

Функциональный анализ

Курс Виденского И.В.

Осень 2023

Оглавление

Оглавление	1
I Метрические пространства	3
1 Введение	4
1.1 Зачем изучать функциональный анализ	5
2 Метрические пространства	7
2.1 Банаховы пространства	10
2.2 Пространства ограниченных функций	13
2.3 Пространство последовательностей с \sup нормой	15
2.4 Пространства n раз непрерывно дифференцируемых функций на отрезке	16
3 Пространство суммируемых функций (Лебега L^p)	18
3.1 Теория меры	18
3.2 Классические неравенства	20
3.3 Пространство Лебега	23
3.4 Пространства l_n^p, l^p	26
3.5 Неполное нормированное пространство	29
3.6 Пополнение метрического пространства	30
3.7 Теорема о вложенных шарах	35
3.8 Сепарабельные пространства	37
3.9 Нигде не плотные множества	42
3.10 Полные семейства элементов	43
3.11 Полные и плотные множества в L^p	44
4 Метрические компакты	51
4.1 Относительно компактные множества в $C(K)$	58

II Линейные операторы 65**5 Линейные операторы в линейных пространствах 66**

- 5.1 Линейные операторы в линейных пространствах 66
- 5.2 Линейные операторы в нормированных пространствах . 69
- 5.3 Линейные функционалы 76
- 5.4 Изоморфные линейные пространства 81
- 5.5 Конечномерные пространства 84
- 5.6 Конечномерные подпространства 88
- 5.7 Конечномерность нормированного пространства с компактным единичным шаром 91
- 5.8 Факторпространство 94

III Гильбертовы пространства 97**6 Гильбертовы пространства 98**

- 6.1 Введение 98
- 6.2 Пространство, сопряжённое к гильбертову 115

Часть I

Метрические пространства

Глава 1

Введение

День рождения функционального анализа — 1932 год. В этом году вышла книжка «Теория линейных операторов», автор — С. Банах. Главная цель функционального анализа — изучение линейных операторов (но не только их). Главным объектом у нас будет X — линейное топологическое пространство. Оно же линейное пространство над \mathbb{C} (или \mathbb{R}). Есть непрерывные операции

1. $(x, z) \rightarrow x + z \quad x, z \in X$
2. $(\alpha, x) \rightarrow \alpha x \quad \alpha \in \mathbb{C}$

Если у нас есть топологическое пространство, то у нас есть все любимые объекты из математического анализа — пределы, непрерывность, производные, интегралы.

Пусть есть X, Y — линейные топологические пространства. Также есть линейное отображение $A : X \rightarrow Y$

Определение 1.1 (Линейное отображение).

$$A(\alpha x + \beta z) = \alpha Ax + \beta Az$$

Если $\dim X < +\infty, \dim Y < +\infty$, то это линейная алгебра.

$$A : X \rightarrow X, \dim X = n, A = A^* \Rightarrow \exists \text{ ОНБ } \{u_j\}_{j=1}^n$$

λ_j — j -е собственное число

$$Au_j = \lambda_j u_j$$

Теорема 1.1 (Гильберт). X — гильбертово (сепарабельное) пространство. $A = A^*, A : X \rightarrow X \Rightarrow \exists$ ОНБ из собственных векторов.

Если $\dim Y = 1$, т.е. $Y = \mathbb{C}$ (или \mathbb{R}), то $A : X \rightarrow \mathbb{C}$, A — линейный функционал.

В математическом анализе мы изучаем $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. В функциональном анализе же у нас X — пространство функций, $f \in X$

$$D(f) = f' \quad D : X \rightarrow Y$$

и здесь мы задаемся вопросами о следующих свойствах $D(f)$

- компактность
- самосопряжённость
- непрерывность

Отцы-основатели функционального анализа:

- Ф. Гильберт (1862–1943) Гильбертовы пространства;
- С. Банах (1892–1945) Банаховы пространства;
- Ф.Рисс (1880–1956) пространства Лебега L^p .

Ну и хочется ещё упомянуть для вас, компьютер саентистов, отцов основателей кибернетики, которые оставили немалый след в функциональном анализе

- Н. Винер (1894–1964);
- Д. фон Нейман (1903–1957). Про его архитектуру, наверное, что-то слышали?

1.1. Зачем изучать функциональный анализ

Во-первых, он позволяет посмотреть на задачу с высокого уровня абстракции.

Рассмотрим пространство непрерывных функций $C[a, b]$, там введём норму $|f| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$. Рассмотрим пространство многочленов $P_n = \{\sum_{k=0}^n a_k x^k, a_k \in \mathbb{R}\}$. Существует ли такой многочлен, на котором инфимум достигается? И если да, то единственный ли он?

$$E_n(f) = \inf_{p \in P_n} \|f - p\| = \min_{p \in P_n} \|f - p\|$$

На первый вопрос ответ да, это следует из общей теоремы функционального анализа.

$$\dim P_n = n + 1 < +\infty$$

На второй же вопрос ответ тоже да, и тут функциональный анализ ни при чём. Суть в том, что у многочлена степени n не может быть больше n корней.

Ну и ещё немаловажные причины

1. язык функционального анализа — междисциплинарный язык математики;
2. его результаты применяются в математической физике, которая у нас будет в следующем семестре;
3. это интересно и важно. $0, 1, 2 = o(3)$;
4. у нас будет экзамен, на котором придется говорить уже нам.

Дополнительная литература по курсу. Первая рассчитана на студентов: в некоторых местах рассказывается, как придумать доказательство, как прийти к тому, что требуется, а не в обратную сторону, как обычно. Остальные же книги поумнее.

1. А.Н.Колмогоров, С.В. Фомин «Элементы теории функций и Ф.А.»;
2. М.Рид, Б. Саймон. 1 том «методы современной физики». Тонкая (можно осилить), рассказывается также про применение ФА;
3. А.В. Канторович, Г.Г Акилов «Функциональный анализ». Похожа на энциклопедию. Но там можно найти всё;
4. К. Итосида «Функциональный анализ»;
5. У. Рудин.

Глава 2

Метрические пространства

Начнём с того, что все знают, надо ведь с чего-то начать. Мы будем несколько раз возвращаться к метрическим пространствам, а не изучим всё сразу. Один из полезных результатов, который мы получим, это новое описание компакта в метрических пространствах. Он будет самым рабочим. А компакт — вещь очень полезная. Компакты в гигантских пространствах напоминают компакты в \mathbb{R}^n или в \mathbb{C}^n и обладают теми же полезными свойствами.

Определение 2.1 (Метрика). X — множество. $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, ρ — **метрика**, если при $x \in X \wedge y \in X \wedge z \in X$ она обладает следующими свойствами

1. $\rho(x, y) \geq 0 \wedge (\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y)$
2. $\rho(y, x) = \rho(x, y)$
3. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$

Введём стандартное обозначение открытого шара. $x \in X, r > 0$
 $B_r(x) = \{y \in X : \rho(x, y) < r\}$ — шар с радиусом r . $\{B_r(x)\}_{r>0}$ — база окрестности в точке x .

G — открытое, если $\forall x \in G \exists r > 0 B_r(x) \subset G$.

F — замкнутое $\Leftrightarrow F \subset X \wedge X \setminus F$ — открытое.

В метрическом пространстве удобно характеризовать замкнутое множества с помощью последовательностей. Вспомним, что такое сходящаяся последовательность.

$\{x_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность $\wedge \forall n \in \mathbb{N} x_n \in X \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Leftrightarrow$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x_0) = 0$

(X, ρ) — метрическое пространство $\Rightarrow (F$ — замкнутое $\Leftrightarrow \{x_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность $\wedge \forall n \in \mathbb{N} x_n \in F \wedge (\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow x_0 \in F))$)

Определение 2.2 (Фундаментальная последовательность).
 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ — фундаментальная $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N} ((n > N \wedge m > N) \Rightarrow \rho(x_n, x_m) < \varepsilon) \Leftrightarrow \lim_{n, m \rightarrow \infty} \rho(x_n, x_m) = 0$

Замечание 2.1. $\exists x_0 \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \{x_n\}_{n=1}^\infty$ — фундаментальная

Определение 2.3 (Полное метрическое пространство).
 (X, ρ) — полное, если все фундаментальные последовательности имеют предел, лежащий в X

Почему хорошо жить в полном метрическом пространстве?

Замечание 2.2 (о пользе полноты). $F : X \rightarrow \mathbb{R}, (X, \rho)$ — метрическое пространство, F — непрерывная.

Стоит задача найти $x_0 \in X$ т.ч. $F(x_0) = 0$
 Алгоритм: $\{x_n\}_{n=1}^\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = 0, \lim_{n, m \rightarrow \infty} \rho(x_n, x_m) = 0$ Если (X, ρ) — полное, то $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, F(x_0) = 0$ А если нет, то из наших вычислений вообще ничего не следует, возможно, решения вообще нет.

Пример 2.1. $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ — полные.

Пример 2.2. $\mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$ — неполное.

Пример 2.3. \mathbb{Q} — неполное.

Потом приведем примеры поинтереснее. Кстати, древние греки пришли в ужас, когда узнали, что \mathbb{Q} — неполное.

Определение 2.4. (X, ρ) — метрическое пространство, $A \subset X, A$ — ограниченное, если

$$\exists R > 0 \exists x_0 \in X A \subset B_R(x_0)$$

Теорема 2.1 (Свойства фундаментальных последовательностей). (X, ρ) — метрическое пространство, $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ — фундаментальная последовательность, тогда выполняется:

1. $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ — ограниченная, т.е. $\exists R > 0 \exists x_0 \in X \forall n \in \mathbb{N} x_n \in B_R(x_0)$
2. $\exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ — подпоследовательность $\Rightarrow (\exists a \in X \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a \Rightarrow \exists a \in X \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k})$
3. $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^\infty$ — произвольная последовательность действительных чисел $\wedge \forall k \in \mathbb{N} \varepsilon_k > 0 \Rightarrow \exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ — подпоследовательность $\forall j \in \mathbb{N} (j > k \Rightarrow \rho(x_{n_k}, x_{n_j}) < \varepsilon_k)$

1 утверждение. Возьмём $\varepsilon = 1$, тогда из фундаментальности $\exists N \forall n \in \mathbb{N} (n > N \Rightarrow \rho(x_n, x_N) < 1)$.

Возьмём $R = \max\{\rho(x_1, x_N), \dots, \rho(x_{N-1}, x_N)\} + 1$. Единичка на всякий случай.

Тогда $\forall n \in \mathbb{N} x_n \in B_R(x_N)$. □

2 утверждение. Возьмём $\varepsilon > 0$, тогда по фундаментальности $\exists N \forall n \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N} ((n > N \wedge m > N) \Rightarrow \rho(x_n, x_m) < \varepsilon)$. Возьмём это N .

$\exists a \lim x_{n_k} = a \Rightarrow \exists n_k (\rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon \wedge n_k > N)$. Возьмём это n_k .

Возьмём некоторое $m > N$. Тогда $\rho(x_m, a) < \rho(x_m, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, a) < 2\varepsilon$ □

3 утверждение. Докажем по индукции:

$\varepsilon_1 : \exists n_1 \forall n \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N} ((n > n_1 \wedge m > n) \Rightarrow \rho(x_m, x_n) < \varepsilon_1)$. Выберем n_1 , тогда $\forall m \in \mathbb{N} (m > n_1 \Rightarrow \rho(x_m, x_{n_1}) < \varepsilon_1)$.

ε_k : по индукции выбрали n_1, \dots, n_{k-1} , $k \geq 2$. $\forall j \in (1 \dots k-1) \forall m \in \mathbb{N} (m > n_j \Rightarrow \rho(x_m, x_{n_j}) < \varepsilon_j)$. Из фундаментальности исходной последовательности $\exists n_k (n_k > n_{k-1} \wedge \forall m \in \mathbb{N} (m > n_k \Rightarrow \rho(x_m, x_{n_k}) < \varepsilon_k))$ □

Следствие 2.1. (X, ρ) , $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность, тогда

$$\exists \{x_{n_k}\} \text{ т.ч. } \sum_{k=1}^{\infty} \rho(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < +\infty$$

Доказательство. По 3 свойству при $\varepsilon_k = \frac{1}{2^k}$. \square

Теорема 2.2 (О замкнутом подмножестве). (X, ρ) — метрическое пространство, тогда

1. (X, ρ) — полное, $Y \subseteq X$, Y — замкнутое $\Rightarrow (Y, \rho)$ — полное
2. $Y \subseteq X$, (Y, ρ) — полное $\Rightarrow Y$ — замкнутое

1 утверждение. Доказательство следует прямо из определения. Значим, что Y — замкнутое подмножество полного пространства. Берем фундаментальную последовательность. $Y \subset X$, пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \forall n \in \mathbb{N} x_n \in Y$ — фундаментальная. $\forall n \in \mathbb{N} x_n \in X, X$ — полное $\Rightarrow \exists x_0 \in X \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$. Y — замкнутое, значит $x_0 \in Y \Rightarrow (Y, \rho)$ — полное. \square

2 утверждение. Второй пункт не труднее первого. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — произвольная фундаментальная последовательность в Y .

Y — полное $\Rightarrow \exists x_0 \in Y \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow Y$ — замкнутое из-за произвольности последовательности. \square

2.1. Банаховы пространства

Сначала введём понятие полунормы.

Определение 2.5 (полунорма). Пусть X — линейное пространство над \mathbb{R} или \mathbb{C} . Отображение $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ называется полунормой, если при $x \in X \wedge y \in X \wedge (\lambda \in \mathbb{R} \vee \lambda \in \mathbb{C})$

1. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ (полуаддитивность)
2. $p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$

Свойство 2.1. p — полунорма \Rightarrow

$$\forall x \in X p(x) \geq 0 \wedge p(0) = 0$$

Доказательство. $p(0) = p(0 \cdot 0) = 0 \cdot p(0) = 0$. Пусть $x \in X \Rightarrow 0 = x + (-x) \Rightarrow p(0) \leq p(x) + \underbrace{p(-x)}_{p(x)} = 2p(x) \Rightarrow p(x) \geq 0$ \square

Определение 2.6 (Норма). X — линейное пространство, $p : X \rightarrow \mathbb{R}$. p — норма $\Leftrightarrow (p \text{ — полунорма} \wedge (p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0))$. Будем обозначать $\|x\| := p(x)$.

$(X, \|\cdot\|)$ будем обозначать нормированное пространство. и при $(x \in X \wedge y \in X)$ $\rho(x, y) := \|x - y\|$. Тогда $(X, \|\cdot\|)$ — метрическое пространство.

Определение 2.7 (банахово пространство). $(X, \|\cdot\|)$ — банахово, если оно полное

Еще пару определений перед критерием банахова пространства.

Определение 2.8 (подпространство в алгебраическом смысле). X — линейное пространство, $L \subset X$. L — подпространство в алгебраическом смысле $\Leftrightarrow \forall x \in L \forall y \in L \forall \alpha \in K \forall \beta \in K \alpha x + \beta y \in L$.

Определение 2.9 (подпространство). $(X, \|\cdot\|)$, $L \subset X$, L — подпространство, если

- L подпространство в алгебраическом смысле
- $L = \bar{L}$ (\bar{L} — замыкание)

Теперь нам потребуется сходимость рядов. Для того, чтобы говорить о сходимости, нужна топология.

Определение 2.10 (Сходимость).

$$(X, \|\cdot\|) \quad \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \quad S_n = \sum_{k=1}^n x_k$$

$\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ (*), (*) сходится, если $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \in X$

(*) сходится абсолютно, если $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ сходится

В \mathbb{R}^n (или в \mathbb{C}^n) если у нас была абсолютная сходимость, то была и обычная, но вообще говоря, это не так.

Теорема 2.3 (Критерий полноты нормированного пространства (банаховости)). $(X, \|\cdot\|)$ - полное \Leftrightarrow из абсолютной сходимости ряда следует сходимость ряда.

Доказательство. Предположим, что наше пространство полное (\Rightarrow). (X, ρ) — полное, $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность, при этом

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| \text{ сходится} \quad (**)$$

Цель такая: последовательность S_n — фундаментальная. Сейчас применим критерий Коши к ряду (**). Это ряд из чисел, так что всё в порядке. Пусть $\varepsilon > 0$. По критерию Коши $\exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \forall p \in \mathbb{N} (n > N \Rightarrow \sum_{k=n+1}^{n+p} \|x_k\| < \varepsilon)$.

$$S_n = \sum_{k=1}^n x_k.$$

$$\begin{aligned} \|S_{n+p} - S_n\| &= \left\| \sum_{k=1}^p x_{n+k} \right\| \leq \sum_{k=1}^p \|x_{n+k}\| = \sum_{k=n+1}^{n+p} \|x_k\| < \varepsilon \\ \Rightarrow \{S_n\}_{n=1}^{\infty} &\text{ — фундаментальная, } (X, \rho) \text{ — полное} \\ \Rightarrow \exists S \in X \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= S \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} x_k \text{ сходится}$$

Мы так запаслись номерами, чтобы выражение было меньше ε .

Теперь (\Leftarrow). У нас кроме определения ничего нет. Возьмём какую-то фундаментальную последовательность. Откуда взять предел? Есть соотношения между элементами последовательности. Возьмём подпоследовательность, ведь у нас есть следствие 2.1! Из свойств фундаментальных последовательностей, мы знаем, что

$$\begin{aligned} \exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \text{ — подпоследовательность } \|x_{n_1}\| + \sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| &\text{ сходится} \\ \Rightarrow \text{последовательность } x_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) &\text{ сходится} \end{aligned}$$

Но её последовательность частичных сумм — это в точности оригинальная подпоследовательность:

$$S_m = x_{n_1} + \sum_{k=1}^{m-1} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) = x_{n_m} \Rightarrow \exists S \in X \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = S$$

Далее из части 2 Теоремы 2.1

$$\exists S \in X \lim_{m \rightarrow \infty} x_{n_m} = S \Rightarrow \exists S \in X \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = S$$

□

2.2. Пространства ограниченных функций

Определение 2.11. Пусть A — произвольное множество. Стандартное обозначение $m(A)$ — множество всех ограниченных функций из него в комплексные (или только в действительные, не важно) числа

$$m(A) = \{f | f : A \rightarrow \mathbb{C} \wedge \sup_{x \in A} |f(x)| < +\infty\}$$

$$f \in m(A) \Rightarrow \|f\|_\infty = \sup_{x \in A} |f(x)|.$$

Теорема 2.4. $(m(A), \|\cdot\|_\infty)$ — банахово пространство

Доказательство. Нужно проверить две вещи. Во-первых, что $\|\cdot\|_\infty$ удовлетворяет аксиомам нормы. А во-вторых, что пространство с таким определением является полным. Просто по определению, никаких хитрых критериев — возьмём фундаментальную подпоследовательность и покажем, что у нее есть предел.

Проверяем, что $\|\cdot\|_\infty$ удовлетворяет аксиомам нормы.

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \|\lambda f\|_\infty = \sup_{x \in A} |\lambda| \cdot |f(x)| = |\lambda| \cdot \sup_{x \in A} |f(x)| = |\lambda| \cdot \|f\|_\infty$$

Нужно проверить неравенство треугольника.

$$\begin{aligned} \forall f \in m(A) \forall g \in m(A) \forall x \in A |f(x) + g(x)| &\leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \\ \Rightarrow \forall f \in m(A) \forall g \in m(A) \|f + g\|_\infty &= \sup_{x \in A} |f(x) + g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \end{aligned}$$

Следующая аксиома нормы:

$$\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \forall x \in A f(x) = 0 \text{ т.е. } f \text{ — нулевая функция}$$

Теперь мы проверили аксиомы нормы. Доказываем полноту. $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ — фундаментальная в $m(A)$.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (m > N \wedge n > N) \Rightarrow \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon \text{ т.е. } \sup_{x \in A} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Первый вопрос: откуда взять претендента на роль предела? Еще желательно, чтобы он был единственный. Берём ε, N из формулы выше, фиксируем x . Если для супремума есть неравенство, то и для x тем более. $\forall x \in A ((n > N \wedge m > N) \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon) \Rightarrow \{f_n(x)\}_{n=0}^\infty$ — фундаментальная последовательность чисел в \mathbb{C} .

$$\Rightarrow \forall x \in A \exists L \in \mathbb{C} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = L$$

$$\text{Определим } f := (x \in A \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x))$$

$$\begin{aligned} (n > N \wedge m > N \Rightarrow \forall x \in A |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon) & \quad \text{пусть } m \rightarrow \infty \\ \Rightarrow (n > N \Rightarrow \forall x \in A |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon) \\ \Rightarrow (n > N \Rightarrow \|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon) \end{aligned}$$

Последнее соображение, которое нужно добавить, это то, что f — элемент A . Для $n > N$ можем записать f как $f = (f - f_n) + f_n$, $f_n \in m(A)$, $f - f_n \in m(A)$.

$$\Rightarrow \|f\|_\infty = \|(f - f_n) + f_n\|_\infty \leq \|f - f_n\|_\infty + \|f_n\|_\infty < +\infty \Rightarrow f \in m(A)$$

□

Давайте заметим, что у нас получилось определение равномерной непрерывности из математического анализа.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f \in m(A) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| = 0 \Leftrightarrow f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{x \in A} f$$

Определение 2.12 (Топологический компакт). Множество K — топологический компакт, если оно обладает следующими свойствами

1. $(\forall \alpha \in A \ G_\alpha \text{ — открытое множество } \wedge K \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \Rightarrow \exists \{\alpha_j\}_{j=1}^n \text{ — конечная подпоследовательность } K \subseteq \bigcup_{j=1}^n G_{\alpha_j})$
2. Хаусдорфовость $\forall x \in K \forall y \in K (x \neq y \Rightarrow \exists U \exists V (U \text{ — открытое множество } \wedge V \text{ — открытое множество } \wedge x \in U \wedge y \in V \wedge U \cap V = \emptyset))$

Определение 2.13. $C(K) = \{f | f : K \rightarrow \mathbb{R} \wedge f \text{ непрерывна}\}$

$$\|f\|_{C(K)} = \|f\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)| = \max_{x \in K} |f(x)|$$

Следствие 2.2. K — топологический компакт $\Rightarrow C(K)$ — банахово

Доказательство. $C(K) \subset m(K)$. $C(K)$ — подпространство в алгебраическом смысле. Проверим, что $C(K)$ — замкнуто в $m(K)$

$$\{f_n\}, f_n \in C(K), \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f_n \xrightarrow{K, n \rightarrow \infty} f \Rightarrow f \in C(K) \Rightarrow C(K)$$

тогда $m(K)$ — полное и $C(K)$ — полное. □

2.3. Пространство последовательностей с \sup нормой

Определение 2.14. $\mathbb{C}^n, n \in \mathbb{N}, l_n = \{x^\infty = (x_1, \dots, x_n), x_j \in \mathbb{C}\}$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$$

$A = \{1, 2, \dots, n\}, l_n^\infty = m(A) \Rightarrow l_n^\infty$ — полное Удобно думать, что последовательность — это функция на множестве натуральных чисел.

