d

$$\text{пусть } u \in M, u \neq 0 \, \forall\, t \in \mathbb{R} \; z + tu \in M$$

$$d^2 \leq ||x - (z + tu)||^2 = ||w - tu||^2 = (w - tu, w - tu) = \underbrace{||w||^2}_{=d^2} - t(u, w) - t(w, u) + t^2 ||u||^2 \Rightarrow$$

так как 2 и 3 слагамое комплексно сопряжённые

$$t \cdot 2 \operatorname{Re}(u, w) \leq t^2 \left|\left|u^2\right|\right|$$

неравенство верно для любого вещественного t

$$\left.\begin{array}{l}\text{пусть } t > 0 \Rightarrow 2\,\mathrm{Re}(u,w) \leq t\,||u||^2 \ \forall\, t > 0 \Rightarrow \mathrm{Re}(u,w) \leq 0 \\ \text{пусть } t < 0 \Rightarrow 2\,\mathrm{Re}(u,w) \geq t\,||u||^2 \ \forall\, t < 0 \Rightarrow \mathrm{Re}(u,w) \geq 0\end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{Re}(u,w) = 0$$

$$\text{аналогично } \forall\, t \in \mathbb{R}\; d^2 \leq ||x - (z + itu)||^2 \Rightarrow \mathrm{Im}(u,w) = 0$$

$$\Rightarrow (u,w) = 0, \text{ то есть } w \perp M \Rightarrow w \in M^{\perp}$$

осталось проверить единственность

$$\text{пусть } x = z + w, x = z_1 + w_1 \quad z, z_1 \in M,\ w, w_1 \in M^{\perp}$$

$$\Rightarrow u = \underbrace{z - z_1}_{\in M} = \underbrace{w_1 - w}_{\in M^{\perp}} \Rightarrow u \perp \Rightarrow (u,u) = 0$$

$$\Rightarrow u = 0 \Rightarrow z = z_1, w = w_1$$

□

Определение 6.3. H — гильбертово, X, Y — замкнутые подпространства. $H = X \oplus Y$. H — ортогональная сумма подпространств X и Y, если

1. $\forall\, h \in H\ \exists\, x \in X, y \in Y : h = x + y$
2. $\forall\, x \in X, y \in Y\ (x,y) = 0$

Замечание 6.1.

X, Y — подпространства в H, $X \perp Y$, то есть $\forall\, x \in X, \forall\, y \in Y\ (x,y) = 0 \Rightarrow X \cap Y = \{0\}$.

Доказательство. $u \in X \cap Y \Rightarrow u \perp u \Rightarrow u = 0$ □

Замечание 6.2. Если $H = X \oplus Y$, то $\forall\, x \in H\ \exists\, !x \in X,\ \exists\, !y \in Y$ т.ч. $h = x + y$

Доказательство. Пусть $h = x + y, h = x_1 + y_1\ x, x_1 \in X,\ y, y_1 \in Y \Rightarrow \underbrace{x - x_1}_{\in X} = \underbrace{y_1 - y}_{\in Y} \overset{\text{Зам.1}}{\Rightarrow} x = x_1, y \in y_1$ □

Следствие 6.1.
1. M — замкнутое подпространство $\Rightarrow H = M \oplus M^{\perp}$
2. M — замкнутое подпрстранство $\Rightarrow (M^{\perp})^{\perp} = M$
3. Если $H = X \oplus Y$, X, Y — замкнутые $\Rightarrow Y = X^{\perp}$

Определение 6.4 (оператор ортогонального проектирования)**.** H — гильбертово, M — замкнутое подпространство. Знаем, что $\forall\, x \in H\, \exists\, !z \in M, w \in M^{\perp} : h = z + w$

$$P_M(h) \coloneqq z$$

P_M — оператор ортогонального проектирования на M.

Хоть в определении об этом нигде не сказано, но хорошо помнить, что $||h - z|| = \min_{y \in M} ||h - y||$. На экзамене часто пристают с вопросом, откуда же взять этот z. $w = P_{M^{\perp}}(h)$.

Теорема 6.3 (критерий принадлежности оператора множеству ортогональных проекторов)**.** Теорема будет состоять из 2 частей. Первая полегче, в ней опишем простые свойства ортогонального проектора. Вторая посложнее, и в ней будет собственно критерий.

1. M — замкнутое подпространство, $P \coloneqq P_M \Rightarrow$
   a) $P \in \mathcal{B}(H)$
   b) $P^2 = P$
   c) $(Px, y) = (x, Py)$, $\forall\, x, y \in H$ (по секрету, это самосопряжённость)
2. пусть оператор P удовлетворяет свойствам 1-3 $\Rightarrow M \coloneqq P(H), M$ — замкнутое, $P = P_M$

1 часть. 1. Сначала проверим, что $P_M \in \mathrm{Lin}(H, M)$

$$h \in H \Rightarrow\ \exists\, !z \in M, w \in M^{\perp}\ h = z + w$$

утверждается, что $P(h) = z$

$$\alpha \in \mathbb{C} \Rightarrow \alpha h = \alpha z + \alpha w \quad \alpha z \in M, \alpha w \in M^{\perp}$$

по единственности разложения $\alpha z \Rightarrow$

$$P(\alpha h) = \alpha z$$
$$\text{пусть } h_1 \in H \Rightarrow h_1 \in z_1 + w_1 \; z_1 \in M, w_1 \in M^{\perp}$$
$$P(h_1) = z_1 \Rightarrow h + h_1 = \underbrace{(z + z_1) + (w + w_1)}_{\text{разложение единственно}} \; z + z_1 \in M, w + w_1 \in M^{\perp}$$
$$\Rightarrow P(h + h_1) = z + z_1 = P(h) + P(h_1)$$

Теперь проверим непрерывность P

$$h = z + w, \; z \perp w \Rightarrow (h, h) = (z, z) + (w, w)$$
$$||h||^2 = \left|\left|z^2\right|\right| + ||w||^2$$
$$z = P(h) \Rightarrow ||P(h)||^2 \leq ||h||^2 \Rightarrow P \in \mathcal{B}(H)$$
$$||P|| \leq 1$$
$$\text{если } M \neq \{0\}, \; \exists\, x \in M, x \neq 0 \Rightarrow Px = x \Rightarrow ||P|| \geq \frac{||Px||}{||x||} = 1$$
$$\Rightarrow ||P|| = 1$$

2. $x \in M \Rightarrow Px = x$,

$$\text{пусть } y = Px \Rightarrow y \in M \Rightarrow \underbrace{Py}_{=y=Px} = P(Px) \Rightarrow P^2 x = Px$$

3.

$$x, y \in H, P = P_m, Q = P_{M^{\perp}}$$
$$x = Px + Qx, y = Py + Qy$$
$$(Px, y) = (Px, Py + Qy) = (Px, Py)$$
$$(x, Py) = (Px + Qx, Py) = (Px, Py)$$

□

2 часть. $p \in \mathcal{B}(H), M \coloneqq P(H), M$ — подпространство в алгебраическом смысле. План такой: проверим, что P совпадает с ортогоналным проектором на M и что он отправляет ортогональное дополнение в 0. Проверим, что если $x \in M$, то $Px = x$.

$$\left.\begin{array}{c}\text{пусть } x \in M \Rightarrow \; \exists\, y \in H : Py = x \Rightarrow P(Py) = Px \\ \text{по свойству ортогонального оператора } P^2 = P \Rightarrow P(Py) = Py = x\end{array}\right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = Px$$

Проверим теперь замкнутость M

$$\text{пусть } \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in M, \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} Px_n = Px_0$$
$$Px_n = x_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = Px_0 \Rightarrow x_0 = Px_0 \Rightarrow x_0 \in P(H) = M$$

осталось убедиться, что оператор P отправляет в 0 ортогональное дополнение

$$\text{пусть } y \in M^{\perp}$$
$$||Py||^2 = (Py, Py) \overset{\text{самосопряжённость}}{=} (y, P(Py)) = (y, Py) \text{т.к. } y \in M^{\perp}, Py \in M = 0$$
$$\Rightarrow Py = 0$$

□

Мы знаем, что оператор совпадает на M, а ортогональное дополнение отправляет в 0

$$h \in H \Rightarrow h = z + w, z \in M, w \in M^{\perp}$$
$$\Rightarrow P(z + w) = z$$
$$P_m(z + w) = z$$
$$\Rightarrow P = P_m$$

Следствие 6.2 (ортогональный оператор на конечномерное подпространство). H — гильбертово, подпространство $M \subset H, \dim M = n, n \in \mathbb{N}$

$$\{e_j\}_{j=1}^{n} \text{ — ортонормированный базис}$$
$$(e_j, e_k) = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases}, x \in H, P_M(x) = \sum_{j=1}^{n} (x, e_j) e_j$$

Доказательство. $s_n = \sum_{j=1}^{n} (x, e_j) e_j,\ s_n \in M, w \coloneqq x - s_n$. Проверим, что $w \in M^{\perp}$. Для этого проверим, что он ортогонален всем e_j

$$(s_n, e_k) = \left(\sum_{j=1}^{n} (x, e_j) e_j, e_k \right) = (x, e_k)$$
$$\Rightarrow (x - s_n, e_k) = 0 \Rightarrow (w, e_k) = 0 \,\forall\, k, 1 \leq k \leq n$$
$$\Rightarrow w \perp M, \Rightarrow w \in M^{\perp} \Rightarrow P_M(x) = s_n$$

□

Следствие 6.3 (критерий полноты системы элементов в гильбертовом пространстве). H — гильбертово, $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}, x_\alpha \in H$ (A — множество индексов)

$$\{x_\alpha\}_{\alpha \in A} \text{ — полное } \Leftrightarrow (y \perp x_\alpha \,\forall\, \alpha \in A \Rightarrow y = 0)$$

Доказательство.

$$\{x_\alpha\}_{\alpha \in A} \text{ — полное } \Rightarrow \overline{\mathcal{L}\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}} = H$$
$$L = \overline{\mathcal{L}\{x_\alpha\}}$$
$$L = H \Leftrightarrow L^\perp = \{0\} \Leftrightarrow (y \perp x_\alpha \,\forall\, \alpha \in A \Rightarrow y = 0)$$

□

Несмотря на то, что доказательство тривиальное, этот критерий полноты очень полезен.

Упражнения, которое когда-то давали в качестве задачи на 5 на экзамене

Утверждение 6.1. $l^2, L = \{x = \{x_n\}_{n=1}^\infty \in l^2 : \sum_{n=1}^\infty x_n = 0\}$. Нужно доказать, что L — плотно в l^2

Утверждение 6.2. $z \in \mathbb{C}, |z| < 1, x_z = \{1, z, z^2, \dots, z^n, \dots\} \in l^2$. $\{z_n\}_{n=1}^\infty, |z_n| < 1, \lim\limits_{n\to\infty} z_n$ Нужно доказать, что $\{x_{z_n}\}_{n=1}^\infty$ — плотное семейство в l^2

Утверждение 6.3. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a, |a| < 1$. Нужно доказать, что $\{x_{z_n}\}_{n=1}^\infty$ — плотное семейство в l^2

То, что $|a| < 1$ — очень важно. При равенстве утверждения неверны.

Определение 6.5 (коэффициент Фурье). H — гильбертово, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированная система

$$(e_j, e_k) = 0 \text{ при } j \neq k$$
$$(e_k, e_k) = 1, ||e_k|| = 1$$
$$M_n = \{\alpha e_n | \alpha \in \mathbb{C}\}, \dim M_n = 1, P_{M_n}$$
$$x \in H, P_{M_n}(x) = (x, e_n)e_n$$
$$(x, e_n) \text{ — коэффициент Фурье}$$
$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n \text{ ряд Фурье по системе } \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$$

Определение 6.6.

$$\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ — ортогональная система (ОС)}$$
$$(e_j, e_k) = 0, j \neq k, e_n \neq 0$$
$$M_n = \{\alpha e_n : \alpha \in \mathbb{C}\}$$
$$P_{M_n}(x) = \left(x, \frac{e_n}{||e_n||}\right), \frac{e_n}{||e_n||} = \frac{(x, e_n)}{||e_n||^2} e_n$$
$$\text{коэффициент Фурье по системе} \{e_n\}$$
$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{||(x, e_n)||}{||e_n||^2} e_n$$

Когда мы пишем $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, мы подразумеваем бесконечномерность пространства. Если же вы возьмёте книжку Колмогорова, то гильбертово пространство в ней по определению бесконечномерное. Однако И.В. решил убрать это условие в своём курсе, Ввдь есть теория конечномерных банаховых пространств, где переходят к пределу и получают утверждения про бесконечномерные пространства. В общем: если вам попадётся кровожадный помощник на экзамене и вы скажете, что гильбертово пространство бесконечномерное, он спросит: «С какоq стати?». Если не скажете — то он скажет, что вы даже не знаете определение, и вы в любом случае получите 2.

Следствие 6.4 (неравенство Бесселя). H — гильбертово, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ — О.Н.С, $x \in H \Rightarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 \leq ||x||^2$$

Доказательство.

$$h = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j, \alpha_j \in \mathbb{C} \Rightarrow$$

$$||h||^2 = \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2$$

$$L_n = \mathcal{L}\{e_j\}_{j=1}^{n}, P_{L_n}(x) = \sum_{j=1}^{n} (x, e_j) e_j$$

$$||P_{L_n}|| \leq 1 \Rightarrow ||P_{L_n}(x)||^2 \leq ||x||^2 \Rightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{n} |(x, e_j)| \leq ||x||^2 \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} |(x, e_j)|^2 \leq ||x||^2$$

□

Сейчас выясним, когда неравенство превращается в равенство, то есть когда можно узнать норму, вычислив эту сумму.

