

Функциональный анализ

Осень 2023

Оглавление

Оглавление	1
1 Введение	3
1.1 Зачем изучать функциональный анализ	4
2 Метрические пространства	6
2.1 Банаховы пространства	9
2.2 Пространства ограниченных функций	12
2.3 Пространство последовательностей с \sup нормой	14
2.4 Пространства n раз непрерывно дифференцируемых функций на отрезке	15
3 Пространство суммируемых функций (Лебега L^p)	16
3.1 Теория меры	16
3.2 Классические неравенства	18
3.3 Пространство Лебега	21
3.4 Пространства l_n^p, l^p	24
3.5 Неполное нормированное пространство	27
4 Пополнение метрического пространства	29
4.1 Пополнение метрического пространства	30
4.2 Теорема о вложенных шарах	33
4.3 Сепарабельные пространства	36
4.4 Нигде не плотные множества	40
4.5 Полные семейства элементов	41
4.6 Полные и плотные множества в L^p	42
5 Метрические компакты	49
5.1 Относительно компактные множества в $C(K)$	56
6 Линейные операторы	63

6.1	Линейные операторы в линейных пространствах	63
6.2	Линейные операторы в нормированных пространствах .	66

Глава 1

Введение

12.09.23

День рождения функционального анализа — 1932 год. В этом году вышла книжка «Теория линейных операторов», автор — С. Банах. Главная цель функционального анализа — изучение линейных операторов (но не только их). Главным объектом у нас будет X — линейное топологическое пространство. Оно же линейное пространство над \mathbb{C} (или \mathbb{R}). Есть непрерывные операции

1. $(x, z) \rightarrow x + z \quad x, z \in X$
2. $(\alpha, x) \rightarrow \alpha x \quad \alpha \in \mathbb{C}$

Если у нас есть топологическое пространство, то у нас есть все любимые объекты из математического анализа — пределы, непрерывность, производные, интегралы.

Пусть есть X, Y — линейные топологические пространства. Также есть линейное отображение $A : X \rightarrow Y$

Определение 1.1 (Линейное отображение).

$$A(\alpha x + \beta z) = \alpha Ax + \beta Az$$

Если $\dim X < +\infty, \dim Y < +\infty$, то это линейная алгебра.

$$A : X \rightarrow X, \dim X = n, A = A^* \Rightarrow \exists \text{ ОНБ } \{u_j\}_{j=1}^n$$

λ_j — j -е собственное число

$$Au_j = \lambda_j u_j$$

Теорема 1.1 (Гильберт). X — гильбертово (сепарабельное) пространство. $A = A^*, A : X \rightarrow X \Rightarrow \exists$ ОНБ из собственных векторов.

Если $\dim Y = 1$, т.е. $Y = \mathbb{C}$ (или \mathbb{R}), то $A : X \rightarrow \mathbb{C}$, A — линейный функционал.

В математическом анализе мы изучаем $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. В функциональном анализе же у нас X — пространство функций, $f \in X$

$$D(f) = f' \quad D : X \rightarrow Y \quad (1.1)$$

и здесь мы задаемся вопросами о следующих свойствах $D(f)$

- компактность
- самосопряжённость
- непрерывность

Отцы основатели функционального анализа:

- Ф. Гильберт (1862–1943) Гильбертовы пространства;
- С. Банах (1892–1945) Банаховы пространства;
- Ф.Рисс (1880–1956) пространства Лебега L^p .

Ну и хочется ещё упомянуть для вас, компьютер саентистов, отцов основателей кибернетики, которые оставили немалый след в функциональном анализе

- Н. Винер (1894–1964);
- Д. фон Нейман (1903–1957). Про его архитектуру, наверное, что-то слышали?

1.1. Зачем изучать функциональный анализ

Во-первых, он позволяет посмотреть на задачу с высокого уровня абстракции.

Рассмотрим пространство непрерывных функций $C[a, b]$, там введём норму $|f| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$. Рассмотрим пространство многочленов $P_n = \{\sum_{k=0}^n a_k x^k, a_k \in \mathbb{R}\}$. Существует ли такой многочлен, на котором инфимум достигается? И если да, то единственный ли он?

$$E_n(f) = \inf_{p \in P_n} \|f - p\| = \min_{p \in P_n} \|f - p\|$$

На первый вопрос ответ да, это следует из общей теоремы функционального анализа.

$$\dim P_n = n + 1 < +\infty$$

На второй же вопрос ответ тоже да, и тут функциональный анализ ни при чём. Суть в том, что у многочлена степени n не может быть больше n корней.

Ну и ещё немаловажные причины

1. язык функционального анализа — междисциплинарный язык математики;
2. его результаты применяются в математической физике, которая у нас будет в следующем семестре;
3. это интересно и важно. $0, 1, 2 = o(3)$;
4. у нас будет экзамен, на котором придется говорить уже нам.

Дополнительная литература по курсу. Первая рассчитана на студентов: в некоторых местах рассказывается, как придумать доказательство, как прийти к тому, что требуется, а не в обратную сторону, как обычно. Остальные же книги поумнее.

1. А.Н.Колмогоров, С.В. Фомин «Элементы теории функций и Ф.А.»;
2. М.Рид, Б. Саймон. 1 том «методы современной физики». Тонкая (можно осилить), рассказывается также про применение ФА;
3. А.В. Канторович, Г.Г Акилов «Функциональный анализ». Похожа на энциклопедию. Но там можно найти всё;
4. К. Итосида «Функциональный анализ»;
5. У. Рудин.

Глава 2

Метрические пространства

Начнём с того, что все знают. Надо ведь с чего-то начать. Мы будем несколько раз к ним возвращаться, а не изучим всё сразу. Один из полезных результатов — новое описание компакта в метрических пространствах. Он будет самым рабочим. А компакт — вещь очень полезная. Компакты в гигантских пространствах напоминают компакты в \mathbb{R}^n или в \mathbb{C}^n и обладают теми же полезными свойствами.

Определение 2.1 (Метрика). X — множество. $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, ρ — **метрика**, если при $x \in X \wedge y \in X \wedge z \in X$ она обладает следующими свойствами

1. $\rho(x, y) \geq 0 \wedge (\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y)$
2. $\rho(y, x) = \rho(x, y)$
3. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$

Введём стандартное обозначение открытого шара. $x \in X, r > 0$
 $B_r(x) = \{y \in X : \rho(x, y) < r\}$ — шар с радиусом r . $\{B_r(x)\}_{r>0}$ — база окрестности в точке x .

G — открытое, если $\forall x \in G \exists r > 0 B_r(x) \subset G$.

F — замкнутое $\Leftrightarrow F \subset X \wedge X \setminus F$ — открытое.

В метрическом пространстве удобно характеризовать замкнутое множества с помощью последовательностей. Вспомним, что такое сходящаяся последовательность.

$\{x_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность $\wedge \forall n \in \mathbb{N} x_n \in X \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Leftrightarrow$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x_0) = 0$

(X, ρ) — метрическое пространство $\Rightarrow (F$ — замкнутое $\Leftrightarrow \{x_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность $\wedge \forall n \in \mathbb{N} x_n \in F \wedge (\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow x_0 \in F))$

Определение 2.2 (Фундаментальная последовательность).
 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ — фундаментальная $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N} ((n > N \wedge m > N) \Rightarrow \rho(x_n, x_m) < \varepsilon) \Leftrightarrow \lim_{n, m \rightarrow \infty} \rho(x_n, x_m) = 0$

Замечание 2.1. $\exists x_0 \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \{x_n\}_{n=1}^\infty$ — фундаментальная

Определение 2.3 (Полное метрическое пространство).
 (X, ρ) — полное, если все фундаментальные последовательности имеют предел, лежащий в X

Почему хорошо жить в полном метрическом пространстве?

Замечание 2.2 (о пользе полноты). $F : X \rightarrow \mathbb{R}, (X, \rho)$ — метрическое пространство, F — непрерывная.

Стоит задача найти $x_0 \in X$ т.ч. $F(x_0) = 0$
 Алгоритм: $\{x_n\}_{n=1}^\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = 0, \lim_{n, m \rightarrow \infty} \rho(x_n, x_m) = 0$ Если (X, ρ) — полное, то $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, F(x_0) = 0$ А если нет, то из наших вычислений вообще ничего не следует, возможно, решения вообще нет.

Пример 2.1. $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ — полные.

Пример 2.2. $\mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$ — неполное.

Пример 2.3. \mathbb{Q} — неполное.

Потом приведем примеры поинтереснее. Кстати, древние греки пришли в ужас, когда узнали, что \mathbb{Q} — неполное.

Определение 2.4. (X, ρ) — метрическое пространство, $A \subset X, A$ — ограниченное, если

$$\exists R > 0 \exists x_0 \in X A \subset B_R(x_0)$$

Теорема 2.1 (Свойства фундаментальных последовательностей). (X, ρ) — метрическое пространство, $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ — фундаментальная последовательность, тогда выполняется:

1. $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ — ограниченная, т.е. $\exists R > 0 \exists x_0 \in X \forall n \in \mathbb{N} x_n \in B_R(x_0)$
2. $\exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ — подпоследовательность $\exists a \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$
3. $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^\infty$ — произвольная последовательность действительных чисел $\wedge \forall k \in \mathbb{N} \varepsilon_k > 0 \Rightarrow \exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ — подпоследовательность $\forall j \in \mathbb{N} (j > k \Rightarrow \rho(x_{n_k}, x_{n_j}) < \varepsilon_k)$

1 утверждение. Возьмём $\varepsilon = 1$, тогда из фундаментальности $\exists N \forall n \in \mathbb{N} (n > N \Rightarrow \rho(x_n, x_N) < 1)$.

Возьмём $R = \max\{\rho(x_1, x_N), \dots, \rho(x_{N-1}, x_N)\} + 1$. Единичка на всякий случай.

Тогда $\forall n \in \mathbb{N} x_n \in B_R(x_N)$. □

2 утверждение. Возьмём $\varepsilon > 0$, тогда по фундаментальности $\exists N \forall n \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N} ((n > N \wedge m > N) \Rightarrow \rho(x_n, x_m) < \varepsilon)$. Возьмём это N .

$\exists a \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} = a \Rightarrow \exists n_k (\rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon \wedge n_k > N)$. Возьмём это n_k .

Возьмём некоторое $m > N$. Тогда $\rho(x_m, a) < \rho(x_m, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, a) < 2\varepsilon$ □

3 утверждение. Докажем по индукции:

$\varepsilon_1 : \exists n_1 \forall n \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N} ((n > n_1 \wedge m > n) \Rightarrow \rho(x_m, x_n) < \varepsilon_1)$. Выберем n_1 , тогда $\forall m \in \mathbb{N} (m > n_1 \Rightarrow \rho(x_m, x_{n_1}) < \varepsilon_1)$.

ε_k : по индукции выбрали n_1, \dots, n_{k-1} , $k \geq 2$. $\forall j \in (1 \dots k-1) \forall m \in \mathbb{N} (m > n_j \Rightarrow \rho(x_m, x_{n_j}) < \varepsilon_j)$. Из фундаментальности исходной последовательности $\exists n_k (n_k > n_{k-1} \wedge \forall m \in \mathbb{N} (m > n_k \Rightarrow \rho(x_m, x_{n_k}) < \varepsilon_k))$ □

Следствие 2.1. (X, ρ) , $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность, тогда

$$\exists \{x_{n_k}\} \text{ т.ч. } \sum_{k=1}^{\infty} \rho(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < +\infty$$

Доказательство. По 3 свойству при $\varepsilon_k = \frac{1}{2^k}$. □

Теорема 2.2 (О замкнутом подмножестве). (X, ρ) — метрическое пространство, тогда

1. (X, ρ) — полное, $Y \subseteq X$, Y — замкнутое $\Rightarrow (Y, \rho)$ — полное
2. $Y \subseteq X$, (Y, ρ) — полное $\Rightarrow Y$ — замкнутое

1 утверждение. Доказательство следует прямо из определения. Значим, что Y — замкнутое подмножество полного пространства. Берем фундаментальную последовательность. $Y \subset X$, пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \forall n \in \mathbb{N} x_n \in Y$ — фундаментальная. $\forall n \in \mathbb{N} x_n \in X, X$ — полное $\Rightarrow \exists x_0 \in X \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$. Y — замкнутое, значит $x_0 \in Y \Rightarrow (Y, \rho)$ — полное. \square

2 утверждение. Второй пункт не труднее первого. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — произвольная фундаментальная последовательность в Y .

Y — полное $\Rightarrow \exists x_0 \in Y \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow Y$ — замкнутое из-за произвольности последовательности. \square

2.1. Банаховы пространства

Сначала введём понятие полунормы.

Определение 2.5 (полунорма). Пусть X — линейное пространство над \mathbb{R} или \mathbb{C} . Отображение $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ называется полунормой, если при $x \in X \wedge y \in X \wedge (\lambda \in \mathbb{R} \vee \lambda \in \mathbb{C})$

1. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ (полуаддитивность)
2. $p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$

Свойство 2.1. p — полунорма \Rightarrow

$$\forall x \in X p(x) \geq 0 \wedge p(0) = 0$$

Доказательство. $p(0) = p(0 \cdot 0) = 0 \cdot p(0) = 0$. Пусть $x \in X \Rightarrow 0 = x + (-x) \Rightarrow p(0) \leq p(x) + \underbrace{p(-x)}_{p(x)} = 2p(x) \Rightarrow p(x) \geq 0$ \square

Определение 2.6 (Норма). X — линейное пространство, $p : X \rightarrow \mathbb{R}$. p — норма $\Leftrightarrow (p \text{ — полунорма} \wedge (p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0))$. Будем обозначать $\|x\| := p(x)$.

$(X, \|\cdot\|)$ будем обозначать нормированное пространство. и при $(x \in X \wedge y \in X)$ $\rho(x, y) := \|x - y\|$. Тогда $(X, \|\cdot\|)$ — метрическое пространство.

Определение 2.7 (банахово пространство). $(X, \|\cdot\|)$ — банахово, если оно полное

Еще пару определений перед критерием банахова пространства.

Определение 2.8 (подпространство в алгебраическом смысле). X — линейное пространство, $L \subset X$. L — подпространство в алгебраическом смысле $\Leftrightarrow \forall x \in L \forall y \in L \forall \alpha \in K \forall \beta \in K \alpha x + \beta y \in L$.

Определение 2.9 (подпространство). $(X, \|\cdot\|)$, $L \subset X$, L — подпространство, если

- L подпространство в алгебраическом смысле
- $L = \bar{L}$ (\bar{L} — замыкание)

Теперь нам потребуется сходимость рядов. Для того, чтобы говорить о сходимости, нужна топология.

Определение 2.10 (Сходимость).

$$(X, \|\cdot\|) \quad \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \quad S_n = \sum_{k=1}^n x_k$$

$\sum_{k=1}^{\infty} x_k (*)$, $(*)$ сходится, если $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \in X$

$(*)$ сходится абсолютно, если $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ сходится

В \mathbb{R}^n (или в \mathbb{C}^n) если у нас была абсолютная сходимость, то была и обычная, но вообще говоря, это не так.

Теорема 2.3 (Критерий полноты нормированного пространства (банаховости)). $(X, \|\cdot\|)$ - полное \Leftrightarrow из абсолютной сходимости ряда следует сходимость ряда.

Доказательство. Предположим, что наше пространство полное (\Rightarrow). (X, ρ) — полное, $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| \text{ сходится} \quad (**)$$

Цель такая: последовательность S_n — фундаментальная. Сейчас применим критерий Коши к ряду (**). Это ряд из чисел, так что всё в порядке. Пусть $\varepsilon > 0$. По критерию Коши $\exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \forall p \in \mathbb{N} (n > N \Rightarrow \sum_{k=n}^{n+p} \|x_k\| < \varepsilon)$.

$$S_n = \sum_{k=1}^n x_k.$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{n+p} \|x_k\| &= \|S_{n+p} - S_n\| = \left\| \sum_{k=1}^p x_{n+k} \right\| \leq \sum_{k=1}^p \|x_{n+k}\| \leq \varepsilon \\ &\Rightarrow \{S_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ — фундаментальная, } (X, \rho) \text{ — полное} \\ &\Rightarrow \exists S \in X \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} x_k \text{ сходится}$$

Мы так запаслись номерами, чтобы выражение было меньше ε

Теперь (\Leftarrow). У нас кроме определения ничего нет. Возьмём какую-то фундаментальную последовательность. Откуда взять предел? Есть соотношения между элементами последовательности. Возьмём подпоследовательность, ведь у нас есть следствие 2.1! Из свойств фундаментальных последовательностей, мы знаем, что существует подпоследовательность

$$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : \|x_{n_1}\| + \sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < +\infty$$

$$\Rightarrow x_{n_1} + \sum_{k=1}^n (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) \text{ — сходится, но:}$$

$$S_m = x_{n_1} + \sum_{k=1}^{m-1} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) = x_{n_m} \Rightarrow \exists S \in X \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_m} = S$$

□

2.2. Пространства ограниченных функций

Определение 2.11. Пусть A — произвольное множество. Стандартное обозначение $m(A)$ — множество всех ограниченных функций.

$$m(A) = \{f : A \rightarrow \mathbb{R} \text{ или } \mathbb{C}, \sup_{x \in A} |f(x)| < \infty\}$$

$$f \in m(A), \|f\|_\infty = \sup_{x \in A} |f(x)|.$$

Теорема 2.4. $(m(A), \|\cdot\|_\infty)$ — банахово пространство

Доказательство. Нужно проверить две вещи. Во-первых, что норма удовлетворяет аксиомам нормы. А во-вторых, что пространство с таким определением является полным. Просто по определению, никаких хитрых критериев. Возьмём фундаментальную подпоследовательность и покажем, что у нее есть предел.