Определение 2.15 (l^∞).

$$l^\infty = \{X = \{x_j\}_{j=1}^\infty, \sup_{j \in \mathbb{N}} |x_j| < +\infty\}$$

$$\|x\|_\infty = \sup_{j \in \mathbb{N}} |x_j| \quad A = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$$

$$X = \{x\}_{j=1}^\infty \in m(A), f(j) = x_j$$

$$l^\infty := m(\mathbb{N}) \Rightarrow l^\infty \text{ — полное}$$

Определение 2.16.

$$c = \{X = \{x\}_{j=1}^\infty, x_j \in \mathbb{C} \mid \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0\}$$

$$c \subset l^\infty, \|x\| = \|x\|_\infty = \sup \|X\|$$

$$c_0 = \{x = \{x\}_{j=1}^\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} x_j = 0\}, c_0 \subset c \subset l^\infty$$

c, c_0 — замкнутые подпространства в $l^\infty \Rightarrow c, c_0$ — банаховы.

2.4. Пространства n раз непрерывно дифференцируемых функций на отрезке

Определение 2.17 (норма n производной).

$$n \in \mathbb{N} \quad C^{(n)}[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists f^{(n)} \in C[a, b]\}$$

$$\|f\|_{(n)} = \max_{0 \leq k \leq n} \|f^{(k)}\|, f^0 = f$$

Теорема 2.5. В $C^{(n)}[a, b]$ — банахово.

Доказательство.

$$\begin{aligned} \{f_m\}_{m=1}^{\infty} & \text{ — фундаментальная последовательность в } C^{(n)}[a, b] \\ \varepsilon > 0 \exists N : (m > n \wedge q > n) & \Rightarrow \|f_m - f_q\|_{C^{(n)}} < \varepsilon \Rightarrow \|f_m^{(k)} - f_q^{(k)}\|_{\infty} < \varepsilon \\ & k = 0, 1, \dots, n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{f_m^{(k)}\} & \text{ — фундаментальная в полном пространстве } C[a, b] \\ & \Rightarrow \exists \varphi_k \in C[a, b], f_n^{(k)} \underset{[a, b]}{\rightrightarrows} \varphi_k, k = 0, 1, \dots, n \end{aligned}$$

$$\overset{\text{Анализ}}{\Rightarrow} (f_k^{(n)} \underset{[a, b]}{\rightrightarrows} \varphi_0 \wedge \varphi_k^0 \underset{[a, b]}{\rightrightarrows} \varphi_1) \Rightarrow \varphi_1 = \varphi'_0, \varphi_2 = \varphi''_0, \dots, \varphi_n = \varphi_0^{(n)} \quad (2.1)$$

□

Глава 3

Пространство суммируемых функций (Лебега L^p)

Сейчас будет небольшой экскурс в теорию меры, которая была на математическом анализе. Мы ничего доказывать не будем и поверим, что все утверждения верны и в общем случае.

3.1. Теория меры

Определение 3.1 (Мера). (X, U, μ) — пространство с мерой. X — множество, U — σ -алгебра подмножества X

1. $\emptyset \in U$
2. $A \in U \Rightarrow X - A \in U$
3. $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}, A_n \in U, A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow A \in U$

$$\mu : U \rightarrow [0, +\infty]$$

— мера, если

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, A_n \cap A_m = \emptyset, n \neq m, A_n \in U \Rightarrow \mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ (счетная аддитивность)

Предположения:

1. μ — полная мера, то есть $A \in U, \mu(A) = 0 \Rightarrow (\forall B \subset A \Rightarrow B \in U, (\Rightarrow \mu B) = 0)$

2. μ — σ -конечна, то есть $X = \cup_{j=1}^{\infty} X_j, \mu(X_j) < +\infty$

Пока можем думать, что речь идет о мере Лебега. Потом приведём другие примеры. В теории пространств будем считать, что функция действует из X в \mathbb{R} или в \mathbb{C} (не особо важно).

Определение 3.2 (Измеримая функция). $f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$. f — измерима, если

$$\forall c \in \mathbb{R}, x \underbrace{\{x : c < f(x)\}}_{\text{измеримое множество}} \in U$$

$$f : X \rightarrow \mathbb{C} \Rightarrow f = u + iv, u, v : X \rightarrow \mathbb{R}$$

f — измерима, если u, v — измеримы

Как же определяется интеграл? Пусть есть какой-то элемент σ -алгебры $e \in U$, $\chi_e(x) = \begin{cases} 1, x \in E \\ 0, x \notin e \end{cases}$. Множество простых функций определяется как

$$S = \{g(x) = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{e_k}, c_k \in \mathbb{C}, e_k \in U\}$$

$$g \in S, \int_X g(x) d\mu = \sum_{k=1}^n c_k \mu e_k.$$

$f(x)$ — измеримая, если $f(x) \geq e, x \in X$

Определение 3.3 (Произвольно измеримая функция).

$$\int_X f d\mu = \sup \left\{ \int_X g(x) d\mu : 0 \leq g(x) \leq f(x), x \in X, c_k \in \mathbb{R}, c_k > 0 \right\}$$

Определение 3.4 (Измеримая функция). f — измерима, если

$$f_+(x) = \max(f(x), 0) \wedge f_-(x) = \max(-f(x), 0) \Rightarrow f = f_+ - f_-$$

Если $\int_X f_+ d\mu$ — конечен или $\int_X f_- d\mu$ — конечен, то $\int_X f d\mu = \int_X f_+ d\mu - \int_X f_- d\mu$ Если f — измеримая, $f : X \rightarrow \mathbb{C} \Rightarrow f = u + iv$

$$\int_X f d\mu = \int_X u d\mu + i \int_X v d\mu$$

Определение 3.5 (Множество суммируемых функций).

$L(X, \mu)$ — множество суммируемых функций =

$$\left\{ f_i : \int_X |f| d\mu < +\infty \right\}, |f| = f_+ + f_-$$

Прежде чем двигаться дальше, приведем примры других мер (кроме мер Лебега)

Пример 3.1. $E \subset \mathbb{R}^n$, E — измерима по Лебегу, λ — мера Лебега, $w(x) \geq 0, x \in E$, w — измерима по Лебегу.

$e \subset E$, e — измеримо по Лебегу. $\mu_e = \int_e w(x) d\lambda$, $w(x)$ — плотность меры μ , $w(x)$ — её вес.

Вторая мера в каком-то смысле противоположная. Она сосредоточена на наборе точек и называется дискретной.

Пример 3.2. X — множество ($X \neq \emptyset$), $a \in X$

$$\sigma_n, e \subset X, \sigma_a(e) = \begin{cases} 1, a \in E \\ 0, a \notin e \end{cases}$$

$\forall e, e \subset X, e$ — измеримо

Пример 3.3 (Дискретная мера). X — бесконечное множество. $\{a_j\}_{j=1}^\infty, a_j \in X, a_j \neq a_k, j \neq k$

$$\{h_j\}_{j=1}^\infty, h_j > 0$$

$$\mu = \sum_{j=1}^\infty h_j \delta_{a_j}, e \subset X \quad \mu E = \sum_{\{j: a_j \in E\}} h_j$$

План такой: хотим ввести норму на множестве интегрируемых функций. Для этого нам надо ввести некоторые неравенства.

3.2. Классические неравенства

Теорема 3.1 (Неравенство Юнга). $p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (q — сопряженный показатель)

$$\Rightarrow ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^p}{q}$$

Доказательство. Пусть b — фиксировано, $\varphi(x) = \frac{x^p}{p} - xb, x \in [0, +\infty)$. Хотим найти $\min_{x \in [0, +\infty)} \varphi(x)$. Для этого посмотрим, где производная обращается в 0. $\varphi'(x) = x^{p-1} - b, \varphi'(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 = b^{\frac{1}{p-1}} \Rightarrow \varphi(x) > \varphi(x_0) \forall x \neq x_0, x \geq 0$. Таким образом, x_0 — строгий локальный минимум.

$$\begin{aligned}\varphi(x_0) &= \frac{1}{p} b^{\frac{p}{p-1}} - b^{\frac{p}{p-1}} = b^{\frac{p}{p-1}} \left(\frac{1}{p} - 1 \right) = \frac{b^q}{q} \\ -\frac{1}{q} &= \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p} \Rightarrow q = \frac{p}{p-1} \\ \varphi(x) &\geq -\frac{b^q}{q} \forall x \in [0, +\infty) \text{ то есть ОК}\end{aligned}$$

$$\varphi(x_0) = \frac{1}{p} b^{\frac{p}{p-1}} - b^{\frac{p}{p-1}} = b^{\frac{p}{p-1}} \left(\frac{1}{p} - 1 \right) = \frac{b^q}{q}$$

□

Замечание 3.1. Равенство в неравенстве Юнга достигается только при $a = b^{\frac{1}{p-1}}$

Теорема 3.2 (Неравенство Гельдера). (X, U, μ) — пространство с мерой. f, g — измеримые, $p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow$

$$\int_X |fg| d\mu \leq \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_X |g|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \quad (*)$$

Если $p = q = 2$, то это «Неравенство Коши-Бунаковского-Шварца», или на молодёжном математическом сленге неравенство КБШ

Доказательство. Для начала отбросим какие-то простые случаи.

$A = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, B = \left(\int_X |g|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$. Если $A = 0 \Leftrightarrow |f| = 0$ почти всюду по $\mu \Leftrightarrow f(x) = 0$ почти всюду по μ (то есть $\mu\{x : f(x) \neq 0\} = 0$) На всякий случай поясним, почему функция равна 0 почти всюду по мере μ

$$\int_X |f| d\mu = 0 \Rightarrow e = \{x : f(x) = 0\}, m \in \mathbb{N}, e_m = \{x : |f(x)| > \frac{1}{m}\}$$

$$e = \bigcup_{m=1}^{\infty} e_m \quad \int_X |f| d\mu \geq \int_{e_m} |f| d\mu \geq \frac{1}{m} \mu e_m \Rightarrow \mu e_m = 0 \Rightarrow \mu E = 0$$

$$\Rightarrow f(x) \cdot g(x) = 0 \text{ п.в.} \quad 0 \leq 0 \quad (*)$$

Если $A = +\infty$, то $(*)$

пусть $0 < A < +\infty, 0 < R < +\infty$

Неравенство Гельдера однородное, то есть если мы f умножим на константу, то левая и правая часть умножится на неё же, аналогично с g . Иногда бывает удобно ввести нормировку.

$$f_1(x) = \frac{f(x)}{A}, g_1(x) = \frac{g(x)}{B}, \int_X |f_1(x)|^p d\mu = \frac{A^p}{A^p} = 1, \int_X |g_1(x)|^q d\mu = 1$$

Пусть x — фиксирован, $a = |f(x)|$, $b = |g(x)| \xrightarrow{\text{п.Юнга}}$

$$|f_1(x)| \cdot |g_1(x)| \leq \frac{|f_1(x)|^p}{p} + \frac{|g_1(x)|^q}{q} \text{ проинтегрируем } X \text{ по } \mu$$

$$\Rightarrow \int_X |f_1| \cdot |g_1| d\mu \leq \frac{1}{p} \int_X |f_1|^p d\mu + \frac{1}{q} \int_X |g_1|^q d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Умножаем на $AB \Rightarrow \int_X |fg| d\mu \leq AB$ □

Теорема 3.3 (Неравенство Минковского). (X, U, μ) , f, g — измеримые, $1 \leq p < +\infty \Rightarrow$

$$\underbrace{\left(\int_X |f(x) + g(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}}_C \leq \underbrace{\left(\int_X |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}}_A + \underbrace{\left(\int_X |fg(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}}_B \quad (*)$$

Доказательство. Сначала разберём простые случаи. $p = 1$, x — фиксирован. $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$ проинтегрируем по $X \Rightarrow (*)$ при $p = 1$. Теперь пусть $p > 1$. Если $A = +\infty$, или $B = +\infty$, или $C = 0$, то $(*)$.

Теперь же пусть $A < +\infty, B < +\infty, C > 0$. Доказательство будет в два этапа. На первом этапе получим гораздо более слабое утверждение, вообще не то, что требуется в теореме, но оно нам понадобится. Докажем, что $C < +\infty$.

$a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow |a+b| \leq |a|+|b| \leq 2 \max(|a|, |b|) \Rightarrow |a+b|^p \leq 2^p \max(|a|^p, |b|^p) \leq 2^p(|a|^p + |b|^p) \Rightarrow$ при фиксированном x

$$|f(x) + g(x)|^p \leq 2^p(|f(x)|^p + |g(x)|^p) \text{ проинтегрируем по } X$$

$\Rightarrow C^p \leq 2^p(A^p + B^p) \Rightarrow C < +\infty$. Первая часть доказательства закончена.

$$C^p = \int_X |f+g|^p d\mu = \int_X |f+g| \cdot |f+g|^{p-1} d\mu \leq \int_X |f| \cdot |f+g|^{p-1} d\mu + \int_X |g| \cdot |f+g|^{p-1} d\mu$$

$$\int_X |f| \cdot |f+g|^{p-1} d\mu \stackrel{\text{н. Гельдера}}{\leq} \left(\int_X |f+g| d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \underbrace{\left(\int_X |f+g| d\mu \right)}_A^{(p-1)q} = AC$$

$$\begin{aligned} \int_X |g| \cdot |f+g|^{p-1} d\mu &\stackrel{\text{аналогично}}{\leq} BC^{\frac{p}{q}} \Rightarrow \\ C^p &\leq (A+B)C^{\frac{p}{q}}, \quad 0 < C < +\infty \Rightarrow \\ C^{p-\frac{p}{q}} = C &\Rightarrow C \leq A+B \text{ (это (*))} \end{aligned}$$

□

3.3. Пространство Лебега

Отсюда и до определения L^∞ очень аккуратно с \mathcal{L} и L читать. Тут точно есть путаница, но записи лекции нет, чтобы ее устранить.

Определение 3.6. (X, U, μ) — пространство с мерой. $L(X, \mu)$ — пространство суммируемых функций. $1 \leq p < +\infty$ $\mathcal{L}^p(X, \mu) = \{f : |f|^p \in L(X, \mu)\}$

$$f \in L^p(X, \mu), \|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

Проверим, что $\|f\|_p$ — это полунорма на $L^p(X, \mu)$. $c \in \mathbb{R}$ (или \mathbb{C}). $\|cf\|_p = |c| \|f\|_p$

$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ — неравенство Минковского

$\|f\| = 0 \Leftrightarrow \int_X |f(x)|^p d\mu = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ почти всюду по мере μ на X .

Пример 3.4. $L[0, 1], \lambda$ — мера Лебега на $[0, 1]$.

функция Дирихле $\varphi(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad \int_0^1 |\varphi(x)| d\lambda = 0.$

$N = \{f - \text{измерима} \wedge f(x) = 0 \text{ почти всюду на } X \text{ по } \mu\}$. $\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f \in N$ (не зависит от p). Рецепт приготовления пространства с нормой из полуфбриката. пространство с полунормой. N — подпространство в L^p , L^p/N — факторпространство.

$g, f \in L^p, f \sim g \Leftrightarrow f - g \in N \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ почти всюду по μ . \bar{f} — класс эквивалентности, $\bar{f} = \{g : f \sim g\}$.

$\|\bar{f}\|_p := \|f\|$, то есть можно взять любую функцию из класса эквивалентности.

$$\|\bar{f}\|_p = 0 \Leftrightarrow \int_X |f|^p d\mu = 0 \Leftrightarrow f \in N \Rightarrow \bar{f} = N = \bar{0} \Rightarrow$$

$\|\bar{f}\|_p$ — норма на L^p . Говорят, что $f \in L^p$, возьмём функцию из L^p , но имеют в виду, что возьмут класс эквивалентности, а из него возьмут функцию

Одна из главных целей — доказать, что эти пространства Банаховы. Сначала определим $L^\infty(X, \mu)$ (существенно ограниченные функции).

Определение 3.7 ($L^\infty(X, \mu)$). $f \in L^\infty(X, \mu)$, если

$$\exists c > 0 |f(x)| \leq c \text{ почти всюду на } X \text{ по } \mu (\mu\{x : |f(x)| > c\} = 0)$$

Возьмём точную нижнюю грань этой константы. $\|f\|_\infty = \inf\{c \geq 0 : \mu\{x : |f(x)| > c\} = 0\}$ (существующий суп, или на подлом англосаксонском $\text{ess sup}_X f$)

Свойство 3.1. $f \in \mathcal{L}^\infty(X, \mu) \Rightarrow \mu\{f(x) > \|f\|_\infty\} = 0$

Доказательство. $e = \{x : |f(x)| > \|f\|_\infty\}, m \in \mathbb{N}$.

$e_m = \{x : |f(x)| > \|f\|_\infty + \frac{1}{m}\} \Rightarrow \mu e_m = 0$ по определению $\text{ess sup}_X f$
 $\Rightarrow e = \bigcup_{m=1}^\infty e_m \Rightarrow \mu e = 0$ □

$\|f\|_\infty$ — полунорма на \mathcal{L}^∞

$$\lambda \neq 0 \quad |\lambda f(x)| \leq |\lambda| \cdot c \Leftrightarrow |f(x)| \leq c \Rightarrow \|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \|f\|_\infty,$$

$f, g \in \mathcal{L}^\infty, x \in X \Rightarrow |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ для п.в. x на X
 $\Rightarrow \|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$

$\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \mu\{x : |f(x)| > 0\} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \text{ п.в. на } X \Leftrightarrow f \in N = \{f - \text{измерима, } f(x) = 0 \text{ п.в. на } X\}$

$$L^\infty = \mathcal{L}^\infty / N$$

Все, что Н.А. доказал для меры Лебега, верно и для других мер. Те доказательства и так были не особо веселые, чтобы их повторять.

Теорема 3.4 (Фату). (X, U, μ) , $\{g_n\}_{n=1}^\infty, g_n$ — измеримые, $g_n(x) \geq 0$

$$g_n(x) \xrightarrow{\text{п.в.}} g(x) \quad \int_X g_n(x) d\mu \leq C \text{ не зависит от } n \\ \Rightarrow \int_X g(x) d\mu \leq C$$

Первая существенная теорема, которая нам встретилась.

Теорема 3.5 (полнота пространства Лебега). $(X, U, \mu), 1 \leq p \leq +\infty \Rightarrow L^p(X, \mu)$ — банаховы.

Доказательство. при $1 \leq p < +\infty$ воспользуемся критерием полноты (если сходится ряд из норм, то сам ряд сходится)

$$\{f_n\}_{n=1}^\infty, f_n \in L^p, \sum_{n=1}^\infty \|f_n\|_p \leq C < +\infty \\ S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$$

Докажем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n(x) - f(x)\|_p = 0$. Существует ли $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$ почти всюду на X ?

Рассмотрим $\sigma_n(x) = \sum_{k=1}^n |f_k(x)| \Rightarrow \sigma_n(x)$ возрастает $\Rightarrow \exists \sigma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x)$. Возможно, $\sigma(x) = +\infty$ для некоторых x .

$$\|\sigma_n\|_p \leq \sum_{k=1}^n \|f_k\|_p \leq C$$

$$\int_X |\sigma_n(x)|^p d\mu \leq C^p \wedge \sigma_n(x)^p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sigma(x)^p \forall x \in X \stackrel{\text{т. Фату}}{\Rightarrow}$$

$\int_X \sigma(x)^p d\mu \leq c^p$ Самое главное, что мы из этого заключаем: $\sigma(x) < +\infty$ п.в. на X по μ .

$$x \in X \quad \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| < +\infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \text{ — сходится}$$

$$f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \text{ определена п.в. на } X, \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p < +\infty, \varepsilon > 0$$

Применим критерий Коши: $\exists N \in \mathbb{N} \quad m > n > N \Rightarrow \sum_{k=n+1}^m \|f_k\|_p < \varepsilon$
 $\varepsilon \Rightarrow \|S_m(x) - S_n(x)\|_p \leq \sum_{k=n+1}^m \|f_k\|_p < \varepsilon$

$$\int_x |S_m(x) - S_n(x)|^p d\mu < \varepsilon^p (n \text{ фиксировано}) \wedge |S_m(x) - S_n(x)|^m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} |f(x) - S_n(x)|$$

$$\xRightarrow{\text{Фатту}} \int_X |f - S_n|^p d\mu \leq \varepsilon^p \Rightarrow \|f - S_n\| \leq \varepsilon$$

$f - S_n \in L_p, S_n \in L^p \Rightarrow f = (f - S_n) + S_n \Rightarrow f \in L_p$ и $\|f - S_n\|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$
 Теперь осталось рассмотреть случай $p = \infty$. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальная, $f_n \in L^{\infty}$,

$$|f_n(x)| \leq \|f_n\|_{\infty} \quad x \in X \setminus e_n, \mu e_n = 0 \quad n \in \mathbb{N}$$

$e = \cup_{n=1}^{\infty} X_1, X_1 = X \setminus e \Rightarrow f_n \in m(X_1)$ — ограниченная функция. $m(X_1)$ — полное $\Rightarrow \{f_n\}$ — фундаментальна в $m(X_1) \Rightarrow \exists f \in m(X_1) \quad \sup_{x \in X_1} |f(x) - f_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Положим $f(x) = 0$ если $x \in e \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L^{\infty}} = 0 \quad \square$

3.4. Пространства l_n^p, l^p

$n \in \mathbb{N}, 1 \leq p < +\infty$.

Определение 3.8.

$$l_n^p = \left\{ \mathbb{R}^n, x = (x_1, \dots, x_n), x_j \in \mathbb{R}, \|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\}$$

Рассмотрим $X = \{1, 2, \dots, n\}$. Возьмём дискретную меру $\mu(j) = 1$ при $1 \leq j \leq n$, $l_n^p = L^p(X, \mu)$. $f \in L^p(X, \mu)$, $f(j) = x_j \Rightarrow l_n^p$ — полное.

Посмотрим, что будет обозначать сходимость этой нормы.

Теорема 3.6. $\{x^{(m)}\}_{m=1}^\infty, x = (x_1, \dots, x_n), x^{(m)} = (x_1^{(m)}, \dots, x_n^{(m)}), x^{(m)} \in l_n^p, q \leq p \leq +\infty$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|x - x^{(m)}\|_p = 0 \Leftrightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} x_j^{(m)} = x_j, 1 \leq j \leq n$$

Доказательство. \Rightarrow

Пусть j — фиксировано, $\lim_{m \rightarrow \infty} x^{(m)} = x$ в l_n^p .