Теорема 6.4 (о разложении элемента гильбертова пространства в ряд Фурье). H — гильбертово, $x \in H, \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ — О.Н.С., тогда следующие условия равносильны

1. $x \in \overline{\mathcal{L}\{e_n\}_{n=1}^{\infty}}$
2. $x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n$
3. $||x||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2$ (равенство Парсеваля)

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$
По виду первое утверждение куда более слабое, чем второе. В первом

можно приблизить элемент сколько угодно хорошо какими-то элементами. Во втором же есть сходимость к какому-то ряду.

$$x \in H, x \in \overline{\mathcal{L}\{e_n\}_{n=1}^{\infty}}, \text{ пусть } \varepsilon > 0$$
$$\exists\, y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k, ||x-y|| < \varepsilon$$
$$L_n = \mathcal{L}\{e_k\}_{k=1}^{n} \Rightarrow \rho(x, L_n) < \varepsilon \quad P_{L_n}(x) = \underbrace{\sum_{j=1}^{n}(x, e_j)e_j}_{:=s_n}$$
$$\Rightarrow ||x - s_n|| \le ||x-y|| < \varepsilon \quad L_n \subset L_{n+1} \Rightarrow$$
$$||x - S_{n+1}|| \le ||x - S_n|| < \varepsilon \Rightarrow$$
$$\forall\, m \ge n\ ||x - S_m|| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = x$$

$2 \Rightarrow 1$ очевидно: $x = \lim\limits_{n\to\infty} s_n \Rightarrow x \in \overline{\mathcal{L}\{e_j\}_{j=1}^{\infty}}$
$2 \Rightarrow 3$
$s_n = \sum_{k=1}^{n}(x, e_k)e_k$, $x = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$, и по непрерывности скалярного произведения $\Rightarrow (x, x) = \lim\limits_{n\to\infty}(s_n, s_n) \Leftrightarrow$

$$||x||^2 = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}|(x, e_k)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}|(x, e_k)|^2$$

$3 \Rightarrow 2$

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n}|(x, e_k)|^2, \lim_{n\to\infty}\sigma_n = ||x||^2$$
$$w_n \coloneqq x - s_n,\ w_n \perp s_n \Rightarrow ||x||^2 = \underbrace{||s_n||^2}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} ||x||^2} + ||w_n||^2$$
$$||s_n||^2 = \sigma_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty}||w_n||^2 = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}||x - s_n|| = 0$$

$\square$

Следствие 6.5. H — гильбертово, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ — полная О.Н.С $\Rightarrow$

$$\forall\, x \in H\ x = \sum_{k=1}^{\infty}(x, e_k)e_k, ||x||^2 = \sum_{k=1}^{\infty}|(x, e_k)|^2$$

Доказывать нечего, принадлежность линейной оболочке означает полноту.

Определение 6.7. $(X, ||\cdot||)$ — нормированное пространство, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ — базис (Шаудера), если

$$\forall\, x \in X \,\exists\,!\, \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty},\ \alpha_n \in \mathbb{C} : x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$$

Пример 6.9. $l^p, 1 \leq p < +\infty, e_n = (0, 0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{n}, 0, \ldots)$

$$x \in l^p, x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n, ||x - s_n||_{l^p} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$c_0, x \in c_0, \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \quad ||x - s_n||_{\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Упражнение: $c = \left\{ x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty},\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \right\} \subset l^{\infty}$. Что тут будет базисом?

Замечание 6.3. Если в $(X, ||\cdot||)$ есть базис, то X — сепарабельно.

Замечание 6.4 (Проблема Банаха, проблема базиса)**.** Проблема Банаха, проблема базиса

$$X \text{ — нормированное сепарабельное} \overset{?}{\Rightarrow} \exists \text{ базис}$$

Собирались товарищи во Львове в кафе и выводили эти проблемы. Обычно математики любят сидеть в тиишине, нот вот Банах любил сидеть в кафе. Вероятно, они там не только чаи гоняли. Пер Энфло в 1973 году дал ответ на этот вопрос: нет. Он предоставил множество контр-примеров. Да и вообще он знаменит своими контр-примерами. Сейчас в Америке где-то работает.

Следствие 6.6. H — гильбертово, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ — полная О.Н.С. $\Rightarrow \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ — базис в H

Доказательство.

$$x \in H \Rightarrow x = \sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n$$

$$\text{проверяем единственность: пусть } x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n, \alpha_n \in \mathbb{C}$$

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \; \lim_{n\to\infty} \sigma_n = x \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(\sigma_n, e_k) = (x, e_k)$$

$$\text{пусть } n \geq k \Rightarrow (\sigma_n, e_k) = \alpha_k \Rightarrow \alpha_k = (x, e_k)$$

□

Теорема 6.5 (о существовании О.Н.Б. в сепарабельном гильбертовом пространстве)**.** H — сепарабельное гильбертово пространство $\Rightarrow$

$$\exists \; \{e_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ — О.Н.Б.}$$

По секрету, если убрать сепарабельность, то базис будет несчётный. Какова размерность, такой и базис. Обычно, когда говорят о гильбертовом пространстве, подразумевают гильбертово сепарабельное.

Доказательство. Будем действовать в 2 этапа. Сепарабельность означает, что есть счётное всюду плотное множество, возьмём его: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. 1 этап: по индукции выберем из нгео линейно независимую систему так, чтобы замыкание их линейной оболочки совпадало с замыканием линейной оболочки x_n. Оно будет полным и линейно-независимым Потом применим к нему ортогонализацию Грама-Шмидта (а он ученик Гильберта, кстати)

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_{n_1 - 1} = 0, x_{n_1} \neq 0 \quad z_1 = x_{n_1}$$

$$L_1 = \mathcal{L}(z_1) = \{\alpha z_1 | \alpha \in \mathbb{C}\}$$

$$x_{n_1+1}, \ldots, x_{n_2-1} \in L_1 \; x_{n_2} \notin L_1, z_2 = x_{n_2}, L_2 = \mathcal{L}(z_1, z_2)$$

$$\text{пусть выбрали } z_1, \ldots, z_m$$

$$z_m = x_{n_m}, x_{n_m+1}, \ldots, x_{n_{m+1}-1} \in L_m, x_{n_{m+1}} \notin L_m$$

$$z_{m+1} = x_{n_{m+1}}$$

как мы их выбираем?

$$\{z_j\}_{j=1}^{\infty} \text{ — линейно независимы}$$
$$\mathcal{L}(z_j)_{j=1}^{m} = \mathcal{L}\left\{x_k\right\}_{k=1}^{n_m} \ \forall\, m \Rightarrow \mathcal{L}\left\{z_j\right\}_{j=1}^{\infty} = \mathcal{L}\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$$
$$\Rightarrow H = \overline{\mathcal{L}\left\{z_n\right\}_{n=1}^{\infty}} \Rightarrow \{z_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ — полная}$$

Процесс ортогонализации Грама-Шмидта:

$$e_1 = \frac{z_1}{||z_1||}, \text{ пусть } e_1, \dots, e_{n-1} \text{ — выбрали } \mathcal{L}\left\{e_j\right\}_{j=1}^{n-1} = \mathcal{L}\left\{z_j\right\}_{j=1}^{n-1}$$

$$L_n = \mathcal{L}\left\{z_j\right\}_{j=1}^{n}, L_n \subsetneq L_{n+1} \quad e_n = \frac{z_n - P_{L_{n-1}}(z_n)}{\left|\left|z_n - P_{L_{n-1}}(z_n)\right|\right|} = \frac{z_n - \sum_{j=1}^{n=1}(z_n, e_j)e_j}{\left|\left|z_n - P_{L_{n-1}}(z_n)\right|\right|} \Rightarrow$$
$$\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ — полная О.Н.С.} \Rightarrow$$
$$\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ — базис (Шаудера)}$$

□

Теперь докажем, что все сепарабельные линейные пространства похожи друг на друга как две капли воды: не просто линейно изоморфны, а линейно изометрически изоморфно. Для конечномерных тоже верно, нужно только рассматривать пространства одинаковой размерности.

Теорема. Все сепарабельные бесконечномерные гильбертовы пространства линейно изометрически изоморфны друг другу

Доказательство. H — гильбертово сепарабельное, $\dim H = \infty$. Мы обсуждали, что линейный изоморфизм — отношение эквивалентности, отношение изометричности — тоже. Поэтому линейный изометрический изоморфизм есть отношение эквивалентности. Поэтому вместо того, чтобы брать H_1, H_2, возьмём H и l^2 и покажем, что они линейно изометрически изоморфны.

$$\text{пусть } \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ — О.Н.Б. в } H$$
$$\varphi : H \to l^2 \quad x \in H \quad x \mapsto \{(x, f_n)\}_{n=1}^{\infty}$$
$$||x||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, f_n)|^2 \Rightarrow ||x||_H = ||\varphi(x)||_{l^2}$$
$$\varphi \in \mathrm{Lin}(H, l^2) \text{ очевидно } \Rightarrow \varphi \in \mathcal{B}(H, l^2)$$
$$\varphi \text{ — инъективен}$$

проверим, что φ — сюръекция

$$\text{пусть } y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^2$$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} y_k f_k, s_n \in H, \text{ пусть m > n}$$

$$||s_m - s_n||^2 = \sum_{k=n+1}^{m} |y_k|^2 \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \{s_n\} \text{ — фундаментальная}$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} s_n = s, s = \sum_{k=1}^{\infty} y_k f_k \Rightarrow \varphi(s) = y$$

□

Замечание 6.5. Пусть $m \in \mathbb{N}$, H — гильбертово пространство, $\dim H = m \Rightarrow H$ — линейно изометрически изоморфно l_m^2.

6.2. Пространство, сопряжённое к гильбертову

Опишем все непрерывные функционалы в гильбертовом пространстве H.

Теорема (Ф.Рисс, общий вид линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве). H — гильбертово. Опишем набор линейных функционалов: покажем, что он непрерывный. Вторая часть будет утверждать, что других нет.

1. $y \in H, y$ — фиксирован. Рассмотрим отображение

$$f_y : H \to \mathbb{C} \quad x \mapsto (x, y) \,\forall\, x \in H$$
$$\Rightarrow f_y \in H^*, ||f_y||_{H^*} = ||y||_H$$

2. $f \in H^* \Rightarrow \exists\, !y \in H : f = f_y$, то есть $f(x) = (x, y) \,\forall\, x \in H$

1 часть.

$$f_y \in \mathrm{Lin}(H, \mathbb{C}) \text{ — очевидно из свойств скалярного произведения}$$

$$|f_y(x)| = |(x, y)| \overset{\text{К-Б}}{\leq} ||x|| \cdot ||y|| \,\forall\, x \in H$$
$$\Rightarrow f_y \in H^*, ||f_y||_{H^*} \leq ||y||_H$$

проведём тривиальное отбрасывание тривиальных случаев

$$y = 0 \Rightarrow f_y = \mathbb{0} \quad ||f_y|| = 0$$
$$\text{пусть } y \neq 0 \quad ||f_y|| = \sup_{x \in H, x \neq 0} \frac{|f_y(x)|}{||x||} \geq \frac{|f_y(y)|}{||y||} = \frac{(y,y)}{||y||} = ||y||$$
$$\Rightarrow ||f_y||_{H^*} = ||y||_H$$

□

2 часть. Намёк, откуда брать y: мы знаем, что $f_y(x) = 0 \Leftrightarrow (x, y) = 0 \Leftrightarrow x \in \{y\}^\perp$. Сначала рассмотрим и отбросим тривиальный случай: пусть $f(x) = \mathbb{0}$, то есть $f(x) = 0 \, \forall \, x \in H \Rightarrow$ пусть $y = 0, f = f_0$.
Теперь пусть $f \neq \mathbb{0}, N = \operatorname{Ker} f (N = f^{-1}(0)) \Rightarrow n \subsetneq H, f$ — непрерывный $\Rightarrow N$ — замкнутое подпространство. Значит, существует нетривиальное ортогональное дополнение $N^\perp$, то есть $N^\perp \neq \{0\}$, пусть $x_0 \in N^\perp, x_0 \neq 0$

$$, v = \frac{x_0}{f(x_0)}, f(x_0) \neq 0, f(v) = 1, f(v) = \frac{1}{f(x_0)} \cdot f(x_0) = 1$$

установим следующую вещь: $\dim N^\perp = 1$, то есть все элементы дополнения кратны v; вообще, это очевидно, гомоморфный образ группы изоморфен факторгруппе по ядру гомоморфизма, помните такую скороговорку из алгебры? но сейчас докажем аккуратно

$$\text{пусть } u \in N^\perp \quad \alpha \coloneqq f(u) \quad f(\alpha v) = \alpha f(v) = \alpha$$
$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow f(u - \alpha v) = 0 \Rightarrow u - \alpha v \in N \\ u, v \in N^\perp \Rightarrow u - \alpha v \in N^\perp \end{aligned}\right\} u - \alpha v = 0 \Rightarrow u = \alpha v$$
$$\forall \, u \in N^\perp f(u) = \alpha \Rightarrow u = \alpha v$$
$$u = \alpha v \Rightarrow f(u) = \alpha$$

v уже почти то, что нам надо, но мы его еще должны нормировать, чтобы не отправлять те же элементы в 0, что и f; найдём $\beta : f_{\beta v}(v) = 1 = f(v)$

$$f_{\beta v}(v) = (v, \beta v) = \overline{\beta} \, ||v||^2 = 1 \Rightarrow \beta = \frac{1}{||v||^2}$$
$$y = \frac{v}{||v||^2}$$
$$\text{пусть } x \in H, x = h + \alpha v, h \in N, \alpha v \in N^\perp$$
$$f(x) = \alpha, f_y(x) = \alpha \Rightarrow f = f_y$$

Всё, что осталось проверить, это единственность:

$$f_y = f_z \Rightarrow (x, y) = (x, z)\,\forall\, x \in H$$
$$\Rightarrow (x, y - z) = 0\,\forall\, x \in H \Rightarrow y - z = 0$$

$\square$

Замечание 6.6. Рассмотрим отображение $C : H \to H^*, C(y) = f_y$. Во-первых, с суммой всё в порядке: $C(y+z) = f_{y+z} = f_y + f_z = C(y) + C(z)$. А с умножением на комплексное число уже не всё хорошо: пусть $\alpha \in \mathbb{C}, C(\alpha y) = f_{\alpha y}, f_{\alpha y} = (x, \alpha y) = \overline{\alpha}(x, y) = \overline{\alpha} f_y(x), C(\alpha y) = \overline{\alpha} C(y)$, то есть умножение не совсем линейное. Но $||C(y)||_{H^*} = ||y||_H$, C — **антилинейный изометрический изоморфизм**. Удобно думать, что сопряжённое к гильбертову пространство — это оно само. Говорят: $H^* = H$, а имеют в виду это взаимно-однозначное соответствие $C(H) = H^*$. Это очень просто, но фантастически удобно: сопряжённое — это оно само, но за удобство надо платить: α переходит в $\overline{\alpha}$.

