# Функциональный анализ

Осень 2023

# Оглавление

# Глава 1

# Введение

12.09.23

День рождения функционального анализа — 1932 год. В этом году вышла книжка «Теория линейных операторов», автор — С. Банах. Главная цель функционального анализа — изучение линейных операторов (но не только их). Главным объектом у нас будет $X$ — линейное топологическое пространство. Оно же линейное пространство над $\mathbb{C}$ (или $\mathbb{R}$). Есть непрерывные операции

1. $(x, z) \to x + z \quad x, z \in X$
2. $(\alpha, x) \to \alpha x \quad \alpha \in \mathbb{C}$

Если у нас есть топологическое пространство, то у нас есть все любимые объекты из математического анализа — пределы, непрерывность, производные, интегралы.

Пусть есть $X, Y$ — линейные топологические пространства. Также есть линейное отображение $A : X \to Y$

**Определение 1.1** (Линейное отображение)**.**

$$A(\alpha x + \beta z) = \alpha Ax + \beta Az$$

Если $\dim X < +\infty, \dim Y < +\infty$, то это линейная алгебра.

$$A : X \to X, \dim X = n, A = A^* \Rightarrow \exists \text{ ОНБ}\{u_j\}_{j=1}^n$$

$\lambda_j$ — j-е собственное число

$$Au_j = \lambda_j u_j$$

**Теорема 1.1** (Гильберт). $X$ — гильбертово (сепарабельное) пространство. $A = A^*, A : X \to X \Rightarrow \exists$ ОНБ из собственных векторов.

Если $\dim Y = 1$, т.е. $Y = \mathbb{C}$ (или $\mathbb{R}$), то $A : X \to \mathbb{C}$, $A$ — линейный функционал.

В математическом анализе мы изучаем $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. В функциональном анализе же у нас $X$ — пространство функций, $f \in X$

$$D(f) = f' \quad D : X \to Y \tag{1.1}$$

и здесь мы задаемся вопросами о следующих свойствах $D(f)$

- компактность
- самосопряжённость
- непрерывность

Отцы основатели функционального анализа:

- Ф. Гильберт (1862–1943) Гильбертовы пространства;
- С. Банах (1892–1945) Банаховы пространства;
- Ф.Рисс (1880–1956) пространства Лебега $L^p$.

Ну и хочется ещё упомянуть для вас, компьютер саентистов, отцов основателей кибернетики, которые оставили немалый след в функциональном анализае

- Н. Винер (1894–1964);
- Д. фон Нейман (1903–1957). Про его архитектуру, наверное, что-то слышали?

## 1.1. Зачем изучать функциональный анализ

Во-первых, он позволяет посмотреть на задачу с высокого уровня абстракции.

Рассмотрим пространство непрерывных функций $C[a,b]$, там введём норму $|f| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$. Рассмотрим пространство многочленов $P_n = \{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k, a_k \in \mathbb{R}\}$ Существует ли такой многочлен, на котором инфимум достигается? И если да, то единственный ли он?

$$E_n(f) = \inf_{p\in P_n} ||f-p|| = \min_{p\in P_n} ||f-p||$$

На первый вопрос ответ да, это следует из общей теоремы функционального анализа.

$$\dim P_n = n+1 < +\infty$$

На второй же вопрос ответ тоже да, и тут функциональный анализ ни при чём. Суть в том, что у многочлена степени $n$ не может быть больше $n$ корней.

Ну и ещё немаловажные причины

1. язык функционального анализа — междисциплинарный язык математики;

2. его результаты применяются в математической физике, которая у нас будет в следующем семестре;

3. это интересно и важно. $0, 1, 2 = o(3)$;

4. у нас будет экзамен, на котором придется говорить уже нам.

Дополнительная литература по курсу. Первая рассчитана на студентов: в некоторых местах рассказывается, как придумать доказательство, как прийти к тому, что требуется, а не в обратную сторону, как обычно. Остальные же книги поумнее.

1. А.Н.Колмогоров, С.В. Фомин «Элементы теории функций и Ф.А.»;

2. М.Рид, Б. Саймон. 1 том «методы современной физики». Тонкая (можно осилить), рассказывается также про применение ФА;

3. А.В. Канторович, Г.Г Акилов «Функциональный анализ». Похожа на энциклопедию. Но там можно найти всё;

4. К. Итосида «Функциональный анализ»;

5. У. Рудин.

# Глава 2

# Метрические пространства

Начнём с того, что все знают. Надо ведь с чего-то начать. Мы будем несколько раз к ним возвращаться, а не изучим всё сразу. Один из полезных результатов — новое описание компакта в метрических пространствах. Он будет самым рабочим. А компакт — вещь очень полезная. Компакты в гигантских пространствах напоминают компакты в $\mathbb{R}^n$ или в $\mathbb{C}^n$ и обладают теми же полезными свойствами.

**Определение 2.1** (Метрика). $X$ — множество. $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$, $\rho$ — **метрика**, если при $x \in X \wedge y \in X \wedge z \in X$ она обладает следующими свойствами

1. $\rho(x, y) \geq 0 \wedge (\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y)$
2. $\rho(y, x) = \rho(x, y)$
3. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$

Введём стандартное обозначение открытого шара. $x \in X, r > 0$

$B_r(x) = \{y \in X : \rho(x, y) < r\}$ — шар с радиусом $r$. $\{B_r(x)\}_{r>0}$ — база окрестности в точке $x$.

$G$ — открытое, если $\forall\, x \in G \,\exists\, r > 0 B_r(x) \subset G$.

$F$ — замкнутое $\Leftrightarrow F \subset X \wedge X \setminus F$ — открытое.

В метрическом пространстве удобно характеризовать замкнутое множества с помощью последовательностей. Вспомним, что такое сходящаяся последовательность.

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность $\wedge \,\forall\, n \in \mathbb{N} x_n \in X \wedge \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, x_0) = 0$

$(X,\rho)$ — метрическое пространство $\Rightarrow$ ($F$ — замкнутое $\Leftrightarrow \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность $\wedge \forall\, n \in \mathbb{N} x_n \in F \wedge (\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow x_0 \in F))$

**Определение 2.2** (Фундаментальная последовательность)**.** $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальная $\Leftrightarrow \forall\,\varepsilon > 0 \exists\, N \in \mathbb{N} \forall\, n \in \mathbb{N} \forall\, m \in \mathbb{N}((n > N \wedge m > N) \Rightarrow \rho(x_n, x_m) < \varepsilon) \Leftrightarrow \lim\limits_{n,m\to\infty} \rho(x_n, x_m) = 0$

**Замечание 2.1.** $\exists\, x_0 \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальная

**Определение 2.3** (Полное метрическое пространство)**.** $(X,\rho)$ — полное, если все фундаментальные последовательности имеют предел, лежащий в $X$

Почему хорошо жить в полном метрическом пространстве?

**Замечание 2.2** (о пользе полноты)**.** $F : X \to \mathbb{R}, (X,\rho)$ — метрическое пространство, $F$ — непрерывная.

Стоит задача найти $x_0 \in X$ т.ч. $F(x_0) = 0$
Алгоритм: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \lim\limits_{n\to\infty} F(x_n) = 0, \lim\limits_{n,m\to\infty} \rho(x_n, x_m) = 0$ Если $(X,\rho)$ — полное, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0, F(x_0) = 0$ А если нет, то из наших вычислений вообще ничего не следует, возможно, решения вообще нет.

**Пример 2.1.** $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ — полные.

**Пример 2.2.** $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbb{0}_n\}$ — неполное.

**Пример 2.3.** $\mathbb{Q}$ — неполное.

Потом приведем примеры поинтереснее. Кстати, древние греки пришли в ужас, когда узнали, что $\mathbb{Q}$ — неполное.

**Определение 2.4.** $(X,\rho)$ — метрическое пространство, $A \subset X, A$ — ограниченное, если

$$\exists\, R > 0 \exists\, x_0 \in X A \subset B_R(x_0)$$

**Теорема 2.1** (Свойства фундаментальных последовательностей)**.** $(X,\rho)$ — метрическое пространство, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальная последовательность, тогда выполняется:

1. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ограниченная, т.е. $\exists\, R>0\,\exists\, x_0\in X\,\forall\, n\in\mathbb{N}\, x_n\in B_R(x_0)$
2. $\exists\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ — подпоследовательность $\Rightarrow (\exists a\in X \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a \Rightarrow \exists\, a\in X \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k})$
3. $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность действительных чисел $\wedge\forall\, k\in\mathbb{N}\varepsilon_k>0\Rightarrow\exists\,\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ — подпоследовательность $\forall\, j\in\mathbb{N}(j>k\Rightarrow\rho(x_{n_k},x_{n_j})<\varepsilon_k)$

*1 утверждение.* Возьмём $\varepsilon=1$, тогда из фундаментальности $\exists N\,\forall\, n\in\mathbb{N}(n>N\Rightarrow\rho(x_n,x_N)<1)$.

Возьмём $R=\max\{\rho(x_1,x_N),\ldots,\rho(x_{N-1},x_N)\}+1$. Единичка на всякий случай.

Тогда $\forall\, n\in\mathbb{N}x_n\in B_R(x_N)$. □

*2 утверждение.* Возьмём $\varepsilon>0$, тогда по фундаментальности $\exists N\forall\, n\in\mathbb{N}\forall\, m\in\mathbb{N}((\underline{n>N}\wedge m>N)\Rightarrow\underline{\rho(x_n,x_m)}<\varepsilon)$. Возьмём это $N$.

$\exists\, a\lim x_{n_k}=a\Rightarrow\exists\, n_k(\rho(x_{n_k},a)<\varepsilon\wedge\underline{n_k>N})$. Возьмём это $n_k$.

Возьмём некоторое $m>N$. Тогда $\rho(x_m,a)<\underline{\rho(x_m,x_{n_k})}+\rho(x_{n_k},a)<2\varepsilon$ □

*3 утверждение.* Докажем по индукции:

$\varepsilon_1:\exists n_1\forall\, n\in\mathbb{N}\forall\, m\in\mathbb{N}((n>n_1\wedge m>n)\Rightarrow\rho(x_m,x_n)<\varepsilon_1)$. Выберем $n_1$, тогда $\forall\, m\in\mathbb{N}(m>n_1\Rightarrow\rho(x_m,x_{n_1})<\varepsilon_1)$.

$\varepsilon_k:$ по индукции выбрали $n_1,\ldots,n_{k-1}$, $k\geq 2$. $\forall\, j\in(1\ldots k-1)\forall\, m\in\mathbb{N}(m>n_j\Rightarrow\rho(x_m,x_{n_j})<\varepsilon_j)$. Из фундаментальности исходной последовательности $\exists\, n_k(n_k>n_{k-1}\wedge\forall\, m\in\mathbb{N}(m>n_k\Rightarrow\rho(x_m,x_{n_k})<\varepsilon_k))$ □

**Следствие 2.1.** $(X,\rho)$, $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность, тогда

$$\exists\,\{x_{n_k}\}\text{ т.ч. }\sum_{k=1}^{\infty}\rho(x_{n_k},x_{n_{k+1}})<+\infty$$

*Доказательство.* По 3 свойству при $\varepsilon_k=\frac{1}{2^k}$. □

**Теорема 2.2** (О замкнутом подмножестве)**.** $(X, \rho)$ — метрическое пространство, тогда

1. $(X, \rho)$ — полное, $Y \subseteq X$, $Y$ — замкнутое $\Rightarrow (Y, \rho)$ — полное
2. $Y \subseteq X$, $(Y, \rho)$ — полное $\Rightarrow Y$ — замкнутое

*1 утверждение.* Доказательство следует прямо из определения. Знаем, что $Y$ — замкнутое поднмножество полного пространства. Берем фундаментальную последовательность. $Y \subset X$, пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \forall\, n \in \mathbb{N} x_n \in Y$ — фундаментальная. $\forall\, n \in \mathbb{N} x_n \in X, X$ — полное $\Rightarrow \exists\, x_0 \in X \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. $Y$ — замкнутое, значит $x_0 \in Y \Rightarrow (Y, \rho)$ — полное. □

*2 утверждение.* Второй пункт не труднее первого. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — произвольная фундаментальная последовательность в $Y$.

$Y$ — полное $\Rightarrow \exists\, x_0 \in Y \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow Y$ — замкнутое из-за произвольности последовательности. □

## 2.1. Банаховы пространства

Сначала введём понятие полунормы.

**Определение 2.5** (полунорма)**.** Пусть $X$ — линейное пространство над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Отображение $p : X \to \mathbb{R}$ называется полунормой, если при $x \in X \land y \in X \land (\lambda \in \mathbb{R} \lor \lambda \in \mathbb{C})$

1. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ (полуаддитивность)
2. $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$

**Свойство 2.1.** $p$ — полунорма $\Rightarrow$

$$\forall\, x \in X p(x) \geq 0 \land p(\mathbb{0}) = 0$$

*Доказательство.* $p(\mathbb{0}) = p(0 \cdot \mathbb{0}) = 0 \cdot p(\mathbb{0}) = 0$. Пусть $x \in X \Rightarrow \mathbb{0} = x + (-x) \Rightarrow p(\mathbb{0}) \leq p(x) + \underbrace{p(-x)}_{p(x)} = 2p(x) \Rightarrow p(x) \geq 0$ □

**Определение 2.6** (Норма)**.** $X$ — линейное пространство, $p: X \to \mathbb{R}$. $p$ — норма $\Leftrightarrow$ ($p$ — полунорма $\wedge$ $(p(x) = 0 \Leftrightarrow x = \mathbb{0})$). Будем обозначать $||x|| := p(x)$.

$(X, ||\cdot||)$ будем обозначать нормированное пространство. и при $(x \in X \wedge y \in X)$ $\rho(x, y) := ||x - y||$. Тогда $(X, ||\cdot||)$ — метрическое пространство.

**Определение 2.7** (банахово пространство)**.** $(X, ||\cdot||)$ — банахово, если оно полное

Еще пару определений перед критерием банахова пространства.

**Определение 2.8** (подпространство в алгебраическом смысле)**.** $X$ — линейное пространство, $L \subset X$. $L$ — подпространство в алгебраическом смысле $\Leftrightarrow \forall x \in L \forall y \in L \forall \alpha \in K \forall \beta \in K \alpha x + \beta y \in L$.

**Определение 2.9** (подпространство)**.** $(X, ||\cdot||)$, $L \subset X$, $L$ — подпространство, если

- $L$ подпространство в алгебраическом смысле
- $L = \overline{L}$ ($\overline{L}$ — замыкание)

Теперь нам потребуется сходимость рядов. Для того, чтобы говорить о сходимости, нужна топология.

**Определение 2.10** (Сходимость)**.**

$$(X, ||\cdot||) \quad \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$$

$\sum_{k=1}^{\infty} x_k (*)$, (*) сходится, если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \in X$
(*) сходится абсолютно, если $\sum_{k=1}^{\infty} ||x_k||$ сходится

В $\mathbb{R}^n$ (или в $\mathbb{C}^n$) если у нас была абсолютная сходимость, то была и обычная, но вообще говоря, это не так.

**Теорема 2.3** (Критерий полноты нормированного пространства (банаховости))**.** $(X, ||\cdot||)$ - полное $\Leftrightarrow$ из абсолютной сходимости ряда следует сходимость ряда.

*Доказательство.* Предположим, что наше пространство полное ($\Rightarrow$). $(X,\rho)$ — полное, $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность, при этом

$$\sum_{k=1}^{\infty} ||x_k|| \text{ сходится} \tag{**}$$

Цель такая: последовательность $S_n$ — фундаментальная. Сейчас применим критерий Коши к ряду (**). Это ряд из чисел, так что всё в порядке. Пусть $\varepsilon > 0$. По критерию Коши $\exists\, N \in \mathbb{N} \forall\, n \in \mathbb{N} \forall\, p \in \mathbb{N} (n > N \Rightarrow \sum_{k=n+1}^{n+p} ||x_k|| < \varepsilon)$.

$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$.

$$||S_{n+p} - S_n|| = \left|\left|\sum_{k=1}^{p} x_{n+k}\right|\right| \leq \sum_{k=1}^{p} ||x_{n+k}|| = \sum_{k=n+1}^{n+p} ||x_k|| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \{S_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ — фундаментальная}, (X,\rho) \text{ — полное}$$

$$\Rightarrow \exists\, S \in X \lim_{n\to\infty} S_n = S$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} x_k \text{ сходится}$$

Мы так запаслись номерами, чтобы выражение было меньше $\varepsilon$.

Теперь ($\Leftarrow$). У нас кроме определения ничего нет. Возьмём какую-то фундаментальную последовательность. Откуда взять предел? Есть соотношения между элементами последовательности. Возьмём подпоследовательность, ведь у нас есть следствие 2.1! Из свойств фундаментальных последовательностей, мы знаем, что

$$\exists\, \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \text{ — подпоследовательность} ||x_{n_1}|| + \sum_{k=1}^{\infty} ||x_{n_{k+1}} - x_{n_k}|| \text{ сходится}$$

$$\Rightarrow \text{последовательность } x_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) \text{ сходится}$$

Но её последовательность частичных сумм — это в точности оригинальная подпоследовательность:

$$S_m = x_{n_1} + \sum_{k=1}^{m-1} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) = x_{n_m} \Rightarrow \exists\, S \in X \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = S$$

Далее из части 2 Теоремы 2.1

$$\exists\, S \in X \lim_{m\to\infty} x_{n_m} = S \Rightarrow \exists\, S \in X \lim_{n\to\infty} x_n = S$$

$\square$

## 2.2. Пространства ограниченных функций

**Определение 2.11.** Пусть $A$ — произвольное множество. Стандартное обозначение $m(A)$ — множество всех ограниченных функций из него в комплексные (или только в действительные, не важно) числа

$$m(A) = \{f | f : A \to \mathbb{C} \wedge \sup_{x\in A} |f(x)| < +\infty\}$$

$f \in m(A) \Rightarrow ||f||_\infty = \sup_{x\in A} |f(x)|$.

**Теорема 2.4.** $(m(A), ||\cdot||_\infty)$ — банахово пространство

*Доказательство.* Нужно проверить две вещи. Во-первых, что $||\cdot||_\infty$ удовлетворяет аксиомам нормы. А во-вторых, что пространство с таким определением является полным. Просто по определению, никаких хитрых критериев — возьмём фундаментальную подпоследовательность и покажем, что у нее есть предел.

Проверяем, что $||\cdot||_\infty$ удовлетворяет аксиомам нормы.