При $p < +\infty$ $\|x - x^{(m)}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - x_i^{(m)}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq |x_j - x_j^{(m)}|$. Так как $\|x - x^{(m)}\|_p \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} |x_j - x_j^{(m)}| = 0$.

При $p = \infty$ $\|x - x^{(m)}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - x_i^{(m)}| \geq |x_j - x_j^{(m)}|$. Так как $\|x - x^{(m)}\|_\infty \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} |x_j - x_j^{(m)}| = 0$

Теперь \Leftarrow

$$1 \leq j \leq n \quad \lim_{m \rightarrow \infty} |x_j - x_j^{(m)}| = 0 \Rightarrow \left(\sum_{j=1}^n \|x_j - x_j^{(m)}\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{и} \Rightarrow \max_{1 \leq j \leq n} |x_j - x_j^{(m)}| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

□

Определение 3.9. $l_p = \{x : \{x_j\}_{j=1}^\infty, x_j \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \wedge \sum_{j=1}^\infty |x_j|^p < +\infty\}$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^\infty |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$X = \mathbb{N}, \mu(j) = 1, \mu = \sum_{n=1}^\infty \sigma_n$$

$$l^p = L^p(\mathbb{N}, \mu) \Rightarrow \text{полное} \quad 1 \leq p < +\infty$$

Замечание 3.2. $\{x^{(m)}\}_{m=1}^\infty, x^{(m)} \in l^p, \lim_{m \rightarrow \infty} \|x^{(m)} - x\|_p = 0 \Rightarrow \forall j \lim_{m \rightarrow \infty} x_j^{(m)} = x_j$ Например, \nrightarrow при $e_m = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots)$

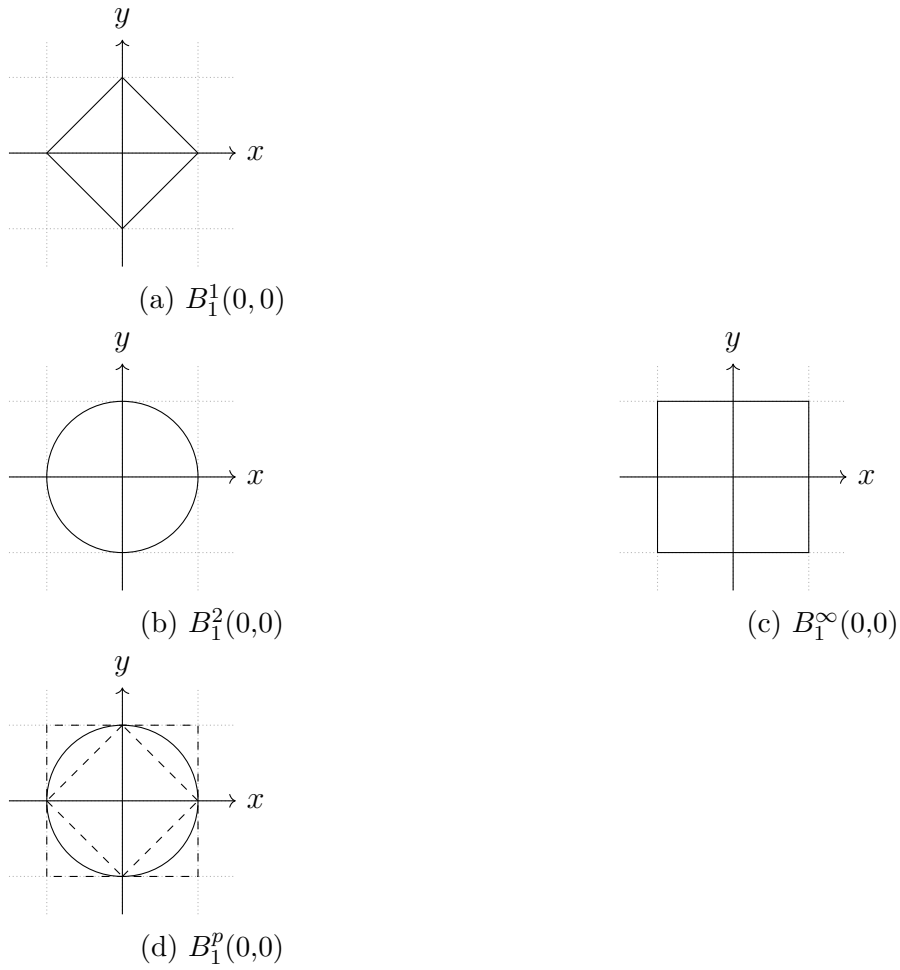


Рис. 3.1: Примеры единичных шаров в l_2^p

Пусть j фиксировано. $\lim_{m \rightarrow \infty} (e_m)_j = 0$ $\|e_m - \mathbb{0}\|_p = 1 \quad \forall p, 1 \leq p \leq +\infty$. В качестве упражнения доказать, что l^p — полное непосредственно.

На рисунке 3.1 приведены примеры единичных шаров в $l_2^p = \{(x, y) : (|x|^p + |y|^p)^{\frac{1}{p}}\}, 1 \leq p < +\infty$. Для l_2^∞ норма определяется $\|(x, y)\|_\infty = \max(|x|, |y|)$

3.5. Неполное нормированное пространство

Определение 3.10 (Финитное линейное пространство).

$$F = \{x - \{x_j\}_{j=1}^{\infty}, x_j \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \exists N(x) \in \mathbb{N} : n > N(x) \Rightarrow x_n = 0\}$$

$F \subset l^p \quad 1 \leq p \leq +\infty$. $(F, \|\cdot\|_p)$ — не полное, F — не замкнуто. Будем брать геометрическую прогрессию и обрывать ее на некотором члене.

$$x^{(m)} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^m}, 0, 0, 0, \dots \right\} \in F$$

$$X = \left\{ \frac{1}{2^k} \right\}_{k=1}^{\infty} \in l^p$$

$$1 \leq p < +\infty \quad \|x - x^{(m)}\|_p = \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^{kp}} \right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

Следовательно, F — не замкнуто.

В качестве упражнения проверить, что \overline{F} в $l^p = ?$ при $p < +\infty$ и при $p = \infty$.

Теорема 3.7. $C[a, b], \|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < +\infty$

$(C[a, b], \|\cdot\|)$ — не полное

Доказательство. При $p = 1, [a, b] = [-1, 1], f \in C[a, b], \int_a^b |f(x)|^p dx = 0 \Leftrightarrow f(x) \equiv 0$. Предъявим фундаментальную последовательность, предел которой не будет непрерывной функцией.

$$f_n = \begin{cases} 0, & -1 \leq x \leq 0 \\ nx, & x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 1, & x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}, f \in C[-1, 1]$$

f_n — фундаментальная в $(C[-1, 1], p = 1)$

Пусть $m > n$.

$$\int_{-1}^1 |f_m(x) - f_n(x)| dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right) \leq \frac{1}{2n} \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$$

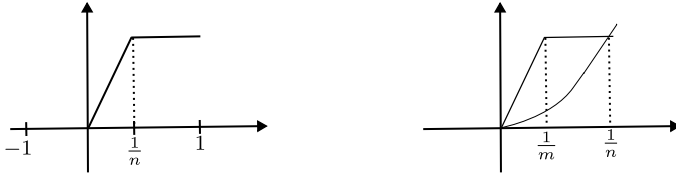


Рис. 3.2: Доказательство теоремы 3.7

Пусть $\exists f \in C[-1, 1] : \|f - f_n\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$$m \geq n \quad \int_{\frac{1}{n}}^1 \underbrace{|f(x) - 1|}_{=0} dx \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

$$\int_{\frac{1}{n}}^1 |f(x) - 1| dx \leq \int_0^1 |f(x) - f_m(x)| dx \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow f(x) = 1, x \in [\frac{1}{n}, 1] \forall n$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow f(x) = 1, x \in (0, 1], f \text{ непрерывна}, f(0) = 1 \\ \text{аналогично } f(x) \equiv 0 \text{ на } [-1, 0] \end{array} \right. \Rightarrow \text{противоречие}$$

□

3.6. Пополнение метрического пространства

Мы привели несколько примеров нормированных пространств, не являющихся полными. Приведём еще один пример.

Определение 3.11.

$$\mathcal{P} = \left\{ p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, a_k \in \mathbb{R}, n \geq 0 \right\}$$

\mathcal{P} (подпространство в алгебраическом смысле) $\subset C[a, b]$, $\|p\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |p(x)|$, $e^x \notin \mathcal{P}$, $p_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$, $\Rightarrow p_n \xrightarrow{[a, b], n \rightarrow \infty} e^x$ это не многочлен, потому что если сколько-то раз продифференцировать многочлен, он станет тождественным 0 $\Rightarrow \overline{\mathcal{P}} \setminus \mathcal{P} \ni e^x \Rightarrow \mathcal{P}$ — не замкнуто $\Rightarrow \mathcal{P}$ — не полное.

$$\overline{\mathcal{P}} = C[a, b]$$

Теорема 3.8 (Вейерштрасса, 1885). $f \in C[a, b], \forall \varepsilon > 0 \exists p \in \mathcal{P}$ т.ч. $\|f - p\| < \varepsilon$ (любую функцию на отрезке можно приблизить многочленами)

$$p_n \xrightarrow[G]{} f \Rightarrow f \text{ аналитическая в } G$$

Несколько простых свойств метрики, и все следуют из неравенства треугольника

Теорема 3.9 (Свойства метрики). (X, ρ) — метрическое

1. $x, y, z, u \in X \Rightarrow |\rho(x, u) - \rho(y, z)| \leq \rho(x, y) + \rho(u, z)$
2. $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow \rho(x, y)$ — непрерывная функция
3. $A \subset X, A$ — подмножество, $\rho(x, A) = \inf_{y \in A} \rho(x, y) \Rightarrow \rho(x, A)$ — непрерывная функция от x
4. $A \subset X, A = \overline{A}, x_0 \notin A \Rightarrow \rho(x_0, A) > 0$

Доказательство. 1. $\rho(x, u) \leq \rho(x, y) + \rho(y, u) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) + \rho(z, u) \Rightarrow \rho(x, u) - \rho(y, z) \leq \rho(x, y) + \rho(z, u)$ Аналогично $\rho(y, z) - \rho(x, u) \leq \dots$ из всего $\Rightarrow 1)$

2. Докажем непрерывность с помощью последовательности.
 $\rho(x, y)$ — непрерывная?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x) = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(y_n, y)$$

$$|\rho(x, y) - \rho(x_n, y_n)| \stackrel{(1)}{\leq} \rho(x, x_n) + \rho(y, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n) = \rho(x, y)$$

3. $A \subset X, x, z \in X, |\rho(x, A) - \rho(z, A)| \leq ?$
 Пусть $y \in A$

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &\leq \rho(x, z) + \rho(z, y) \Rightarrow \rho(x, A) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) \quad \forall y \in A \\ &\Rightarrow \rho(x, A) \leq \rho(x, z) + \inf_{y \in A} \rho(z, y) = \rho(x, z) + \rho(z, A) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\rho(x, A) - \rho(z, A) \leq \rho(x, z)$$

Но нам нужен модуль. Можем сказать, что x и z ничем не отличаются, аналогично $\rho(z, A) - \rho(x, A) \leq \rho(x, z) \Rightarrow 3$

4.

$$x_0 \notin A \Rightarrow x_0 \in X \setminus A \text{ открытое} \\ \Rightarrow \exists \delta > 0 \quad B_\delta(x_0) \subset X \setminus A \Rightarrow \rho(x_0, A) \geq \delta$$

□

Перед определением пополнения нам потребуется несколько определений, связанных с отображениями в метрических пространствах. $(X, \rho), (Y, d)$ — метрические пространства. $T : X \rightarrow Y$.

Определение 3.12 (Изометрическое вложение).

$$d(T_x, T_z) = \rho(x, z) \quad \forall x, z \in X$$

Обозначение: $X \hookrightarrow Y$

Определение 3.13 (Изометрия). T — изометрическое вложение, $T(X) = Y$

Определение 3.14 (Изометричность пространств). $(X, \rho), (Y, d)$ изометричны, если $\exists T : X \rightarrow Y, T$ — изометрия

Свойство 3.2. T — изометрическое вложение $\Rightarrow T$ — инъективное, непрерывное

Доказательство. $x, z \in X, T : X \rightarrow Y$, пусть $T_x = T_z \Rightarrow d(T_x, T_z) = 0$. Значит, исходное расстояние тоже 0 по свойству метрики. $d(x, z) = 0 \Rightarrow x = z$

Инъективность проверили, теперь непрерывность, это еще проще.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x, x_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} d(T_{x_n}, T_x) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} T_{x_n} = T_x$$

□

Свойство 3.3. Если T — изометрия, то $\exists T^{-1}$ — изометрия.

Свойство 3.4. «Изометричность» — отношение эквивалентности на множестве метрических пространств

И наконец

Определение 3.15 (Пополнение м. пространства). (X, ρ) — метрическое пространство. (Z, d) — полное метрическое пространство. (Z, d) — пополнение (X, ρ) , если существует $T : X \rightarrow Z$

1. T — изометрическое вложение
2. $\overline{T(X)} = Z$

Замечание 3.3. Не обязательно искать пространство, удовлетворяющее и второму свойству. Достаточно найти такое, которое удовлетворяет первому. (X, ρ) — метрическое пространство, (U, d) — полное метрическое пространство. Пусть $\exists T : X \rightarrow U$ — изометрическое вложение. Если 2 свойство не выполняется, то легко такое Z построить. Возьмём замыкание образа. $Z = \overline{T(X)} \Rightarrow (Z, d)$ — пополнение X .

Теперь обещанная теорема. Возьмём любое метрическое пространство и покажем, что у него есть пополнение.

Теорема 3.10 (О пополнении метрического пространства).
 (X, ρ) — метрическое $\Rightarrow \exists$ пополнение (Z, d)

Доказательство. Есть классическое доказательство с рассмотрением всех фундаментальных последовательностей, рассмотрением факторпространства, муторным разбором случаев. Мы пойдем другим путём. Будет короткое, но **фантастически** непонятное доказательство в том смысле, что непонятно, как его придумать.

Мы собираемся использовать $m(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R}, \sup_{x \in X} |f(x)| < +\infty\}$

$$\|f\|_{m(X)} = \|f\|_{\infty} = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

$m(X)$ — полное пространство.

Каждой точке мы сопоставим функцию. Вот такая идея! $\varphi : X \rightarrow m(X)$. Оно же будет изометрическим вложением, то есть будет сохранять расстояния.

Сначала будет маленькое облегчающее предположение про X , от которого мы потом откажемся. Пусть X — ограниченное, то есть $\exists M > 0$ т.ч. $\forall x, y \in X \rho(x, y) \leq M$. Единственная цель предположения — формула для φ будет чуть проще. Вообще, можно было бы обойтись и без него.

$t \in X, t$ — фиксирован, $f_t(x) = \rho(x, t)$. При фиксированном t — это функция на X . Именно сюда наше отображение будет отображать t . Одной точке — целая функция, понятно?

$$\begin{aligned}\varphi(t) &:= f_t(x) \text{ т.е. } \varphi : t \rightarrow f_t(x) \\ |f_t(x)| &\leq M \Rightarrow f_t \in m(X)\end{aligned}$$

Самое главное. Проверим, что отображение сохраняет расстояния. Это очень легко. Возьмём 2 точки.

$$\begin{aligned}\text{Пусть } t, s \in X, \quad \|f_t - f_s\|_\infty &= \sup_{x \in X} |\rho(x, y) - \rho(x, s)| \\ |\rho(x, t) - \rho(x, s)| &\leq \rho(t, s), \quad \text{Пусть } x = t \Rightarrow |\rho(t, t) - \rho(t, s)| = \rho(t, s) \\ \Rightarrow \|\varphi(t) - \varphi(s)\|_\infty &= \rho(t, s) \Rightarrow \varphi - \text{изометрическое вложение}\end{aligned}$$

Посмотрим, что будет, если откажемся от этого облегчающего предположения. Надо будет чуть исправить отображение φ . X — любое метрическое пространство. $a \in X$ — фиксированная точка.

$$t \in X, f_t(x) = \rho(x, t) - \rho(x, a) \Rightarrow |f_t(x)| \leq \rho(a, t) \Rightarrow f_t \in m(X)$$

Раньше мы могли так брать и не вылетать из пространства из-за ограниченности. Вычтем эту штуку, чтобы попасть, куда надо.

$$t, s \in X \Rightarrow f_t(x) - f_s(x) = \rho(x, t) - \rho(x, s) \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \|f_t - f_s\|_\infty = \rho(s, t)$$

$$\text{Пополнение } X: \overline{\varphi(X)}^{\|\cdot\|_\infty} = Z, (Z, \|\cdot\|_\infty)$$

□

Таким образом, изучение метрических пространств можно свести к изучению подмножества пространства непрерывных функций.

Замечание 3.4. Забегая далеко вперёд. $(X, \|\cdot\|)$ — нормированное, X^* — множество непрерывных линейных функционалов на X , X^* — полное (ВСЕГДА).

Мы построим каноническое вложение $\pi : X \rightarrow \underbrace{(X^*)^*}_{\text{полное}}, \overline{\varphi(x)}^{X^{**}}$ — пополнение X .

3.7. Теорема о вложенных шарах

Когда-то в анализе была теорема Кантора о том, что если есть последовательность вложенных друг в друга отрезков, то их пересечение не пусто. Мы докажем похожее утверждение для метрических пространств. Оказывается, то утверждение было связано с полнотой вещественной прямой \mathbb{R} . (X, ρ) — метрическое пространство, $r > 0, x \in X$ Введём стандартное обозначение замкнутого шара.

$$D_r(x) = \{y \in X : \rho(x, y) \leq r\}$$

Теорема 3.11 (О вложенных шарах). (X, ρ) — метрическое пространство. X — полное $(| \Leftrightarrow (\forall \{D_n\}_{n=1}^\infty, D_n = D_{r_n}(x_n), D_{n+1} \subset D_n, \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0 \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{+\infty} D_n \neq \emptyset)$. По сравнению с теоремой Кантора у нас есть дополнительное предположение о стремлении к нулю, которое здесь важно, а на прямой было как данность.

Доказательство. $\Rightarrow X$ — полное

$$\{D_n\}_{n=1}^\infty, D_n = D_{r_n}(x_n), D_{n+1} \subset D_n, \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$$

Надо проверить, что центры шаров образуют фундаментальную последовательность, то есть что $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ — фундаментальная.

Пусть $\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad r_n < \varepsilon$ при $n \geq N$.

$$(n > N \wedge m > N) \Rightarrow (x_n \in D_n \wedge x_m \in D_n) \Rightarrow \rho(x_n, x_m) \leq \leq \rho(x_n, x_N) + \rho(x_m, x_N) \leq 2\varepsilon$$

$$X \text{ — полное} \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

любое фиксированное $m \in \mathbb{N} \quad x_n \in D_m \forall n \geq m, D_m$ — замкнутое

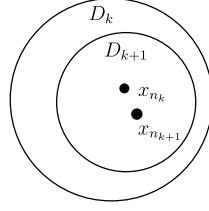
$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty, n \geq m} x_n = x \in D_m$$

$$\Rightarrow x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} D_m$$

\Leftarrow

Ничего кроме определения для доказательства полноты у нас нет.

Пусть $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ — фундаментальная. Возьмём достаточно быстро убывающую последовательность $\varepsilon_k = \frac{1}{2^k}$. Существует $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty, \rho(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) <$



$$\frac{1}{2^{k+1}} \cdot \\ D_k = D_{\varepsilon_k}(x_{n_k})$$

$$\begin{cases} y \in D_{k+1} \Rightarrow \rho(y, x_{n_{k+1}}) \leq \frac{1}{2^{k+1}} \\ \rho(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < \frac{1}{2^{k+1}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \rho(y, x_{n_k}) &\leq \rho(y, x_{n_{k+1}}) + \rho(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) < \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^k} \\ &\Rightarrow y \in D_k \Rightarrow D_{k+1} \subset D_k \end{aligned}$$

Мы взяли произвольный элемент из D_{k+1} и показали, что он принадлежит D_k , то есть показали вложенность элементов последовательности.

$$\Rightarrow \exists x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} D_k \quad \rho(x, x_{n_k}) \leq \frac{1}{2^k} \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$$

По свойству фундаментальных последовательностей из первой лекции $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ \square

Замечание 3.5. В условиях теоремы пересечение вложенных шаров $\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$ состоит из одной точки.

Доказательство. Пусть $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n, \Rightarrow \rho(x, x_n) \leq r_n, \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. А мы знаем, что предел в метрическом пространстве единственный. \square

Замечание 3.6. Условие, что $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$ в теореме существенно.

Пример 3.5 (Замкнутые множества). $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}, F_n$ — замкнутое, $F_{n+1} \subset F_n, F_n \subset \mathbb{R}, \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset, F_n = [n, +\infty)$

Пример 3.6 (По теореме).

$$X[1, +\infty) \quad \rho(x, y) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{x+y}, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

Проверим, что ρ — метрика. x, y, z

$$\rho(x, y) + \rho(y, z) = 1 + \frac{1}{x+y} + 1 + \frac{1}{y+z} > 1 + 1 > 1 + \frac{1}{x+z} = \rho(x, z)$$

Проверяем полноту. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальная, $\varepsilon = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \exists N \in \mathbb{N} : (n \geq N \wedge m \geq N) \rho(x_n, x_m) < \frac{1}{2} &\Rightarrow \left(\rho(x_n, x_N) < \frac{1}{2} \wedge \rho(x_m, x_N) < \frac{1}{2} \right) \Rightarrow \\ &x_N = x_{N+1} = x_{N+2} = \dots \\ \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = X_N &\Rightarrow (X, \rho) \text{ — полное} \end{aligned}$$

Полноту проверили.

$$r_n = 1 + \frac{1}{2n}, x_n = n; D_n = D_{r_n}(n), h \in D_n. \text{ Пусть } x \neq n, x \in D_n \Rightarrow \rho(x, x_n) = 1 + \frac{1}{x+n} \leq 1 + \frac{1}{2n}$$

Замечание 3.7 (Домашнее задание). Если $(X, \|\cdot\|)$ — банахово, то $D_{n+1} \subset D_n \{D_n\}_{n=1}^{\infty} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n \neq \emptyset$ (требование $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$ лишнее)

3.8. Сепарабельные пространства

(X, ρ) — метрическое пространство,

Определение 3.16 (A плотно в C). $A \subset X, C \subset X$. A плотно в C , если $C \subset \overline{A} \Leftrightarrow$

$$\forall x \in C \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A \rho(x, A) < \varepsilon \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 C \subset \bigcup_{a \in A} B_{\varepsilon}(a)$$

Любой элемент C можно сколь угодно хорошо приблизить элементами из A .