Проверяем, что $\|\cdot\|_\infty$ удовлетворяет аксиомам нормы.

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in A} |f(x)| \geq 0, \|f\|_\infty = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \forall x \in A \text{ т.е. } f = 0$$

$$\lambda \in \mathbb{R} \text{ (или } \mathbb{C}). \|\lambda f\|_\infty = \sup_{x \in A} |\lambda| \cdot |f(x)| = |\lambda| \cdot \|f\|_\infty$$

Нужно проверить неравенство треугольника.

$f, g \in m(A)$. x — фиксированная точка в A

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \forall x \in A$$

$$\Rightarrow \|f + g\|_\infty = \sup_{x \in A} |f(x) + g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

Теперь мы проверили аксиомы нормы. Доказываем полноту. $\{f_n\}$ — фундаментальная в $m(A)$.

$$\varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : (m > N \wedge n > N) \Rightarrow \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon \text{ т.е. } \sup_{x \in A} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Первый вопрос: откуда взять претендента на роль предела? Еще желательно, чтобы он был единственный. Фиксируем x . Если для супремума есть неравенство, то и для x тем более. $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ при $n, m > N$. $\Rightarrow \{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ — последовательность чисел в \mathbb{C} или \mathbb{R} .

$$\Rightarrow \{f_n(x)\}_{n=1}^\infty \text{ — фундаментальная} \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \forall x \in A \text{ фиксированный}$$

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &< \varepsilon \quad \text{пусть } m \rightarrow \infty \\ \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| &\leq \varepsilon, x \in A \forall x \in A \\ \Rightarrow \|f_n - f\|_\infty &= \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \text{ при } n > A \end{aligned}$$

Последнее соображение, которое нужно добавить, это то, что f — элемент A . Мы можем записать f как $f = (f - f_n) + f_n, f_n \in m(A), f - f_n \in m(A)$.

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f \in m(A)$$

□

Давайте заметим, что у нас получилось определение равномерной непрерывности из математического анализа.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f \in m(A) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| = 0 \Leftrightarrow f_n \xrightarrow[A, n \rightarrow \infty]{} f$$

Определение 2.12 (Топологический компакт). Множество K — топологический компакт, если оно обладает следующими свойствами

1. $\forall \{G_\alpha\}_{\alpha \in A}, G_\alpha$ — открытые множества $K \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \exists \{\alpha_j\}_{j=1}^n, K \subset \bigcup_{j=1}^n G_{\alpha_j}$
2. Хаусдорфовость $\forall x, y (x \neq y) \in K \exists U, V$ — открытые множества, $x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset$

Определение 2.13. $C(K) = \{f : K \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ непрерывна}\}$

$$\|f\|_{C(K)} = \|f\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)| = \max_{x \in K} |f(x)|$$

Следствие 2.2. K — топологический компакт $\Rightarrow C(K)$ — банахово

Доказательство. $C(K) \subset m(K)$. $C(K)$ — подпространство в алгебраическом смысле. Проверим, что $C(K)$ — замкнуто в $m(K)$

$$\{f_n\}, f_n \in C(K), \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f_n \xrightarrow{K, n \rightarrow \infty} f \Rightarrow f \in C(K) \Rightarrow C(K)$$

тогда $m(K)$ — полное и $C(K)$ — полное. \square

2.3. Пространство последовательностей с \sup нормой

Определение 2.14. $\mathbb{C}^n, n \in \mathbb{N}, l_n = \{x^\infty = (x_1, \dots, x_n), x_j \in \mathbb{C}\}$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$$

$A = \{1, 2, \dots, n\}, l_n^\infty = m(A) \Rightarrow l_n^\infty$ — полное. Удобно думать, что последовательность — это функция на множестве натуральных чисел.

Определение 2.15 (l^∞).

$$l^\infty = \{X = \{x_j\}_{j=1}^\infty, \sup_{j \in \mathbb{N}} |x_j| < +\infty\}$$

$$\|x\|_\infty = \sup_{j \in \mathbb{N}} |x_j| \quad A = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$$

$$X = \{x\}_{j=1}^\infty \in m(A), f(j) = x_j$$

$$l^\infty := m(\mathbb{N}) \Rightarrow l^\infty \text{ — полное}$$

Определение 2.16.

$$c = \{X = \{x\}_{j=1}^\infty, x_j \in \mathbb{C} \mid \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0\}$$

$$c \subset l^\infty, \|x\| = \|x\|_\infty = \sup \|X\|$$

$$c_0 = \{x = \{x\}_{j=1}^\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} x_j = 0\}, c_0 \subset c \subset l^\infty$$

c, c_0 — замкнутые подпространства в $l^\infty \Rightarrow c, c_0$ — банаховы.

2.4. Пространства n раз непрерывно дифференцируемых функций на отрезке

Определение 2.17. (норма n производной)

$$n \in \mathbb{N} \quad C^{(n)}[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists f^{(n)} \in C[a, b]\}$$

$$\|f\|_{(n)} = \max_{0 \leq k \leq n} \|f^{(k)}\|_{\infty}, \quad f^{(0)} = f$$

Теорема 2.5. В $C^{(n)}[a, b]$ — банахово.

Доказательство.

$$\begin{aligned} \{f_m\}_{m=1}^{\infty} & \text{ — фундаментальная последовательность в } C^{(n)}[a, b] \\ \varepsilon > 0 \exists N : (m > n \wedge q > n) & \Rightarrow \|f_m - f_q\|_{C^{(n)}} < \varepsilon \Rightarrow \|f_m^{(k)} - f_q^{(k)}\|_{\infty} < \varepsilon \\ & k = 0, 1, \dots, n \end{aligned}$$

$\{f_m^{(k)}\}$ — фундаментальная в полном пространстве $C[a, b]$

$$\Rightarrow \exists \varphi_k \in C[a, b], f_n^{(k)} \rightrightarrows_{[a, b]} \varphi_k, k = 0, 1, \dots, n$$

$$\stackrel{\text{Анализ}}{\Rightarrow} (f_k^{(n)} \rightrightarrows_{[a, b]} \varphi_0 \wedge \varphi_k^0 \rightrightarrows_{[a, b]} \varphi_1) \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_0', \varphi_2 = \varphi_0'', \dots, \varphi_n = \varphi_0^{(n)} \quad (2.1)$$

□

19.09.23

Глава 3

Пространство суммируемых функций (Лебега L^p)

Сейчас будет небольшой экскурс в теорию меры, которая была на математическом анализе. Мы ничего доказывать не будем и поверим, что все утверждения верны и в общем случае.

3.1. Теория меры

Определение 3.1 (Мера). (X, U, μ) — пространство с мерой. X — множество, U — σ -алгебра подмножества X

1. $\emptyset \in U$
2. $A \in U \Rightarrow X - A \in U$
3. $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}, A_n \in U, A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow A \in U$

$$\mu : U \rightarrow [0, +\infty]$$

— мера, если

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, A_n \cap A_m = \emptyset, n \neq m, A_n \in U \Rightarrow \mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ (счетная аддитивность)

Предположения:

1. μ — полная мера, то есть $A \in U, \mu(A) = 0 \Rightarrow (\forall B \subset A \Rightarrow B \in U)$

$$U, (\Rightarrow \mu B) = 0)$$

2. μ — σ -конечна, то есть $X = \cup_{j=1}^{\infty} X_j, \mu(X_j) < +\infty$

Пока можем думать, что речь идет о мере Лебега. Потом приведём другие примеры. В теории пространств будем считать, что функция действует из X в \mathbb{R} или в \mathbb{C} (не особо важно).

Определение 3.2 (Измеримая функция). $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. f — измерима, если

$$\forall c \in \mathbb{R}, x \underbrace{\{x : c < f(x)\}}_{\text{измеримое множество}} \in U$$

$$f : X \rightarrow \mathbb{C} \Rightarrow f = u + iv, u, v : X \rightarrow \mathbb{R}$$

f — измерима, если u, v — измеримы

Как же определяется интеграл? Пусть есть какой-то элемент σ -алгебры $e \in U$, $\chi_e(x) = \begin{cases} 1, x \in E \\ 0, x \notin e \end{cases}$. Множество простых функций определяется как

$$S = \{g(x) = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{e_k}, c_k \in \mathbb{C}, e_k \in U\}$$

$$g \in S, \int_X g(x) d\mu = \sum_{k=1}^n c_k \mu e_k.$$

$f(x)$ — измеримая, если $f(x) \geq e, x \in X$

Определение 3.3 (Произвольно измеримая функция).

$$\int_X f d\mu = \sup \left\{ \int_X g(x) d\mu : 0 \leq g(x) \leq f(x), x \in X, c_k \in \mathbb{R}, c_k > 0 \right\}$$

Определение 3.4 (Измеримая функция). f — измерима, если

$$f_+(x) = \max(f(x), 0) \wedge f_-(x) = \max(-f(x), 0) \Rightarrow f = f_+ - f_-$$

Если $\int_X f_+ d\mu$ — конечен или $\int_X f_- d\mu$ — конечен, то $\int_X f d\mu = \int_X f_+ d\mu - \int_X f_- d\mu$ Если f — измеримая, $f : X \rightarrow \mathbb{C} \Rightarrow f = u + iv$

$$\int_X f d\mu = \int_X u d\mu + i \int_X v d\mu$$

Определение 3.5 (Множество суммируемых функций).

$L(X, \mu)$ — множество суммируемых функций =

$$\left\{ f_i : \int_X |f| d\mu < +\infty \right\}, |f| = f_+ + f_-$$

Прежде чем двигаться дальше, приведем примры других мер (кроме мер Лебега)

Пример 3.1. $E \subset \mathbb{R}^n$, E — измерима по Лебегу, λ — мера Лебега, $w(x) \geq 0, x \in E$, w — измерима по Лебегу.

$e \subset E$, e — измеримо по Лебегу. $\mu_e = \int_e w(x) d\lambda$, $w(x)$ — плотность меры μ , $w(x)$ — её вес.

Вторая мера в каком-то смысле противоположная. Она сосредоточена на наборе точек и называется дискретной.

Пример 3.2. X — множество ($X \neq \emptyset$), $a \in X$

$$\sigma_n, e \subset X, \sigma_a(e) = \begin{cases} 1, a \in E \\ 0, a \notin e \end{cases}$$

$\forall e, e \subset X, e$ — измеримо

Пример 3.3 (Дискретная мера). X — бесконечное множество. $\{a_j\}_{j=1}^\infty, a_j \in X, a_j \neq a_k, j \neq k$

$$\{h_j\}_{j=1}^\infty, h_j > 0$$

$$\mu = \sum_{j=1}^\infty h_j \delta_{a_j}, e \subset X \quad \mu E = \sum_{\{j: a_j \in E\}} h_j$$

План такой: хотим ввести норму на множестве интегрируемых функций. Для этого нам надо ввести некоторые неравенства.

3.2. Классические неравенства

Теорема 3.1 (Неравенство Юнга). $p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (q — сопряженный показатель)

$$\Rightarrow ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^p}{q}$$

Доказательство. Пусть b — фиксировано, $\varphi(x) = \frac{x^p}{p} - xb, x \in [0, +\infty)$. Хотим найти $\min_{x \in [0, +\infty)} \varphi(x)$. Для этого посмотрим, где производная обращается в 0. $\varphi'(x) = x^{p-1} - b$, $\varphi'(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 = b^{\frac{1}{p-1}} \Rightarrow \varphi(x) > \varphi(x_0) \forall x \neq x_0, x \geq 0$. Таким образом, x_0 — строгий локальный минимум.

$$\begin{aligned}\varphi(x_0) &= \frac{1}{p} b^{\frac{p}{p-1}} - b^{\frac{p}{p-1}} = b^{\frac{p}{p-1}} \left(\frac{1}{p} - 1 \right) = \frac{b^q}{q} \\ -\frac{1}{q} &= \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p} \Rightarrow q = \frac{p}{p-1} \\ \varphi(x) &\geq -\frac{b^q}{q} \forall x \in [0, +\infty) \text{ то есть ОК}\end{aligned}$$

$$\varphi(x_0) = \frac{1}{p} b^{\frac{p}{p-1}} - b^{\frac{p}{p-1}} = b^{\frac{p}{p-1}} \left(\frac{1}{p} - 1 \right) = \frac{b^q}{q}$$

□

Замечание 3.1. Равенство в неравенстве Юнга достигается только при $a = b^{\frac{1}{p-1}}$

Теорема 3.2 (Неравенство Гельдера). (X, U, μ) — пространство с мерой. f, g — измеримые, $p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow$

$$\int_X |fg| d\mu \leq \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_X |g|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \quad (*)$$

Если $p = q = 2$, то это «Неравенство Коши-Бунаковского-Шварца», или на молодёжном математическом сленге неравенство КБШ

Доказательство. Для начала отбросим какие-то простые случаи.

$A = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, B = \left(\int_X |g|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$. Если $A = 0 \Leftrightarrow |f| = 0$ почти всюду по $\mu \Leftrightarrow f(x) = 0$ почти всюду по μ (то есть $\mu\{x : f(x) \neq 0\} = 0$) На всякий случай поясним, почему функция равна 0 почти всюду по мере μ

$$\int_X |f| d\mu = 0 \Rightarrow e = \{x : f(x) = 0\}, m \in \mathbb{N}, e_m = \{x : |f(x)| > \frac{1}{m}\}$$

$$e = \bigcup_{m=1}^{\infty} e_m \quad \int_X |f| d\mu \geq \int_{e_m} |f| d\mu \geq \frac{1}{m} \mu e_m \Rightarrow \mu e_m = 0 \Rightarrow \mu E = 0$$

$$\Rightarrow f(x) \cdot g(x) = 0 \text{ п.в.} \quad 0 \leq 0 \quad (*)$$

Если $A = +\infty$, то $(*)$

пусть $0 < A < +\infty, 0 < R < +\infty$

Неравенство Гельдера однородное, то есть если мы f умножим на константу, то левая и правая часть умножится на неё же, аналогично с g . Иногда бывает удобно ввести нормировку.

$$f_1(x) = \frac{f(x)}{A}, g_1(x) = \frac{g(x)}{B}, \int_X |f_1(x)|^p d\mu = \frac{A^p}{A^p} = 1, \int_X |g_1(x)|^q d\mu = 1$$

Пусть x — фиксирован, $a = |f(x)|, b = |g(x)| \xRightarrow{\text{п.Юнга}}$

$$\begin{aligned} |f_1(x)| \cdot |g_1(x)| &\leq \frac{|f_1(x)|^p}{p} + \frac{|g_1(x)|^q}{q} \text{ проинтегрируем } X \text{ по } \mu \\ \Rightarrow \int_X |f_1| \cdot |g_1| d\mu &\leq \frac{1}{p} \int_X |f_1|^p d\mu + \frac{1}{q} \int_X |g_1|^q d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \end{aligned}$$

Умножаем на $AB \Rightarrow \int_X |fg| d\mu \leq AB$ □

Теорема 3.3 (Неравенство Минковского). $(X, U, \mu), f, g$ — измеримые, $1 \leq p < +\infty \Rightarrow$

$$\underbrace{\left(\int_X |f(x) + g(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}}_C \leq \underbrace{\left(\int_X |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}}_A + \underbrace{\left(\int_X |fg(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}}_B \quad (*)$$

Доказательство. Сначала разберём простые случаи. $p = 1, x$ — фиксирован. $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$ проинтегрируем по $X \Rightarrow (*)$ при $p = 1$. Теперь пусть $p > 1$. Если $A = +\infty$, или $B = +\infty$, или $C = 0$, то $(*)$.

Теперь же пусть $A < +\infty, B < +\infty, C > 0$. Доказательство будет в два этапа. На первом этапе получим гораздо более слабое утверждение, вообще не то, что требуется в теореме, но оно нам понадобится. Докажем, что $C < +\infty$.

$a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow |a+b| \leq |a|+|b| \leq 2 \max(|a|, |b|) \Rightarrow |a+b|^p \leq 2^p \max(|a|^p, |b|^p) \leq 2^p(|a|^p + |b|^p) \Rightarrow$ при фиксированном x

$$|f(x) + g(x)|^p \leq 2^p(|f(x)|^p + |g(x)|^p) \text{ проинтегрируем по } X$$

$\Rightarrow C^p \leq 2^p(A^p + B^p) \Rightarrow C < +\infty$. Первая часть доказательства закончена.

$$C^p = \int_X |f+g|^p d\mu = \int_X |f+g| \cdot |f+g|^{p-1} d\mu \leq \int_X |f| \cdot |f+g|^{p-1} d\mu + \int_X |g| \cdot |f+g|^{p-1} d\mu$$

$$\int_X |f| \cdot |f+g|^{p-1} d\mu \stackrel{\text{н. Гельдера}}{\leq} \left(\int_X |f+g| d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\underbrace{\int_X |f+g| d\mu}_A \right)^{(p-1)q} = AC$$

$$\begin{aligned} \int_X |g| \cdot |f+g|^{p-1} d\mu &\stackrel{\text{аналогично}}{\leq} BC^{\frac{p}{q}} \Rightarrow \\ C^p &\leq (A+B)C^{\frac{p}{q}}, \quad 0 < C < +\infty \Rightarrow \\ C^{p-\frac{p}{q}} = C &\Rightarrow C \leq A+B \text{ (это (*))} \end{aligned}$$

□

3.3. Пространство Лебега

Отсюда и до определения L^∞ очень аккуратно с \mathcal{L} и L читать. Тут точно есть путаница, но записи лекции нет, чтобы ее устранить.