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{C} ||\lambda f||_\infty = \sup_{x\in A} |\lambda| \cdot ||f(x)|| = |\lambda| \cdot \sup_{x\in A} ||f(x)|| = |\lambda| \cdot ||f||_\infty$$

Нужно проверить неравенство треугольника.

$$\forall\, f \in m(A) \forall\, g \in m(A) \forall\, x \in A |f(x) + g(x)| \le |f(x)| + |g(x)| \le ||f||_\infty + ||g||_\infty$$
$$\Rightarrow \forall\, f \in m(A) \forall\, g \in m(A) ||f+g||_\infty = \sup_{x\in A} |f(x) + g(x)| \le ||f||_\infty + ||g||_\infty$$

Следующая аксиома нормы:

$$||f||_\infty = 0 \Leftrightarrow \forall\, x \in A f(x) = 0 \text{ т.е. } f \text{ — нулевая функция}$$

Теперь мы проверили аксиомы нормы. Доказываем полноту. $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ — фундаментальная в $m(A)$.

$$\begin{gathered}\forall\, \varepsilon > 0 \exists\, N \in \mathbb{N} \forall\, m \in \mathbb{N} \forall\, n \in \mathbb{N}( \\ (m > N \wedge n > N) \Rightarrow ||f_n - f_m||_\infty < \varepsilon) \text{ т.е. } \sup_{x \in A} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon\end{gathered}$$

Первый вопрос: откуда взять претендента на роль предела? Еще желательно, чтобы он был единственный. Берём $\varepsilon, N$ из формулы выше, фиксируем $x$. Если для супремума есть неравенство, то и для $x$ тем более. $\forall\, x \in A((n > N \wedge m > N) \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon)$. $\Rightarrow \{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ — фундаментальная последовательность чисел в $\mathbb{C}$.

$\Rightarrow \forall\, x \in A \exists\, L \in \mathbb{C} \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = L$

Определим $f \coloneqq (x \in A \mapsto \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x))$

$$\begin{gathered}(n > N \wedge m > N \Rightarrow \forall\, x \in A |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon) \quad \text{пусть } m \to \infty \\ \Rightarrow (n > N \Rightarrow \forall\, x \in A |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon) \\ \Rightarrow (n > N \Rightarrow ||f_n - f||_\infty = \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon)\end{gathered}$$

Последнее соображение, которое нужно добавить, это то, что $f$ — элемент $A$. Для $n > N$ можем записать $f$ как $f = (f - f_n) + f_n, f_n \in m(A), f - f_n \in m(A)$.

$$\Rightarrow ||f||_\infty = ||(f - f_n) + f_n||_\infty \leq ||f - f_n||_\infty + ||f_n||_\infty < +\infty \Rightarrow f \in m(A)$$

$\square$

Давайте заметим, что у нас получилось определение равномерной непрерывности из математического анализа.

$$\lim_{n \to \infty} f_n = f \in m(A) \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| = 0 \Leftrightarrow f_n \underset{\substack{x \in A \\ n \to \infty}}{\rightrightarrows} f$$

**Определение 2.12** (Топологический компакт)**.** Множество $K$ — топологический компакт, если оно обладает следующими свойствами

1. $(\forall\,\alpha\,\in\,A\,G_\alpha$ — открытое множество $\wedge K\subseteq\bigcup_{\alpha\in A}G_\alpha\Rightarrow\exists\,\{\alpha_j\}_{j=1}^n$ — конечная подпоследовательность $K\subseteq\bigcup_{j=1}^n G_{\alpha_j})$
2. Хаусдорфовость $\forall\,x\in K\forall\,y\in K(x\neq y\Rightarrow\exists\,U\exists\,V(U$ — открытое множество $\wedge V$ — открытое множество $\wedge x\in U\wedge y\in V\wedge U\cap V=\varnothing))$

**Определение 2.13.** $C(K)=\{f|f:K\to\mathbb{R}\wedge f$ непрерывна$\}$

$$||f||_{C(K)}=||f||_\infty=\sup_{x\in K}|f(x)|=\max_{x\in K}|f(x)|$$

**Следствие 2.2.** $K$ — топологический компакт $\Rightarrow C(K)$ — банахово

*Доказательство.* $C(K)\subset m(K)$. $C(K)$ — подпространство в алгебраическом смысле. Проверим, что $C(K)$ — замкнуто в $m(K)$

$$\{f_n\},f_n=C(K),\lim_{n\to\infty}|f-f_n|_\infty=0\Leftrightarrow f_n\underset{K,n\to\infty}{\rightrightarrows}f\Rightarrow f\in C(K)\Rightarrow C(K)$$

тогда $m(K)$ — полное и $C(K)$ — полное. □

## 2.3. Пространство последовательностей с $\sup$ нормой

**Определение 2.14.** $\mathbb{C}^n,n\in\mathbb{N},l_n=\{x^\infty=(x_1,\ldots,x_n),x_j\in\mathbb{C}\}$

$$||x||_\infty=\max_{1\leq j\leq n}|x_j|$$

$A=\{1,2,\ldots,n\},l_n^\infty=m(A)\Rightarrow l_n^\infty$ — полное Удобно думать, что последовательность — это функция на множестве натуральных чисел.

**Определение 2.15** ($l^\infty$).

$$l^\infty = \{X = \{x_j\}_{j=1}^\infty, \sup_{j\in\mathbb{N}} |x_j| < +\infty\}$$

$$||x||_\infty \sup_{j\in\mathbb{N}} |x_j| \quad A = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$$

$$X = \{x\}j_{j=1}^\infty \in m(A), \underset{f:A\to\mathbb{C}}{f(j) = x_j}$$

$$l^\infty := m(\mathbb{N}) \Rightarrow l^\infty \text{ — полное}$$

**Определение 2.16.**

$$c = \{X = \{x\}j_{j=1}^\infty, x_j \in \mathbb{C} \quad \exists \lim_{n\to\infty} x_n = x_0\}$$

$$c \subset l^\infty, ||x|| = ||x||_\infty = \sup ||X||$$

$$c_0 = \{x = \{x\}_{j=1}^\infty, \lim_{n\to\infty} x_j = 0\}, c_0 \subset c \subset l^\infty$$

$c, c_0$ — замкнутые подпространства в $l^\infty \Rightarrow c, c_0$ — банаховы.

## 2.4. Пространства $n$ раз непрерывно дифференцируемых функций на отрезке

**Определение 2.17.** (норма $n$ производной)

$$n \in \mathbb{N} \quad C^{(n)}[a, b] = \{f : [a, b] \to \mathbb{R}\} \exists\ f^{(n)} \in C[a, b]$$

$$\underset{C[a,b]}{|||f||_{(n)}} = \max_{0\le k\le n}, f^0 = f$$

**Теорема 2.5.** В $C^{(n)}[a, b]$ — банахово.

*Доказательство.*

$$\{f_m\}_{m=1}^\infty \text{ — фундаментальная последовательность в } C^{(n)}[a, b]$$

$$\varepsilon > 0 \exists\, N : (m > n \wedge q > n) \Rightarrow ||f_m - f_q||_{C^{(n)}} < \varepsilon \Rightarrow ||f_m^{(k)} < f_q^{(k)}||_\infty < \varepsilon$$

$$k = 0, 1, \ldots, n$$

$\{f_m^{(k)}\}$ — фундаментальная в полном пространстве $C[a,b]$

$$\Rightarrow \exists\, \varphi_k \in C[a,b], f_n^{(k)} \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} \varphi_k, k = 0, 1, \ldots, n$$

$$\overset{\text{Анализ}}{\Rightarrow} (f_k^{(n)} \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} \varphi_0 \wedge \varphi_k^0 \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} \varphi_1) \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_0', \varphi_2 = \varphi_0'', \ldots, \varphi_n = \varphi_0^{(n)} \quad (2.1)$$

$\square$ 19.09.23

# Глава 3

# Пространство суммируемых функций (Лебега $L^p$)

Сейчас будет небольшой экскурс в теорию меры, которая была на математическом анализе. Мы ничего доказывать не будем и поверим, что все утверждения верны и в общем случае.

## 3.1. Теория меры

**Определение 3.1** (Мера)**.** $(X, U, \mu)$ — пространство с мерой. $X$ — множество, $U$ — $\sigma$-алгебра подмножества $X$

1. $\varnothing \in U$
2. $A \in U \Rightarrow X - A \in U$
3. $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}, A_n \in U, A\infty_{n=1}A_n \Rightarrow A \in U$

$$\mu : U \to [0, +\infty]$$

— мера, если

1. $\mu(\varnothing) = 0$
2. $A = U_{n=1}^{\infty}\{A_n\}, A_n \cap A_m = \varnothing, n \neq m, A_n \in U \Rightarrow \mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n$ (счетная аддитивность)

Предположения:

1. $\mu$ — полная мера, то есть $A \in U, \mu(A) = 0 \Rightarrow (\forall B \subset A \Rightarrow B \in$

$U, (\Rightarrow \mu B) = 0)$

2. $\mu$ — $\sigma$-конечна, то есть $X = \cup_{j=1}^{\infty} X_j, \mu(X_j) < +\infty$

Пока можем думать, что речь идет о мере Лебега. Потом приведём другие примеры. В теории пространств будем считать, что функция действует из $X$ в $\mathbb{R}$ или в $\mathbb{C}$ (не особо важно).

**Определение 3.2** (Измеримая функция). $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. $f$ — измерима, если

$$\forall\, c \in \mathbb{R}, x \underbrace{\{x : c < f(x)\}}_{\text{измеримое множество}} \in U$$

$$f : X \to \mathbb{C} \Rightarrow f = u + iv, u, v : X \to \mathbb{R}$$

$f$ — измерима, если $u, v$ — измеримы

Как же определяется интеграл? Пусть есть какой-то элемент $\sigma$-алгебры $e \in U$, $\chi_e(x) = \begin{cases} 1, x \in E \\ 0, x \notin e \end{cases}$. Множество простых функций определяется как

$$S = \{g(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{e_k}, c_k \in \mathbb{C}, e_k \in U\}$$

$g \in S, \int_X g(x) d\mu = \sum_{k=1}^{n} c_k \mu e_k$.

$f(x)$ — измеримая, если $f(x) \geq e, x \in X$

**Определение 3.3** (Произвольно измеримая функция).

$$\int_X f d\mu = \sup \left\{ \int_X g(x) d\mu : 0 \leq g(x) \leq g(x), x \in X, c_k \in \mathbb{R}, c_k > 0 \right\}$$

**Определение 3.4** (Измеримая функция). $f$ — измерима, если

$$f_+(x) = \max_( f(x), 0) \wedge f_-(x) = \max(-f(x), 0) \Rightarrow f = f_+ - f_-$$

Если $\int_X f_+ d\mu$ — конечен или $\int_X f_- d\mu$ — конечен, то $\int_X f d\mu = \int_X f_+ d\mu - \int_X f_- d\mu$ Если $f$ — измеримая, $f : X \to \mathbb{C} \Rightarrow f = u + iv$

$$\int_X f d\mu = \int_X u d\mu + i \int_X v d\mu$$

**Определение 3.5** (Множество суммируемых функций)**.** $L(X, \mu)$ — множество суммируемых функций =

$$\left\{f_i : \int_X |f| d\mu < +\infty\right\}, |f| = f_+ + f_-$$

Прежде чем двигаться дальше, приведем примры других мер (кроме мер Лебега)

**Пример 3.1.** $E \subset \mathbb{R}^n$, $E$ — измерима по Лебегу, $\lambda$ — мера Лебега, $w(x) \geq 0, x \in E$, $w$ — измерима по Лебегу.

$e \subset E, e$ — измеримо по Лебегу. $\mu e = \int_e w(x) d\lambda, w(x)$ — плотность меры $\mu$, $w(x)$ — её вес.

Вторая мера в каком-то смысле противоположная. Она сосредоточна на наборе точек и называется дискретной.

**Пример 3.2.** $X$ — множество ($X \neq \varnothing$), $a \in X$

$$\sigma_n, e \subset X, \sigma_a(e) = \begin{cases} 1, a \in E \\ 0, a \notin e \end{cases}$$

$\forall\, e, e \subset X, e$ — измеримо

**Пример 3.3** (Дискретная мера)**.** $X$ — бесконечное множество. $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}, a_j \in X, a_j \neq a_k, j \neq k$

$\{h_j\}_{j=1}^{\infty}, h_j > 0$

$$\mu - \sum_{\gamma=1}^{\infty} h_j \delta_{a_j}, e \subset X \quad \mu E = \sum_{\{j : a_j \in E\}} h_j$$

План такой: хотим ввести норму на множестве интегрирумеых функций. Для этого нам надо ввести некоторые неравенства.

## 3.2. Классические неравенства

**Теорема 3.1** (Неравенство Юнга)**.** $p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ($q$ — сопряженный показатель)

$$\Rightarrow ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^p}{q}$$

*Доказательство.* Пусть $b$ — фиксировано, $\varphi(x) = \frac{x^p}{p} - xb, x \in [0, +\infty)$. Хотим найти $\min_{x\in[0,+\infty)} \varphi(x)$. Для этого посмотрим, где производная обращается в 0. $\varphi'(x) = x^{p-1} - b$, $\varphi'(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 = b^{\frac{1}{p-1}} \Rightarrow \varphi(x) > \varphi(x) > \varphi(x_0) \,\forall\, x \neq x_0, x \geq 0$. Таким образом, $x_0$ — строгий локальный минимум.

$$\varphi(x_0) = \frac{1}{p} b^{\frac{p}{p-1}} - b^{\frac{p}{p-1}} = b^{\frac{p}{p-1}} \left( \frac{1}{p} - 1 \right) = \frac{b^q}{q}$$

$$-\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p} \Rightarrow q = \frac{p}{p-1}$$

$$\varphi(x) \geq -\frac{b^q}{q} \,\forall\, x \in [0, +\infty) \text{ то есть OK}$$

$$\varphi(x_0) = \frac{1}{p} b^{\frac{p}{p-1}} - b^{\frac{p}{p-1}} = b^{\frac{p}{p-1}} \left( \frac{1}{p} - 1 \right) = \frac{b^q}{q}$$

□

**Замечание 3.1.** Равенство в неравенстве Юнга достигается только при $a = b^{\frac{1}{p-1}}$

**Теорема 3.2** (Неравенство Гельдера)**.** $(X, U, \mu)$ —- пространство с мерой. $f, g$ — измеримые, $p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow$

$$\int_X |fg| d\mu \leq \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \int_X |g|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \qquad (*)$$

Если $p = q = 2$, то это «Неравенство Коши-Буняковского-Шварца», или на молодёжном математическом сленге неравенство КБШ

*Доказательство.* Для начала отбросим какие-то простые случаи. $A = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}, B = \left(\int_X |g|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$. Если $A = 0 \Leftrightarrow |f| = 0$ почти всюду по $\mu \Leftrightarrow f(x) = 0$ почти всюду по $\mu$ (то есть $\mu\{x : f(x) \neq 0\} = 0$) На всякий случай поясним, почему функция равна 0 почти всюду по мере $\mu$

$$\int_X |f| d\mu = 0 \Rightarrow e = \{x : f(x) = 0\}, m \in \mathbb{N}, e_m = \{x : |f(x)| > \frac{1}{m}\}$$

$$e = \cup_{m=1}^{\infty} e_m \quad \int_X |f| d\mu \geq \int_{e_m} |f| d\mu \geq \frac{1}{m} \mu e_m \Rightarrow \mu e_m = 0 \Rightarrow \mu E = 0$$

$$\Rightarrow f(x) \cdot g(x) = 0 \text{ п.в.} \quad 0 \le 0 \tag{*}$$

Если $A = +\infty$, то (*)

$$\text{пусть } 0 < A < +\infty, 0 < R < +\infty$$

Неравенство Гельдера однородное, то есть если мы $f$ умножим на константу, то левая и правая часть умножится на неё же, аналогично с $g$. Иногда бывает удобно ввести нормировку.

$$f_1(x) = \frac{f(x)}{A}, g_1(x) = \frac{g(x)}{B}, \int_X |f_1(x)|^p d\mu = \frac{A^p}{A^p} = 1, \int_X |g_1(x)|^q d\mu = 1$$

Пусть $x$ — фиксирован, $a = |f(x)|$, $b = |g(x)| \overset{\text{н.Юнга}}{\Rightarrow}$

$$|f_1(x)| \cdot |g_1(x)| \le \frac{|f_1(x)|^p}{p} + \frac{|g_1(x)|^q}{q} \text{ проинтегрируем } X \text{ по } \mu$$

$$\Rightarrow \int_x |f_1| \cdot |g_1| d\mu \le \frac{1}{p} \int_X |f_1|^p d\mu + \frac{1}{q} \int_X |g_1|^q d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Умножаем на $AB \Rightarrow \int_X |fg| d\mu \le AB$ □

**Теорема 3.3** (Неравенство Минковского). $(X, U, \mu)$, $f, g$ — измеримые, $1 \le p < +\infty \Rightarrow$

$$\underbrace{\left(\int_X |f(x) + g(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}}_{C} \le \underbrace{\left(\int_X |f(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}}_{A} + \underbrace{\left(\int_X |fg(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}}_{B} \tag{*}$$

*Доказательство.* Сначала разберём простые случаи. $p = 1, x$ — фиксирован. $|f(x) + g(x)| \le |f(x)| + |g(x)|$ проинтегрируем по $X \Rightarrow (*)$ при $p = 1$. Теперь пусть $p > 1$. Если $A = +\infty$, или $B = +\infty$, или $C = 0$, то (*).

Теперь же пусть $A < +\infty, B < +\infty, C > 0$. Доказателсьвто будет в два этапа. На первом этапе получим гораздо более слабое утверждение, вообще не то, что требуется в теореме, но оно нам понадобится. Докажем, что $C < +\infty$.