Пример 6.10. Есть $l^2, (x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$, $x, y \in l^2$. Как устроены все линейные функционалы в пространстве последовательностей l^2?$f \in (l^2)^* \Rightarrow\ \exists\, !y \in l^2 : f(x) = (x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$.

Пример 6.11. (X, μ), $L^2(X, \mu), (f, g) = \int_X f(x)\overline{g(x)} d\mu$

$$F \in (L^2(X, \mu))^* \Rightarrow\ \exists\, !g \in L^2(X\mu) : F(f) = \int_X f(x)\overline{g(x)} d\mu$$

Посмотрим сейчас чуть-чуть, как эта теория применяется к классическим рядам Фурье, которые были у нас в анализе.

6.3. Классические ряды Фурье

Как сходятся ряды Фурье в L^2 по мере Лебега?

Пример 6.12.

$L^2_{\mathbb{R}}[-\pi, \pi]$ по мере Лебега $dx, (f, g) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx, \{1, \cos nx, \sin nx\}_{n \in \mathbb{N}}$

Для того, чтобы что-то утверждать, нам понадобится второй вариант теоремы Вейерштрасса: но доказывать мы его не будем.

Теорема (Вейерштрасса). $f \in \tilde{C}_{\mathbb{R}}[-\pi, \pi](f \in C[-\pi, \pi], f(-\pi) = f(\pi))$

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, T(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

$$||fT||_\infty = \max_{x \in [-\pi, \pi]} |f(x) - T(x)| < \varepsilon$$

то есть существует многочлен, который приближает нашу функцию с точностью до ε

Теорема 6.6. $\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n \in \mathbb{N}}$ — полная О.С. в $L^2_{\mathbb{R}}[-\pi, \pi]$

Доказательство.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \sin(mx) dx = 0 \qquad \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(nx))^2 dx = \pi = \int_{-\pi}^{\pi} (\sin nx)^2 dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = 2\pi \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos(mx) dx = 0 (n \neq m)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin(mx) dx = 0 (n \neq m)$$

$$\Rightarrow \{1, \cos nx, \sin nx\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ — ортонормированная система}$$

мы уже доказали, что $C[-\pi, \pi]$ плотно в $L^2[-\pi, \pi]$ по мере Лебега, то есть любую функцию из L^2 можно приблизить сколь угодно хорошо, найдя такую функцию g, что разница интегралов будет меньше ε, но g в отличие от f — 2π-периодическая

$$\Rightarrow \tilde{C}[-\pi, \pi] \text{ плотно в } L^2[-\pi, \pi]$$

$$\exists \, g \in \tilde{C}[-\pi, \pi] \quad \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon \exists \, \delta > 0 : g(x) = f(x), x \in [-\pi, \pi - \delta]$$

$$\Rightarrow \tilde{C}[-\pi, \pi] \text{ плотно в } L^2[-\pi, \pi]$$

$$\forall \varepsilon > 0 \, \forall f \in L^2[-\pi, \pi] \, \exists \, g \in \tilde{C}[-\pi, \pi], ||f - g||_{L^2} < \varepsilon$$

по теоремере Вейерштрасса $\exists \, T = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx$

$$||g - T||_\infty < \varepsilon \Rightarrow ||g - T||_2 = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |g(x) - T(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} < (\varepsilon^2 \cdot 2\pi)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2\pi} \cdot \varepsilon$$

$$\Rightarrow ||f - T||_2 < \varepsilon(1 + \sqrt{2\pi}) \Rightarrow \{1, \cos nx, \sin nx\} \text{ — полная}$$

□

Следствие 6.7. Пусть $f \in L^2_{\mathbb{R}}[-\pi,\pi]$. Коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx, b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kxdx$$

Теперь что же значит $f(x)$ разлагается в свой ряд Фурье?

$$S_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx) \Rightarrow$$

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad (*)$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k + \cos kx + b_k\sin kx) \text{ в смысле } (*)$$

Пример 6.13. $L^2_{\mathbb{C}}[-\pi,\pi], f \in L^2_{\mathbb{C}}[-\pi,\pi], f = u + iv$

$$u, v \in L^2_{\mathbb{R}}[-\pi,\pi] \Rightarrow \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\right\} \text{ – ОНБ}$$

Пример 6.14. $L^2_{\mathbb{C}}[-\pi,\pi], \{e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — полная О.С.

$$(f,g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx, (e^{inx}, e^{imx}) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x}dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 2\pi & n = m \end{cases}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), n \neq 0$$

$$c_0 = a_0$$

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{-ikx} = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx) = S_n x$$

$$||f - S_n||_2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \left\{e^{inx}\right\}_{n\in\mathbb{Z}} \text{ — полная система}$$

Пример 6.15. $L^2_{\mathbb{R}}[0,\pi], \{\cos nx\}_{n=0}^{+\infty}$ — полная О.С.

Доказательство.

$$f \in L^2_{\mathbb{R}}[0,\pi],\ \text{пусть}\ f(-x) = f(x), x \in (0,\pi]$$
$$f \in L^2_{\mathbb{R}}[-\pi,\pi], b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx = 0$$
$$||f - S_n(f)||_{L^2[-\pi,\pi]} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \left|\left| f - \left(a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx\right)\right|\right|_2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

□

Прощаемся с гильбертовыми пространствами.

Часть IV

Линейные функционалы

Глава 7

Геометрический смысл линейного функционала

Линейное пространство, без нормы, без топологии, может, уже даже в алгебре доказывали такую теорему.

Теорема 7.1. *X — линейное пространство над $\mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$)*

1. $f \in \mathrm{Lin}(X, \mathbb{C}), f \neq \mathbb{0}, L = \mathrm{Ker}\, f \Rightarrow$

$$\dim(X/L) = 1$$

   $\mathrm{codim}\, L \coloneqq \dim(X/L)$ — коразмерность, не то чтобы мы будем этим пользоваться, просто сообщение по секрету

2. пусть $L \subset X, L$ — подпространство, такое что $\dim(X/L) = 1$. $x_0 \in X \setminus L \Rightarrow \exists\, ! f \in \mathrm{Lin}(X, \mathbb{C}), L = \mathrm{Ker}\, f, f(x_0) = 1$

Поскольку образ одномерен, это и означает, что фактор по ядру имеет такую же размерность, а образ у нас это $\mathbb{C}$

1 утверждение. Пусть $x_0 \in X \setminus L \Rightarrow f(x_0) \neq 0, v = \frac{x_0}{f(x_0)} \Rightarrow f(v) = 1$

$$(X/L) = \{\overline{x}\}_{x \in X}, \overline{x} = \{x + y | y \in L\}$$
$$\text{возьмём какой-то } x \in X, \alpha \coloneqq f(x), f(\alpha v) = \alpha f(v) = \alpha$$
$$\Rightarrow f(x - \alpha v) = 0 \Rightarrow x - \alpha v \in L \Rightarrow \overline{x} = \alpha \overline{v}$$
$$\Rightarrow \dim(X/L) = 1$$

□

2 утверждение.

$$(X/L) = \{\overline{x}\}_{x\in X} \dim(X/L) = 1 \Rightarrow \ \forall\, x \in X \ \exists\, \alpha \in \mathbb{C} : \overline{x} = \alpha\overline{x_0}$$
$$\text{определим } f : X \to \mathbb{C}$$
$$\text{установили, что } \forall\, x \ \exists\, \alpha \in \mathbb{C} : \overline{x} = \alpha\overline{x_0},\ f(x) \coloneqq \alpha \Rightarrow f \in \operatorname{Lin}(X, \mathbb{C})$$
$$f(x_0) = 1$$
$$\text{пусть } f(x) = 0 \Rightarrow \overline{x} = 0 \cdot \overline{x_0} = \overline{0} = L \Rightarrow x \in L \Rightarrow$$
$$\operatorname{Ker} f = L$$

Проверим единственность:

$$\text{пусть } g \in \operatorname{Lin}(X, \mathbb{C}), \operatorname{Ker} g = L, g(x_0) = 1$$
$$\forall\, x \in X \ x = y + \alpha x_0 \text{ где } y \in L, \alpha \in \mathbb{C}$$
$$\Rightarrow f(x) = \alpha, g(x) = \alpha$$

□

докажем теперь что-то с функционалами для нормированного пространства

Теорема 7.2 (норма линейного функционала)**.** $(X, ||\cdot||)$ — нормированное пространство. $f \in X^*, f \neq \mathbb{0}, L = \operatorname{Ker} f, f(x_0) = 1 \Rightarrow ||f|| = \frac{1}{\rho(x_0, L)}$

Доказательство.

$$L = f^{-1}(0) \Rightarrow L \text{ — замкнутое}$$
$$d = \rho(x_0, L) = \inf_{y\in L} ||x_0 - y||$$
$$1 = f(x_0) = f(x_0 - y) \Rightarrow |f(x_0 - y)| \leq ||f|| \cdot ||x_0 - y|| \ \forall\, y \in L$$
$$\Rightarrow 1 \leq ||f|| \inf_{y\in L} ||x_0 - y|| = ||f|| \cdot d \Rightarrow \frac{1}{d} \leq ||f||$$

Получили неравенство в одну сторону. Теперь в другую:

$$x \notin L \Rightarrow f(x) \neq 0,\ f\left(\frac{x}{f(x)}\right) = 1, f(x_0) = 1 \Rightarrow$$
$$f\left(\frac{x}{f(x)} - x_0\right) = 0 \Rightarrow \frac{x}{f(x)} - x_0 = y, y \in L$$
$$\Rightarrow \frac{x}{f(x)} = x_0 - (-y) \Rightarrow \left|\left|\frac{x}{f(x)}\right|\right| = ||x_0 - (-y)|| \geq d$$
$$\Rightarrow |f(x)| \leq \frac{1}{d} \cdot ||x|| \Rightarrow ||f|| \leq \frac{1}{d}$$

Вот и получили, что было обещано: $||f|| = \frac{1}{d}$ $\square$

Замечание 7.1. В условиях теоремы, $M = f^{-1}(1)$, тогда $M = x_0 + L, \rho(x_0, L) = \rho(0, M)$. Вместо того, чтобы рассматривать ядро, можно рассматривать такое «сдвинутое ядро». Подпространство L можно сдвинуть на вектор, это довольно очевидно, не будем это доказывать.

7.1. Продолжение линейного функционала

Новый раздел, в котором наконец появится существенная теорема, до этого были так...

Будет задан функционал с дополнительным условием, и мы будем продолжать его на всё пространство так, чтобы условие сохранилось. Нам понадобится не только анализ, но и математическая логика, в частности, лемма Цорна. Поскольку нам никто её не рассказывал, придётся её рассказать. Нам понадобится индукция: но не обычная, ведь у нас какие-то гигантские пространства, переход от n к $n+1$ нам ничем не поможет, нужен более хитрый трюк.

Определение 7.1 (частично упорядоченное множество)**.** $\mathcal{P}$ **частично упорядоченное множество**, если $\mathcal{R} \subset \mathcal{P} \times \mathcal{P}, (a, b) \in \mathcal{R}$, то есть $a \leq b$. $\mathcal{R}$ — порядок, если выполнены аксиомы

1. $\forall\, a \in \mathcal{P}, (a, a) \in \mathcal{R}$, то есть $a \leq a$ (рефлексивность)
2. если $(a \leq b \wedge b \leq c) \Rightarrow a \leq c$ (транзитивность)
3. если $(a \leq b \wedge b \leq a)$, то $a = b$ (антисимметричность)

важно, что не для всех элементов определён порядок, а для каких-то

Определение 7.2 (линейно упорядоченное множество)**.** $\mathcal{P}$ — частично упорядоченное, $A \subset \mathcal{P}$, A — линейно упорядочено, если $\forall\, a, b \in A, a \leq b$ или $b \leq a$

Определение 7.3 (верхняя грань множества)**.** $A \subset \mathcal{P}$, x — верхняя грань для A, если $a \leq x \,\forall\, a \in A$

Определение 7.4 (максимальный элемент множества)**.** y — максимальный элемент в $\mathcal{P}$, если $y \leq a \Rightarrow y = a$. Максимальный в том смысле, что больше него не существует, но таких максимумом может быть хоть миллион, и они между собой не сравнимы.

Лемма (Цорн)**.** Если в $\mathcal{P}$ любое линейно упорядоченное множество имеет верхнюю грань, то в $\mathcal{P}$ есть максимальный элемент

Аксиома (Выбора)**.** $\{B_\alpha\}_{\alpha \in A}$, $B_\alpha \neq \mathbb{0} \Rightarrow \exists\, C = \{b_\alpha : b_\alpha \in B_\alpha\}_{\alpha \in A}$

Если есть алгоритм выбора элементов из множества, то пользуемся им, без этой аксиомы.

Для общего развития: Аксиома Выбора $\Leftrightarrow$ Лемма Цорна.
Закончили с ликбезом по теории множеств.

Определение 7.5 (выпуклый функционал)**.** X — линейное пространство над $\mathbb{C}$ $(\mathbb{R})$. $p : x \to \mathbb{R}, p$ — выпуклый функционал, если

1. $p(x + y) \leq p(x) = p(y)\, \forall\, x, y \in X$
2. $p(tx) = tp(x)\, \forall\, t \geq 0$

Замечание 7.2. p — полунома, тогда $p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x)\, \forall\, \lambda \in \mathbb{C}(\mathbb{R}) \Rightarrow p$ — выпуклный функционал

Считается, что весь линейный функциональный анализ стоит на трёх китах, и мы дошли до Кита №1.