Определение 3.17 (A всюду плотно в C). A — всюду плотно в X , если $\overline{A} = X$

Чем же полезно это свойство? Если хотят доказать свойство для X , то часто доказывают сначала для всюду плотного подмножества.

Определение 3.18 (Сепарабельное пространство). (X, ρ) — сепарабельное, если $\exists E \subset X, E = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \overline{E} = X$

Теорема 3.12. $n \in \mathbb{N}, q \leq p \leq +\infty,$
 l_n^p — сепарабельное

Доказательство.

$$l_n^p = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p) = \{x = (x_1, \dots, x_n), x_j \in \mathbb{R}, \|x\|_p\}$$

$$E = \mathbb{Q}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n), x_j \in \mathbb{Q}\}$$

Если $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_p), \tilde{\mathbb{Q}} = \{x + iy, x, y \in \mathbb{Q}\}, E = \tilde{\mathbb{Q}}^n$ □

Теорема 3.13. F — финитные последовательности, $1 \leq p \leq +\infty$
 $(F, \|\cdot\|_p)$ — сепарабельно

Доказательство. $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_{N(x)}, 0, 0, \dots), x_j \in \mathbb{Q}\}$. Попросту говоря, все финитные последовательности, координаты которых рациональны. □

Теорема 3.14. $l^p, 1 \leq p < +\infty, C_0$ — сепарабельные

Доказательство. На прошлой лекции мы доказали, что

$$(F, \|\cdot\|_p), \overline{F}^{\|\cdot\|_p} = l^p \text{ при } 1 \leq p < +\infty$$

$$\begin{cases} E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}^n \text{ — всюду плотно в } F \\ F \text{ — всюду плотное в } l^p \end{cases} \Rightarrow$$

$$E \text{ всюду плотно в } l^p, 1 \leq p < +\infty$$

Почему любой элемент из l^p может быть приближен финитной последовательностью? Мы ее просто отрезаем. □

Ответ на упражнение для читателя, которое было на прошлой лекции: F — подпространство в алгебраическом смысле, $F \subset l^\infty$, $\overline{F}^{\|\cdot\|_\infty} = C_0$

$$x_0 \in C_0 \Leftrightarrow x = \{x_n\}_{n=1}^\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

берем первые m координат и дополняем их нулями

$$x^{(m)} = (x_1, \dots, x_m, 0, 0, \dots, 0, \dots) \Rightarrow x^{(m)} \in F$$

$$\|x - x^{(m)}\|_\infty = \sup_{k > m} |x_k| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

Остаётся вопрос, почему C_0 — замкнутое множество. Можно в лоб, а можно по-учёному рассудить.

$$\begin{aligned} &\text{пусть } \{y^{(m)}\}_{m=1}^\infty, y^{(m)} \in C_0, y^{(m)} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} y \text{ в } C_0 \\ \Rightarrow &\lim_{m \rightarrow \infty} \|y - y^{(m)}\|_\infty = 0 \quad y = \{y_n\}_{n=1}^\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0 ??? \end{aligned}$$

А это равномерная сходимостъ на множестве натуральных чисел, то есть это тот случай, когда можно менять местами пределы.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n^{(m)}}_{=0} = 0$$

Упражнение: C — сепарабельное, $C \subset l^\infty$

Теорема 3.15. l^∞ — не сепарабельное

Какой бы шарик из X мы бы не предъявили, там всегда будет элемент всюду плотного множества.

Доказательство.

$$A \subset \mathbb{N} \quad X_n^A = \begin{cases} 1, n \in A \\ 0, n \notin A \end{cases}$$

Мощность $\{A, A \subset \mathbb{N}\}$ — континуум ($>$ счётное). Это и будет центр пересекающихся шариков. Посмотрим, каким будет расстояние между двумя разными точками.

$$A \subset \mathbb{N}, C \subset \mathbb{N}, A \neq C$$

$$X_n^A - X_n^C = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases} \Rightarrow \|x^A - x^C\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |X_n^A - X_n^C| = 1$$

То есть если 2 множества не равны, то расстояние между ними — единица.

$$B_{\frac{1}{2}}(x^A) \cap B_{\frac{1}{2}}(x^C) = \emptyset$$

Мы предъявили несчётный набор дизъюнктивных шариков. E — всюду плотно в $l^\infty \Rightarrow \forall A \subset \mathbb{N} \exists e_A \in B_{\frac{1}{2}}(x^A)$

$$A \neq C \Rightarrow e_A \neq e_C, \quad \underbrace{\{e_A\}_{A \subset \mathbb{N}}}_{\text{несчётно}} \subset E \Rightarrow E \text{ несчётно}$$

То, что у всех шариков одинаковый радиус — это просто приятный бонус. \square

Теорема 3.16. (X, ρ) — сепарабельное, $Y \subset X \Rightarrow (Y, \rho)$ — сепарабельное.

Доказательство. $\exists E = \{x_n\}_{n=1}^\infty$ — всюду плотно в X , $x_0 \in X$

$$\begin{aligned} \rho(x_n, Y) &= \inf_{y \in Y} \rho(x_n, y) \Rightarrow \\ \exists \{y_{n,k}\}_{k=1}^\infty \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_{n,k}) &= \rho(x_n, Y) \\ y_{n,k} \in Y, F = \{y_{n,k}\}_{n,k} &\text{ — счётное, } F \subset Y \end{aligned}$$

Проверим, что F — всюду плотно в Y . Пусть $y \in Y, \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists x_n : \rho(y, x_n) < \varepsilon$. Из этого неравенства мы делаем вывод, что $\rho(x_n, Y) < \varepsilon$. Значит, $\exists k : \rho(x_n, y_{n,k}) < \varepsilon \Rightarrow$

$$\rho(y, y_{n,k}) \leq \rho(y, x_n) + \rho(x_n, y_{n,k}) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

\square

Следствие 3.1. X — бесконечное множество $\Rightarrow m(X)$ — не сепарабельное.

Доказательство. Можно слово в слово повторить доказательство для l^∞ , но мы воспользуемся последними доказанными теоремами.

$$\begin{aligned} & \exists \{a_j\}_{j=1}^\infty, a_j \in X, a_j \neq a_i \text{ при } i \neq j \\ Y &= \{f \in m(X), f(x) = 0 \text{ если } x \neq a_j\} \sup_{j \in \mathbb{N}} |f(a_j)| < +\infty \\ Y & \text{ изометрично } l^\infty, f \in Y, T(f) = \{f(a_j)\}_{j=1}^\infty \in l^\infty \\ Y & \text{ — не сепарабельно } \Rightarrow \text{ и по последней теореме} \\ & m(X) \text{ — не сепарабельно} \end{aligned}$$

□

Теорема 3.17.

$C[a, b]$ — сепарабельно

1 часть.

$$\begin{aligned} L &= \{ \text{ломанные} \} \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \quad \{y_k\}_{k=0}^n, y_k \in \mathbb{R} \\ & \quad L(x) \text{ — ломанные} \\ L(x_k) &= y_k, k = 0, 1, \dots, n \quad l(x) \text{ линейная на } [x_k, x_{k+1}] \end{aligned}$$

Отметим, что L — всюду плотное множество в пространстве непрерывных функций. Это связано с равномерной непрерывностью. Никаких надежд на то, что оно будет счётным нет.

$$\begin{aligned} & \text{пусть } f \in C[a, b], \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : |x - y| < \delta \\ & \quad \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \\ & \quad \exists \{x_k\}_{k=0}^n \text{ — разбиение} \quad x_{k+1} - x_k < \delta \\ & \quad y_k := f(x_k) \quad L(x) \text{ — ломаная} \\ & \Rightarrow |f(x) - L(x)| < \varepsilon \Rightarrow \|f - L\|_\infty \leq \varepsilon \Rightarrow \overline{\mathcal{L}} = C[a, b] \end{aligned}$$

как сделать так, чтобы множество ломаных было счётным? возьмём в качестве вершин элементы \mathbb{Q}

$$\begin{aligned} E &= \{L \in \mathcal{L}, x_k, y_k \in \mathbb{Q}\} \text{ — счетное множество} \\ \begin{cases} \mathcal{L} \subset \overline{E} \\ \overline{\mathcal{L}} = C[a, b] \end{cases} & \Rightarrow E \text{ — всюду плотно, т.е. } \overline{E} = C[a, b] \end{aligned}$$

□

2 часть. по т. Вейерштрасса замыкание многочленов — тоже пространство непрерывных функций.

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= \{p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k\} \quad \overline{\mathcal{P}} = C[a, b] \\ E &= \{p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, a_k \in \mathbb{Q}\} \\ \begin{cases} \mathcal{P} \subset \overline{E} \\ \overline{\mathcal{P}} = C[a, b] \end{cases} &\Rightarrow \overline{E} = C[a, b]\end{aligned}$$

□

3.9. Нигде не плотные множества

Определение 3.19. (X, ρ) — метрическое пространство. $A \subset X$, A — **нигде не плотно** в X , если

$$\forall B_r(x) \text{ при } r > 0, x \in X \quad B_r(x) \not\subset \overline{A} \Leftrightarrow \text{Int}(\overline{A}) = \emptyset \Leftrightarrow$$

Если мы рассмотрим замыкание, никакого шарика там не будет. Иначе: если мы рассмотрим внутренность замыкания, она будет пустой.

$$\begin{aligned}\forall r > 0, x \in X \quad B_r(x) \ni B_{r_1}(x_1) \subset B_r(x), B_{r_1}(x_1) \cap A = \emptyset \\ \Leftrightarrow \forall r > 0, x \in X \quad D_r(x) \ni D_{r_1}(x_1) \subset D_r(X), D_{r_1}(x_1) \cap A = \emptyset\end{aligned}$$

Скоро докажем связь между нигде не плотными множествами и полными пространствами. Но сперва определение, которое не будет часто встречаться, но сам факт — полезный.

Определение 3.20 (множество первой категории). $M \subset X, (X, \rho)$. M — **множество первой категории**, если

$$M = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j, E_j \text{ нигде не плотно в } X$$

M — **множество второй категории**, если M нельзя представить в виде объединения счетного числа нигде не плотных множеств.

Теорема 3.18 (Бэр, о категориях). (X, ρ) — полное $\Rightarrow X$ — множество второй категории.

Доказательство. Можно было бы даже от противного. Но мы возьмём семейство $\{M_j\}_{j=1}^{\infty}$, M_j — нигде не плотно в X , $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} M_j$. Мы докажем, что найдётся хоть одна точка, которая принадлежит X и не принадлежит E . Это и будет обозначать, что X невозможно представить в виде такого объединения.

$$\begin{aligned} x_0 \in X \quad D_0 &= \{y : \rho(x_0, y) \leq 1\} \\ M_1 \text{ — нигде не плотно} &\Rightarrow \exists D_1 = D_{r_1}(x_1) \subset D_0, D_1 \cap M_1 = \emptyset \\ &r_1 < 1 \end{aligned}$$

Теперь мы то же соображение применим к множеству M_2 , которое тоже нигде не плотно

$$\begin{aligned} \exists D_2 &= D_{r_2}(x_2) \subset D_1, D_2 \cap M_2 = \emptyset \\ &r_2 < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

и так далее $\left\{ \begin{array}{l} \{D_n\}_{n=1}^{\infty}, D_n = D_{r_n}(x_n), D_{n+1} \subset D_n \\ D_n \cap M_n = \emptyset, r_n < \frac{1}{n} \end{array} \right.$ по теореме о вложенных шарах $\Rightarrow \exists x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n, (x \in D_n \wedge x \in X \setminus E) \Rightarrow x \notin M_n \forall n \Rightarrow x \notin E$ □

3.10. Полные семейства элементов

Теперь мы будем понимать полноту в совершенно другом смысле. Сначала вспомним, что такое линейная оболочка пространства.

Определение 3.21 (Линейная оболочка). X — линейное пространство над $\mathbb{R}(\mathbb{C})$. Рассмотрим семейство $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — семейство элементов, $x_\alpha \in X$.

$$\mathcal{L}\{x_\alpha\}_{\alpha \in A} = \left\{ \sum_{k=1}^n c_k x_{\alpha_k}, c_k \in \mathbb{R}(\mathbb{C}), n \in \mathbb{N} \right\}$$

Определение 3.22 (Полное семейство). $(X, \|\cdot\|)$, $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — полное семейство, если $\overline{\mathcal{L}\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}} = X$. То есть линейная оболочка всюду плотна в X .

Пример 3.7. $C[a, b]$, $\{x^n\}_{n=0}^{+\infty}$ — полное семейство в $C[a, b]$, так как $\mathcal{P} = \mathcal{L}\{x^n\}_{n=0}^{+\infty}$, $\overline{\mathcal{P}} = C[a, b]$

Пример 3.8. l^p , $1 \leq p < +\infty$, C_0

$e_n = (1, 0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_n, 0, \dots)$, $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ — полное семейство

$\mathcal{L}\{e_n\}_{n=1}^\infty = F$ — финитная последовательность

Упражнение: C — что будет полным семейством?

Утверждение 3.1. $(X, \|\cdot\|)$ — нормированное пространство. В нём существует $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ — полное семейство

X — сепарабельное

Доказательство. Рассмотрим линейную оболочку $L = \mathcal{L}\{x_n\}_{n=1}^\infty = \left\{x = \sum_{j=1}^n c_j x_j, c_j \in \mathbb{R}(\mathbb{C})\right\}$. $\overline{L} = X$.

$E = \left\{x = \sum_{j=1}^n c_j x_j, c_j \in \mathbb{Q}\right\}$ — счётное всюду плотное

$$(L \subset \overline{E} \wedge \overline{L} = X) \Rightarrow \overline{E} = X$$

□

Замечание 3.8. l^∞ , $E = \{x = \{x_n\}_{n=1}^\infty, x_n \in \mathbb{Q}, \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < +\infty\}$. $\overline{E} = l^\infty$, E — не счётное.

3.11. Полные и плотные множества в L^p

Сначала небольшое замечание. (X, U, μ) — пространство с мерой $e \in U$ — измеримые множества, $\chi_e(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}$ — характеристическая функция. $\chi \in L^\infty(X, \mu)$, $\forall e \in U$

$$\chi_e \in L^p(X, \mu) \text{ при } 1 \leq p < +\infty \Leftrightarrow \int_X (\chi_e(x))^p d\mu < +\infty \Leftrightarrow \mu e < +\infty$$

Теорема 3.19. (X, U, μ) — пространство с мерой \Rightarrow

$$\begin{aligned} \{\chi_e\}_{e \in U} & \text{ — полное семейство в } L^\infty(X, \mu) \\ \{\chi_e\}_{e \in U, \mu E < +\infty} & \text{ — полное семейство в } L^p(X, \mu), 1 \leq p < +\infty \end{aligned}$$

Для доказательства этой теоремы нужно будет вспомнить теорему Лебега из анализа (она у нас уже была).

Теорема 3.20 (Лебег). $\{h_n(x)\}_{n=1}^\infty$ — измеримые, $\varphi(x)$.
 $\int_X \varphi(x) d\mu < +\infty, |h_n(x)| \leq \varphi(x)$ п.в. на X

$$h_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.в. по } \mu} h(x) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X h_n(x) d\mu = \int_X h(x) d\mu$$

Доказательство. Вспомним конструкцию, которая была в математическом анализе. f — измеримая, $f(x) \geq 0, x \in X$. Рассмотрим разбиение множества X , а по нему построим соответствующую простую функцию

$$\begin{aligned} n \in \mathbb{N} \quad e_k &= \left\{ x \in X : \frac{k}{n} \leq f(x) < \frac{k+1}{n} \right\}, k = 0, 1, \dots, n^2 - 1 \\ e_{n^2} - \{x : f(x) \geq n\} &\Rightarrow X = \bigcup_{k=0}^{n^2} e_k, e_k \cap e_j = \emptyset (k \neq j) \end{aligned}$$

Теперь построим измеримые функции, потом они будут простыми.

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{k}{n} \chi_{e_k} \quad 0 \leq g_n(x) \leq f(x), x \in X$$

$$f(x) \leq g_n(x) + \frac{1}{n}, x \in \bigcup_{k=0}^{n^2-1} e_k$$

Теперь все готово, чтобы обсудить случай L^∞ . Пусть $f \in L^\infty(X, \mu) \Rightarrow n \geq \|f\|_\infty \Rightarrow \mu(e_{n^2}) = 0. \Rightarrow |f(x) - g_n(x)| \leq \frac{1}{n}$ для п.в. $x \in X$
 $\Rightarrow \|f - g_n\|_\infty \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, g_n \in \mathcal{L}\{\chi_e\}_{e \in U}$
 $\Rightarrow f \in \overline{\mathcal{L}\{\chi_e\}_{e \in U}}$

Посмотрим теперь, что происходит с конечными p . Тут вспоминаем теорему Лебега, она была верна для интеграла Лебега, но верна и для

произвольной меры.

$$\begin{cases} f(x) \in L^p(X, \mu), 1 \leq p < +\infty & |f(x) - g_n(x)|^p \leq |f(x)|^p \\ g_n(x)f(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.в.}} 0 & \end{cases} \xRightarrow{\text{Лебег}}$$

все, что надо — убедиться, что мера конечная $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_X |f - g_n|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = 0$

$$\begin{aligned} f \in L^p \Rightarrow \mu e_k < +\infty \quad f(x) \geq \frac{k}{n}, x \in e_k \Rightarrow \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} &\geq \left(\int_{e_k} \left(\frac{k}{n} \right)^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= \frac{k}{n} (\mu e_k)^{\frac{1}{p}} \Rightarrow \mu e_k < +\infty \\ &\Rightarrow f \in \overline{\mathcal{L}\{\chi_e\}_{e \in U, \mu e < +\infty}} \end{aligned}$$

Теперь покажем, что для произвольных f рассуждение тоже верно. Рассмотрим замыкание линейное оболочка

$$\begin{aligned} \begin{cases} f : X \rightarrow \mathbb{R}, \Rightarrow f = f_+ - f_-, f_+(x) \geq 0, f_-(x) \geq 0 \\ f : X \rightarrow \mathbb{C} \Rightarrow f = u + iv; u, v : X \rightarrow \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \\ \forall f \in L^p, f \in \overline{\mathcal{L}\{\chi_e\}_{e \in U}} \\ (p = \infty \forall e, p < +\infty, \mu e < +\infty) \end{aligned}$$

□

Теперь, зная эту теорему, посмотрим, какое множество будет полным в пространстве l^∞

Следствие 3.2. $l^\infty, A \subset \mathbb{N}, X^A = \{x_n^A\}_{n=1}^\infty, X_n^A = \begin{cases} 1, n \in A \\ 0, n \notin A \end{cases} \Rightarrow$

$\{X^A\}_{A \subset \mathbb{N}}$ — полное семейство в l^∞

Доказательство. $l^\infty = L^\infty(\mathbb{N}, \mu), \mu(n) = 1 \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall A \subset \mathbb{N}, A$ — измеримо

$$\chi_A = X^A \Rightarrow \{X^A\}_{A \subset \mathbb{N}} \text{ — полное семейство}$$

□

Теорема 3.21. $(\mathbb{R}^n, U, \lambda)$, λ — классическая мера Лебега. U — измеримые по Лебегу множества.

$$\mathcal{R} = \left\{ \Delta = \prod_{j=1}^n [a_j, b_j), a_j < b_j; a_j, b_j \in \mathbb{R} \right\} \text{ — множество ячеек}$$

$$\Rightarrow \{\chi_\Delta\}_{\Delta \in \mathcal{R}} \text{ — полное семейство в } L^p(\mathbb{R}^n, \lambda), 1 \leq p < +\infty$$

Достаточно рассмотреть характеристические множества ячеек.

Доказательство. Собираемся приблизить множество линейной комбинацией характеристических функций ячеек. Вспомним определение внешней меры.

$$e \in U, \lambda(e) < +\infty$$

$$\lambda(e) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(\Delta_k), e \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k, \Delta_k \in \mathcal{R}, \Delta_k \cap \Delta_j = \emptyset \right\}$$

Сначала просто по определению нижней грани. $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \{\Delta_k\}_{k=1}^n$.

$$\lambda(e) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(\Delta_k) < \lambda(e) + \varepsilon.$$

$$e \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k, \Delta_k \in \mathcal{R}, \Delta_k \cap \Delta_j = \emptyset \text{ при } k \neq j.$$

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k, e \subset A, \lambda(A \setminus e) < \varepsilon$$

$$\begin{aligned} \exists N \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=N+1}^{\infty} \lambda(\Delta_k) < \varepsilon, B = \bigcup_{k=1}^N \Delta_k \\ \Rightarrow \lambda(A \setminus B) < \varepsilon \end{aligned}$$

$$\|\chi_e - \chi_b\|_p \leq \|\chi_e - \chi\|_p + \|\chi_A - \chi_B\|_p \leq$$

$$\left(\int_{A \setminus e} 1 d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{A \setminus B} 1 d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon^{\frac{1}{p}} + \varepsilon^{\frac{1}{p}} = 2\varepsilon^{\frac{1}{p}}$$

$$\chi_b = \sum_{k=1}^N \chi_{\Delta_k} \in \mathcal{L}\{\chi_\Delta\}_{\Delta \in \mathcal{R}}$$

$$\left\{ \overline{\mathcal{L}\{\chi_e\}_{e \in U}} = L^p \right. \quad \Rightarrow \quad \left. \overline{\mathcal{L}\{\chi_\Delta\}_{\Delta \in \mathcal{R}}} = L^p, 1 \leq p < +\infty \right.$$

□

Следствие 3.3. $E \subset \mathbb{R}^n$, E — измеримые по Лебегу, $1 \leq p < +\infty$
 $\Rightarrow L^p(E, \lambda)$ — сепарабельные
 (λ — мера лебега)

Доказательство. Докажем, что $L^p(\mathbb{R}^n, \lambda)$ — сепарабельное.

$$\mathcal{R} = \left\{ \Delta = \prod_{j=1}^n [a_j, b_j), a_j < b_j, a_j, b_j \in \mathbb{R} \right\} \text{ — полные семейства в } L^p$$

Теперь мы возьмём только такие ячейки, полуинтервалы которых мы перемножаем, имеют рациональные концы. Пока что можем сказать, что это счётное множество.

$$R_0 = \left\{ \Delta = \prod_{j=1}^n [a_j, b_j), a_j < b_j, a_j, b_j \in \mathbb{Q} \right\} \text{ — счётное множество}$$

$$\Delta \in \mathcal{R} \quad 0$$

$$\Rightarrow \exists \Delta_0 \in R_0, \Delta \subset \Delta_0, \lambda(\Delta_0 \setminus \Delta) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \|\chi_{\Delta_0} - \chi_{\Delta}\|_p = \|\chi_{\Delta_0 \setminus \Delta}\|_p = \left(\int_{\Delta_0 \setminus \Delta} 1 dx \right)^{\frac{1}{p}} = (\lambda(\Delta_0 \setminus \Delta))^{\frac{1}{p}} < \varepsilon^{\frac{1}{p}}$$

$$\Rightarrow \forall \Delta \in \mathcal{R} \quad \chi_{\Delta} \in \overline{\mathcal{L}\{\chi_{\Delta}\}_{\Delta \in R_0}}$$

R_0 — полное счётное семейство $\xRightarrow{\text{утверждение}} L^p(\mathbb{R}^n, \lambda)$ — сепарабельное.

$$E \subset \mathbb{R}^n, E \text{ — измеримое, } f \in L^p(E, \lambda)$$

$$\text{пусть } f(x) = 0, x \in \mathbb{R}^n \setminus E \Rightarrow f \in L^p(\mathbb{R}^n, \lambda)$$

$$\Rightarrow L^p(E, \lambda) \text{ — подпространство } L^p(\mathbb{R}^n, \lambda) \Rightarrow L^p(E, \lambda) \text{ — сепарабельно}$$

□

Определение 3.23. (X, U, μ) — пространство с мерой. (X, ρ) — метрическое пространство. μ — **борелевская мера**, если $(G \text{ — открытое} \Rightarrow G \in U)$

β — минимальная σ -алгебра, содержащая все открытые множества. β — **борелевские множества**, то есть $\beta \subset U$.