Определение 3.6. (X, U, μ) — пространство с мерой. $L(X, \mu)$ — пространство суммируемых функций. $1 \leq p < +\infty$ $\mathcal{L}^p(X, \mu) = \{f : |f|^p \in L(X, \mu)\}$

$$f \in L^p(X, \mu), \|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

Проверим, что $\|f\|_p$ — это полунорма на $L^p(X, \mu)$. $c \in \mathbb{R}$ (или \mathbb{C}). $\|cf\|_p = |c| \|f\|_p$

$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ — неравенство Минковского

$\|f\| = 0 \Leftrightarrow \int_X |f(x)|^p d\mu = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ почти всюду по мере μ на X .

Пример 3.4. $L[0, 1], \lambda$ — мера Лебега на $[0, 1]$.

функция Дирихле $\varphi(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad \int_0^1 |\varphi(x)| d\lambda = 0.$

$N = \{f - \text{измерима} \wedge f(x) = 0 \text{ почти всюду на } X \text{ по } \mu\}$. $\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f \in N$ (не зависит от p). Рецепт приготовления пространства с нормой из полуфбриката. пространство с полунормой. N — подпространство в L^p , $L^p = L^p/N$ — факторпространство.

$g, f \in L^p, f \sim g \Leftrightarrow f - g \in N \Leftrightarrow f(x) = g(x) \text{ почти всюду по } \mu$. \bar{f} — класс эквивалентности, $\bar{f} = \{g : f \sim g\}$.

$\|\bar{f}\|_p := \|f\|$, то есть можно взять любую функцию из класса эквивалентности.

$$\|\bar{f}\|_p = 0 \Leftrightarrow \int_X |f|^p d\mu = 0 \Leftrightarrow f \in N \Rightarrow \bar{f} = N = \bar{0} \Rightarrow$$

$\|\bar{f}\|_p$ — норма на L^p . Говорят, что $f \in L^p$, возьмём функцию из L^p , но имеют в виду, что возьмут класс эквивалентности, а из него возьмут функцию

Одна из главных целей — доказать, что эти пространства Банаховы. Сначала определим $L^\infty(X, \mu)$ (существенно ограниченные функции).

Определение 3.7 ($L^\infty(X, \mu)$). $f \in L^\infty(X, \mu)$, если

$$\exists c > 0 |f(x)| \leq c \text{ почти всюду на } X \text{ по } \mu (\mu\{x : |f(x)| > c\} = 0)$$

Возьмём точную нижнюю грань этой константы. $\|f\|_\infty = \inf\{c \geq 0 : \mu\{x : |f(x)| > c\} = 0\}$ (существующий \sup , или на подлом англосаксонском $\text{ess sup}_X f$)

Свойство 3.1. $f \in \mathcal{L}^\infty(X, \mu) \Rightarrow \mu\{f(x) > \|f\|_\infty\} = 0$

Доказательство. $e = \{x : |f(x)| > \|f\|_\infty\}, m \in \mathbb{N}$.

$$e_m = \{x : |f(x)| > \|f\|_\infty + \frac{1}{m}\} \Rightarrow \mu e_m = 0 \text{ по определению } \text{ess sup}_X f \\ \Rightarrow e = \bigcup_{m=1}^\infty e_m \Rightarrow \mu e = 0 \quad \square$$

$\|f\|_\infty$ — полунорма на \mathcal{L}^∞

$$\lambda \neq 0 \quad |\lambda f(x)| \leq |\lambda| \cdot c \Leftrightarrow |f(x)| \leq c \Rightarrow \|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \|f\|_\infty,$$

$$f, g \in \mathcal{L}^\infty, x \in X \Rightarrow |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \text{ для п.в. } x \text{ на } X \\ \Rightarrow \|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

$\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \mu\{x : |f(x)| > 0\} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ п.в. на $X \Leftrightarrow f \in N = \{f - \text{измерима, } f(x) = 0 \text{ п.в. на } X\}$

$$L^\infty = \mathcal{L}^\infty / N$$

Все, что Н.А. доказал для меры Лебега, верно и для других мер. Те доказательства и так были не особо веселые, чтобы их повторять.

Теорема 3.4 (Фату). (X, U, μ) , $\{g_n\}_{n=1}^\infty, g_n$ — измеримые, $g_n(x) \geq 0$

$$g_n(x) \xrightarrow{\text{п.в.}} g(x) \quad \int_X g_n(x) d\mu \leq C \text{ не зависит от } n \\ \Rightarrow \int_X g(x) d\mu \leq C$$

Первая существенная теорема, которая нам встретилась.

Теорема 3.5 (полнота пространства Лебега). $(X, U, \mu), 1 \leq p \leq +\infty \Rightarrow L^p(X, \mu)$ — банаховы.

Доказательство. при $1 \leq p < +\infty$ воспользуемся критерием полноты (если сходится ряд из норм, то сам ряд сходится)

$$\{f_n\}_{n=1}^\infty, f_n \in L^p, \sum_{n=1}^\infty \|f_n\|_p \leq C < +\infty \\ S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$$

Докажем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n(x) - f(x)\|_p = 0$. Существует ли $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$ почти всюду на X ?

Рассмотрим $\sigma_n(x) = \sum_{k=1}^n |f_k(x)| \Rightarrow \sigma_n(x)$ возрастает $\Rightarrow \exists \sigma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x)$. Возможно, $\sigma(x) = +\infty$ для некоторых x .

$$\|\sigma_n\|_p \leq \sum_{k=1}^n \|f_k\|_p \leq C$$

$$\int_X |\sigma_n(x)|^p d\mu \leq C^p \wedge \sigma_n(x)^p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sigma(x)^p \forall x \in X \stackrel{\text{т. Фату}}{\Rightarrow}$$

$\int_X \sigma(x)^p d\mu \leq c^p$ Самое главное, что мы из этого заключаем: $\sigma(x) < +\infty$ п.в. на X по μ .

$$x \in X \quad \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| < +\infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \text{ — СХОДИТСЯ}$$

$$f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \text{ определена п.в. на } X, \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p < +\infty, \varepsilon > 0$$

Применим критерий Коши: $\exists N \in \mathbb{N} \quad m > n > N \Rightarrow \sum_{k=n+1}^m \|f_k\|_p < \varepsilon$
 $\varepsilon \Rightarrow \|S_m(x) - S_n(x)\|_p \leq \sum_{k=n+1}^m \|f_k\|_p < \varepsilon$

$$\int_x |S_m(x) - S_n(x)|^p d\mu < \varepsilon^p (n \text{ фиксировано}) \wedge |S_m(x) - S_n(x)|^m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} |f(x) - S_n(x)|$$

$$\stackrel{\text{Фатты}}{\Rightarrow} \int_X |f - S_n|^p d\mu \leq \varepsilon^p \Rightarrow \|f - S_n\| \leq \varepsilon$$

$f - S_n \in L_p, S_n \in L^p \Rightarrow f = (f - S_n) + S_n \Rightarrow f \in L_p$ и $\|f - S_n\|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$
 Теперь осталось рассмотреть случай $p = \infty$. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальная, $f_n \in L^{\infty}$,

$$|f_n(x)| \leq \|f_n\|_{\infty} \quad x \in X \setminus e_n, \mu e_n = 0 \quad n \in \mathbb{N}$$

$e = \cup_{n=1}^{\infty} e_n, X_1 = X \setminus e \Rightarrow f_n \in m(X_1)$ — ограниченная функция. $m(X_1)$ — полное $\Rightarrow \{f_n\}$ — фундаментальна в $m(X_1) \Rightarrow \exists. / f \in m(X_1) \quad \sup_{x \in X_1} |f(x) - f_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Положим $f(x) = 0$ если $x \in e \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L^{\infty}} = 0 \quad \square$

3.4. Пространства l_n^p, l^p

$n \in \mathbb{N}, 1 \leq p < +\infty$.

Определение 3.8.

$$l_n^p = \left\{ \mathbb{R}^n, x = (x_1, \dots, x_n), x_j \in \mathbb{R}, \|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\}$$

Рассмотрим $X = \{1, 2, \dots, n\}$. Возьмём дискретную меру $\mu(j) = 1$ при $1 \leq j \leq n$, $l_n^p = L^p(X, \mu)$. $f \in L^p(X, \mu)$, $f(j) = x_j \Rightarrow l_n^p$ — полное.

Посмотрим, что будет обозначать сходимость этой нормы.

Теорема 3.6. $\{x^{(m)}\}_{m=1}^\infty, x = (x_1, \dots, x_n), x^{(m)} = (x_1^{(m)}, \dots, x_n^{(m)}), x^{(m)} \in l_n^p, q \leq p \leq +\infty$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|x - x^{(m)}\|_p = 0 \Leftrightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} x_j^{(m)} = x_j, 1 \leq j \leq n$$

Доказательство. \Rightarrow

Пусть j — фиксировано, $\lim_{m \rightarrow \infty} x^{(m)} = x$ в l_n^p .

При $p < +\infty$ $\|x - x^{(m)}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - x_i^{(m)}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq |x_j - x_j^{(m)}|$. Так как $\|x - x^{(m)}\|_p \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} |x_j - x_j^{(m)}| = 0$.

При $p = \infty$ $\|x - x^{(m)}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - x_i^{(m)}| \geq |x_j - x_j^{(m)}|$. Так как $\|x - x^{(m)}\|_\infty \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} |x_j - x_j^{(m)}| = 0$

Теперь \Leftarrow

$$1 \leq j \leq n \quad \lim_{m \rightarrow \infty} |x_j - x_j^{(m)}| = 0 \Rightarrow \left(\sum_{j=1}^n \|x_j - x_j^{(m)}\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{и} \Rightarrow \max_{1 \leq j \leq n} |x_j - x_j^{(m)}| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

□

Определение 3.9. $l_p = \{x : \{x_j\}_{j=1}^\infty, x_j \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \wedge \sum_{j=1}^\infty |x_j|^p < +\infty\}$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^\infty |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$X = \mathbb{N}, \mu(j) = 1, \mu = \sum_{n=1}^\infty \sigma_n$$

$$l^p = L^p(\mathbb{N}, \mu) \Rightarrow \text{полное} \quad 1 \leq p < +\infty$$

Замечание 3.2. $\{x^{(m)}\}_{m=1}^\infty, x^{(m)} \in l^p, \lim_{m \rightarrow \infty} \|x^{(m)} - x\|_p = 0 \Rightarrow \forall j \lim_{m \rightarrow \infty} x_j^{(m)} = x_j$ Например, \nrightarrow при $e_m = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots)$

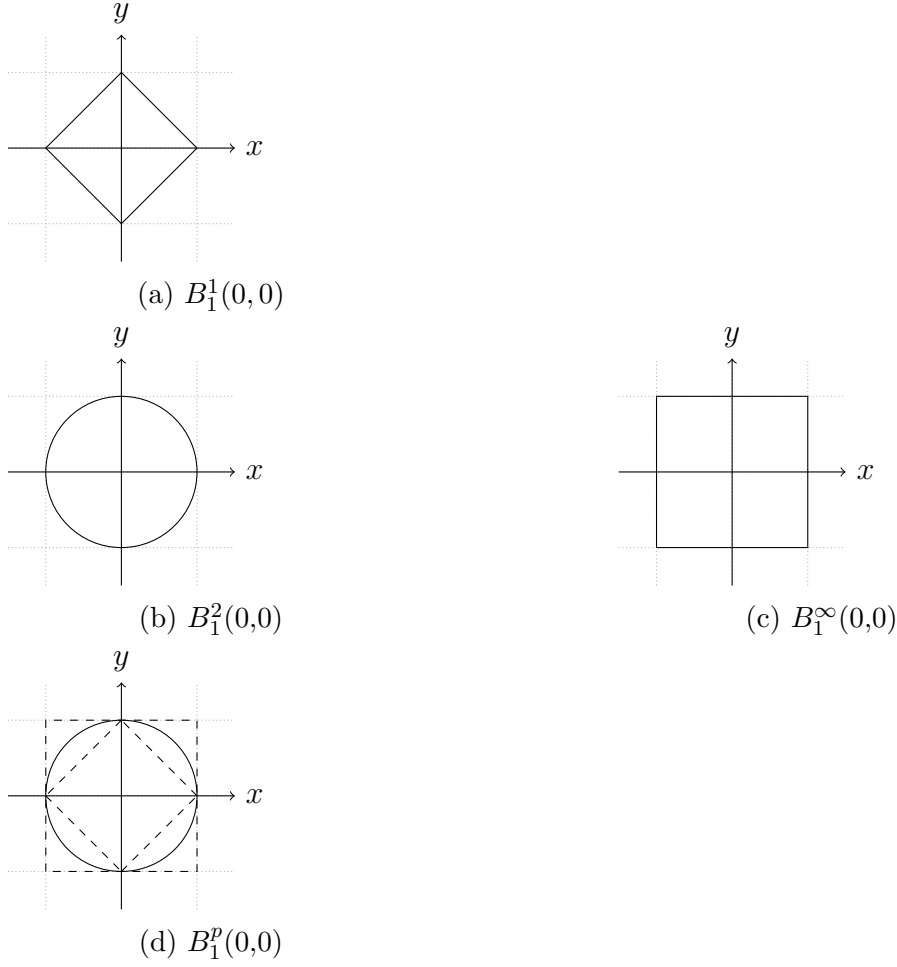


Рис. 3.1: Примеры единичных шаров в l_2^p

Пусть j фиксировано. $\lim_{m \rightarrow \infty} (e_m)_j = 0$ $\|e_m - \mathbb{0}\|_p = 1 \quad \forall p, 1 \leq p \leq +\infty$. В качестве упражнения доказать, что l^p — полное непосредственно.

На рисунке 3.1 приведены примеры единичных шаров в $l_2^p = \{(x, y) : (|x|^p + |y|^p)^{\frac{1}{p}}\}, 1 \leq p < +\infty$. Для l_2^∞ норма определяется $\|(x, y)\|_\infty = \max(|x|, |y|)$

3.5. Неполное нормированное пространство

Определение 3.10 (Финитное линейное пространство).

$$F = \{x = \{x_j\}_{j=1}^{\infty}, x_j \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \exists N(x) \in \mathbb{N} : n > N(x) \Rightarrow x_n = 0\}$$

$F \subset l^p \quad 1 \leq p \leq +\infty$. $(F, \|\cdot\|_p)$ — не полное, F — не замкнуто. Будем брать геометрическую прогрессию и обрывать ее на некотором члене.

$$x^{(m)} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^m}, 0, 0, 0, \dots \right\} \in F$$

$$X = \left\{ \frac{1}{2^k} \right\}_{k=1}^{\infty} \in l^p$$

$$1 \leq p < +\infty \quad \|x - x^{(m)}\|_p = \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^{kp}} \right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

Следовательно, F — не замкнуто.

В качестве упражнения проверить, что \overline{F} в l^p =? при $p < +\infty$ и при $p = \infty$.

Теорема 3.7. $C[a, b], \|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < +\infty$

$(C[a, b], \|\cdot\|)$ — не полное

Доказательство. При $p = 1$, $[a, b] = [-1, 1]$, $f \in C[a, b]$, $\int_a^b |f(x)|^p dx = 0 \Leftrightarrow f(x) \equiv 0$. Предъявим фундаментальную последовательность, предел которой не будет непрерывной функцией.

$$f_n = \begin{cases} 0, & -1 \leq x \leq 0 \\ nx, & x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 1, & x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}, f \in C[-1, 1]$$

f_n — фундаментальная в $(C[-1, 1], p = 1)$

Пусть $m > n$.

$$\int_{-1}^1 |f_m(x) - f_n(x)| dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right) \leq \frac{1}{2n} \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$$

Пусть $\exists f \in C[-1, 1] : \|f - f_n\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$$m \geq n \quad \int_{\frac{1}{n}}^1 \underbrace{|f(x) - 1|}_{=0} dx \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

$$\int_{\frac{1}{n}}^1 |f(x) - 1| dx \leq \int_0^1 |f(x) - f_m(x)| dx \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow f(x) = 1, x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \forall n$$

$$\begin{cases} \Rightarrow f(x) = 1, x \in (0, 1], f \text{ непрерывна}, f(0) = 1 \\ \text{аналогично } f(x) \equiv 0 \text{ на } [-1, 0] \end{cases} \Rightarrow \text{противоречие}$$

□

Глава 4

Пополнение метрического пространства

26.09.23

Мы привели несколько примеров нормированных пространств, не являющихся полными. Приведём еще один пример.

