

# Функциональный анализ

Осень 2023

# Оглавление

<b>Оглавление</b>	<b>1</b>
<b>1 Введение</b>	<b>2</b>
1.1 Зачем изучать функциональный анализ . . . . .	3
<b>2 Метрические пространства</b>	<b>5</b>
2.1 Банаховы пространства . . . . .	8
2.2 Пространства ограниченных функций . . . . .	11
2.3 Пространство последовательностей с $\sup$ нормой . . . . .	13
2.4 Пространства $n$ раз непрерывно дифференцируемых функций на отрезке . . . . .	14
<b>3 Пространство суммируемых функций (Лебега <math>L^p</math>)</b>	<b>15</b>
3.1 Теория меры . . . . .	15
3.2 Классические неравенства . . . . .	17
3.3 Пространство Лебега . . . . .	20
3.4 Пространства $l_n^p, l^p$ . . . . .	23
3.5 Неполное нормированное пространство . . . . .	26
<b>4 Пополнение метрического пространства</b>	<b>28</b>
4.1 Пополнение метрического пространства . . . . .	29
4.2 Теорема о вложенных шарах . . . . .	32
4.3 Сепарабельные пространства . . . . .	35
4.4 Нигде не плотные множества . . . . .	39
4.5 Полные семейства элементов . . . . .	40
4.6 Полные и плотные множества в $L^p$ . . . . .	42
<b>5 Метрические компакты</b>	<b>48</b>
5.1 Относительно компактные множества в $C(K)$ . . . . .	55

# Глава 1

## Введение

12.09.23

День рождения функционального анализа — 1932 год. В этом году вышла книжка «Теория линейных операторов», автор — С. Банах. Главная цель функционального анализа — изучение линейных операторов (но не только их). Главным объектом у нас будет  $X$  — линейное топологическое пространство. Оно же линейное пространство над  $\mathbb{C}$  (или  $\mathbb{R}$ ). Есть непрерывные операции

1.  $(x, z) \rightarrow x + z \quad x, z \in X$
2.  $(\alpha, x) \rightarrow \alpha x \quad \alpha \in \mathbb{C}$

Если у нас есть топологическое пространство, то у нас есть все любимые объекты из математического анализа — пределы, непрерывность, производные, интегралы.

Пусть есть  $X, Y$  — линейные топологические пространства. Также есть линейное отображение  $A : X \rightarrow Y$

**Определение 1.1** (Линейное отображение).

$$A(\alpha x + \beta z) = \alpha Ax + \beta Az$$

Если  $\dim X < +\infty, \dim Y < +\infty$ , то это линейная алгебра.

$$A : X \rightarrow X, \dim X = n, A = A^* \Rightarrow \exists \text{ ОНБ } \{u_j\}_{j=1}^n$$

$\lambda_j$  —  $j$ -е собственное число

$$Au_j = \lambda_j u_j$$

**Теорема 1.1** (Гильберт).  $X$  — гильбертово (сепарабельное) пространство.  $A = A^*, A : X \rightarrow X \Rightarrow \exists$  ОНБ из собственных векторов.

Если  $\dim Y = 1$ , т.е.  $Y = \mathbb{C}$  (или  $\mathbb{R}$ ), то  $A : X \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $A$  — линейный функционал.

В математическом анализе мы изучаем  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . В функциональном анализе же у нас  $X$  — пространство функций,  $f \in X$

$$D(f) = f' \quad D : X \rightarrow Y \quad (1.1)$$

и здесь мы задаемся вопросами о следующих свойствах  $D(f)$

- компактность
- самосопряжённость
- непрерывность

Отцы основатели функционального анализа:

- Ф. Гильберт (1862–1943) Гильбертовы пространства;
- С. Банах (1892–1945) Банаховы пространства;
- Ф.Рисс (1880–1956) пространства Лебега  $L^p$ .

Ну и хочется ещё упомянуть для вас, компьютер саентистов, отцов основателей кибернетики, которые оставили немалый след в функциональном анализе

- Н. Винер (1894–1964);
- Д. фон Нейман (1903–1957). Про его архитектуру, наверное, что-то слышали?

## 1.1. Зачем изучать функциональный анализ

Во-первых, он позволяет посмотреть на задачу с высокого уровня абстракции.

Рассмотрим пространство непрерывных функций  $C[a, b]$ , там введём норму  $|f| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$ . Рассмотрим пространство многочленов  $P_n = \{\sum_{k=0}^n a_k x^k, a_k \in \mathbb{R}\}$ . Существует ли такой многочлен, на котором инфимум достигается? И если да, то единственный ли он?

$$E_n(f) = \inf_{p \in P_n} \|f - p\| = \min_{p \in P_n} \|f - p\|$$

На первый вопрос ответ да, это следует из общей теоремы функционального анализа.

$$\dim P_n = n + 1 < +\infty$$

На второй же вопрос ответ тоже да, и тут функциональный анализ ни при чём. Суть в том, что у многочлена степени  $n$  не может быть больше  $n$  корней.

Ну и ещё немаловажные причины

1. язык функционального анализа — междисциплинарный язык математики;
2. его результаты применяются в математической физике, которая у нас будет в следующем семестре;
3. это интересно и важно.  $0, 1, 2 = o(3)$ ;
4. у нас будет экзамен, на котором придется говорить уже нам.

Дополнительная литература по курсу. Первая рассчитана на студентов: в некоторых местах рассказывается, как придумать доказательство, как прийти к тому, что требуется, а не в обратную сторону, как обычно. Остальные же книги поумнее.

1. А.Н.Колмогоров, С.В. Фомин «Элементы теории функций и Ф.А.»;
2. М.Рид, Б. Саймон. 1 том «методы современной физики». Тонкая (можно осилить), рассказывается также про применение ФА;
3. А.В. Канторович, Г.Г Акилов «Функциональный анализ». Похожа на энциклопедию. Но там можно найти всё;
4. К. Итосида «Функциональный анализ»;
5. У. Рудин.

## Глава 2

# Метрические пространства

Начнём с того, что все знают. Надо ведь с чего-то начать. Мы будем несколько раз к ним возвращаться, а не изучим всё сразу. Один из полезных результатов — новое описание компакта в метрических пространствах. Он будет самым рабочим. А компакт — вещь очень полезная. Компакты в гигантских пространствах напоминают компакты в  $\mathbb{R}^n$  или в  $\mathbb{C}^n$  и обладают теми же полезными свойствами.

**Определение 2.1** (Метрика).  $X$  — множество.  $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\rho$  — **метрика**, если при  $x \in X \wedge y \in X \wedge z \in X$  она обладает следующими свойствами

1.  $\rho(x, y) \geq 0 \wedge (\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y)$
2.  $\rho(y, x) = \rho(x, y)$
3.  $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$

Введём стандартное обозначение открытого шара.  $x \in X, r > 0$   
 $B_r(x) = \{y \in X : \rho(x, y) < r\}$  — шар с радиусом  $r$ .  $\{B_r(x)\}_{r>0}$  — база окрестности в точке  $x$ .

$G$  — открытое, если  $\forall x \in G \exists r > 0 B_r(x) \subset G$ .

$F$  — замкнутое  $\Leftrightarrow F \subset X \wedge X \setminus F$  — открытое.

В метрическом пространстве удобно характеризовать замкнутое множества с помощью последовательностей. Вспомним, что такое сходящаяся последовательность.

$\{x_n\}_{n=1}^\infty$  — последовательность  $\wedge \forall n \in \mathbb{N} x_n \in X \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Leftrightarrow$   
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x_0) = 0$

$(X, \rho)$  — метрическое пространство  $\Rightarrow (F$  — замкнутое  $\Leftrightarrow \{x_n\}_{n=1}^\infty$  — последовательность  $\wedge \forall n \in \mathbb{N} x_n \in F \wedge (\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow x_0 \in F))$

**Определение 2.2** (Фундаментальная последовательность).  
 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  — фундаментальная  $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N} ((n > N \wedge m > N) \Rightarrow \rho(x_n, x_m) < \varepsilon) \Leftrightarrow \lim_{n, m \rightarrow \infty} \rho(x_n, x_m) = 0$

**Замечание 2.1.**  $\exists x_0 \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \{x_n\}_{n=1}^\infty$  — фундаментальная

**Определение 2.3** (Полное метрическое пространство).  
 $(X, \rho)$  — полное, если все фундаментальные последовательности имеют предел, лежащий в  $X$

Почему хорошо жить в полном метрическом пространстве?

**Замечание 2.2** (о пользе полноты).  $F : X \rightarrow \mathbb{R}, (X, \rho)$  — метрическое пространство,  $F$  — непрерывная.

Стоит задача найти  $x_0 \in X$  т.ч.  $F(x_0) = 0$   
 Алгоритм:  $\{x_n\}_{n=1}^\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = 0, \lim_{n, m \rightarrow \infty} \rho(x_n, x_m) = 0$  Если  $(X, \rho)$  — полное, то  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, F(x_0) = 0$  А если нет, то из наших вычислений вообще ничего не следует, возможно, решения вообще нет.

**Пример 2.1.**  $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$  — полные.

**Пример 2.2.**  $\mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$  — неполное.

**Пример 2.3.**  $\mathbb{Q}$  — неполное.

Потом приведем примеры поинтереснее. Кстати, древние греки пришли в ужас, когда узнали, что  $\mathbb{Q}$  — неполное.

**Определение 2.4.**  $(X, \rho)$  — метрическое пространство,  $A \subset X, A$  — ограниченное, если

$$\exists R > 0 \exists x_0 \in X A \subset B_R(x_0)$$

**Теорема 2.1** (Свойства фундаментальных последовательностей).  $(X, \rho)$  — метрическое пространство,  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  — фундаментальная последовательность, тогда выполняется:

1.  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  — ограниченная, т.е.  $\exists R > 0 \exists x_0 \in X \forall n \in \mathbb{N} x_n \in B_R(x_0)$
2.  $\exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$  — подпоследовательность  $\exists a \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$
3.  $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^\infty$  — произвольная последовательность действительных чисел  $\wedge \forall k \in \mathbb{N} \varepsilon_k > 0 \Rightarrow \exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$  — подпоследовательность  $\forall j \in \mathbb{N} (j > k \Rightarrow \rho(x_{n_k}, x_{n_j}) < \varepsilon_k)$

*1 утверждение.* Возьмём  $\varepsilon = 1$ , тогда из фундаментальности  $\exists N \forall n \in \mathbb{N} (n > N \Rightarrow \rho(x_n, x_N) < 1)$ .

Возьмём  $R = \max\{\rho(x_1, x_N), \dots, \rho(x_{N-1}, x_N)\} + 1$ . Единица на всякий случай.

Тогда  $\forall n \in \mathbb{N} x_n \in B_R(x_N)$ . □

*2 утверждение.* Возьмём  $\varepsilon > 0$ , тогда по фундаментальности  $\exists N \forall n \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N} ((n > N \wedge m > N) \Rightarrow \rho(x_n, x_m) < \varepsilon)$ . Возьмём это  $N$ .

$\exists a \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} = a \Rightarrow \exists n_k (\rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon \wedge n_k > N)$ . Возьмём это  $n_k$ .

Возьмём некоторое  $m > N$ . Тогда  $\rho(x_m, a) < \rho(x_m, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, a) < 2\varepsilon$  □

*3 утверждение.* Докажем по индукции:

$\varepsilon_1 : \exists n_1 \forall n \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N} ((n > n_1 \wedge m > n) \Rightarrow \rho(x_m, x_n) < \varepsilon_1)$ .

Выберем  $n_1$ , тогда  $\forall m \in \mathbb{N} (m > n_1 \Rightarrow \rho(x_m, x_{n_1}) < \varepsilon_1)$ .

$\varepsilon_k$  : по индукции выбрали  $n_1, \dots, n_{k-1}, k \geq 2. \forall j \in (1 \dots k-1) \forall m \in \mathbb{N} (m > n_j \Rightarrow \rho(x_m, x_{n_j}) < \varepsilon_j)$ . Из фундаментальности исходной последовательности  $\exists n_k (n_k > n_{k-1} \wedge \forall m \in \mathbb{N} (m > n_k \Rightarrow \rho(x_m, x_{n_k}) < \varepsilon_k))$  □

**Следствие 2.1.**  $(X, \rho), \{x_n\}$  — фундаментальная последовательность, тогда

$$\exists \{x_{n_k}\} \text{ т.ч. } \sum_{k=1}^{\infty} \rho(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < +\infty$$

*Доказательство.* По 3 свойству при  $\varepsilon_k = \frac{1}{2^k}$ . □



**Теорема 2.2** (О замкнутом подмножестве).  $(X, \rho)$  — метрическое пространство, тогда

1.  $(X, \rho)$  — полное,  $Y \subseteq X$ ,  $Y$  — замкнутое  $\Rightarrow (Y, \rho)$  — полное
2.  $Y \subseteq X$ ,  $(Y, \rho)$  — полное  $\Rightarrow Y$  — замкнутое

*1 утверждение.* Доказательство следует прямо из определения. Знаем, что  $Y$  — замкнутое подмножество полного пространства. Берем фундаментальную последовательность.  $Y \subset X$ , пусть  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \forall n \in \mathbb{N} x_n \in Y$  — фундаментальная.  $\forall n \in \mathbb{N} x_n \in X, X$  — полное  $\Rightarrow \exists x_0 \in X \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ .  $Y$  — замкнутое, значит  $x_0 \in Y \Rightarrow (Y, \rho)$  — полное.  $\square$

*2 утверждение.* Второй пункт не труднее первого. Пусть  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  — произвольная фундаментальная последовательность в  $Y$ .

$Y$  — полное  $\Rightarrow \exists x_0 \in Y \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow Y$  — замкнутое из-за произвольности последовательности.  $\square$

## 2.1. Банаховы пространства

Сначала введём понятие полунормы.

**Определение 2.5** (полунорма). Пусть  $X$  — линейное пространство над  $\mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ . Отображение  $p : X \rightarrow \mathbb{R}$  называется полунормой, если при  $x \in X \wedge y \in X \wedge (\lambda \in \mathbb{R} \vee \lambda \in \mathbb{C})$

1.  $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$  (полуаддитивность)
2.  $p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$

**Свойство 2.1.**  $p$  — полунорма  $\Rightarrow$

$$\forall x \in X p(x) \geq 0 \wedge p(0) = 0$$

*Доказательство.*  $p(0) = p(0 \cdot 0) = 0 \cdot p(0) = 0$ . Пусть  $x \in X \Rightarrow 0 = x + (-x) \Rightarrow p(0) \leq p(x) + \underbrace{p(-x)}_{p(x)} = 2p(x) \Rightarrow p(x) \geq 0$   $\square$

**Определение 2.6** (Норма).  $X$  — линейное пространство,  $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ .  $p$  — норма  $\Leftrightarrow (p$  — полунорма  $\wedge (p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0))$ . Будем обозначать  $\|x\| := p(x)$ .