Чем же хороши борелевские меры? Оказывается, они безумно связаны с непрерывными функциями

Замечание 3.9. Пусть $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, f — непрерывная $\Rightarrow f^{-1}((c, +\infty))$, $c \in \mathbb{R}$, $(c, +\infty)$ — открытое в \mathbb{R} . Определение непрерывной функции из топологии: прообраз любого открытого множества открыт. Так как прообраз f открыт в $X \Rightarrow f$ — измеримая по μ , если μ — борелевская.

Замечание 3.10. λ — мера Лебега в \mathbb{R}^n , тогда λ — борелевская.

Еще более специальное определение. Этим свойством мера Лебега тоже обладает.

Определение 3.24 (регулярная мера). (X, U, μ) , (X, ρ) , μ — борелевская. μ — **регулярная мера**, если $\forall e \in U$

$$\sup_{\{F \subset e, F \text{ — замкнутое}\}} \{\mu(F)\} = \mu e = \inf_{\{e \subset G, G \text{ — открытое}\}} \mu G$$

Замечание 3.11. λ -мера Лебега — регулярная.

На самом деле эти 2 свойство друг из друга следуют, но мы это доказывать не будем.

Теорема 3.22. (X, U, μ) , (X, ρ) , μ — регулярная мера \Rightarrow непрерывная функция плотна в $L^p(X, \mu)$, $1 \leq p < +\infty$.

$$\overline{C(X) \cap L^p(X, \mu)}^{\|\cdot\|_p} = L^p(X, \mu)$$

Доказательство. Мы уже знаем, что полное семейство — это семейство характеристических функций всех измеримых функций, и мы будем этим изо всех сил пользоваться. Возьмём какую-то характеристическую функцию из множества и ее будем приближать непрерывными функциями.

$\{\chi_e\}_{e \in U, \mu e < +\infty}$ — полное семейство.

пусть $e \in U$, $\mu e < +\infty$, $0, \mu$ — регулярная $\Rightarrow \exists F \subset e \subset G$, F — замкнутое, G — открытое. $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$

Когда мы попадем в $X \setminus G$ она будет равна нулю.

$$\varphi(x) = \frac{\rho(x, X \setminus G)}{\rho(x, X \setminus G) + \rho(x, F)}$$

Нужно позаботиться о том, чтобы знаменатель не был равен нулю.

$\rho(x, A)$ — непрерывная функция $\forall A \subset X$. $X \setminus G$ — замкнутое, F — замкнутое. Если $\rho(x, F) = 0 \Rightarrow x \in F \Rightarrow x \notin X \setminus G \Rightarrow \rho(x, X \setminus G) > 0$

$$\Rightarrow \rho(x, X \setminus G) + \rho(x, F) > 0 \forall x \in X \Rightarrow \varphi \in C(X)$$

$$\varphi(x) = 0, x \in X \setminus G, \varphi(x) = 1, x \in F \quad \forall x \in X \quad 0 \leq \varphi(x) \leq 1$$

Понятно, что модуль $\varphi(x)$ совпадает с характеристической функцией множества e .

$$\begin{aligned} |\chi_e(x) - \varphi(x)| &\leq 1 \quad \forall x \in X \\ \chi_e(x) - \varphi(x) &= 0 \quad x \in F \text{ или } x \in X \setminus G \\ \Rightarrow \|\chi_e - \varphi\|_p &= \left(\int_X |\chi_e(x) - \varphi(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{G \setminus F} |\chi_e(x) - \varphi(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\leq (\mu(G \setminus F))^{\frac{1}{p}} < \varepsilon^{\frac{1}{p}} \\ &\Rightarrow \chi_e \in \overline{C(X)}^{\|\cdot\|_p} \end{aligned}$$

Тем самым мы доказали, что $\chi_e(x)$ может быть приближена непрерывными функциями. Может быть, стоит отметить, что $\mu G < \mu e + \varepsilon < +\infty$ $\int_X |\varphi(x)|^p d\mu - \int_G |\varphi(x)|^p d\mu < \mu G \Rightarrow \varphi \in L^p(X, \mu)$

□

Раз утверждение верно для любых регулярных мер, то оно верно и для меры Лебега.

Глава 4

Метрические компакты

Топологический компакт: из любого подпокрытия можно выбрать конечное подпокрытие.

Утверждение 4.1 (из топологии). 1. (X, ρ) – метрическое пространство, $K \subset X$, K – компакт $\Leftrightarrow K$ – счётно-компактен, то есть

$$\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in K \quad \exists \{x_{n_j}\}_{j=1}^{\infty} \text{ т.ч. } \exists \lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_j} = x_0, x_0 \in K$$

2. K – компакт $\Rightarrow K$ – ограниченное замкнутое множество.

Пример 4.1. \mathbb{R}^n , K – компакт $\Leftrightarrow K$ – ограниченное, замкнутое

Замечание 4.1. НИ В КОЕМ СЛУЧАЕ из того, что K – ограниченное замкнутое, не следует, что K – компакт

Замечание 4.2. $l^2 = \left\{ x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \|x\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty, x_n \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \right\}$

$D = \{x \in l^2 : \|x\|_2 \leq 1\}$ – ограниченное, замкнутое

$e_n = (0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_n, 0, 0, \dots)$, $n \neq m \quad \|e_n - e_m\|_2 = \sqrt{2} \Rightarrow \forall \{e_{n_j}\}$ – не фундаментальная. Тогда $\nexists \lim_{j \rightarrow \infty} e_{n_j} \Rightarrow D$ – не компакт.

Ещё одно *напоминание*, кто такие относительно компактные множества.

Определение 4.1 (относительный компакт). $(X, \rho), A \subset X, A$ – относительно компактно, если \overline{A} – компакт. Или можно сказать

$$\Leftrightarrow \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in A \exists \{x_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}, \exists \lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_j} = x_0, x_0 \in X$$

Предел не обязательно принадлежит A . A в компакте предел обязательно лежит в A .

Мы получим новое описание компактных и относительно компактных множеств. В \mathbb{R}^n мы описывали относительные компакты. Для описания компакта нужно добавить замыкание.

Еще несколько определений:

Определение 4.2 (ε -сеть). (X, ρ) – метрическое пространство. $A \subset X, \varepsilon > 0$
 F – ε -сеть для A , если

$$\begin{aligned} \forall a \in A \exists f \in F : \rho(a, f) < \varepsilon \\ (\Leftrightarrow \forall a \in A B_{\varepsilon}(a) \cap F \neq \emptyset) \Leftrightarrow (A \subset \bigcup_{f \in F} B_{\varepsilon}(f)) \end{aligned}$$

Определение 4.3. A – вполне ограниченное множество, если для $\forall \varepsilon > 0 \exists$ конечная ε -сеть для A .

Описание компактных и относительно-компактных множеств в терминах вполне ограниченных – как раз наша главная цель. Мы будем использовать это новое описание так: если мы в полном метрическом пространстве, то там относительная компактность и вполне ограниченность – одно и то же. А проверять вполне ограниченность – гораздо проще, чем проверять относительную компактность. Предъявим ε -сеть и всё!

Замечание 4.3. $(X, \rho), A$ – вполне ограниченное $\Rightarrow A$ – ограничено.

Пример 4.2. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2) = l_n^2$ $A \subset \mathbb{R}^n$. A – ограниченное $\Leftrightarrow A$ вполне ограниченное

Доказательство. A – ограниченное $\Leftrightarrow \exists M > 0, \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in A \Rightarrow |x_j| \leq M$
 $A \subset Q = \{|x_j| \leq M, 1 \leq j \leq n\}$ Как же построить ε -сеть?

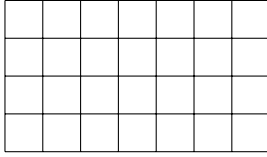


Рис. 4.1: классный поясняющий рисунок

Пусть $\varepsilon > 0$, $Q = \bigcup Q_j$, l – сторона Q_j

$$\text{diam } Q_j = \sup_{x, y \in Q_j} \rho(x, y) = \sqrt{n} \cdot l < \varepsilon \Rightarrow l < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$$

$$l = \frac{M}{N}, N \in \mathbb{N}, \exists N : \frac{M}{N} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \Rightarrow$$

F – вершины Q_j – ε -сеть

ЕС = equicontinuous

□

Убедимся в пространстве l^2

Пример 4.3. $D \subset l^2, D = \{x \in l^2 : \|x\|_2 \leq 1\}$ Убедимся, что D – не вполне ограниченное.

Доказательство.

$$\{e_n\}_{n=1}^\infty, e_n = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_n, 0, \dots), n \neq m, \|e_n - e_m\| = \sqrt{2}$$

$$B_{\frac{1}{2}}(e_n) \cap B_{\frac{1}{2}}(e_m) = \emptyset$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}, F = \frac{1}{2}\text{-сеть для } D$$

$$\Rightarrow \forall n \exists f_n \in F \cap B_{\frac{1}{2}}(e_n), f_n \neq f_m (n \neq m) \text{ так как } B_{\frac{1}{2}}(e_n) \cap B_{\frac{1}{2}}(e_m) = \emptyset$$

$$\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset F \Rightarrow F \text{ – не конечное}$$

□

Теперь посмотрим для l^∞

Пример 4.4. $\Pi = \{x = \{x_n\}_{n=1}^\infty, |x_n| < \frac{1}{2^n}\} \subset l^\infty$. Проверим, что Π – вполне ограничено. 0

$$\exists M \in \mathbb{N} \quad \left(\sum_{k=N+1}^\infty \left(\frac{1}{2^k} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

$$\Pi^* = \{x = \{x_1, \dots, x_N, 0, 0, \dots\}\}, |x_j| \leq \frac{1}{2^j}, 1 \leq j \leq N \quad x_{N+k} = 0, k \in \mathbb{N}$$

Если мы забудем про нули, то можем думать, что Π^* лежит в \mathbb{R}^n , и там оно ограниченное, а значит и вполне ограниченное. $\Pi^* \subset \mathbb{R}^n$, Π^* – ограниченное \Rightarrow вполне ограниченное $\Rightarrow \exists F \subset \Pi^*$ – конечная ε -сеть. Докажем, что F – 2ε -сеть для Π .

$$\begin{aligned} x \in \Pi &\Rightarrow x = \underbrace{(x_1, \dots, x_N, 0, \dots)}_y + \underbrace{(0, 0, \dots, 0, x_{N+1}, x_{N+2}, \dots)}_z \\ \|z\|_2 < \varepsilon \quad y \in \Pi^* &\Rightarrow \exists f \in F : \|y - f\|_2 < \varepsilon \Rightarrow \\ \|x - f\|_2 = \|(y - f) + z\|_2 &\leq \|y - f\|_2 + \|z\|_2 < 2\varepsilon \\ &\Rightarrow \Pi - \text{вполне ограничено} \end{aligned}$$

Таким образом, все множества можно описать в пространстве l^p . Перед тем, как доказывать основную теорему, несколько свойств вполне ограниченных множеств.

- Свойство 4.1.**
1. A – вполне ограничено $\Rightarrow \bar{A}$ – вполне ограничено
 2. $A \subset Y \subset X$, A – вполне ограничено в X $\Rightarrow A$ – вполне ограниченное в Y .
 3. A – вполне ограничено $\Rightarrow (A, \rho)$ – сепарабельно.

1 свойство. $A \subset X, \varepsilon > 0$. F – конечная ε -сеть для A . Проверим, что F – (2ε) -сеть для \bar{A}

$$\begin{aligned} \text{пусть } x \in \bar{A} &\Rightarrow \exists y \in A : \rho(x, y) < \varepsilon, \exists f \in F : \rho(y, f) < \varepsilon \\ &\Rightarrow \rho(x, f) \leq \rho(x, y) + \rho(y, f) < 2\varepsilon \end{aligned}$$

□

2 свойство. Проблема в том, что надо двигать точки. Мы уже так делали, когда доказывали сепарабельность. $A \subset Y \subset X, \varepsilon > 0, \{x_k\}_{k=1}^n$ – ε -сеть для $A, x_k \in X$
 $A \subset \bigcup_{k=1}^n B_\varepsilon(x_k)$, если $A \cap B_\varepsilon(x_k) \neq \emptyset$, то пусть $y_k \in A \cap B_\varepsilon(x_k)$ (если $= \emptyset$, то не будем выбирать)

Мы найдем ε -сеть из точек множества A , тогда она точно будет обслуживать и Y . Как же и куда сдвигать точки?

$$E = \{y_k\}_{k=1}^n$$

$$\begin{aligned} x \in A \Rightarrow \exists x_k : \rho(x, x_k) < \varepsilon \Rightarrow A \cap B_\varepsilon(x_k) \neq \emptyset \Rightarrow y_k \in B_\varepsilon(x_k) \Rightarrow \\ \rho(x_k, y_k) < \varepsilon \Rightarrow \rho(x, y_k) \leq \rho(x, x_k) + \rho(x_k, y_k) < 2\varepsilon \Rightarrow \\ E - (2\varepsilon)\text{-сеть для } A, E \subset A \end{aligned}$$

□

3 свойство. $n \in \mathbb{N}, F_n - (\frac{1}{n})$ -сеть для A, F_n — конечное.

$$F \text{ (счетное) } = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n - \text{плотно в } A, \text{ то есть } A \subset \overline{F}$$

□

Утверждение 4.2 (о разбиении). $(X, \rho), A \subset X, \varepsilon > 0. F$ — конечная ε -сеть для $A \Rightarrow$

$$\exists \{C_j\}_{j=1}^n \quad A = \bigcup_{j=1}^n C_j \quad C_j \cap C_k = \emptyset, j \neq k, \text{diam } C_j \leq 2\varepsilon, C_j \neq \emptyset$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} F = \{x_k\}_{k=1}^n, A \subset \bigcup_{k=1}^n B_\varepsilon(x_k) \\ C_1 = A \cap B_\varepsilon(x_1) \\ C_2 = (A \cap B_\varepsilon(x_2)) \setminus C_1 \\ C_k = A \cap B_\varepsilon(x_k) \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{k-1} C_j \right) \quad k = 2, \dots, n \end{aligned}$$

если $C_k = \emptyset$, то забудем о нём. $C_k \subset B_\varepsilon(x_k) \Rightarrow \text{diam } C_k \leq 2\varepsilon$

□

Теперь у нас всё готово для доказательства теоремы о том, как описывать компакты в терминах вполне ограниченных множеств.

Теорема 4.1 (Хаусдорф). (X, ρ) – метрическое пространство, $A \subset X$.

A – компакт \Leftrightarrow

1. A полное, то есть $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A, \{x_n\}$ – фундаментальная $\exists \lim x_n = x_0 \in A$
2. A – вполне ограничено

Высока вероятность, что спросят на экзамене эту теорему, попытаюсь вытянуть.

Доказательство. \Rightarrow

A – компакт, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – фундаментальная, $x_n \in A$.

A – компакт $\Rightarrow \exists \{x_{n_j}\}, \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_j} = x_0, x_0 \in A$. Тогда по свойствам фундаментальных последовательностей $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow (A, \rho)$ – полное метрическое пространство. Проверили первое условие. Теперь надо проверить второе: сначала покроем наш компакт безумным количеством шариков, а они ведь открытые множества, и среди них существует конечное подпокрытие.

пусть $\varepsilon > 0$ $A \subset \bigcup_{a \in A} B_{\varepsilon}(a) \wedge A$ – компакт $\Rightarrow, \exists \{a_j\}_{j=1}^n, a_j \in A :$

$$A \subset \bigcup_{j=1}^n B_{\varepsilon}(a_j) \Rightarrow F = \{a_j\}_{j=1}^n - \varepsilon\text{-сеть для } A$$

Это была тривиальная часть теоремы. \Leftarrow .

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in A$. Собираемся применять лемму о разбиении. $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$.

По лемме $\exists \{C_j^{(1)}\}_{j=1}^{N_1} . A = \bigcup_{j=1}^{N_1} C_j^{(1)}, \text{diam } C_j^{(1)} \leq 1$. Когда-то в детстве мы азнимались бесконечным делением пополам. Тут будем делать то же самое. $\exists j : C_j^{(1)}$ содержит бесконечное число элементов $\{x_n\}$. $A_1 :=$

$C_j^{(1)}$.

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2^2}, \text{ по лемме о разбиении к } A_1 \Rightarrow \exists \left\{ C_j^{(2)} \right\}_{j=1}^{N_2}$$

$$\text{diam } C_j^{(2)} \leq \frac{1}{2} \quad A_1 = \bigcup_{j=1}^{N_2} C_j^{(2)}$$

$\exists 1 \leq j \leq N_2 \quad C_j^{(2)}$ содержит бесконечное количество элементов в x_n

$$\text{и так далее } \{A_m\}_{m=1}^{\infty}, A_{m+1} \subset A_m, \text{diam } A_m \leq \frac{1}{2^m}$$

A_m содержит бесконечное число элементов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ (*)

$$x_{n_1} \in A_1, \quad \exists n_2 > n_1 : x_{n_2} \in A_2 \text{ т.к. } (*)$$

$$\text{и так далее } \exists n_k \text{ т.ч. } n_k > n_{k-1} \quad x_{n_k} \in A_k$$

$$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}, x_{n_k} \in A_k, \text{diam } A_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \quad A_{k+1} \subset A_k$$

$$\Rightarrow \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} - \text{фундаментальная} \wedge A - \text{полное}$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0, x_0 \in A$$

□

Часто описывают компакт, но фактически говорят об относительный компакте. Для описания компакта, опять же, надо просто добавить замкнутость.

Следствие 4.1. (X, ρ) – метрическое, $A \subset X$.

1. A – относительно компактно $\Rightarrow A$ вполне ограничено
2. (X, ρ) – полное, A – относительно компактно $\Leftrightarrow A$ вполне ограничено

Будем изо всех сил пользоваться теоремой Хаусдорфа.

1 утверждение. A – относительно компактно, $\Rightarrow \overline{A}$ – компакт, тогда по теореме Хаусдорфа \overline{A} – вполне ограничено, $A \subset \overline{A} \Rightarrow A$ вполне ограничено. □

2 утверждение. (X, ρ) – полное, A – вполне ограничено, тогда по ранее доказанному свойству $(\overline{A} - \text{вполне ограничено} \wedge \overline{A} - \text{замкнутое в } X \Rightarrow \overline{A} - \text{полное}) \Rightarrow$ по теореме Хаусдорфа \overline{A} компакт $\Rightarrow A$ – относительно компактно. □

Оказывается, можно вместо конечных ε -сетей можно утверждать чуть большее.

Следствие 4.2. (X, ρ) – полное, $A \subset X$. Если для $\forall \varepsilon > 0 \exists$ относительно компактная ε -сеть, то A – относительно компактно

Доказательство. $0, F$ – ε -сеть для A . F – относительно компактно $\Rightarrow F$ вполне ограничено, $\exists E$ – конечная ε -сеть для $F \Rightarrow E$ – (2ε) -сеть для $A \Rightarrow A$ – вполне ограничено $\Rightarrow A$ – относительно компактно. \square

4.1. Относительно компактные множества в $C(K)$

Определение 4.4. (K, ρ) – метрический компакт. $C(K) = \{f : K \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C}), f \text{ – непрерывная}\}$, $\|f\| = \max_{x \in K} |f(x)|$. $\Phi \subset C(K)$. Φ – **равностепенно непрерывно**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall f \in \Phi, \forall x, y \in K, \rho(x, y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

EC – equicontinuous.

Равностепенная непрерывность отличается от равномерной непрерывности тем, что δ не зависит от f , но от ε конечно зависит. Некоторый вариант теоремы Арцелла-Асколи, который, возможно, доказывали на дифурах:

Теорема 4.2 (Асколи-Арцелла). K – компакт, (K, ρ) , $\Phi \subset C(K)$. Φ – относительно компактно \Leftrightarrow

1. Φ – ограниченное в $C(K)$
2. Φ – равностепенно непрерывно ($\Phi \in EC$ equicontinuous)

Доказательство. С самого начала отметим, что $C(K)$ – полное. Вместо проверки относительной компактности Φ будем проверять вполне ограниченность.