Определение 4.1.

$$P = \left\{ p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, a_k \in \mathbb{R}, n \geq 0 \right\}$$

P (подпространство в алгебраическом смысле) $\subset C[a, b]$, $\|p\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |p(x)|$, $e^x \notin P$, $p_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$, $\Rightarrow p_n \xrightarrow{[a, b], n \rightarrow \infty} e^x$ это не многочлен, потому что если сколько-то раз продифференцировать многочлен, он станет тождественным 0 $\Rightarrow \overline{P} \setminus P \ni e^x \Rightarrow P$ — не замкнуто $\Rightarrow P$ — не полное.

$$\overline{P} = C[a, b]$$

Теорема 4.1 (Вейерштрасса, 1885). $f \in C[a, b], \forall \varepsilon > 0 \exists p \in P$ т.ч. $\|f - p\| < \varepsilon$ (любую функцию на отрезке можно приблизить многочленами)

$$p_n \xrightarrow{G} f \Rightarrow f \text{ аналитическая в } G$$

4.1. Пополнение метрического пространства

Несколько простых свойств метрики, и все следуют из неравенства треугольника

Теорема 4.2 (Свойства метрики). (X, ρ) — метрическое

1. $x, y, z, u \in X \Rightarrow |\rho(x, u) - \rho(y, z)| \leq \rho(x, y) + \rho(u, z)$
2. $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow \rho(x, y)$ — непрерывная функция
3. $A \subset X, A$ — подмножество, $\rho(x, A) = \inf_{y \in A} \rho(x, y) \Rightarrow \rho(x, A)$ — непрерывная функция от x
4. $A \subset X, A = \overline{A}, x_0 \notin A \Rightarrow \rho(x_0, A) > 0$

Доказательство. 1. $\rho(x, u) \leq \rho(x, y) + \rho(y, u) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) + \rho(z, u) \Rightarrow \rho(x, u) - \rho(y, z) \leq \rho(x, y) + \rho(z, u)$ Аналогично $\rho(y, z) - \rho(x, u) \leq \dots$ из всего $\Rightarrow 1)$

2. Докажем непрерывность с помощью последовательности.
 $\rho(x, y)$ — непрерывная?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x) = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(y_n, y)$$

$$|\rho(x, y) - \rho(x_n, y_n)| \stackrel{(1)}{\leq} \rho(x, x_n) + \rho(y, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n) = \rho(x, y)$$

3. $A \subset X, x, z \in X, |\rho(x, A) - \rho(z, A)| \leq ?$
 Пусть $y \in A$

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &\leq \rho(x, z) + \rho(z, y) \Rightarrow \rho(x, A) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) \forall y \in A \\ &\Rightarrow \rho(x, A) \leq \rho(x, z) + \inf_{y \in A} \rho(z, y) = \rho(x, z) + \rho(z, A) \Rightarrow \\ &\rho(x, A) - \rho(z, A) \leq \rho(x, z) \end{aligned}$$

Но нам нужен модуль. Можем сказать, что x и z ничем не отличаются, аналогично $\rho(z, A) - \rho(x, A) \leq \rho(x, z) \Rightarrow 3$

4.

$$x_0 \notin A \Rightarrow x_0 \in X \setminus A \text{ открытое}$$

$$\Rightarrow \exists \delta > 0 \quad B_\delta(x_0) \subset X \setminus A \Rightarrow \rho(x_0, A) \geq \delta$$

□

Перед определением пополнения нам потребуется несколько определений, связанных с отображениями в метрических пространствах.

$(X, \rho), (Y, d)$ — метрические пространства. $T : X \rightarrow Y$.

Определение 4.2 (Изометрическое вложение).

$$d(T_x, T_z) = \rho(x, z) \quad \forall x, z \in X$$

Обозначение: $X \hookrightarrow Y$

Определение 4.3 (Изометрия). T — изометрическое вложение, $T(X) = Y$

Определение 4.4 (Изометричность пространств). $(X, \rho), (Y, d)$ изометричны, если $\exists T : X \rightarrow Y, T$ — изометрия

Свойство 4.1. T — изометрическое вложение $\Rightarrow T$ — инъективное, непрерывное

Доказательство. $x, z \in X, T : X \rightarrow Y$, пусть $T_x = T_z \Rightarrow d(T_x, T_z) = 0$. Значит, исходное расстояние тоже 0 по свойству метрики. $d(x, z) = 0 \Rightarrow x = z$

Инъективность проверили, теперь непрерывность, это еще проще.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x, x_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} d(T_{x_n}, T_x) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} T_{x_n} = T_x$$

□

Свойство 4.2. Если T — изометрия, то $\exists T^{-1}$ — изометрия.

Свойство 4.3. «Изометричность» — отношение эквивалентности на множестве метрических пространств

И наконец

Определение 4.5 (Пополнение м. пространства). (X, ρ) — метрическое пространство. (Z, d) — полное метрическое пространство. (Z, d) — пополнение (X, ρ) , если существует $T : X \rightarrow Z$

1. T — изометрическое вложение
2. $\overline{T(X)} = Z$

Замечание 4.1. Не обязательно искать пространство, удовлетворяющее и второму свойству. Достаточно найти такое, которое удовлетворяет первому. (X, ρ) — метрическое пространство, (U, d) — полное метрическое пространство. Пусть $\exists T : X \rightarrow U$ — изометрическое вложение. Если 2 свойство не выполняется, то легко такое Z построить. Возьмём замыкание образа. $Z = \overline{T(X)} \Rightarrow (Z, d)$ — пополнение X .

Теперь обещанная теорема. Возьмём любое метрическое пространство и покажем, что у него есть пополнение.

Теорема 4.3 (О пополнении метрического пространства).
 (X, ρ) — метрическое $\Rightarrow \exists$ пополнение (Z, d)

Доказательство. Есть классическое доказательство с рассмотрением всех фундаментальных последовательностей, рассмотрением факторпространства, муторным разбором случаев. Мы пойдем другим путём. Будет короткое, но **фантастически** непонятное доказательство в том смысле, что непонятно, как его придумать.

Мы собираемся использовать $m(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R}, \sup_{x \in X} |f(x)| < +\infty\}$

$$\|f\|_{m(X)} = \|f\|_{\infty} = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

$m(X)$ — полное пространство.

Каждой точке мы сопоставим функцию. Вот такая идея! $\varphi : X \rightarrow m(X)$. Оно же будет изометрическим вложением, то есть будет сохранять расстояния.

Сначала будет маленькое облегчающее предположение про X , от которого мы потом откажемся. Пусть X — ограниченное, то есть $\exists M > 0$ т.ч. $\forall x, y \in X \rho(x, y) \leq M$. Единственная цель предположения — формула для φ будет чуть проще. Вообще, можно было бы обойтись и без него.

$t \in X, t$ — фиксирован, $f_t(x) = \rho(x, t)$. При фиксированном t — это

функция на X . Именно сюда наше отображение будет отображать t .
Одной точке — целая функция, понятно?

$$\begin{aligned}\varphi(t) &:= f_t(x) \text{ т.е. } \varphi : t \rightarrow f_t(x) \\ |f_t(x)| &\leq M \Rightarrow f_t \in m(X)\end{aligned}$$

Самое главное. Проверим, что отображение сохраняет расстояния.
Это очень легко. Возьмём 2 точки.

$$\text{Пусть } t, s \in X, \quad \|f_t - f_s\|_\infty = \sup_{x \in X} |\rho(x, y) - \rho(x, s)|$$

$$|\rho(x, t) - \rho(x, s)| \leq \rho(t, s), \quad \text{Пусть } x = t \Rightarrow |\rho(t, t) - \rho(t, s)| = \rho(t, s)$$

$$\Rightarrow \|\varphi(t) - \varphi(s)\|_\infty = \rho(t, s) \Rightarrow \varphi - \text{изометрическое вложение}$$

Посмотрим, что будет, если откажемся от этого облегчающего предположения. Надо будет чуть исправить отображение φ . X — любое метрическое пространство. $a \in X$ — фиксированная точка.

$$t \in X, f_t(x) = \rho(x, t) - \rho(x, a) \Rightarrow |f_t(x)| \leq \rho(a, t) \Rightarrow f_t \in m(X)$$

Раньше мы могли так брать и не вылетать из пространства из-за ограниченности. Вычтем эту штуку, чтобы попасть, куда надо.

$$t, s \in X \Rightarrow f_t(x) - f_s(x) = \rho(x, t) - \rho(x, s) \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \|f_t - f_s\|_\infty = \rho(s, t)$$

$$\text{Пополнение } X: \overline{\varphi(X)}^{\|\cdot\|_\infty} = Z, (Z, \|\cdot\|_\infty)$$

□

Таким образом, изучение метрических пространств можно свести к изучению подмножества пространства непрерывных функций.

Замечание 4.2. Забегая далеко вперёд. $(X, \|\cdot\|)$ — нормированное, X^* — множество непрерывных линейных функционалов на X , X^* — полное (ВСЕГДА).

Мы построим каноническое вложение $\pi : X \rightarrow \underbrace{(X^*)^*}_{\text{полное}}, \overline{\varphi(x)}^{X^{**}}$ —
пополнение X .

4.2. Теорема о вложенных шарах

Когда-то в анализе была теорема Кантора о том, что если есть последовательность вложенных друг в друга отрезков, то их пересечение не пусто. Мы докажем похожее утверждение для метрических пространств. Оказывается, то утверждение было связано с полнотой вещественной прямой \mathbb{R} . (X, ρ) — метрическое пространство, $r > 0, x \in X$
Введём стандартное обозначение замкнутого шара.

$$D_r(x) = \{y \in X : \rho(x, y) \leq r\}$$

Теорема 4.4 (О вложенных шарах). (X, ρ) — метрическое пространство. X — полное ($| \Leftrightarrow (\forall \{D_n\}_{n=1}^{\infty}, D_n = D_{r_n}(x_n), D_{n+1} \subset D_n, \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0 \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{+\infty} D_n \neq \emptyset)$). По сравнению с теоремой Кантора у нас есть дополнительное предположение о стремлении к нулю, которое здесь важно, а на прямой было как данность.

Доказательство. \Rightarrow X — полное

$$\{D_n\}_{n=1}^{\infty}, D_n = D_{r_n}(x_n), D_{n+1} \subset D_n, \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$$

Надо проверить, что центры шаров образуют фундаментальную последовательность, то есть что $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальная.

Пусть $\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad r_n < \varepsilon$ при $n \geq N$.

$$(n > N \wedge m > N) \Rightarrow (x_n \in D_n \wedge x_m \in D_n) \Rightarrow \rho(x_n, x_m) \leq \\ \leq \rho(x_n, x_N) + \rho(x_m, x_N) \leq 2\varepsilon$$

$$X \text{ — полное} \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

любое фиксированное $m \in \mathbb{N} \quad x_n \in D_m \forall n \geq m, D_m$ — замкнутое

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty, n \geq m} x_n = x \in D_m$$

$$\Rightarrow x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} D_m$$

\Leftarrow

Ничего кроме определения для доказательства полноты у нас нет.

Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальная. Возьмём достаточно быстро убывающую последовательность $\varepsilon_k = \frac{1}{2^k}$. Существует $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}, \rho(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < \frac{1}{2^{k+1}}$.

$$D_k = D_{\varepsilon_k}(x_{n_k})$$

$$\begin{cases} y \in D_{k+1} \Rightarrow \rho(y, x_{n_{k+1}}) \leq \frac{1}{2^{k+1}} \\ \rho(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < \frac{1}{2^{k+1}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\rho(y, x_{n_k}) \leq \rho(y, x_{n_{k+1}}) + \rho(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) < \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^k} \\ \Rightarrow y \in D_k \Rightarrow D_{k+1} \subset D_k$$

Мы взяли произвольный элемент из D_{k+1} и показали, что он принадлежит D_k , то есть показали вложенность элементов последовательности.

$$\Rightarrow \exists x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} D_k \quad \rho(x, x_{n_k}) \leq \frac{1}{2^k} \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$$

По свойству фундаментальных последовательностей из первой лекции $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ \square

Замечание 4.3. В условиях теоремы пересечение вложенных шаров $\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$ состоит из одной точки.

Доказательство. Пусть $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n, \Rightarrow \rho(x, x_n) \in r_n, \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. А мы знаем, что предел в метрическом пространстве единственный. \square

Замечание 4.4. Условие, что $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$ в теореме существенно.

Пример 4.1 (Замкнутые множества). $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}, F_n$ — замкнутое, $F_{n+1} \subset F_n, F_n \subset \mathbb{R}, \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset, F_n = [n, +\infty)$

Пример 4.2 (По теореме).

$$X[1, +\infty) \quad \rho(x, y) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{x+y}, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

Проверим, что ρ — метрика. x, y, z

$$\rho(x, y) + \rho(y, z) = 1 + \frac{1}{x+y} + 1 + \frac{1}{y+z} > 1 + 1 > 1 + \frac{1}{x+z} = \rho(x, z)$$

Проверяем полноту. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальная, $\varepsilon = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$$\exists N \in \mathbb{N} : (n \geq N \wedge m \geq N) \rho(x_n, x_m) < \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\rho(x_n, x_N) < \frac{1}{2} \wedge \rho(x_m, x_N) < \frac{1}{2} \right) \Rightarrow$$

$$x_N = x_{N+1} = x_{N+2} = \dots$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_N \Rightarrow (X, \rho) \text{ — полное}$$

Полноту проверили.

$$r_n = 1 + \frac{1}{2n}, x_n = n; D_n = D_{r_n}(n), h \in D_n. \text{ Пусть } x \neq n, x \in D_n \Rightarrow \rho(x, x_n) = 1 + \frac{1}{x+n} \leq 1 + \frac{1}{2n}$$

Замечание 4.5 (Домашнее задание). Если $(X, \|\cdot\|)$ — банахово, то $D_{n+1} \subset D_n \{D_n\}_{n=1}^{\infty} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n \neq \emptyset$ (требование $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$ лишнее)

4.3. Сепарабельные пространства

(X, ρ) — метрическое пространство,

Определение 4.6 (A плотно в C). $A \subset X, C \subset X$. A плотно в C , если $C \subset \overline{A} \Leftrightarrow$

$$\forall x \in C \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A \rho(x, A) < \varepsilon \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 C \subset \bigcup_{a \in A} B_\varepsilon(a)$$

Любой элемент C можно сколь угодно хорошо приблизить элементами из A .

Определение 4.7 (A всюду плотно в C). A — всюду плотно в X , если $\overline{A} = X$

Чем же полезно это свойство? Если хотят доказать свойство для X , то часто доказывают сначала для всюду плотного подмножества.

Определение 4.8 (Сепарабельное пространство). (X, ρ) — сепарабельное, если $\exists E \subset X, E = \{x_n\}_{n=1}^\infty, \overline{E} = X$

Теорема 4.5. $n \in \mathbb{N}, q \leq p \leq +\infty$,

$$l_n^p \text{ — сепарабельное}$$

Доказательство.

$$l_n^p = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p) = \{x = (x_1, \dots, x_n), x_j \in \mathbb{R}, \|x\|_p\}$$

$$E = \mathbb{Q}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n), x_j \in \mathbb{Q}\}$$

Если $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_p), \tilde{\mathbb{Q}} = \{x + iy, x, y \in \mathbb{Q}\}, E = \tilde{\mathbb{Q}}^n$

□

Теорема 4.6. F — финитные последовательности, $1 \leq p \leq +\infty$

$$(F, \|\cdot\|_p) \text{ — сепарабельно}$$

Доказательство. $E = \bigcup_{n=1}^\infty \mathbb{Q}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_{N(x)}, 0, 0, \dots), x_j \in \mathbb{Q}\}$. Попросту говоря, все финитные последовательности, координаты которых рациональны. □

Теорема 4.7. $l^p, 1 \leq p < +\infty, C_0$ — сепарабельные

Доказательство. На прошлой лекции мы доказали, что

$$\begin{aligned} (F, \|\cdot\|_p), \overline{F}^{\|\cdot\|_p} = l^p \text{ при } 1 \leq p < +\infty \\ \begin{cases} E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}^n \text{ — всюду плотно в } F \\ F \text{ — всюду плотное в } l^p \end{cases} \Rightarrow \\ E \text{ всюду плотно в } l^p, 1 \leq p < +\infty \end{aligned}$$

Почему любой элемент из l^p может быть приближен финитной последовательностью? Мы ее просто отрезаем. \square

Ответ на упражнение для читателя, которое было на прошлой лекции: F — подпространство в алгебраическом смысле, $F \subset l^\infty$, $\overline{F}^{\|\cdot\|_\infty} = C_0$

$$x_0 \in C_0 \Leftrightarrow x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

берем первые m координат и дополняем их нулями

$$\begin{aligned} x^{(m)} = (x_1, \dots, x_m, 0, 0, \dots, 0, \dots) \Rightarrow x^{(m)} \in F \\ \|x - x^{(m)}\|_\infty = \sup_{k > m} |x_k| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Остаётся вопрос, почему C_0 — замкнутое множество. Можно в лоб, а можно по-учённому рассудить.

$$\begin{aligned} \text{пусть } \{y^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}, y^{(m)} \in C_0, y^{(m)} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} y \text{ в } C_0 \\ \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} \|y - y^{(m)}\|_\infty = 0 \quad y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0 ??? \end{aligned}$$

А это равномерная сходимостъ на множестве натуральных чисел, то есть это тот случай, когда можно менять местами пределы.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n^{(m)}}_{=0} = 0$$

Упражнение: C — сепарабельное, $C \subset l^\infty$

Теорема 4.8. l^∞ — не сепарабельное

Какой бы шарик из X мы бы не предъявили, там всегда будет элемент всюду плотного множества.

Доказательство.

$$A \subset \mathbb{N} \quad X_n^A = \begin{cases} 1, n \in A \\ 0, n \notin A \end{cases}$$

Мощность $\{A, A \subset \mathbb{N}\}$ — континуум ($>$ счётное). Это и будет центр пересекающихся шариков. Посмотрим, каким будет расстояние между двумя разными точками.

$$A \subset \mathbb{N}, C \subset \mathbb{N}, A \neq C$$

$$X_n^A - X_n^C = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases} \Rightarrow \|x^A - x^C\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |X_n^A - X_n^C| = 1$$

То есть если 2 множества не равны, то расстояние между ними — единица.

$$B_{\frac{1}{2}}(x^A) \cap B_{\frac{1}{2}}(x^C) = \emptyset$$

Мы предъявили несчётный набор дизъюнктивных шариков. E — всюду плотно в $l^\infty \Rightarrow \forall A \subset \mathbb{N} \exists e_A \in B_{\frac{1}{2}}(x^A)$

$$A \neq C \Rightarrow e_A \neq e_C, \quad \underbrace{\{e_A\}_{A \subset \mathbb{N}}}_{\text{несчётно}} \subset E \Rightarrow E \text{ несчётно}$$

То, что у всех шариков одинаковый радиус — это просто приятный бонус. \square

Теорема 4.9. (X, ρ) — сепарабельное, $Y \subset X \Rightarrow (Y, \rho)$ — сепарабельное.

