Функциональный анализ

Осень 2023

Оглавление

Глава 1

Введение

1.1. qwe

День рождения функционального анализа – 1932 год. В этом году вышла книжка "Теория линейных операторов", автор – С. Банах. Главная цель функционального анализа – изучение линейных операторов (но не только их). Главным объектом у нас будет X – линейное топологическое пространство. Оно же линейное пространство над $\mathbb{C}$ (или $\mathbb{R}$). Есть непрерывные операции

1. $(x, z) \to x + z \quad x, z \in X$
2. $(\alpha, x) \to \alpha x \quad \alpha \in \mathbb{C}$

Если у нас есть топологическое пространство, то у нас есть все любимые объекты из математического анализа – пределы, непрерывность, производные, интегралы.

Пусть есть X, Y – линейные топологические пространства. Также есть линейное отображение $A : X \to Y$

Определение 1.1 (Линейное отображение)**.**

$$A(\alpha x + \beta z) = \alpha Ax + \beta Az$$

Если $\beth\gtrdot X < +\infty, \dim Y < +\infty$, то это линейная алгебра.

$$A : X \to X, \dim X = n, A = A^* \implies \exists\, \text{ОНБ}\{u_j\}_{j=1}^{n}$$

λ_j – собственные

$$Au_j = \lambda_j u_j$$

Теорема 1.1 (Гильберт). X – гильбертово (сепарабельное) пространство. $A = A^* \quad A \cdot X \to X, \implies \exists$ ОНБ из собственных векторов.

Если $\dim Y = 1$, т.е. $Y = \mathbb{C}$ (или $\mathbb{R}$), то $A : X \to \mathbb{C}$, A – линейный функционал.

X - пространство функций, $f \in X$.

В математическом анализе мы изучаем $f \overset{?}{\Longrightarrow} f'$. В функциональном анализе же у нас X – пространство функций, $f \in X$

$$D(f) = f' \quad D : X \to Y \tag{1.1}$$

и здесь мы задаемся вопросами о следующих свойствах $D(f)$

- компактность
- самоспрояженность
- непрерывность

Отцы основатели функционального анализа:

- Ф. Гильберт (1862 - 1943) Гильбертовы пространства
- С. Банах (1892 -1945) Банаховы пространства
- Ф.Рисс (1880-1956) пространства Лебега L^p

Ну и хочется еще упомянуть для вас, компьютер саентистов, отцов основателей кибернетики, который оставили немалый след в функциональном анализае

- Н. Винер (1894-1964)
- Д. фон Нейман (1903 - 1957). Про его архитектуру, наверное, что-то слышали?

1.2. Зачем изучать функциональный анализ

Во-первых, он позволяет посмотреть на задачу с высокого уровня абстракции.

Рассмотрим пространство непрерывных функций $C[a, b]$, там введем норму $|f| = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$. Рассмотрим пространство многочленов $P_n = \{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k, a_k \in \mathbb{R}\}$ Существует ли такой многочлен, на котором инфимум достигается? И если да, то единственный ли он?

$$E_n(f) = \inf_{p \in \P_n} ||f - p|| = \min_{p \in \P_n} ||f - p||$$

На первый вопрос ответ да, это следует из общей теоремы функционального анализа.

$$\dim P_n = n + 1 < +\infty$$

На второй же вопрос ответ тоже да, и тут функциональный анализ не при чем. Суть в том, что у многочлена степени n не может быть больше n корней.

Ну и еще немаловажные причины

1. язык функционального анализа – междисциплинарный язык математики.

2. его результаты применяются в математической физике, которая у нас будет в следующем семестре.

3. это интересно и важно. $0, 1, 2 = o(3)$.

4. у нас будет экзамен, на котором придется говорить уже нам.

Дополнительная литература по курсу. Первая Рассчитана на студентов. В некоторых местах рассказывается не так, как обычно пишут в книжках, а именно как придумать доказательство. Как прийти к тому, что требуется, а не в другую сторону, как обычно. Остальные же книги поумнее.

1. А.Н.Колмогоров, С.В. Фомин "Элементы теории функций и Ф.А."

2. М.Рид, Б. Саймон. 1 том "методы современной физики". Тонкая (можно осилить), рассказывается также про применение ФА.

3. А.В. Канторович, Г.Г Акилов "Функциональный анализ". Похожа на энциклопедию. Но там можно найти всё.

4. К. Итосида "Функциональный анализ".