$(X, \|\cdot\|)$  будем обозначать нормированное пространство. и при  $(x \in X \wedge y \in X)$   $\rho(x, y) := \|x - y\|$ . Тогда  $(X, \|\cdot\|)$  — метрическое пространство.

**Определение 2.7** (банахово пространство).  $(X, \|\cdot\|)$  — банахово, если оно полное

Еще пару определений перед критерием банахова пространства.

**Определение 2.8** (подпространство в алгебраическом смысле).  $X$  — линейное пространство,  $L \subset X$ .  $L$  — подпространство в алгебраическом смысле  $\Leftrightarrow \forall x \in L \forall y \in L \forall \alpha \in K \forall \beta \in K \alpha x + \beta y \in L$ .

**Определение 2.9** (подпространство).  $(X, \|\cdot\|)$ ,  $L \subset X$ ,  $L$  — подпространство, если

- $L$  подпространство в алгебраическом смысле
- $L = \bar{L}$  ( $\bar{L}$  — замыкание)

Теперь нам потребуется сходимость рядов. Для того, чтобы говорить о сходимости, нужна топология.

**Определение 2.10** (Сходимость).

$$(X, \|\cdot\|) \quad \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \quad S_n = \sum_{k=1}^n x_k$$

$\sum_{k=1}^{\infty} x_k$  (\*), (\*) сходится, если  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \in X$

(\*) сходится абсолютно, если  $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$  сходится

В  $\mathbb{R}^n$  (или в  $\mathbb{C}^n$ ) если у нас была абсолютная сходимость, то была и обычная, но вообще говоря, это не так.

**Теорема 2.3** (Критерий полноты нормированного пространства (банаховости)).  $(X, \|\cdot\|)$  — полное  $\Leftrightarrow$  из абсолютной сходимости ряда следует сходимость ряда.

*Доказательство.* Предположим, что наше пространство полное ( $\Rightarrow$ ).  $(X, \rho)$  — полное,  $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ .

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| \text{ сходится} \quad (**)$$

Цель такая: последовательность  $S_n$  — фундаментальная. Сейчас применим критерий Коши к ряду (\*\*). Это ряд из чисел, так что всё в порядке. Пусть  $\varepsilon > 0$ . По критерию Коши  $\exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \forall p \in \mathbb{N} (n > N \Rightarrow \sum_{k=n}^{n+p} \|x_k\| < \varepsilon)$ .

$$S_n = \sum_{k=1}^n x_k.$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{n+p} \|x_k\| &= \|S_{n+p} - S_n\| = \left\| \sum_{k=1}^p x_{n+k} \right\| \leq \sum_{k=1}^p \|x_{n+k}\| \leq \varepsilon \\ &\Rightarrow \{S_n\}_{n=1}^\infty \text{ — фундаментальная, } (X, \rho) \text{ — полное} \\ &\Rightarrow \exists S \in X \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} x_k \text{ сходится}$$

Мы так запаслись номерами, чтобы выражение было меньше  $\varepsilon$

Теперь ( $\Leftarrow$ ). У нас кроме определения ничего нет. Возьмём какую-то фундаментальную последовательность. Откуда взять предел? Есть соотношения между элементами последовательности. Возьмём подпоследовательность, ведь у нас есть следствие 2.1! Из свойств фундаментальных последовательностей, мы знаем, что существует подпоследовательность

$$\begin{aligned} \{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty : \|x_{n_1}\| + \sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| &< +\infty \\ \Rightarrow x_{n_1} + \sum_{k=1}^n (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) &\text{ — сходится, но:} \\ S_m = x_{n_1} + \sum_{k=1}^{m-1} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) &= x_{n_m} \Rightarrow \exists S \in X \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_m} = S \end{aligned}$$

□

## 2.2. Пространства ограниченных функций

**Определение 2.11.** Пусть  $A$  — произвольное множество. Стандартное обозначение  $m(A)$  — множество всех ограниченных функций.

$$m(A) = \{f : A \rightarrow \mathbb{R} \text{ или } \mathbb{C}, \sup_{x \in A} |f(x)| < \infty\}$$

$$f \in m(A), \|f\|_\infty = \sup_{x \in A} |f(x)|.$$

**Теорема 2.4.**  $(m(A), \|\cdot\|_\infty)$  — банахово пространство

*Доказательство.* Нужно проверить две вещи. Во-первых, что норма удовлетворяет аксиомам нормы. А во-вторых, что пространство с таким определением является полным. Просто по определению, никаких хитрых критериев. Возьмём фундаментальную подпоследовательность и покажем, что у нее есть предел.

Проверяем, что  $\|\cdot\|_\infty$  удовлетворяет аксиомам нормы.

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in A} |f(x)| \geq 0, \|f\|_\infty = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \forall x \in A \text{ т.е. } f = 0$$

$$\lambda \in \mathbb{R} \text{ (или } \mathbb{C}). \|\lambda f\|_\infty = \sup_{x \in A} |\lambda| \cdot |f(x)| = |\lambda| \cdot \|f\|_\infty$$

Нужно проверить неравенство треугольника.

$f, g \in m(A)$ .  $x$  — фиксированная точка в  $A$

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \forall x \in A$$

$$\Rightarrow \|f + g\|_\infty = \sup_{x \in A} |f(x) + g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

Теперь мы проверили аксиомы нормы. Доказываем полноту.  $\{f_n\}$  — фундаментальная в  $m(A)$ .

$$\varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : (m > N \wedge n > N) \Rightarrow \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon \text{ т.е. } \sup_{x \in A} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Первый вопрос: откуда взять претендента на роль предела? Еще желательно, чтобы он был единственный. Фиксируем  $x$ . Если для супремума есть неравенство, то и для  $x$  тем более.  $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$  при  $n, m > N$ .  $\Rightarrow \{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$  — последовательность чисел в  $\mathbb{C}$  или  $\mathbb{R}$ .

$$\Rightarrow \{f_n(x)\}_{n=1}^\infty \text{ — фундаментальная} \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \forall x \in A \text{ фиксированный}$$

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &< \varepsilon \quad \text{пусть } m \rightarrow \infty \\ \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| &\leq \varepsilon, x \in A \forall x \in A \\ \Rightarrow \|f_n - f\|_\infty &= \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \text{ при } n > A \end{aligned}$$

Последнее соображение, которое нужно добавить, это то, что  $f$  — элемент  $A$ . Мы можем записать  $f$  как  $f = (f - f_n) + f_n, f_n \in m(A), f - f_n \in m(A)$ .

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f \in m(A)$$

□

Давайте заметим, что у нас получилось определение равномерной непрерывности из математического анализа.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f \in m(A) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| = 0 \Leftrightarrow f_n \xrightarrow[A, n \rightarrow \infty]{} f$$

**Определение 2.12** (Топологический компакт). Множество  $K$  — топологический компакт, если оно обладает следующими свойствами

1.  $\forall \{G_\alpha\}_{\alpha \in A}, G_\alpha$  — открытые множества  $K \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \exists \{\alpha_j\}_{j=1}^n, K \subset \bigcup_{j=1}^n G_{\alpha_j}$
2. Хаусдорфовость  $\forall x, y (x \neq y) \in K \exists U, V$  — открытые множества,  $x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset$

**Определение 2.13.**  $C(K) = \{f : K \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ непрерывна}\}$

$$\|f\|_{C(K)} = \|f\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)| = \max_{x \in K} |f(x)|$$

**Следствие 2.2.**  $K$  — топологический компакт  $\Rightarrow C(K)$  — банахово

*Доказательство.*  $C(K) \subset m(K)$ .  $C(K)$  — подпространство в алгебраическом смысле. Проверим, что  $C(K)$  — замкнуто в  $m(K)$

$$\{f_n\}, f_n \in C(K), \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f_n \xrightarrow{K, n \rightarrow \infty} f \Rightarrow f \in C(K) \Rightarrow C(K)$$

тогда  $m(K)$  — полное и  $C(K)$  — полное.  $\square$

## 2.3. Пространство последовательностей с $\sup$ нормой

**Определение 2.14.**  $\mathbb{C}^n, n \in \mathbb{N}, l_n = \{x^\infty = (x_1, \dots, x_n), x_j \in \mathbb{C}\}$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$$

$A = \{1, 2, \dots, n\}, l_n^\infty = m(A) \Rightarrow l_n^\infty$  — полное. Удобно думать, что последовательность — это функция на множестве натуральных чисел.

**Определение 2.15** ( $l^\infty$ ).

$$l^\infty = \{X = \{x_j\}_{j=1}^\infty, \sup_{j \in \mathbb{N}} |x_j| < +\infty\}$$

$$\|x\|_\infty = \sup_{j \in \mathbb{N}} |x_j| \quad A = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$$

$$X = \{x\}_{j=1}^\infty \in m(A), f(j) = x_j$$

$$l^\infty := m(\mathbb{N}) \Rightarrow l^\infty \text{ — полное}$$

**Определение 2.16.**

$$c = \{X = \{x\}_{j=1}^\infty, x_j \in \mathbb{C} \mid \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0\}$$

$$c \subset l^\infty, \|x\| = \|x\|_\infty = \sup \|X\|$$

$$c_0 = \{x = \{x\}_{j=1}^\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} x_j = 0\}, c_0 \subset c \subset l^\infty$$

$c, c_0$  — замкнутые подпространства в  $l^\infty \Rightarrow c, c_0$  — банаховы.

## 2.4. Пространства $n$ раз непрерывно дифференцируемых функций на отрезке

**Определение 2.17.** (норма  $n$  производной)

$$n \in \mathbb{N} \quad C^{(n)}[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists f^{(n)} \in C[a, b]\}$$

$$\|f\|_{(n)} = \max_{0 \leq k \leq n} \|f^{(k)}\|_{\infty}, \quad f^{(0)} = f$$

**Теорема 2.5.** В  $C^{(n)}[a, b]$  — банахово.

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \{f_m\}_{m=1}^{\infty} & \text{ — фундаментальная последовательность в } C^{(n)}[a, b] \\ \varepsilon > 0 \exists N : (m > n \wedge q > n) & \Rightarrow \|f_m - f_q\|_{C^{(n)}} < \varepsilon \Rightarrow \|f_m^{(k)} - f_q^{(k)}\|_{\infty} < \varepsilon \\ & k = 0, 1, \dots, n \end{aligned}$$

$\{f_m^{(k)}\}$  — фундаментальная в полном пространстве  $C[a, b]$

$$\Rightarrow \exists \varphi_k \in C[a, b], f_n^{(k)} \rightrightarrows_{[a, b]} \varphi_k, k = 0, 1, \dots, n$$

$$\stackrel{\text{Анализ}}{\Rightarrow} (f_k^{(n)} \rightrightarrows_{[a, b]} \varphi_0 \wedge \varphi_k^0 \rightrightarrows_{[a, b]} \varphi_1) \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_0', \varphi_2 = \varphi_0'', \dots, \varphi_n = \varphi_0^{(n)} \quad (2.1)$$

□

19.09.23

## Глава 3

# Пространство суммируемых функций (Лебега $L^p$ )

Сейчас будет небольшой экскурс в теорию меры, которая была на математическом анализе. Мы ничего доказывать не будем и поверим, что все утверждения верны и в общем случае.

### 3.1. Теория меры

**Определение 3.1** (Мера).  $(X, U, \mu)$  — пространство с мерой.  $X$  — множество,  $U$  —  $\sigma$ -алгебра подмножества  $X$

1.  $\emptyset \in U$
2.  $A \in U \Rightarrow X - A \in U$
3.  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}, A_n \in U, A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow A \in U$

$$\mu : U \rightarrow [0, +\infty]$$

— мера, если

1.  $\mu(\emptyset) = 0$
2.  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, A_n \cap A_m = \emptyset, n \neq m, A_n \in U \Rightarrow \mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$  (счетная аддитивность)

Предположения:

1.  $\mu$  — полная мера, то есть  $A \in U, \mu(A) = 0 \Rightarrow (\forall B \subset A \Rightarrow B \in U)$



$$U, (\Rightarrow \mu B) = 0)$$

2.  $\mu$  —  $\sigma$ -конечна, то есть  $X = \cup_{j=1}^{\infty} X_j, \mu(X_j) < +\infty$

Пока можем думать, что речь идет о мере Лебега. Потом приведём другие примеры. В теории пространств будем считать, что функция действует из  $X$  в  $\mathbb{R}$  или в  $\mathbb{C}$  (не особо важно).

**Определение 3.2** (Измеримая функция).  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ .  $f$  — измерима, если

$$\forall c \in \mathbb{R}, x \underbrace{\{x : c < f(x)\}}_{\text{измеримое множество}} \in U$$

$$f : X \rightarrow \mathbb{C} \Rightarrow f = u + iv, u, v : X \rightarrow \mathbb{R}$$

$f$  — измерима, если  $u, v$  — измеримы

Как же определяется интеграл? Пусть есть какой-то элемент  $\sigma$ -алгебры  $e \in U$ ,  $\chi_e(x) = \begin{cases} 1, x \in E \\ 0, x \notin e \end{cases}$ . Множество простых функций определяется как

$$S = \{g(x) = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{e_k}, c_k \in \mathbb{C}, e_k \in U\}$$

$g \in S, \int_X g(x) d\mu = \sum_{k=1}^n c_k \mu e_k$ .  
 $f(x)$  — измеримая, если  $f(x) \geq e, x \in X$

**Определение 3.3** (Произвольно измеримая функция).

$$\int_X f d\mu = \sup \left\{ \int_X g(x) d\mu : 0 \leq g(x) \leq f(x), x \in X, c_k \in \mathbb{R}, c_k > 0 \right\}$$

**Определение 3.4** (Измеримая функция).  $f$  — измерима, если

$$f_+(x) = \max(f(x), 0) \wedge f_-(x) = \max(-f(x), 0) \Rightarrow f = f_+ - f_-$$

Если  $\int_X f_+ d\mu$  — конечен или  $\int_X f_- d\mu$  — конечен, то  $\int_X f d\mu = \int_X f_+ d\mu - \int_X f_- d\mu$  Если  $f$  — измеримая,  $f : X \rightarrow \mathbb{C} \Rightarrow f = u + iv$

$$\int_X f d\mu = \int_X u d\mu + i \int_X v d\mu$$

**Определение 3.5** (Множество суммируемых функций).  
 $L(X, \mu)$  — множество суммируемых функций =

$$\left\{ f_i : \int_X |f| d\mu < +\infty \right\}, |f| = f_+ + f_-$$

Прежде чем двигаться дальше, приведем примры других мер (кроме мер Лебега)

**Пример 3.1.**  $E \subset \mathbb{R}^n$ ,  $E$  — измерима по Лебегу,  $\lambda$  — мера Лебега,  $w(x) \geq 0, x \in E$ ,  $w$  — измерима по Лебегу.

$e \subset E$ ,  $e$  — измеримо по Лебегу.  $\mu_e = \int_e w(x) d\lambda$ ,  $w(x)$  — плотность меры  $\mu$ ,  $w(x)$  — её вес.