$a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow |a+b| \le |a|+|b| \le 2\max(|a|, |b|) \Rightarrow |a+b|^p \le 2^p \max(|a|^p, |b|^p) \le 2^p(|a|^p + |b|^p) \Rightarrow$ при фиксированном $x$

$$|f(x) + g(x)|^p \le 2^p(|f(x)|^p + |g(x)|^p) \text{ проинтегрируем по } X$$

$\Rightarrow C^p \leq 2^p(A^p + B^p) \Rightarrow C < +\infty$. Первая часть доказательства закончена.

$$C^p = \int_X |f+g|^p d\mu = \int_X |f+g|\cdot|f+g|^{p-1} d\mu \leq \int_X |f|\cdot|f+g|^{p-1} d\mu + \int_X |g|\cdot|f+g|^{p-1} d\mu$$

$$\int_X |f|\cdot|f+g|^{p-1} d\mu \overset{\text{н. Гельдера}}{\leq} \left(\int_X |f+g| d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\underbrace{\int_X |f+g| d\mu}_{A}\right)^{(p-1)q} = AC$$

$$\int_X |g|\cdot|f+g|^{p-1} d\mu \overset{\text{аналогично}}{\leq} BC^{\frac{p}{q}} \Rightarrow$$
$$C^p \leq (A+B)C^{\frac{p}{q}}, \quad 0 < C < +\infty \Rightarrow$$
$$C^{p-\frac{p}{q}} = C \Rightarrow C \leq A + B(\text{ это (*)})$$

□

## 3.3. Пространство Лебега

Отсюда и до определения $L^\infty$ очень аккуратно с $\mathcal{L}$ и $L$ читать. Тут точно есть путаница, но записи лекции нет, чтобы ее устранить.

**Определение 3.6.** $(X, U, \mu)$ — пространство с мерой. $L(X, \mu)$ — пространство суммируемых функций. $1 \leq p < +\infty$ $\quad \mathcal{L}^p(X, \mu) = \{f : |f|^p \in L(X, \mu)\}$

$$f \in L^p(X, \mu), ||f||_p = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

Проверим, что $||f||_p$ — это полунорма на $L^p(X, \mu)$. $c \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$). $||cf||_p = |c|||f||_p$

$$||f+g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p \text{ — неравенство Минковского}$$

$||f|| = 0 \Leftrightarrow \int_X |f(x)|^p d\mu = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ почти всюду по мере $\mu$ на $X$.

**Пример 3.4.** $L[0,1], \lambda$ — мера Лебега на $[0,1]$.

функция Дирихле $\varphi(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad \int_0^1 |\varphi(x)| d\lambda = 0.$

$N = \{f$ — измерима $\wedge$ $f(x) = 0$ почти всюду на $X$по $\mu\}$. $||f||_p = 0 \Leftrightarrow f \in N$ (не зависит от $p$). Рецепт приготовления пространства с нормой из полуфбриката. пространство с полунормой. $N$ — подпространство в $L^p$, $L^p = L^p/N$ — факторпространство.

$g, f \in L^p, f\ g \Leftrightarrow f - g \in N \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ почти всюду по $\mu$. $\overline{f}$ — класс эквивалентности, $\overline{f} = \{g : f\ g\}$.

$||\overline{f}||_p := ||f||$, то есть можно взять любую функцию из класса эквивалнентности.

$$||\overline{f}||_p = 0 \Leftrightarrow \int_X |f|^p d\mu = 0 \Leftrightarrow f \in N \Rightarrow \overline{f} = N = \overline{0} \Rightarrow$$

$||\overline{f}||_p$ — норма на $L^p$. Говорят, что $f \in L^p$, возьмём функцию из $L^p$, но имеют в виду, что возьмут класс экивалентности, а из него возьмут функцию

Одна из главных целей — доказать, что эти пространства Банаховы. Сначала определим $L^\infty(X, \mu)$ (существенно ограниченные функции).

**Определение 3.7** ($L^\infty(X, \mu)$). $f \in L^\infty(X, \mu)$, если

$$\exists\, c > 0 |f(x)| \leq c \text{ почти всюду на } X \text{ по } \mu(\mu\{x : |f(x)| > c\} = 0)$$

Возьмём точную нижнюю грань этой константы. $||f||_\infty = \inf\{c \geq 0 : \mu\{x : ||f(x)|| > c\} = 0\}$ (существуенный sup, или на подлом англосаксонском $\operatorname{ess\,sup}_X f$)

**Свойство 3.1.** $f \in \mathcal{L}^\infty(X, \mu) \Rightarrow \mu\{f(x) > ||f||_\infty\} = 0$

*Доказательство.* $e = \{x : |f(x) > ||f||_\infty\}, m \in \mathbb{N}$.
$e_m = \{x : |f(x)| > ||f||_\infty + \frac{1}{m}\} \Rightarrow \mu e_m = 0$ по определеннию $\operatorname{ess\,sup}_X f$
$\Rightarrow e = \cup_{m=1}^\infty e_m \Rightarrow \mu e = 0$ □

$$||f||_\infty \text{ — полунорма на } \mathcal{L}^\infty$$
$$\lambda \neq 0 \quad |\lambda f(x)| \leq |\lambda| \cdot c \Leftrightarrow |f(x) \leq c \Rightarrow ||\lambda f||_\infty = |\lambda| ||f||_\infty,$$
$$f, g \in \mathcal{L}^\infty, x \in X \Rightarrow |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty \text{ для п.в. } x \text{ на } X$$
$$\Rightarrow ||f + g||_\infty < ||f||_\infty + ||g||_\infty$$

$||f||_\infty = 0 \Leftrightarrow \mu\{x : |f(x)| > 0\} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ п.в. на $X \Leftrightarrow f \in N = \{f$ — измерима, $f(x) = 0$ п.в. на $X\}$

$$L^\infty = \mathcal{L}^\infty / N$$

Все, что Н.А. доказал для меры Лебега, верно и для других мер. Те доказательства и так были не особо веселые, чтобы их повторять.

**Теорема 3.4** (Фату)**.** $(X, U, \mu)$, $\{g_n\}_{n=1}^\infty, g_n$ — измеримые, $g_n(x) \geq 0$

$$g_n(x) \underset{\text{п.в.}}{\longrightarrow} g(x) \quad \int_X g_n(x) d\mu \leq C \text{ не зависит от n}$$
$$\Rightarrow \int_X g(x) d\mu \leq C$$

Первая существенная теорема, которая нам встретилась.

**Теорема 3.5** (полнота пространства Лебега)**.** $(X, U, \mu), 1 \leq p \leq +\infty \Rightarrow L^p(X, \mu)$ — банаховы.

*Доказательство.* при $1 \leq p < +\infty$ воспользуемся критерием полноты (если сходится ряд из норм, то сам ряд сходится)

$$\{f_n\}_{n=1}^\infty, f_n \in L^p, \sum_{n=1}^\infty ||f_n||_p \leq C < +\infty$$
$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$$

Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} ||S_n(x) - f(x)||_p = 0$. Существует ли $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$ почти всюду на $X$?
Рассмотрим $\sigma_n(x) = \sum_{k=1}^n |f_k(x)| \Rightarrow \sigma_n(x)$ возрастает $\Rightarrow \exists\ \sigma(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n(x)$. Возможно, $\sigma(x) = +\infty$ для некоторых $x$.

$$||\sigma_n||_p \leq \sum_{k=1}^n ||f_k||_p \leq C$$

$$\int_X |\sigma_n(x)|^p d\mu \leq C^p \wedge \sigma_n(x)^p \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sigma_(x)^p \,\forall\, x \in X \overset{\text{т. Фату}}{\Rightarrow}$$

$\int_X \sigma(x)^p d\mu \leq c^p$ Самое главное, что мы из этого заключаем: $\sigma(x) < +\infty$ п.в. на $X$ по $\mu$.

$$x \in X \quad \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| < +\infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \text{ — сходится}$$

$$f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \text{ определена п.в. на } X, \lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} ||f_k||_p < +\infty, \varepsilon > 0$$

Применим критерий Коши: $\exists\, N \in \mathbb{N} \quad m > n > N \Rightarrow \sum_{k=n+1}^{m} ||f_k||_p < \varepsilon \Rightarrow ||S_m(x) - S_n(x)||_p \leq \sum_{k=n+1}^{m} ||f_k||_p < \varepsilon$

$$\int_x |S_m(x) - S_n(x)|^p d\mu < \varepsilon^p (n \text{ фиксировано}) \wedge |S_m(x) - S_n(x)|^m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} |f(x) - S_n(x)|$$

$$\overset{\text{Фату}}{\Rightarrow} \int_X |f - S_n|^p d\mu \leq \varepsilon^p \Rightarrow ||f - S_n|| \leq \varepsilon$$

$f - S_n \in L_p, S + n \in L^p \Rightarrow f = (f - S_n) + S_n \Rightarrow f \in L_p$ и $||f - S_n||_p \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$
Теперь осталось рассмотреть случай $p = \infty$. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальная, $f_n \in L^\infty$,

$$|f_n(x)| \leq ||f_n||_\infty \quad x \in X \setminus e_n, \mu e_n = 0 \quad n \in \mathbb{N}$$

$e = \cup_{n=1}^{\infty}, X_1 = X \setminus e \Rightarrow f_n \in m(X_1)$ — ограниченная функция. $m(X_1)$ — полное $\Rightarrow \{f_n\}$ — фундаментальна в $m(X_1) \Rightarrow \exists\, f \in m(X_1) \quad \sup_{x\in X_1} |f(x) - f_n(x)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Положим $f(x) = 0$ если $x \in e \Rightarrow \lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_{L^\infty} = 0 \quad \square$

## 3.4. Пространства $l_n^p, l^p$

$n \in \mathbb{N}, 1 \leq p < +\infty$.

> **Определение 3.8.**
>
> $$l_n^p = \left\{ \mathbb{R}^n, x = (x_1, \ldots, x_n), x_j \in \mathbb{R}, ||x||_p = \left( \sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\}$$

Рассмотрим $X = \{1, 2, \ldots, n\}$. Возьмём дискретную меру $\mu(j) = 1$ при $1 \le j \le n$, $l^p_n = L^p(X, \mu)$. $f \in L^p(X, \mu), f(j) = x_j \Rightarrow l^p_n$ — полное.

Посмотрим, что будет обозначать сходимость этой нормы.

**Теорема 3.6.** $\{x^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}, x = (x_1, \ldots, x_n), x^{(m)} = (x_1^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)})$, $x^{(m)} \in l^p_n, q \le p \le +\infty$

$$\lim_{m\to\infty} ||x - x^{(m)}||_p = 0 \Leftrightarrow \lim_{m\to\infty} x_j^{(m)} = x_j, 1 \le j \le n$$

*Доказательство.* $\Rightarrow$
Пусть $j$ — фиксировано, $\lim\limits_{m\to\infty} x^{(m)} = x$ в $l^p_n$.
При $p < +\infty$ $||x - x^{(m)}||_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - x_i^{(m)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \ge |x_j - x_j^{(m)}$. Так как $||x - x^{(m)}||_p \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \lim\limits_{m\to\infty} |x_j - x_j^{(m)}| = 0$.
При $p = \infty$ $\quad ||x - x^{(m)}||_\infty = \max_{1\le i\le m}\{|x_i - x_i^{(m)}|\} \ge |x_j - x_j^{(m)}|$. Так как $||x - x^{(m)}||_\infty \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \lim\limits_{m\to\infty} |x_j - x_j^{(m)}| = 0$
Теперь $\Leftarrow$

$$1 \le j \le n \qquad \lim_{m\to\infty} |x_j - x_j^{(m)}| = 0 \Rightarrow \left(\sum_{j=1}^n ||x_j - x_j^{(m)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\text{и } \Rightarrow \max_{1\le j\le n} |x_j - x_j^{(m)}| \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

□

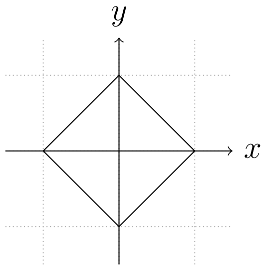
**Определение 3.9.** $l_p = \{x : \{x_j\}_{j=1}^{\infty}, x_j \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \wedge \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < +\infty\}$

$$||x||_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

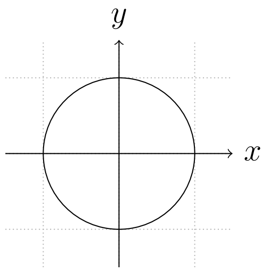
$X = \mathbb{N}$, $\mu(j) = 1$, $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n$

$$l^p = L^p(\mathbb{N}, \mu) \Rightarrow \text{ полное } \quad 1 \le p < +\infty$$

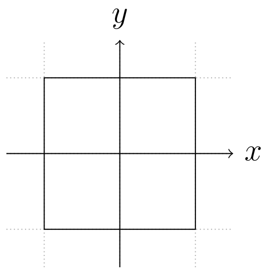
**Замечание 3.2.** $\{x^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}, x^{(m)} \in l^p$, $\lim\limits_{m\to\infty} ||x^{(m)} - x||_p = 0 \Rightarrow \forall j \lim\limits_{m\to\infty} x_j^{(m)} = x_j$ Например, $\not\Leftarrow$ при $e_m = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, 0, \ldots)$



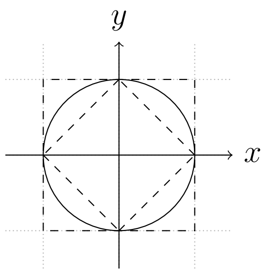

(a) $B_1^1(0,0)$




(b) $B_1^2$(0,0)




(c) $B_1^\infty$(0,0)




(d) $B_1^p$(0,0)

Рис. 3.1: Примеры единичных шаров в $l_2^p$

Пусть $j$ фиксировано. $\lim\limits_{m\to\infty}(e_m)_j = 0 \quad ||e_m - \mathbb{0}||_p = 1 \quad \forall\, p, 1 \leq p \leq +\infty$. В качестве упражнения доказать, что $l^p$ — полное непосредственно.

На рисунке 3.1 приведены примеры единичных шаров в $l_2^p = \{(x,y) : (|x|^p + |y|^p)^{\frac{1}{p}}\}, 1 \leq p < +\infty$. Для $l_2^\infty$ норма определяется $||(x,y)||_\infty = \max(|x|,|y|)$

## 3.5. Неполное нормированное пространство

**Определение 3.10** (Финитное линейное пространство)**.**

$$F = \{x - \{x_j\}_{j=1}^{\infty}, x_j \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \exists\ N(x) \in \mathbb{N} : n > N(x) \Rightarrow x_n = 0\}$$

$F \subset l^p \quad 1 \leq p \leq +\infty$. $(F, ||\cdot||_p)$ — не полное, $F$ — не замкнуто. Будем брать геометрическую прогрессию и обрывать ее на некотором члене.

$$x^{(m)} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2^m}, 0, 0, 0, \ldots\right\} \in F$$

$$X = \left\{\frac{1}{2^k}{}_{k=1}^{\infty}\right\} \in l^p$$

$$1 \leq p < +\infty \quad ||x - x^{(m)}||_p = \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^{kp}}\right)^{\frac{1}{p}} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Следовательно, $F$ — не замкнуто.

В качестве упражнения проверить, что $\overline{F}$ в $l^p$ =? при $p < +\infty$ и при $p = \infty$.

**Теорема 3.7.** $C[a,b], ||f||_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < +\infty$

$$(C[a,b], ||\cdot||) \text{ — не полное}$$

*Доказательство.* При $p = 1$, $[a,b] = [-1,1], f \in C[a,b], \int_a^b |f(x)|^p dx = 0 \Leftrightarrow f(x) \equiv 0$. Предъявим фундаментальную последовательность, предел которой не будет непрерывной функцией.

$$f_n = \begin{cases} 0, -1 \leq x \leq 0 \\ nx, x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 1, x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}, f \in C[-1,1]$$

$f_n$ — фундаментальная в $(C[-1,1], p = 1)$

Пусть $m > n$.

$$\int_{-1}^{1} |f_m(x) - f_n(x)| dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right) \leq \frac{1}{2n} \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Пусть $\exists\ f \in C[-1,1] : ||f - f_n||_1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

$$m \geq n \qquad \int_{\frac{1}{n}}^{1} \underbrace{|f(x) - 1|}_{=0} dx \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} |f(x) - 1| dx \leq \int_{0}^{1} |f(x) - f_m(x)| dx \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$\Rightarrow f(x) = 1, x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \forall\, n$

$$\begin{cases} \Rightarrow f(x) = 1, x \in (0,1], f \text{ непрерывна }, f(0) = 1 \\ \text{аналогично } f(x) \equiv 0 \text{ на } [-1,0] \end{cases} \quad \Rightarrow \text{ противоречие}$$

$\square$

# Глава 4

# Пополнение метрического пространства

26.09.23

Мы привели несколько примеров нормированных пространств, не являющихся полными. Приведём еще один пример.

**Определение 4.1.**

$$\mathrm{P} = \left\{ p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, a_k \in \mathbb{R}, n \geq 0 \right\}$$

P (подпространство в алгебраическом смысле) $\subset C[a,b]$, $||p||_\infty = \max_{x\in[a,b]} |p(x)|$ $e^x \notin \mathrm{P}$, $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}, \Rightarrow p_n \underset{[a,b], n\to\infty}{\rightrightarrows} e^x$ это не многочлен, потому что если сколько-то раз продифференцировать многочлен, он станте тождественным $0 \Rightarrow \overline{\mathrm{P}} \setminus \mathrm{P} \ni e^x \Rightarrow \mathrm{P}$ — не замкнуто $\Rightarrow \mathrm{P}$ — не полное.

$$\overline{\mathrm{P}} = C[a,b]$$

**Теорема 4.1** (Вейерштрасса, 1885). $f \in C[a,b], \forall \varepsilon > 0 \, \exists \, p \in \mathrm{P}$ т.ч. $||f-p|| < \varepsilon$ (любую функцию на отрезке можно приблизить многочленами)

$$p_n \underset{G}{\rightrightarrows} f \Rightarrow f \text{ аналитическая в } G$$

## 4.1. Пополнение метрического пространства

Несколько простых свойств метрики, и все следуют из неравенства треугольника

**Теорема 4.2** (Свойства метрики). $(X, \rho)$ — метрическое

1. $x, y, z, u \in X \quad \Rightarrow |\rho(x, u) - \rho(y, z)| \leq \rho(x, y) + \rho(u, z)$
2. $\rho : X \times X \to \mathbb{R} \Rightarrow \rho(x, y)$ — непрерывная функция
3. $A \subset X, A$ — подмножество, $\rho(x, A) = \inf_{y \in A} \rho(x, y) \Rightarrow \rho(x, A)$ — непрерывная функция от $x$
4. $A \subset X, A = \overline{A}, x_0 \notin A \Rightarrow \rho(x_0, A) > 0$

*Доказательство.* 1. $\rho(x, u) \leq \rho(x, y) + \rho(y, u) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) + \rho(z, u) \Rightarrow \rho(x, u) - \rho(y, z) \leq \rho(x, y) + \rho(z, u)$ Аналогично $\rho(y, z) - \rho(x, u) \leq \ldots$ из всего $\Rightarrow 1)$

2. Докажем непрерывность с помощью последовательности.
   $\rho(x, y)$ — непрерывная?