Теорема 7.3 (Хан-Банах, о продолжении линейного функционала в вещественном пространстве)**.** X — линейное пространство над $\mathbb{R}$, $p : X \to \mathbb{R}$, p — выпуклый функционал. $L \subset X, L$ — подпространство, $f \in \mathrm{Lin}(L, \mathbb{R}), f(x) \leq p(x)\, \forall\, x \in L$ (говорят f подчинён p)

$$\exists\, g \in \mathrm{Lin}(X, \mathbb{R}), g(x) = f(x), x \in L \quad g(x) \leq p(x)\, \forall\, x \in X$$

Тут очень важно, что пространство вещественное, у нас будет другая теорема для комплексного. Эта теорема всё время возникает, мы ей либо по умолчанию пользуемся, либо следствиями из неё.

Доказательство будет состоять из 2 частей. Первая: — естественная часть МА, покажем, что существует функционал, продлённый на одну размерность больше и который совпадает с f на подпространстве. Во второй части продлим на всё X, там нам и понадобится это логическое жульничество.

Доказательство.

$$f \in \mathrm{Lin}(L, \mathbb{R}), z \in X \setminus L$$
$$L_1 = \mathcal{L}(L, z) = \{x + tz : t \in \mathbb{R}, x \in L\}$$

докажем, что $\exists f_1 \in \mathrm{Lin}(L, \mathbb{R}) : f_1|_L = f, f_1(y) \le p(y) \forall\, y \in L_1$; мы можем распоряться только значением f_1

$$f_1(z) = c \quad c \in \mathbb{R}, \text{ выберем «c» так, как надо}$$
$$y = x + tz \in L_1 \Rightarrow f_1(y) = f(x) + tc$$

хотим доказать $f(x) + tc \le p(x + tz) \forall\, t \in \mathbb{R}$, и, так как можно из функционала выносить только положительные числа, это эквивалентно

$$\begin{cases} f(x) + tc \le p(x + tz) & t > 0 \\ f(x) - tc \le p(x - tz) & t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} f\left(\frac{x}{t}\right) + c \le p\left(\frac{x}{t} + z\right) & \forall\, t \\ f\left(\frac{x}{t}\right) - c \le p\left(\frac{x}{t} - z\right) & \forall\, t \end{cases}, \frac{x}{t} \in L \Leftrightarrow x \in L$$
$$u = \frac{x}{t}, u \in L, v = \frac{x}{t} \Leftrightarrow \left.\begin{bmatrix} f(u) + c \le p(u + z) \\ f(v) - c \le p(v - z) \end{bmatrix}\right\} \Leftrightarrow$$
$$f(v) - p(v - z) \le c \le p(u + z) - f(u),\ u, v \in L$$

если такое c есть, все хорошо, а если нет — ужасно

обозначим$A = \{f(v) - p(v - z) : v \in L\} \subset \mathbb{R}, B = \{p(u + z) - f(u) : u \in L\} \subset \mathbb{R}$

проверим, что $\forall\, a \in A, \forall\, b \in B a \le b$. это и будет означать, что между этими множествами и есть какой-то элемент (из-за полноты вещественной прямой)

$$f(v) - p(v - z) \le p(u + z) - f(u) \Leftrightarrow$$
$$f(v) + f(u) \le p(u + z) + p(v - z)$$
$$f(v) + f(u) = f(u + v) \le p(u + v) \text{ из-за выпуклости } p \le p(u + z) + p(v - z), u + v \in L$$
$$\Rightarrow\ \exists\, c \in \mathbb{R} : f_1(z) = c \Rightarrow f_1(y) \le p(y)\, \forall\, y \in L_1, f_1|_L = f$$

итак, мы продолжили функционал на размерность+1, и если бы было сепарабельное или банахово пространство, мы бы ограничились обычной индукцией, увеличивая размерность на 1, и по непрерывности пришли бы к пределу, и замыкание было бы всем X. Но раз у нас всего этого нет, мы будем пользоваться леммой Цорна, которая по всем кардиналам эквивалентна трансфинитной индукции. Что же у нас тут будет частично упорядоченным множеством? Рассмотрим все возможные продолжения линйеного фунционала, удовлетворяющие условиям

$$\mathcal{P} = \{(M, h)\}$$

где $L \subset M$ — подпространство X, $h \in \mathrm{Lin}(M, \mathbb{R}), h_L = f, h(x) \le p(x) \, \forall \, x \in M$. Докажем, что $\exists \, M = x$, то есть $(X, h) \in \mathcal{P}$. Раз в множестве p есть максимальный элемент, то он равен M, вот такой краткий план.

Как определяется частичный порядок в $\mathcal{P}$? $(M_1, h_1) \le (M_2, h_2)$, если $M_1 \subset M_2, h_{2M_1} = h_1$

$\{(M_\alpha, h_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ — линейно упорядоченное множество.

Построим верхнюю грань:

$$M_0 = \bigcup_{\alpha \in A} M_\alpha, h_0 : M_0 \to \mathbb{R}$$

пусть $x \in M_0 \Rightarrow \exists \, \alpha \in A : x \in M_\alpha, h_0(x) \coloneqq h_\alpha(x)$ и то, и другое определение требует обоснования корректности, ведь объединение подпространств не обязано быть подпространством (на вещественной плоскости: объединение 2 прямых, проходящих через 0 — непонятно, что вообще такое). Проверим, что M_0 — подпространство

$$\text{пусть } x, y \in M_0 \Rightarrow \ \exists \, \alpha, \beta \in A \; x \in M_\alpha, y \in M_\beta$$

вспоминаем про линейный порядок

$$(M_\alpha, h_\alpha) \le (M_\beta, h_\beta) \text{ или } (M_\beta, h_\beta) \le (M_\alpha, h_\alpha)$$
$$\text{пусть } (M_\alpha, h_\alpha) \le (M_\beta, h_\beta) \Rightarrow M_\alpha \subset M_\beta \Rightarrow x \in M_\beta \Rightarrow \lambda x + \mu y \in M_\beta$$
$$\Rightarrow \lambda x + \mu y \in M_0 \Rightarrow M_0 \text{ подпространство}$$

проверим корректность определения h_0, то есть что оно не должно зависеть от того, возьмём мы α или β

$$\text{пусть } x \in M_0, \text{ пусть } x \in M_\alpha, x \in M_\beta, \text{ пусть } (M_\alpha, h_\alpha) \le (M_\beta, h_\beta) \text{ или наоборот}$$
$$\Rightarrow h_\alpha(x) = h_\beta(x) \Rightarrow \left.\begin{bmatrix} h_0(x) = h_\alpha(x) \\ h_0(x) - h_\beta(x) \end{bmatrix}\right\} \text{ корректное определение}$$
$$h_0(x) \le p(x) \, \forall \, x \in M_0 \text{ (очевидно) } \Rightarrow (M_0, h_0) \in \mathcal{P}$$
$$\alpha \in A \quad (M_\alpha, h_\alpha) \le (M_0, h_0) \text{ — верхняя грань}$$

теперь, когда мы рассмотрели произвольное линейное упорядоченное множество и доказали, что у него есть верхняя грань, мы можем применить лемму Цорна

$$\Rightarrow \text{ в } \mathcal{P} \, \exists \text{ максимальный элемент } (M, h) \in \mathcal{P}$$
$$\text{пусть } m \subsetneq X \, \exists \, z \in X \setminus M, M_1 = \mathrm{Lin}(M, z)$$

построим, как в первой части продолжение $(M_1, f_1) \in \mathcal{P}$

$$(M, h) \leq (M_1, f_1), M \subsetneq M_1 \text{ противоречит максимальности } (M, h)$$
$$\Rightarrow M = x, (M, h) \text{ — искомое продолжение}$$

□

Прежде, чем рассказать комплексный аналог, сначала применение вещественного случая.

Теорема 7.4 (обобщённый предел ограниченной последовательности)**.**

$$l^\infty_\mathbb{R} = \left\{ x = \{x_n\}_{n=1}^\infty, x_n \in \mathbb{R}, ||x|| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < +\infty \right\}$$
$$\Rightarrow \; \exists \, F \in \mathcal{B}(l^\infty, \mathbb{R}) = (l^\infty)^*$$
$$\forall \, x \in l^\infty \; \underline{\lim} x_n \leq F(x) \leq \overline{\lim} x_n$$

в частности, если $\exists \lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, то $F(x) = x_0$

То есть каждой ограниченности сопоставляется число, причём это отображение линейное.

Доказательство.

$$x \in l^\infty, p(x) \coloneqq \overline{\lim} x_n, x = \{x_n\}_{n=1}^\infty \in l^\infty$$

откуда же берётся неравенство треугольника, которое фигурирует в выпуклости. когда в детстве мы доказывали такое неравенство, оно даже в Демидовиче есть:

$$\overline{\lim}(x_n + y_n) \leq \overline{\lim} x_n + \overline{\lim} y_n$$

напоминание, как это доказывается через альтернативное определение верхнего предела

$$a_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}, a_n \text{ убывают }, \lim_{n\to\infty} a_n = a, a = \overline{\lim} x_n.$$
$$b_n = \sup_{k\geq 0}\{y_{n+k}\}, b_n \text{ убывают к } b, b = \overline{\lim} y_n.$$
$$c_n = \sup_{k\geq 0}\{x_{n+k} + y_{n+k}\}, c_n \text{ убывают к } c = \overline{\lim}(x_n + y_n)$$
$$\text{пусть k } \geq 0 \quad x_{n+k} + y_{n+k} \leq a_n + b_n \,\forall\, k \Rightarrow c_n \leq a_n + b_n \Rightarrow c < a + b$$

Вот мы доказали, что это функционал

$$c = \left\{x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \exists \lim_{n\to\infty} x_n = x_0\right\}$$
$$g : c \Rightarrow \mathbb{R} \quad x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in C \Rightarrow g(x) = x_0$$
$$g(x) = \lim_{n\to\infty} x_n \leq p(x) = \overline{\lim} x_n$$
$$\text{по теореме Хана-Банаха } \exists\, F : l^{\infty} \to \mathbb{R}, F(x) \leq p(x)$$
$$F(x) = g(x) = x_0, \text{ если } x \in c$$
$$x \in l^{\infty}, p(-x) = \overline{\lim}(-x_n) = -\underline{\lim} x_n$$
$$-F(x) = F(-x) \leq p(-x) = -\underline{\lim}_{x_n} \Rightarrow F(x) \geq \underline{\lim} x_n$$

В формулировке обещалось $||F|| = 1$. мы можем взять $x = (1, 1, 1, \ldots)$

$$F(x) = 1, ||x||_{\infty} = 1 \Rightarrow ||F|| \geq 1$$
$$\forall\, x \ |F(x)| \leq \overline{\lim} x_n \leq \sup x_n = ||x||_{\infty} \Rightarrow ||F|| \leq 1$$

□

Хочется последнее неравенство записать в более общем случае.

$$F(x) = 1, ||x||_{\infty} = 1 \Rightarrow ||F|| \geq 1$$
$$\forall\, x \ |F(x)| \leq \overline{\lim} x_n \leq \sup x_n = ||x||_{\infty} \Rightarrow ||F|| \leq 1$$

Утверждение 7.1. 1. X — линейное, $p(x)$ — выпуклый функционал, $f \in \mathrm{Lin}(X, \mathbb{R})$

$$f(x) \leq p(x) \Rightarrow f(x) \geq -p(-x)$$

2. если $p(x)$ полунорма, $f(x) \leq p(x) \,\forall\, x \in X \Rightarrow |f(x)| \leq p(x)$

Доказательство. 1. $f(x) \le p(x) \Rightarrow f(-x) \le p(-x) \Rightarrow -f(x) \le p(-x) \Rightarrow f(x) \ge -p(x)$

2. p — полунорма $\Rightarrow p(-x) = p(x) \Rightarrow -p(x) \le f(x) \le p(x) \Rightarrow |f(x)| \le p(x)$

□

еперь, как было обещано, вариант теоремы продолжения линейного функционала для комплексного случая.