5. У. Рудин

Глава 2

Метрические пространства

Начнём с того, что все знают. Надо ведь с чего-то начать. Мы будем несколько раз к ним возвращаться, а не изучим всё сразу. Один из полезных результатов – новое описание компакта в метрических пространствах. Он будет самым рабочим. А компакт вещь очень полезная. Компакты в гигантских пространствах напоминают компакты в $\mathbb{R}^n$ или в $\mathbb{C}^n$ и обладают теми же полезными свойствами.

Определение 2.1 (Метрика). X - множество. $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$, ρ – **метрика**, если она обладает следующими свойствами

1. $\rho(x, y) \geq 0 \quad \rho(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y$
2. $\rho(y, x) = \rho(x, y)$
3. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$

Введём стандартное обозначение открытого шара. $x \in X, r > 0$

$B_r(x) = \{y \in X : \rho(x, y) < r\}$ – шар с радиусом r. $\{B_r(x)\}_{r>0}$ – база окрестности в точке x.

G – открытое, если $\forall\, x \in G \exists\, r > 0 : B_r(x) \subset G$.

$F \subset X, F$ – замкнутое $\Leftarrow X \setminus F$ – открытое. В метрическом пространстве удобно ъарактеризовать замкнутое множества с помощью последовательностей. Вспомним, что такое сходящаяся последовательность. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in X$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, x_0) = 0$

F – замкнутое $\Leftarrow$ если $x_{n}{}_{n=1}^{\infty}, x_i n \in F$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow x_0 \in F$

Определение 2.2 (Фундаментальная последовательность). $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n$ – фундаментальная, если $\forall\, \varepsilon > 0 \exists\, N \in \mathbb{N} : (n > N \wedge m > N) \Rightarrow \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ или же

$$\Leftrightarrow \lim_{n,m\to\infty} \rho(x_n, x_m) = 0$$

Замечание 2.1. Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, то $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальная.

Определение 2.3 (Полное метрическое пространство)**.** (X, ρ) – полное, если все фундаментальные последовательности имеют предел (лежит в X)

Почему хорошо жить в полном метрическом пространстве?

Замечание 2.2 (о пользе полноты)**.** $F : X \to \mathbb{R}, (X, \rho)$, F – непрерывная.

Стоит задача найти $x_0 \in X$ т.ч. $F(x_0) = 0$
Алгоритм: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \lim\limits_{n\to\infty} F(x_n) = 0, \lim\limits_{n,m\to\infty} \rho(x_n, x_m) = 0$ Если (X, ρ) – полное, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0, F(x_0) = 0$ А если нет, то из наших вычислений вообще ничего не следует, возможно, решения вообще нет.

Пример 2.1. $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ – полные.

Пример 2.2. $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, т.е. $\mathbb{Q}$ – неполное.

Потом приведем примеры поинтереснее. Кстати, древние греки пришли в ужас, когда узнали, что $\mathbb{Q}$ – неполное.

Определение 2.4. $(X, \rho), A \subset X, A$ – ограниченное, если

$$\exists\, R > 0, x_0 \in X : A \subset B_R(x_0)$$

Теорема 2.1 (Свойства фундаметнальных последовательностей)**.** (X, ρ) – метрическое пространство, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальная последовательность

1. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ограниченная
2. Если $\exists\, \{x_{n_k}\}^infty_{k=1}$, т.ч. $\exists \lim x_{n_k} = a$, то
$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$
3. $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}, \varepsilon_k > 0, \exists\, \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, т.ч. $\rho(x_{n_k}, x_{n_j})$ при $j > k$

1 утверждение. $\varepsilon = 1, \exists\, N : n > N, \rho(x_n, x_N) < 1$. Возьмём $R = \max\{\rho(x_1, x_N), \ldots, \rho(x_{N-1}, x_N)\} + 1$. Единичка на всякий случай. Тогда $x_j \in B_R(x_n) \forall\, j \in \mathbb{N}$ □

2 утверждение. $\varepsilon > 0, \exists\, N : (n > N \wedge m > N) \Rightarrow \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ $\exists n_k : \rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon \wedge n_k > N$ Пусть есть какое-то $m > N$. Тогда $\rho(x_m, a) < \rho(x_m, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, a) < 2\varepsilon$

$\varepsilon_1 \exists\, n_1 : (n > n_1 \wedge n > m) \Rightarrow \rho(x_m, x_n) < \varepsilon_1 \Rightarrow \rho(x_m, x_{n_1}) < \varepsilon_1$ при $m > n_1$. Тогда по индукции $\exists$ выбрали $n_1, \dots, n_{k-1}$, $k \geq 2$ $m > n_j \Rightarrow \rho(x_m, x_{n_j}) < \varepsilon_j, j = 1, 2, \dots, k-1$

$$\varepsilon_k \exists\, n_k > n_{k-1} : m \geq n_k \quad \rho(x_m, x_{n_k}) < \varepsilon_k$$