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \lim_{n\to\infty} y_n = y \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0 = \lim_{n\to\infty} \rho(y_n, y)$$

   $\rho(x, y) - \rho(x_n, y_n)| \overset{(1)}{\leq} \rho(x, x_n) + \rho(y, y_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = \rho(x, y)$

3. $A \subset X$, $x, z \in X$, $|\rho(x, A) - \rho(z, A)| \leq ?$
   Пусть $y \in A$

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) \Rightarrow \rho(x, A) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) \, \forall \, y \in A$$
$$\Rightarrow \rho(x, A) \leq \rho(x, z) + \inf_{y \in A} \rho(z, y) = \rho(x, z) + \rho(z, A) \Rightarrow$$
$$\rho(x, A) - \rho(z, A) \leq \rho(x, z)$$

   Но нам нужен модуль. Можем сказать, что $x$ и $z$ ничем не отличаются, аналогично $\rho(z, A) - \rho(x, A) \leq \rho(x, z) \Rightarrow 3$

4. 
$$x_0 \notin A \Rightarrow x_0 \in X \setminus A \text{ открытое}$$

$$\Rightarrow \exists\, \delta > 0 \quad B_\delta(x_0) \subset X \setminus A \Rightarrow \rho(x_0, A) \geq \delta$$

□

Перед определением пополнения нам потребуется несколько определений, связанных с отображениями в метрических пространствах.

$(X, \rho), (Y, d)$ — метрические простарнства. $T : X \to Y$.

**Определение 4.2** (Изометрическое вложение)**.**

$$d(T_x, T_z) = \rho(x, z) \quad \forall\, x, z \in X$$

Обозначение: $X \hookrightarrow Y$

**Определение 4.3** (Изометрия)**.** $T$ — изометрическое вложение, $T(X) = Y$

**Определение 4.4** (Изометричность пространств)**.** $(X, \rho), (Y, d)$ изометричны, если $\exists\, T : X \to Y, T$ — изометрия

**Свойство 4.1.** $T$ — изометрическое вложение $\Rightarrow T$ — инъективное, непрерывное

*Доказательство.* $x, z \in X, T : X \to Y$, пусть $T_x = T_z \Rightarrow d(T_x, T_z) = 0$ Значит, исходное расстояние тоже 0 по свойству метрики. $d(x, z) = 0 \Rightarrow x = z$

Инъективность проверили, теперь непрерывность, это еще проще.

$$\lim_{n\to\infty} = x \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \rho(x, x_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} d(T_{X_n}, T_x) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} T_{X_n} = T_x$$

□

**Свойство 4.2.** Если $T$ — изометрия, то $\exists\, T^{-1}$ — изометрия.

**Свойство 4.3.** «Изометричность» — отношение эквивалентности на множестве метрических пространств

И наконец

**Определение 4.5** (Пополнение м. пространства). $(X, \rho)$ — метрическое пространство. $(Z, d)$ — полное метрическое пространство. $(Z, d)$ — пополнение $(X, \rho)$, если существует $T : X \to Z$

1. $T$ — изометрическое вложение
2. $\overline{T(X)} = Z$

**Замечание 4.1.** Не обязательно искать пространство, удовлетворяющее и второму свойству. Достаточно найти такое, которое удовлетворяет первому. $(X, \rho)$ — метрическое пространство, $(U, d)$ — полное метрическое пространство. Пусть $\exists T : X \to U$ — изометрическое вложение. Если 2 свойство не выполняется, то легко такое $Z$ построить. Возьмём замыкание образа. $Z = \overline{T(X)} \Rightarrow (Z, d)$ — пополнение X.

Теперь обещанная теорема. Возьмём любое метрическое пространство и покажем, что у него есть пополнение.

**Теорема 4.3** (О пополнении метрического пространства). $(X, \rho)$ — метрическое $\Rightarrow \exists$ пополнение $(Z, d)$

*Доказательство.* Есть классическое доказательство с рассмотрением всех фундаметнальных последовательностей, рассмотрением фактор-пространства, муторным разбором случаев. Мы пойдем другим путём. Будет короткое, но **фантастически** непонятное доказательство в том смысле, что непонятно, как его придумать.
Мы собираемся использовать $m(X) = \{f : X \to \mathbb{R}, \sup_{x \in X} |f(x)| < +\infty\}$

$$||f||_{m(X)} = ||f||_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

$m(X)$ — полное пространство.
Каждой точке мы сопоставим функцию. Вот такая идея! $\varphi : X \to m(X)$. Оно же будет изометрическим вложением, то есть будет сохранять расстояния.
Сначала будет маленькое облегчающее предположение про $X$, от которого мы потом откажемся. Пусть $X$ — ограниченное, то есть $\exists\, M > 0$ т.ч. $\forall x, y \in X\ \rho(x, y) \le M$. Единственная цель предположения — формула для $\varphi$ будет чуть проще. Вообще, можно было бы обойтись и без него.
$t \in X, t$ — фиксирован, $f_t(x) = \rho(x, t)$. При фиксированном $t$ — это

функция на $X$. Именно сюда наше отображение будет отображать $t$. Одной точке — целая функция, понятно?

$$\varphi(t) := f_t(x) \text{ т.е. } \varphi : t \to f_t(x)$$
$$|f_t(x)| \le M \Rightarrow f_t \in m(X)$$

Самое главное. Проверим, что отображение сохраняет расстояния. Это очень легко. Возьмём 2 точки.

$$\text{Пусть } t, s \in X, \quad ||f_t - f_s||_\infty = \sup_{x \in X} |\rho(x, y) - \rho(x, s)|$$
$$|\rho(x, t) - \rho(x, s)| \le \rho(t, s), \text{ Пусть } x = t \Rightarrow |\rho(t, t) - \rho(t, s)| = \rho(t, s)$$
$$\Rightarrow ||\varphi(t) - \varphi(s)||_\infty = \rho(t, s) \Rightarrow \varphi \text{ — изометрическое вложение}$$

Посмотрим, что будет, если откажемся от этого облегчающего предположения. Надо будет чуть исправить отображение $\varphi$. $X$ — любое метрическое пространство. $a \in X$ — фиксированная точка.
$t \in X, f_t(x) = \rho(x, t) - \rho(x, a) \Rightarrow |f_t(x)| \le \rho(a, t) \Rightarrow f_t \in m(X)$

Раньше мы могли так брать и не вылетать из пространства из-за ограниченности. Вычтем эту штуку, чтоыб попасть, куда надо.

$$t, s \in X \Rightarrow f_t(x) - f_s(x) = \rho(x, t) - \rho(x, s) \overset{(1)}{\Rightarrow} ||f_t - f_s||_\infty = \rho(s, t)$$

Пополнение $X$: $\overline{\varphi(X)}^{||\cdot||_\infty} = Z, (Z, ||\cdot||_\infty)$ □

Таким образом, изучение метрических пространств можно свести к изучению подмножества пространства непрерывных функций.

**Замечание 4.2.** Забегая далеко вперёд. $(X, ||\cdot||)$ — нормированное, $X^*$ — множество непрерывных линейных функционалов на $X$, $X^*$ — полное (ВСЕГДА).

Мы построим каноническое вложение $\pi : X \to \underbrace{(X^*)^*}_{\text{полное}}$, $\overline{\varphi(x)}^{X^{**}}$ — пополнение X.

## 4.2. Теорема о вложенных шарах

Когда-то в анализе была теорема Кантора о том, что если есть последовательность вложенных друг в друга отрезков, то их пересечение не пусто. Мы докажем похожее утверждение для метрических пространств. Оказывается, то утверждение было связано с полнотой вещественной прямой $\mathbb{R}$. $(X, \rho)$ — метрическое пространство,

$r > 0, x \in X$
Введём стандартное обозначение замкнутого шара.

$$D_r(x) = \{y \in X : \rho(x, y) \leq r\}$$

**Теорема 4.4** (О вложенных шарах)**.** $(X, \rho)$ — метрическое пространство. $X$ — полное ($| \Leftrightarrow$ $(\forall \{D_n\}_{n=1}^{\infty}, D_n = D_{r_n}(x_n))$, $D_{n+1} \subset D_n, \lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0 \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{+\infty} D_n \neq \varnothing)$. По сранению с теоремой Кантора у нас есть дополнительное предположение о стремлении к нулю, которое здесь важно, а на прямой было как данность.

*Доказательство.* $\Rightarrow$ $X$ — полное

$$\{D_n\}_{n=1}^{\infty}, D_n = D_{r_n}(x_n), D_{n+1} \subset D_n, \lim_{n\to\infty} r_n = 0$$

Надо проверить, что центры шаров образуют фундаментальную последовательность, то есть что $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальная.
Пусть $\varepsilon > 0 \quad \exists\ N \in \mathbb{N} \quad r_n < \varepsilon$ при $n \geq N$.

$$(n > N\ \wedge\ m > N) \Rightarrow (x_n \in D_n\ \wedge\ x_m \in D_n) \Rightarrow \rho(x_n, x_m) \leq \\ \leq \rho(x_n, x_N) + \rho(x_m, x_N) \leq 2\varepsilon$$

$$X \text{ — полное } \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} x_n = x$$

$$\text{любое фиксированное } m \in \mathbb{N} \quad x_n \in D_m\, \forall\, n \geq m, D_m \text{ — замкнутое}$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty, n\geq m} x_n = x \in D_m$$
$$\Rightarrow x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} D_m$$

$\Leftarrow$
Ничего кроме определения для доказательства полноты у нас нет. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальная. Возьмём достаточно быстро убывающую последовательность $\varepsilon_k = \frac{1}{2^k}$. Существует $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}, \rho(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < \frac{1}{2^{k+1}}$.
$D_k = D_{\varepsilon_k}(x_{n_k})$

$$\begin{cases} y \in D_{k+1} \Rightarrow \rho(y, x_{n_{k+1}}) \leq \frac{1}{2^{k+1}} \\ \rho(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < \frac{1}{2^{k+1}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\rho(y, x_{n_k}) \leq \rho(y, x_{n_{k+1}}) + \rho(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) < \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^k}$$
$$\Rightarrow y \in D_k \Rightarrow D_{k+1} \subset D_k$$

Мы взяли произвольный элемент из $D_{k+1}$ и показали, что он принадлежит $D_k$, то есть показали вложенность элементов последовательности.

$$\Rightarrow \exists\, x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} D_k \quad \rho(x, x_{n_k}) \leq \frac{1}{2^k} \Rightarrow \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$$

По свойству фундаметнальных последовательностей из первой лекции $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ □

**Замечание 4.3.** В условиях теоремы пересечение вложенных шаров $\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$ состоит из одной точки.

*Доказательство.* Пусть $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n, \Rightarrow \rho(x, x_n) \in r_n, \lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. А мы знаем, что предел в метрическом пространстве единственный. □

**Замечание 4.4.** Условие, что $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$ в теореме существенно.

**Пример 4.1** (Замкнутые множества). $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}, F_n$ — замкнутое, $F_{n+1} \subset F_n, F_n \subset \mathbb{R}, \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \varnothing, F_n = [n, +\infty)$

**Пример 4.2** (По теореме).

$$X[1. +\infty) \quad \rho(x,y) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{x+y}, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

Проверим, что $\rho$ — метрика. $x, y, z$

$$\rho(x,y) + \rho(y,z) = 1 + \frac{1}{x+y} + 1 + \frac{1}{y+z} > 1 + 1 > 1 + \frac{1}{x+z} = \rho(x,z)$$

Проверяем полноту. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальная, $\varepsilon = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$$\exists\ N \in \mathbb{N} : (n \geq N\ \wedge\ m \geq N) \rho(x_n, x_m) < \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\rho(x_n, x_N) < \frac{1}{2}\ \wedge\ \rho(x_m, x_N) < \frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$x_N = x_{N+1} = x_{N+2} = \ldots$$
$$\Rightarrow\ \exists\ \lim_{n\to\infty} x_n = X_N \Rightarrow (X, \rho) \text{ — полное}$$

Полноту проверили.
$r_n = 1 + \frac{1}{2n}, x_n = n; D_n = D_{r_n}(n), h \in D_n$. Пусть $x \neq n, x \in D_n \Rightarrow \rho(x, x_n) = 1 + \frac{1}{x+n} \leq 1 + \frac{1}{2n}$

**Замечание 4.5** (Домашнее задание). Если $(X, ||\cdot||)$ — банахово, то $D_{n+1} \subset D_n \{D_n\}_{n=1}^{\infty} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n \neq \varnothing$ (требование $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$ лишнее)

## 4.3. Сепарабельные пространства

$(X, \rho)$ — метрическое пространство,

**Определение 4.6** ($A$ плотно в $C$). $A \subset X, C \subset X$. $A$ плотно в $C$, если $C \subset \overline{A} \Leftrightarrow$

$$\forall\, x \in C\, \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, a \in A\, \rho(x, A) < \varepsilon \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\, C \subset \bigcup_{a \in A} B_\varepsilon(a)$$

Любой элемент $C$ можно сколь угодно хорошо приблизить элементами из $A$.

**Определение 4.7** ($A$ всюду плотно в $C$). $A$ — всюду плотно в $X$, если $\overline{A} = X$

Чем же полезно это свойство? Если хотят доказать свойство для $X$, то часто доказывают сначала для всюду плотного подмножества.

**Определение 4.8** (Сепарабельное пространство). $(X, \rho)$ — **сепарабельное**, если $\exists\, E \subset X, E = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \overline{E} = X$

**Теорема 4.5.** $n \in \mathbb{N}, q \leq p \leq +\infty$,

$$l_n^p \text{ — сепарабельное}$$

*Доказательство.*

$$l_n^p = (\mathbb{R}^n, ||\cdot||_p) = \{x = (x_1, \ldots, x_n), x_j \in \mathbb{R}, ||x||_p\}$$
$$E = \mathbb{Q}^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n), x_j \in \mathbb{Q}\}$$

Если $(\mathbb{C}^n, ||\cdot||_p), \tilde{\mathbb{Q}} = \{x + iy,\, x, y \in \mathbb{Q}\}, E = \tilde{\mathbb{Q}}^n$ □

**Теорема 4.6.** $F$ — финитные последовательности, $1 \leq p \leq +\infty$

$$(F, ||\cdot||_p) \text{ — сепарабельно}$$

*Доказательство.* $E = \bigcup_{n=1}^{\infty}$, $\mathbb{Q}^n = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_{N(x)}, 0, 0, \ldots, ), x_j \in \mathbb{Q}\}$. Попросту говоря, все финитные последовательности, координаты которых рациональны. □

**Теорема 4.7.** $l^p, 1 \leq p < +\infty, C_0$ — сепарабельные

*Доказательство.* На прошлой лекции мы доказали, что

$$(F, ||\cdot||_p), \overline{F}^{||\cdot||_p} = l^p \text{ при } 1 \leq p < +\infty$$

$$\begin{cases} E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}^n \text{ — всюду плотно в } F \\ F \text{ — всюду плотное в } l^p \end{cases} \Rightarrow$$

$$E \text{ всюду плотно в } l^p, 1 \leq p < +\infty$$

Почему любой элемент из $l^p$ может быть приближен финитной последовательностью? Мы ее просто отрезаем. □

Ответ на упражнение для читателя, которое было на прошлой лекции: $F$ — подпространство в алгебраическом смысле, $F \subset l^{\infty}$, $\overline{F}^{||\cdot||_{\infty}} = C_0$

$$x_0 \in C_0 \Leftrightarrow x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

берем первые $m$ координат и дополняем их нулями

$$x^{(m)} = (x_1, \ldots, x_m, 0, 0, \ldots, 0, \ldots) \Rightarrow x^{(m)} \in F$$

$$||x - x^{(m)}||_{\infty} = \sup_{k>m} |x_k| \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Остаётся вопрос, почему $C_0$ — замкнутое множество. Можно в лоб, а можно по-учёному рассудить.

$$\text{пусть } \{y^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}, y^{(m)} \in C_0,\ y^{(m)} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} y \text{ в } C_0$$

$$\Rightarrow \lim_{m\to\infty} ||y - y^{(m)}||_{\infty} = 0 \qquad y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}, \lim_{n\to\infty} y_n = 0 \text{ ???}$$

А это равномерная сходимость на множестве натуральных чисел, то есть это тот случай, когда можно менять местами пределы.

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{m\to\infty} \underbrace{\lim_{n\to\infty} y_n^{(m)}}_{=0} = 0$$

Упражнение: $C$ — сепарабельное, $C \subset l^{\infty}$

**Теорема 4.8.** $l^\infty$ — не сепарабельное

Какой бы шарик из $X$ мы бы не предъявили, там всегда будет элемент всюду плотного множества.