Доказательство. $\exists E = \{x_n\}_{n=1}^\infty$ — всюду плотно в X , $x_0 \in X$

$$\rho(x_n, Y) = \inf_{y \in Y} \rho(x_n, y) \Rightarrow$$

$$\exists \{y_{n,k}\}_{k=1}^\infty \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_{n,k}) = \rho(x_n, Y)$$

$$y_{n,k} \in Y, F = \{y_{n,k}\}_{n,k} \text{ — счётное, } F \subset Y$$

Проверим, что F — всюду плотно в Y . Пусть $y \in Y, \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists x_n : \rho(y, x_n) < \varepsilon$. Из этого неравенства мы делаем вывод, что $\rho(x_n, Y) < \varepsilon$. Значит, $\exists k : \rho(x_n, y_{n,k}) < \varepsilon \Rightarrow$

$$\rho(y, y_{n,k}) \leq \rho(y, x_n) + \rho(x_n, y_{n,k}) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

\square

Следствие 4.1. X — бесконечное множество $\Rightarrow m(X)$ — не сепарабельное.

Доказательство. Можно слово в слово повторить доказательство для l^∞ , но мы воспользуемся последними доказанными теоремами.

$$\begin{aligned} & \exists \{a_j\}_{j=1}^\infty, a_j \in X, a_j \neq a_i \text{ при } i \neq j \\ Y = \{f \in m(X), f(x) = 0 \text{ если } x \neq a_j\} \sup_{j \in \mathbb{N}} |f(a_j)| < +\infty \\ Y \text{ изометрично } l^\infty, f \in Y, T(f) = \{f(a_j)\}_{j=1}^\infty \in l^\infty \\ Y \text{ — не сепарабельно} \Rightarrow \text{и по последней теореме} \\ m(X) \text{ — не сепарабельно} \end{aligned}$$

□

Теорема 4.10.

$C[a, b]$ — сепарабельно

1 часть.

$$\begin{aligned} L = \{ \text{ломанные} \} \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \quad \{y_k\}_{k=0}^n, y_k \in \mathbb{R} \\ L(x) \text{ — ломанные} \\ L(x_k) = y_k, k = 0, 1, \dots, n \quad l(x) \text{ линейная на } [x_k, x_{k+1}] \end{aligned}$$

Отметим, что L — всюду плотное множество в пространстве непрерывных функций. Это связано с равномерной непрерывностью. Никаких надежд на то, что оно будет счётным нет.

$$\begin{aligned} \text{пусть } f \in C[a, b], \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : |x - y| < \delta \\ \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \\ \exists \{x_k\}_{k=0}^n \text{ — разбиение} \quad x_{k+1} - x_k < \delta \\ y_k := f(x_k) \quad L(x) \text{ — ломаная} \\ \Rightarrow |f(x) - L(x)| < \varepsilon \Rightarrow \|f - L\|_\infty \leq \varepsilon \Rightarrow \overline{\mathcal{L}} = C[a, b] \end{aligned}$$

как сделать так, чтобы множество ломаных было счётным? возьмём в качестве вершин элементы \mathbb{Q}

$$\begin{aligned} E = \{L \in \mathcal{L}, x_k, y_k \in \mathbb{Q}\} \text{ — счетное множество} \\ \begin{cases} \mathcal{L} \subset \overline{E} \\ \overline{\mathcal{L}} = C[a, b] \end{cases} \Rightarrow E \text{ — всюду плотно, т.е. } \overline{E} = C[a, b] \end{aligned}$$

□

2 часть. по т. Вейерштрасса замыкание многочленов — тоже пространство непрерывных функций.

$$P = \{p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k\} \quad \overline{P} = C[a, b]$$

$$E = \{p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, a_k \in \mathbb{Q}\}$$

$$\begin{cases} P \subset \overline{E} \\ \overline{P} = C[a, b] \end{cases} \Rightarrow \overline{E} = C[a, b]$$

□

4.4. Нигде не плотные множества

Определение 4.9. (X, ρ) — метрическое пространство. $A \subset X$, A — **нигде не плотно** в X , если

$$\forall B_r(x) \text{ при } r > 0, x \in X \quad B_r(x) \not\subset \overline{A} \Leftrightarrow \text{Int}(\overline{A}) = \emptyset \Leftrightarrow$$

Если мы рассмотрим замыкание, никакого шарика там не будет. Иначе: если мы рассмотрим внутренность замыкания, она будет пустой.

$$\begin{aligned} \forall r > 0, x \in X \quad B_r(x) \ni B_{r_1}(x_1) \subset B_r(x), B_{r_1}(x_1) \cap A = \emptyset \\ \Leftrightarrow \forall r > 0, x \in X \quad D_r(x) \ni D_{r_1}(x_1) \subset D_r(X), D_{r_1}(x_1) \cap A = \emptyset \end{aligned}$$

Скоро докажем связь между нигде не плотными множествами и полными пространствами. Но сперва определение, которое не будет часто встречаться, но сам факт — полезный.

Определение 4.10 (множество первой категории). $M \subset X, (X, \rho)$. M — **множество первой категории**, если

$$M = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j, E_j \text{ нигде не плотно в } X$$

M — **множество второй категории**, если M нельзя представить в виде объединения счетного числа нигде не плотных множеств.

Теорема 4.11 (Бэр, о категориях). (X, ρ) — полное $\Rightarrow X$ — множество второй категории.

Доказательство. Можно было бы даже от противного. Но мы возьмём семейство $\{M_j\}_{j=1}^{\infty}$, M_j — нигде не плотно в X , $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} M_j$. Мы докажем, что найдётся хоть одна точка, которая принадлежит X и не принадлежит E . Это и будет означать, что X невозможно представить в виде такого объединения.

$$\begin{aligned} x_0 \in X \quad D_0 = \{y : \rho(x_0, y) \leq 1\} \\ M_1 \text{ — нигде не плотно} \Rightarrow \exists D_1 = D_{r_1}(x_1) \subset D_0, D_1 \cap M_1 = \emptyset \\ r_1 < 1 \end{aligned}$$

Теперь мы то же соображение применим к множеству M_2 , которое тоже нигде не плотно

$$\begin{aligned} \exists D_2 = D_{r_2}(x_2) \subset D_1, D_2 \cap M_2 = \emptyset \\ r_2 < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

и так далее $\left\{ \begin{array}{l} \{D_n\}_{n=1}^{\infty}, D_n = D_{r_n}(x_n), D_{n+1} \subset D_n \\ D_n \cap M_n = \emptyset, r_n < \frac{1}{n} \end{array} \right.$ по теореме о вложенных шарах $\Rightarrow \exists x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n, (x \in D_n \wedge x \in X \setminus E) \Rightarrow x \notin M_n \forall n \Rightarrow x \notin E$ \square

4.5. Полные семейства элементов

Теперь мы будем понимать полноту в совершенно другом смысле. Сначала вспомним, что такое линейная оболочка пространства.

Определение 4.11 (Линейная оболочка). X — линейное пространство над $\mathbb{R}(\mathbb{C})$. Рассмотрим семейство $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — семейство элементов, $x_\alpha \in X$.

$$\mathcal{L}\{x_\alpha\}_{\alpha \in A} = \left\{ \sum_{k=1}^n c_k x_{\alpha_k}, c_k \in \mathbb{R}(\mathbb{C}), n \in \mathbb{N} \right\}$$

Определение 4.12 (Полное семейство). $(X, \|\cdot\|)$, $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — полное семейство, если $\overline{\mathcal{L}\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}} = X$. То есть линейная оболочка всюду плотна в X .

Пример 4.3. $C[a, b]$, $\{x^n\}_{n=0}^{+\infty}$ — полное семейство в $C[a, b]$, так как $P = \mathcal{L}\{x^n\}_{n=0}^{+\infty}$, $\overline{P} = C[a, b]$

Пример 4.4. l^p , $1 \leq p < +\infty$, C_0

$e_n = (1, 0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_n, 0, \dots)$, $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ — полное семейство

$\mathcal{L}\{e_n\}_{n=1}^\infty = F$ — финитная последовательность

Упражнение: C — что полное семейство?

03.10.23

Утверждение 4.1. $(X, \|\cdot\|)$ — нормированное пространство. В нём существует $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ — полное семейство

X — сепарабельное

Доказательство. Рассмотрим линейную оболочку $L = \mathcal{L}\{x_n\}_{n=1}^\infty = \{x = \sum_{j=1}^n c_j x_j, c_j \in \mathbb{R}(\mathbb{C})\}$. $\overline{L} = X$.

$E = \{x = \sum_{j=1}^n c_j x_j, c_j \in \mathbb{Q}\}$ — счётное всюду плотное

$$(L \subset \overline{E} \wedge \overline{L} = X) \Rightarrow \overline{E} = X$$

□

Замечание 4.6. $l^\infty, E = \{x = \{x_n\}_{n=1}^\infty, x_n \in \mathbb{Q}, \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < +\infty\}$. $\overline{E} = l^\infty$, E — не счётное.

4.6. Полные и плотные множества в L^p

Сначала небольшое замечание. (X, U, μ) — пространство с мерой $e \in U$ — измеримые множества, $\chi_e(x) = \begin{cases} 1, x \in E \\ 0, x \notin E \end{cases}$ — характеристическая функция. $\chi \in L^\infty(X, \mu)$, $\forall e \in U$

$$\chi_e \in L^p(X, \mu) \text{ при } 1 \leq p < +\infty \Leftrightarrow \int_X (\chi_e(x))^p d\mu < +\infty \Leftrightarrow \mu e < +\infty$$

Теорема 4.12. (X, U, μ) — пространство с мерой \Rightarrow

$\{\chi_e\}_{e \in U}$ — полное семейство в $L^\infty(X, \mu)$

$\{\chi_e\}_{e \in U, \mu E < +\infty}$ — полное семейство в $L^p(X, \mu), 1 \leq p < +\infty$

Для доказательства этой теоремы нужно будет вспомнить теорему Лебега из анализа (она у нас уже была).

Теорема 4.13 (Лебег). $\{h_n(x)\}_{n=1}^\infty$ — измеримые, $\varphi(x)$.
 $\int_X \varphi(x) d\mu < +\infty, |h_n(x)| \leq \varphi(x)$ п.в. на X

$$h_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty \text{ п.в. по } \mu]{} h(x) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X h_n(x) d\mu = \int_X h(x) d\mu$$

Доказательство. Вспомним конструкцию, которая была в математическом анализе. f — измеримая, $f(x) \geq 0, x \in X$. Рассмотрим разбиение множества X , а по нему построим соответствующую простую функцию

$$n \in \mathbb{N} \quad e_k = \{x \in X : \frac{k}{n} \leq f(x) < \frac{k+1}{n}\}, k = 0, 1, \dots, n^2 - 1$$

$$e_{n^2} = \{x : f(x) \geq n\} \Rightarrow X = \bigcup_{k=0}^{n^2} e_k, e_k \cap e_j = \emptyset (k \neq j)$$

Теперь построим измеримые функции, потом они будут простыми.

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{k}{n} \chi_{e_k} \quad 0 \leq g_n(x) \leq f(x), x \in X$$

$$f(x) \leq g_n(x) + \frac{1}{n}, x \in \bigcup_{k=0}^{n^2-1} e_k$$

Теперь все готово, чтобы обсудить случай L^∞ . Пусть $f \in L^\infty(X, \mu) \Rightarrow$
 $n \geq \|f\|_\infty \Rightarrow \mu(e_{n^2}) = 0. \Rightarrow |f(x) - g_n(x)| \leq \frac{1}{n}$ для п.в. $x \in X$

$$\Rightarrow \|f - g_n\|_\infty \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, g_n \in \mathcal{L}\{\chi_e\}_{e \in U}$$

$$\Rightarrow f \in \overline{\mathcal{L}\{\chi_e\}_{e \in U}}$$

Посмотрим теперь, что происходит с конечными p . Тут вспоминаем теорему Лебега, она была верна для интеграла Лебега, но верна и для

ГЛАВА 4. ПОПОЛНЕНИЕ МЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА 44

произвольной меры.

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) \in L^p(X, \mu), 1 \leq p < +\infty \quad |f(x) - g_n(x)|^p \leq |f(x)|^p \\ g_n(x)f(x) \Rightarrow |f(x) - g_n(x)|^p \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \end{array} \right. \xRightarrow{\text{Лебег}} \text{п.в.}$$

все, что надо — убедиться, что мера конечная $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_X |f - g_n|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = 0$

$$\begin{aligned} f \in L^p \Rightarrow \mu e_k < +\infty \quad f(x) \geq \frac{k}{n}, x \in e_k \Rightarrow \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} &\geq \left(\int_{e_k} \left(\frac{k}{n} \right)^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= \frac{k}{n} (\mu e_k)^{\frac{1}{p}} \Rightarrow \mu e_k < +\infty \\ &\Rightarrow f \in \overline{\mathcal{L}\{\chi_e\}_{e \in U, \mu e < +\infty}} \end{aligned}$$

Теперь покажем, что для произвольных f рассуждение тоже верно. Рассмотрим замыкание линейное оболочка

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} f : X \rightarrow \mathbb{R}, \Rightarrow f = f_+ - f_-, f_+(x) \geq 0, f_-(x) \geq 0 \\ f : X \rightarrow \mathbb{C} \Rightarrow f = u + iv; u, v : X \rightarrow \mathbb{R} \end{array} \right. \Rightarrow \\ \forall f \in L^p, f \in \overline{\mathcal{L}\{\chi_e\}_{e \in U}} \\ (p = \infty \forall e, p < +\infty, \mu e < +\infty) \end{aligned}$$

□

Теперь, зная эту теорему, посмотрим, какое множество будет полным в пространстве l^∞

Следствие 4.2. $l^\infty, A \subset \mathbb{N}, X^A = \{x_n^A\}_{n=1}^\infty, X_n^A = \begin{cases} 1, n \in A \\ 0, n \notin A \end{cases} \Rightarrow$

$\{X^A\}_{A \subset \mathbb{N}}$ — полное семейство в l^∞

Доказательство. $l^\infty = L^\infty(\mathbb{N}, \mu), \mu(n) = 1 \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall A \subset \mathbb{N}, A$ — измеримо

$$\chi_A = X^A \Rightarrow \{X^A\}_{A \subset \mathbb{N}} \text{ — полное семейство}$$

□

Теорема 4.14. $(\mathbb{R}^n, U, \lambda)$, λ — классическая мера Лебега. U — измеримые по Лебегу множества.

$$\mathcal{R} = \left\{ \Delta = \prod_{j=1}^n [a_j, b_j), a_j < b_j; a_j, b_j \in \mathbb{R} \right\} \text{ — множество ячеек}$$

$$\Rightarrow \{\chi_\Delta\}_{\Delta \in \mathcal{R}} \text{ — полное семейство в } L^p(\mathbb{R}^n, \lambda), 1 \leq p < +\infty$$

Достаточно рассмотреть характеристические множества ячеек.

Доказательство. Собираемся приблизить множество линейной комбинацией характеристических функций ячеек. Вспомним определение внешней меры.

$$e \in U, \lambda(e) < +\infty$$

$$\lambda(e) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(\Delta_k), e \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k, \Delta_k \in \mathcal{R}, \Delta_k \cap \Delta_j = \emptyset \right\}$$

Сначала просто по определению нижней грани. $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \{\Delta_k\}_{k=1}^n$.

$$\lambda(e) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(\Delta_k) < \lambda(e) + \varepsilon.$$

$$e \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k, \Delta_k \in \mathcal{R}, \Delta_k \cap \Delta_j = \emptyset \text{ при } k \neq j.$$

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k, e \subset A, \lambda(A \setminus e) < \varepsilon$$

$$\begin{aligned} \exists N \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=N+1}^{\infty} \lambda(\Delta_k) < \varepsilon, B = \bigcup_{k=1}^N \Delta_k \\ \Rightarrow \lambda(A \setminus B) < \varepsilon \end{aligned}$$

$$\|\chi_e - \chi_b\|_p \leq \|\chi_e - \chi\|_p + \|\chi_A - \chi_B\|_p \leq$$

$$\left(\int_{A \setminus e} 1 d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{A \setminus B} 1 d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon^{\frac{1}{p}} + \varepsilon^{\frac{1}{p}} = 2\varepsilon^{\frac{1}{p}}$$

$$\chi_b = \sum_{k=1}^N \chi_{\Delta_k} \in \mathcal{L}\{\chi_\Delta\}_{\Delta \in \mathcal{R}}$$

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{L}\{\chi_e\}_{e \in U}} = L^p \\ \chi_e \in \overline{\mathcal{L}\{\chi_\Delta\}_{\Delta \in \mathcal{R}}} \Rightarrow \overline{\mathcal{L}\{\chi_\Delta\}_{\Delta \in \mathcal{R}}} = L^p, 1 \leq p < +\infty \end{aligned}$$

□

Следствие 4.3. $E \subset \mathbb{R}^n$, E — измеримые по Лебегу, $1 \leq p < +\infty$
 $\Rightarrow L^p(E, \lambda)$ — сепарабельные
 (λ — мера Лебега)

Доказательство. Докажем, что $L^p(\mathbb{R}^n, \lambda)$ — сепарабельное.

$$\mathcal{R} = \left\{ \Delta = \prod_{j=1}^n [a_j, b_j), a_j < b_j, a_j, b_j \in \mathbb{R} \right\} \text{ — полные семейства в } L^p$$

Теперь мы возьмём только такие ячейки, полуинтервалы которых мы перемножаем, имеют рациональные концы. Пока что можем сказать, что это счётное множество.

$$R_0 = \left\{ \Delta = \prod_{j=1}^n [a_j, b_j), a_j < b_j, a_j, b_j \in \mathbb{Q} \right\} \text{ — счётное множество}$$

$$\begin{aligned} \Delta \in \mathcal{R} \quad 0 \\ \Rightarrow \exists \Delta_0 \in R_0, \Delta \subset \Delta_0, \lambda(\Delta_0 \setminus \Delta) < \varepsilon \\ \Rightarrow \|\chi_{\Delta_0} - \chi_{\Delta}\|_p = \|\chi_{\Delta_0 \setminus \Delta}\|_p = \left(\int_{\Delta_0 \setminus \Delta} 1 dx \right)^{\frac{1}{p}} = (\lambda(\Delta_0 \setminus \Delta))^{\frac{1}{p}} < \varepsilon^{\frac{1}{p}} \\ \Rightarrow \forall \Delta \in \mathcal{R} \quad \chi_{\Delta} \in \overline{\mathcal{L}\{\chi_{\Delta}\}_{\Delta \in R_0}} \end{aligned}$$

R_0 — полное счётное семейство $\xrightarrow{\text{утверждение}} L^p(\mathbb{R}^n, \lambda)$ — сепарабельное.