\Rightarrow

Φ – относительно компактно $\Rightarrow \Phi$ – вполне ограничено $\Rightarrow \Phi$ – ограничено, то есть $\exists M \geq 0$ т.ч. $\|f\| \leq M \forall f \in \Phi \Leftrightarrow \forall x \in K, \forall f \in \Phi |f(x)| \leq$

М. $\varepsilon > 0 \exists \varepsilon$ -сеть $\{\varphi_j\}_{j=1}^n, \varphi_j \in C(K), \varphi_j$ – равномерно непрерывна
 $\exists \delta_j > 0$

$x, y \in K, \rho(x, y) < \delta_j \Rightarrow |\varphi_j(x) - \varphi_j(y)| < \varepsilon$

$\delta = \min_{1 \leq j \leq n} \delta_j$

при описании относительного компакта мы получили такой резуль- пер-
 тат: $C(K)$ – полное $\Rightarrow \Phi$ относительный компакт $\Leftrightarrow \Phi$ – вполне огра- рыв в
 ничено. Будем этим пользоваться. неделю

$\Rightarrow \Phi$ – вполне ограниченное $\Rightarrow \Phi$ – ограничено

Пусть $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \{\varphi_j\}_{j=1}^n$ – ε -сеть для Φ . $\varphi_j \in C(K) \Rightarrow \varphi_j$ – равномерно
 непрерывна

$\exists \delta_j > 0 \forall x, y \in K, \rho(x, y) < \delta_j \Rightarrow |\varphi_j(x) - \varphi_j(y)| < \varepsilon$

$$\delta = \min_{1 \leq j \leq n} \delta_j, \delta > 0$$

пусть $f \in \Phi \Rightarrow \exists j : \|f - \varphi_j\| < \varepsilon$ то есть

надо оценить этот модуль через неравенство треугольника; справа,
 очевидно, будет 3 слагаемых

$$\max_{x \in K} |f(x) - \varphi_j(x)| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \text{пусть } x, y \in K, \rho(x, y) < \delta, |f(x) - f(y)| &\leq \underbrace{|f(x) - \varphi_j(x)|}_{< \varepsilon} + \\ &+ \underbrace{|\varphi_j(x) - \varphi_j(y)|}_{< \varepsilon \text{ так как } \delta \leq \delta_j} + |\varphi_j(y) - f(y)| < 3\varepsilon \end{aligned}$$

мы и проверили равностепенную непрерывность. Тривиальная часть
 доказательства закончена.

\Leftarrow

Φ – ограничено $\Rightarrow \exists M > 0 : f \in \Phi \Rightarrow \|f\| \leq M \Rightarrow |f(x)| \leq M \forall x \in K$.
 Надо по определению построить конечную ε -сеть в множестве непре-
 рывных функций. Но мы воспользуемся двумя облегчающими хитро-
 стями: 1. $\Phi \subset C(K)$, а $C(K) \subset m(K)$, и если множество имеет ε -сеть в
 большем пространстве, то в меньшем и подавно. Более того, сеть мож-
 но построить из элементов меньшего множества. Мы выберем ограни-
 ченные функции. 2. выберем относительно компактную ε -сеть в $m(K)$
 вместо конечной в $C(K)$, и этого будет достаточно.

$$\varepsilon > 0 \quad \Phi \subset C(K) \subset m(K) = \{f : K \rightarrow \mathbb{C}, \sup_{x \in K} |f(x)| < +\infty\}$$

$\varepsilon > 0 \quad \exists \delta$ из определения (EC)

применим к этой парочке лемму о разбиении $(K, \rho), \delta > 0$

$$\exists \{C_j\}_{j=1}^n, \text{diam } C_j < \delta, K = \bigcup_{j=1}^n C_j, C_j \cap C_i = \emptyset (j \neq i), C_j \neq \emptyset$$

$$\Psi = \left\{ g(x) = \sum_{j=1}^n y_j \chi_{C_j}(x) \right\} \subset m(K), y_j \in \mathbb{C}, 1 \leq j \leq n$$

$$g \in \Psi, \|g\|_\infty = \sup_{x \in K} |g(x)| = \max_{1 \leq j \leq n} |y_j| = \|y\|_{l_n^\infty}, y = (y_1, \dots, y_n)$$

$$F : l_n^\infty \rightarrow \Psi, F(y) = \sum_{j=1}^n y_j \chi_{C_j}(x)$$

Мы выяснили, что F биекция, изометрия, линейное.

$Q = \{y = (y_1, \dots, y_n), |y_j| \leq M\}$ полидиск, что бы это пока не значило

Q – компакт, F – непрерывна $\Rightarrow F(Q)$ – компакт в $m(K)$

$$E := F(Q), E = \left\{ g(x) = \sum_{j=1}^n y_j \chi_{C_j}(x), |y_j| \leq M \right\}$$

вот у нас есть компакт E , и мы собираемся проверить, что он и будет ε -сетью для Φ . Будет полезно в каждом множестве выбрать по точке. Пусть $x_j \in C_j, f \in \Phi, y_j := f(x_j)$.

$$g(x) = \sum_{j=1}^n f(x_j) \chi_{C_j}(x), g \in E, |y_j| \leq M$$

Пусть $x \in K \Rightarrow \exists j, x \in C_j \Rightarrow g(x) = f(x_j) \Rightarrow$

$$|f(x) - g(x)| = |f(x) - f(x_j)| < \varepsilon \text{ т.к. } \rho(x, x_j) < \delta$$

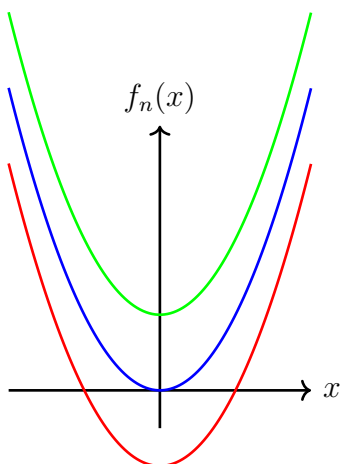
Вот это и то, что было обещано. E – компактная ε -сеть. □

Замечание 4.4. Условия теоремы не зависимы.

Пример 4.5. $C[0, 1]. f_n(x) = x^2 + n, \{f_n\}$ – равностепенно непрерывны, но $\{f_n\}$ не ограничено.

ограниченная, но не равностепенно непрерывная

Пример 4.6. $C[0, 1], f_n(x) = x^n. \{f_n\}$ – ограничены, но не равностепенно непрерывны.



Теорема 4.1 (достаточные условия равностепенной непрерывности). (K, ρ) – компакт, $\Phi \subset C(K)$. Сначала какие-то абстрактные множества, потом будут более конкретные.

1. Если $\exists M > 0, \alpha > 0, \beta > 0$ такие что

$$\forall f \in \Phi, (\forall x, y \in K \rho(x, y) < \beta) \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq M(\rho(x, y))^\alpha \\ \Rightarrow \Phi \in (EC)$$

2. $C[a, b], \Phi \subset C[a, b]$, пусть $\exists L > 0$

$$\forall f \in \Phi \exists f'(x), x \in (a, b), |f'(x)| \leq L \Rightarrow \Phi \in (EC)$$

3. чуть более общий случай. $K \subset G \subset \mathbb{R}^n$, K – компакт, G – открытое.

$$\exists L > 0 : \forall f \in \Phi, \exists \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \right| \leq L (1 \leq j \leq n), \forall x \in G \Rightarrow \Phi \in (EC)$$

4. про аналитические функции. предполагать можно будет гораздо меньшее. $K \subset G \subset \mathbb{C}$, G – открытое, K – компакт.

$$\exists L > 0, f \in \Phi, f \text{ аналитическая в } G, \exists f'(x), \underbrace{|f(x)|}_{\text{ТУТ}} \leq L, \forall x \in G$$

ТУТ НЕ ПРОИЗВОДНАЯ, НА ЭКЗАМЕНЕ ЧАСТО ОШИБАЮТСЯ!!!!

Аналитичность – фантастическое свойство, в отличие от, например, дифференцируемости. Именно из-за неё ТАМ как раз и не производная.

1. Пусть $\varepsilon > 0$, $x, y \in K$, пусть $\rho(x, y) < \beta$, пусть $\delta < \beta, \rho(x, y) < \delta, \delta(\varepsilon) = ?$.

$$\begin{aligned} f \in \Phi &\Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq M\rho(x, y)^\alpha < M\delta^\alpha \leq \varepsilon \\ &\Rightarrow \delta \leq \left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \\ \delta(\varepsilon) &= \min \left\{ \beta, \left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \right\}, \end{aligned}$$

□

Будем сводить остальные доказательства к первому пункту, находя M, α, β . Второй пункт теперь совсем лёгкий.

2. $\Phi \subset C[a, b]$, $x, y \in [a, b]$, $f \in \Phi$. Для оценки разности $f(x) - f(y)$ воспользуемся теоремой Лагранжа.

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= f'(c)(x - y) \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq |f'(c)||x - y| \leq L|x - y| \\ M &= L, \alpha = 1, (\beta - \forall) \stackrel{1}{\Rightarrow} \Phi \in (EC) \end{aligned}$$

□

3. Пусть $z, y \in K$ такие что $[z, y] \subset G$, $f \in \Phi$ Оценим разность $f(y) - f(z)$.

$$\begin{aligned} \Gamma : [0, 1] &\rightarrow [y, z] \\ \Gamma(t) &= ty + (1 - t)z, \Gamma(0) = z, \Gamma(1) = y \end{aligned}$$

опять можем воспользоваться теоремой Лагранжа

$$\begin{aligned} f(y) - f(z) &= f(\Gamma(1)) - f(\Gamma(0)) = (f(\Gamma(c)))'_t \\ (f(\Gamma(t)))'_t &= (f(ty + (1 - t)z))'_t = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\dots)(y_j - z_j) \end{aligned}$$

$$|f(\Gamma(t))'| \leq L \sum_{j=1}^n |y_j - z_j| \stackrel{\text{КБШ}}{\leq} L\sqrt{n} \left(\sum_{j=1}^n (y_j - z_j)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = L\sqrt{n}\rho(y, z)$$

Если выбрать β достаточно маленьким, то наш отрезок будет лежать в этом компакте. $F = \mathbb{R}^n \setminus G$ – замкнутое, $\rho(x, F)$ – непрерывная

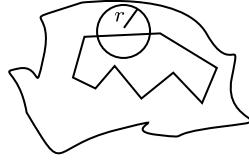


Рис. 4.2: Утопленность компакта

функция в $\mathbb{R}^n \Rightarrow \rho(x, F)$ непрерывна на $K \Rightarrow \exists x_o \in K, \rho(x_o, F) = \min_{x \in K} \rho(x, F)$

$$\begin{aligned} x_o \notin F &\Rightarrow \rho(x_o, F) > 0, r := \rho(x_o, F) \\ \forall x \in K \ B_r(x) &\subset G, \beta = r \\ \rho(x, y) < r &\Rightarrow y \in B_r(x) \subset G \Rightarrow \\ &\text{отрезок } [x, y] \subset B_r(x) \subset G \\ &\Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq L\sqrt{n}\rho(x, y) \end{aligned}$$

z и y , которые с самого начала были выбраны вместо x и y , чтобы не смущаться из-за dx , обратно превратились в x и y , все же поняли?

На пальцах: наш компакт настолько утоплен в G , что если мы возьмём шарик радиуса r , то шарик всё ещё лежит в G . \square

4. Букву r , которую мы нашли в предыдущем пункте, будем изо всех сил использовать. $K \subset G \subset \mathbb{C}$. В 3 пункте выяснили, что $\exists r > 0 : B_r(x) \subset G \forall x \in K, \beta = \frac{r}{3}$.

$$\begin{aligned} x, y \in K, \rho(x, y) < \beta, \gamma &= \{\zeta \in \mathbb{C} : |x - \zeta| = 2\beta\} \\ f &\in \Phi \end{aligned}$$

разницу собираемся оценивать с помощью формулу Коши, поэтому никакие производные и не нужны!!!

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - x} d\zeta \\ f(y) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - y} d\zeta \\ f(x) - f(y) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\zeta) \frac{x - y}{(\zeta - x)(\zeta - y)} d\zeta \end{aligned}$$

оцениваем самым грубом образом, отправляя модули под интегралы

$$|f(\zeta)| \leq L, |\zeta - x| = 2\beta, |z - y| \geq \beta$$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq \frac{1}{2\pi} L \cdot |x - y| \cdot |\gamma| \cdot \frac{1}{(2\beta) \cdot \beta} = |x - y| L \frac{(2\beta) \cdot 2\pi}{(2\pi)(2\beta)\beta} = \\ &= \frac{L}{\beta} |x - y| \end{aligned}$$

и в обозначениях 1 пункта получаем $M = \frac{L}{\beta}, \alpha = 1, \beta = \frac{r}{3}, \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \Phi \in (EC)$ \square

Перед тем, как мы покинем относительно компакты, пара упражнений, которые на экзамене спрашивали в качестве задачи на 5.

Утверждение 4.3. $1 \leq p < +\infty$. $\Phi \subset l^p, \Phi$ – относительно компактно \Leftrightarrow

1. Φ – ограничено в l^p

2. $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall x = \{x_j\}_{j=1}^\infty \in \Phi, \left(\sum_{j=N+1}^\infty |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$

Утверждение 4.4. $\Phi \subset C_0, \Phi$ – относительно компактно \Leftrightarrow

1. Φ – ограничено

2. $\varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall x \in \Phi \quad \sup_{j \geq N+1} |x_j| < \varepsilon$

Мы сейчас находимся на перепутье функционального анализа. Можно отправиться в Гильбертовы пространства, в линейные операторы или еще куда-то. Изучить-то придётся всё, но мы начинаем линейные операторы.

Часть II

Линейные операторы

Глава 5

Линейные операторы в линейных пространствах

Первый параграф про линейные пространства будет совсем простой, здесь будут самые тривиальные свойства, следующие из линейности.

5.1. Линейные операторы в линейных пространствах

Определение 5.1 (Линейный оператор). X, Y — линейны над k ($k = \mathbb{R}$ или \mathbb{C}). $A : X \rightarrow Y$, A — **линейный оператор**, если

$$A(\alpha x + \beta z) = \alpha Ax + \beta Az, \quad x, z \in X, \alpha, \beta \in k$$

$\text{Lin}(X, Y)$ — множество линейных операторов из X в Y . Также нам понадобится линейное пространство над k

$$\alpha \in k, A \in \text{Lin}(X, Y), (\alpha A)(x) := \alpha Ax, 0(x) = 0 \text{ (0 в пространстве } Y)$$
$$A, B \in \text{Lin}(X, Y), (A + B)(x) := Ax + Bx$$

Если $X = Y$, пишем только $\text{Lin}(X)$.

Пример 5.1 (интегральный оператор). $C[a, b], K(s, t) \in C([a, b] \times [a, b])$

$$f \in C[a, b], (\mathcal{K}f)(s) = \int_a^b k(s, t)f(t)dt$$
$$(\mathcal{K}f)(s) \in C[a, b], \mathcal{K} \in \text{Lin}(C[a, b])$$

Пример 5.2 (оператор дифференцирования). $X = C^{(1)}[0, 1] = \{f : f' \in C[0, 1]\}$, $Y = C[0, 1]$. $f \in X, D(f) = f', D \in \text{Lin}(X, Y)$

Пример 5.3 (оператор вложения). $l^1 \subset l^2, x = \{x_n\}_{n=1}^\infty, \sum_{n=1}^\infty |x_n| < +\infty, x \in l^1 \Rightarrow \sum_{n=1}^\infty |x_n|^2 < +\infty \Rightarrow x \in l^2$

$$Ax = x, A \text{ оператор вложения } l^1 \xrightarrow{A} l^2$$

$$\forall 1 \leq p_1 < p_2 \leq +\infty \Rightarrow l^{p_1} \xrightarrow{A} l^{p_2}, Ax = x$$

$$A \in \text{Lin}(l^{p_1}, l^{p_2})$$

Пример 5.4 (оператор, но не линейный). $x \in X$ — линейное пространство, $x_0 \in X, x_0 \neq 0, Ax = x + x_0 \Rightarrow A$ — не линейный.

Перед тем, как доказывать теорему, еще одно небольшое определение.

Определение 5.2 (Выпуклое множество). $B \subset X, X$ — линейное пространство. B — **выпуклое**, если

$$\forall x, z \in B, \forall t, 0 \leq t \leq 1 \Rightarrow tx + (1 - t)z \in B$$

то есть отрезок, соединяющий любые две точки, полностью лежит в этом множестве

Теорема 5.1 (простейшие свойства линейного оператора). X, Y — линейные пространства над k (\mathbb{R} или \mathbb{C}), $A \in \text{Lin}(X, Y)$

1. $L \subset X, L$ — подпространство в $X \Rightarrow A(L)$ — подпространство в Y (образ подпространства — подпространство)
2. $M \subset Y, M$ — подпространство в $Y \Rightarrow \underbrace{A^{-1}(M)}_{\text{прообраз}}$ — подпространство в X
3. $B \subset X, B$ — выпуклое $\Rightarrow A(B)$ — выпуклое в Y
4. $C \subset Y, C$ — выпуклое $\Rightarrow A^{-1}(C)$ — выпуклое в X
5. пусть A — биекция $\Rightarrow A^{-1} \in \text{Lin}(Y, X)$

Все 5 свойств доказывать не будем, покажем только несколько и скажем, что остальные доказываются аналогично.

1. L — подпространство, $y, v \in A(L), \alpha \in k$. Наша мечта — проверить ($\stackrel{?}{\Rightarrow} \alpha y + v \in A(L)$), не обязательно писать α и β .

$$\Rightarrow \exists x, y \in L : (Ax = y \wedge Au = v) \Rightarrow A(\alpha x + u) = \alpha Ax + Au = \alpha y + v \\ \alpha x + u \in L \Rightarrow A(\alpha x + u) \in A(L) \Rightarrow \alpha y + v \in A(L)$$

□

3 проверяется тютелька в тютельку как 1, а 2 — как 4, поэтому проверим 4.

4. C — выпуклое, $x, u \in A^{-1}(C), 0 \leq t \leq 1$.

$$(y := Ax \wedge v := Au) \quad y, v \in C \Rightarrow ty + (1 - t)v \in C \\ A(tx + (1 - t)u) = tAx + (1 - t)Au = ty + (1 - t)v \in C \\ \Rightarrow tx + (1 - t)u \in A^{-1}(C) \Rightarrow A^{-1}(C) \text{ выпуклое}$$

□

5. $y, v \in Y \Rightarrow x = A^{-1}y, u = A^{-1}v \Rightarrow (Ax = y \wedge Au = v) \Rightarrow$

$$\text{пусть } \alpha \in k, \quad A(\alpha x + u) = \alpha Ax + Au = \alpha y + v \Rightarrow \\ \alpha x + u = A^{-1}(\alpha y + v) = \alpha A^{-1}y + A^{-1}v \Rightarrow \\ A^{-1} \in \text{Lin}(Y, X)$$

□

Определение 5.3 (Ядро линейного оператора). $A \in \text{Lin}(X, Y)$

$$\text{Ker } A = \{x \in X : Ax = 0\} \text{ — ядро } A$$

$$\text{Im } A = \{y \in Y : \exists x : Ax = y\} = A(X) \text{ — образ } A$$

Следствие 5.1. X, Y — линейные пространства, $\Rightarrow \text{Ker } A$ — подпространство в X , $\text{Im } A$ — подпространство в Y .

Определение 5.4 (произведение операторов). X, Y, Z — линейные пространства

$$X \xrightarrow{A} Y \xrightarrow{B} Z$$

$A \in \text{Lin}(X, Y), B \in \text{Lin}(Y, Z), C = BA, C(x) := B(Ax), x \in X \Rightarrow C \in \text{Lin}(X, Z), C$ — произведение BA

Всё самое тривиальное для операторов в линейных пространствах мы вспомнили

5.2. Линейные операторы в нормированных пространствах

Линейные операторы в нормированных пространствах — главный объект, который изучает функциональный анализ.

Определение 5.5 (Ограниченный оператор). $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|), A \in \text{Lin}(X, Y)$. A — **ограниченный**, если $\forall C \subset X, C$ — ограниченное $\Rightarrow A(C)$ — ограниченное в Y .

Оказывается, для операторов ограниченность эквивалентна непрерывности. Казалось бы, ограниченность сильно слабее, но если к ней добавить линейность, то будет аж непрерывность.

Обычно если в теореме 2 свойства, то говорят «если и только если», а если условий несколько, то говорят «равносильность». Подлые англичане говорят Following Conditions are Equivalent.

Теорема 5.2 (эквивалентность ограниченности и непрерывности линейного оператора). $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|), A \in \text{Lin}(X, Y)$. Следующие условия равносильны (СУР) (FCE)

1. A непрерывен в точке 0
2. A непрерывен $\forall x \in X$
3. $\exists C > 0 : \|Ax\| \leq C\|x\| \forall x \in X$
4. A ограниченный
5. $\exists r > 0 A(B_r(0))$ — ограниченное множество в Y .

Доказательство очень простое, и, конечно, строится на линейности

$1 \Rightarrow 2$. A непрерывен в точке 0. Пусть $\varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \|x\| < \delta \Rightarrow \|Ax\| < \varepsilon$ ($A(0) = 0$). утверждается, что те же самые ε и δ подходят.

пусть $x_0 \in X$, проверим, что A непрерывен в x_0

пусть $\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|A(x - x_0)\| < \varepsilon \Rightarrow \|Ax - Ax_0\| < \varepsilon$

□

2 \Rightarrow 1 очевидно

1 \Rightarrow 3. Пусть $\varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \|x\| < \delta \Rightarrow \|Ax\| < \varepsilon$.

$$\begin{aligned} z \in X, z \neq 0 \quad x = \frac{z}{\|z\|} \cdot \delta \Rightarrow \|x\| = \delta \Rightarrow \|Ax\| < \varepsilon \\ \Rightarrow \|A\left(\frac{z}{\|z\|} \cdot \delta\right)\| < \varepsilon \Rightarrow \|Az\| < \frac{\varepsilon}{\delta} \|z\| \text{ т.е. } C = \frac{\varepsilon}{\delta} \end{aligned}$$

□

3 \Rightarrow 4. $B \subset X$, B — ограниченное, то есть $\exists M > 0 : (\forall x \in B \wedge \|x\| < M) \xrightarrow{3} \|Ax\| \leq C\|x\| \leq CM \forall x \in B \Rightarrow \{A(B)\}$ — ограниченное. □

4 \Rightarrow 5 очевидно ($B_r(0)$ — ограниченное)

5 \Rightarrow 1. $\exists R > 0 A(B_r^x(0)) \subset B_R^y(0)$

$$\|x\| < r \Rightarrow \|Ax\| < R$$

непрерывность в 0 означает

$$\text{пусть } \varepsilon > 0 \quad \|x\| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \|Ax\| < \varepsilon$$

$$\delta(\varepsilon) = \varepsilon \cdot \frac{r}{R}$$

$$\|z\| < \varepsilon \cdot \frac{r}{R} \Rightarrow \|z \cdot \frac{R}{\varepsilon}\| < r \Rightarrow \|A\left(z \cdot \frac{R}{\varepsilon}\right)\| < R \Rightarrow \|Az\| < \varepsilon$$

□

с помощью теоремы, которую мы только что доказали, введём норму в этом пространстве.