Теорема 7.5 (Баненблюст-Собчик, продолжение линейного функционала в комплексном линейном пространстве)**.** X над $\mathbb{C}$. В вещественном случае предполагали что p — выпуклый функционал, теперь предполагаем чуть большее: $p : X \to \mathbb{R}, p$ — полунорма, $L \subset X$ — подпространство, $f \in \mathrm{Lin}(L, \mathbb{C})$. Второе отличие состоит в том, что мы говорим $|f(x)| \le p(x) \,\forall\, x \in L \Rightarrow$

$$\exists\, g \in \mathrm{Lin}(X, \mathbb{C}), g|_L = f, |g(x)| \le p(x) \,\forall\, x \in X$$

Доказательство. Мы будем использовать доказательство для вещественного случая изо всех сил. Проведём овеществление X, то есть X над $\mathbb{R}$, $x, y \in X$, $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow ax + by \in X$, то есть забудем на какое-то время, что X над $\mathbb{C}$.

$$f(x) = u(x) + iv(x),\ u, v : L \Rightarrow \mathbb{R}$$

Проверим, что $u, v \in \mathrm{Lin}(L, \mathbb{R})$, а также покажем что между ними существует связь. Потом примением к u теорему Хана-Банаха, а там, глядишь, и получится то, что требовалось

$$y \in X \Rightarrow f(y) = u(y) + iv(y)$$

$$\left.\begin{array}{c} \Rightarrow f(x) + f(y) = u(x) + u(y) + i(v(x) + v(y)) \\ f(x+y) = u(x+y) + iv(x+y) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$u(x+y) = u(x) + u(y) \quad v(x+y) = v(x) + v(y)$$

$$\left.\begin{array}{c} \text{пусть } a \in \mathbb{R} \Rightarrow f(ax) = u(ax) + iv(ax) \\ f(ax) = af(x) = a(u(x) + iv(x)) \end{array}\right\} \Rightarrow u(ax) = a(u(x)), v(ax) = av(x)$$

проверили, что они линейные функционалы в вещественном случае. оказывается, они еще и связаны между собой особым образом

$$f(ix) = if(x)$$

$$u(ix) + iv(ix) = i(u(x) + iv(x)) \Rightarrow v(x) = -u(-ix)$$

перед тем, как применять теорему Хана-Банаха проверим, чего меньше этот функционал

$$u(x) \leq |u(x)| \leq |f(x)| \leq p(x) \text{ при } x \in L$$

применяем теорему Хана-Банаха к u

$$\exists\, \varphi \in \operatorname{Lin}(X, \mathbb{R}), \varphi|_L = u, \varphi(x) \leq p(x)\, \forall\, x \in X$$

на всякий случай отметим, что $|\varphi(x)| \leq p(x)$ так как p — полунорма, вдруг пригодится

$$\psi(x) \coloneqq -\varphi(ix) \Rightarrow \psi \in \operatorname{Lin}(X, \mathbb{R}) \quad x \in X$$
$$g(x) \coloneqq \varphi(x) + i\psi(x), g|_L = f \Rightarrow g \in \operatorname{Lin}(X, \mathbb{R})$$

g линейный в вещественном смысле. Остаётся проверить что он линейный в комплексном случае (можно вынести i) и что он подчинён p. Проверяем, что $g(ix) = ig(x)$

$$g(ix) = \varphi(ix) + i(-\varphi(-x)) = \varphi(-ix) + i\varphi(x) = i(\varphi(x) - i\varphi(ix)) =$$
$$= i(\varphi(x) + i\psi(x)) = ig(x)$$

$\Rightarrow g \in \operatorname{Lin}(X, \mathbb{C})$. Теперь проверяем подчинённость

$$\text{пусть } x \in X\ g(x) \in \mathbb{C} \Rightarrow g(x) = re^{i\theta}, r \geq 0 \Rightarrow$$

такой трюк: воспользуемся линейностью g

$$g(xe^{-i\theta}) = r$$
$$r = g(xe^{-i\theta}) = \varphi(xe^{-i\theta}) + i\psi(xe^{-i\theta})$$

вспоминем, что p — полунорма

$$\Rightarrow r = \varphi(xe^{-i\theta}) \leq p(xe^{-i\theta}) = \left|e^{-i\theta}\right| \cdot p(x) = p(x)$$
$$|g(x)| = r \leq p(x) \quad \forall\, x \in X$$

□

7.2. Продолжение линейных функционалов в нормированном пространстве

В этой части абсолютно все равно, пространство над $\mathbb{R}$ или же $\mathbb{C}$

Теорема 7.6 (Хан-Банах)**.** $(X, ||\cdot||)$ над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, теперь всё равно. $L \subset X, L$ — подпространство в алгебраическом смысле, $f \in L^*(L^* = \mathcal{B}(L, \mathbb{C})) \Rightarrow$

$$\exists\, g \in X^*, g|_L = f, ||g||_{X^*} = ||f||_{L^*}$$

Мы уже отмечали, что при продолжении норма может только увеличиться, но в условиях этой теорему норму же удаётся сохранить.

Доказательство. Если $f = \mathbb{0}$, то $g = \mathbb{0}$ и так далее

$$\text{пусть } f \neq \mathbb{0}, M := ||f||_{L^*}, p(x) := M \cdot ||x||, x \in X$$

$\Rightarrow p$ — норма ($\Rightarrow$ полунорма $\Rightarrow$ выпуклный функционал)

$$\text{пусть } x \in L \Rightarrow |f(x)| \leq ||f||_{L^*} \cdot ||x|| = p(x) \text{ (условие подчинения)}$$

Теперь применяем теорема Хана-Банаха, если X над $\mathbb{R}$ или Б-Сопчика, если X над $\mathbb{C}$

$$\begin{gathered}
\exists\, g \in \mathrm{Lin}(X, \mathbb{R})(\mathrm{Lin}(X, \mathbb{R})) \\
g|_L = f, \quad |g(x)| \leq p(x)\, \forall\, x \in X \\
\Rightarrow |g(x)| \leq M \cdot ||X||\ \forall\, x \in X \Rightarrow ||g||_{X^*} \leq M \\
\Rightarrow ||g||_{X^*} \leq ||f||_{L^*} \\
(||g||_{X^*} = \sup_{\{x \in X: ||x|| \leq 1\}} |g(x)| \geq \sup_{\{x \in L: ||x|| \leq 1\}} = ||f||_{L^*}) \\
\Rightarrow ||g||_{X^*} = ||f||_{L^*}
\end{gathered}$$

□

Следствие 7.1 (о достаточном числе линейных функционалов)**.** $(X, ||\cdot||), x_0 \in X \Rightarrow\ \exists\, g \in X^*, ||g|| = 1,\ g(x_0) = ||x_0||$, при этом

$$||x_0|| = \max\{h(x_0) : h \in X^*, ||h|| \leq 1\}$$

Доказательство. Если $x_0 = 0$, то $\forall\, g \in X^*, ||g|| = 1 \Rightarrow g(0) = 0$. Пусть $x_0 \neq 0, L = \{\alpha x_0 : \alpha \in \mathbb{C}\}$

$$f : L \to \mathbb{C}\ f(\alpha x_0) := \alpha\, ||x_0|| \Rightarrow f \in \mathrm{Lin}(L, \mathbb{C})$$

$$|f(\alpha x_0)| = |\alpha| \Rightarrow ||f|| = \sup_{\alpha \neq 0} \frac{|f(\alpha x_0)|}{||\alpha x_0||} = 1 \Rightarrow ||f||_{L^*} = 1$$

по теореме Хана-Банаха для нормированного пространства

$$\exists\, g \in X^*, ||g|| = 1, g|_L = f \Rightarrow f(x_0) = f(x_0) = ||x_0||$$
$$\text{пусть } h \in X^*, ||h|| \leq 1 \Rightarrow |h(x_0)| \leq ||h|| \cdot ||x_0|| \leq ||x_0||$$
$$\Rightarrow ||x_0|| \geq \sup_{\{h \in X^* : ||h|| \leq 1\}} |h(x_0)|\,, \text{ но } \exists\, g, ||g|| = 1, g(x_0) = |x_0|$$
$$\Rightarrow |x_0| = \max_{\{h \in X^* : ||h|| \leq 1\}} \{h(x_0)\}$$

в этом смысле и много, то есть есть такой, на котором максимум достигается □

Замечание 7.3. $f \in X^* \Rightarrow ||f|| = \sup_{\{x \in X : ||x|| \leq 1\}}$, то есть максимум может не достигаться

Пример 7.1.

$$C[-1,1] = X, \varphi(x) = \begin{cases} -1 & -1 \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$
$$G_\varphi(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\varphi(x)dx \quad G_\varphi \in (C[-1,1])^*$$
$$||G_\varphi|| = \int_{-1}^{1} |\varphi(x)|\, dx = 2$$

В качестве упражнения доказать, что $\nexists f \in C[-1,1], ||f|| \leq 1, |G(f)| = 2$

Следствие 7.2 (расстояние от элемента до подпространства)**.** $(X, ||\cdot||), L \subset X, L = \overline{L}$ — подпространство

$$x_0 \in X, d = \rho(x_0, L) = \inf_{y \in L} ||x_0 - y|| \Rightarrow$$
$$\exists\, g \in X^*, ||g|| = 1, g|_L = 0, g(x_0) = d, \text{ при этом}$$
$$d = \max\left\{|h(x_0)|\,, h \in X^*, ||h|| \leq 1, h|_L = 0\right\}$$

Это следствие полезно для решения экстремальных задач: от инфимума можно перейти к максимуму и решать другую задачу.

Доказательство. Если $x_0 \in L$, то $d = 0, \exists g|_L = 0, ||g|| = 1$(если $L \neq X$)

$$\text{пусть } x_0 \in X \setminus L, M = \mathcal{L}(L, x_0) = \{\alpha x_0 + y : \alpha \in \mathbb{C}, y \in L\}$$
$$f : M \to \mathbb{C}, f(\alpha x_0 + y) \coloneqq \alpha \Rightarrow\ \forall\, y \in L\ f(y) = 0$$
$$f^{-1}(0) = L, f \in \mathrm{Lin}(M, \mathbb{C}), ||f|| = \frac{1}{d}$$

это уже вычислили в геометрическом смысле линейного функционала

$$\text{так как } f(x_0) = 1$$
$$f_1 = df, \Rightarrow ||f_1||_{M^*} = 1, f_1(x_0) = d$$

по теореме Хана-Банаха для нормированного пространства

$$\exists\, g \in X^*, ||g||_{X^*} = 1, g|_M = f_1 \Rightarrow g(x_0) = d, g|_L = f|_L = 0$$

это первая часть утверждения следствия

$$\text{пусть } h \in X^*, ||h|| \leq 1, h(y) = 0 \,\forall\, y \in L \Rightarrow$$
$$|h(x_0)| = |h(x_0) - y| \leq ||h|| \cdot ||x_0 - y|| \leq ||x_0 - y|| \quad \forall\, y \in L \Rightarrow$$
$$|h(x_0)| \leq d \Rightarrow$$
$$\sup\{|h(x_0)| : ||h|| \leq 1, h|_L = 0\} \leq d, \text{ но } \exists\, g \Rightarrow$$
$$d = \max\{|h(x_0)| \cdot ||h|| \leq 1, h|_L = 0\}$$

□

Замечание 7.4. Следствие 1 — частный случай следствия 2 при $L = \{0\}$. На экзамене можно рассказать только второе следствие, отметив, что первое является его частным случаем

Следствие 7.3 (критерий полноты системы элементом в нормированном пространстве)**.** $(X, ||\cdot||)$ — нормированное пространство, $x_\alpha \in X, A$ — множество индексов, $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — полное семейство в $X \Leftrightarrow$ если $f \in X^*, f(x_\alpha) = 0, \alpha \in A \Rightarrow f = \mathbb{0}$

Критерий проверять гораздо проще, чем определение.

Доказательство. $\Rightarrow$

$$f(x_\alpha) = 0, L = \mathcal{L}\left\{x_\alpha\right\}_{\alpha \in A}, x \in L \Rightarrow$$
$$x = \sum_{k=1}^{n} c_k x_{\alpha_k} \Rightarrow f(x) = 0$$
$$\text{пусть } z \in X, y_n \in L \,\exists\, \{y_n\}, \lim_{n\to\infty} y_n = z, f \text{ — непрерывная} \Rightarrow$$
$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = f(z) \Rightarrow f(z) = 0$$
$$\Rightarrow f = \mathbb{0}$$

$\Leftarrow$

$$\{x_\alpha\}_{\alpha\in A} \text{ — полная} \Leftrightarrow \overline{L} = X$$
$$\text{пусть } L \subsetneq X \Rightarrow \exists\, x_0 \in X \setminus \overline{L} \overset{\text{Сл.2}}{\Rightarrow} \exists\, g \in X^*$$
$$g|_L = 0, g(x_0) = d(x_0, \overline{L}) \neq 0 \quad d = \rho(x_0, \overline{L})$$
$$g(x_\alpha) = 0\, \forall\, \alpha, g \neq \mathbb{0}$$

□

Наконец, с помощью последнего следствия докажем такую теорему

Теорема 7.7. $(X, ||\cdot||)$. Если X^* сепарабельно, то X — сепарабельно

Доказательство.

$$\exists\, \{f_n\}$$

вспомним, что $||f_n|| = \sup_{\{x\in X:||x||=1\}} |f_n(x)|$

$$\Rightarrow\, \exists\, x_n, ||x_n|| = 1 \quad ||f_n|| \geq |f_n(x_n)| \geq \frac{1}{2}\, ||f_n||$$
$$\text{проверим, что } \{x_n\}_{n=1}^\infty \text{ — полная в } X$$
$$\text{пусть } f \in X^*, f(x_n) = 0 \Rightarrow\, \exists\, \{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$$
$$\lim_{k\to\infty} ||f - f_{n_k}|| = 0\, \underbrace{(f - f_{n_k})(x_{n_k})}_{=|f_{n_k}(x_{n_k})|} \geq \frac{1}{2}\, ||f_{n_k}|| \leq ||f - f_{n_k}|| \cdot \underbrace{||x_{n_k}||}_{=1} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$
$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} ||f_{n_k}|| = 0 \Rightarrow f = \mathbb{0}$$
$$\overset{\text{Сл.3}}{\Rightarrow} \{x_n\}_{n=1}^\infty \text{ — полная}$$
$$\left(E = \left\{\sum_{k=1}^n c_k x_k, c_k \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}\right\} \text{ — счётное всюду плотное в } X\right)$$

□

Глава 8

Принцип равномерной ограниченности

Принцип равномерной ограниченности, тут будет много теорем, они все связаны с первой, а всё вместе это второй кит линейного функционального анализа.

Теорема 8.1 (принцип равномерной ограниченности)**.** $(X, ||\cdot||)$ — банхово, $(Y, ||\cdot||)$ — нормированное, $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}, U_\alpha \in \mathcal{B}(X, Y)$

$$\forall\, x \in X \ \sup_{\alpha \in A} ||U_\alpha x|| < +\infty \Rightarrow \ \exists\, M > 0 : ||U_\alpha|| \leq M \,\forall\, \alpha \in A$$

Причём тут равномерность?

$$||U_\alpha|| = \sup_{\{x \in X : ||x|| \leq 1\}} ||U_\alpha x||$$

$$\sup_{\alpha \in A} \sup_{\{x \in X : ||x|| \leq 1\}} ||U_\alpha x|| < +\infty$$

предполагаем для одного икса, а оказывается, что можно взять sup по единичной сфере, а потом ещё раз взять sup, и это фантастически полезно и в то же время странно. Начнём с простой леммы.