Вторая мера в каком-то смысле противоположная. Она сосредоточена на наборе точек и называется дискретной.

**Пример 3.2.**  $X$  — множество ( $X \neq \emptyset$ ),  $a \in X$

$$\sigma_n, e \subset X, \sigma_n(e) = \begin{cases} 1, & a \in e \\ 0, & a \notin e \end{cases}$$

$\forall e, e \subset X, e$  — измеримо

**Пример 3.3** (Дискретная мера).  $X$  — бесконечное множество.  $\{a_j\}_{j=1}^\infty, a_j \in X, a_j \neq a_k, j \neq k$   
 $\{h_j\}_{j=1}^\infty, h_j > 0$

$$\mu = \sum_{j=1}^\infty h_j \delta_{a_j}, e \subset X \quad \mu E = \sum_{\{j: a_j \in E\}} h_j$$

План такой: хотим ввести норму на множестве интегрируемых функций. Для этого нам надо ввести некоторые неравенства.

## 3.2. Классические неравенства

**Теорема 3.1** (Неравенство Юнга).  $p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  ( $q$  — сопряженный показатель)

$$\Rightarrow ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^p}{q}$$

*Доказательство.* Пусть  $b$  — фиксировано,  $\varphi(x) = \frac{x^p}{p} - xb, x \in [0, +\infty)$ . Хотим найти  $\min_{x \in [0, +\infty)} \varphi(x)$ . Для этого посмотрим, где производная обращается в 0.  $\varphi'(x) = x^{p-1} - b$ ,  $\varphi'(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 = b^{\frac{1}{p-1}} \Rightarrow \varphi(x) > \varphi(x_0) \forall x \neq x_0, x \geq 0$ . Таким образом,  $x_0$  — строгий локальный минимум.

$$\begin{aligned}\varphi(x_0) &= \frac{1}{p} b^{\frac{p}{p-1}} - b^{\frac{p}{p-1}} = b^{\frac{p}{p-1}} \left( \frac{1}{p} - 1 \right) = \frac{b^q}{q} \\ -\frac{1}{q} &= \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p} \Rightarrow q = \frac{p}{p-1} \\ \varphi(x) &\geq -\frac{b^q}{q} \forall x \in [0, +\infty) \text{ то есть ОК}\end{aligned}$$

$$\varphi(x_0) = \frac{1}{p} b^{\frac{p}{p-1}} - b^{\frac{p}{p-1}} = b^{\frac{p}{p-1}} \left( \frac{1}{p} - 1 \right) = \frac{b^q}{q}$$

□

**Замечание 3.1.** Равенство в неравенстве Юнга достигается только при  $a = b^{\frac{1}{p-1}}$

**Теорема 3.2** (Неравенство Гельдера).  $(X, U, \mu)$  — пространство с мерой.  $f, g$  — измеримые,  $p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow$

$$\int_X |fg| d\mu \leq \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \int_X |g|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \quad (*)$$

Если  $p = q = 2$ , то это «Неравенство Коши-Бунаковского-Шварца», или на молодёжном математическом сленге неравенство КБШ

*Доказательство.* Для начала отбросим какие-то простые случаи.

$A = \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, B = \left( \int_X |g|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$ . Если  $A = 0 \Leftrightarrow |f| = 0$  почти всюду по  $\mu \Leftrightarrow f(x) = 0$  почти всюду по  $\mu$  (то есть  $\mu\{x : f(x) \neq 0\} = 0$ ) На всякий случай поясним, почему функция равна 0 почти всюду по мере  $\mu$

$$\int_X |f| d\mu = 0 \Rightarrow e = \{x : f(x) = 0\}, m \in \mathbb{N}, e_m = \{x : |f(x)| > \frac{1}{m}\}$$

$$e = \bigcup_{m=1}^{\infty} e_m \quad \int_X |f| d\mu \geq \int_{e_m} |f| d\mu \geq \frac{1}{m} \mu e_m \Rightarrow \mu e_m = 0 \Rightarrow \mu E = 0$$

$$\Rightarrow f(x) \cdot g(x) = 0 \text{ п.в.} \quad 0 \leq 0 \quad (*)$$

Если  $A = +\infty$ , то (\*)

пусть  $0 < A < +\infty, 0 < R < +\infty$

Неравенство Гельдера однородное, то есть если мы  $f$  умножим на константу, то левая и правая часть умножится на неё же, аналогично с  $g$ . Иногда бывает удобно ввести нормировку.

$$f_1(x) = \frac{f(x)}{A}, g_1(x) = \frac{g(x)}{B}, \int_X |f_1(x)|^p d\mu = \frac{A^p}{A^p} = 1, \int_X |g_1(x)|^q d\mu = 1$$

Пусть  $x$  — фиксирован,  $a = |f(x)|, b = |g(x)| \xrightarrow{\text{н.Юнга}}$

$$\begin{aligned} |f_1(x)| \cdot |g_1(x)| &\leq \frac{|f_1(x)|^p}{p} + \frac{|g_1(x)|^q}{q} \text{ проинтегрируем } X \text{ по } \mu \\ \Rightarrow \int_X |f_1| \cdot |g_1| d\mu &\leq \frac{1}{p} \int_X |f_1|^p d\mu + \frac{1}{q} \int_X |g_1|^q d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \end{aligned}$$

Умножаем на  $AB \Rightarrow \int_X |fg| d\mu \leq AB$  □

**Теорема 3.3** (Неравенство Минковского).  $(X, U, \mu), f, g$  — измеримые,  $1 \leq p < +\infty \Rightarrow$

$$\underbrace{\left( \int_X |f(x) + g(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}}_C \leq \underbrace{\left( \int_X |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}}_A + \underbrace{\left( \int_X |fg(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}}_B \quad (*)$$

*Доказательство.* Сначала разберём простые случаи.  $p = 1, x$  — фиксирован.  $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$  проинтегрируем по  $X \Rightarrow (*)$  при  $p = 1$ . Теперь пусть  $p > 1$ . Если  $A = +\infty$ , или  $B = +\infty$ , или  $C = 0$ , то (\*).

Теперь же пусть  $A < +\infty, B < +\infty, C > 0$ . Доказательство будет в два этапа. На первом этапе получим гораздо более слабое утверждение, вообще не то, что требуется в теореме, но оно нам понадобится. Докажем, что  $C < +\infty$ .

$a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow |a+b| \leq |a|+|b| \leq 2 \max(|a|, |b|) \Rightarrow |a+b|^p \leq 2^p \max(|a|^p, |b|^p) \leq 2^p(|a|^p + |b|^p) \Rightarrow$  при фиксированном  $x$

$$|f(x) + g(x)|^p \leq 2^p(|f(x)|^p + |g(x)|^p) \text{ проинтегрируем по } X$$

$\Rightarrow C^p \leq 2^p(A^p + B^p) \Rightarrow C < +\infty$ . Первая часть доказательства закончена.

$$C^p = \int_X |f+g|^p d\mu = \int_X |f+g| \cdot |f+g|^{p-1} d\mu \leq \int_X |f| \cdot |f+g|^{p-1} d\mu + \int_X |g| \cdot |f+g|^{p-1} d\mu$$

$$\int_X |f| \cdot |f+g|^{p-1} d\mu \stackrel{\text{н. Гельдера}}{\leq} \left( \int_X |f+g| d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \underbrace{\int_X |f+g| d\mu}_A \right)^{(p-1)q} = AC$$

$$\begin{aligned} \int_X |g| \cdot |f+g|^{p-1} d\mu &\stackrel{\text{аналогично}}{\leq} BC^{\frac{p}{q}} \Rightarrow \\ C^p &\leq (A+B)C^{\frac{p}{q}}, \quad 0 < C < +\infty \Rightarrow \\ C^{p-\frac{p}{q}} = C &\Rightarrow C \leq A+B \text{ (это (*)} \end{aligned}$$

□

### 3.3. Пространство Лебега

Отсюда и до определения  $L^\infty$  очень аккуратно с  $\mathcal{L}$  и  $L$  читать. Тут точно есть путаница, но записи лекции нет, чтобы ее устранить.

**Определение 3.6.**  $(X, U, \mu)$  — пространство с мерой.  $L(X, \mu)$  — пространство суммируемых функций.  $1 \leq p < +\infty$   $\mathcal{L}^p(X, \mu) = \{f : |f|^p \in L(X, \mu)\}$

$$f \in L^p(X, \mu), \|f\|_p = \left( \int_X |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

Проверим, что  $\|f\|_p$  — это полунорма на  $L^p(X, \mu)$ .  $c \in \mathbb{R}$  (или  $\mathbb{C}$ ).  $\|cf\|_p = |c| \|f\|_p$

$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$  — неравенство Минковского

$\|f\| = 0 \Leftrightarrow \int_X |f(x)|^p d\mu = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$  почти всюду по мере  $\mu$  на  $X$ .

**Пример 3.4.**  $L[0, 1], \lambda$  — мера Лебега на  $[0, 1]$ .

функция Дирихле  $\varphi(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad \int_0^1 |\varphi(x)| d\lambda = 0.$

$N = \{f \text{ — измерима} \wedge f(x) = 0 \text{ почти всюду на } X \text{ по } \mu\}$ .  $\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f \in N$  (не зависит от  $p$ ). Рецепт приготовления пространства с нормой из полуфбриката. пространство с полунормой.  $N$  — подпространство в  $L^p$ ,  $L^p = L^p/N$  — факторпространство.

$g, f \in L^p, f \sim g \Leftrightarrow f - g \in N \Leftrightarrow f(x) = g(x)$  почти всюду по  $\mu$ .  $\bar{f}$  — класс эквивалентности,  $\bar{f} = \{g : f \sim g\}$ .

$\|\bar{f}\|_p := \|f\|$ , то есть можно взять любую функцию из класса эквивалентности.

$$\|\bar{f}\|_p = 0 \Leftrightarrow \int_X |f|^p d\mu = 0 \Leftrightarrow f \in N \Rightarrow \bar{f} = N = \bar{0} \Rightarrow$$

$\|\bar{f}\|_p$  — норма на  $L^p$ . Говорят, что  $f \in L^p$ , возьмём функцию из  $L^p$ , но имеют в виду, что возьмут класс эквивалентности, а из него возьмут функцию

Одна из главных целей — доказать, что эти пространства Банаховы. Сначала определим  $L^\infty(X, \mu)$  (существенно ограниченные функции).

**Определение 3.7** ( $L^\infty(X, \mu)$ ).  $f \in L^\infty(X, \mu)$ , если

$$\exists c > 0 |f(x)| \leq c \text{ почти всюду на } X \text{ по } \mu (\mu\{x : |f(x)| > c\} = 0)$$

Возьмём точную нижнюю грань этой константы.  $\|f\|_\infty = \inf\{c \geq 0 : \mu\{x : |f(x)| > c\} = 0\}$  (существующий  $\sup$ , или на подлом англосаксонском  $\text{ess sup}_X f$ )

**Свойство 3.1.**  $f \in \mathcal{L}^\infty(X, \mu) \Rightarrow \mu\{f(x) > \|f\|_\infty\} = 0$

*Доказательство.*  $e = \{x : |f(x)| > \|f\|_\infty\}, m \in \mathbb{N}$ .

$$e_m = \{x : |f(x)| > \|f\|_\infty + \frac{1}{m}\} \Rightarrow \mu e_m = 0 \text{ по определению } \text{ess sup}_X f \\ \Rightarrow e = \bigcup_{m=1}^\infty e_m \Rightarrow \mu e = 0 \quad \square$$

$\|f\|_\infty$  — полунорма на  $\mathcal{L}^\infty$

$$\lambda \neq 0 \quad |\lambda f(x)| \leq |\lambda| \cdot c \Leftrightarrow |f(x)| \leq c \Rightarrow \|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \|f\|_\infty,$$

$$f, g \in \mathcal{L}^\infty, x \in X \Rightarrow |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \text{ для п.в. } x \text{ на } X \\ \Rightarrow \|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

$\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \mu\{x : |f(x)| > 0\} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$  п.в. на  $X \Leftrightarrow f \in N = \{f \text{ — измерима, } f(x) = 0 \text{ п.в. на } X\}$

$$L^\infty = \mathcal{L}^\infty / N$$

Все, что Н.А. доказал для меры Лебега, верно и для других мер. Те доказательства и так были не особо веселые, чтобы их повторять.

**Теорема 3.4** (Фату).  $(X, U, \mu)$ ,  $\{g_n\}_{n=1}^\infty, g_n$  — измеримые,  $g_n(x) \geq 0$

$$\begin{aligned} g_n(x) \xrightarrow{\text{п.в.}} g(x) \quad \int_X g_n(x) d\mu \leq C \text{ не зависит от } n \\ \Rightarrow \int_X g(x) d\mu \leq C \end{aligned}$$

Первая существенная теорема, которая нам встретилась.

**Теорема 3.5** (полнота пространства Лебега).  $(X, U, \mu)$ ,  $1 \leq p \leq +\infty \Rightarrow L^p(X, \mu)$  — банаховы.

*Доказательство.* при  $1 \leq p < +\infty$  воспользуемся критерием полноты (если сходится ряд из норм, то сам ряд сходится)

$$\begin{aligned} \{f_n\}_{n=1}^\infty, f_n \in L^p, \sum_{n=1}^\infty \|f_n\|_p \leq C < +\infty \\ S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x) \end{aligned}$$

Докажем, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n(x) - f(x)\|_p = 0$ . Существует ли  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$  почти всюду на  $X$ ?