Определение 5.6 (норма оператора). $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|)$

$$\underbrace{\mathcal{B}(X, Y)}_{\text{bounded}} = \{A \in \text{Lin}(X, Y) \wedge A \text{ — ограниченный}\}$$

$$A \in \mathcal{B}(X, Y)$$

$$\|A\| = \inf\{C : C > 0 \wedge \|Ax\| \leq C\|x\| \quad \forall x \in X\}$$

то бишь точная нижняя грань множества величин, на которые наш оператор увеличивает норму элемента.

Раз мы так объявили норму, то надо проверять аксиомы нормы.

Утверждение 5.1. $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|), A \in \mathcal{B}(X, Y)$

1. $\forall x \in X \|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$ (то есть \inf в определении нормы $= \min$)
2. $\|A\|$ удовлетворяет аксиомам нормы

Доказательство. x - фиксирован, $\Rightarrow \forall c > \|A\|, \|Ax\| \leq c \|x\| \Rightarrow \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$. Был фиксирован, теперь любой, первое утверждение доказано. Теперь второе.

$\alpha \in k, \alpha \neq 0, x \in X, x$ — фиксирован

$$(\alpha A)(x) = \alpha Ax$$

$$\begin{aligned} \forall x \in X \quad \|(\alpha A)(x)\| &= \|\alpha \cdot Ax\| = |\alpha| \cdot \|Ax\| \leq |\alpha| \cdot \|A\| \cdot \|x\| \\ &\Rightarrow \|\alpha A\| \leq |\alpha| \|A\| \end{aligned}$$

Очевидное замечание по слёзной просьбе двух студенток, которые ничего не понимали. Если мы докажем $\|Ax\| \leq M \|x\| \forall x \in X$, то $\|A\| \leq M$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left\| \frac{1}{\alpha} (\alpha A) \right\| &\leq \frac{1}{|\alpha|} \|\alpha A\| \Rightarrow |\alpha| \|A\| \leq \|\alpha A\| \\ &\Rightarrow \|\alpha A\| = |\alpha| \|A\| \\ A, B &\in \mathcal{B}(X, Y), x \in X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|(A+B)(x)\| &= \|Ax+Bx\| \leq \|Ax\| + \|Bx\| \leq \|A\| \cdot \|x\| + \|B\| \cdot \|x\| = \\ &= (\|A\| + \|B\|) \|x\| \quad \forall x \in X \\ &\Rightarrow \|A+B\| \leq \|A\| + \|B\| \end{aligned}$$

Как только есть какая-то константа, то настоящая норма меньше или равна этой константы. $\|A\| = 0 \Rightarrow \forall x \in X \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| = 0$. $\Rightarrow Ax = 0 \forall x \in X \Rightarrow A = 0 \Rightarrow \|A\|$ — настоящая норма \square

Теорема 5.3 (вычисление нормы непрерывного оператора).
 $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|), A \in \mathcal{B}(X, Y) \Rightarrow$

$$\|A\| = \underbrace{\sup_{\{\|x\| \leq 1\}} \|Ax\|}_a = \underbrace{\sup_{\{\|x\| < 1\}} \|Ax\|}_b = \underbrace{\sup_{\{\|x\|=1\}} \|Ax\|}_c = \underbrace{\sup_{\{x \in X, x \neq 0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}}_d$$

Доказательство. Очевидно $a \geq b, a \geq c, d \geq c$. Докажем $\|A\| \geq a \geq b \geq \|A\|, \|A\| \geq d \geq c \geq \|A\|$.

$$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \leq \|A\| \quad \forall x, \|x\| \geq 1 \Rightarrow \sup_{\{\|x\| \geq 1\}} \|Ax\| \leq \|A\| \Rightarrow a \leq \|A\|$$

Доказали $\|A\| \geq a$.

$$\text{Пусть } \varepsilon > 0, z \in X, z \neq 0 \Rightarrow \left\| \frac{z}{\|z\|(1+\varepsilon)} \right\| = \frac{1}{1+\varepsilon} < 1$$

$$\begin{aligned} \left\| A\left(\frac{z}{\|z\|(1+\varepsilon)}\right) \right\| &\leq b \Rightarrow \|Az\| \leq b(1+\varepsilon)\|z\| \quad \forall z \in X \\ \Rightarrow \|A\| &\leq b(1+\varepsilon) \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \|A\| \leq b \end{aligned}$$

Закончили с первой цепочкой неравенств.

$$\text{Пусть } x \neq 0 \Rightarrow \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \Rightarrow \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\| \Rightarrow d = \sup_{\{x \neq 0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\|.$$

$$\text{пусть } z \in X, z \neq 0, \left\| \frac{z}{\|z\|} \right\| = 1 \Rightarrow \left\| A\left(\frac{z}{\|z\|}\right) \right\| \leq c \Rightarrow \|Az\| \leq C\|z\| \quad \forall z \in X$$

c — супремум по единичной сфере

$$\Rightarrow \|A\| \leq C$$

□

Пример 5.5. $C[a, b], h(x) \in C[a, b]$ — фиксированная функция. $f \in C[a, b], M_h(f) := h(x) \cdot f(x)$.

$$M_h \in \text{Lin}(C[a, b])$$

Проверим, что он непрерывен и сосчитаем его норму.

Доказательство.

$$\begin{aligned} \|M_h(f)\|_\infty &= \max_{x \in [a, b]} |h(x) \cdot f(x)| \leq \max_{x \in [a, b]} |h(x)| \cdot \max_{x \in [a, b]} |f(x)| = \|h\|_\infty \cdot \|f\|_\infty \\ &\Rightarrow M_h \in \mathcal{B}(C[a, b]), \|M_h\|_{\mathcal{B}(C[a, b])} \leq \|h\|_\infty \end{aligned}$$

получили непрерывность; раз есть общая константа, не зависящая от f , то мы получаем и оценку для нормы

$$\begin{aligned} \chi_{[a, b]}(x) &= 1 \forall x \in [a, b], \chi_{[a, b]} \in C[a, b], \|\chi_{[a, b]}\|_\infty = 1 \\ \|M_h\| &\geq \|M_h(f)\| \forall f, \|f\| = 1 \Rightarrow \|M_h\| \geq \|M_h(\chi_{[a, b]})\|_\infty = \|h\|_\infty \\ &\Rightarrow \|M_h\|_{\mathcal{B}(C[a, b])} = \|h\|_\infty \end{aligned}$$

□

Теперь посмотрим на оператор дифференцирования, это очень важный пример.

Пример 5.6. $Y = C[a, b], X = \{f : \exists f' \in C[a, b]\}, 0 \leq a \leq b$

$X \subset Y, X$ — подпространство Y , то есть

$$\|f\|_X = \|f\|_Y = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

$$D(f) = f' \Rightarrow D \in \text{Lin}(X, Y),$$

$$D(x^n) = nx^{n-1} \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{\|D(x^n)\|}{\|x^n\|} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{nb^{n-1}}{b^n} = +\infty$$

при таком определении нормы оператор дифференцирования D не непрерывен.

Пример 5.7. $Y = C[a, b], X = C^{(1)}[a, b]$

$$\|f\|_X = \max\{\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty\}$$

$$D(f) = f' \quad \|D(f)\| = \|f'\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |f'(x)| \leq \underbrace{\max\{\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty\}}_{\|f\|_X}$$

$$\Rightarrow D \in \mathcal{B}(X, Y), \|D\| \leq 1$$

Теорема 5.4 (вложение пространств в l^p). Пусть $1 \leq p_1 < p_2 \leq +\infty$. $x \in l^{p_1}$. Рассмотрим оператор вложения $Ax = x \Rightarrow A \in \mathcal{B}(l^{p_1}, l^{p_2}), \|A\| = 1$.

Доказательство. То, что он линейный, мы уже обсуждали, это очевидно. Удобно будет рассматривать последовательности из единичной сферы. $x \in l^p, x = \{x_n\}_{n=1}^\infty, x_n \in \mathbb{C}$. $\|x\|_p = (\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < +\infty$. Возьмём не просто последовательность из l^{p_1} , но и такую, что $\|x\|_{p_1} = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^\infty |x_n|^{p_1} = 1 \quad Ax = x$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow |x_n| \leq 1 &\Rightarrow (|x_n|^{p_2}) < |x_n|^{p_1} \\ \|Ax\|_{p_2} &= \left(\sum_{n=1}^\infty |x_n|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \leq \left(\sum_{n=1}^\infty |x_n|^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_2}} = 1 \Rightarrow A \in \mathcal{B}(l^{p_1}, l^{p_2}) \\ \|A\| &= \sup_{\{\|x\|_{p_1}=1\}} \|Ax\|_{p_2} \leq 1 \Rightarrow \|A\|_{\mathcal{B}(l^{p_1}, l^{p_2})} \leq 1 \quad \text{при } p_2 < +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{теперь } p_2 = +\infty \quad \|x\|_{p_1} = 1 &\Rightarrow \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| \leq \|x\|_{p_1} \Rightarrow \|x\|_\infty \leq \|x\|_{p_1} \Rightarrow \\ &A \in \mathcal{B}(l^{p_1}, l^{p_2}) \quad \|A\| \leq 1 \end{aligned}$$

если $e_1 = (1, 0, \dots)$, $\|e_1\|_p = 1 \quad \forall p : 1 \leq p \leq +\infty$

$$\|A\| = \sup_{\{\|x\|_{p_1}=1\}} \|Ax\|_{p_2} \geq \|Ae_1\|_{p_2} = 1 \Rightarrow \|A\|_{\mathcal{B}(l^{p_1}, l^{p_2})} = 1 \quad \forall p_1 < p_2$$

□

Посмотрим теперь на похожую теорему для больших пространств L^p .

Теорема 5.5 (вложение пространств в $L^p(\mu)$ для конечной меры). $(X, U, \mu), 1 \leq p_1 < p_2 \leq +\infty, \mu(X) < +\infty$. Рассмотрим $f \in L^{p_2}, Af = f \Rightarrow A \in \mathcal{B}(L^{p_2}, L^{p_1})$. $\|A\| = (\mu(X))^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}}, (\frac{1}{\infty} = 0)$

Доказательство. Начнём с самого простого случая. То есть что называлось существенно ограниченными функциями. $p_2 = \infty, f \in L^\infty(\mu), |f(x)| \leq \|f\|_\infty$ п.в. для $x \in X$ по μ .

$$\|Af\|_{p_1} = \|f\|_{p_1} = \left(\int_X |f|^{p_1} d\mu \right)^{\frac{1}{p_1}} \leq \|f\|_\infty \left(\int_X d\mu \right)^{\frac{1}{p_1}} = \|f\|_\infty \mu(X)^{\frac{1}{p_1}}$$

Вот у нас получилась константа, которая обслуживает все функции f . Тогда, во-первых, оператор непрерывен, а во-вторых, это и есть оценка для нормы

$$\begin{aligned} \Rightarrow A \in \mathcal{B}(L^\infty, L^{p_1}), \|A\| &\leq (\mu(X))^{\frac{1}{p_1}} \\ \text{пусть } p_2 < +\infty, f \in L^{p_2}, \left(\int_X |f|^{p_2} d\mu \right)^{\frac{1}{p_2}} &= \|f\|_{p_2} \\ \|Af\|_{p_1} = \|f\|_{p_1} = \left(\int_X |f|^{p_1} d\mu \right)^{\frac{1}{p_1}} \text{ н. Гёльдера} &\leq \left[\left(\int_X |f|^{p_2} d\mu \right)^{\frac{1}{p_2}} \left(\int_X 1^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \right]^{\frac{1}{p_1}} = \\ p = \frac{p_2}{p_1}, \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = 1 - \frac{p_1}{p_2} & \\ = \left(\int_X |f|^{p_2} d\mu \right)^{\frac{1}{p_2}} \cdot (\mu(X))^{(1 - \frac{p_1}{p_2}) \frac{1}{p_1}} &= \|f\|_{p_2} (\mu(X))^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}} \\ \Rightarrow A \in \mathcal{B}(L^{p_2}, L^{p_1}), \|A\| &\leq (\mu(X))^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}} \end{aligned}$$

Почти всё готово. Мы оценили норму сверху, и утверждается, что на самом деле имеет место равенство. На какой пробной функции получить неравенство с другой стороны? Наверное, все уже догадались. Раз есть \sup , то мы можем подставить какую-то конкретную функцию. $p_2 < +\infty, \chi_X(x) \equiv 1$

$$\begin{aligned} \|A\| = \sup_{f \neq 0} \frac{\|Af\|_{p_1}}{\|f\|_{p_2}} &\geq \frac{\|A(\chi_X)\|_{p_1}}{\|\chi_X\|_{p_2}} = \frac{(\int_X \chi_X^{p_1} d\mu)^{\frac{1}{p_1}}}{(\int_X \chi_X^{p_2} d\mu)^{\frac{1}{p_2}}} = \\ &= \frac{(\mu(X))^{\frac{1}{p_1}}}{\mu(X)^{\frac{1}{p_2}}} = \mu(X)^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}} \end{aligned}$$

если $p_2 = \infty, \|\chi_X\|_\infty = 1 \Rightarrow \|A\|_{\mathcal{B}(L^\infty, L^{p_1})} \geq \mu(X)^{\frac{1}{p_1}}$ □

Позже вычислим норму интегрального оператора, который часто встречается в анализе и в матфизике.

Теорема 5.6 (полнота пространства операторов, действующих в банахово пространство). $(X, \|\cdot\|)$ — нормированное, $(Y, \|\cdot\|)$ — банахово $\Rightarrow \mathcal{B}(X, Y)$ — банахово.

Доказательство. Тут без хитростей. По определению возьмём фундаментальную последовательность и покажем, что у нее есть предел. Сначала надо добыть оператор, который будет претендентом на

звание предела. $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ — фундаментальная, $A_n \in \mathcal{B}(X, Y)$. Пусть $\varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} (n > N \wedge m > N) \Rightarrow \|A_n - A_m\| < \varepsilon$. $x \in X, x$ — фиксирован, $\Rightarrow \|A_n x - A_m x\| = \|(A_n - A_m)x\| < \varepsilon \|x\|$. Тогда $\{A_n x\}_{n=1}^\infty$ — фундаментальная в Y, Y — банахово \Rightarrow

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x \in Y, Ax := \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x \text{ поточечный предел}$$

$$\lim — \text{линейная} \Rightarrow A \in \text{Lin}(X, Y)$$

$$x — \text{фиксирован} \quad \|A_n x - A_m x\| < \varepsilon \|x\|, \text{ пусть } m \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow \|A_n x - Ax\| \leq \varepsilon \|x\| \quad \forall x \in X$$

$$\Rightarrow A_n - A \in \mathcal{B}(X, Y), \|A_n - A\| \leq \varepsilon \Rightarrow A = (A - A_n) + A_n \Rightarrow A \in \mathcal{B}(X, Y)$$

□

Поговорим немного о линейных функционалах. Вы только не думайте, что мы покидаем линейные операторы, это всё-таки главный объект изучения функционального анализа.

5.3. Линейные функционалы

Определение 5.7 (линейный функционал). X — линейное пространство над k (\mathbb{R} или \mathbb{C}). $\text{Lin}(X, k)$ — линейные функционалы на X

Определение 5.8 (сопряжённое пространство). $(X, \|\cdot\|), X^* = \mathcal{B}(X, \mathbb{C})$ (или же $X^* = \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$) — сопряжённое пространство. X^* — линейные **НЕПРЕРЫВНЫЕ** функционалы.

Про непрерывность надо помнить. На экзамене часто спрашивают, что такое сопряжённое пространство, и не могут выпытать непрерывность. Что делают с такими студентами? Выгоняют.

Следствие 5.2. $(X, \|\cdot\|), f \in X^* \Rightarrow$

$$\|f\| = \sup_{\{\|x\| \leq 1\}} |f(x)| = \sup_{\{\|x\| < 1\}} |f(x)| = \sup_{\{\|x\| = 1\}} |f(x)| = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}$$

Следствие 5.3. $(X, \|\cdot\|) \Rightarrow X^* — \text{банахово}$

Доказательство. \mathbb{R} и \mathbb{C} — полные $\Rightarrow \mathcal{B}(X, \mathbb{C})$ — банахово ($\Rightarrow \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ — банахово). \square

Пример 5.8. $X = l^p, (1 \leq p \leq +\infty), i \in \mathbb{N}$ — фиксированное число

$$x \in l^p \Rightarrow x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in \mathbb{C}, f(x) := x_i \Rightarrow f \in X^*, \|f\| = 1$$

$$\begin{aligned} |f(x)| = |x_i| &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \text{ при } 1 \leq p < +\infty \text{ и} \\ &\leq \sup_n \|x_n\| = \|x\|_{\infty} \text{ при } p = +\infty \\ &\Rightarrow f \in \mathcal{B}(X, \mathbb{C}) = X^*, \|f\| \leq 1 \\ \|f\| &= \sup_{\{\|x\|=1\}} |f(x)| \geq |f(e_i)| = 1 \end{aligned}$$

Со временем мы считаем, что такое сопряженное пространство к l^p для конечных p . По секрету, это l^q , где p и q — сопряжены.

Почему всегда рассматривается компакт? Потому что на компакте функция достигает свой максимум, и иначе непонятно, как норму вводить.

Пример 5.9. $C(K) = \{f : K \rightarrow \mathbb{C} \wedge f \text{ непрерывные}\}, x_0 \in K, K$ — компакт.

$f \in C(K), G(f) := f(x_0) \Rightarrow G \in X^*, \|G\| = 1$ (функционал значения в точке, подлые ангlosаксы говорят point evaluation).

$$\begin{aligned} G &\in \text{Lin}(C(K), \mathbb{C}) \\ f \in C(K), |G(f)| &= |f(x_0)| \leq \sup_{x \in K} |f(x)| = \|f\|_{C(K)} \Rightarrow \\ G &\in X^*, \|G\| \leq 1 \\ \left\{ \begin{array}{l} \chi_K(x) = 1, \chi_K \in C(K), \|\chi_K\| = 1, \chi_K(x_0) = 1 \\ \Rightarrow \|G\| = \sup_{\{\|f\|=1\}} |G(f)| \geq |G(\chi_K)| = 1 \end{array} \right. &\Rightarrow \|G\| = 1 \end{aligned}$$

Когда-то мы опишем пространство непрерывных функций, но доказывать, почему оно так выглядит, не будем, ибо это очень сложно, и придётся просто поверить в это описание. Сейчас докажем теорему про норму интегрального оператора в $C[a, b]$. Мы ей даже когда-то нескоро воспользуемся.

Теорема 5.7. $C[a, b] = \{f|f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ непрерывная}\}$. Ядро интегрального оператора $k(s, t) \in C([a, b] \times [a, b])$, пусть $f \in C[a, b]$.

$$(\mathcal{K}f)(s) := \int_a^b k(s, t)f(t)dt \quad \text{при } s \in [a, b] \Rightarrow$$

$$\mathcal{K} \in \mathcal{B}(C[a, b]), \|\mathcal{K}\| = \max_{a \leq s \leq b} \int_a^b |k(s, t)|dt$$

Доказательство начнём с важной леммы, помогающий вычислить норму линейного функционала. Когда мы сосчитаем норму линейного функционала, то будет очень нетрудно применить это для вычисления нормы линейного оператора.

Лемма 5.1. $\varphi(t) \in C[a, b], \varphi$ — фиксирована. $f \in C[a, b], G(f) := \int_a^b f(t)\varphi(t)dt \Rightarrow G \in (C[a, b])^*, \|G\| = \int_a^b |\varphi(t)|dt$.

Доказательство леммы. Оценка сверху совершенно тривиальна. $f \in C[a, b]$

$$\begin{aligned} |G(f)| &= \left| \int_a^b f(t)\varphi(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)||\varphi(t)|dt \leq \max_{t \in [a, b]} |f(t)| \cdot \int_a^b |\varphi(t)|dt = \\ &= \|f\|_\infty \int_a^b |\varphi(t)|dt \Rightarrow \\ G &\in (C[a, b])^*, \|G\| \leq \int_a^b |\varphi(t)|dt \end{aligned}$$

Теперь оценка $\|G\|$ снизу. Сначала тривиальные замечания. Если $\varphi(t) \geq 0 \forall t \in [a, b]$, то $\chi_{[a, b]}(x) \equiv 1$

$$|G(\chi_{[a, b]})| = \left| \int_a^b \varphi(t)dt \right| = \int_a^b \varphi(t)dt$$

Если $\varphi(t) \leq 0 \forall t \in [a, b]$ — то же самое.

$$g(t) = \text{sign } \varphi(t) = \begin{cases} 1 & \varphi(t) > 0 \\ -1 & \varphi(t) < 0 \\ 0 & \varphi(t) = 0 \end{cases}$$

$G(g) = \int_a^b |\varphi(t)|dt$, но $g \notin C[a, b]$. До сих пор мы всегда находили пробную функцию, на котором достигался \sup , а здесь такого элемента

нет. Поэтому будем приближать φ непрерывными функциями с точностью до ε , вот такая идея.

Пусть $\varepsilon > 0, \varphi \in C[a, b] \Rightarrow \varphi$ — равномерно непрерывна на $[a, b] \Rightarrow$

$$\exists \delta > 0 \mid s - t \mid < \delta \Rightarrow \mid \varphi(t) - \varphi(s) \mid < \varepsilon \quad a \leq s, t \leq b$$

$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b, t_k - t_{k-1} < \delta$.