*Доказательство.*

$$A \subset \mathbb{N} \quad X_n^A = \begin{cases} 1, n \in A \\ 0, n \notin A \end{cases}$$

Мощность $\{A, A \subset \mathbb{N}\}$ — континуум ($>$ счётное). Это и будет центр пересекающихся шариков. Посмотрим, каким будет расстояние между двумя разными точками.

$$A \subset \mathbb{N}, C \subset \mathbb{N}, A \notin \mathbb{C}$$

$$X_n^A - X_n^c = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases} \Rightarrow ||x^A - x^C||_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |X_n^A -_n^C| = 1$$

То есть если 2 множества не равны, то расстояние между ними — единица.

$$B_{\frac{1}{2}}(x^A) \cap B_{\frac{1}{2}}(x^C) = \varnothing$$

Мы предъявили несчётный набор дизъюнктных шариков. $E$ — всюду плотно в $l^\infty \Rightarrow \forall\, A \subset \mathbb{N} \,\exists\, e_A \in B_{\frac{1}{2}}(x^A)$

$$A \neq C \Rightarrow e_A \neq e_C, \qquad \underbrace{\{e_A\}_{a \subset \mathbb{N}}}_{\text{несчётно}} \subset E \Rightarrow E \text{ несчётно}$$

То, что у всех шариков одинаковый радиус — это просто приятный бонус. □

**Теорема 4.9.** $(X, \rho)$ — сепарабельное, $Y \subset X \Rightarrow (Y, \rho)$ — сепарабельное.

*Доказательство.* $\exists\ E = \{x_n\}_{n=1}^\infty$ — всюду плотно в $X$, $x_0 \in X$

$$\rho(x_n, Y) = \inf_{y \in Y} \rho(x_n, y) \Rightarrow$$

$$\exists\ \{y_{n,k}\}_{k=1}^\infty \quad \lim_{k \to \infty} \rho(x_n, y_{n,k}) = \rho(x_n, Y)$$

$$y_{n,k} \in Y,\ F = \{y_{n_k}\}_{n,k} \text{ — счётное },F \subset Y$$

Проверим, что $F$ — всюду плотно в $Y$. Пусть $y \in Y, \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\, x_n$ : $\rho(y, x_n) < \varepsilon$. Из этого неравенства мы делаем вывод, что $\rho(x_n, Y) < \varepsilon$. Значит, $\exists\, k : \rho(x_n, y_{n,k}) < \varepsilon \Rightarrow$

$$\rho(y, y_{n,k}) \leq \rho(y, x_n) + \rho(x_n, y_{n,k}) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

□

**Следствие 4.1.** $X$ — бесконечное множество $\Rightarrow m(X)$ — не сепарабельное.

*Доказательство.* Можно слово в слово повторить доказательство для $l^\infty$, но мы воспользуемся последними доказанными теоремами.

$$\exists\, \{a_j\}_{j=1}^\infty, a_j \in X, a_j \neq a_i \text{ при } i \neq j$$

$$Y = \{f \in m(X), f(x) = 0 \text{ если } x \neq a_j\} \sup_{j \in \mathbb{N}} |f(a_j)| < +\infty$$

$$Y \text{ изометрично } l^\infty, f \in Y, T(f) = \{f(a_j)\}_{j=1}^\infty \in l^\infty$$

$$Y \text{ — не сепарабельно } \Rightarrow \text{ и по последней теореме}$$

$$m(X) \text{ — не сепарабельно}$$

□

**Теорема 4.10.**

$$C[a, b] \text{ — сепарабельно}$$

*1 часть.*

$$L = \{ \text{ ломаные } \} \quad a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b \quad \{y_k\}_{k=0}^n, y_k \in \mathbb{R}$$

$$L(x) \text{ — ломаные}$$

$$L(x_k) = y_k,\ k = 0, 1, \ldots, n \quad l(x) \text{ линейная на } [x_k, x_{k+1}]$$

Отметим, что $L$ — всюду плотное множество в пространстве непрерывных функций. Это связано с равномерной непрерывностью. Никаких надежд на то, что оно будёт счётным нет.

$$\text{пусть } f \in C[a, b],\ \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\, \delta > 0 : |x - y| < \delta$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

$$\exists\, \{x_k\}_{k=0}^n \text{ — разбиение } \quad x_{k+1} - x_k < \delta$$

$$y_k := f(x_k) \quad L(x) \text{ — ломаная}$$

$$\Rightarrow |f(x) - L(x)| < \varepsilon \Rightarrow ||f - L||_\infty \leq \varepsilon \Rightarrow \overline{\mathcal{L}} = C[a, b]$$

как сделать так, чтобы множество ломаных было счётным? возьмём в качестве вершин элементы $\mathbb{Q}$

$$E = \{L \in \mathcal{L},\, x_k, y_k \in \mathbb{Q}\} \text{ — счетное множество}$$

$$\begin{cases} \mathcal{L} \subset \overline{E} \\ \overline{\mathcal{L}} = C[a,b] \end{cases} \Rightarrow E \text{ — всюду плотно, т.е. } \overline{E} = C[a,b]$$

□

*2 часть.* по т. Вейерштрасса замыкание многочленов — тоже пространство непрерывных функций.

$$\mathrm{P} = \{p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k\} \quad \overline{\mathrm{P}} - C[a,b]$$

$$E = \{p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,\, a_k \in \mathbb{Q}\}$$

$$\begin{cases} \mathrm{P} \subset \overline{E} \\ \overline{\mathrm{P}} = C[a,b] \end{cases} \Rightarrow \overline{E} = C[a,b]$$

□

## 4.4. Нигде не плотные множества

**Определение 4.9.** $(X, \rho)$ — метрическое пространство. $A \subset X, A$ — **нигде не плотно** в $X$, если

$$\forall\, B_r(x) \text{ при } r > 0, x \in X \quad B_r(x) \not\subset \overline{A} \Leftrightarrow \mathrm{Int}(\overline{A}) = \varnothing \Leftrightarrow$$

Если мы рассмотрим замыкание, никакого шарика там не будет. Иначе: если мы рассмотрим внутренность замыкания, она будет пустой.

$$\forall\, r > 0, x \in X \quad B_r(x) \,\exists\, B_{r_1}(x_1) \subset B_r(x), B_{r_1}(x_1) \cap A = \varnothing$$
$$\Leftrightarrow \forall\, r > 0, x \in X D_r(x) \,\exists\, D_{r_1}(x_1) \subset D_r(X), D_{r_1}(x_1) \cap A = \varnothing$$

Скоро докажем связь между нигде не плотными множествами и полными пространствами. Но сперва определение, которое не будет часто встречаться, но сам факт — полезный.

**Определение 4.10** (множество первой категории)**.** $M \subset X, (X,\rho)$. $M$ — **множество первой категории**, если

$$M = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j, E_j \text{ нигде не плотно в } X$$

$M$ — **множество второй категории**, если $M$ нельзя представить в виде объединения счетного числа нигде не плотных множеств.

**Теорема 4.11** (Бэр, о категориях)**.** $(X,\rho)$ — полное $\Rightarrow X$ — множество второй категории.

*Доказательство.* Можно было бы даже от противного. Но мы возьмём семейство $\{M_j\}_{j=1}^{\infty}$, $M_j$ — нигде не плотно в $X$, $E - \bigcup_{j=1}^{\infty} M_j$. Мы докажем, что найдётся хоть одна точка, которая принадлежит $X$ и не принадлежит $E$. Это и будет обозначать, что $X$ невозможно представить в виде такого объединения.

$$x_0 \in X \quad D_0 = \{y : \rho(x_0, y) \le 1\}$$
$$M_1 \text{ — нигде не плотно } \Rightarrow \exists\, D_1 = D_{r_1}(x_1) \subset D_0, D_1 \cap M_1 = \varnothing$$
$$r_1 < 1$$

Теперь мы то же соображение применим к множеству $M_2$, которое тоже нигде не плотно

$$\exists\, D_2 = D_{r_2}(x_2) \subset D_1, D_2 \cap M_2 = \varnothing$$
$$r_2 < \frac{1}{2}$$

и так далее $\begin{cases} \{D_n\}_{n=1}^{\infty}, D_n = D_{r_n}(x_n), D_{n+1} \subset D_n \\ D_n \cap M_n = \varnothing, r_n < \frac{1}{n} \end{cases}$ по теореме о вложенных шарах $\Rightarrow \exists\, x \in \cap_{n=1}^{\infty} D_n, (x \in D_n \wedge x \in X \setminus E) \Rightarrow x \notin M_n \forall\, n \Rightarrow x \notin E$ □

## 4.5. Полные семейства элементов

Теперь мы будем понимать полноту в совершенно другом смысле. Сначала вспомним, что такое линейная оболочка пространства.

**Определение 4.11** (Линейная оболочка). $X$ — линейное пространство над $\mathbb{R}(\mathbb{C})$. Рассмотрим семейство $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — семейство элементов, $x_\alpha \in X$.

$$\mathcal{L}\{x_\alpha\}_{\alpha\in A} = \left\{ \sum_{k=1}^{n} c_k x_{\alpha_k}, c_k \in \mathbb{R}(\mathbb{C}), n \in \mathbb{N} \right\}$$

**Определение 4.12** (Полное семейство). $(X, ||\cdot||)$, $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — **полное семейство**, если $\overline{\mathcal{L}\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}} = X$. То есть линейная оболочка всюду плотна в $X$.

**Пример 4.3.** $C[a,b]$, $\{x^n\}_{n=0}^{+\infty}$ — полное семейство в $C[a,b]$, так как $\mathrm{P} = \mathcal{L}\{x^n\}_{n=0}^{+\infty}$, $\overline{\mathrm{P}} = C[a,b]$

**Пример 4.4.** $l^p$, $1 \le p < +\infty$, $C_0$

$$e_n = (1, 0, 0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{n}, 0, \ldots), \{e_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ — полное семейство}$$

$$\mathcal{L}\{e_n\}_{n=1}^{\infty} = F \text{ — финитная последовательность}$$

Упражнение: $C$ — что полное семейство? 03.10.23

**Утверждение 4.1.** $(X, ||\cdot||)$ - нормированное пространство. В нём существует $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — полное семейство

$$X \text{ — сепарабельное}$$

*Доказательство.* Рассмотрим линейную оболочку $L = \mathcal{L}\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{x = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, c_j \in \mathbb{R}(\mathbb{C})\}$. $\overline{L} = X$.

$$E = \{x = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, c_j \in \mathbb{Q}\} \text{ — счётное всюду плотное}$$

$$(L \subset \overline{E} \wedge \overline{L} = X) \Rightarrow \overline{E} = X$$

$\square$

**Замечание 4.6.** $l^\infty, E = \{x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in \mathbb{Q}, \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < +\infty\}$. $\overline{E} = l^\infty$, $E$ — не счётное.

## 4.6. Полные и плотные множества в $L^p$

Сначала небольшое замечание. $(X, U, \mu)$ — пространство с мерой $e \in U$ — измеримые множества, $\chi_e(x) = \begin{cases} 1, x \in E \\ 0, x \notin E \end{cases}$ — характеристическая функция. $\chi \in L^\infty(X, \mu)$, $\forall\, e \in U$

$$\chi_e \in L^p(X, \mu) \text{ при } 1 \leq p < +\infty \Leftrightarrow \int_X (\chi_e(x))^p d\mu < +\infty \Leftrightarrow \mu e < +\infty$$

**Теорема 4.12.** $(X, U, \mu)$ — пространство с мерой $\Rightarrow$

$$\{\chi_e\}_{e \in U} \text{ — полное семейство в } L^\infty(X, \mu)$$
$$\{\chi_e\}_{e \in U, \mu E < +\infty} \text{ — полное семйество в } L^p(X, \mu), 1 \leq p < +\infty$$

Для доказательства этой теоремы нужно будет вспомнить теорему Лебега из анализа (она у нас уже была).

**Теорема 4.13** (Лебег). $\{h_n(x)\}_{n=1}^\infty$ — измеримые, $\varphi(x)$. $\int_X \varphi(x) d\mu < +\infty, |h_n(x)| \leq \varphi(x)$ п.в. на $X$

$$h_n(x) \underset{n\to\infty \text{ п.в. по } \mu}{\longrightarrow} h(x) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_X h_n(x) d\mu = \int_X h(x) d\mu$$

*Доказательство.* Вспомним конструкцию, которая была в математическом анализе. $f$ — измеримая, $f(x) \geq 0, x \in X$. Рассмотрим разбиение множества $X$, а по нему построим соотвествующую простую функцию

$$n \in \mathbb{N} \quad e_k = \{x \in X : \frac{k}{n} \leq f(x) < \frac{k+1}{n}\}, k = 0, 1, \ldots, n^2 - 1$$

$$e_{n^2} - \{x : f(x) \geq n\} \Rightarrow X = \bigcup_{k=0}^{n^2} e_k, e_k \cap e_j = \varnothing (k \neq j)$$

Теперь построим измеримые функции, потом они будут простыми.

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{k}{n} \chi_{e_k} \quad 0 \leq g_n(x) \leq f(x), x \in X$$

$f(x) \leq g_n(x) + \frac{1}{n}, x \in \bigcup_{k=0}^{n^2-1} e_k$

Теперь все готово, чтобы обсудить случай $L^\infty$. Пусть $f \in L^\infty(X,\mu) \Rightarrow n \geq ||f||_\infty \Rightarrow \mu(e_{n^2}) = 0. \Rightarrow |f(x) - g_n(x)| \leq \frac{1}{n}$ для п.в. $x \in X$
$\Rightarrow ||f - g_n||_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, g_n \in \mathcal{L}\{\chi_e\}_{e\in U}$
$\Rightarrow f \in \overline{\mathcal{L}\{\chi_e\}_{e\in U}}$
Посмотрим теперь, что происходит с конечными $p$. Тут вспоминаем теорему Лебега, она была верна для интеграла Лебега, но верна и для произвольной меры.

$$\begin{cases} f(x) \in L^p(X,\mu), 1 \leq p < +\infty \quad |f(x) - g_n(x)|^p \leq |f(x)|^p \\ g_n(x) \underset{\text{п.в.}}{f(x)} \quad \Rightarrow |f(x) - g_n(x)|^p \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{cases} \overset{\text{Лебег}}{\Rightarrow}$$

все, что надо — убедиться, что мера конечная $\lim\limits_{n\to\infty} \left( \int_X |f - g_n|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = 0$

$$f \in L^p \Rightarrow \mu e_k < +\infty \quad f(x) \geq \frac{k}{n}, x \in e_k \Rightarrow \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \geq \left( \int_{e_k} \left(\frac{k}{n}\right)^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} =$$
$$\frac{k}{n}(\mu e_k)^{\frac{1}{p}} \Rightarrow \mu e_k < +\infty$$
$$\Rightarrow f \in \overline{\mathcal{L}\{\chi_e\}_{e\in U, \mu e < +\infty}}$$

Теперь покажем, что для произвольных $f$ рассуждение тоже верно. Рассмотрим замыкание линейное оболчоки

$$\begin{cases} f : X \to \mathbb{R}, \Rightarrow f = f_+ - f_-, f_+(x) \geq 0, f_-(x) \geq 0 \\ f : X \to \mathbb{C} \Rightarrow f = u + iv; u, v : X \to \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow$$
$$\forall f \in L^p, f \in \overline{\mathcal{L}\{\chi_e\}_{e\in U}}$$
$$(p = \infty \,\forall\, e, p < +\infty, \mu e < +\infty)$$

$\square$

Теперь, зная эту теорему, посмотрим, какое множество будет полным в пространстве $l^\infty$

**Следствие 4.2.** $l^\infty, A \subset \mathbb{N}$, $X^A = \{x_n^A\}_{n=1}^\infty, X_n^A = \begin{cases} 1, n \in A \\ 0, n \notin A \end{cases} \Rightarrow$

$$\{X^A\}_{A\subset\mathbb{N}} \text{ — полное семейство в } l^\infty$$

*Доказательство.* $l^\infty = L^\infty(\mathbb{N}, \mu), \mu(n) = 1 \, \forall \, n \in \mathbb{N} \quad \forall \, A \subset \mathbb{N}, A$ — измеримо

$$\chi_A = X^A \Rightarrow \{X^A\}_{A \subset \mathbb{N}} \text{ — полное семейство}$$

□

**Теорема 4.14.** $(\mathbb{R}^n, U, \lambda)$, $\lambda$ — классическая мера Лебега. $U$ — измеримые по Лебегу множества.

$$\mathcal{R} = \left\{ \Delta = \prod_{j=1}^{n} [a_j, b_j), a_j < b_j; a_j, b_j \in \mathbb{R} \right\} \text{ — множество ячеек}$$

$$\Rightarrow \{\chi_\Delta\}_{\Delta \in \mathcal{R}} \text{ — полное семейство в } L^p(\mathbb{R}^n, \lambda), 1 \le p < +\infty$$

Достаточно рассмотреть характеристические множества ячеек.

*Доказательство.* Собираемся приблизить множество линейной комбинацией характеристических функций ячеек. Вспомним определение внешней меры.

$$e \in U, \lambda(e) < +\infty$$

$$\lambda(e) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(\Delta_k), e \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k, \Delta_k \in \mathcal{R}, \Delta_k \cap \Delta_j = \varnothing \right\}$$

Сначала просто по определению нижней грани. $\forall \, \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \, \{\Delta_k\}_{k=1}^n$.
$\lambda(e) \le \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(\Delta_k) < \lambda(e) + \varepsilon$.
$e \subset \cup_{k=1}^{\infty} \Delta_k, \Delta_k \in \mathcal{R}, \Delta_k \cap \Delta_j = \varnothing$ при $k \ne j$.

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k, e \subset A, \lambda(A \setminus e) < \varepsilon$$

$$\exists \, N \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=N+1}^{\infty} \lambda(\Delta_k) < \varepsilon, B = \bigcup_{k=1}^{n} \Delta_k$$

$$\Rightarrow \lambda(A \setminus B) < \varepsilon$$

$$||\chi_e - \chi_b||_p \le ||\chi_e - \chi||_p - ||\chi_A - \chi_B||_p \le$$

$$\left( \int_{A \setminus e} \mathbb{1} d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_{A \setminus B} \mathbb{1} d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon^{\frac{1}{p}} + \varepsilon^{\frac{1}{p}} = 2\varepsilon^{\frac{1}{p}}$$

$$\chi_b = \sum_{k=1}^{N} \chi_{\Delta_k} \in \mathcal{L}\{\chi_\Delta\}_{\Delta\in\mathcal{R}}$$

$$\begin{cases} \overline{\mathcal{L}\{\chi_e\}_{e\in U}} = L^p \\ \chi_e \in \overline{\mathcal{L}\{\chi_\Delta\}_{\Delta\in\mathcal{R}}} \end{cases} \Rightarrow \overline{\mathcal{L}\{\chi_\Delta\}_{\Delta\in\mathcal{R}}} = L^p, 1 \le p < +\infty$$

□

**Следствие 4.3.** $E \subset \mathbb{R}^n$, $E$ — измеримые по Лебегу, $1 \le p < +\infty$

$$\Rightarrow L^p(E, \lambda) \text{ — сепарабельные}$$

($\lambda$ — мера лебега)

*Доказательство.* Докажем, что $L^p(\mathbb{R}^n, \lambda)$ — сепарабельное.

$$\mathcal{R} = \left\{ \Delta = \prod_{j=1}^{n} [a_j, b_j), a_j < b_j,\ a_j, b_j \in \mathbb{R} \right\} \text{ — полные семейства в } L^p$$

Теперь мы возьмём только такие ячейки, полуинтервалы которых мы перемножаем, имеют рациональные концы. Пока что можем сказать, что это счётное множество.

$$R_0 = \left\{ \Delta = \prod_{j=1}^{n} [a_j, b_j), a_j < b_j,\ a_j, b_j \in \mathbb{Q} \right\} \text{ — счётное множество}$$

$$\Delta \in \mathcal{R} \quad 0$$

$$\Rightarrow \exists\, \Delta_0 \in R_0, \Delta \subset \Delta_0, \lambda(\Delta_0 \setminus \Delta) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow ||\chi_{\Delta_0} - \chi_\Delta||_p = ||\chi_{\Delta_0\setminus\Delta}||_p = \left( \int_{\Delta_0\setminus\Delta} \mathbb{1} dx \right)^{\frac{1}{p}} = (\lambda(\Delta_0 \setminus \Delta))^{\frac{1}{p}} < \varepsilon^{\frac{1}{p}}$$

$$\Rightarrow \forall\, \Delta \in \mathcal{R}\, \chi_\Delta \in \overline{\mathcal{L}\{\chi_\Delta\}_{\Delta\in R_0}}$$

$R_0$ — полное счётное семейство $\overset{\text{утверждение}}{\Rightarrow}$ $L^p(\mathbb{R}^n, \lambda)$ — сепарабельное.

$$E \subset \mathbb{R}^n, E \text{ — измеримое }, f \in L^p(E, \lambda)$$

$$\text{пусть } f(x) = 0, x \in \mathbb{R}^n \setminus E \Rightarrow f \in L^p(\mathbb{R}^n, \lambda)$$

$$\Rightarrow L^p(E, \lambda) \text{ — подпространство } L^p(\mathbb{R}^n, \lambda) \Rightarrow L^p(E, \lambda) \text{ — сепарабельно}$$

□

**Определение 4.13.** $(X, U, \mu)$ — пространство с мерой. $(X, \rho)$ — метрическое пространство. $\mu$ — **борелевская мера**, если ($G$ — открытое $\Rightarrow G \in U$)

$\beta$ — минимальная $\sigma$-алгебра, содержащая все открытые множества. $\beta$ — **борелевские множества**, то есть $\beta \subset U$.