Рассмотрим  $\sigma_n(x) = \sum_{k=1}^n |f_k(x)| \Rightarrow \sigma_n(x)$  возрастает  $\Rightarrow \exists \sigma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x)$ . Возможно,  $\sigma(x) = +\infty$  для некоторых  $x$ .

$$\|\sigma_n\|_p \leq \sum_{k=1}^n \|f_k\|_p \leq C$$

$$\int_X |\sigma_n(x)|^p d\mu \leq C^p \wedge \sigma_n(x)^p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sigma(x)^p \forall x \in X \stackrel{\text{т. Фату}}{\Rightarrow}$$

$\int_X \sigma(x)^p d\mu \leq c^p$  Самое главное, что мы из этого заключаем:  $\sigma(x) < +\infty$  п.в. на  $X$  по  $\mu$ .

$$x \in X \quad \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| < +\infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \text{ — сходится}$$

$$f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \text{ определена п.в. на } X, \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p < +\infty, \varepsilon > 0$$

Применим критерий Коши:  $\exists N \in \mathbb{N} \quad m > n > N \Rightarrow \sum_{k=n+1}^m \|f_k\|_p < \varepsilon$   
 $\varepsilon \Rightarrow \|S_m(x) - S_n(x)\|_p \leq \sum_{k=n+1}^m \|f_k\|_p < \varepsilon$

$$\int_x |S_m(x) - S_n(x)|^p d\mu < \varepsilon^p (n \text{ фиксировано}) \wedge |S_m(x) - S_n(x)|^m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} |f(x) - S_n(x)|$$

$$\xRightarrow{\text{Фату}} \int_X |f - S_n|^p d\mu \leq \varepsilon^p \Rightarrow \|f - S_n\| \leq \varepsilon$$

$f - S_n \in L_p, S_n \in L^p \Rightarrow f = (f - S_n) + S_n \Rightarrow f \in L_p$  и  $\|f - S_n\|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$   
 Теперь осталось рассмотреть случай  $p = \infty$ .  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  фундаментальная,  $f_n \in L^{\infty}$ ,

$$|f_n(x)| \leq \|f_n\|_{\infty} \quad x \in X \setminus e_n, \mu e_n = 0 \quad n \in \mathbb{N}$$

$e = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_1 = X \setminus e \Rightarrow f_n \in m(X_1)$  — ограниченная функция.  
 $m(X_1)$  — полное  $\Rightarrow \{f_n\}$  — фундаментальна в  $m(X_1) \Rightarrow \exists . / f \in m(X_1)$   
 $\sup_{x \in X_1} |f(x) - f_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Положим  $f(x) = 0$  если  $x \in e \Rightarrow$   
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L^{\infty}} = 0$  □

### 3.4. Пространства $l_n^p, l^p$

$n \in \mathbb{N}, 1 \leq p < +\infty$ .

**Определение 3.8.**

$$l_n^p = \left\{ \mathbb{R}^n, x = (x_1, \dots, x_n), x_j \in \mathbb{R}, \|x\|_p = \left( \sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\}$$



Рассмотрим  $X = \{1, 2, \dots, n\}$ . Возьмём дискретную меру  $\mu(j) = 1$  при  $1 \leq j \leq n$ ,  $l_n^p = L^p(X, \mu)$ .  $f \in L^p(X, \mu)$ ,  $f(j) = x_j \Rightarrow l_n^p$  — полное.

Посмотрим, что будет обозначать сходимость этой нормы.

**Теорема 3.6.**  $\{x^{(m)}\}_{m=1}^\infty, x = (x_1, \dots, x_n), x^{(m)} = (x_1^{(m)}, \dots, x_n^{(m)}), x^{(m)} \in l_n^p, q \leq p \leq +\infty$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|x - x^{(m)}\|_p = 0 \Leftrightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} x_j^{(m)} = x_j, 1 \leq j \leq n$$

*Доказательство.*  $\Rightarrow$

Пусть  $j$  — фиксировано,  $\lim_{m \rightarrow \infty} x^{(m)} = x$  в  $l_n^p$ .

При  $p < +\infty$   $\|x - x^{(m)}\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i - x_i^{(m)}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq |x_j - x_j^{(m)}|$ . Так как  $\|x - x^{(m)}\|_p \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} |x_j - x_j^{(m)}| = 0$ .

При  $p = \infty$   $\|x - x^{(m)}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - x_i^{(m)}| \geq |x_j - x_j^{(m)}|$ . Так как  $\|x - x^{(m)}\|_\infty \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} |x_j - x_j^{(m)}| = 0$

Теперь  $\Leftarrow$

$$1 \leq j \leq n \quad \lim_{m \rightarrow \infty} |x_j - x_j^{(m)}| = 0 \Rightarrow \left( \sum_{j=1}^n \|x_j - x_j^{(m)}\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{и} \Rightarrow \max_{1 \leq j \leq n} |x_j - x_j^{(m)}| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

□

**Определение 3.9.**  $l_p = \{x : \{x_j\}_{j=1}^\infty, x_j \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \wedge \sum_{j=1}^\infty |x_j|^p < +\infty\}$

$$\|x\|_p = \left( \sum_{j=1}^\infty |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$X = \mathbb{N}, \mu(j) = 1, \mu = \sum_{n=1}^\infty \sigma_n$$

$$l^p = L^p(\mathbb{N}, \mu) \Rightarrow \text{полное} \quad 1 \leq p < +\infty$$

**Замечание 3.2.**  $\{x^{(m)}\}_{m=1}^\infty, x^{(m)} \in l^p, \lim_{m \rightarrow \infty} \|x^{(m)} - x\|_p = 0 \Rightarrow \forall j \lim_{m \rightarrow \infty} x_j^{(m)} = x_j$  Например,  $\nrightarrow$  при  $e_m = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots)$

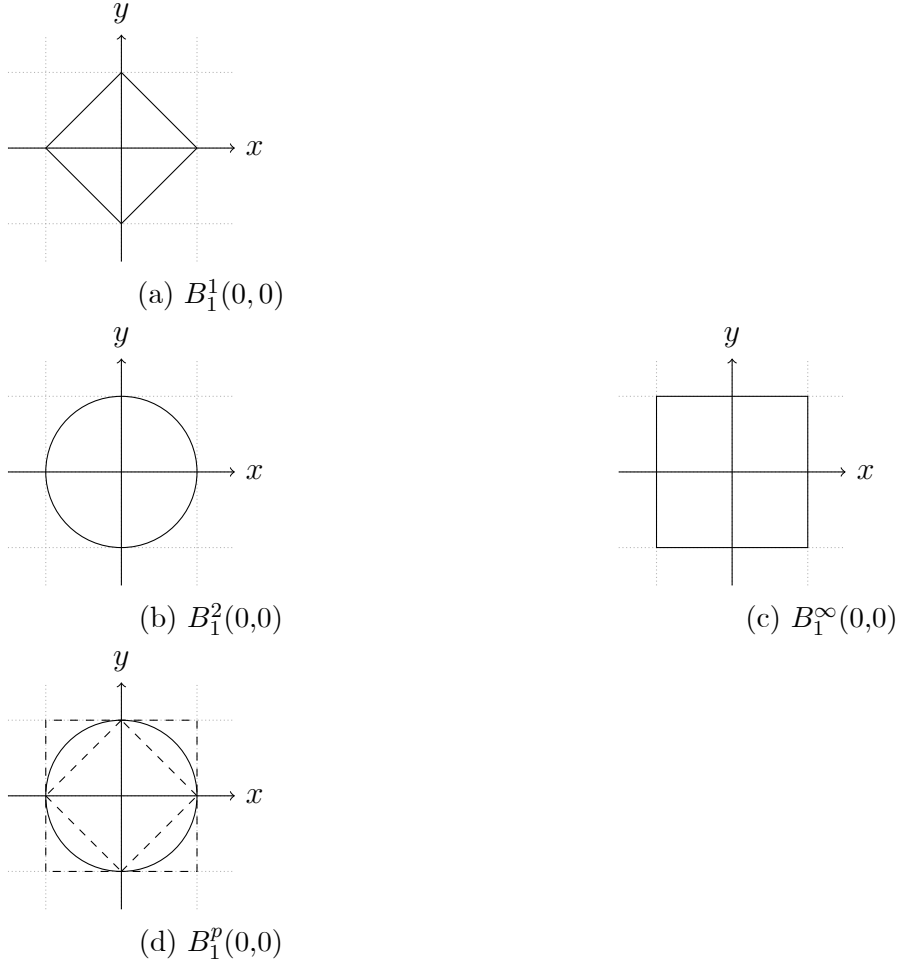


Рис. 3.1: Примеры единичных шаров в  $l_2^p$

Пусть  $j$  фиксировано.  $\lim_{m \rightarrow \infty} (e_m)_j = 0$   $\|e_m - \mathbb{0}\|_p = 1 \quad \forall p, 1 \leq p \leq +\infty$ . В качестве упражнения доказать, что  $l^p$  — полное непосредственно.

На рисунке 3.1 приведены примеры единичных шаров в  $l_2^p = \{(x, y) : (|x|^p + |y|^p)^{\frac{1}{p}}\}, 1 \leq p < +\infty$ . Для  $l_2^\infty$  норма определяется  $\|(x, y)\|_\infty = \max(|x|, |y|)$

### 3.5. Неполное нормированное пространство

**Определение 3.10** (Финитное линейное пространство).

$$F = \{x = \{x_j\}_{j=1}^{\infty}, x_j \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \exists N(x) \in \mathbb{N} : n > N(x) \Rightarrow x_n = 0\}$$

$F \subset l^p \quad 1 \leq p \leq +\infty$ .  $(F, \|\cdot\|_p)$  — не полное,  $F$  — не замкнуто. Будем брать геометрическую прогрессию и обрывать ее на некотором члене.

$$x^{(m)} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^m}, 0, 0, 0, \dots \right\} \in F$$

$$X = \left\{ \frac{1}{2^k} \right\}_{k=1}^{\infty} \in l^p$$

$$1 \leq p < +\infty \quad \|x - x^{(m)}\|_p = \left( \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^{kp}} \right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

Следовательно,  $F$  — не замкнуто.

В качестве упражнения проверить, что  $\overline{F}$  в  $l^p = ?$  при  $p < +\infty$  и при  $p = \infty$ .

**Теорема 3.7.**  $C[a, b], \|f\|_p = \left( \int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < +\infty$

$(C[a, b], \|\cdot\|)$  — не полное

*Доказательство.* При  $p = 1, [a, b] = [-1, 1], f \in C[a, b], \int_a^b |f(x)|^p dx = 0 \Leftrightarrow f(x) \equiv 0$ . Предъявим фундаментальную последовательность, предел которой не будет непрерывной функцией.

$$f_n = \begin{cases} 0, & -1 \leq x \leq 0 \\ nx, & x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 1, & x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}, f \in C[-1, 1]$$

$f_n$  — фундаментальная в  $(C[-1, 1], p = 1)$

Пусть  $m > n$ .

$$\int_{-1}^1 |f_m(x) - f_n(x)| dx = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right) \leq \frac{1}{2n} \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$$

Пусть  $\exists f \in C[-1, 1] : \|f - f_n\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$$m \geq n \quad \int_{\frac{1}{n}}^1 \underbrace{|f(x) - 1|}_{=0} dx \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

$$\int_{\frac{1}{n}}^1 |f(x) - 1| dx \leq \int_0^1 |f(x) - f_m(x)| dx \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow f(x) = 1, x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \forall n$$

$$\begin{cases} \Rightarrow f(x) = 1, x \in (0, 1], f \text{ непрерывна}, f(0) = 1 \\ \text{аналогично } f(x) \equiv 0 \text{ на } [-1, 0] \end{cases} \Rightarrow \text{противоречие}$$

□

## Глава 4

# Пополнение метрического пространства

26.09.23

Мы привели несколько примеров нормированных пространств, не являющихся полными. Приведём еще один пример.

**Определение 4.1.**

$$P = \left\{ p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, a_k \in \mathbb{R}, n \geq 0 \right\}$$

$P$  (подпространство в алгебраическом смысле)  $\subset C[a, b]$ ,  $\|p\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |p(x)|$ ,  $e^x \notin P$ ,  $p_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$ ,  $\Rightarrow p_n \xrightarrow{[a, b], n \rightarrow \infty} e^x$  это не многочлен, потому что если сколько-то раз продифференцировать многочлен, он станет тождественным 0  $\Rightarrow \overline{P} \setminus P \ni e^x \Rightarrow P$  — не замкнуто  $\Rightarrow P$  — не полное.

$$\overline{P} = C[a, b]$$

**Теорема 4.1** (Вейерштрасса, 1885).  $f \in C[a, b], \forall \varepsilon > 0 \exists p \in P$  т.ч.  $\|f - p\| < \varepsilon$  (любую функцию на отрезке можно приблизить многочленами)

$$p_n \xrightarrow{G} f \Rightarrow f \text{ аналитическая в } G$$

## 4.1. Пополнение метрического пространства

Несколько простых свойств метрики, и все следуют из неравенства треугольника

**Теорема 4.2** (Свойства метрики).  $(X, \rho)$  — метрическое

1.  $x, y, z, u \in X \Rightarrow |\rho(x, u) - \rho(y, z)| \leq \rho(x, y) + \rho(u, z)$
2.  $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow \rho(x, y)$  — непрерывная функция
3.  $A \subset X, A$  — подмножество,  $\rho(x, A) = \inf_{y \in A} \rho(x, y) \Rightarrow \rho(x, A)$  — непрерывная функция от  $x$
4.  $A \subset X, A = \overline{A}, x_0 \notin A \Rightarrow \rho(x_0, A) > 0$

*Доказательство.* 1.  $\rho(x, u) \leq \rho(x, y) + \rho(y, u) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) + \rho(z, u) \Rightarrow \rho(x, u) - \rho(y, z) \leq \rho(x, y) + \rho(z, u)$  Аналогично  $\rho(y, z) - \rho(x, u) \leq \dots$  из всего  $\Rightarrow 1)$

2. Докажем непрерывность с помощью последовательности.  
 $\rho(x, y)$  — непрерывная?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x) = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(y_n, y)$$

$$|\rho(x, y) - \rho(x_n, y_n)| \stackrel{(1)}{\leq} \rho(x, x_n) + \rho(y, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n) = \rho(x, y)$$

3.  $A \subset X, x, z \in X, |\rho(x, A) - \rho(z, A)| \leq ?$   
 Пусть  $y \in A$

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &\leq \rho(x, z) + \rho(z, y) \Rightarrow \rho(x, A) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) \forall y \in A \\ &\Rightarrow \rho(x, A) \leq \rho(x, z) + \inf_{y \in A} \rho(z, y) = \rho(x, z) + \rho(z, A) \Rightarrow \\ &\rho(x, A) - \rho(z, A) \leq \rho(x, z) \end{aligned}$$

Но нам нужен модуль. Можем сказать, что  $x$  и  $z$  ничем не отличаются, аналогично  $\rho(z, A) - \rho(x, A) \leq \rho(x, z) \Rightarrow 3$

- 4.

$$x_0 \notin A \Rightarrow x_0 \in X \setminus A \text{ открытое}$$

## ГЛАВА 4. ПОПОЛНЕНИЕ МЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА 30

$$\Rightarrow \exists \delta > 0 \quad B_\delta(x_0) \subset X \setminus A \Rightarrow \rho(x_0, A) \geq \delta$$

□

Перед определением пополнения нам потребуется несколько определений, связанных с отображениями в метрических пространствах.

$(X, \rho), (Y, d)$  — метрические пространства.  $T : X \rightarrow Y$ .