$E \subset \mathbb{R}^n$, E — измеримое, $f \in L^p(E, \lambda)$
 пусть $f(x) = 0, x \in \mathbb{R}^n \setminus E \Rightarrow f \in L^p(\mathbb{R}^n, \lambda)$
 $\Rightarrow L^p(E, \lambda)$ — подпространство $L^p(\mathbb{R}^n, \lambda) \Rightarrow L^p(E, \lambda)$ — сепарабельно

□

Определение 4.13. (X, U, μ) — пространство с мерой. (X, ρ) — метрическое пространство. μ — **борелевская мера**, если $(G$ — открытое $\Rightarrow G \in U)$

β — минимальная σ -алгебра, содержащая все открытые множества. β — **борелевские множества**, то есть $\beta \subset U$.

Чем же хороши борелевские меры? Оказывается, они безумно связаны с непрерывными функциями

Замечание 4.7. Пусть $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, f — непрерывная $\Rightarrow f^{-1}((c, +\infty))$, $c \in \mathbb{R}$, $(c, +\infty)$ — открытое в \mathbb{R} . Определение непрерывной функции из топологии: прообраз любого открытого множества открыт. Так как прообраз f открыт в $X \Rightarrow f$ — измеримая по μ , если μ — борелевская.

Замечание 4.8. λ — мера Лебега в \mathbb{R}^n , тогда λ — борелевская.

Еще более специальное определение. Этим свойством мера Лебега тоже обладает.

Определение 4.14 (регулярная мера). (X, U, μ) , (X, ρ) , μ — борелевская. μ — **регулярная мера**, если $\forall e \in U$

$$\sup_{\{F \subset e, F \text{ — замкнутое}\}} \{\mu(F)\} = \mu e = \inf_{\{e \subset G, G \text{ — открытое}\}} \mu G$$

Замечание 4.9. λ -мера Лебега — регулярная.

На самом деле эти 2 свойство друг из друга следуют, но мы это доказывать не будем.

Теорема 4.15. (X, U, μ) , (X, ρ) , μ — регулярная мера \Rightarrow непрерывная функция плотна в $L^p(X, \mu)$, $1 \leq p < +\infty$.

$$\overline{C(X) \cap L^p(X, \mu)}^{\|\cdot\|_p} = L^p(X, \mu)$$

Доказательство. Мы уже знаем, что полное семейство — это семейство характеристических функций всех измеримых функций, и мы будем этим изо всех сил пользоваться. Возьмём какую-то характеристическую функцию из множества и ее будем приближать непрерывными функциями.

$\{\chi_e\}_{e \in U, \mu e < +\infty}$ — полное семейство.

пусть $e \in U$, $\mu e < +\infty$, $0, \mu$ — регулярная $\Rightarrow \exists F \subset e \subset G$, F — замкнутое, G — открытое. $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$

Когда мы попадем в $X \setminus G$ она будет равна нулю.

$$\varphi(x) = \frac{\rho(x, X \setminus G)}{\rho(x, X \setminus G) + \rho(x, F)}$$

Нужно позаботиться о том, чтобы знаменатель не был равен нулю. $\rho(x, A)$ — непрерывная функция $\forall A \subset X$. $X \setminus G$ — замкнутое, F — замкнутое. Если $\rho(x, F) = 0 \Rightarrow x \in F \Rightarrow x \notin X \setminus G \Rightarrow \rho(x, X \setminus G) > 0$

$$\Rightarrow \rho(x, X \setminus G) + \rho(x, F) > 0 \forall x \in X \Rightarrow \varphi \in C(X)$$

$$\varphi(x) = 0, x \in X \setminus G, \varphi(x) = 1, x \in F \quad \forall x \in X \quad 0 \leq \varphi(x) \leq 1$$

Понятно, что модуль $\varphi(x)$ совпадает с характеристической функцией множества e .

$$\begin{aligned} |\chi_e(x) - \varphi(x)| &\leq 1 \quad \forall x \in X \\ \chi_e(x) - \varphi(x) &= 0 \quad x \in F \text{ или } x \in X \setminus G \\ \Rightarrow \|\chi_e - \varphi\|_p &= \left(\int_X |\chi_e(x) - \varphi(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{G \setminus F} |\chi_e(x) - \varphi(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\leq (\mu(G \setminus F))^{\frac{1}{p}} < \varepsilon^{\frac{1}{p}} \\ &\Rightarrow \chi_e \in \overline{C(X)}^{\|\cdot\|_p} \end{aligned}$$

Тем самым мы доказали, что $\varphi(x)$ может быть приближена непрерывными функциями. Может быть, стоит отметить, что $\mu G < \mu E + \varepsilon < p + \infty$ $\int_X |\varphi(x)|^p d\mu - \int_G |\varphi(x)|^p d\mu < \mu(g) \Rightarrow \varphi \in L^p(X, \mu)$

□

Раз утверждение верно для любых регулярных мер, то оно верно и для меры Лебега.

Глава 5

Метрические компакты

Топологический компакт: из любого подпокрытия можно выбрать конечное подпокрытие.

Утверждение 5.1 (из топологии). 1. (X, ρ) – метрическое пространство, $K \subset X$, K – компакт $\Leftrightarrow K$ – счётно-компактен, то есть

$$\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in K \quad \exists \{x_{n_j}\}_{j=1}^{\infty} \text{ т.ч. } \exists \lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_j} = x_0, x_0 \in K$$

2. K – компакт $\Rightarrow K$ – ограниченное замкнутое множество.

Пример 5.1. \mathbb{R}^n , K – компакт $\Leftrightarrow K$ – ограниченное, замкнутое

Замечание 5.1. НИ В КОЕМ СЛУЧАЕ!!!

K – ограниченное замкнутое, $\nRightarrow K$ – компакт

Замечание 5.2. $l^2 = \{x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \|x\|_2 = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2)^{\frac{1}{2}} < +\infty, x_n \in \mathbb{R}(\mathbb{C})\}$

$D = \{x \in l^2 : \|x\|_2 \leq 1\}$ – ограниченное, замкнутое

$e_n = (0, 0, \dots, \underbrace{1}_n, 0, 0, \dots)$, $n \neq m \quad \|e_n - e_m\|_2 = \sqrt{2} \Rightarrow \forall \{e_{n_j}\}$ – не фундаментальная. Тогда $\nexists \lim_{j \rightarrow \infty} e_{n_j} \Rightarrow D$ – не компакт.

Ещё одно напоминание, кто такие относительно компактные множества.

Определение 5.1 (относительный компакт). $(X, \rho), A \subset X, A$ – относительно компактно, если \overline{A} – компакт. Или можно сказать

$$\Leftrightarrow \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in A \exists \{x_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}, \exists \lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_j} = x_0, x_0 \in X$$

Предел не обязательно принадлежит A . A в компакте предел обязательно лежит в A .

Мы получим новое описание компактных и относительно компактных множеств. В \mathbb{R}^n мы описывали относительные компакты. Для описания компакта нужно добавить замыкание.

Еще несколько определений:

Определение 5.2 (ε -сеть). (X, ρ) – метрическое пространство. $A \subset X, \varepsilon > 0$
 F – ε -сеть для A , если

$$\forall a \in A \exists f \in F : \rho(a, f) < \varepsilon$$

$$(\Leftrightarrow \forall a \in A B_{\varepsilon}(a) \cap F \neq \emptyset) \Leftrightarrow (A \subset \bigcup_{f \in F} B_{\varepsilon}(f))$$

Определение 5.3. A – вполне ограниченное множество, если для $\forall \varepsilon > 0 \exists$ конечная ε -сеть для A .

Описание компактных и относительно-компактных множеств в терминах почти ограниченных – как раз наша главная цель. Мы будем использовать это новое описание так: если мы в полном метрическом пространстве, то там относительная компактность и вполне ограниченность – одно и то же. А проверять вполне ограниченность – гораздо проще, чем проверять относительную компактность. Предъявим ε -сеть и всё!

Замечание 5.3. $(X, \rho), A$ – вполне ограниченное $\Rightarrow A$ – ограничено.

Пример 5.2. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2) = l_n^2$ $A \subset \mathbb{R}^N$. A – ограниченное $\Leftrightarrow A$ вполне ограниченное

Доказательство. A – ограниченное $\Leftrightarrow \exists M > 0, \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in A \Rightarrow |x_j| \leq M$
 $A \subset \mathbb{Q} = \{|x_j| \leq M, 1 \leq j \leq n\}$ Как же построить ε -сеть?

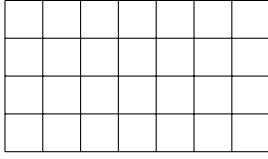


Рис. 5.1: классный поясняющий рисунок

Пусть $\varepsilon > 0$, $Q = \bigcup Q_j$, l – сторона Q_j

$$\text{diam } Q_j = \sup_{x, y \in Q_j} \rho(x, y) = \sqrt{n} \cdot l < \varepsilon \Rightarrow l < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$$

$$l = \frac{M}{N}, N \in \mathbb{N}, \exists N : \frac{M}{N} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \Rightarrow$$

F – вершины Q_j – ε -сеть

ЕС = equicontinuous

□

Убедимся в пространстве l^2

Пример 5.3. $D \subset l^2$, $D = \{x \in l^2 : \|x\|_2 \leq 1\}$ Убедимся, что D – не вполне ограниченное.

Доказательство.

$$\{e_n\}_{n=1}^\infty, e_n = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_n, 0, \dots), n \neq m, \|e_n - e_m\| = \sqrt{2}$$

$$B_{\frac{1}{2}}(e_n) \cap B_{\frac{1}{2}}(e_m) = \emptyset$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}, F = \frac{1}{2}\text{-сеть для } D$$

$$\Rightarrow \forall n \exists f_n \in F \cap B_{\frac{1}{2}}(e_n), f_n \neq f_m (n \neq m) \text{ так как } B_{\frac{1}{2}}(e_n) \cap B_{\frac{1}{2}}(e_m) = \emptyset$$

$$\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset F \Rightarrow F \text{ – не конечное}$$

□

Теперь посмотрим для l^∞

Пример 5.4. $\Pi = \{x = \{x_n\}_{n=1}^\infty, |x_n| < \frac{1}{2^n}\} \subset l^2$. Проверим, что Π – вполне ограничено. 0

$$\exists M \in \mathbb{N} \quad \left(\sum_{k=N+1}^\infty \left(\frac{1}{2^k} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

$$\Pi^* = \{x = \{x_1, \dots, x_N, 0, 0, \dots\}, |x_j| \leq \frac{1}{2^j}, 1 \leq j \leq N \quad x_{N+k} = 0, k \in \mathbb{N}\}$$

Если мы забудим, про нули, то можем думать, что Π^* лежит в \mathbb{R}^n , и там оно ограниченное, а значит и вполне ограниченное. $\Pi^* \subset \mathbb{R}^n$, Π^* – ограниченное \Rightarrow вполне ограниченное $\Rightarrow \exists F \subset \Pi^*$ – конечная ε -сеть. Докажем, что F – 2ε -сеть для Π .

$$\begin{aligned} x \in \Pi &\Rightarrow x = \underbrace{(x_1, \dots, x_N, 0, \dots)}_y + \underbrace{(0, 0, \dots, 0, x_{N+1}, x_{N+2}, \dots)}_z \\ \|z\|_2 < \varepsilon \quad y \in \Pi^* &\Rightarrow \exists f \in F : \|y - f\|_2 < \varepsilon \Rightarrow \\ \|x - f\|_2 = \|(y - f) + z\|_2 &\leq \|y - f\|_2 + \|z\|_2 < 2\varepsilon \\ &\Rightarrow \Pi - \text{вполне ограничено} \end{aligned}$$

Таким образом, все множества можно описать в пространстве l^∞ . Перед тем, как доказывать основную теорему, несколько свойств вполне ограниченных множеств.

- Свойство 5.1.**
1. A – вполне ограничено $\Rightarrow \bar{A}$ – вполне ограничено
 2. $A \subset Y \subset X$, A – вполне ограничено в $X \Rightarrow A$ – вполне ограниченное в Y .
 3. A – вполне ограничено $\Rightarrow (A, \rho)$ – сепарабельно.

1 свойство. $A \subset X, \varepsilon > 0$. F – конечная ε -сеть для A . Проверим, что F – (2ε -сеть) для \bar{A}

$$\begin{aligned} \text{пусть } x \in \bar{A} &\Rightarrow \exists y \in A : \rho(x, y) < \varepsilon, \exists f \in F : \rho(y, f) < \varepsilon \\ &\Rightarrow \rho(x, f) \leq \rho(x, y) + \rho(y, f) < 2\varepsilon \end{aligned}$$

□

2 свойство. Проблема в том, что надо двигать точки. Мы уже так делали, когда доказывали сепарабельность. $A \subset Y \subset X, \varepsilon > 0, \{x_k\}_{k=1}^n$ – ε -сеть для $A, x_k \in X$
 $A \subset \bigcup_{k=1}^n B_\varepsilon(x_k)$, если $A \cap B_\varepsilon(x_k) \neq \emptyset$, то пусть $y_k \in A \cap B_\varepsilon(x_k)$ (если $= \emptyset$, то не будем выбирать)

Мы найдем ε -сеть из точек множества A , тогда она точно будет обслуживать и Y . Как же и куда сдвигать точки?

$$E = \{y_k\}_{k=1}^n$$

$$\begin{aligned} x \in A \Rightarrow \exists x_k : \rho(x, x_k) < \varepsilon \Rightarrow A \cap B_\varepsilon(x_k) \neq \emptyset \Rightarrow y_k \in B_\varepsilon(x_k) \Rightarrow \\ \rho(x_k, y_k) < \varepsilon \Rightarrow \rho(x, y_k) \leq \rho(x, x_k) + \rho(x_k, y_k) < 2\varepsilon \Rightarrow \\ E - (2\varepsilon)\text{-сеть для } A, E \subset A \end{aligned}$$

□

3 свойство. $n \in \mathbb{N}, F_n - (\frac{1}{n})$ -сеть для A, F_n – конечное.

$$F \text{ (счетное) } = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n - \text{плотно в } A, \text{ то есть } A \subset \overline{F}$$

□

Утверждение 5.2 (о разбиении). $(X, \rho), A \subset X, \varepsilon > 0. F$ – конечная ε -сеть для $A \Rightarrow$

$$\exists \{C_j\}_{j=1}^n \quad A = \bigcup_{j=1}^n C_j \quad C_j \cap C_k = \emptyset, j \neq k, \text{diam } C_j \leq 2\varepsilon, C_j \neq \emptyset$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} F = \{x_k\}_{k=1}^n, A \subset \bigcup_{k=1}^n B_\varepsilon(x_k) \\ C_1 = A \cap B_\varepsilon(x_1) \\ C_2 = (A \cap B_\varepsilon(x_2)) \setminus C_1 \\ C_k = A \cap B_\varepsilon(x_k) \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{k-1} C_j \right) \quad k = 2, \dots, n \end{aligned}$$

если $C_k = \emptyset$, то забудем о нём. $C_k \subset B_\varepsilon(x_k) \Rightarrow \text{diam } C_k \leq 2\varepsilon$

□

Теперь у нас всё готово для доказательства теоремы о том, как описывать компакты в терминах вполне ограниченных множеств.

Теорема 5.1 (Хаусдорф). (X, ρ) – метрическое пространство, $A \subset X$.

A – компакт \Leftrightarrow

1. A полное, то есть $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A, \{x_n\}$ – фундаментальная $\exists \lim x_n = x_0 \in A$
2. A – вполне ограничено

Высока вероятность, что спросят на экзамене эту теорему, попытайтесь вытянуть.

Доказательство. \Rightarrow

A – компакт, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – фундаментальная, $x_n \in A$.

A – компакт $\Rightarrow \exists \{x_{n_j}\}, \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_j} = x_0, x_0 \in A$. Тогда по свойствам фундаментальных последовательностей $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow (A, \rho)$ – полное метрическое пространство. Проверили первое условие. Теперь надо проверить второе: сначала покроем наш компакт безумным количеством шариков, а они ведь открытые множества, а среди них существует конечное подпокрытие.

$$0 \quad A \subset \bigcup_{a \in A} B_{>}(a) \wedge A \text{ – компакт} \Rightarrow, \exists \{a_j\}_{j=1}^n, a_j \in A :$$

$$A \subset \bigcup_{j=1}^n B_{\varepsilon}(a_j) \Rightarrow F = \{a_j\}_{j=1}^n \text{ – } \varepsilon\text{-сеть для } A$$

Это была тривиальная часть теоремы.