Чем же хороши борелевские меры? Оказывается, они безумно связаны с непрерывными функциями

**Замечание 4.7.** Пусть $f : X \to \mathbb{R}, f$ — непрерывная $\Rightarrow f^{-1}((c, +\infty)), c \in \mathbb{R}, (c,_\infty)$ — открытое в $\mathbb{R}$. Определение непрерывной функции из топологии: прообраз любого открытого множества открыт. Так как прообраз $f$ открыт в $X \Rightarrow f$ — измеримая по $\mu$, если $\mu$ — борелевская.

**Замечание 4.8.** $\lambda$ — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$, тогда $\lambda$ — борелевская.

Еще более специальное определение. Этим свойством мера Лебега тоже обладает.

**Определение 4.14** (регулярная мера)**.** $(X, U, \mu)$, $(X, \rho)$, $\mu$ — борелевская. $\mu$ — **регулярная мера**, если $\forall\, e \in U$

$$\sup_{\{F \subset e, F \text{ — замкнутое}\}} \{\mu(F)\} = \mu e = \inf_{\{e \subset G, G \text{ — открытое}\}} \mu G$$

**Замечание 4.9.** $\lambda$-мера Лебега — регулярная.

На самом деле эти 2 свойство друг из друга следуют, но мы это доказывать не будем.

**Теорема 4.15.** $(X, U, \mu)$, $(X, \rho)$, $\mu$ — регулярная мера $\Rightarrow$ непрерывная функция плотна В $L^p(X, \mu), 1 \le p < +\infty$.

$$\overline{C(X) \cap L^p(X\mu)}^{||\cdot||_p} = L^p(X, \mu)$$

*Доказательство.* Мы уже знаем, что полное семейство — это семейство характеристических функций всех измеримых функций, и мы будем этим изо всех сил пользоваться. Возьмём какую-то характеристическую функцию из множества и ее будем приближать непрерывными функциями.
$\{\chi_e\}_{e \in U, \mu e < +\infty}$ — полное семейство.

пусть $e \in U, \mu e < +\infty$, $0, \mu$ — регулярная $\Rightarrow \exists\, F \subset e \subset G, F$ — замкнутое, $G$ — открытое. $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$

Когда мы попадем в $X \setminus G$ она будет равна нулю.

$$\varphi(x) = \frac{\rho(x, X \setminus G)}{\rho(x, X \setminus G) + \rho(x, F)}$$

Нужно позаботиться о том, чтобы знаменатель не был равен нулю. $\rho(x, A)$ — непрерывная функция $\forall\, A \subset X$. $X \setminus G$ — замкнутое, $F$ — замкнутое. Если $\rho(x, F) = 0 \Rightarrow x \in F \Rightarrow x \notin X \setminus G \Rightarrow \rho(x, X \setminus G) > 0$

$$\Rightarrow \rho(x, X \setminus G) + \rho(x, F) > 0 \,\forall\, x \in X \Rightarrow \varphi \in C(X)$$

$\varphi(x) = 0, x \in X \setminus G, \varphi(x) = 1, x \in F \quad \forall\, x \in X\ 0 \le \varphi(x) \le 1$

Понятно, что модуль $\varphi(x)$ совпадает с характеристической функцией множества $e$.

$$\chi_e(x) - \varphi(x)| \le 1 \quad \forall\, x \in X$$
$$\chi_e(x) - \varphi(x) = 0 \quad x \in F \text{ или } x \in X \setminus G$$
$$\Rightarrow ||\chi_e - \varphi||_p = \left(\int_X |\chi_e(x) - \varphi(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{G \setminus F} |\chi_e(x) - \varphi(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \le$$
$$\le (\mu(G \setminus F))^{\frac{1}{p}} < \varepsilon^{\frac{1}{p}}$$
$$\Rightarrow \chi_e \in \overline{C(X)}^{||\cdot||_p}$$

Тем самым мы доказали, что $\chi_e(x)$ может быть приближена непрерывными функциями. Может быть, стоить отметить, что $\mu G < \mu e + \varepsilon < +\infty \quad \int_X |\varphi(x)|^p d\mu - \int_G |\varphi(x)|^p d\mu < \mu G \Rightarrow \varphi \in L^p(X, \mu)$

$\square$

Раз утверждение верно для любых регулярных мер, то оно верно и для меры Лебега.

# Глава 5

# Метрические компакты

Топологический компакт: из любого подпокрытия можно выбрать конечное подпокрытие.

**Утверждение 5.1** (из топологии)**.** 1. $(X, \rho)$ – метрическое пространство, $K \subset X$, $K$ – компакт $\Leftrightarrow$ $K$ – счётно-компактен, то есть

$$\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in K \quad \exists \{x_{n_j}\}_{j=1}^{\infty} \text{ т.ч. } \exists \lim_{j\to\infty} x_{n_j} = x_0,\ x_0 \in K$$

2. $K$ – компакт $\Rightarrow$ $K$ – ограниченное замкнутое множество.

**Пример 5.1.** $\mathbb{R}^n$, $K$ – компакт $\Leftrightarrow$ $K$ – ограниченное, замкнутое

**Замечание 5.1.** НИ В КОЕМ СЛУЧАЕ!!!
$K$ – ограниченное замкнутое, $\not\Rightarrow$ $K$ – компакт

**Замечание 5.2.** $l^2 = \{x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, ||x||_2 = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2)^{\frac{1}{2}} < +\infty, x_n \in \mathbb{R}(\mathbb{C})\}$

$$D = \{x \in l^2 : ||x||_2 \leq 1\} \text{ – ограниченное, замкнутое}$$

$e_n = (0, 0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{n}, 0, 0, \ldots)$, $n \neq m$ $\quad ||e_n - e_m||_2 = \sqrt{2} \Rightarrow \forall \{e_{n_j}\}$ – не фундаментальная. Тогда $\nexists \lim\limits_{j\to\infty} e_{n_j} \Rightarrow D$ – не компакт.

Ещё одно *напоминание*, кто такие относительно компактные множества.

**Определение 5.1** (относительный компакт). $(X,\rho), A \subset X, A$ – относительно компактно, если $\overline{A}$ – компакт. Или можно сказать

$$\Leftrightarrow \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in A \, \exists \, \{x_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}, \, \exists \lim_{j\to\infty} x_{n_j} = x_0, x_0 \in X$$

Предел не обязательно принадлежит $A$. А в компакте предел обязательно лежит в $A$.

Мы получим новое описание компактных и относительно компактных множеств. В $\mathbb{R}^n$ мы описывали относительные компакты. Для описания компакта нужно добавить замыкание.

Еще несколько определений:

**Определение 5.2** ($\varepsilon$-сеть). $(X,\rho)$ – метрическое пространство. $A \subset X, \varepsilon > 0$
$F$ – $\varepsilon$-сеть для $A$, если

$$\forall \, a \in A \, \exists \, f \in F : \rho(a,f) < \varepsilon$$
$$(\Leftrightarrow \forall \, a \in AB_\varepsilon(a) \cap F \neq \varnothing) \Leftrightarrow (A \subset \bigcup_{f\in F} B_\varepsilon(f))$$

**Определение 5.3.** $A$ – **вполне ограниченное множество**, если для $\forall \, \varepsilon > 0 \, \exists$ конечная $\varepsilon$-сеть для $A$.

Описание компактных и относительно-компактных множеств в терминах вполне ограниченных – как раз наша главная цель. Мы будем использовать это новое описание так: если мы в полном метрическом пространстве, то там относительная компактность и вполне ограниченность – одно и то же. А проверять вполне ограниченность - гораздо проще, чем проверять относительную компактность. Предъявим $\varepsilon$-сеть и всё!

**Замечание 5.3.** $(X,\rho)$, $A$ – вполне ограниченное $\Rightarrow A$ – ограничено.

**Пример 5.2.** $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_2) = l_n^2 \quad A \subset \mathbb{R}^n$. $A$ – ограниченное $\Leftrightarrow A$ вполне ограниченное

*Доказательство.* $A$ – ограниченное $\Leftrightarrow \exists \, M > 0, \forall \, x - (x_1, \ldots, x_n) \in A \Rightarrow |x_j| \leq M$

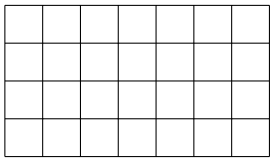


Рис. 5.1: классный поясняющий рисуночек

$A \subset \mathbb{Q} = \{|x_j| \leq M, 1 \leq j \leq n\}$ Как же построить $\varepsilon$–сеть?
Пусть $\varepsilon > 0$, $Q = \bigcup Q_j, l$ – сторона $Q_j$

$$\operatorname{diam} Q_j = \sup_{x,y \in Q_j} \rho(x,y) = \sqrt{n} \cdot l < \varepsilon \Rightarrow l < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$$
$$l = \frac{M}{N}, N \in \mathbb{N}, \exists\, N : \frac{M}{N} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \Rightarrow$$
$$F \text{ – вершины } Q_j \text{ – } \varepsilon\text{-сеть}$$

EC = equicontinuous $\square$

Убедимся в пространстве $l^2$

**Пример 5.3.** $D \subset l^2, D = \{x \in l^2 : ||x||_2 \leq 1\}$ Убедимся, что $D$ – не вполне ограниченное.

*Доказательство.*

$$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}, e_n = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{n}, 0, \ldots), n \neq m, ||e_n - e_m|| = \sqrt{2}$$
$$B_{\frac{1}{2}}(e_n) \cap B_{\frac{1}{2}}(e_m) = \varnothing$$
$$\varepsilon = \frac{1}{2}, F \text{ – } \frac{1}{2}\text{-сеть для } D$$
$$\Rightarrow \forall\, n\, \exists\, f_n \in F \cap B_{\frac{1}{2}}(e_n),\ f_n \neq f_m (n \neq m) \text{ так как } B_{\frac{1}{2}}(e_n) \cap B_{\frac{1}{2}}(e_m) = \varnothing$$
$$\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F \Rightarrow F \text{ – не конечное}$$

$\square$

Теперь посмотрим для $l^\infty$

**Пример 5.4.** $\Pi = \{x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, |x_n| < \frac{1}{2^n}\} \subset l^2$. Проверим, что $\Pi$ – вполне ограничено. 0

$$\exists\, M \in \mathbb{N} \quad \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

$$\Pi^* = \{x = \{x_1, \ldots, x_N, 0, 0, \ldots\}\}, |x_j| \le \frac{1}{2^j}, 1 \le j \le N \quad x_{N+k} = 0, k \in \mathbb{N}$$

Если мы забудим, про нули, то можем думать, что $\Pi^*$ лежит в $\mathbb{R}^n$, и там оно ограниченное, а значит и вполне ограниченное. $\Pi^* \subset \mathbb{R}^n$, $\Pi^*$ – ограниченное $\Rightarrow$ вполне ограниченное $\Rightarrow \exists\, F \subset \Pi^*$ – конечная $\varepsilon$-сеть. Докажем, что $F$ – $2\varepsilon$-сеть для $\Pi$.

$$x \in \Pi \quad \Rightarrow x = \underbrace{(x_1, \ldots, x_N, 0, \ldots)}_{y} + \underbrace{(0, 0, \ldots, 0, x_{N+1}, x_{N+2}, \ldots)}_{z}$$
$$||z||_2 < \varepsilon \quad y \in \Pi^* \Rightarrow \exists\, f \in F : ||y - f||_2 < \varepsilon \Rightarrow$$
$$||x - f||_2 = ||(y - f) + z||_2 \le ||y - f||_2 + ||z||_2 < 2\varepsilon$$
$$\Rightarrow \Pi \text{ – вполне ограничено}$$

Таким образом, все множества можно описать в пространстве $l^{\infty}$. Перед тем, как доказывать основную теорему, несколько свойств вполне ограниченных множеств.

**Свойство 5.1.**

1. $A$ – вполне ограничено $\Rightarrow \overline{A}$ – вполне ограничено
2. $A \subset Y \subset X, A$ – вполне ограничено в $X \Rightarrow A$ – вполне ограниченное в $Y$.
3. $A$ – вполне ограничено $\Rightarrow (A, \rho)$ – сепарабельно.

*1 свойство.* $A \subset X, \varepsilon > 0$. $F$ – конечная $\varepsilon$-сеть для $A$. Проверим, что $F$ – ($2\varepsilon$-сеть) для $\overline{A}$

$$\text{пусть } x \in \overline{A} \Rightarrow \exists\, y \in A : \rho(x, y) < \varepsilon, \exists\, f \in F : \rho(y, f) < \varepsilon$$
$$\Rightarrow \rho(x, f) \le \rho(x, y) + \rho(y, f) < 2\varepsilon$$

□

*2 свойство.* Проблема в том, что надо двигать точки. Мы уже так делали, когда доказывали сепарабельность. $A \subset Y \subset X, \varepsilon > 0, \{x_k\}_{k=1}^n$

– $\varepsilon$-сеть для $A$, $x_k \in X$
$A \subset \bigcup_{k=1}^{n} B_\varepsilon(x_k)$, если $A \cap B_\varepsilon(x_k) \neq \varnothing$, то пусть $y_k \in A \cap B_\varepsilon(x_k)$ (если $= \varnothing$, то не будем выбирать)

Мы найдем $\varepsilon$-сеть из точек множества $A$, тогда она точно будет обслуживать и $Y$. Как же и куда сдвигать точки?

$E = \{y_k\}_{k=1}^{n}$

$$x \in A \Rightarrow \exists\, x_k : \rho(x, x_k) < \varepsilon \Rightarrow A \cap B_\varepsilon(x_k) \neq \varnothing \Rightarrow y_k \in B_\varepsilon(x_k) \Rightarrow$$
$$\rho(x_k, y_k) < \varepsilon \Rightarrow \rho(x, y_k) \leq \rho(x, x_k) + \rho(x_k, y_k) < 2\varepsilon \Rightarrow$$
$$E \text{ – } (2\varepsilon)\text{-сеть для } A, E \subset A$$

□

*3 свойство.* $n \in \mathbb{N}, F_n$ – $\left(\frac{1}{n}\right)$-сеть для $A$, $F_n$ – конечное.

$$F \text{ (счетное )} = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \text{ – плотно в } A, \text{ то есть } A \subset \overline{F}$$

□

**Утверждение 5.2** (о разбиении)**.** $(X, \rho), A \subset X, \varepsilon > 0$. $F$ – конечная $\varepsilon$-сеть для $A \Rightarrow$

$$\exists \{C_j\}_{j=1}^{n} \quad A = \bigcup_{j=1}^{n} C_j \quad C_j \cap C_k = \varnothing, j \neq k, \operatorname{diam} C_j \leq 2\varepsilon, C_j \neq \varnothing$$

*Доказательство.*

$$F = \{x_k\}_{k=1}^{n}, A \subset \bigcup_{k=1}^{n} B_\varepsilon(x_k)$$
$$C_1 = A \cap B_\varepsilon(x_1)$$
$$C_2 = (A \cap B_\varepsilon(x_2)) \setminus C_1$$
$$C_k = A \cap B_\varepsilon(x_k) \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{k-1}\right) \quad k = 2, \ldots, n$$

если $C_k = \varnothing$, то забудем о нём. $C_k \subset B_{\varepsilon(x_k)} \Rightarrow \operatorname{diam} C_k \leq 2\varepsilon$ □

Теперь у нас всё готово для доказательства теоремы о том, как описывать компакты в терминах вполне ограниченных множеств.

**Теорема 5.1** (Хаусдорф). $(X, \rho)$ – метрическое пространство, $A \subset X$.

$A$ – компакт $\Leftrightarrow$

1. $A$ полное, то есть $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A, \{x_n\}$ – фундаментальная $\exists \lim x_n = x_0 \in A$
2. $A$ – вполне ограничено

Высока вероятность, что спросят на экзамене эту теорему, пытаясь вытянуть.

*Доказательство.* $\Rightarrow$
$A$ – компакт, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – фундаментальная, $x_n \in A$.
$A$ – компакт $\Rightarrow\ \exists \{x_{n_j}\}, \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_j} = x_0, x_0 \in A$. Тогда по свойствам фундаментальных последовательностей $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow (A, \rho)$ – полное метрическое пространство. Проверили первое условие. Теперь надо проверить второе: сначала покроем наш компакт безумным количеством шариков, а они ведь открытые множества, а среди них существует конечное подпокрытие.

$$0 \quad A \subset \bigcup_{a\in A} B_{>}(a) \wedge A \text{ – компакт } \Rightarrow, \exists \{a_j\}_{j=1}^{n}, a_j \in A :$$

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{n} B_{\varepsilon}(a_j) \Rightarrow F = \{a_j\}_{j=1}^{n} \text{ – } \varepsilon\text{-сеть для } A$$

Это была тривиальная часть теоремы.
$\Leftrightarrow$.