**Определение 4.2** (Изометрическое вложение).

$$d(T_x, T_z) = \rho(x, z) \quad \forall x, z \in X$$

Обозначение:  $X \hookrightarrow Y$

**Определение 4.3** (Изометрия).  $T$  — изометрическое вложение,  $T(X) = Y$

**Определение 4.4** (Изометричность пространств).  $(X, \rho), (Y, d)$  изометричны, если  $\exists T : X \rightarrow Y, T$  — изометрия

**Свойство 4.1.**  $T$  — изометрическое вложение  $\Rightarrow T$  — инъективное, непрерывное

*Доказательство.*  $x, z \in X, T : X \rightarrow Y$ , пусть  $T_x = T_z \Rightarrow d(T_x, T_z) = 0$ . Значит, исходное расстояние тоже 0 по свойству метрики.  $d(x, z) = 0 \Rightarrow x = z$

Инъективность проверили, теперь непрерывность, это еще проще.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x, x_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} d(T_{x_n}, T_x) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} T_{x_n} = T_x$$

□

**Свойство 4.2.** Если  $T$  — изометрия, то  $\exists T^{-1}$  — изометрия.

**Свойство 4.3.** «Изометричность» — отношение эквивалентности на множестве метрических пространств

И наконец

**Определение 4.5** (Пополнение м. пространства).  $(X, \rho)$  — метрическое пространство.  $(Z, d)$  — полное метрическое пространство.  $(Z, d)$  — пополнение  $(X, \rho)$ , если существует  $T : X \rightarrow Z$

1.  $T$  — изометрическое вложение
2.  $\overline{T(X)} = Z$

**Замечание 4.1.** Не обязательно искать пространство, удовлетворяющее и второму свойству. Достаточно найти такое, которое удовлетворяет первому.  $(X, \rho)$  — метрическое пространство,  $(U, d)$  — полное метрическое пространство. Пусть  $\exists T : X \rightarrow U$  — изометрическое вложение. Если 2 свойство не выполняется, то легко такое  $Z$  построить. Возьмём замыкание образа.  $Z = \overline{T(X)} \Rightarrow (Z, d)$  — пополнение  $X$ .

Теперь обещанная теорема. Возьмём любое метрическое пространство и покажем, что у него есть пополнение.

**Теорема 4.3** (О пополнении метрического пространства).  
 $(X, \rho)$  — метрическое  $\Rightarrow \exists$  пополнение  $(Z, d)$

*Доказательство.* Есть классическое доказательство с рассмотрением всех фундаментальных последовательностей, рассмотрением факторпространства, муторным разбором случаев. Мы пойдем другим путём. Будет короткое, но **фантастически** непонятное доказательство в том смысле, что непонятно, как его придумать.

Мы собираемся использовать  $m(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R}, \sup_{x \in X} |f(x)| < +\infty\}$

$$\|f\|_{m(X)} = \|f\|_{\infty} = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

$m(X)$  — полное пространство.

Каждой точке мы сопоставим функцию. Вот такая идея!  $\varphi : X \rightarrow m(X)$ . Оно же будет изометрическим вложением, то есть будет сохранять расстояния.

Сначала будет маленькое облегчающее предположение про  $X$ , от которого мы потом откажемся. Пусть  $X$  — ограниченное, то есть  $\exists M > 0$  т.ч.  $\forall x, y \in X \rho(x, y) \leq M$ . Единственная цель предположения — формула для  $\varphi$  будет чуть проще. Вообще, можно было бы обойтись и без него.

$t \in X, t$  — фиксирован,  $f_t(x) = \rho(x, t)$ . При фиксированном  $t$  — это



функция на  $X$ . Именно сюда наше отображение будет отображать  $t$ .  
Одной точке — целая функция, понятно?

$$\varphi(t) := f_t(x) \text{ т.е. } \varphi : t \rightarrow f_t(x)$$

$$|f_t(x)| \leq M \Rightarrow f_t \in m(X)$$

Самое главное. Проверим, что отображение сохраняет расстояния.  
Это очень легко. Возьмём 2 точки.

$$\text{Пусть } t, s \in X, \quad \|f_t - f_s\|_\infty = \sup_{x \in X} |\rho(x, t) - \rho(x, s)|$$

$$|\rho(x, t) - \rho(x, s)| \leq \rho(t, s), \quad \text{Пусть } x = t \Rightarrow |\rho(t, t) - \rho(t, s)| = \rho(t, s)$$

$$\Rightarrow \|\varphi(t) - \varphi(s)\|_\infty = \rho(t, s) \Rightarrow \varphi \text{ — изометрическое вложение}$$

Посмотрим, что будет, если откажемся от этого облегчающего предположения. Надо будет чуть исправить отображение  $\varphi$ .  $X$  — любое метрическое пространство.  $a \in X$  — фиксированная точка.

$$t \in X, f_t(x) = \rho(x, t) - \rho(x, a) \Rightarrow |f_t(x)| \leq \rho(a, t) \Rightarrow f_t \in m(X)$$

Раньше мы могли так брать и не вылетать из пространства из-за ограниченности. Вычтем эту штуку, чтобы попасть, куда надо.

$$t, s \in X \Rightarrow f_t(x) - f_s(x) = \rho(x, t) - \rho(x, s) \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \|f_t - f_s\|_\infty = \rho(t, s)$$

$$\text{Пополнение } X: \overline{\varphi(X)}^{\|\cdot\|_\infty} = Z, (Z, \|\cdot\|_\infty) \quad \square$$

Таким образом, изучение метрических пространств можно свести к изучению подмножества пространства непрерывных функций.

**Замечание 4.2.** Забегая далеко вперёд.  $(X, \|\cdot\|)$  — нормированное,  $X^*$  — множество непрерывных линейных функционалов на  $X$ ,  $X^*$  — полное (ВСЕГДА).

Мы построим каноническое вложение  $\pi : X \rightarrow \underbrace{(X^*)^*}_{\text{полное}}, \overline{\varphi(x)}^{X^{**}}$  —  
пополнение  $X$ .

## 4.2. Теорема о вложенных шарах

Когда-то в анализе была теорема Кантора о том, что если есть последовательность вложенных друг в друга отрезков, то их пересечение не пусто. Мы докажем похожее утверждение для метрических пространств. Оказывается, то утверждение было связано с полнотой вещественной прямой  $\mathbb{R}$ .  $(X, \rho)$  — метрическое пространство,

#### ГЛАВА 4. ПОПОЛНЕНИЕ МЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА 3

$r > 0, x \in X$

Введём стандартное обозначение замкнутого шара.

$$D_r(x) = \{y \in X : \rho(x, y) \leq r\}$$

**Теорема 4.4** (О вложенных шарах).  $(X, \rho)$  — метрическое пространство.  $X$  — полное ( $| \Leftrightarrow (\forall \{D_n\}_{n=1}^{\infty}, D_n = D_{r_n}(x_n), D_{n+1} \subset D_n, \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0 \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{+\infty} D_n \neq \emptyset)$ ). По сравнению с теоремой Кантора у нас есть дополнительное предположение о стремлении к нулю, которое здесь важно, а на прямой было как данность.

*Доказательство.*  $\Rightarrow X$  — полное

$$\{D_n\}_{n=1}^{\infty}, D_n = D_{r_n}(x_n), D_{n+1} \subset D_n, \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$$

Надо проверить, что центры шаров образуют фундаментальную последовательность, то есть что  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  — фундаментальная.

Пусть  $\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad r_n < \varepsilon$  при  $n \geq N$ .

$$(n > N \wedge m > N) \Rightarrow (x_n \in D_n \wedge x_m \in D_n) \Rightarrow \rho(x_n, x_m) \leq \leq \rho(x_n, x_N) + \rho(x_m, x_N) \leq 2\varepsilon$$

$$X \text{ — полное} \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

любое фиксированное  $m \in \mathbb{N} \quad x_n \in D_m \forall n \geq m, D_m$  — замкнутое

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty, n \geq m} x_n = x \in D_m$$

$$\Rightarrow x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} D_m$$

$\Leftarrow$

Ничего кроме определения для доказательства полноты у нас нет.

Пусть  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  — фундаментальная. Возьмём достаточно быстро убывающую последовательность  $\varepsilon_k = \frac{1}{2^k}$ . Существует  $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}, \rho(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < \frac{1}{2^{k+1}}$ .

$$D_k = D_{\varepsilon_k}(x_{n_k})$$

$$\begin{cases} y \in D_{k+1} \Rightarrow \rho(y, x_{n_{k+1}}) \leq \frac{1}{2^{k+1}} \\ \rho(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < \frac{1}{2^{k+1}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\rho(y, x_{n_k}) &\leq \rho(y, x_{n_{k+1}}) + \rho(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) < \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^k} \\ &\Rightarrow y \in D_k \Rightarrow D_{k+1} \subset D_k\end{aligned}$$

Мы взяли произвольный элемент из  $D_{k+1}$  и показали, что он принадлежит  $D_k$ , то есть показали вложенность элементов последовательности.

$$\Rightarrow \exists x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} D_k \quad \rho(x, x_{n_k}) \leq \frac{1}{2^k} \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$$

По свойству фундаментальных последовательностей из первой лекции  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$   $\square$

**Замечание 4.3.** В условиях теоремы пересечение вложенных шаров  $\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$  состоит из одной точки.

*Доказательство.* Пусть  $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n, \Rightarrow \rho(x, x_n) \in r_n, \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ . А мы знаем, что предел в метрическом пространстве единственный.  $\square$

**Замечание 4.4.** Условие, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$  в теореме существенно.

**Пример 4.1** (Замкнутые множества).  $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}, F_n$  — замкнутое,  $F_{n+1} \subset F_n, F_n \subset \mathbb{R}, \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset, F_n = [n, +\infty)$

**Пример 4.2** (По теореме).

$$X[1, +\infty) \quad \rho(x, y) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{x+y}, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

Проверим, что  $\rho$  — метрика.  $x, y, z$

$$\rho(x, y) + \rho(y, z) = 1 + \frac{1}{x+y} + 1 + \frac{1}{y+z} > 1 + 1 > 1 + \frac{1}{x+z} = \rho(x, z)$$

Проверяем полноту. Пусть  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  фундаментальная,  $\varepsilon = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$$\exists N \in \mathbb{N} : (n \geq N \wedge m \geq N) \rho(x_n, x_m) < \frac{1}{2} \Rightarrow \left( \rho(x_n, x_N) < \frac{1}{2} \wedge \rho(x_m, x_N) < \frac{1}{2} \right) \Rightarrow$$

$$x_N = x_{N+1} = x_{N+2} = \dots$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = X_N \Rightarrow (X, \rho) \text{ — полное}$$

Полноту проверили.

$$r_n = 1 + \frac{1}{2n}, x_n = n; D_n = D_{r_n}(n), h \in D_n. \text{ Пусть } x \neq n, x \in D_n \Rightarrow \rho(x, x_n) = 1 + \frac{1}{x+n} \leq 1 + \frac{1}{2n}$$

**Замечание 4.5** (Домашнее задание). Если  $(X, \|\cdot\|)$  — банахово, то  $D_{n+1} \subset D_n \{D_n\}_{n=1}^\infty \Rightarrow \bigcap_{n=1}^\infty D_n \neq \emptyset$  (требование  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$  лишнее)

### 4.3. Сепарабельные пространства

$(X, \rho)$  — метрическое пространство,

**Определение 4.6** ( $A$  плотно в  $C$ ).  $A \subset X, C \subset X$ .  $A$  плотно в  $C$ , если  $C \subset \overline{A} \Leftrightarrow$

$$\forall x \in C \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A \rho(x, A) < \varepsilon \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 C \subset \bigcup_{a \in A} B_\varepsilon(a)$$

Любой элемент  $C$  можно сколь угодно хорошо приблизить элементами из  $A$ .

**Определение 4.7** ( $A$  всюду плотно в  $C$ ).  $A$  — всюду плотно в  $X$ , если  $\overline{A} = X$

Чем же полезно это свойство? Если хотят доказать свойство для  $X$ , то часто доказывают сначала для всюду плотного подмножества.

**Определение 4.8** (Сепарабельное пространство).  $(X, \rho)$  — сепарабельное, если  $\exists E \subset X, E = \{x_n\}_{n=1}^\infty, \overline{E} = X$

**Теорема 4.5.**  $n \in \mathbb{N}, q \leq p \leq +\infty,$

$$l_n^p \text{ — сепарабельное}$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} l_n^p &= (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p) = \{x = (x_1, \dots, x_n), x_j \in \mathbb{R}, \|x\|_p\} \\ E &= \mathbb{Q}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n), x_j \in \mathbb{Q}\} \end{aligned}$$

Если  $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_p), \tilde{\mathbb{Q}} = \{x + iy, x, y \in \mathbb{Q}\}, E = \tilde{\mathbb{Q}}^n$  □

**Теорема 4.6.**  $F$  — финитные последовательности,  $1 \leq p \leq +\infty$

$$(F, \|\cdot\|_p) \text{ — сепарабельно}$$

*Доказательство.*  $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_{N(x)}, 0, 0, \dots), x_j \in \mathbb{Q}\}$ . Попросту говоря, все финитные последовательности, координаты которых рациональны.  $\square$

**Теорема 4.7.**  $l^p, 1 \leq p < +\infty, C_0$  — сепарабельные

*Доказательство.* На прошлой лекции мы доказали, что

$$\begin{aligned} (F, \|\cdot\|_p), \overline{F}^{\|\cdot\|_p} = l^p \text{ при } 1 \leq p < +\infty \\ \left\{ \begin{array}{l} E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}^n \text{ — всюду плотно в } F \\ F \text{ — всюду плотное в } l^p \end{array} \right. \Rightarrow \\ E \text{ всюду плотно в } l^p, 1 \leq p < +\infty \end{aligned}$$

Почему любой элемент из  $l^p$  может быть приближен финитной последовательностью? Мы ее просто отрезаем.  $\square$

Ответ на упражнение для читателя, которое было на прошлой лекции:  $F$  — подпространство в алгебраическом смысле,  $F \subset l^\infty$ ,  $\overline{F}^{\|\cdot\|_\infty} = C_0$

$$x_0 \in C_0 \Leftrightarrow x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

берем первые  $m$  координат и дополняем их нулями

$$\begin{aligned} x^{(m)} = (x_1, \dots, x_m, 0, 0, \dots, 0, \dots) \Rightarrow x^{(m)} \in F \\ \|x - x^{(m)}\|_\infty = \sup_{k > m} |x_k| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Остаётся вопрос, почему  $C_0$  — замкнутое множество. Можно в лоб, а можно по-учёному рассудить.

$$\begin{aligned} \text{пусть } \{y^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}, y^{(m)} \in C_0, y^{(m)} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} y \text{ в } C_0 \\ \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} \|y - y^{(m)}\|_\infty = 0 \quad y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0 ??? \end{aligned}$$

А это равномерная сходимость на множестве натуральных чисел, то есть это тот случай, когда можно менять местами пределы.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n^{(m)}}_{=0} = 0$$

Упражнение:  $C$  — сепарабельное,  $C \subset l^\infty$

**Теорема 4.8.**  $l^\infty$  — не сепарабельное

Какой бы шарик из  $X$  мы бы не предъявили, там всегда будет элемент всюду плотного множества.