\Leftrightarrow .

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in A$ Собираемся применять лемму о разбиении. $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$. По лемме $\exists \{C_j^{(1)}\}_{j=1}^{N_1}. A = \bigcup_{j=1}^{N_1} C_j^{(1)}, \text{diam } C_j^{(1)} \leq 1$. Когда-то в детстве мы азнимались бесконечным делением пополам. Тут будем делать то же самое. $\exists j : C^{(1)}_j$ содержит бесконечное число элементов $\{x_n\}$.

$$A_1 := C_j^{(1)}.$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2^2}, \text{ по лемме о разбиении к } A_1 \Rightarrow \exists \{C_j^{(2)}\}_{j=1}^{N_2}$$

$$\text{diam } C_j^{(2)} \leq \frac{1}{2} \quad A_1 = \bigcup_{j=1}^{N_2} C_j^{(2)}$$

$\exists 1 \leq j \leq N_2 \quad C_j^{(2)}$ содержит бесконечное количество элементов в x_n

$$\text{и так далее } \{A_m\}_{m=1}^{\infty}, A_{m+1} \subset A_m, \text{diam}_{A_m} \leq \frac{1}{2^m}$$

A_m содержит бесконечное число элементов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} (*)$

$$x_{n_1} \in A_1, \quad \exists n_2 > n_1 : x_{n_2} \in A_2 \text{ т.к. } (*)$$

$$\text{и так далее } \exists n_k \text{ т.ч. } n_k > n_{k-1} \quad x_{n_k} \in A_k$$

$$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}, x_{n_k} \in A_k, \text{diam } A_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \quad A_{k+1} \subset A_k$$

$$\Rightarrow \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} - \text{фундаментальная} \wedge A - \text{полное}$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0, x_0 \in A$$

□

Часто описывают компакт, но фактически говорят об относительный компакте. Для описания компакта, опять же, надо просто добавить замкнутость.

Следствие 5.1. (X, ρ) – метрическое, $A \subset X$.

1. A – относительно компактно $\Rightarrow A$ вполне ограничено
2. (X, ρ) – полное, A – относительно компактно $\Leftrightarrow A$ вполне ограничено

Будем изо всех сил пользоваться теоремой Хаусдорфа.

1 утверждение. A – относительно компактно, $\Rightarrow \bar{A}$ – компакт, тогда по теореме Хаусдорфа \bar{A} – вполне ограничено, $A \subset \bar{A} \Rightarrow A$ вполне ограничено. □

2 утверждение. (X, ρ) – полное, A – вполне ограничено, тогда по ранее доказанному свойству $(\bar{A} - \text{вполне ограничено} \wedge \bar{A} - \text{замкнутое в } X \Rightarrow \bar{A} - \text{полное}) \Rightarrow$ по теореме Хаусдорфа \bar{A} компакт $\Rightarrow A$ – относительно компактно. □

Оказывается, можно вместо конечных ε -сетей можно утверждать чуть большее.

Следствие 5.2. (X, ρ) – полное, $A \subset X$. Если для $\forall \varepsilon > 0 \exists$ относительно компактная ε -сеть, то A – относительно компактно

Доказательство. $0, F$ – ε -сеть для A . F – относительно компактно $\Rightarrow F$ вполне ограничено, $\exists E$ – конечная ε -сеть для $F \Rightarrow E$ – (2ε) -сеть для $A \Rightarrow A$ – вполне ограничено $\Rightarrow A$ – относительно компактно. \square

5.1. Относительно компактные множества в $C(K)$

Определение 5.4. (K, ρ) – метрический компакт. $C(K) = \{f : K \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C}), f \text{ – непрерывная}\}$, $\|f\| = \max_{x \in K} |f(x)|$. $\Phi \subset C(K)$. Φ – **равностепенно непрерывна**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall f \in \Phi, \forall x, y \in K, \rho(x, y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

EC – equicontinuous.

Равностепенная непрерывность отличается от равномерной непрерывности тем, что δ не зависит от f , но от ε конечно зависит. Некоторый вариант теоремы Арцелла-Асколи, который, возможно, доказывали на дифурах:

Теорема 5.2 (Асколи-Арцелла). K – компакт, (K, ρ) , $\Phi \subset C(K)$. Φ – относительно компактно \Leftrightarrow

1. Φ – ограниченное в $C(K)$
2. Φ – равностепенно непрерывно ($\Phi \in EC$ equicontinuous)

Доказательство. С самого начала отметим, что $C(K)$ – полное. Вместо проверки относительной компактности Φ будем проверять вполне ограниченность.

\Rightarrow

Φ – относительно компактно $\Rightarrow \Phi$ – вполне ограничено $\Rightarrow \Phi$ – ограничено, то есть $\exists M \geq 0$ т.ч. $\|f\| \leq M \forall f \in \Phi \Leftrightarrow \forall x \in K, \forall f \in \Phi |f(x)| \leq$

М. $\varepsilon > 0 \exists \varepsilon$ -сеть $\{\varphi_j\}_{j=1}^n, \varphi_j \in C(K)$, φ_j – равномерно непрерывна
 $\exists \delta_j > 0$

$x, y \in K, \rho(x, y) < \delta_j \Rightarrow |\varphi_j(x) - \varphi_j(y)| < \varepsilon$

$\delta = \min_{1 \leq j \leq n} \delta_j$

при описании относительного компакта мы получили такой резуль- 10.10.2023
 тат: $C(K)$ – полное $\Rightarrow \Phi$ относительный компакт $\Leftrightarrow \Phi$ – вполне огра-
 ничено. Будем этим пользоваться.

$\Rightarrow \Phi$ – вполне ограниченное $\Rightarrow \Phi$ – ограничено

Пусть $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \{\varphi_j\}_{j=1}^n$ – ε -сеть для Φ . $\varphi_j \in C(K) \Rightarrow \varphi_j$ – равномерно
 непрерывна

$\exists \delta_j > 0 \forall x, y \in K, \rho(x, y) < \delta_j \Rightarrow |\varphi_j(x) - \varphi_j(y)| < \varepsilon$

$$\delta = \min_{1 \leq j \leq n} \delta_j, \delta > 0$$

пусть $f \in \Phi \Rightarrow \exists j : \|f - \varphi_j\| < \varepsilon$ то есть

надо оценить этот модуль через неравенство треугольника; справа,
 очевидно, будет 3 слагаемых

$$\max_{x \in K} |f(x) - \varphi_j(x)| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \text{пусть } x, y \in K, \rho(x, y) < \delta, |f(x) - f(y)| &\leq \underbrace{|f(x) - \varphi_j(x)|}_{< \varepsilon} + \\ &+ \underbrace{|\varphi_j(x) - \varphi_j(y)|}_{< \varepsilon \text{ так как } \delta \leq \delta_j} + |\varphi_j(y) - f(y)| < 3\varepsilon \end{aligned}$$

мы и проверили равномерную непрерывность. Тривиальная часть
 доказательства закончена.

\Leftarrow

Φ – ограничено $\Rightarrow \exists M > 0 : f \in \Phi \Rightarrow \|f\| \leq M \Rightarrow |f(x)| \leq M \forall x \in K$.

Надо по определению построить конечную ε -сеть в множестве непре-
 рывных функций. но мы воспользуемся двумя облегчающими хитро-
 стями: 1. $\Phi \subset C(K)$, а если множество имеет ε -сеть в меньшем про-
 странстве, то в большем и подавно. Более того, сеть можно постро-
 ить из элементов меньшего множества. Мы выберем ограниченные
 функции. 2. выберем относительно компактную ε -сеть в $m(K)$ вместо
 конечной в $C(K)$, и этого будет достаточно.

$$\varepsilon > 0 \quad \Phi \subset C(K) \subset m(K) = \{f : K \rightarrow \mathbb{C}, \sup_{x \in K} |f(x)| < +\infty\}$$

$\varepsilon > 0 \quad \exists \delta$ из определения (EC)

применим к этой парочке лемму о разбиении $(K, \rho), \delta > 0$

$$\exists \{C_j\}_{j=1}^n, \text{diam } C_j < \delta, K = \bigcup_{j=1}^n C_j, C_j \cap C_i = \emptyset (j \neq i), C_j \neq \emptyset$$

$$\Psi = \left\{ g(x) = \sum_{j=1}^n y_j \chi_{C_j}(x) \right\} \subset m(K), y_j \in \mathbb{C}, 1 \leq j \leq n$$

$$g \in \Psi, \|g\|_\infty = \sup_{x \in K} |g(x)| = \max_{1 \leq j \leq n} |y_j| = \|y\|_{l_n^\infty}, y = (y_1, \dots, y_n)$$

$$F : l_n^\infty \rightarrow \Psi, F(y) = \sum_{j=1}^n y_j \chi_{C_j}(x)$$

Мы выяснили, что F биекция, изометрия, линейное.

$Q = \{y = (y_1, \dots, y_n), |y_j| \leq M\}$ полидиск, что бы это пока не значило

Q – компакт, F – непрерывна $\Rightarrow F(Q)$ – компакт в $m(K)$

$$E := F(Q), E = \left\{ g(x) = \sum_{j=1}^n y_j \chi_{C_j}(x), |y_j| \leq M \right\}$$

вот у нас есть компакт E , и мы собираемся проверить, что он и будет ε -сетью для Φ . Будет полезно в каждом множестве выбрать по точке. Пусть $x_j \in C_j, f \in \Phi, y_j := f(x_j)$.

$$g(x) = \sum_{j=1}^n f(x_j) \chi_{C_j}(x), g \in E, |y_j| \leq M$$

Пусть $x \in K \Rightarrow \exists j, x \in C_j \Rightarrow g(x) = f(x_j) \Rightarrow$

$$|f(x) - g(x)| = |f(x) - f(x_j)| < \varepsilon \text{ т.к. } \rho(x, x_j) < \delta$$

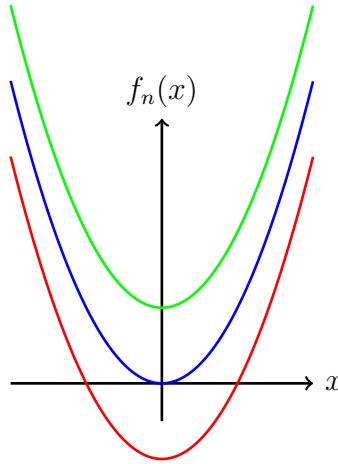
Вот это и то, что было обещано. E – компактная ε -сеть. □

Замечание 5.4. Условия теоремы не зависимы.

Пример 5.5. $C[0, 1]. f_n(x) = x^2 + n, \{f_n\}$ – равностепенно непрерывны, но $\{f_n\}$ не ограничено.

ограниченная, но не равностепенно непрерывная

Пример 5.6. $C[0, 1], f_n(x) = x^n. \{f_n\}$ – ограничены, но не равностепенно непрерывны.



Теорема 5.1 (достаточные условия равностепенной непрерывности). (K, ρ) – компакт, $\Phi \subset C(K)$. Сначала какие-то абстрактные множества, потом будут более конкретные.

1. Если $\exists M > 0, \alpha > 0, \beta > 0$ такие что
- 2.

$$\forall f \in \Phi, (\forall x, y \in K \rho(x, y) < \beta) \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq M(\rho(x, y))^\alpha \\ \Rightarrow \Phi \in (EC)$$

3. $C[a, b], \Phi \subset C[a, b]$, пусть $\exists L > 0$

$$\forall f \in \Phi \exists f'(x), x \in (a, b), |f'(x)| \leq L \Rightarrow \Phi \in (EC)$$

4. чуть более общий случай. $K \subset G \subset \mathbb{R}^n$, K – компакт, G – открытое.

$$\exists L > 0 : \forall f \in \Phi, \exists \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \right| (1 \leq j \leq n), \forall f \in G \Rightarrow \Phi \in (EC)$$

5. про аналитические функции. предполагать можно будет гораздо меньшее. $K \subset G \subset \mathbb{C}$, G – открытое, K – компакт.

$$\exists L > 0, f \in \Phi, f \text{ аналитическая в } G, \exists f'(x), \underbrace{|f(x)|}_{\text{ТУТ}} \leq L, \forall x \in G$$

ТУТ НЕ ПРОИЗВОДНАЯ, НА ЭКЗАМЕНЕ ЧАСТО ОШИБАЮТСЯ!!!!

Аналитичность – фантастическое свойство, в отличие от, например, дифференцируемости. Именно из-за неё ТАМ как раз и не производная.

1. Пусть $\varepsilon > 0$, $x, y \in K$, пусть $\rho(x, y) < \beta$, пусть $\delta < \beta, \rho(x, y) < \delta, \delta(\varepsilon) = ?$.

$$\begin{aligned} f \in \Phi &\Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq M\rho(x, y)^\alpha < M\delta^\alpha \leq \varepsilon \\ &\Rightarrow \delta \leq \left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \\ \delta(\varepsilon) &= \min\{\beta, \left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\}, \end{aligned}$$

□

Будем сводить остальные доказательства к первому пункту, находя M, α, β . Второй пункт теперь совсем лёгкий.

2. $\Phi \subset C[a, b]$, $x, y \in [a, b]$, $f \in \Phi$. Для оценки разности $f(x) - f(y)$ воспользуемся теоремой Лагранжа.

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= f'(c)(x - y) \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq |f'(c)||x - y| \leq L|x - y| \\ M &= L, \alpha = 1, (\beta - \forall) \stackrel{1}{\Rightarrow} \Phi \in (EC) \end{aligned}$$

□

3. Пусть $z, y \in K$ такие что $[z, y] \subset G$, $f \in \Phi$ Оценим разность $f(y) - f(z)$.

$$\begin{aligned} \Gamma &: [0, 1] \rightarrow [y, z] \\ \Gamma(t) &= ty + (1 - t)z, \Gamma(0) = z, \Gamma(1) = y \\ \text{опять можем воспользоваться теоремой Лагранжа} \\ f(y) - f(z) &= f(\Gamma(1)) - f(\Gamma(0)) = (f(\Gamma(c)))'_t \\ (f(\Gamma(t)))'_t &= (f(ty + (1 - t)z))'_t = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\dots)(y_j - z_j) \\ |f(\Gamma(t))'| &\leq L \sum_{j=1}^n |y_j - z_j| \stackrel{\text{КБШ}}{\leq} \sqrt{n} \left(\sum_{j=1}^n (y_j - z_j)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = L\sqrt{n}\rho(y, z) \end{aligned}$$

Если выбрать β достаточно маленьким, то наш отрезок будет лежать в этом компакте. $F = \mathbb{R}^n \setminus G$ – замкнутое, $\rho(x, F)$ – непрерывная

функция в $\mathbb{R}^n \Rightarrow \rho(x, F)$ непрерывна на $K \Rightarrow \exists x_0 \in K, \rho(x_0, F) = \min_{x \in K} \rho(x, F)$

$$\begin{aligned} x_0 \notin F &\Rightarrow \rho(x_0, F) > 0, r := \rho(x_0, F) \\ \forall x \in K \ B_r(x) &\subset G, \beta = r \\ \rho(x, y) < r &\Rightarrow y \in B_r(x) \subset G \Rightarrow \\ &\text{отрезок } [x, y] B_r(x) \subset G \\ &\Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq L\sqrt{n}\rho(x, y) \end{aligned}$$

z и y , которые с самого начала были выбраны вместо x и y , чтобы не смущаться от dx , обратно превратились в x и y , все же поняли?

На пальцах: наш компакт настолько утоплен в G , что если мы возьмём шарик радиуса r , то шарик всё ещё лежит в G . \square

4. Букву r , которую мы нашли в предыдущем пункте, будем изо всех сил использовать. $K \subset G \subset \mathbb{C}$. В 3 пункте выяснили, что $\exists r > 0 : B_r(x) \subset G \forall x \in K, \beta = \frac{r}{3}$.

$$\begin{aligned} x, y \in K, \rho(x, y) < \beta, \gamma &= \{\zeta \in \mathbb{C} : |x - \zeta| = 2\beta\} \\ f &\in \Phi \end{aligned}$$

разницу собираемся оценивать с помощью формулу Коши, поэтому никакие проивзодные и не нужны!!!

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - x} d\zeta \\ f(y) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - y} d\zeta \\ f(x) - f(y) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\zeta) \frac{x - y}{(\zeta - x)(\zeta - y)} d\zeta \end{aligned}$$

оцениваем самым грубом образом, отправляя модули под интегралы

$$|f(\zeta)| \leq L, |\zeta - x| = 2\beta, |z - y| \geq \beta$$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq \frac{1}{2\pi} L \cdot |x - y| \cdot |\gamma| \cdot \frac{1}{(2\beta) \cdot \beta} = |x - y| L \frac{(2\beta) \cdot 2\pi}{(2\pi)(2\beta)\beta} = \\ &= \frac{L}{\beta} |x - y| \end{aligned}$$

и в обозначениях 1 пункта получаем $M = \frac{L}{\beta}, \alpha = 1, \beta = \frac{r}{3}, \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \Phi \in (EC)$ \square

Перед тем, как мы покинем относительно компакты, пара упражнений, которые на экзамене спрашивали в качестве задачи на 5.