□

Следствие 2.1. (X, ρ), $\{x_n\}$ – фундаментальная последовательность, тогда

$$\exists\, \{x_{n_k}\} \text{ т.ч. } \sum_{k=1}^{\infty} \rho(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < +\infty$$

Доказательство. По 3 свойству при $\varepsilon_k = \frac{1}{2^k}$ □

Теорема 2.2 (О замкнутом подмножестве)**.** (X, ρ) – метрическое пространство

1. (X, ρ) – полное, $Y \subset X$, X – замкнутое $\Rightarrow (Y, \rho)$ – полное
2. Теперь просто предполагаем (X, ρ) – метрическое пространство, (Y, ρ) – полное. Тогда Y – замкнутое

1 утверждение. Доказательство следует прямо из определениеЗнаем что Y замкнутое поднмножество полного пространства. Берем фундаментальную последовательность. $Y \subset X$, пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in Y$ – фундаментальная. $x_n \in x, X$ – полное $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0, x_0 \in X$. Y – замкнутое, значит $x_0 \in Y \Rightarrow (Y, \rho)$ – полное. □

2 утверждение. Второй пункт не труднее первого. Пусть $x_n \in Y$. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \{x_n\}$ – фундаментальная. X – полное. Тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in Y \Rightarrow x_0 \in Y \Rightarrow Y$ – замкнутое. □

2.1. Банаховы пространства

Сначала введём понятие полунормы.

Определение 2.5 (полунорма)**.** Пусть X – линейное пространство над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Отображение $p : X \to \mathbb{R}$ называется полунормой, если

1. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ (полуаддитивность)
2. $p(\lambda x) = |\lambda| p(x); x, y \in X, \lambda \in \mathbb{R}$ или $(\mathbb{C})$

Следствие 2.2 (Свойство полунормы)**.** p – полунорма $\Rightarrow$

$$p(\nvdash) = 0, p(x) \geq 0 \forall\, x \in X$$

Доказательство. $p(\nvdash) = p(0 \cdot \nvdash) = 0 \cdot p(\nvdash) = 0$. Пусть $x \in X \Rightarrow \nvdash = x + (-x) \Rightarrow p(\nvdash) \leq p(x) + \underbrace{p(-x)}_{p(x)} = 2p(x) \Rightarrow p(x) > 0$ □

Определение 2.6 (Норма)**.** X – линейное пространство, $p : X \to \mathbb{R}$. p – норма, если p – полунорма и $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = \nvdash$. Будем обозначать $||x|| := p(x)$.

$(X, || \cdot ||)$ будем обозначать нормированное пространство. и $x, y \in X, \rho(x, y) := ||x - y|$. Тогда $(X, || \cdot ||)$ – метрическое пространство.

Определение 2.7 (банахово пространство)**.** $(X, || \cdot ||)$ – банахово, если оно полное

Еще пару определений перед критерием банахова пространства.

Определение 2.8 (подпространство в алгебраическом смысле)**.** X – линейнрое пространство, $L \subset X$. L – подпространство в алгебраическом смысле, если $x, y \in L, \alpha, \beta \in K \Rightarrow \alpha x + \beta y \in L$.

Определение 2.9 (подпространство)**.** $(X, || \cdot ||)$, $L \subset X$, L – подпространство, если

- L подпространство в алгебраическом смысле
- $L = \overline{L}$ ($\overline{L}$ – замыкание)

Теперь нам потребуется сходимость рядов. Для того, чтобы говорить о сходимости, нужна топология.

Определение 2.10 (Сходимость)**.**

$$(X, || \cdot ||) \quad \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$$

$\sum_{k=1}^{\infty} x_k (*)$, (*) сходится, если $\exists \lim\limits_{n \to \infty} S_n = S \in X$

(*) сходится абсолютно, если $\sum_{k=1}^{\infty} ||x_k||$ сходится

u В $\mathbb{R}^n$ (или в $\mathbb{C}^n$) было что если асболютно сходится, то сходится, но вообще говоря, это не так.

Теорема 2.3 (Критерий полноты нормированного пространства (банаховости))**.** $(X, ||\cdot||)$ - полное $\Rightarrow$ из абсолютной сходимости рядаследует сходимость ряда.