*Доказательство.*

$$A \subset \mathbb{N} \quad X_n^A = \begin{cases} 1, n \in A \\ 0, n \notin A \end{cases}$$

Мощность  $\{A, A \subset \mathbb{N}\}$  — континуум ( $>$  счётное). Это и будет центр пересекающихся шариков. Посмотрим, каким будет расстояние между двумя разными точками.

$$A \subset \mathbb{N}, C \subset \mathbb{N}, A \neq C$$

$$X_n^A - X_n^C = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases} \Rightarrow \|x^A - x^C\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |X_n^A - X_n^C| = 1$$

То есть если 2 множества не равны, то расстояние между ними — единица.

$$B_{\frac{1}{2}}(x^A) \cap B_{\frac{1}{2}}(x^C) = \emptyset$$

Мы предъявили несчётный набор дизъюнктивных шариков.  $E$  — всюду плотно в  $l^\infty \Rightarrow \forall A \subset \mathbb{N} \exists e_A \in B_{\frac{1}{2}}(x^A)$

$$A \neq C \Rightarrow e_A \neq e_C, \quad \underbrace{\{e_A\}_{A \subset \mathbb{N}}}_{\text{несчётно}} \subset E \Rightarrow E \text{ несчётно}$$

То, что у всех шариков одинаковый радиус — это просто приятный бонус.  $\square$

**Теорема 4.9.**  $(X, \rho)$  — сепарабельное,  $Y \subset X \Rightarrow (Y, \rho)$  — сепарабельное.

*Доказательство.*  $\exists E = \{x_n\}_{n=1}^\infty$  — всюду плотно в  $X$ ,  $x_0 \in X$

$$\rho(x_n, Y) = \inf_{y \in Y} \rho(x_n, y) \Rightarrow$$

$$\exists \{y_{n,k}\}_{k=1}^\infty \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_{n,k}) = \rho(x_n, Y)$$

$$y_{n,k} \in Y, F = \{y_{n,k}\}_{n,k} \text{ — счётное, } F \subset Y$$

Проверим, что  $F$  — всюду плотно в  $Y$ . Пусть  $y \in Y, \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists x_n : \rho(y, x_n) < \varepsilon$ . Из этого неравенства мы делаем вывод, что  $\rho(x_n, Y) < \varepsilon$ . Значит,  $\exists k : \rho(x_n, y_{n,k}) < \varepsilon \Rightarrow$

$$\rho(y, y_{n,k}) \leq \rho(y, x_n) + \rho(x_n, y_{n,k}) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

□

**Следствие 4.1.**  $X$  — бесконечное множество  $\Rightarrow m(X)$  — не сепарабельное.

*Доказательство.* Можно слово в слово повторить доказательство для  $l^\infty$ , но мы воспользуемся последними доказанными теоремами.

$$\begin{aligned} & \exists \{a_j\}_{j=1}^\infty, a_j \in X, a_j \neq a_i \text{ при } i \neq j \\ Y &= \{f \in m(X), f(x) = 0 \text{ если } x \neq a_j\} \sup_{j \in \mathbb{N}} |f(a_j)| < +\infty \\ Y &\text{ изометрично } l^\infty, f \in Y, T(f) = \{f(a_j)\}_{j=1}^\infty \in l^\infty \\ Y &\text{ — не сепарабельно } \Rightarrow \text{ и по последней теореме} \\ & m(X) \text{ — не сепарабельно} \end{aligned}$$

□

**Теорема 4.10.**

$C[a, b]$  — сепарабельно

*1 часть.*

$$\begin{aligned} L &= \{ \text{ломанные} \} \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \quad \{y_k\}_{k=0}^n, y_k \in \mathbb{R} \\ L(x) &\text{ — ломанные} \\ L(x_k) &= y_k, k = 0, 1, \dots, n \quad l(x) \text{ линейная на } [x_k, x_{k+1}] \end{aligned}$$

Отметим, что  $L$  — всюду плотное множество в пространстве непрерывных функций. Это связано с равномерной непрерывностью. Никаких надежд на то, что оно будет счётным нет.

$$\begin{aligned} & \text{пусть } f \in C[a, b], \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : |x - y| < \delta \\ & \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \\ & \exists \{x_k\}_{k=0}^n \text{ — разбиение} \quad x_{k+1} - x_k < \delta \\ & y_k := f(x_k) \quad L(x) \text{ — ломаная} \\ & \Rightarrow |f(x) - L(x)| < \varepsilon \Rightarrow \|f - L\|_\infty \leq \varepsilon \Rightarrow \overline{\mathcal{L}} = C[a, b] \end{aligned}$$

как сделать так, чтобы множество ломаных было счётным? возьмём в качестве вершин элементы  $\mathbb{Q}$

$$E = \{L \in \mathcal{L}, x_k, y_k \in \mathbb{Q}\} \text{ — счетное множество}$$

$$\begin{cases} \mathcal{L} \subset \overline{E} \\ \overline{\mathcal{L}} = C[a, b] \end{cases} \Rightarrow E \text{ — всюду плотно, т.е. } \overline{E} = C[a, b]$$

□

2 часть. по т. Вейерштрасса замыкание многочленов — тоже пространство непрерывных функций.

$$P = \{p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k\} \quad \overline{P} = C[a, b]$$

$$E = \{p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, a_k \in \mathbb{Q}\}$$

$$\begin{cases} P \subset \overline{E} \\ \overline{P} = C[a, b] \end{cases} \Rightarrow \overline{E} = C[a, b]$$

□

## 4.4. Нигде не плотные множества

**Определение 4.9.**  $(X, \rho)$  — метрическое пространство.  $A \subset X, A$  — **нигде не плотно** в  $X$ , если

$$\forall B_r(x) \text{ при } r > 0, x \in X \quad B_r(x) \not\subset \overline{A} \Leftrightarrow \text{Int}(\overline{A}) = \emptyset \Leftrightarrow$$

Если мы рассмотрим замыкание, никакого шарика там не будет. Иначе: если мы рассмотрим внутренность замыкания, она будет пустой.

$$\forall r > 0, x \in X \quad B_r(x) \ni B_{r_1}(x_1) \subset B_r(x), B_{r_1}(x_1) \cap A = \emptyset$$

$$\Leftrightarrow \forall r > 0, x \in X \quad D_r(x) \ni D_{r_1}(x_1) \subset D_r(X), D_{r_1}(x_1) \cap A = \emptyset$$

Скоро докажем связь между нигде не плотными множествами и полными пространствами. Но сперва определение, которое не будет часто встречаться, но сам факт — полезный.



**Определение 4.10** (множество первой категории).  $M \subset X, (X, \rho)$ .  $M$  — **множество первой категории**, если

$$M = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j, E_j \text{ нигде не плотно в } X$$

$M$  — **множество второй категории**, если  $M$  нельзя представить в виде объединения счетного числа нигде не плотных множеств.

**Теорема 4.11** (Бэр, о категориях).  $(X, \rho)$  — полное  $\Rightarrow X$  — множество второй категории.

*Доказательство.* Можно было бы даже от противного. Но мы возьмём семейство  $\{M_j\}_{j=1}^{\infty}$ ,  $M_j$  — нигде не плотно в  $X$ ,  $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} M_j$ . Мы докажем, что найдётся хоть одна точка, которая принадлежит  $X$  и не принадлежит  $E$ . Это и будет означать, что  $X$  невозможно представить в виде такого объединения.

$$x_0 \in X \quad D_0 = \{y : \rho(x_0, y) \leq 1\}$$

$$M_1 \text{ — нигде не плотно} \Rightarrow \exists D_1 = D_{r_1}(x_1) \subset D_0, D_1 \cap M_1 = \emptyset \\ r_1 < 1$$

Теперь мы то же соображение применим к множеству  $M_2$ , которое тоже нигде не плотно

$$\exists D_2 = D_{r_2}(x_2) \subset D_1, D_2 \cap M_2 = \emptyset \\ r_2 < \frac{1}{2}$$

и так далее  $\begin{cases} \{D_n\}_{n=1}^{\infty}, D_n = D_{r_n}(x_n), D_{n+1} \subset D_n \\ D_n \cap M_n = \emptyset, r_n < \frac{1}{n} \end{cases}$  по теореме о вложенных шарах  $\Rightarrow \exists x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n, (x \in D_n \wedge x \in X \setminus E) \Rightarrow x \notin M_n \forall n \Rightarrow x \notin E$   $\square$

## 4.5. Полные семейства элементов

Теперь мы будем понимать полноту в совершенно другом смысле. Сначала вспомним, что такое линейная оболочка пространства.

**Определение 4.11** (Линейная оболочка).  $X$  — линейное пространство над  $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ . Рассмотрим семейство  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$  — семейство элементов,  $x_\alpha \in X$ .

$$\mathcal{L}\{x_\alpha\}_{\alpha \in A} = \left\{ \sum_{k=1}^n c_k x_{\alpha_k}, c_k \in \mathbb{R}(\mathbb{C}), n \in \mathbb{N} \right\}$$

**Определение 4.12** (Полное семейство).  $(X, \|\cdot\|)$ ,  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$  — полное семейство, если  $\overline{\mathcal{L}\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}} = X$ . То есть линейная оболочка всюду плотна в  $X$ .

**Пример 4.3.**  $C[a, b]$ ,  $\{x^n\}_{n=0}^{+\infty}$  — полное семейство в  $C[a, b]$ , так как  $P = \mathcal{L}\{x^n\}_{n=0}^{+\infty}$ ,  $\overline{P} = C[a, b]$

**Пример 4.4.**  $l^p$ ,  $1 \leq p < +\infty$ ,  $C_0$

$e_n = (1, 0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_n, 0, \dots)$ ,  $\{e_n\}_{n=1}^\infty$  — полное семейство

$\mathcal{L}\{e_n\}_{n=1}^\infty = F$  — финитная последовательность

Упражнение:  $C$  — что полное семейство?

03.10.23

**Утверждение 4.1.**  $(X, \|\cdot\|)$  - нормированное пространство. В нём существует  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  — полное семейство

$X$  — сепарабельное

*Доказательство.* Рассмотрим линейную оболочку  $L = \mathcal{L}\{x_n\}_{n=1}^\infty = \{x = \sum_{j=1}^n c_j x_j, c_j \in \mathbb{R}(\mathbb{C})\}$ .  $\overline{L} = X$ .

$$E = \{x = \sum_{j=1}^n c_j x_j, c_j \in \mathbb{Q}\} \text{ — счётное всюду плотное}$$

$$(L \subset \overline{E} \wedge \overline{L} = X) \Rightarrow \overline{E} = X$$

□

**Замечание 4.6.**  $l^\infty, E = \{x = \{x_n\}_{n=1}^\infty, x_n \in \mathbb{Q}, \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < +\infty\}$ .  $\overline{E} = l^\infty$ ,  $E$  — не счётное.

## 4.6. Полные и плотные множества в $L^p$

Сначала небольшое замечание.  $(X, U, \mu)$  — пространство с мерой  $e \in U$  — измеримые множества,  $\chi_e(x) = \begin{cases} 1, x \in E \\ 0, x \notin E \end{cases}$  — характеристическая функция.  $\chi \in L^\infty(X, \mu), \forall e \in U$

$$\chi_e \in L^p(X, \mu) \text{ при } 1 \leq p < +\infty \Leftrightarrow \int_X (\chi_e(x))^p d\mu < +\infty \Leftrightarrow \mu e < +\infty$$

**Теорема 4.12.**  $(X, U, \mu)$  — пространство с мерой  $\Rightarrow$

$\{\chi_e\}_{e \in U}$  — полное семейство в  $L^\infty(X, \mu)$

$\{\chi_e\}_{e \in U, \mu e < +\infty}$  — полное семейство в  $L^p(X, \mu), 1 \leq p < +\infty$

Для доказательства этой теоремы нужно будет вспомнить теорему Лебега из анализа (она у нас уже была).

**Теорема 4.13** (Лебег).  $\{h_n(x)\}_{n=1}^\infty$  — измеримые,  $\varphi(x)$ .  $\int_X \varphi(x) d\mu < +\infty, |h_n(x)| \leq \varphi(x)$  п.в. на  $X$

$$h_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty \text{ п.в. по } \mu]{} h(x) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X h_n(x) d\mu = \int_X h(x) d\mu$$

*Доказательство.* Вспомним конструкцию, которая была в математическом анализе.  $f$  — измеримая,  $f(x) \geq 0, x \in X$ . Рассмотрим разбиение множества  $X$ , а по нему построим соответствующую простую функцию

$$n \in \mathbb{N} \quad e_k = \{x \in X : \frac{k}{n} \leq f(x) < \frac{k+1}{n}\}, k = 0, 1, \dots, n^2 - 1$$

$$e_{n^2} = \{x : f(x) \geq n\} \Rightarrow X = \bigcup_{k=0}^{n^2} e_k, e_k \cap e_j = \emptyset (k \neq j)$$

Теперь построим измеримые функции, потом они будут простыми.

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{k}{n} \chi_{e_k} \quad 0 \leq g_n(x) \leq f(x), x \in X$$

$$f(x) \leq g_n(x) + \frac{1}{n}, x \in \bigcup_{k=0}^{n^2-1} e_k$$

#### ГЛАВА 4. ПОПОЛНЕНИЕ МЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА 13

Теперь все готово, чтобы обсудить случай  $L^\infty$ . Пусть  $f \in L^\infty(X, \mu) \Rightarrow n \geq \|f\|_\infty \Rightarrow \mu(e_{n^2}) = 0. \Rightarrow |f(x) - g_n(x)| \leq \frac{1}{n}$  для п.в.  $x \in X$   
 $\Rightarrow \|f - g_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, g_n \in \mathcal{L}\{\chi_e\}_{e \in U}$   
 $\Rightarrow f \in \overline{\mathcal{L}\{\chi_e\}_{e \in U}}$

Посмотрим теперь, что происходит с конечными  $p$ . Тут вспоминаем теорему Лебега, она была верна для интеграла Лебега, но верна и для произвольной меры.

$$\begin{cases} f(x) \in L^p(X, \mu), 1 \leq p < +\infty & |f(x) - g_n(x)|^p \leq |f(x)|^p \\ g_n(x)f(x) \xrightarrow{\text{п.в.}} 0 & \Rightarrow |f(x) - g_n(x)|^p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{cases} \xRightarrow{\text{Лебег}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_X |f - g_n|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = 0$$

$$f \in L^p \Rightarrow \mu e_k < +\infty \quad f(x) \geq \frac{k}{n}, x \in e_k \Rightarrow \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \geq \left( \int_{e_k} \left( \frac{k}{n} \right)^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$\frac{k}{n} (\mu e_k)^{\frac{1}{p}} \Rightarrow \mu e_k < +\infty$$

$$\Rightarrow f \in \overline{\mathcal{L}\{\chi_e\}_{e \in U, \mu e < +\infty}}$$

Все, что надо — убедиться, что мера конечная. Рассмотрим замыкание линейное оболочку

$$\begin{cases} f : X \rightarrow \mathbb{R}, \Rightarrow f = f_+ - f_-, f_+(x) \geq 0, f_-(x) \geq 0 \\ f : X \rightarrow \mathbb{C} \Rightarrow f = u + iv; u, v : X \rightarrow \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\forall f \in L^p, f \in \overline{\mathcal{L}\{\chi_e\}_{e \in U}}$$

$$(p = \infty \forall e, p < +\infty, \mu e < +\infty)$$

□

Теперь, зная эту теорему, посмотрим, какое множество будет полным в пространстве  $l^\infty$

**Следствие 4.2.**  $l^\infty, A \subset \mathbb{N}, X^A = \{x_n^A\}_{n=1}^\infty, X_n^A =$   
 $\begin{cases} 1, n \in A \\ 0, n \notin A \end{cases} \Rightarrow$   
 $\{X^A\}_{A \subset \mathbb{N}}$  — полное семейство в  $l^\infty$

#### ГЛАВА 4. ПОПОЛНЕНИЕ МЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА 44

*Доказательство.*  $l^\infty = L^\infty(\mathbb{N}, \mu), \mu(n) = 1 \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall A \subset \mathbb{N}, A$  — измеримо

$$\chi_A = X^A \Rightarrow \{X^A\}_{A \subset \mathbb{N}} \text{ — полное семейство}$$

□

**Теорема 4.14.**  $(\mathbb{R}^n, U, \lambda)$ ,  $\lambda$  — классическая мера Лебега.  $U$  — измеримые по Лебегу множества.

$$\mathcal{R} = \left\{ \Delta = \prod_{j=1}^n [a_j, b_j), a_j < b_j; a_j, b_j \in \mathbb{R} \right\} \text{ — множество ячеек}$$

$$\Rightarrow \{\chi_\Delta\}_{\Delta \in \mathcal{R}} \text{ — полное семейство в } L^p(\mathbb{R}^n, \lambda), 1 \leq p < +\infty$$

Достаточно рассмотреть характеристические множества ячеек.