Лемма 8.1. $(X, ||cdot||), (Y, ||\cdot||)$ — нормированные

$$U \in \mathrm{Lin}(X, Y),\ \exists\, \varepsilon > 0, R > 0, a \in X :$$
$$U(B_\varepsilon(a)) \subset \overline{B_r(0)} \Rightarrow U \in \mathcal{B}(X, Y)$$
$$||U|| \leq \frac{2R}{\varepsilon}$$

Новизна этой простой леммы состоит в том, что не обязательно брать шар в точке 0, суть остаётся такой же, но чуть-чуть ухудшается норма.

Доказательство.

$$\text{пусть } z \in X, ||z|| < e, a \in B_\varepsilon(a), a+z \in B_\varepsilon(a)$$
$$z = (a+z) - a \Rightarrow ||Uz|| \le ||U(a+z)|| + ||U(a)|| \le R + R = 2R$$

пусть $x \in X, x \neq 0\ ||x|| < 1 \Rightarrow ||\varepsilon x|| < \varepsilon \Rightarrow ||U(\varepsilon x)|| \le 2R \Rightarrow ||Ux|| \le \dfrac{2R}{\varepsilon}$

$$||U|| = \sup_{\{x \in X : ||x|| \le 1\}} ||Ux|| \le \frac{2R}{\varepsilon}$$

□

Доказательство теоремы. Вспомним теорему Бэра о категориях: полное метрическое пространство нельзя представить как счётное объединение всюду плотных множеств.

$$n \in \mathbb{N}, D_n = \{y \in Y : ||y|| \le n\}$$
$$\Rightarrow U_\alpha^{-1}(D_n) \text{ — замкнутое множество в } X, \alpha \in A$$
$$E_n = \bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha^{-1}(D_n), E_n \text{ — замкнутое}$$

Проверим, что $X = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_n$

$$\text{пусть } x \in X \Rightarrow \sup_{\alpha \in A} ||U_\alpha x|| < +\infty \Rightarrow\ \exists\, n \in \mathbb{N}$$
$$\sup_{\alpha \in A} ||U_\alpha x|| < n \Rightarrow x \in U_\alpha^{-1}(D_n)\ \forall\, \alpha \in A$$
$$\Rightarrow x \in E_n$$
$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, X \text{ — банахово}, E_n \text{ — замкнутые } \Rightarrow$$

по теореме Бэра о категориях $\Rightarrow$

$$\exists\, n_0 : \mathrm{Int}(E_{n_0}) \neq \mathbb{0}, \text{ то есть}$$
$$\exists\, B_\varepsilon(a) \subset E_{n_0} = \bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha^{-1}(D_{n_0}) \Rightarrow$$
$$U_\alpha(B_\varepsilon(a))D_{n_0} \text{ по лемме } \Rightarrow ||U\alpha|| \le \frac{2n_0}{\varepsilon}\ \forall\, \alpha \in A$$

□

Следствие 8.1 (Принцип фиксации особенности)**.** X — банахово, Y — нормированное, $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}, U_\alpha \in \mathcal{B}(X,Y)$

$$\text{пусть } \sup_{\alpha \in A} ||U_\alpha|| = +\infty \Rightarrow \exists\, x_0 \in X : \sup_{\alpha \in A} ||U_\alpha(x_0)|| = +\infty$$

Утверждение 8.1. В условиях следствия $E = \{x \in X : \sup_{\alpha \in A} ||U_\alpha x|| = +\infty\}$. Доказать, что

1. E — всюду плотно в X
2. $X \subset E$ — множество первой категории

Определение 8.1 (сильный предел)**.**

$$(X, ||\cdot||), (Y, ||\cdot||), \{U_n\}_{n=1}^{\infty}, U_n \in \mathrm{Lin}(X,Y)$$

Если $\forall\, x \in X \lim\limits_{n\to\infty} U_n x = Ux$, то U — **поточечный** (или сильный) предел $\{U_n\}$. Обозначение $U = \text{s-lim}\, U_n$ (s = strong)

Он хоть и сильный, но куда слабее сходимости по норме.
Отметим простые свойства:

1. $U_n \in \mathrm{Lin}(X,Y) \Rightarrow U \in \mathrm{Lin}(X,Y)$
2. Если $U_n, U \in \mathcal{B}(X,Y)$, $\lim\limits_{n\to\infty} U - U_n = 0 \Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} U_n x = Ux\, \forall\, x \in X$$

2. $||Ux - U_n x|| \leq \underbrace{||U - U_n||}_{\to 0} \cdot ||x|| \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} U_n x = Ux$ □

Замечание 8.1. $U = \text{s-lim}\, U_n \not\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} ||U - U_n|| = 0$

Пример, где поточечный предел существует и равен нулю, а предела по норме не существует

Пример 8.1.

$$X = l^1 = \left\{ x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in \mathbb{C}, ||x||_l = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \right\}$$

$$f_n : l^1 \to \mathbb{C} \quad f_n \in (l^1)^* \quad f_n(x) = x_n, ||f_n|| = 1$$

$$x \in l^1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \,\forall\, x \in L^1$$

$$\mathbb{0} = \text{s-lim}\, f_n, \text{ но } ||f_n - \mathbb{0}|| = \underbrace{||f_n||}_{n \not\to 0} = 1$$

Пример 8.2. H — сепарабельное гильбертово пространство, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис.

$$x \in H, x = \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k)e_k \quad S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (x, e_k)e_k$$

$$\Rightarrow \forall\, x \in H \lim_{n\to\infty} S_n x = x, Ix = x \forall\, x \in H (I \text{ — тождественный})$$

$$\Rightarrow I = \text{s-lim}\, S_n$$

$$(I - S_n)(e_{n+1}) = I(e_{n+1}) = e_{n+1} \Rightarrow ||I - S_n|| = 1$$

$$||I - S_n|| \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$$

Несмотря на то, что сильная сходимость слабее сходимости по норме, иногда оказывается, что сильный предел является непрерывным оператором.

Теорема 8.2. $(X, ||\cdot||)$ — банахово, $(Y, ||\cdot||)$ — нормированное $U_n \in \mathcal{B}(X, Y)$, пусть $U = \text{s-lim}\, U_n \Rightarrow$

$$U \in \mathcal{B}(X, Y), ||U|| \le \underline{\lim} ||U_n|| \le \sup_{n\in\mathbb{N}} ||U_n|| < +\infty$$

Доказательство. Собираемся изо всех сил использовать принцип равномерной ограниченности. $\forall\, x\, \exists \lim\limits_{n\to\infty} U_n(x) \Rightarrow \sup_n ||U_n x|| < +\infty$. По принципу $\Rightarrow \sup_n ||U_n|| < +\infty$

$$\text{пусть } b = \underline{\lim} ||U_n|| \Rightarrow\ \exists\ \{U_{n_k}\} : b = \lim_{k\to\infty} \lim_{k\to\infty} ||U_{n_k}||$$

$$\text{пусть } x \in X \Rightarrow Ux = \lim_{k\to\infty} U_{n_k}(x) \Rightarrow$$

$$||Ux|| = \lim_{k\to\infty} ||U_{n_k} x|| \le \lim_{k\to\infty} ||U_{n_k}|| \cdot ||x|| = b\, ||x||\ \forall\, x \in X$$

$$\Rightarrow U \in \mathcal{B}(X, Y), ||U|| \le b$$

$\square$

Замечание 8.2. $U = \text{s-lim}\, U_n$, возможно $||U|| < \underline{\lim}\, ||U_n||$

Пример 8.3. $f_n : l^1 \to \mathbb{C}, f_n(x) = x_n, \mathbb{0} = \text{s-lim}\, f_n, ||f_n|| = 1 \,\forall\, n.\, ||\mathbb{0}|| = 0$

> **Теорема 8.3** (Банах-Штейнгауз, критерий существования сильного предела). X, Y — банахово, $U_n \in \mathcal{B}(X, Y)$. Для того чтобы существовал $\text{s-lim}\, U_n$, необходимо и достаточно
>
> 1. $\exists\, M > 0 : ||U_n|| \leq m \,\forall\, n \in \mathbb{N}$
> 2. $\exists\, E \subset X, E$ полное, то есть $\overline{\mathcal{L}(E)} = X$. $\{U_n x\}$ — фундаментальная для $\forall\, x \in E$

Существует множество вариантов этой теоремы, и все они по-своему полезные, поэтому у нас будет очень много замечаний потом

Доказательство. $\Rightarrow$ пусть $U = \text{s-lim}\, U_n$, мы уже доказали, что $\sup_n ||U_n|| < +\infty$, а второе утверждение очевидно
$\Leftarrow$
Пусть $x \in \mathcal{L}(E)$, то есть $x = \sum_{k=1}^{N} c_k x_k,\ c_k \in \mathbb{C}, x_k \in E$

$$||U_n(x) - U_m(x)|| \leq \sum_{k=1}^{N} |c_k| \cdot ||U_n x_k - U_m x_k|| \Rightarrow \{U_n x\} \text{ — фундаментальная}$$

Пусть $x \in X$, проверим, что $\{U_n x\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна

$$x \in X, \varepsilon > 0 \quad \exists\, z \in \mathcal{L}(E), ||x - z|| < \varepsilon$$
$$\exists\, N \in \mathbb{N}\, n, m > N \Rightarrow ||U_n z - U_m z|| < \varepsilon$$
$$||U_n x - U_m x|| \leq \underbrace{||U_n x - U_n z||}_{\leq ||U_n|| \cdot ||x - z|| \leq M\varepsilon} + \underbrace{||U_n z - U_m z||}_{\varepsilon} + \underbrace{||U_m z - U_m x||}_{\leq M\varepsilon}$$
$$< \varepsilon(2M + 1) \Rightarrow \{U_n x\}_{n=1}^{\infty} \text{ фундаментальна}$$
$$Y \text{ банахово} \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} U_n x \,\forall\, x \in X \Rightarrow \exists\, U = \text{s-lim}\, U_n$$

□

Замечание 8.3.

1. $\Rightarrow X$ — банахово, Y — нормированное
2. $\Leftarrow Y$ — банахово, X — нормированное
3. В условии 2 теоремы моэно сформулировать 2':

$$\exists\, E \subset X, \overline{\mathcal{L}(E)} = X,\ \exists \lim_{n\to\infty} U_n x$$

Заплатим жестокую цену за такую теорему: раньше U не было, оно появлялось, критерий существования всё-таки, а здесь же мы предположим сразу непрерывность этого U

Теорема 8.4 (Банах-Штейнгаус). X — банахово, Y — нормированное, $U_n \in \mathcal{B}(X,Y), U \in \mathcal{B}(X,Y)$
$u = \text{s-}\lim U_n \Leftrightarrow$

1. $\sup_n ||U_n|| \leq M < +\infty$
2. $\exists\, E \subset X, \overline{\mathcal{L}(E)} = X,\ \forall\, x \in E\, \exists \lim\limits_{n\to\infty} U_n x$

Доказательство. $\Rightarrow$ очевидно
$\Leftarrow$

$$\forall\, x \in \mathcal{L}(E) \Rightarrow\ \exists \lim_{n\to\infty} U_n x$$

пусть $x \in X, \varepsilon > 0\, \exists\, z \in \mathcal{L}(E), ||x - z|| < \varepsilon,\ \exists\, N : n \geq N \Rightarrow ||Uz - U_n z|| < \varepsilon$

$$||Ux - U_n x|| \leq \underbrace{||Ux - Uz||}_{\leq ||U||\cdot||x-z||\leq||U||\varepsilon} + \underbrace{||Uz - U_n z||}_{<\varepsilon} + \underbrace{||U_n z - U_n x||}_{||U_n||\cdot||x-z||\leq M\varepsilon}$$

мы тут сразу пользуемся тем, что U — непрерывный оператор и у него есть норма

$$\leq \varepsilon(1 + ||U|| + M) \Rightarrow\ \exists \lim_{n\to infty} U_n x = Ux\, \forall\, x \in X$$

□

Маленькая историческая байка из серии «Мифы и легенды из жизни Банаха» о встрече Банаха и Штейнгауза . Банах чудесным образом родился, никто не знает его мать, имя ему досталось от отца Стефана его крестили и оставили (Банах — это фамилия женщины, которая заботилась о нём с трехдневного возраста). В школе Банах интересовался только матемтикой, но рядом не оказалось никого, кто сказал бы ему идти на математический факультет, а ведь в Варшаве был хороший университет, преподавал там ученик Гаусса. В итоге Банах закончил что-то вроде политеха, издали интересовавшись математикой. И вот, началась первая мировая война, Банаха не взяли в армию, а Штейнгауза взяли, но потом отослали обратно.

Штейнгауз как-то шёл по улице и услышал, как 2 человека на ке что-то обсуждают, а доносятся от них умные типа «Мера Лебега», Штейнгауз обратился к ним: «Предмет вашей учебной беседы настолько интересен!». И начал он им навешивать всякую математическую лапшу на уши. Через несколько дней Банах решил какую-то задачку, и Штейнгауз у себя на дому устраивает встречу математиков, они даже собирались организовать вчетвером краковское математическое оцество, но сам он потом уехал во Львов, перетащил туда Банаха. Банах устроился работать в какой-то из университетов и стал ликвидировать свою математическую безграмотность. Штейнгауз же потом говорил, что главный его вклад в функциональный анализ — это открытие Банаха.