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in A$ Собираемся применять лемму о разбиении. $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$. По лемме $\exists \{C_j^{(1)}\}_{j=1}^{N_1}$. $A = \bigcup_{j=1}^{N_1} C_j^(1), \operatorname{diam} C_j^(1) \le 1$. Когда-то в детстве мы азнимались бесконечным делением пополам. Тут будем делать то же самое. $\exists\ j\ :\ C^(1)_j$ содержит бесконечное число элементов $\{x_n\}$.

$A_1 := C_j^(1)$.

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2^2},\text{ по лемме о разбиении к } A_1 \Rightarrow \exists\, \{C_j^{(2)}\}_{j=1}^{N_2}$$

$$\operatorname{diam} C_j^{(2)} \leq \frac{1}{2} \quad A_1 = \bigcup_{j=1}^{N_2} C_j^{(2)}$$

$$\exists\, 1 \leq j \leq N_2 \quad C_j^{(2)}\text{содержит бесконечное количетсво элементов в } x_n$$

$$\text{и так далее } \{A_m\}_{m=1}^{\infty}, A_{m+1} \subset A_m, \operatorname{diam}_{A_m} \leq \frac{1}{2^m}$$

$$A_m \text{ содержит бесконечное число элементов } \{x_n\}_{n=1}^{\infty}(*)$$

$$X_{n_1} \in A_1, \quad \exists\, n_2 > n_1 : x_{n_2} \in A_2 \text{ т.к. (*)}$$

$$\text{и так далее } \exists\, n_k \text{ т.ч. } n_k > n_{k-1} \quad x_{n_k} \in A_k$$

$$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}, x_{n_k} \in A_k, \operatorname{diam} A_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad A_{k+1} \subset A_k$$

$$\Rightarrow \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \text{ – фундаментальная } \wedge A \text{ – полное}$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0, x_0 \in A$$

□

Часто описывают компакт, но фактически говорят об относительный компкте. Для описания компакта, опять же, надо просто добавить замкнутость.

**Следствие 5.1.** $(X, \rho)$ – метрическое, $A \subset X$.

1. $A$ – относительно компактно $\Rightarrow A$ вполне ограничено
2. $(X, \rho)$ – полное, $A$ – относительно компактно $\Leftrightarrow A$ вполне ограничено

Будем изо всех сил пользоваться теоремой Хаусдорфа.

*1 утверждение.* $A$ – относителько компактно, $\Rightarrow \overline{A}$ – компакт, тогда по теореме Хаусдорфа $\overline{A}$ – вполне ограничено, $A \subset \overline{A} \Rightarrow A$ вполне ограничено. □

*2 утверждение.* $(X, \rho)$ – полное, $A$ – вполне ограничено, тогда по ранее доказанному свойству ($\overline{A}$ – вполне ограничено $\wedge$ $\overline{A}$ – замкнутое в $X \Rightarrow \overline{A}$ – полное) $\Rightarrow$ по теореме Хаусдорфа $\overline{A}$ компакт $\Rightarrow A$ – относительно компактно. □

Оказывется, можно вместо конечных $\varepsilon$-сетей можно утверждать чуть большее.

**Следствие 5.2.** $(X,\rho)$ – полное, $A \subset X$. Если для $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists$ относительно компактная $\varepsilon$-сеть, то $A$ – относительно компактно

*Доказательство.* $0, F$ – $\varepsilon$-сеть для $A$. $F$ – относителько компактно $\Rightarrow F$ вполне ограничено, $\exists\, E$ – конечная $\varepsilon$-сеть для $F \Rightarrow E$ – $(2\varepsilon)$-сеть для $A \Rightarrow A$ – вполне ограничено $\Rightarrow$ – $A$ – относительно компактно. $\square$

## 5.1. Относительно компактные множества в $C(K)$

**Определение 5.4.** $(K,\rho)$ – метрический компакт. $C(K) = \{f : K \to \mathbb{R}(\mathbb{C}), f$ – непрерывная$\}, ||f|| = \max_{x\in K} |f(x)|\Phi \subset C(K)$. $\Phi$ – **равностепенно непрерывна**, если

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0\, \forall\, f \in \Phi,\, \forall\, x, y \in K, \rho(x,y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

$EC$ – equicontinuous.

Раностепенная непрерывность отличается от равномерной непрерывности тем, что $\delta$ не зависит от $f$, но от $\varepsilon$ конечно зависит. Некоторый вариант теоремы Арцелла-Асколи, который, возможно, доказывали на дифурах:

**Теорема 5.2** (Асколи-Арцелла). $K$ – компакт, $(K,\rho)$, $\Phi \subset C(K)$. $\Phi$ – относительно компактно $\Leftrightarrow$

1. $\Phi$ – ограниченное в $C(K)$
2. $\Phi$ – равностепенно непрерывно ($\Phi \in EC$ equicontinuous)

*Доказательство.* С самого начала отметим, что $C(K)$ – полное. Вместо проверки относительной компактности $\Phi$ будем проверять вполне ограниченность.

$\Rightarrow$

$\Phi$ – относительно компактно $\Rightarrow \Phi$ – вполне ограничено $\Rightarrow \Phi$ – ограничено, то есть $\exists\, M \geq 0$ т.ч. $||f|| \leq M\, \forall\, f \in \Phi \Leftrightarrow \forall\, x \in K, \forall\, f \in \Phi\, |f(x)| \leq$

$M$. $\varepsilon > 0\,\exists\,\varepsilon$-сеть $\{\varphi_j\}_{j=1}^n, \varphi_j \in C(K)$, $\varphi_j$ – равномерно непрерывна
$\exists\,\delta_j > 0$
$x, y \in K, \rho(x,y) < \delta_j \Rightarrow |\varphi_j(x) - \varphi_j(y)| < \varepsilon$
$\delta = \min_{1\leq j\leq n}\delta_j$

при описании относительного компакта мы получили такой результат: $C(K)$ – полное $\Rightarrow \Phi$ относительный компакт $\Leftrightarrow \Phi$ – вполне ограничено. Будем этим пользоваться. 10.10.2023

$\Rightarrow \Phi$ – вполне ограниченное $\Rightarrow \Phi$ – ограничено
Пусть $\varepsilon > 0 \Rightarrow\ \exists\,\{\varphi_j\}_{j=1}^n$-$\varepsilon$-сеть для $\Phi$. $\varphi_j \in C(K) \Rightarrow \varphi_j$ – равномерно непрерывна
$\exists\,\delta_j > 0\,\forall\,x, y \in K, \rho(x,y) < \delta_j \Rightarrow |\varphi_j(x) - \varphi_j(y)| < \varepsilon$

$$\delta = \min_{1\leq j\leq n}\delta_j, \delta > 0$$

$$\text{пусть } f \in \Phi \Rightarrow\ \exists\,j : ||f - \varphi_j|| < \varepsilon \text{ то есть}$$

надо оценить этот модуль через неравенство треугольника; справа, очевидно, будет 3 слагаемых

$$\max_{x\in K}|f(x) - \varphi_j(x)| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\text{пусть } x, y \in K, \rho(x,y) < \delta, |f(x) - f(y)| \leq \underbrace{|f(x) - \varphi_j(x)|}_{<\varepsilon} +$$
$$+ \underbrace{|\varphi_j(x) - \varphi_j(y)|}_{<\varepsilon \text{ так как } \delta\leq\delta_j} + |\varphi_j(y) - f(y)| < 3\varepsilon$$

мы и проверили равностепенную непрерывность. Тривиальная часть доказательства закончена.
$\Leftarrow$
$\Phi$ – ограничено $\Rightarrow\ \exists\,M > 0 : f \in \Phi \Rightarrow ||f|| \leq M \Rightarrow |f(x)| \leq M\,\forall\,x \in K$. Надо по определению построить кончную $\varepsilon$-сеть в множестве непрерывных функций. но мы воспользуемся двумя облегчающими хитростями: 1. $\Phi \subset C(K)$, а если множество имеет $\varepsilon$-сеть в меньшем пространстве, то в большем и подавно. Более того, сеть можно построить из элементов меньшего множества. Мы выберем ограниченные функции. 2. выберем относительно компактную $\varepsilon$-сеть в $m(K)$ вместо конечной в $C(K)$, и этого будет достаточно.

$$\varepsilon > 0 \quad \Phi \subset C(K) \subset m(K) = \{f : K \to \mathbb{C}, \sup_{x\in K}|f(x)| < +\infty\}$$

$$\varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta \text{ из определения } (EC)$$
$$\text{применим к этой парочке лемму о разбиении}(K,\rho), \delta > 0$$
$$\exists\, \{C_j\}_{j=1}^n, \operatorname{diam} C_j < \delta, K = \bigcup_{j=1}^n C_j, C_j \bigcap C_i = \varnothing (j \neq i), C_j \neq \varnothing$$
$$\Psi = \left\{ g(x) = \sum_{j=1}^n y_j \chi_{C_j}(x) \right\} \subset m(K), y_j \in \mathbb{C}, 1 \le j \le n$$
$$g \in \Psi, ||g||_\infty = \sup_{x \in K} |g(x)| = \max_{1 \le j \le n} |y_j| = ||y||_{l_n^\infty}, y = (y_1, \ldots, y_n)$$
$$F : l_n^\infty \to \Psi, F(y) = \sum_{j=1}^n y_j \chi_{C_j}(x)$$

Мы выяснили, что $F$ биекция, изометрия, линейное.

$Q = \{y = (y_1, \ldots, y_n), |y_j| \le M\}$ полидиск, что бы это пока не значило

$$Q \text{ – компакт }, F \text{ – непрерывна } \Rightarrow F(Q) \text{ – компакт в } m(K)$$
$$E := F(Q), E = \left\{ g(x) = \sum_{j=1}^n y_j \chi_{C_j}(x), |y_j| \le M \right\}$$

вот у нас есть компакт $E$, и мы собираемся проверить, что он и будет $\varepsilon$-сетью для $\Phi$. Будет полезно в каждом множестве выбрать по точечке. Пусть $x_j \in C_j, f \in \Phi, y_j := f(x_j)$.

$$g(x) = \sum_{j=1}^n f(x_j) \chi_{C_j}(x), g \in E, |y_j| \le M$$

Пусть $x \in K \Rightarrow \exists\, j, x \in C_j \Rightarrow g(x) = f(x_j) \Rightarrow$

$$|f(x) - g(x)| = |f(x) - f(x_j)| < \varepsilon \text{ т.к. } \rho(x, x_j) < \delta$$

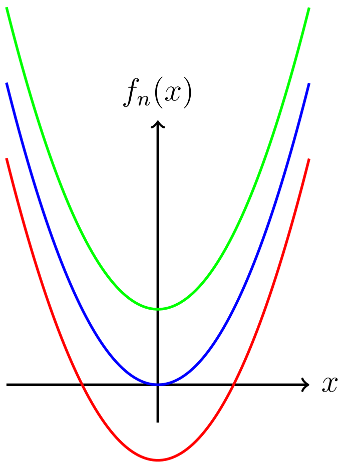
Вот это и то, что было обещано. $E$ – компактная $\varepsilon$-сеть. □

**Замечание 5.4.** Условия теоремы не зависимы.

**Пример 5.5.** $C[0,1]$. $f_n(x) = x^2 + n$, $\{f_n\}$ – равностепенно непрерывны, но $\{f_n\}$ не ограничено.

ограниченная, но не равностепенно непрерывная

**Пример 5.6.** $C[0,1], f_n(x) = x^n$. $\{f_n\}$ – ограничены, но не равностепенно непрерывны.




**Теорема 5.1** (достаточные условия равностепенной непрерывности)**.** $(K,\rho)$ – компакт, $\Phi\subset C(K)$. Сначала какие-то абстрактные множества, потом будут более конкретные.

1. Если $\exists\, M>0,\alpha>0,\beta>0$ такие что

2. $$\forall\, f\in\Phi,(\forall\, x,y\in K\,\rho(x,y)<\beta)\Rightarrow|f(x)-f(y)|\leq M(\rho(x,y))^{\alpha}$$
$$\Rightarrow\Phi\in(EC)$$

3. $C[a,b],\Phi\subset C[a,b]$, пусть $\exists\, L>0$
$$\forall\, f\in\Phi\,\exists\, f'(x),x\in(a,b),|f'(x)|\leq L\Rightarrow\Phi\in(EC)$$

4. чуть более общий случай. $K\subset G\subset\mathbb{R}^n$, $K$ – компакт, $G$ – открытое.
$$\exists\, L>0:\forall\, f\in\Phi,\exists\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\right|(1\leq j\leq n),\forall\, f\in G\Rightarrow\Phi\in(EC)$$

5. про аналитические функции. предполагать можно будет гораздо меньшее. $K\subset G\subset\mathbb{C}$, $G$ – открытое, $K$ – компакт.
$$\exists\, L>0,f\in\Phi,f\text{ аналаитическая в }G,\exists\, f'(x),\underbrace{|f(x)|}_{\text{тут}}\leq L,\forall\, x\in G$$

ТУТ НЕ ПРОИЗВОДНАЯ, НА ЭКЗАМЕНЕ ЧАСТО ОШИБАЮТСЯ!!!!

Аналитичность – фантастическое свойство, в отличие от, например, дифференцируемости. Именно из-за неё ТАМ как раз и не производная.

*1.* Пусть $\varepsilon > 0$, $x, y \in K$, пусть $\rho(x,y) < \beta$, пусть $\delta < \beta, \rho(x,y) < \delta, \delta(\varepsilon) = ?$.

$$f \in \Phi \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq M\rho(x,y)^\alpha < M\delta^\alpha \leq \varepsilon$$
$$\Rightarrow \delta \leq \left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^{\frac{1}{\alpha}},$$
$$\delta(\varepsilon) = \min\{\beta, \left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\},$$

□

Будем сводить остальные доказательства к первому пункту, находя $M, \alpha, \beta$. Второй пункт теперь совсем лёгкий.

*2.* $\Phi \subset C[a,b]$, $x, y \in [a,b], f \in \Phi$. Для оценки разности $f(x) - f(y)$ воспользуемся теоремой Лагранжа.

$$f(x) - f(y) = f'(c)(x-y) \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq |f(c)||x-y| \leq L|x-y|$$
$$M = L, \alpha = 1, (\beta - \forall) \overset{1}{\Rightarrow} \Phi \in (EC)$$

□

*3.* Пусть $z, y \in K$ такие что $[z,y] \subset G, f \in \Phi$ Оценим разность $f(y) - f(z)$.

$$\Gamma : [0,1] \to [y,z]$$
$$\Gamma(t) = ty + (1-t)z, \Gamma(0) = z, \Gamma(1) = y$$

опять можем воспользоваться теоремой Лагранжа

$$f(y) - f(z) = f(\Gamma(1)) - f(\Gamma(0)) = (f(\Gamma(c)))'_t$$
$$(f(\Gamma(t)))'_t = (f(ty + (1-t)z))'_t = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\ldots)(y_j - z_j)$$
$$|f(\Gamma(t))'| \leq L \sum_{j=1}^{n} |y_j - z_j| \overset{\text{КБШ}}{\leq} \sqrt{n} \left( \sum_{j=1}^{n} (y_j - z_j)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = L\sqrt{n}\rho(y,z)$$

Если выбртаь $\beta$ достаточно маленьким, то наш отрезок будет лежать в этом компакте. $F = \mathbb{R}^n \setminus G$ – замккнутое, $\rho(x,F)$ – непрерывная функция в $\mathbb{R}^n \Rightarrow \rho(x, F)$ непрерывна на $K \Rightarrow \exists\, x_o \in K, \rho(x_0, F) = \min_{x \in K} \rho(x, F)$

$$
\begin{gathered}
x_0 \notin F \Rightarrow \rho(x_0, F) > 0, r := \rho(x_0, F) \\
\forall\, x \in K\; B_r(x) \subset G, \beta = r \\
\rho(x, y) < r \Rightarrow y \in B_r(x) \subset G \Rightarrow \\
\text{отрезок } [x, y] B_r(x) \subset G \\
\Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq L\sqrt{n}\rho(x, y)
\end{gathered}
$$

$z$ и $y$, которые с самого начала были выбраны вместо $x$ и $y$, чтобы не смущаться от $dx$, обратно превратились в $x$ и $y$, все же поняли?
На пальцах: наш компакт настолько утоплен в $G$, что если мы возьмём шарик радиуса $r$, то шарик всё еще лежит в $G$. □

*4.* Букву $r$, которую мы нашли в предыдущем пункте, будем изо всех сил использовать. $K \subset G \subset \mathbb{C}$. В 3 пункте выяснили, что $\exists\, r > 0 : B_r(x) \subset G\, \forall\, x \in K, \beta = \frac{r}{3}$.

$$
\begin{gathered}
x, y \in K, \rho(x, y) < \beta, \gamma = \{\zeta \in \mathbb{C} : |x - \zeta| = 2\beta\} \\
f \in \Phi
\end{gathered}
$$

разницу собираемся оценивать с помощью формулу Коши, поэтому никакие проивзодные и не нужны!!!

$$
\begin{gathered}
f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - x} d\zeta \\
f(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - y} d\zeta \\
f(x) - f(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\zeta) \frac{x - y}{(\zeta - x)(\zeta - y)} d\zeta
\end{gathered}
$$

оцениваем самым грубом образом, отправляя модули под интегралы

$$
|f(\zeta)| \leq L, |\zeta - x| = 2\beta, |z - y| \geq \beta
$$

$$
\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2\pi} L \cdot |x - y| \cdot |\gamma| \cdot \frac{1}{(2\beta) \cdot \beta} = |x - y| L \frac{(2\beta) \cdot 2\pi}{(2\pi)(2\beta)\beta} = \\
= \frac{L}{\beta} |x - y|
\end{aligned}
$$

и в обозначениях 1 пункта получаем $M = \frac{L}{\beta}, \alpha = 1, \beta = \frac{r}{3}, \overset{(1)}{\Rightarrow} \Phi \in (EC)$ $\square$

Перед тем, как мы покинем относительно компакты, пара упражнений, которые на экзамене спрашивали в качестве задачи на 5.

**Утверждение 5.3.** $1 \le p < +\infty$. $\Phi \subset l^p, \Phi$ – относительно компактно $\Leftrightarrow$

1. $\Phi$ – ограничено в $l^p$
2. $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, N \in \mathbb{N} : \forall x = \{x_j\}_{j=1}^{\infty} \in \Phi, \left(\sum_{j=N+1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$

**Утверждение 5.4.** $\Phi \subset C_0, \Phi$ – относительно компактно $\Leftrightarrow$

1. $\Phi$ – ограничено
2. $\varepsilon > 0 \, \exists \, N \in \mathbb{N} : \forall x \in \Phi \quad \sup_{j \ge N+1} |x_j| < \varepsilon$

Мы сейчас находимся на перепутье функционального анализа. Можно отправиться в Гильбертовы пространства, в линейные операторы или еще куда-то. Изучить-то придётся всё, но мы начинаем линейные операторы.