*Доказательство.* Собираемся приблизить множество линейной комбинацией характеристических функций ячеек. Вспомним определение внешней меры.

$$e \in U, \lambda(e) < +\infty$$

$$\lambda(e) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(\Delta_k), e \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k, \Delta_k \in \mathcal{R}, \Delta_k \cap \Delta_j = \emptyset \right\}$$

Сначала просто по определению нижней грани.  $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \{\Delta_k\}_{k=1}^n$ .

$$\lambda(e) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(\Delta_k) < \lambda(e) + \varepsilon.$$

$$e \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k, \Delta_k \in \mathcal{R}, \Delta_k \cap \Delta_j = \emptyset \text{ при } k \neq j.$$

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k, e \subset A, \lambda(A \setminus e) < \varepsilon$$

$$\begin{aligned} \exists N \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=N+1}^{\infty} \lambda(\Delta_k) < \varepsilon, B = \bigcup_{k=1}^N \Delta_k \\ \Rightarrow \lambda(A \setminus B) < \varepsilon \end{aligned}$$

$$\|\chi_e - \chi_b\|_p \leq \|\chi_e - \chi\|_p + \|\chi_A - \chi_B\|_p \leq$$

$$\left( \int_{A \setminus e} 1 dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_{A \setminus B} 1 dx \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon^{\frac{1}{p}} + \varepsilon^{\frac{1}{p}} = 2\varepsilon^{\frac{1}{p}}$$

$$\chi_b = \sum_{k=1}^N \chi_{\Delta_k} \in \mathcal{L}\{\chi_{\Delta}\}_{\Delta \in \mathcal{R}}$$

$$\begin{cases} \overline{\mathcal{L}\{\chi_e\}_{e \in U}} = L^p \\ \chi_e \in \overline{\mathcal{L}\{\chi_{\Delta}\}_{\Delta \in \mathcal{R}}} \end{cases} \Rightarrow \overline{\mathcal{L}\{\chi_{\Delta}\}_{\Delta \in \mathcal{R}}} = L^p, 1 \leq p < +\infty$$

□

**Следствие 4.3.**  $E \subset \mathbb{R}^n$ ,  $E$  — измеримые по Лебегу,  $1 \leq p < +\infty$   
 $\Rightarrow L^p(E, \lambda)$  — сепарабельные  
 ( $\lambda$  — мера Лебега)

*Доказательство.* Докажем, что  $L^p(\mathbb{R}^n, \lambda)$  — сепарабельное.

$$\mathcal{R} = \left\{ \Delta = \prod_{j=1}^n [a_j, b_j), a_j < b_j, a_j, b_j \in \mathbb{R} \right\} \text{ — полные семейства в } L^p$$

Теперь мы возьмём только такие ячейки, полуинтервалы которых мы перемножаем, имеют рациональные концы. Пока что можем сказать, что это счётное множество.

$$R_0 = \left\{ \Delta = \prod_{j=1}^n [a_j, b_j), a_j < b_j, a_j, b_j \in \mathbb{Q} \right\} \text{ — счётное множество}$$

$$\begin{aligned} \Delta \in \mathcal{R} \quad 0 \\ \Rightarrow \exists \Delta_0 \in R_0, \Delta \subset \Delta_0, \lambda(\Delta_0 \setminus \Delta) < \varepsilon \\ \Rightarrow \|\chi_{\Delta_0} - \chi_{\Delta}\|_p = \|\chi_{\Delta_0 \setminus \Delta}\|_p = \left( \int_{\Delta_0 \setminus \Delta} 1 dx \right)^{\frac{1}{p}} = (\lambda(\Delta_0 \setminus \Delta))^{\frac{1}{p}} < \varepsilon^{\frac{1}{p}} \\ \Rightarrow \forall \Delta \in \mathcal{R} \chi_{\Delta} \in \overline{\mathcal{L}\{\chi_{\Delta}\}_{\Delta \in R_0}} \end{aligned}$$

$R_0$  — полное счётное семейство  $\xRightarrow{\text{утверждение}} L^p(\mathbb{R}^n, \lambda)$  — сепарабельное.

$$\begin{aligned} E \subset \mathbb{R}^n, E \text{ — измеримое, } f \in L^p(E, \lambda) \\ \text{пусть } f(x) = 0, x \in \mathbb{R}^n \setminus E \Rightarrow f \in L^p(\mathbb{R}^n, \lambda) \\ \Rightarrow L^p(E, \lambda) \text{ — подпространство } L^p(\mathbb{R}^n, \lambda) \Rightarrow L^p(E, \lambda) \text{ — сепарабельно} \end{aligned}$$

□

**Определение 4.13.**  $(X, U, \mu)$  — пространство с мерой.  $(X, \rho)$  — метрическое пространство.  $\mu$  — **борелевская мера**, если  $(G \text{ — открытое} \Rightarrow G \in U)$

$\beta$  — минимальная  $\sigma$ -алгебра, содержащая все открытые множества.  $\beta$  — **борелевские множества**, то есть  $\beta \subset U$ .

Чем же хороши борелевские меры? Оказывается, они безумно связаны с непрерывными функциями

**Замечание 4.7.** Пусть  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  — непрерывная  $\Rightarrow f^{-1}((c, +\infty))$ ,  $c \in \mathbb{R}$ ,  $(c, +\infty)$  — открытое в  $\mathbb{R}$ . Определение непрерывной функции из топологии: прообраз любого открытого множества открыт. Так как прообраз  $f$  открыт в  $X \Rightarrow f$  — измеримая по  $\mu$ , если  $\mu$  — борелевская.

**Замечание 4.8.**  $\lambda$  — мера Лебега в  $\mathbb{R}^n$ , тогда  $\lambda$  — борелевская.

Еще более специальное определение. Этим свойством мера Лебега тоже обладает.

**Определение 4.14** (регулярная мера).  $(X, U, \mu)$ ,  $(X, \rho)$ ,  $\mu$  — борелевская.  $\mu$  — **регулярная мера**, если  $\forall e \in U$

$$\sup_{\{F \subset e, F \text{ — замкнутое}\}} \{\mu(F)\} = \mu e = \inf_{\{e \subset G, G \text{ — открытое}\}} \mu G$$

**Замечание 4.9.**  $\lambda$ -мера Лебега — регулярная.

На самом деле эти 2 свойство друг из друга следуют, но мы это доказывать не будем.

**Теорема 4.15.**  $(X, U, \mu)$ ,  $(X, \rho)$ ,  $\mu$  — регулярная мера  $\Rightarrow$  непрерывная функция плотна в  $L^p(X, \mu)$ ,  $1 \leq p < +\infty$ .

$$\overline{C(X) \cap L^p(X, \mu)}^{\|\cdot\|_p} = L^p(X, \mu)$$

*Доказательство.* Мы уже знаем, что полное семейство — это семейство характеристических функций всех измеримых функций, и мы будем этим изо всех сил пользоваться. Возьмём какую-то характеристическую функцию из множества и ее будем приближать непрерывными функциями.

$\{\chi_e\}_{e \in U, \mu e < +\infty}$  — полное семейство.

#### ГЛАВА 4. ПОПОЛНЕНИЕ МЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА 7

пусть  $e \in U, \mu e < +\infty, 0, \mu$  — регулярная  $\Rightarrow \exists F \subset e \subset G, F$  — замкнутое,  $G$  — открытое.  $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$

Когда мы попадем в  $X \setminus G$  она будет равна нулю.

$$\varphi(x) = \frac{\rho(x, X \setminus G)}{\rho(x, X \setminus G) + \rho(x, F)}$$

Нужно позаботиться о том, чтобы знаменатель не был равен нулю.  $\rho(x, A)$  — непрерывная функция  $\forall A \subset X$ .  $X \setminus G$  — замкнутое,  $F$  — замкнутое. Если  $\rho(x, F) = 0 \Rightarrow x \in F \Rightarrow x \notin X \setminus G \Rightarrow \rho(x, X \setminus G) > 0$

$$\Rightarrow \rho(x, X \setminus G) + \rho(x, F) > 0 \forall x \in X \Rightarrow \varphi \in C(X)$$

$$\varphi(x) = 0, x \in X \setminus G, \varphi(x) = 1, x \in F \quad \forall x \in X \quad 0 \leq \varphi(x) \leq 1$$

Понятно, что модуль  $\varphi(x)$  совпадает с характеристической функцией множества  $e$ .

$$|\chi_e(x) - \varphi(x)| \leq 1 \quad \forall x \in X$$

$$\chi_e(x) - \varphi(x) = 0 \quad x \in F \text{ или } x \in X \setminus G$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|\chi_e - \varphi\|_p &= \left( \int_X |\chi_e(x) - \varphi(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \left( \int_{G \setminus F} |\chi_e(x) - \varphi(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\leq (\mu(G \setminus F))^{\frac{1}{p}} < \varepsilon^{\frac{1}{p}} \\ &\Rightarrow \chi_e \in \overline{C(X)}^{\|\cdot\|_p} \end{aligned}$$

Тем самым мы доказали, что  $\varphi(x)$  может быть приближена непрерывными функциями. Может быть, стоит отметить, что  $\mu G < \mu E + \varepsilon < p + \infty \quad \int_X |\varphi(x)|^p d\mu - \int_G |\varphi(x)|^p d\mu < \mu(g) \Rightarrow \varphi \in L^p(X, \mu)$

□

Раз утверждение верно для любых регулярных мер, то оно верно и для меры Лебега.



## Глава 5

# Метрические компакты

Топологический компакт: из любого подпокрытия можно выбрать конечное подпокрытие.

**Утверждение 5.1** (из топологии). 1.  $(X, \rho)$  – метрическое пространство,  $K \subset X$ ,  $K$  – компакт  $\Leftrightarrow K$  – счётно-компактен, то есть

$$\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in K \quad \exists \{x_{n_j}\}_{j=1}^{\infty} \text{ т.ч. } \exists \lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_j} = x_0, x_0 \in K$$

2.  $K$  – компакт  $\Rightarrow K$  – ограниченное замкнутое множество.

**Пример 5.1.**  $\mathbb{R}^n$ ,  $K$  – компакт  $\Leftrightarrow K$  – ограниченное, замкнутое

**Замечание 5.1.** НИ В КОЕМ СЛУЧАЕ!!!

$K$  – ограниченное замкнутое,  $\nRightarrow K$  – компакт

**Замечание 5.2.**  $l^2 = \{x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \|x\|_2 = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2)^{\frac{1}{2}} < +\infty, x_n \in \mathbb{R}(\mathbb{C})\}$

$D = \{x \in l^2 : \|x\|_2 \leq 1\}$  – ограниченное, замкнутое

$e_n = (0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_n, 0, 0, \dots)$ ,  $n \neq m \quad \|e_n - e_m\|_2 = \sqrt{2} \Rightarrow \forall \{e_{n_j}\}$  – не фундаментальная. Тогда  $\nexists \lim_{j \rightarrow \infty} e_{n_j} \Rightarrow D$  – не компакт.

Ещё одно напоминание, кто такие относительно компактные множества.

**Определение 5.1** (относительный компакт).  $(X, \rho), A \subset X, A$  – относительно компактно, если  $\overline{A}$  – компакт. Или можно сказать

$$\Leftrightarrow \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in A \exists \{x_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}, \exists \lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_j} = x_0, x_0 \in X$$

Предел не обязательно принадлежит  $A$ .  $A$  в компакте предел обязательно лежит в  $A$ .

Мы получим новое описание компактных и относительно компактных множеств. В  $\mathbb{R}^n$  мы описывали относительные компакты. Для описания компакта нужно добавить замыкание.

Еще несколько определений:

**Определение 5.2** ( $\varepsilon$ -сеть).  $(X, \rho)$  – метрическое пространство.  $A \subset X, \varepsilon > 0$   
 $F$  –  $\varepsilon$ -сеть для  $A$ , если

$$\forall a \in A \exists f \in F : \rho(a, f) < \varepsilon$$

$$(\Leftrightarrow \forall a \in A B_{\varepsilon}(a) \cap F \neq \emptyset) \Leftrightarrow (A \subset \bigcup_{f \in F} B_{\varepsilon}(f))$$

**Определение 5.3.**  $A$  – вполне ограниченное множество, если для  $\forall \varepsilon > 0 \exists$  конечная  $\varepsilon$ -сеть для  $A$ .

Описание компактных и относительно-компактных множеств в терминах почти ограниченных – как раз наша главная цель. Мы будем использовать это новое описание так: если мы в полном метрическом пространстве, то там относительная компактность и вполне ограниченность – одно и то же. А проверять вполне ограниченность – гораздо проще, чем проверять относительную компактность. Предъявим  $\varepsilon$ -сеть и всё!

**Замечание 5.3.**  $(X, \rho), A$  – вполне ограниченное  $\Rightarrow A$  – ограничено.

**Пример 5.2.**  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2) = l_n^2$   $A \subset \mathbb{R}^N$ .  $A$  – ограниченное  $\Leftrightarrow A$  вполне ограниченное

*Доказательство.*  $A$  – ограниченное  $\Leftrightarrow \exists M > 0, \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in A \Rightarrow |x_j| \leq M$   
 $A \subset Q = \{|x_j| \leq M, 1 \leq j \leq n\}$  Как же построить  $\varepsilon$ -сеть?