8.1. Применение принципа равномерной ограниченности к рядам Фурье

Пусть $f \in \tilde{C}[-\pi, \pi]$. Волна означает $f(-\pi) = f(\pi)$

$$C_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$$

$$S_n(f,x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{-ikx} = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)dt \quad c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{ikt}dt$$

$$\text{где } D_n(u) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n} e^{iku} = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right)}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)} \text{ — ядро Дирихле}$$

$$S_n(e^{ikx}) = e^{ikx} \text{ если } n \geq k \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n(e^{ikx}) = e^{ikx}$$

$$If = f, I \text{ — тождественный в } \tilde{C}[-\pi,\pi]$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n(e^{ikx}) = I(e^{ikx}) = e^{ikx} \Rightarrow$$

$$\left\{e^{ikx}\right\}_{k\in\mathbb{Z}} \text{ — полная система в } \tilde{C}[-\pi,\pi] \text{ по теореме Вейертршрасса}$$

$$I(f) = \lim_{n\to\infty} S_n(f), \text{ при } f = e^{ikx} \text{ или } f \in \mathcal{L}{e^{ikx}}_{k\in\mathbb{Z}}$$

Теорема 8.5.
1. $\exists f \in \tilde{C}[-\pi,\pi]$ т.ч. $S_n(f,x)$ не сходятся равномерно, более того $\sup_n ||S_n(f,x)||_\infty = +\infty$ (Лебег, 1906)
2. пусть $x_0 \in [-\pi,\pi] \Rightarrow \exists\, f \in \tilde{C}[-\pi,\pi]$ т.ч. не $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n(f,x_0)$, более того $\sup_n |S_n(f,x_0)| = +\infty$ (Дю Буа Реймонд, 1886)

Для доказательства будем применять следствия из принципа равномерной ограниченности. Если S_n вычислять на базисе e^{ikx}, то сходимость будет, но теорему Банаха-Штейнгауза нельзя применять, потому что нет ограниченности по норме оператора S_n

Доказательство теоремы Лебега. Проверим, что $\sup_n ||S_n||_{\mathcal{B}(\tilde{C}[-\pi,\pi])} = \infty$

$$S_n(f,x) = \int_{-\pi}^{\pi} = f(t)D_n(x-t)dt \quad S_n \in \mathrm{Lin}(\tilde{C}[-\pi,\pi])$$
$$f \in \tilde{C}[-\pi,\pi], x \in [-\pi,\pi]$$

мы уже вычисляли норму интегрального оператора в пространстве непрерывных функций

$$||S_n|| = \max_{x\in[-\pi,\pi]} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(x-t)|\, dt$$

цель ближайших вычислений: проверить, что при $n \to \infty$ норма стремится к ∞. Сначала проверим, что она не зависит от x

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(x-t)|\, dt = [[\tau = x-t, d\tau = -dt]] = -\int_{x+\pi}^{x-\pi} |D_n(\tau)|\, d\tau = [[D_n \text{ -- } 2\pi\text{-периодическая}]]$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(\tau)|\, d\tau = [[\text{чётная}]]$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\tau}{\sin(\frac{\tau}{2})} d\tau \geq \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\left|\sin(n+\frac{1}{2})\right|}{\tau} d\tau =$$
$$[[x \geq \sin x \quad v = \left(n + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \frac{d\tau}{\tau} = \frac{dv}{v}]] =$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{|\sin v|}{v} dv \geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin v|}{v} dv \geq$$
$$[[v \in [(k-1)\pi, k\pi] \Rightarrow v \leq k\pi \Rightarrow \frac{1}{v} \geq \frac{1}{k\pi}]]$$
$$\geq \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{\pi}\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}_{\sigma_n} \geq \frac{2}{\pi^2}\sigma_n, \lim_{n\to\infty}\sigma_n = +\infty$$

$$x \in [k,k+1] \Rightarrow k \leq x \Rightarrow \frac{1}{k} \geq \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{k} \geq \int_k^{k+1}\frac{dx}{x} \Rightarrow$$
$$\sigma_n = 1 + \ldots + \frac{1}{n} \geq \int_1^{n+1}\frac{dx}{x} = \ln(n+1)$$
$$\Rightarrow ||S_n|| \geq \frac{2}{\pi^2}$$

как используем принцип фиксации особенности? Есть последовательность операторов S_n. При фиксированном f она стремится к $S_n(f)$. Мы оценили снизу норму и доказали, что она стремится к бесконечности. Если норма операторов не ограничена, то в нашем банаховом пространстве непрервны 2π-периодических функций найдется такой элемент, на котором норма не ограничена, значит там тем более не может быть равномерной сходиомсти. □

Доказательство теоремы Дю Буа Реймонда. Вместо линейных операторов теперь рассмотрим линейные функционалы. x_0 — фиксирована, $S_n(f, x_0)$ — линейные функционалы. $S_n(f, x_0) : \tilde{C}[-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$. Там же, где мы вычисляли норму интегрального оператора, мы вычисляли норму линейного функционала (ссылку)

$$S_n(f, x_0) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x_0 - t) dt$$

$$\text{норма функционала } ||S_n||_{(\tilde{C}[-\pi,\pi])^*} = \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(x_0 - t)|\, dt \overset{\text{Лебег}}{=}$$

$$= ||S_n|| \geq \frac{2}{\pi^2} \ln n \Rightarrow \sup_n ||S_n(f, x_0)||_{(\tilde{C}[-\pi,\pi])^*} = +\infty$$

по принципу фиксации особенности

$$\Rightarrow\ \exists\, f \in \tilde{C}[-\pi, \pi] : \sup_n |S_n(f, x_0)| = +\infty$$

□

Замечание 8.4. Пусть $E \subset [-\pi, \pi], E$ — счётное $\Rightarrow \exists f \in \tilde{C}[-\pi, \pi] \forall\, x_0 \in E\ \sup_n |S_n(f, x_0)| = +\infty$

Замечание 8.5. $\exists\, f \in L^1[-\pi, \pi]\, \forall\, x \in [-\pi, \pi]$ не $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n(f, x)$

Этот пример построил Колмогоров в 1926 году, а в 1923 построил такую функцию, у которой почти всюду не $\exists$ lim. Колмогоров был учеником Лузина. А он предъявил такую гипотезу

Замечание 8.6 (Гипотеза Лузина, 1923)**.** $f \in L^2[-\pi, \pi] \Rightarrow S_n(f, x) \to f(x)$ почти всюду на $[-\pi, \pi]$.

Шведский математик Карлесон В 22 года подумал улучшить пример Колмогорова. Поехал в Америку на семинар по тригонометрическим рядам, там рассказал Зигмунду, как собирается опровергать гипотизу Лузина. А тот его всячески поощрял. Весь мир тогда считал, что гипотеза неверна.

Вот он несколько лет мучился и подумал, что функция, которую он пытается построить, не существует. Так и оказалось. На международном математическом конгрессе в 1966 Карлесон показал, что гипотеза верна. Колмогоров вышел, пожал ему руку и сказал, что это главный результат математического анализа за весь XX век.

Лемма 8.2 (Риман-Лебег). $f \in {}^1[-\pi, \pi]$

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \Rightarrow \lim_{n\to\infty} c_n(f) = 0$$

Доказательство. Будем думать, что $c_n \in \mathrm{Lin}(L^1, \mathbb{C})$ — линейный функционал. При фиксированном fc_n — конкретное число

$$f \in L^1 \quad |c_n(f)| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\, dx = \frac{1}{2\pi}\,||f||_1$$

$$\Rightarrow c_n \in (L^1)^*, ||c_n||_{(L^1)^*} \le \frac{1}{2\pi}$$

$$\left\{\chi_{[a,b)}\right\} \text{ — полное семейство в } L^1[-\pi,\pi], -\pi \le a < b \le \pi$$

$$c_n(\chi_{[a,b)}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \chi_{[a,b)}(x)e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_a^b e^{-inx}dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{e^{-inb} - e^{-ina}}{-in} \Rightarrow$$

$$\left|c_n(\chi_{[a,b)})\right| \le \frac{2}{2\pi n} = \frac{1}{\pi n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$c_n(\chi_{[a,b)}) \longrightarrow \mathbb{0}(\chi_{[a,b)}) \Rightarrow$$

$$\text{по теореме Банаха-Штейнгауза } \forall f \in L^1 \quad c_n(f) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$\square$

Глава 9

Теорема об открытом отображении

9.1. Обратные операторы

X, Y — нормированные пространства, $A \in \mathrm{Lin}(X, Y)$. Уравнение $Ax = y$, где y — дано, A — дан, x — неизвестное. Когда для $\forall\, y \in Y\ \exists\, !x \in X$ т.ч. $Ax = y \Rightarrow A$ — биекция, то есть $\exists\, A^{-1}$.

$$\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y \quad \exists\, !x_n : Ax_n = y_n$$

Было бы хорошо, чтобы $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x, Ax = y$, то есть A^{-1} — непрерывен. Когда $\exists$ непрерывный A^{-1}?

Третий кит линейного функционального анализа будет как раз касаться обратных операторов. Понятно, что самый хороший оператор, который можно представить — это тождественный, у него есть обратный, это он сам и есть. Вопрос такой: насколько можно отодвинуться от тождественного оператора, чтобы он остался обратимым?

Теорема 9.1.

$$X \text{ — банахово }, Ix = x,\ \forall\, x \in X$$
$$\text{пусть } A \in \mathcal{B}(X), ||A|| < 1 \Rightarrow$$
$$\exists\, (I - A)^{-1} \in \mathcal{B}(X), \text{ при этом}$$
$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} A^k (A^0 = i)$$
$$\big|\big|(I - A)^{-1}\big|\big| \le \frac{1}{1 - ||A||}$$

Доказательство. X — банахово $\Rightarrow \mathcal{B}(X)$ — банахово. Был у нас критерий полноты, поэтому проверим, что ряд из норм сходится

$$A, B \in \mathcal{B}(X) \Rightarrow ||AB|| \leq ||A|| \cdot ||B||$$

$$\Rightarrow \left|\left|A^k\right|\right| \leq ||A||^k \Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} \left|\left|A^k\right|\right| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} ||A||^k = \frac{1}{1 - ||A||} \Rightarrow \exists\, S = \sum_{k=0}^{+\infty} A^k, S \in \mathcal{B}(X)$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} A^k \Rightarrow ||S_n|| \leq \frac{1}{1 - ||A||} \Rightarrow ||S|| \leq \frac{1}{1 - ||A||}$$

проверим, что $S = (I - A)^{-1}$

$$S_n(I - A) = (I + A + A^2 + \ldots + A^n)(I - A) =$$
$$= (I - A) + (A - A^2) + \ldots + (A^n - A^{n+1}) = I - A^{n+1}$$

$$\left|\left|A^{n+1}\right|\right| \leq ||A||^{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (I - A^{n+1}) = I$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n(I - A) = S(I - A) \Rightarrow S(I - A) = I$$
$$(I - A)S_n = S_n(I - A) = I - A^{n+1} \Rightarrow \text{ при } n \to \infty$$
$$(I - A)S = I \Rightarrow S(I - A)^{-1}$$

□

Замечание 9.1. $\dim X < +\infty,\ A, B \in \mathcal{B}(X), AB = I \Rightarrow B = A^{-1}$. Если $\dim X = +\infty$, то нет

$$X = l^2, x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in \mathbb{C}, ||x||_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$S(x) = (0, x_1, x_2, \ldots) \quad ||S|| = 1, S \in \mathcal{B}(l^2) (S - \text{shift})$$
$$T(x) = (x_2, x_3, x_4, \ldots), ||T|| = 1$$
$$(TS)(x) = x \Rightarrow TS = I$$
$$\nexists\, S^{-1} \text{ так как } S(l^2) \subsetneq l^2$$
$$\text{то есть } \nexists\, T^{-1}, T \text{ не инъективен}$$

Так что когда речь идёт о бесконечномерном пространстве, мы не зря проверили, что $AB = I, BA = I \Rightarrow B = A^{-1}$.

Применим эту теорему для общего случая, но сначала будет удобно ввести определение

Определение 9.1. X, Y — нормированные

$$\mathrm{In}(X,Y) = \left\{A \in \mathcal{B}(X,Y) :\ \exists\, A^{-1} \in \mathcal{B}(Y,X)\right\}$$

Теорема 9.1 (множество обратных операторов открыто)**.** X — банахово, Y — нормированное

1.

$$A \in \mathrm{In}(X,Y)$$
$$B \in \mathcal{B}(X,Y) \quad ||A-B|| < \frac{1}{||A^{-1}||} \Rightarrow B \in \mathrm{In}(X,Y) \text{ и при этом}$$
$$\left|\left|B^{-1}\right|\right| \le \frac{||A^{-1}||}{1-||AB||\cdot||A^{-1}||} \tag{1}$$
$$\left|\left|A^{-1}-\left|\left|B^{-1}\right|\right|\right|\right| \le \frac{||A-B||\cdot||A^{-1}||^2}{1-||AB||\cdot A^{-1}} \tag{2}$$

2. $\varphi : \mathrm{In}(X,Y) \to \mathrm{In}(Y,X) \quad \varphi(A) \coloneqq A^{-1} \Rightarrow \varphi$ непрерывное

1.

$$\left|\left|A^{-1}(A-B)\right|\right| \le \left|\left|A^{-1}\right|\right| \cdot ||A-B|| < 1$$

$||W|| < 1$ по теореме об обратимости оператора, близкого к тождественному

$$\Rightarrow\ \exists\, (I-W)^{-1}, \left|\left|(I-W)^{-1}\right|\right| \le \frac{1}{1-||W||} \le \frac{1}{1-||A^{-1}\cdot||A-B||||}$$
$$W = A^{-1}(A-B) = I - A^{-1}B \Rightarrow I - W = A^{-1}B$$
$$B = A\cdot(A^{-1}B),\ \exists\, A^{-1},\ \exists\,(A^{-1}B)^{-1} \Rightarrow\ \exists\, B^{-1}$$
$$B^{-1} = (A^{-1}B)^{-1}\cdot A^{-1} \Rightarrow$$
$$\left|\left|B^{-1}\right|\right| \le \left|\left|(A^{-1}B)^{-1}\right|\right|\cdot\left|\left|A^{-1}\right|\right| \le \frac{||A^{-1}||}{1-||A^{-1}||\cdot||A-B||} \tag{1}$$

□

Сейчас будет фантастический алгебраический трюк:

2.

$$A^{-1} - B^{-1} = A^{-1}(B-A)B^{-1} \Rightarrow$$
$$\left|\left|A^{-1}-B^{-1}\right|\right| \le \left|\left|A^{-1}\right|\right|\cdot||B-A||\cdot\left|\left|B^{-1}\right|\right| \le \frac{||A-B||\cdot||A^{-1}||^2}{1-||A^{-1}||\cdot||A-B||}$$