Доказательство. Предположим, что наше пространство полное ($\Rightarrow$). (X, ρ) – полное, $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} ||x_k|| \text{ сходится} \tag{**}$$

Цель такая: последовательность S_n – фундаментальная. Сейчас применим критерий коши к ряду (**). Это ряд из чисел, так что все в порядке. Пусть $\varepsilon > 0$. По критерию Коши $\exists\, N \in \mathbb{N} : (n > N \wedge p \in \mathbb{N}) \Rightarrow \sum_{k=1}^{p} ||x_k|| < \varepsilon$.

$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$.

$$||S_{n+p} - S_n|| = ||\sum_{k=1}^{p} x_{n+k}|| \leq \sum_{k=1}^{p} ||x_{n+k}|| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \{S_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ – фундаментальная}, (X, \rho) \text{ – полное} \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} S_n = S$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \text{ сходится}$$

Мы так запаслись номерами, чтобы выражение было меньше ε

Теперь ($\Rightarrow$). У нас кроме определения ничего нет. Возьмём какую-то фундаментальную последовательность. Откуда взять предел? Есть соотношения между элементами последовательности. Возьмём какую-то подпоследовательность, ведь у нас есть следствие! Из свойств фундаментальных последовательностей, мы знаем, что существует

$$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : ||x_{n_1}|| + \sum_{k=1}^{\infty} ||x_{n_{k+1} - x_{n_k}} + \infty$$

$$\Rightarrow x_{n_1} + \sum_{k=1}^{n} (x_{n_{k+1}}) - x_{n_k} \text{ – сходится}$$

$$S_m = x_{n_1} + \sum_{k=1}^{m-1} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) = x_{n_m} \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} x_{n_m} = S$$

□

2.2. Пространства ограниченных функций

Определение 2.11. Пусть A – произвольное множество. Стандартное обозначение $m(A)$ – множество всех ограниченных функций.

$$m(A) = \{f : A \to \mathbb{R} \text{ или } \mathbb{C}, \sup_{x\in A} |f(x)| < \infty\}$$

$f \in m(A), ||f||_\infty = \sup_{x\in A} |f(x)|$.

Теорема 2.4. $(m(A), ||\cdot||_\infty)$ – банахово пространство

Доказательство. Нужно проверить две вещи. Во-первых, что норма удовлетворяет аксиомам нормы. А во-вторых, что пространство с таким определением является полным. Просто по определению, никаких хитрых критериев. Возьмём фундаментальную подпоследовательность и покажем, что у нее есть предел.

Проверяем, что $||\cdot||_\infty$ удовлетворяет аксиомам нормы.

$$||f||_\infty = \sup_{x\in A} |f(x)| \geq 0, ||f||_\infty 0 \Rightarrow f(x) 0 \forall x \in A \text{ т.е. } f = \not\vdash$$

$\lambda \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$). $||\lambda f|| = \sup_{x\in A} |\lambda| \cdot ||f||_\infty$
Нужно проверить неравенство треугольника.
$f, g \in m(A)$. x – фиксированная точка в A
$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty \forall x \in A$

$$\Rightarrow ||f + g||_\infty = \sup_{x\in A} |f(x) + g(x)| \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty$$

Теперь мы проверили аксиомы нормы. Доказываем полноту. $\{f_n\}$ – фундаментальная в $m(A)$.

$$\varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : (m > N \wedge n > N) \Rightarrow ||f_n - f_m||_\infty < \varepsilon \text{ т.е. } \sup_{x\in A} |f_n(x) - f_m(x)$$

Первый вопрос: откуда взять претендента на роль предела? Еще желательно, чтобы он был единственный. Фиксируем x.Если для супремума есть неравенство, то и для x тем более. $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ при $n, m > N$. $\Rightarrow \{f_n(x)\}_{n=1}^\infty ==$ последовательность чисел в $\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow \{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ – фундаментальная $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \forall x \in A \text{x фиксированный}$$

$$|f_n(x) = f_m(x)| < \varepsilon \quad \text{пусть } m \to \infty$$
$$\Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon, x \in A \forall\, x \in A$$
$$\Rightarrow ||f_n - f||_\infty = \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \text{ при } n > A$$

Последнее соображение, которое нужно добавить, это то, что f – элемент A. Мы можем записать f как $f = (f - f_n) + f_n, f_n \in m(A), f - f_n \in m(A)$.