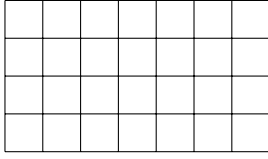


Рис. 5.1: классный поясняющий рисунок

Пусть  $\varepsilon > 0$ ,  $Q = \bigcup Q_j$ ,  $l$  – сторона  $Q_j$

$$\text{diam } Q_j = \sup_{x, y \in Q_j} \rho(x, y) = \sqrt{n} \cdot l < \varepsilon \Rightarrow l < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$$

$$l = \frac{M}{N}, N \in \mathbb{N}, \exists N : \frac{M}{N} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \Rightarrow$$

$F$  – вершины  $Q_j$  –  $\varepsilon$ -сеть

ЕС = equicontinuous

□

Убедимся в пространстве  $l^2$

**Пример 5.3.**  $D \subset l^2$ ,  $D = \{x \in l^2 : \|x\|_2 \leq 1\}$  Убедимся, что  $D$  – не вполне ограниченное.

*Доказательство.*

$$\{e_n\}_{n=1}^\infty, e_n = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_n, 0, \dots), n \neq m, \|e_n - e_m\| = \sqrt{2}$$

$$B_{\frac{1}{2}}(e_n) \cap B_{\frac{1}{2}}(e_m) = \emptyset$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}, F = \frac{1}{2}\text{-сеть для } D$$

$$\Rightarrow \forall n \exists f_n \in F \cap B_{\frac{1}{2}}(e_n), f_n \neq f_m (n \neq m) \text{ так как } B_{\frac{1}{2}}(e_n) \cap B_{\frac{1}{2}}(e_m) = \emptyset$$

$$\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset F \Rightarrow F \text{ – не конечное}$$

□

Теперь посмотрим для  $l^\infty$

**Пример 5.4.**  $\Pi = \{x = \{x_n\}_{n=1}^\infty, |x_n| < \frac{1}{2^n}\} \subset l^\infty$ . Проверим, что  $\Pi$  – вполне ограничено. 0

$$\exists M \in \mathbb{N} \quad \left( \sum_{k=N+1}^\infty \left( \frac{1}{2^k} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

$$\Pi^* = \{x = \{x_1, \dots, x_N, 0, 0, \dots\}, |x_j| \leq \frac{1}{2^j}, 1 \leq j \leq N \quad x_{N+k} = 0, k \in \mathbb{N}\}$$

Если мы забудим, про нули, то можем думать, что  $\Pi^*$  лежит в  $\mathbb{R}^n$ , и там оно ограниченное, а значит и вполне ограниченное.  $\Pi^* \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\Pi^*$  – ограниченное  $\Rightarrow$  вполне ограниченное  $\Rightarrow \exists F \subset \Pi^*$  – конечная  $\varepsilon$ -сеть. Докажем, что  $F$  –  $2\varepsilon$ -сеть для  $\Pi$ .

$$\begin{aligned} x \in \Pi &\Rightarrow x = \underbrace{(x_1, \dots, x_N, 0, \dots)}_y + \underbrace{(0, 0, \dots, 0, x_{N+1}, x_{N+2}, \dots)}_z \\ \|z\|_2 < \varepsilon \quad y \in \Pi^* &\Rightarrow \exists f \in F : \|y - f\|_2 < \varepsilon \Rightarrow \\ \|x - f\|_2 = \|(y - f) + z\|_2 &\leq \|y - f\|_2 + \|z\|_2 < 2\varepsilon \\ &\Rightarrow \Pi - \text{вполне ограничено} \end{aligned}$$

Таким образом, все множества можно описать в пространстве  $l^\infty$ . Перед тем, как доказывать основную теорему, несколько свойств вполне ограниченных множеств.

- Свойство 5.1.**
1.  $A$  – вполне ограничено  $\Rightarrow \bar{A}$  – вполне ограничено
  2.  $A \subset Y \subset X$ ,  $A$  – вполне ограничено в  $X \Rightarrow A$  – вполне ограниченное в  $Y$ .
  3.  $A$  – вполне ограничено  $\Rightarrow (A, \rho)$  – сепарабельно.

*1 свойство.*  $A \subset X, \varepsilon > 0$ .  $F$  – конечная  $\varepsilon$ -сеть для  $A$ . Проверим, что  $F$  –  $(2\varepsilon)$ -сеть для  $\bar{A}$

$$\begin{aligned} \text{пусть } x \in \bar{A} &\Rightarrow \exists y \in A : \rho(x, y) < \varepsilon, \exists f \in F : \rho(y, f) < \varepsilon \\ &\Rightarrow \rho(x, f) \leq \rho(x, y) + \rho(y, f) < 2\varepsilon \end{aligned}$$

□

*2 свойство.* Проблема в том, что надо двигать точки. Мы уже так делали, когда доказывали сепарабельность.  $A \subset Y \subset X, \varepsilon > 0, \{x_k\}_{k=1}^n$  –  $\varepsilon$ -сеть для  $A, x_k \in X$   
 $A \subset \bigcup_{k=1}^n B_\varepsilon(x_k)$ , если  $A \cap B_\varepsilon(x_k) \neq \emptyset$ , то пусть  $y_k \in A \cap B_\varepsilon(x_k)$  (если  $= \emptyset$ , то не будем выбирать)

Мы найдем  $\varepsilon$ -сеть из точек множества  $A$ , тогда она точно будет обслуживать и  $Y$ . Как же и куда сдвигать точки?

$$E = \{y_k\}_{k=1}^n$$

$$\begin{aligned} x \in A &\Rightarrow \exists x_k : \rho(x, x_k) < \varepsilon \Rightarrow A \cap B_\varepsilon(x_k) \neq \emptyset \Rightarrow y_k \in B_\varepsilon(x_k) \Rightarrow \\ \rho(x_k, y_k) &< \varepsilon \Rightarrow \rho(x, y_k) \leq \rho(x, x_k) + \rho(x_k, y_k) < 2\varepsilon \Rightarrow \end{aligned}$$

$$E - (2\varepsilon)\text{-сеть для } A, E \subset A$$

□

З свойство.  $n \in \mathbb{N}$ ,  $F_n - (\frac{1}{n})$ -сеть для  $A$ ,  $F_n$  – конечное.

$$F \text{ (счетное) } = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n - \text{плотно в } A, \text{ то есть } A \subset \overline{F}$$

□

**Утверждение 5.2** (о разбиении).  $(X, \rho), A \subset X, \varepsilon > 0$ .  $F$  – конечная  $\varepsilon$ -сеть для  $A \Rightarrow$

$$\exists \{C_j\}_{j=1}^n \quad A = \bigcup_{j=1}^n C_j \quad C_j \cap C_k = \emptyset, j \neq k, \text{diam } C_j \leq 2\varepsilon, C_j \neq \emptyset$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} F &= \{x_k\}_{k=1}^n, A \subset \bigcup_{k=1}^n B_\varepsilon(x_k) \\ C_1 &= A \cap B_\varepsilon(x_1) \\ C_2 &= (A \cap B_\varepsilon(x_2)) \setminus C_1 \\ C_k &= A \cap B_\varepsilon(x_k) \setminus \left( \bigcup_{j=1}^{k-1} C_j \right) \quad k = 2, \dots, n \end{aligned}$$

если  $C_k = \emptyset$ , то забудем о нём.  $C_k \subset B_\varepsilon(x_k) \Rightarrow \text{diam } C_k \leq 2\varepsilon$

□

Теперь у нас всё готово для доказательства теоремы о том, как описывать компакты в терминах вполне ограниченных множеств.

**Теорема 5.1** (Хаусдорф).  $(X, \rho)$  – метрическое пространство,  $A \subset X$ .

$A$  – компакт  $\Leftrightarrow$

1.  $A$  полное, то есть  $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A, \{x_n\}$  – фундаментальная  $\exists \lim x_n = x_0 \in A$
2.  $A$  – вполне ограничено

Высока вероятность, что спросят на экзамене эту теорему, пытаясь вытянуть.

*Доказательство.*  $\Rightarrow$

$A$  – компакт,  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  – фундаментальная,  $x_n \in A$ .

$A$  – компакт  $\Rightarrow \exists \{x_{n_j}\}, \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_j} = x_0, x_0 \in A$ . Тогда по свойствам фундаментальных последовательностей  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow (A, \rho)$  – полное метрическое пространство. Проверили первое условие. Теперь надо проверить второе: сначала покроем наш компакт безумным количеством шариков, а они ведь открытые множества, а среди них существует конечное подпокрытие.

$$\begin{aligned} 0 \quad A \subset \bigcup_{a \in A} B_{>}(a) \wedge A \text{ – компакт} &\Rightarrow \exists \{a_j\}_{j=1}^n, a_j \in A : \\ A \subset \bigcup_{j=1}^n B_\varepsilon(a_j) &\Rightarrow F = \{a_j\}_{j=1}^n \text{ – } \varepsilon\text{-сеть для } A \end{aligned}$$

Это была тривиальная часть теоремы.

$\Leftrightarrow$ .

$\{x_n\}_{n=1}^\infty, x_n \in A$  Собираемся применять лемму о разбиении.  $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$ . По лемме  $\exists \{C_j^{(1)}\}_{j=1}^{N_1}, A = \bigcup_{j=1}^{N_1} C_j^{(1)}, \text{diam } C_j^{(1)} \leq 1$ . Когда-то в детстве мы азнимались бесконечным делением пополам. Тут будем делать то же самое.  $\exists j : C^{(1)}_j$  содержит бесконечное число элементов  $\{x_n\}$ .  $A_1 := C^{(1)}_j$ .

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2^2}, \text{ по лемме о разбиении к } A_1 \Rightarrow \exists \{C_j^{(2)}\}_{j=1}^{N_2}$$

$$\text{diam } C_j^{(2)} \leq \frac{1}{2} \quad A_1 = \bigcup_{j=1}^{N_2} C_j^{(2)}$$

$\exists 1 \leq j \leq N_2 \quad C_j^{(2)}$  содержит бесконечное количество элементов в  $x_n$

$$\text{и так далее } \{A_m\}_{m=1}^\infty, A_{m+1} \subset A_m, \text{diam } A_m \leq \frac{1}{2^m}$$

$A_m$  содержит бесконечное число элементов  $\{x_n\}_{n=1}^\infty (*)$

$$x_{n_1} \in A_1, \quad \exists n_2 > n_1 : x_{n_2} \in A_2 \text{ т.к. } (*)$$

$$\text{и так далее } \exists n_k \text{ т.ч. } n_k > n_{k-1} \quad x_{n_k} \in A_k$$

$$\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty, x_{n_k} \in A_k, \text{diam } A_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \quad A_{k+1} \subset A_k$$

$$\Rightarrow \{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty \text{ – фундаментальная} \wedge A \text{ – полное}$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0, x_0 \in A$$

□

Часто описывают компакт, но фактически говорят об относительный компакте. Для описания компакта, опять же, надо просто добавить замкнутость.

**Следствие 5.1.**  $(X, \rho)$  – метрическое,  $A \subset X$ .

1.  $A$  – относительно компактно  $\Rightarrow A$  вполне ограничено
2.  $(X, \rho)$  – полное,  $A$  – относительно компактно  $\Leftrightarrow A$  вполне ограничено

Будем изо всех сил пользоваться теоремой Хаусдорфа.

*1 утверждение.*  $A$  – относительно компактно,  $\Rightarrow \bar{A}$  – компакт, тогда по теореме Хаусдорфа  $\bar{A}$  – вполне ограничено,  $A \subset \bar{A} \Rightarrow A$  вполне ограничено.  $\square$

*2 утверждение.*  $(X, \rho)$  – полное,  $A$  – вполне ограничено, тогда по ранее доказанному свойству ( $\bar{A}$  – вполне ограничено  $\wedge \bar{A}$  – замкнутое в  $X \Rightarrow \bar{A}$  – полное)  $\Rightarrow$  по теореме Хаусдорфа  $\bar{A}$  компакт  $\Rightarrow A$  – относительно компактно.  $\square$

Оказывается, можно вместо конечных  $\varepsilon$ -сетей можно утверждать чуть большее.

**Следствие 5.2.**  $(X, \rho)$  – полное,  $A \subset X$ . Если для  $\forall \varepsilon > 0 \exists$  относительно компактная  $\varepsilon$ -сеть, то  $A$  – относительно компактно

*Доказательство.*  $0, F$  –  $\varepsilon$ -сеть для  $A$ .  $F$  – относительно компактно  $\Rightarrow F$  вполне ограничено,  $\exists E$  – конечная  $\varepsilon$ -сеть для  $F \Rightarrow E$  –  $(2\varepsilon)$ -сеть для  $A \Rightarrow A$  – вполне ограничено  $\Rightarrow A$  – относительно компактно.  $\square$

## 5.1. Относительно компактные множества в $C(K)$

**Определение 5.4.**  $(K, \rho)$  – метрический компакт.  $C(K) = \{f : K \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C}), f \text{ – непрерывная}\}$ ,  $\|f\| = \max_{x \in K} |f(x)|$ .  $\Phi \subset C(K)$ .  $\Phi$  – **равностепенно непрерывна**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall f \in \Phi, \forall x, y \in K, \rho(x, y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

$EC$  – equicontinuous.

Равностепенная непрерывность отличается от равномерной непрерывности тем, что  $\delta$  не зависит от  $f$ , но от  $\varepsilon$  конечно зависит. Некоторый вариант теоремы Арцелла-Асколи, который, возможно, доказывали на диффурах:

**Теорема 5.2** (Асколи-Арцелла).  $K$  – компакт,  $(K, \rho)$ ,  $\Phi \subset C(K)$ .  $\Phi$  – относительно компактно  $\Leftrightarrow$

1.  $\Phi$  – ограниченное в  $C(K)$
2.  $\Phi$   $\cap$  равностепенно непрерывно
3.  $\Phi \in EC$  equicontinuous

*Доказательство.* С самого начала отметим, что  $C(K)$  – полное. Вместо проверки относительной компактности  $\Phi$  будем проверять вполне ограниченность.

$\Rightarrow$

$\Phi$  – относительно компактно  $\Rightarrow \Phi$  – вполне ограничено  $\Rightarrow \Phi$  – ограничено, то есть  $\exists M \geq 0$  т.ч.  $\|f\| \leq M \forall f \in \Phi \Leftrightarrow \forall x \in K, \forall f \in \Phi |f(x)| \leq M$ .  $\varepsilon > 0 \exists \varepsilon$ -сеть  $\{\phi_j\}_{j=1}^n, \phi_j \in C(K), \phi_j$  – равномерно непрерывна  $\exists \delta_j > 0$

$$x, y \in K, \rho(x, y) < \delta_j \Rightarrow |\phi_j(x) - \phi_j(y)| < \varepsilon$$

$\delta = \min_{1 \leq j \leq n} \delta_j$  (продолжение следует) / (упражнение)

□