$\square$

Замечание 9.2. Как мы можем истолковать первое утверждение?

$$B_{\frac{1}{||A^{-1}||}}(A) \subset \mathrm{In}(X, Y)$$

Как только есть обратимый, оператор, тогда шарик с центром в этом операторе и таким радиусом будет лежать в в множестве непрерывных операторов

Замечание 9.3.

$$\varphi(A) = A^{-1} \quad \varphi(B) = B^{-1}$$

$$||\varphi(A) - \varphi(B)|| = \left|\left|A^{-1} - B^{-1}\right|\right| \leq \frac{||A - B|| \cdot ||A^{-1}||^2}{1 - ||A^{-1}|| \cdot ||A - B||}$$

пусть A фиксирован $\quad \lim\limits_{B \to A} ||B - A|| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{B \to A} ||\varphi(A) - \varphi(B)|| = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \varphi \text{ непрерывное}$$

9.2. Открытые отображения

Определение касается только банаховых пространств, но дадим его в общем случае для произвольных топологических простанств

Определение 9.2 (открытое отображение). $(X, \tau_1), (Y, \tau_2)$ — топологические пространства. $U : X \to Y, U$ — отображение.
U – открытое, если $\forall\, G \subset X, G$ — открытое $\Rightarrow U(G)$ — открыто в Y

Замечание 9.4. U — непрерывное, G — открытое $\Leftrightarrow$ $(\forall\, G \subset Y \Rightarrow U^{-1}(G)$ открыт)

Пример 9.1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sin x \Rightarrow f(-\pi, \pi) = [-1, 1]$, f не лькоыьле

Пример 9.2. $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$, f — непрерывное, f — открытое, так как $\exists\, f^{-1}$ — непрерывное

Открытость отображение, если есть обратный, означает непрерывность обратного отображения. Так и отметим в общем виде

Утверждение 9.1. $(X, \tau_1), (Y, \tau_2)$ — топологические пространства, $U : X \to Y, U$ — биекция
U — открытое $\Leftrightarrow U^{-1}$ — непрерывно

Доказательство.

$$V := U^{-1} \quad X \xrightarrow{U} Y \quad X \xleftarrow{V} V$$

$$W = U(G) \quad G = V(W) \quad W = V^{-1}(G)$$

U — открытое $\Leftrightarrow$ (G — открыто $\Rightarrow W = U(G)$ — открыто). V — непрерывно $\Leftrightarrow$ (G — открыто $\Rightarrow V^{-1}(G) = W$ — открыт) $\square$

Утверждение 9.2 (критерий открытости линейного оператора)**.** $(X, ||\cdot||, (Y, ||\cdot||))$ — нормированные. $U \in \mathrm{Lin}(X, Y), U$ — открытое $\Leftrightarrow\ \exists\, r > 0 B_r^Y(0) \subset U(B_1^X(0))$ (то есть $0 \in \mathrm{Int}(U(B_1(0))))$)

Доказательство. $\Rightarrow$
U — открытое, $U(0) = 0, B_1^X(0)$ — открытое $\Rightarrow U(B_1^X(0))$ — открытое.
$0 \in U(B_1^X(0)) \Rightarrow\ \exists\, r > 0 B_r^Y(0) \subset U(B_1^X(0))$
$\Leftarrow$
Пусть $G \subset X, G$ — открытое, $x_0 \in G \Rightarrow$

$$\exists\, R > 0 \quad B_R^X(x_0) \subset G$$
$$\Rightarrow B_{rR}^Y(0) \subset U(B_R^X(0))$$

Проверим, что $U(x_0)$ — внутренняя точка $U(G)$

$$\underbrace{U(x_0) + B_{rR}^Y(0)}_{=B_{rR}^Y(U(x_0))} \subset U(x_0) + U(B_R^X(0)) =$$
$$= U(B_R(x_0)) \subset U(G)$$

$\square$

Перед тем, как доказывать главную теорему, ещё одно утверждение

Утверждение 9.3 (необходимое условие открытости линейного оператора)**.** $(X, ||\cdot||), (Y, ||\cdot||)$ нормированные

$$U \in \mathrm{Lin}(X, Y), U \text{ — открытое } \Rightarrow U(X) = Y$$

Доказательство.

$$\exists\, r > 0\; B_r^Y(0) \subset U(B_1^X(0)) \Rightarrow B_{rn}^Y(0) \subset U(B_n^x(0)), n \in \mathbb{N}$$
$$\text{пусть } y \in Y \Rightarrow\ \exists\, n \in \mathbb{N} : ||y|| < nr \Rightarrow$$
$$y \in B_{rn}(0) \subset U(B_n^X(0)) \subset U(X)$$

□

Вот и кит №3.

Теорема (Банах, об открытом отображении). $(X, ||\cdot||), (Y, ||\cdot||)$ — банаховы, $U \in \mathcal{B}(X, Y)$. Если $U(X) = Y$, то U — открытое

Почему это кит? Потому что это очень полезный факт, на который постоянно хочется ссылаться.

Доказательсвто будет в 2 этапа. Сначала докажем лемму

Лемма 9.1 (Редукция). X — банахово, Y — нормированное. Пусть $\exists\, r > 0, B_r^Y \subset \overline{U(B_1^X(0))}$ (замыкание)

$$\Rightarrow B_{\frac{r}{2}}^Y(0) \subset U(B_1^X(0))$$

Доказательство леммы. Поскольку U — линейное, то мы можем умножать на любую константу.

$$\forall\, k \in \mathbb{N} \quad B^Y_{\frac{r}{2^k}}(0) \subset \overline{U(B^X_{\frac{1}{2^k}}(0))}$$
$$\text{пусть } y \in Y, ||y|| < \frac{r}{2}$$

Построим $x, ||x|| < 1$ т.ч. $Ux = y$. Будем его строить постепенно, сначала $x_1, x_2, \ldots$, и их сумма даст нам x

$$y \in B^Y_{\frac{r}{2}}(0) \subset \overline{U(B^x_{\frac{1}{2}}(0))} \Rightarrow \exists\, x_1, ||x_1|| < \frac{1}{2}$$

$||y - U(x_1)||$ может быть меньше, чем всё, что угодно, мы возьмум $\frac{r}{4}$

$$||y - U(x_1)|| < \frac{r}{4}, y - Ux_1 \in B^Y_{\frac{r}{4}}(0) \subset \overline{U(B^x_{\frac{1}{4}}(0))}$$

$$\Rightarrow\ \exists\, x_2, ||x_2|| < \frac{1}{4}, ||y - Ux_1 - Ux_2|| < 2\frac{r}{2^3} \text{ и так далее}$$

$$\{x_k\}_{k=1}^{\infty}, ||x_k|| < \frac{1}{2^k}, ||y - Ux_1 - \ldots - Ux_k|| < \frac{r}{2^{k+1}}$$

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} ||x_k||}_{\text{сходится}} < 1, [[\text{ банаховость X}]] \Rightarrow$$

$$\exists\, x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k, x \in X, ||x|| < 1$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \quad \lim_{n\to\infty} S_n = x$$

$$\lim_{n\to\infty} ||y - US_n|| = 0 \Rightarrow y = Ux, (U \text{ — непрерывный})$$

□

Доказательство теоремы.

$$B = B^X_1(0) \quad X = \bigcup_{n=1}^{\infty} nB, U(X) = Y \Rightarrow Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} U(nB)$$

$$Y \text{ — банахово [[т. Бэра о категориях]]} \Rightarrow\ \exists\, n_0 : \mathrm{Int}(\overline{U(n_0B)}) \neq \varnothing$$

$$U \text{ — линейный } \Rightarrow\ \exists\, y_0 \in \mathrm{Int}(\overline{U(B)}) \Rightarrow$$

$$\exists\, r > 0\ B_r(y_0) \subset \overline{U(B)}$$

чтобы воспользоваться леммой, нам нужно заменить y_0 на 0

$$\text{пусть } z \in Y, ||z|| < r, y_0 + z \in \overline{U(B)}$$
$$B \text{ — симметричное множество, т.е. } x \in B \Rightarrow -x \in B \Rightarrow$$
$$\overline{U(B)} \text{ — симметричное, т.е. } y_0 \in \overline{U(B)} \Rightarrow -y_0 \in \overline{U(B)}$$
$$z = (y_0 + z) + (-y_0) = \overline{U(B)} + \overline{U(B)} \subset \overline{U(2B)}$$
$$\Rightarrow B_r^Y(0) \subset \overline{U(2B)} \Rightarrow B_{\frac{r}{2}}^Y \subset \overline{U(B)}$$
$$[[\text{ лемма о редукции }]] \Rightarrow B_{\frac{r}{4}}^Y(0) \subset U(B)[[\text{ критерий открытости }]] \Rightarrow$$
$$U \text{ открыт}$$

□

Особенно часто применяется следствие, когда U — биекция

Теорема (Банах, об обратном отображении). X, Y — банаховы, $U \in \mathcal{B}(X, Y), U$ — биекция $\Rightarrow$

$$U^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X)(\text{то есть } U^{-1} \text{ непрерывен})$$

Эта теорема нам пригодится, когда будем говорить о спектрах.

9.3. Теорема об эквивалентных нормах и о замкнутом графике

Когда мы говорили о нормах, нам обещалась некоторая сногсшибательная теорема, которую мы сейчас и докажем.

Теорема 9.2. X — линейное пространство, $\exists$ две нормы на X, т.ч. $(X, ||\cdot||_1), (Y, ||\cdot||_2)$ — банаховы. Пусть $\exists\, C > 0 : ||x||_2 \leq C\,||X||_1 \,\forall x \in X$. Как бы это не могло показаться чудовищно странным, но существует и оценка в другую сторону

$$\Rightarrow \exists\, c_1 > 0 : ||x||_1 \leq c_1\,||x||_2 \;\forall\, x \in X$$

Доказательство. Как мы уже делали, когда рассматривали 2 пространства с эквивалентными нормами, рассмотрим $X = (X, ||\cdot||_1), Y = (X, ||\cdot||_2)$

$Ix = x, I \in \mathrm{Lin}(X, Y), I$ — биекция $\Rightarrow ||Ix||_2 \leq C\,||x_1|| \Rightarrow I \in \mathcal{B}(X, Y), ||I|| \leq C$
[[т. Банаха об обратном отображении]] $\Rightarrow I^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X) \Rightarrow ||x||_1 \leq c_1\,||x||_2 \;\forall\, x \in X$

□

Определение 9.3 (график)**.** X, Y — нормированные, над $\mathbb{C}(\mathbb{R})$. $X \times Y$ — линейное нормированное

$$(x, y) + (x_1, y_1) = (x + x_1, y + y_1), \lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y), \lambda \in \mathbb{C}$$
$$||(x, y)||_{X\times Y} = ||x||_X + ||y||_Y$$
$$U : X \to Y, U \text{ — отображение } G_U = \{(x, Ux)\}_{x\in X} \text{ — график } U$$

U — замкнутое отображение, если G_U — замкнутое множество

$$\Leftrightarrow (\lim_{n\to\infty}(x_n, Ux_n) = (x_0, y_0) \Rightarrow y_0 = Ux_0) \Leftrightarrow$$
$$\left.\begin{aligned} \lim x_n = x_0 \\ \lim Ux_n = y_0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow y_0 = Ux_0$$

Посмотрим, как связаны замкнутость и непрерывность. Мы убедимся, что замкнутость это более слабое утверждение (меньше), чем непрерывность.

Замечание 9.5. U — непрерывное $\Rightarrow U$ — замкнутое

1. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} Ux_n = y_0$
3. $Ux_0 = y_0$

U непрерывен $\Leftrightarrow 1 \Rightarrow 2 + 3$; U замкнутое $\Leftrightarrow 1 + 2 \Rightarrow 3$

Есть множество примеров, где проверка замкнутости гораздо легче проверки непрерывности. И бывает иногда удобно, что эти условия равносильны.

Теорема (о замкнутом графике)**.** X, Y — банаховы, $U \in \mathrm{Lin}(X, Y), U$ — замкнут $\Rightarrow U$ непрерывен

Доказательство. $(X, ||\cdot||_X), (Y, ||\cdot||_X)$. Новая норма на $X : ||x_1|| = ||x||_X \; ||Ux||_Y$. Аксиомы нормы очевидны.

Проверим, что $(X, ||\cdot||_1)$ — банахово по определению

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ фундаментальная в } (X_1, ||\cdot||_1), \text{ то есть}$$
$$\underbrace{||x_m - x_n||_1}_{\underset{m,n\to\infty}{\longrightarrow} 0} = ||x_m - x_n||_X + ||Ux_m - Ux_n||_Y$$
$$\Rightarrow \lim_{m,n\to 0} X = 0 \Rightarrow$$

Имеем дело с фундаментальными последовательностями в банаховом пространстве

$$\left.\begin{array}{r} \Rightarrow \exists\, x_0 \in X, \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \\ \lim\limits_{m,n\to 0} ||Ux_m - Ux_n||_Y = 0 \Rightarrow \exists\, y_0 \in Y \ \lim\limits_{n\to\infty} Ux_n = y_0 \end{array}\right\} \text{замкнуто}$$
$$\Rightarrow Ux_0 = y_0 \Rightarrow$$
$$\lim_{n\to\infty}(||x_n - x_0||_X + ||Ux_n - Ux_0||_Y) = 0$$
$$\Rightarrow (X, ||\cdot||_1) \text{ — банахово}$$
$$\Rightarrow ||x||_X \le ||x||_X + ||Ux||_Y = ||x||_1$$
$$[[\text{ теорема об эквивалентных нормах}]] \Rightarrow$$
$$\exists\, c_0 \quad ||x||_X + ||Ux||_Y \le C\,||x||_X \Rightarrow ||Ux||_Y \le C\,||x||_X \Rightarrow U \in \mathcal{B}(X, Y)$$

$\square$