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} ||f - f_n|| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} f_n = f \in m(A)$$

□

Давайте заметим, что у нас получилось определение равномерной непрерывности из математического анализа.

$$\lim_{n \to \infty} f_n = f \in m(A) \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| = 0 \Leftrightarrow f_n \underset{A, n \to \infty}{\rightrightarrows} f$$

Определение 2.12 (Топологический компакт)**.** Множество K – топологический компакт, если оно обладает следующими свойствами

1. $\forall \{G_\alpha\}_{\alpha \in A}, G_\alpha$ – открытые множества $K \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \exists \{\alpha_j\}_{j=1}^n, K \subset \bigcup_{j=1}^n G_{\alpha_j}$
2. Хаусдорфовость $\forall\, x, y (x \neq y) \in K \,\exists\, U, V$ – открытые множества, $x \in U, y \in V, U \cap V = \varnothing$

Определение 2.13. $C(K) = \{f : K \to \mathbb{R}, f \text{ непрерывна}\}$

$$||f||_{C(K)} = ||f||_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)| = \max_{x \in K} |f(x)|$$

Следствие 2.3. K – топологический компакт $\Rightarrow C(K)$ – банахово

Доказательство. $C(K) \subset m(K)$. $C(K)$ – подпространство в алгебраическом смысле. Проверим, что $C(K)$ – замкнуто в $m(K)$

$$\{f_n\}, f_n = C(K), \lim_{n \to \infty} |f - f_n|_\infty = 0 \Leftrightarrow f_n \underset{K, n \to \infty}{\rightrightarrows} f \Rightarrow f \in C(K) \Rightarrow C(K)$$

тогда $m(K)$ – полное и $C(K)$ – полное. □

2.3. Пространство последовательностей с $\sup$ нормой

Определение 2.14. $\mathbb{C}^n, n \in \mathbb{N}, l_n = \{x^\infty = (x_1, \dots, x_n)x_j \in \mathbb{C}\}$ $||x||_\infty = \max_{1\leq j\leq n}|x_j|$

$A = \{1, 2, \dots, n\}, l_n^\infty = m(A) \Rightarrow l_n^\infty$ – полное Удобно думать, что последовательность – это функция на множестве натуральных чисел.

Определение 2.15 (l^∞)**.**

$$l^\infty = \{X = \{x_j\}_{j=1}^\infty, \sup_{j\in\mathbb{N}}|x_j| < +\infty\}$$
$$||x||_\infty \sup_{j\in\mathbb{N}}|x_j| \quad A = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$$
$$X = \{x_j\}_{j=1}^\infty \in m(A), \underset{f:A\to\mathbb{C}}{f(j) = x_j}$$
$$l^\infty := m(\mathbb{N}) \Rightarrow l^\infty \text{ – полное}$$

Определение 2.16.

$$c = \{X = \{x_j\}_{j=1}^\infty, x_j \in \mathbb{C} \quad \exists \lim_{n\to\infty} x_n = x_0\}$$
$$c \subset l^\infty, ||x|| = ||x||_\infty = \sup ||X||$$
$$c_0 = \{x = \{x\}_{j=1}^\infty, \lim_{n\to\infty} x_j = 0\}, c_0 \subset c \subset l^\infty$$

c, c_0 – замкнутые подпространства в $l^\infty \Rightarrow c, c_0$ – банаховы.

2.4. Пространства n раз непрерывно дифференцируемых функций на отрезке

Определение 2.17. (норма n производной)

$$n \in \mathbb{N}.C^{(n)}[a, b] = \{f : [a, b] \to \mathbb{R}\}\exists\, f^{(n)} \in C[a, b]$$
$$\underset{C[a,b]}{|||f||_{(n)}||} = \max_{0\leq k\leq n}, f^0 = f$$

Теорема 2.5. В $C^{(n)}[a, b]$ – банахово.

Доказательство.

$\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ – фундаментальная последовательность в $C^{(n)}[a,b]$
$\varepsilon > 0 \exists\, N : (m > n \wedge q > n) \Rightarrow ||f_m - f_q||_{C^{(n)}} < \varepsilon \Rightarrow ||f_m^{(k)} < f_q^{(k)}||_\infty < \varepsilon, k = 0, 1, \ldots, n$

$\{f_m^{(k)}\}$ – фундаментальная в полном пространстве$C[a,b] \Rightarrow \exists \phi_k \in C[a,b], f_n^{(k)} \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} \phi_k, k = 0$

$$\overset{\text{Анализ}}{\Rightarrow} (f_k^{(n)} \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} \phi_0 \wedge \phi_k^0 \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} \phi_1) \Rightarrow \phi_1 = \phi_0', \phi_2 = \phi_0'', ldots, \phi_n = \phi_0^{(n)} \quad (2.1)$$

□