# Глава 6

# Линейные операторы

Первый парагарф про линейные пространства будет совсем простой, здесь будут самые тривиальные свойства, следующие из линейности.

## 6.1. Линейные операторы в линейных пространствах

**Определение 6.1** (Линейный оператор). $X, Y$ – линейны над $k (k = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C})$. $A : X \to Y, A$ – **линейный оператор**, если

$$A(\alpha x + \beta z) = \alpha Ax + \beta Az, \quad x, z \in X, \alpha, \beta \in k$$

$\mathrm{Lin}(X, Y)$ – множество линейных операторов из $X$ в $Y$. Также нам понадобится линейное простарнство над $k$

$$\alpha \in k, A \in \mathrm{Lin}(X, Y), (\alpha A)(x) := \alpha Ax, \mathbb{0}(x) = 0 \text{ (0 в пространстве Y)}$$
$$A, B \in \mathrm{Lin}(X, Y), (A + B)(x) := Ax + Bx$$

Если $X = Y$, пишем только $\mathrm{Lin}(X)$.

**Пример 6.1** (интегральный оператор). $C[a, b], K(s, t) \in C([a, b] \times [a, b])$

$$f \in C[a, b], (\mathcal{K}f)(s) = \int_a^b k(s, t) f(t) dt$$
$$(\mathcal{K}f)(s) \in C[a, b], \mathcal{K} \in \mathrm{Lin}(C[a, b])$$

**Пример 6.2** (оператор дифференцирования). $X = C^{(1)}[0,1] = \{f : f' \in C[0,1]\}$, $Y = C[0,1]$. $f \in X, D(f) = f', D \in \mathrm{Lin}(X,Y)$

**Пример 6.3** (оператор вложения). $l^1 \subset l^2$, $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < +\infty, x \in l^1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty \Rightarrow x \in l^2$

$$Ax = x, A \text{ оператор вложения } l^1 \overset{A}{\hookrightarrow} l^2$$

$$\forall\, 1 \leq p_1 < p_2 \leq +\infty \Rightarrow l^{p_1} \overset{A}{\hookrightarrow} l^{p_2}, Ax = x$$

$$A \in \mathrm{Lin}(l^{p_1}, l^{p_2})$$

**Пример 6.4** (оператор, но не линейный). x $= X$ – линейное пространство, $x_0 \in X, x_0 \neq 0$, $Ax = x + x_0 \Rightarrow A$ – не линейный.

Перед тем, как доказывать теорему, еще одно небольшое определение.

**Определение 6.2** (Выпуклое множество). $B \subset X, X$ – линейное простарнство. $B$ – **выпуклое** , если

$$\forall\, x, z \in B, \forall\, t, 0 \leq t \leq 1 \Rightarrow tx + (1-t)z \in B$$

то есть отрезок, соединяющий любые две точки, полностью лежит в этом множестве

**Теорема 6.1** (простейшие свойства линейного оператора). $X, Y$ – линейные пространства над $k$ ($\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), $A \in \mathrm{Lin}(X,Y)$

1. $L \subset X, L$ – подпространство в $X \Rightarrow A(L)$ – подпространство в $Y$ (образ подпространства – подпространство)
2. $M \subset Y, M$ – подпространство в $Y \Rightarrow \underbrace{A^{-1}(M)}_{\text{прообраз}}$ – подпространство в $X$
3. $B \subset X, B$ – выпуклое $\Rightarrow A(B)$ – выпуклое в $Y$
4. $C \subset Y, C$ – выпуклое $\Rightarrow A^{-1}(C)$ – выпуклое в $X$
5. пусть $A$ – биекция $\Rightarrow A^{-1} \in \mathrm{Lin}(Y,X)$

Все 5 свойств доказывать не будем, покажем только несколько и скажем, что остальные доказываются аналогично.

*1.* $L$ – подпространство, $y, v \in A(L), \alpha \in k$. Наша мечта – проверить ($\overset{?}{\Rightarrow} \alpha y + v \in A(L)$), не обязательно писать $\alpha$ и $\beta$.

$$\Rightarrow \exists\, x, y \in L : (Ax = y \wedge Au = v) \Rightarrow A(\alpha x + u) = \alpha Ax + Au = \alpha y + v$$
$$\alpha x + u \in L \Rightarrow A(\alpha x + u) \in A(L) \Rightarrow \alpha y + v \in A(L)$$

□

3 проверяется тютелька в тютельку как 1, а 2 – как 4, поэтому проверим 4.

*4.* $C$ – выпуклое, $x, u \in A^{-1}(C), 0 \le t \le 1$.

$$(y := Ax \wedge v := Au) \quad y, v \in C \Rightarrow ty + (1-t)v \in C$$
$$A(tx + (1-t)u) = tAx + (1-t)Au = ty + (1-t)v \in C$$
$$\Rightarrow tx + (1-t)u \in A^{-1}(C) \Rightarrow A^{-1}(C) \text{ выпуклое}$$

□

*5.* $y, v \in Y \Rightarrow x = A^{-1}y, u = A^{-1}v \Rightarrow (Ax = y \wedge Au = v) \Rightarrow$

$$\text{пусть } \alpha \in k, \quad A(\alpha x + u) = \alpha Ax + Au = \alpha y + v \Rightarrow$$
$$\alpha x + u = A^{-1}(\alpha y + v) = \alpha A^{-1}y + A^{-1}v \Rightarrow$$
$$A^{-1} \in \operatorname{Lin}(Y, X)$$

□

**Определение 6.3** (Ядро линейного оператора). $A \in \operatorname{Lin}(X, Y)$

$$\operatorname{Ker} A = \{x \in X : Ax = 0\} \text{ – ядро } A$$

$$\operatorname{Im} A = \{y \in Y : \exists\, x : Ax = y\} = A(X) \text{ – образ } A$$

**Следствие 6.1.** $X, Y$ – линейные пространства, $\Rightarrow \operatorname{Ker} A$ – подпространство в $X$, $\operatorname{Im} A$ – подпространство в $Y$.

**Определение 6.4** (произведение операторов). $X, Y, Z$ – линейные пространства

$$X \overset{A}{\to} Y \overset{B}{\to} Z$$

$A \in \operatorname{Lin}(X, Y), B \in \operatorname{Lin}(Y, Z)$, $C = BA, C(x) := B(Ax), x \in X \Rightarrow C \in \operatorname{Lin}(X, Z), C$ – произведение $BA$

Всё самое тривиальное для операторов в линейных простаранствах мы вспомнили

## 6.2. Линейные операторы в нормированных пространствах

Линейные операторы в нормированных пространствах – главный объект, который изучает функциональный анализ.

**Определение 6.5** (Огранисченный оператор). $(X, ||\cdot||), (Y, ||\cdot||), A \in \mathrm{Lin}(X, Y)$. $A$ – **ограниченный**, если $\forall\, C \subset X, C$ – ограниченное $\Rightarrow A(C)$ – ограниченное в $Y$.

Оказывается, для операторов ограниченность эквивалентна непрерывности. Казалось бы, ограниченность сильно слабее, но если к ней добавить линейность, то будет аж непрерывность.
Обычно если в теореме 2 свойства, то говорят «если и только если», а если условий несколько, то говорят «равносильность». Подлые англосаксы говорят Following Conditions are Equivalent.

**Теорема 6.2** (эквивалентность ограниченности и непрерывности линейного оператора). $(X, ||\cdot||), (Y, ||\cdot||), A \in \mathrm{Lin}(X, Y)$. Следующие условия равносильны (СУР) (FCE)

1. $A$ непрерывен в точке 0
2. $A$ непрерывен $\forall\, x \in X$
3. $\exists\, C > 0 : ||Ax|| \leq C||x||\, \forall\, x \in X$
4. $A$ ограниченный
5. $\exists\, r > 0\; A(B_r(0))$ – ограниченное множество в $Y$.

Доказательство очень простое, и, конечно, строится на линейности

$1 \Rightarrow 2.$ $A$ непрерывен в точке 0. Пусть $\varepsilon > 0\, \exists \delta > 0$, $||x|| < \delta \Rightarrow ||Ax|| < \varepsilon (A(\mathbb{0})) = \mathbb{0}$. утверждается, что те же самые $\varepsilon$ и $\delta$ подходят.

$$\text{пусть } x_0 \in X, \text{проверим, что } A \text{ непрерывен в } x_0$$
$$\text{пусть } ||x - x_0|| < \delta \Rightarrow ||A(x - x_0)|| < \varepsilon \Rightarrow ||Ax - Ax_0|| < \varepsilon$$

□

$2 \Rightarrow 1$ очевидно

$1 \Rightarrow 3$. Пусть $\varepsilon > 0 \, \exists \, \delta > 0 : ||x|| < \delta \Rightarrow ||Ax|| < \varepsilon$.

$$z \in X, z \neq 0 \quad x = \frac{z}{||z||} \cdot \delta \Rightarrow ||x|| = \delta \Rightarrow ||Ax|| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow ||A\left(\frac{z}{||z||} \cdot \delta\right)|| < \varepsilon \Rightarrow ||Az|| < \frac{\varepsilon}{\delta}||z|| \text{т.е.} C = \frac{\varepsilon}{\delta}$$

□

$3 \Rightarrow 4$. $B \subset X$, $B$ – ограниченное, то есть $\exists \, M > 0 : (\forall \, x \in B \wedge ||x|| < M) \overset{3}{\Rightarrow} ||Ax|| \leq C||x|| \leq CM \, \forall \, x \in B \Rightarrow \{A(B)\}$ – ограниченное. □

$4 \Rightarrow 5$ очевидно ($B_r(0)$ – ограниченное)

$5 \Rightarrow 1$. $\exists \, R > 0 \, A(B_r^x(0)) \subset B_R^y(0)$

$$||x|| < r \Rightarrow ||Ax|| < R$$

непрерывность в 0 означает

$$\text{пусть } \varepsilon > 0 \quad ||x|| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow ||Ax|| < \varepsilon$$

$$\delta(\varepsilon) = \varepsilon \cdot \frac{r}{R}$$

$$||z|| < \varepsilon \cdot \frac{r}{R} \Rightarrow ||z \cdot \frac{R}{\varepsilon}|| < r \Rightarrow ||A\left(z \cdot \frac{R}{z}\right)|| < R \Rightarrow ||Az|| < \varepsilon$$

□

с помощью теоремы, которую мы только что доказали, введём норму в этом пространстве.

**Определение 6.6** (норма оператора). $(X, ||\cdot||), (Y, ||\cdot||)$

$$\underbrace{\mathcal{B}(X, Y)}_{\text{bounded}} = \{A \in \operatorname{Lin}(X, Y), A \text{ – ограниченный}\}$$

$A \in \mathcal{B}(X, Y)$

$$||A|| = \inf\{c > 0 : ||Ax|| \leq C||x|| \, \forall \, x \in X\}$$

то бишь точная нижняя грань множества величин, на которые наш оператор увеличивает норму элемента.

Раз мы так объявили норму, то надо проверять аксиомы нормы.

**Утверждение 6.1.** $(X, ||\cdot||), (Y, ||\cdot||), A \in \mathcal{B}(X, Y)$

1. $\forall x \in X \, ||Ax|| \leq ||A|| ||x||$ (то есть inf в определении нормы $= \min$)
2. $||A||y$ удовлетворяет аксиомам нормы

*Доказательство.* $x$ - фиксирован, $\Rightarrow \ \forall c > ||A||, ||Ax|| \leq C||x|| \Rightarrow ||Ax|| \leq ||A|| \cdot ||x||$. Был фиксирован, теперь любой, первое утверждение доказано. Теперь второе.

$$\alpha \in k, \alpha \neq 0, x \in X, x \ \text{ – фиксирован}$$
$$(\alpha A)(x) = \alpha Ax$$
$$\forall x \in X \quad ||(\alpha A)(x)|| = ||\alpha \cdot Ax|| = |\alpha| \cdot ||Ax|| \leq |\alpha| \cdot ||A|| \cdot ||x||$$
$$\Rightarrow ||\alpha A|| \leq |\alpha| ||A||$$

Очевидное замечание по слёзной просьбе двух студенток, которые ничего не понимали. Если мы докажем $||Ax|| \leq M||x|| \forall x \in X$, то $||A|| \leq M$

$$\Rightarrow \left|\left|\frac{1}{\alpha}(\alpha A)\right|\right| \leq \frac{1}{|\alpha}||\alpha A|| \Rightarrow |\alpha| ||A|| \leq ||\alpha A||$$
$$\Rightarrow ||\alpha A|| = |\alpha| ||A||$$
$$A, B \in \mathcal{B}(X, Y), x \in X$$

$$||(A + B)(x)|| = ||Ax + Bx|| \leq ||Ax|| + ||Bx|| \leq ||A|| \cdot ||x|| + ||B|| \cdot ||x|| =$$
$$= (||A|| + ||B||)||x|| \quad \forall x \in X$$
$$\Rightarrow ||A + B| \leq ||A|| + ||B||$$

Как только есть какая-то константа, то настоящая норма меньше или равна этой константы. $||A|| = 0 \Rightarrow \forall x \in X \, ||Ax|| \leq ||A|| \cdot ||X|| = 0$. $\Rightarrow Ax = 0 \, \forall x \in X \Rightarrow A = \varnothing \Rightarrow ||A||$ – настоящая норма $\square$

**Теорема 6.3** (вычисление нормы непрерывного оператора). $(X, ||\cdot||), (Y, ||\cdot||), A \in \mathcal{B}(X,Y) \Rightarrow$

$$||A|| = \underbrace{\sup_{\{||x|| \leq 1\}} ||Ax||}_{a} = \underbrace{\sup_{\{||x||<1\}} ||Ax||}_{b} = \underbrace{\sup_{\{||x||=1\}} ||Ax||}_{c} = \underbrace{\sup_{\{x \in X, x \neq 0\}} \frac{||Ax||}{||x||}}_{d}$$

*Доказательство.* Очевидно $a \geq b, a \geq c, d \geq c$. Докажем $||A|| \geq a \geq b \geq ||A||, quad ||A|| \geq d \geq c \geq ||A||$.

$$||Ax|| \leq ||A|| \cdot ||x|| \leq ||A|| \quad \forall\, x, ||x|| \geq 1 \Rightarrow \sup_{\{||x|| \geq 1\}} ||Ax|| \leq ||A|| \Rightarrow a \leq ||A||$$

Доказали $||A|| \geq a$.
Пусть $\varepsilon > 0\, z \in X, z \neq 0 \Rightarrow \left|\left|\frac{z}{||z||(1+\varepsilon)}\right|\right| = \frac{1}{1+\varepsilon} < 1$

$$\left|\left|A(\frac{z}{||z||(1+\varepsilon)})\right|\right| \leq b \Rightarrow ||Az|| \leq b(1+\varepsilon)||z|| \quad \forall\, z \in X$$
$$\Rightarrow ||A|| \leq b(1+\varepsilon) \forall\, \varepsilon > 0 \Rightarrow ||A|| \leq b$$

Закончили с первой цепочкой неравенств.
Пусть $x \neq 0 \Rightarrow ||Ax|| \leq ||A|| \cdot ||x|| \Rightarrow \frac{||Ax||}{||x||} \leq ||A|| \Rightarrow d = \sup_{\{x \neq 0\}} \frac{||Ax||}{||x||} \leq ||A||$.

пусть $z \in X, z \neq 0, \left|\left|\frac{z}{||z||}\right|\right| = 1 \Rightarrow ||A\left(\frac{z}{||z||}\right)|| \leq c \Rightarrow ||Az|| \leq C||z|| \forall\, z \in X$

с – супремум по единичной сфере

$$\Rightarrow ||A|| \leq C$$

□

**Пример 6.5.** $C[a,b]$, $h(x) \in C[a,b]$ – фиксированная функция. $f \in C[a,b], M_n(f) := h(x) \cdot f(x)$.

$$M_n \in \mathrm{Lin}(C[a,b])$$

Проверим, что он непрерывен и сосчитаем его норму.

*Доказательство.*

$$||M_n(f)||_\infty = \max_{x\in[a,b]} |h(x)\cdot f(x)| \leq \max_{x\in[a,b]} |h(x)|\cdot \max_{x\in[a,b]} |f(x)| = ||h||_\infty \cdot ||f||_\infty$$
$$\Rightarrow M_n \in \mathcal{B}(C[a,b]), ||M_n||_{\mathcal{B}(C[a,b])} \leq ||h||_\infty$$

получили непрерывность. Раз есть общая консатнта, не зависящая от $f$, то мы получаем и оценку для нормы.

$$\chi_{[a,b]}(x)1\,\forall\, x \in [a,b]\ \chi_{[a,b]} \in C[a,b], ||\chi_{[a,b]}||_\infty = 1$$
$$||M_n|| \geq ||M_n(f)||\forall\, f, ||f|| = 1 \Rightarrow ||M_n|| \geq ||M_n \cdot (\chi_{[a,b]})||_\infty = ||h||_\infty$$
$$\Rightarrow ||M_n||_{\mathcal{B}(C[a,b])} = ||h||_\infty$$

□

Теперь посмотрим на оператор дифференцирования, это очень важный пример.

**Пример 6.6.** $Y = C[a,b], X = \{f : \exists\, f' \in C[a,b]\}$, $0 \leq a \leq b$

$$X \subset Y, X \text{ – подпространство } Y, \text{ то есть}$$
$$||f||_X = ||f||_Y = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$$
$$D(f) = f' \Rightarrow D \in \mathrm{Lin}(X,Y),$$
$$D(x^n) = nx^{n-1} \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{||D(x^n)||}{||x^n||} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{nb^{n-1}}{b^n} = +\infty$$

при таком определении нормы оператор дифференцирования $D$ не непрерывен.

**Пример 6.7.** $Y = C[a,b], X = C^{(1)}[a,b]$

$$||f||_X = \max\{||f||_\infty, ||f'||_\infty\}$$
$$D(f) = f' \quad ||D(f)|| = ||f'||_\infty = \max_{x\in[a,b]} |f'(x)| \leq \underbrace{\max\{||f||_\infty, ||f||_\infty\}}_{||f||_X}$$
$$\Rightarrow D \in \mathcal{B}(X,Y), ||D|| \leq 1$$