Утверждение 5.3. $1 \leq p < +\infty$. $\Phi \subset l^p, \Phi$ – относительно компактно \Leftrightarrow

1. Φ – ограничено в l^p

2. $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall x = \{x_j\}_{j=1}^\infty \in \Phi, \left(\sum_{j=N+1}^\infty |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$

Утверждение 5.4. $\Phi \subset C_0, \Phi$ – относительно компактно \Leftrightarrow

1. Φ – ограничено

2. $\varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall x \in \Phi \quad \sup_{j \geq N+1} |x_j| < \varepsilon$

Мы сейчас находимся на перепутье функционального анализа. Можно отправиться в Гильбертовы пространства, в линейные операторы или еще куда-то. Изучить-то придётся всё, но мы начинаем линейные операторы.

Глава 6

Линейные операторы

Первый параграф про линейные пространства будет совсем простой, здесь будут самые тривиальные свойства, следующие из линейности.

6.1. Линейные операторы в линейных пространствах

Определение 6.1 (Линейный оператор). X, Y – линейны над k ($k = \mathbb{R}$ или \mathbb{C}). $A : X \rightarrow Y$, A – **линейный оператор**, если

$$A(\alpha x + \beta z) = \alpha Ax + \beta Az, \quad x, z \in X, \alpha, \beta \in k$$

$\text{Lin}(X, Y)$ – множество линейных операторов из X в Y . Также нам понадобится линейное пространство над k

$$\begin{aligned} \alpha \in k, A \in \text{Lin}(X, Y), (\alpha A)(x) &:= \alpha Ax, 0(x) = 0 \text{ (0 в пространстве } Y) \\ A, B \in \text{Lin}(X, Y), (A + B)(x) &:= Ax + Bx \end{aligned}$$

Если $X = Y$, пишем только $\text{Lin}(X)$.

Пример 6.1 (интегральный оператор). $C[a, b], K(s, t) \in C([a, b] \times [a, b])$

$$\begin{aligned} f \in C[a, b], (\mathcal{K}f)(s) &= \int_a^b k(s, t)f(t)dt \\ (\mathcal{K}f)(s) &\in C[a, b], \mathcal{K} \in \text{Lin}(C[a, b]) \end{aligned}$$

Пример 6.2 (оператор дифференцирования). $X = C^{(1)}[0, 1] = \{f : f' \in C[0, 1]\}$, $Y = C[0, 1]$. $f \in X, D(f) = f', D \in \text{Lin}(X, Y)$

Пример 6.3 (оператор вложения). $l^1 \subset l^2$, $x = \{x_n\}_{n=1}^\infty, \sum_{n=1}^\infty |x_n| < +\infty, x \in l^1 \Rightarrow \sum_{n=1}^\infty |x_n|^2 < +\infty \Rightarrow x \in l^2$

$$\begin{aligned} Ax &= x, A \text{ оператор вложения } l^1 \hookrightarrow l^2 \\ \forall 1 \leq p_1 < p_2 \leq +\infty &\Rightarrow l^{p_1} \hookrightarrow l^{p_2}, Ax = x \\ A &\in \text{Lin}(l^{p_1}, l^{p_2}) \end{aligned}$$

Пример 6.4 (оператор, но не линейный). X — линейное пространство, $x_0 \in X, x_0 \neq 0, Ax = x + x_0 \Rightarrow A$ — не линейный.

Перед тем, как доказывать теорему, еще одно небольшое определение.

Определение 6.2 (Выпуклое множество). $B \subset X, X$ — линейное пространство. B — **выпуклое**, если

$$\forall x, z \in B, \forall t, 0 \leq t \leq 1 \Rightarrow tx + (1 - t)z \in B$$

то есть отрезок, соединяющий любые две точки, полностью лежит в этом множестве

Теорема 6.1 (простейшие свойства линейного оператора). X, Y — линейные пространства над k (\mathbb{R} или \mathbb{C}), $A \in \text{Lin}(X, Y)$

1. $L \subset X, L$ — подпространство в $X \Rightarrow A(L)$ — подпространство в Y (образ подпространства — подпространство)
2. $M \subset Y, M$ — подпространство в $Y \Rightarrow \underbrace{A^{-1}(M)}_{\text{прообраз}}$ — подпространство в X
3. $B \subset X, B$ — выпуклое $\Rightarrow A(B)$ — выпуклое в Y
4. $C \subset Y, C$ — выпуклое $\Rightarrow A^{-1}(C)$ — выпуклое в X
5. пусть A — биекция $\Rightarrow A^{-1} \in \text{Lin}(Y, X)$

Все 5 свойств доказывать не будем, покажем только несколько и скажем, что остальные доказываются аналогично.

1. L – подпространство, $y, v \in A(L), \alpha \in k$. Наша мечта – проверить ($\stackrel{?}{\Rightarrow} \alpha y + v \in A(L)$), не обязательно писать α и β .

$$\Rightarrow \exists x, y \in L : (Ax = y \wedge Au = v) \Rightarrow A(\alpha x + u) = \alpha Ax + Au = \alpha y + v \\ \alpha x + u \in L \Rightarrow A(\alpha x + u) \in A(L) \Rightarrow \alpha y + v \in A(L)$$

□

3 проверяется тютелька в тютельку как 1, а 2 – как 4, поэтому проверим 4.

4. C – выпуклое, $x, u \in A^{-1}(C), 0 \leq t \leq 1$.

$$(y := Ax \wedge v := Au) \quad y, v \in C \Rightarrow ty + (1 - t)v \in C \\ A(tx + (1 - t)u) = tAx + (1 - t)Au = ty + (1 - t)v \in C \\ \Rightarrow tx + (1 - t)u \in A^{-1}(C) \Rightarrow A^{-1}(C) \text{ выпуклое}$$

□

5. $y, v \in Y \Rightarrow x = A^{-1}y, u = A^{-1}v \Rightarrow (Ax = y \wedge Au = v) \Rightarrow$

$$\text{пусть } \alpha \in k, \quad A(\alpha x + u) = \alpha Ax + Au = \alpha y + v \Rightarrow \\ \alpha x + u = A^{-1}(\alpha y + v) = \alpha A^{-1}y + A^{-1}v \Rightarrow \\ A^{-1} \in \text{Lin}(Y, X)$$

□

Определение 6.3 (Ядро линейного оператора). $A \in \text{Lin}(X, Y)$

$$\text{Ker } A = \{x \in X : Ax = 0\} \text{ – ядро } A$$

$$\text{Im } A = \{y \in Y : \exists x : Ax = y\} = A(X) \text{ – образ } A$$

Следствие 6.1. X, Y – линейные пространства, $\Rightarrow \text{Ker } A$ – подпространство в X , $\text{Im } A$ – подпространство в Y .

Определение 6.4 (произведение операторов). X, Y, Z – линейные пространства

$$X \xrightarrow{A} Y \xrightarrow{B} Z$$

$A \in \text{Lin}(X, Y), B \in \text{Lin}(Y, Z), C = BA, C(x) := B(Ax), x \in X \Rightarrow C \in \text{Lin}(X, Z), C$ – произведение BA

Всё самое тривиальное для операторов в линейных пространствах мы вспомнили

6.2. Линейные операторы в нормированных пространствах

Линейные операторы в нормированных пространствах – главный объект, который изучает функциональный анализ.

Определение 6.5 (Ограниченный оператор). $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|), A \in \text{Lin}(X, Y)$. A – **ограниченный**, если $\forall C \subset X, C$ – ограниченное $\Rightarrow A(C)$ – ограниченное в Y .

Оказывается, для операторов ограниченность эквивалентна непрерывности. Казалось бы, ограниченность сильно слабее, но если к ней добавить линейность, то будет аж непрерывность.

Обычно если в теореме 2 свойства, то говорят «если и только если», а если условий несколько, то говорят «равносильность». Подлые англичанки говорят Following Conditions are Equivalent.

Теорема 6.2 (эквивалентность ограниченности и непрерывности линейного оператора). $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|), A \in \text{Lin}(X, Y)$. Следующие условия равносильны (СУР) (FCE)

1. A непрерывен в точке 0
2. A непрерывен $\forall x \in X$
3. $\exists C > 0 : \|Ax\| \leq C\|x\| \forall x \in X$
4. A ограниченный
5. $\exists r > 0 A(B_r(0))$ – ограниченное множество в Y .

Доказательство очень простое, и, конечно, строится на линейности

$1 \Rightarrow 2$. A непрерывен в точке 0. Пусть $\varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \|x\| < \delta \Rightarrow \|Ax\| < \varepsilon(A(0)) = 0$. утверждается, что те же самые ε и δ подходят.

пусть $x_0 \in X$, проверим, что A непрерывен в x_0

пусть $\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|A(x - x_0)\| < \varepsilon \Rightarrow \|Ax - Ax_0\| < \varepsilon$

□

2 \Rightarrow 1 очевидно

1 \Rightarrow 3. Пусть $\varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \|x\| < \delta \Rightarrow \|Ax\| < \varepsilon$.

$$\begin{aligned} z \in X, z \neq 0 \quad x = \frac{z}{\|z\|} \cdot \delta \Rightarrow \|x\| = \delta \Rightarrow \|Ax\| < \varepsilon \\ \Rightarrow \|A\left(\frac{z}{\|z\|} \cdot \delta\right)\| < \varepsilon \Rightarrow \|Az\| < \frac{\varepsilon}{\delta} \|z\| \text{ т.е. } C = \frac{\varepsilon}{\delta} \end{aligned}$$

□

3 \Rightarrow 4. $B \subset X$, B – ограниченное, то есть $\exists M > 0 : (\forall x \in B \wedge \|x\| < M) \xrightarrow{3} \|Ax\| \leq C\|x\| \leq CM \forall x \in B \Rightarrow \{A(B)\}$ – ограниченное. □

4 \Rightarrow 5 очевидно ($B_r(0)$ – ограниченное)

5 \Rightarrow 1. $\exists R > 0 A(B_r^x(0)) \subset B_R^y(0)$

$$\|x\| < r \Rightarrow \|Ax\| < R$$

непрерывность в 0 означает

$$\text{пусть } \varepsilon > 0 \quad \|x\| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \|Ax\| < \varepsilon$$

$$\delta(\varepsilon) = \varepsilon \cdot \frac{r}{R}$$

$$\|z\| < \varepsilon \cdot \frac{r}{R} \Rightarrow \|z \cdot \frac{R}{\varepsilon}\| < r \Rightarrow \|A\left(z \cdot \frac{R}{\varepsilon}\right)\| < R \Rightarrow \|Az\| < \varepsilon$$

□

с помощью теоремы, которую мы только что доказали, введём норму в этом пространстве.

Определение 6.6 (норма оператора). $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|)$

$$\underbrace{\mathcal{B}(X, Y)}_{\text{bounded}} = \{A \in \text{Lin}(X, Y), A \text{ – ограниченный}\}$$

$$A \in \mathcal{B}(X, Y)$$

$$\|A\| = \inf\{c > 0 : \|Ax\| \leq c\|x\| \forall x \in X\}$$

то бишь точная нижняя грань множества величин, на которые наш оператор увеличивает норму элемента.

Раз мы так объявили норму, то надо проверять аксиомы нормы.

Утверждение 6.1. $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|), A \in \mathcal{B}(X, Y)$

1. $\forall x \in X \|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$ (то есть \inf в определении нормы $= \min$)
2. $\|A\|$ удовлетворяет аксиомам нормы

Доказательство. x - фиксирован, $\Rightarrow \forall c > \|A\|, \|Ax\| \leq c \|x\| \Rightarrow \|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$. Был фиксирован, теперь любой, первое утверждение доказано. Теперь второе.

$\alpha \in k, \alpha \neq 0, x \in X, x$ - фиксирован

$$(\alpha A)(x) = \alpha Ax$$

$$\begin{aligned} \forall x \in X \quad \|(\alpha A)(x)\| &= \|\alpha \cdot Ax\| = |\alpha| \cdot \|Ax\| \leq |\alpha| \cdot \|A\| \cdot \|x\| \\ &\Rightarrow \|\alpha A\| \leq |\alpha| \|A\| \end{aligned}$$

Очевидное замечание по слёзной просьбе двух студенток, которые ничего не понимали. Если мы докажем $\|Ax\| \leq M \|x\| \forall x \in X$, то $\|A\| \leq M$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left\| \frac{1}{\alpha} (\alpha A) \right\| &\leq \frac{1}{|\alpha|} \|\alpha A\| \Rightarrow |\alpha| \|A\| \leq \|\alpha A\| \\ &\Rightarrow \|\alpha A\| = |\alpha| \|A\| \\ A, B &\in \mathcal{B}(X, Y), x \in X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|(A+B)(x)\| &= \|Ax+Bx\| \leq \|Ax\| + \|Bx\| \leq \|A\| \cdot \|x\| + \|B\| \cdot \|x\| = \\ &= (\|A\| + \|B\|) \|x\| \quad \forall x \in X \\ &\Rightarrow \|A+B\| \leq \|A\| + \|B\| \end{aligned}$$

Как только есть какая-то константа, то настоящая норма меньше или равна этой константе. $\|A\| = 0 \Rightarrow \forall x \in X \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| = 0$. $\Rightarrow Ax = 0 \forall x \in X \Rightarrow A = \emptyset \Rightarrow \|A\|$ - настоящая норма \square

Теорема 6.3 (вычисление нормы непрерывного оператора).

$(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|), A \in \mathcal{B}(X, Y) \Rightarrow$

$$\|A\| = \underbrace{\sup_{\{\|x\| \leq 1\}} \|Ax\|}_a = \underbrace{\sup_{\{\|x\| < 1\}} \|Ax\|}_b = \underbrace{\sup_{\{\|x\|=1\}} \|Ax\|}_c = \underbrace{\sup_{\{x \in X, x \neq 0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}}_d$$

Доказательство. Очевидно $a \geq b, a \geq c, d \geq c$. Докажем $\|A\| \geq a \geq b \geq \|A\|$, *quad* $\|A\| \geq d \geq c \geq \|A\|$.

$$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \leq \|A\| \quad \forall x, \|x\| \geq 1 \Rightarrow \sup_{\{\|x\| \geq 1\}} \|Ax\| \leq \|A\| \Rightarrow a \leq \|A\|$$

Доказали $\|A\| \geq a$.

Пусть $\varepsilon > 0, z \in X, z \neq 0 \Rightarrow \left\| \frac{z}{\|z\|(1+\varepsilon)} \right\| = \frac{1}{1+\varepsilon} < 1$

$$\begin{aligned} \left\| A\left(\frac{z}{\|z\|(1+\varepsilon)}\right) \right\| &\leq b \Rightarrow \|Az\| \leq b(1+\varepsilon)\|z\| \quad \forall z \in X \\ &\Rightarrow \|A\| \leq b(1+\varepsilon) \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \|A\| \leq b \end{aligned}$$

Закончили с первой цепочкой неравенств.

Пусть $x \neq 0 \Rightarrow \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \Rightarrow \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\| \Rightarrow d = \sup_{\{x \neq 0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\|$.

пусть $z \in X, z \neq 0, \left\| \frac{z}{\|z\|} \right\| = 1 \Rightarrow \left\| A\left(\frac{z}{\|z\|}\right) \right\| \leq c \Rightarrow \|Az\| \leq C\|z\| \quad \forall z \in X$

c – супремум по единичной сфере

$$\Rightarrow \|A\| \leq C$$

□

Пример 6.5. $C[a, b], h(x) \in C[a, b]$ – фиксированная функция. $f \in C[a, b], M_n(f) := h(x) \cdot f(x)$.

$$M_n \in \text{Lin}(C[a, b])$$

Проверим, что он непрерывен и сосчитаем его норму.

Доказательство.

$$\begin{aligned} \|M_n(f)\|_\infty &= \max_{x \in [a, b]} |h(x) \cdot f(x)| \leq \max_{x \in [a, b]} |h(x)| \cdot \max_{x \in [a, b]} |f(x)| = \|h\|_\infty \cdot \|f\|_\infty \\ &\Rightarrow M_n \in \mathcal{B}(C[a, b]), \|M_n\|_{\mathcal{B}(C[a, b])} \leq \|h\|_\infty \end{aligned}$$

получили непрерывность. Раз есть общая константа, не зависящая от f , то мы получаем и оценку для нормы.

$$\begin{aligned} \chi_{[a, b]}(x) &1 \forall x \in [a, b] \chi_{[a, b]} \in C[a, b], \|\chi_{[a, b]}\|_\infty = 1 \\ \|M_n\| &\geq \|M_n(f)\| \forall f, \|f\| = 1 \Rightarrow \|M_n\| \geq \|M_n \cdot (\chi_{[a, b]})\|_\infty = \|h\|_\infty \\ &\Rightarrow \|M_n\|_{\mathcal{B}(C[a, b])} = \|h\|_\infty \end{aligned}$$

□

Теперь посмотрим на оператор дифференцирования, это очень важный пример.

Пример 6.6. $Y = C[a, b], X = \{f : \exists f' \in C[a, b]\}, 0 \leq a \leq b$

$$\begin{aligned} X &\subset Y, X \text{ — подпространство } Y, \text{ то есть} \\ \|f\|_X &= \|f\|_Y = \max_{x \in [a, b]} |f(x)| \\ D(f) &= f' \Rightarrow D \in \text{Lin}(X, Y), \\ D(x^n) &= nx^{n-1} \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{\|D(x^n)\|}{\|x^n\|} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{nb^{n-1}}{b^n} = +\infty \end{aligned}$$

при таком определении нормы оператор дифференцирования D не непрерывен.

Пример 6.7. $Y = C[a, b], X = C^{(1)}[a, b]$

$$\begin{aligned} \|f\|_X &= \max\{\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty\} \\ D(f) &= f' \quad \|D(f)\| = \|f'\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |f'(x)| \leq \underbrace{\max\{\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty\}}_{\|f\|_X} \\ &\Rightarrow D \in \mathcal{B}(X, Y), \|D\| \leq 1 \end{aligned}$$