Рассмотрим $\{\Delta_j\}_{j=1}^n$. Δ_j — интервалы $[t_{k-1}, t_k]$. Нумерация будет не по порядку, как сперва может показаться, а совершенно другая, и она никак не будет зависеть от расположения на отрезке. Разобьём интервал на 2 сорта. Первый — где функция положительна или отрицательна, то есть не меняет знак. Второй — где меняет знак или обращается в 0. $\Delta_1, \dots, \Delta_r$ — те интервалы, на которых $\varphi(t) > 0, t \in \Delta_j$ или $\varphi(t) < 0, t \in \Delta_j$ ($1 \leq j \leq r$)

$\Delta_{r+1}, \dots, \Delta_n$ — те интервалы, для которых $\exists s \in \Delta_j : \varphi(s) = 0, n \geq j > r$.

$$\begin{aligned} & \text{пусть } t \in \Delta_j, j > r \Rightarrow \exists s \in \Delta_j, \varphi(s) = 0 \Rightarrow \\ & \mid \varphi(t) \mid = \mid \varphi(t) - \varphi(s) \mid < \varepsilon \Rightarrow \int_{\Delta_j} \mid \varphi(t) \mid dt < \varepsilon \mid \Delta_j \mid \\ & \Rightarrow \int_{\bigcup_{j=r+1}^n \Delta_j} \mid \varphi(t) \mid dt \leq \varepsilon \left(\sum_{j=r+1}^n \mid \Delta_j \mid \right) \leq \varepsilon(b-a) \\ & h(t) = \begin{cases} \text{sign } \varphi(t), t \in \Delta_j & 1 \leq j \leq r \\ \text{линейная на } \Delta_j & j > r \\ \text{если } [a, t_1] \in \Delta_j, j > r, \text{ то } h(a) = 0 \\ \text{если } [t_{n-1}, b] \in \Delta_j, j > r, \text{ то } h(b) = 0 \end{cases} \quad h \in C[a, b], \mid h(t) \mid \leq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \|G\| &= \sup_{\{\|f\| \leq 1\}} |G(f)| \geq |G(h)| = \left| \int_a^b h(t) \varphi(t) dt \right| = \\
 &= \left| \int_{\bigcup_{j=1}^r \Delta_j} h(t) \varphi(t) dt + \int_{\bigcup_{j=r+1}^n \Delta_j} h(t) \varphi(t) dt \right| = \\
 &= \left| \int_{\bigcup_{j=1}^r \Delta_j} |\varphi(t)| dt + \int_{\bigcup_{j=r+1}^n \Delta_j} h(t) \varphi(t) dt \right| \geq \\
 &\geq \int_{\bigcup_{j=1}^r \Delta_j} |\varphi(t)| dt - \int_{\bigcup_{j=r+1}^n \Delta_j} |h(t)| |\varphi(t)| dt \geq \\
 &\geq \int_{\bigcup_{j=1}^r \Delta_j} |\varphi(t)| dt - \int_{\bigcup_{j=r+1}^n \Delta_j} |\varphi(t)| dt = \int_a^b |\varphi(t)| dt - 2 \int_{\bigcup_{j=r+1}^n \Delta_j} |\varphi(t)| dt \geq \\
 &\geq \int_a^b |\varphi(t)| dt - 2\varepsilon(b-a) \quad \forall \varepsilon > 0
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|G\| \geq \int_a^b |\varphi(t)| dt \quad \square$$

Главной частью доказательства теоремы было доказательство теоремы. Вернёмся к теореме.

Доказательство. Оценим сначала норму оператора сверху. $(\mathcal{K}f)(s) = \int_a^b k(s, t) f(t) dt$, $f \in C[a, b]$. $M = \max_{a \leq s \leq b} \int_a^b |k(s, t)| dt$. Мы как раз хотим показать, что норма оператора будет равна M .

$$|(Kf)(s)| \leq \int_a^b |k(s, t)| |f(t)| dt \leq \|f\|_\infty \int_a^b |k(s, t)| dt \leq M \|f\|_\infty$$

$$\|\mathcal{K}f\|_\infty = \max_s |\mathcal{K}f(s)| \leq M \cdot \|f\| \quad \forall f \in C[a, b] \Rightarrow \mathcal{K} \in \mathcal{B}(C[a, b])$$

$$\|K\|_{\mathcal{B}(C[a, b])} \leq M$$

Теперь оценим $\|\mathcal{K}\|$ снизу.

$$\begin{aligned}
 g(s) &= \int_a^b |k(s, t)| dt \Rightarrow g \in C[a, b] \Rightarrow \\
 \exists s_0 \quad g(s_0) &= \max g(s) \Rightarrow g(s_0) = M
 \end{aligned}$$

применим к произвольной непрерывной функции оператор

$$f \in C[a, b], \|(\mathcal{K}f)(s)\|_\infty = \max_{a \leq s \leq b} |\mathcal{K}f(s)| \geq |(\mathcal{K}f)(s_0)| = \left| \int_a^b k(s_0, t) f(t) dt \right| = |G(f)|$$

где $\varphi(t) = K(s_0, t), G(f) = \int_a^b k(s_0, t)f(t)dt$.

$$\|K\| = \sup_{\{\|f\| \leq 1\}} \|K(f)\| \geq \sup_{\{\|f\| \leq 1\}} |G(f)| = \|G\|_{(C[a,b])^*} \stackrel{\text{лемма}}{=} \int_a^b |\varphi(t)|dt = M \Rightarrow \|K\| = M$$

□

От сопряжённых пространств мы не уходим, а наоборот, углубляемся в них.

5.4. Изоморфные линейные пространства

Определение 5.9 (изоморфность пространств). $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|)$ — **линейно изоморфны**, если $\exists A \in \mathcal{B}(X, Y), \exists A^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X)$. A — **линейный изоморфизм**

Замечание 5.1. «Изоморфность» — отношение эквивалентности на множестве нормированных пространств.

Когда можно сказать, что два пространства изоморфны?

Теорема 5.8 (критерий линейного изоморфизма). $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|), A \in \text{Lin}(X, Y), A(X) = Y$ (то есть A — сюръекция).
 A — линейный изоморфизм \Leftrightarrow пусть $0 < c_1 < C_2 < +\infty$ т.ч.
 $c_1 \|x\| \leq \|Ax\| \leq C_2 \|x\|, \forall x \in X$

Доказательство. \Rightarrow

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{B}(X, Y) &\Rightarrow \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \quad \forall x \in X, C_2 = \|A\| \\ \exists A^{-1} \mathcal{B}(Y, X) &\Rightarrow \|A^{-1}y\| \leq \|A^{-1}\| \|y\| \quad \forall y \in Y \\ \text{пусть } x \in X, y = Ax &\Rightarrow \|A^{-1}(Ax)\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|Ax\| \Rightarrow \\ &\frac{1}{\|A^{-1}\|} \cdot \|x\| \leq \|Ax\| \quad c_1 = \frac{1}{\|A^{-1}\|} \end{aligned}$$

\Leftarrow

$\|Ax\| \leq C_2 \|x\| \Rightarrow A \in \mathcal{B}(X, Y) (\|A\| \leq C_2)$. Теперь проверим, что A

— инъекция. Без неравенства снизу мы сейчас как раз выведем, что образы различных иксов различны. Пусть $Ax_1 = Ax_2 \Rightarrow A(x_1 - x_2) = 0$

$$0 = \|A(x_1 - x_2)\| \geq c \|x_1 - x_2\| \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow A \text{ — биекция}$$

$$\stackrel{\text{доказали}}{\Rightarrow} \exists A^{-1} \in \text{Lin}(Y, X)$$

$$\begin{cases} c_1 \|x\| \leq \|Ax\| \quad \forall x \in X \\ \text{пусть } y \in Y, x = A^{-1}y \end{cases} \Rightarrow$$

$$c_1 \|A^{-1}y\| \leq \|y\| \Rightarrow \|A^{-1}y\| \leq \frac{1}{c_1} \|y\| \Rightarrow A^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X) \left(\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{c_1} \right)$$

□

Раз нам предстоит потом долгий разговор про обратные операторы, сразу отметим некоторое следствия из доказательства теоремы, чтобы не возвращаться к нему потом.

Следствие 5.4 (из доказательства теоремы).

$(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|), A \in \text{Lin}(X, Y), A(X) = Y$

$$\exists A^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X) \Rightarrow \exists c > 0 : \|Ax\| \geq c \|x\| \quad \forall x \in X$$

Доказательство. Следует из доказательства теоремы. □

Часто бывает, что на одном и том же пространстве определены две различные нормы. Какие же нормы будут называться эквивалентными?

Определение 5.10. X — линейное пространство, $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ — две нормы на X . $\|\cdot\|_1$ эквивалентна $\|\cdot\|_2$, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\|_1 = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\|_2 = 0$$

По-другому можно сказать, что топологии, которые задают эти нормы, одинаковые: $\Leftrightarrow G \subset X, G$ — открытое в $(X, \|\cdot\|_1) \Leftrightarrow G$ — открытое в $(X, \|\cdot\|_2)$

Следствие 5.5. X — линейное, $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ — нормы на X . $\|\cdot\|_1$ эквивалентна $\|\cdot\|_2 \Leftrightarrow \exists 0 < c_1 < c_2 \leq +\infty$ т.ч.

$$c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2 \|x\|_1$$

хотя в определении не утверждалось, что одну норму можно оценить через другую

Доказательство. $X = (X, \|\cdot\|_1), Y = (X, \|\cdot\|_2)$ — как бы 2 разных пространства, но на одном множестве. Рассмотрим оператор $Ix = x$. Ясно, что $I \in \text{Lin}(X, Y)$, I — биекция, $I^{-1} \in \text{Lin}(Y, X)$. Что означает, что $\|\cdot\|_1$ эквивалентна $\|\cdot\|_2$? $\Leftrightarrow I, I^{-1}$ непрерывны $\Leftrightarrow I$ — линейный изоморфизм X и Y $\xLeftrightarrow{\text{т.критерий линейного изоморфизма}}$ $c_1 \|x\|_1 \leq \underbrace{\|Ix\|_2}_{\|x\|_2} \leq C_2 \|x\|_1$

□

Не очень скоро мы получим обобщение этой теоремы. Окажется, что если пространство банахово в обеих нормах, то только одно из последних неравенств влечёт другое.

Утверждение 5.2. $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|)$ — линейно изоморфны. Пусть X — банахово, тогда Y — банахово.

Доказательство.

$A : X \rightarrow Y \quad A \in \mathcal{B}(X, Y) \quad A$ — линейный изоморфизм

$A^{-1} : Y \rightarrow X \quad A^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X)$

$\{y_n\}_{n=1}^\infty$ — фундаментальная в $Y \quad x_n = A^{-1}y_n$

$\|x_n - x_m\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|y_n - y_m\| \Rightarrow \{x_n\}_{n=1}^\infty$ фундаментальная в X

теперь применяем наш, слава богу, непрерывный оператор

$$\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = Ax_0 \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = Ax_0 \Rightarrow$$

Y полное

□

5.5. Конечномерные пространства

Определение 5.11 (Размерность пространства). X — линейное пространство над \mathbb{C} или \mathbb{R} . Если $\exists n$ линейно независимых элементов в X , и $\forall (n+1)$ элементов линейно зависимы, то $\dim X = n$

Определение 5.12. Если $\forall n \in \mathbb{N} \exists n$ линейно независимых элементов, то X — **бесконечномерное**

Теорема 5.9. $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|)$ — линейные пространства над \mathbb{C} , $\dim X = \dim Y = n$.

$\Rightarrow X$ линейно изоморфно Y

Доказательство. Поскольку мы обсудили, что изоморфность — отношение эквивалентности, то можно зафиксировать

$$X = l_n^2 = \left\{ x = (x_1, \dots, x_n), x_j \in \mathbb{C}, \|x\| = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \quad \{f_j\}_{j=1}^n \text{ — базис в } Y$$

$$A : l_n^2 \rightarrow Y, A(e_j) = f_j$$

утверждается, что это и будет линейный изоморфизм

$$A \left(\sum_{j=1}^n x_j e_j \right) = \sum_{j=1}^n x_j f_j, A \in \text{Lin}(l_n^2, Y)$$

$$x \in l_n^2, x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$$

$$\|Ax\| = \left\| \sum_{j=1}^n x_j f_j \right\| \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \|f_j\| \stackrel{\text{КБШ}}{\leq} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{\|x\|_{l_n^2}} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^n \|f_j\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{:=M}$$

мы оценили норму оператора A

$$\Rightarrow \|Ax\|_Y \leq \|x\|_{l_n^2} \cdot M \Rightarrow A \in \mathcal{B}(l_n^2, Y), \|A\| \leq M$$

$g(x) := \|Ax\|$ — функция на $l_n^2 \Rightarrow g(x)$ — непрерывна на l_n^2

Теперь рассмотрим эту функцию не на всём пространстве, а на единичной сфере $S = \{x \in l_n^2, \|x\|_2 = 1\}$ — компакт в l_n^2 .

$$x \in S, g(x) > 0, g \text{ непрерывная на компакте } S \Rightarrow \\ \exists x_0 \in S, g(x_0) = \min_{x \in S} g(x), r = g(x_0), r > 0$$

$$\text{пусть } x \in l_n^2, x \neq 0 \quad \frac{x}{\|x\|} \in S \Rightarrow g\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \geq r \Rightarrow$$

$$\left\| A\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \geq r \Rightarrow \|Ax\| \geq r \|x\| \quad \forall x \in l_n^2$$

\Rightarrow — линейная изометрия

□

Следствие 5.6. $(X, \|\cdot\|), \dim X = n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

1. X — банахово
2. $K \subset X, K$ — относительно компактно $\Leftrightarrow K$ — ограничено
3. $K \subset X, K$ — компакт $\Leftrightarrow K$ — ограничено и замкнуто

Мы когда-нибудь выясним, что если в пространстве единичный шар — компакт, то это пространство конечномерное.

Доказательство. 1. l_n^2 — полное, X — линейно изоморфно l_n^2 и по утверждению из конца предыдущего параграфа $\Rightarrow l_n^2 X$ банахово

2. $A \in \mathcal{B}(l_n^2, X), A^{-1} \in \mathcal{B}(X, l_n^2), A, A^{-1}$ — непрерывны

3. аналогично 2

□

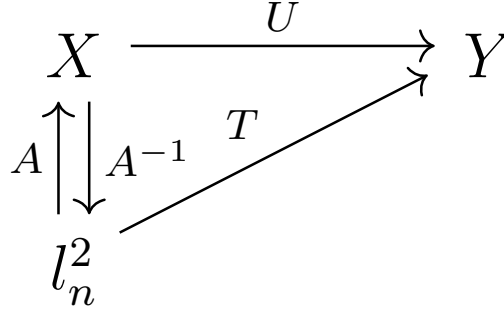
Следствие 5.7. $X, \dim X = n, n \in \mathbb{N}$, на X две нормы $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2 \Rightarrow \|\cdot\|_1$ эквивалентна $\|\cdot\|_2$

Доказательство. $(X, \|\cdot\|_1)$ линейно изоморфно $(X, \|\cdot\|_2)$.

□

Теорема 5.10. $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|), \dim X = n, n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \text{Lin}(X, Y) = \mathcal{B}(X, Y)$$



Доказательство. Рассмотрим сначала частный случай, потом сведём произвольный случай к частному. Пусть $T \in \text{Lin}(l_n^2, Y)$.

$$e_j = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_j, \dots, 0)$$

$$x \in l_n^2, x = \{x_j\}_{j=1}^n, x = \sum_{j=1}^n x_j e_j \Rightarrow Tx = \sum_{j=1}^n x_j T e_j$$

оцениваем норму простейшим образом

$$\|Tx\| \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \cdot \|T e_j\| \stackrel{\text{КБШ}}{\leq} \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\left(\sum_{j=1}^n \|T e_j\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}}_M \leq \|x\|_2 \cdot M$$

2 множитель не зависит от x , и раз получилась независимая константа, то оператор непрерывен

$$\Rightarrow T \in \mathcal{B}(l_n^2, Y), \|T\| \leq M$$

теперь произвольный случай, пусть $U \in \text{Lin}(X, Y)$, $\dim X = n$

A — линейный изоморфизм

$$T = UA \in \text{Lin}(l_n^2, Y) \stackrel{\text{доказали}}{\Rightarrow} T \in \mathcal{B}(l_n^2, Y)$$

$$\Rightarrow U = TA^{-1} \quad A, A^{-1} \text{ непрерывны} \Rightarrow U \in \mathcal{B}(X, Y)$$

□

ранее мы сформулировали следствие, и теперь скажем пару слов о доказательстве

Следствие 5.8. $(X, \|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2), \dim X = n < +\infty$

$$\Rightarrow \|\cdot\|_1 \text{ эквивалентна } \|\cdot\|_2$$

Доказательство. $(X = (X, \|\cdot\|_1)), Y = (X, \|\cdot\|_2)$

$$\begin{cases} Ix = x \Rightarrow I \in \text{Lin}(X, Y) \xrightarrow{\text{теорема}} I \in \mathcal{B}(X, Y) \\ I^{-1}x = x \quad I^{-1} : Y \rightarrow X \Rightarrow I^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X) \end{cases} \Rightarrow \|\cdot\|_1 \equiv \|\cdot\|_2$$

$$(\Leftrightarrow \exists 0 < c_1 < c_2 : c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1)$$

Если последовательность сходится в одной норме, то под действием непрерывного оператора сходится и в другой. \square

Последнее, что хочется сказать в этом параграфеЖ

Теорема 5.11. $(X, \|\cdot\|), \dim X = n < +\infty \Rightarrow$

$$X^* = \mathcal{B}(X, \mathbb{C}) \quad \dim X^* = n$$

Доказательство.

$$\mathcal{B}(X, \mathbb{C}) = \text{Lin}(X, \mathbb{C})$$

$$\text{пусть } \{e_j\}_{j=1}^n \text{ — базис } X, x \in X \Rightarrow x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$$

$$f_j(x) = x_j, f_j : X \rightarrow \mathbb{C}, f_j \in \text{Lin}(X, \mathbb{C})$$

проверим $\{f_j\}_{j=1}^n$ базис в X^*

$$f \in X^*, x = \sum_{j=1}^n x_j e_j \Rightarrow f(x) = \sum_{j=1}^n x_j f(e_j) = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j, \alpha_j = f(e_j)$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j f_j(x) \quad \forall x \in X$$

$$\Rightarrow f = \sum_{j=1}^n \alpha_j f_j$$

Проверим, что $\{f_j\}_{j=1}^n$ линейно независимы

$$\begin{aligned} \text{пусть } \sum_{j=1}^n c_j f_j = 0, \text{ то есть } 0(x) = 0 \forall x \in X \\ f_j(e_k) = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\left(\sum_{j=1}^n c_j f_j \right)}_{=0}(e_k) = c_k \Rightarrow c_k = 0, 1, \dots, n \\ \Rightarrow \{f_j\}_{j=1}^n \text{ — базис в } X^* \end{aligned}$$

□

Теперь мы расстаёмся с конечномерными пространствами.

5.6. Конечномерные подпространства

Начнём с некоторого общего определения, которое касается метрических пространств.

Определение 5.13. (X, ρ) — метрическое, $Y \subset X, x_0 \in X, \rho(x_0, Y) = \inf_{y \in Y} \rho(x_0, y)$. Если $\exists y_0 \in Y$ т.ч. $\rho(x_0, Y) = \rho(x_0, y_0)$, то y_0 — **элемент наилучшего приближения** для x_0 в Y

Возникают вопросы, существует ли он, и если да, то единственный ли? Тривиальное замечание

Замечание 5.2. Если Y компакт, то $\exists y_0 \in Y : f(y) = \rho(x_0, y), f(y)$ непрерывна на Y . $\exists y_0, f(y_0) = \min_{y \in Y} f(y)$

теперь мы имеем дело с конечномерным подпространством

Теорема 5.12. $(X, ||\cdot||)$ — нормированное, $L \subset X$. L — подпространство (в алгебраическом смысле), $\dim L = n < +\infty \Rightarrow$

1. L — замкнутое

2. $\forall x_0 \in X \exists y_0 \in L$ — элемент наилучшего приближения

1. Естественно, о компактности никакой речи быть не может, но конечномерность нам поможет. Во-первых, мы уже отмечали, что все

конечномерные пространства — полные. Ещё мы доказывали линейную изоморфность. Таким образом, L — полное. А ещё почти на первой лекции мы обсуждали, что если есть полное подмножество метрического пространства, то оно автоматически оказывается замкнутым. \square

2.

$$\text{пусть } x_0 \in X \setminus L \quad \rho(x_0, L) = d > 0 \\ \rho(x_0, L) = \inf_{y \in L} \|x_0 - y\| \Rightarrow \exists \{y_n\}_{n=1}^{\infty}, y_n \in L$$

План такой: мы докажем что последовательность ограниченная, значит, она относительно компактная, и из неё можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, а так как L замкнуто, то предел будет лежать в L . Для оценки воспользуемся неравенством треугольника

$$d < \|x_0 - y_n\| \leq d + \frac{1}{n} \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ ограничена в } L \\ \dim L < +\infty \Rightarrow \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ относительно компактна} \Rightarrow \\ \exists \{n_k\}_{k=1}^{\infty} \exists \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = y_0, L \text{ — замкнуто} \Rightarrow y_0 \in L \\ d \leq \|x_0 - y_{n_k}\| \leq d + \frac{1}{n_k} \Rightarrow \text{при } k \rightarrow \infty \|x_0 - y_0\| = d$$

\square

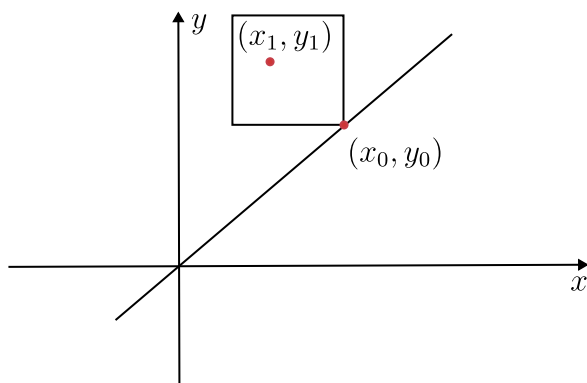
Замечание 5.3. $\dim L < +\infty$, элемент наименьшего приближения может быть не единственным.

Пример 5.10 (l_2^{∞}). $\|(x, y)\| = \max\{|x|, |y|\}$. $L = \{(x, y) : y = kx, k \neq 0\}$. (\cdot) — элемент наилучшего приближения, единственный

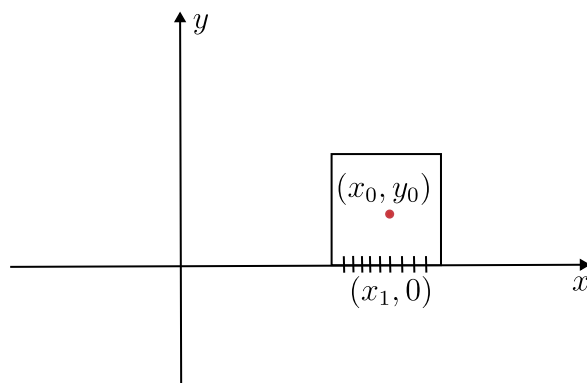
Если допустить $k = 0$, то все точки будут лежать на одном и том же расстоянии от (x_1, y_1) . $\forall x \in [x_1 - y_1, x_1 + y_1], y = 0 \forall (\cdot)$ — элемент наилучшего приближения

Пример 5.11 (l_2^1). $\|(x, y)\|_1 = |x| + |y|$, $L = \{(x, y) : y = kx, k \neq \pm 1\}$, тогда \exists единственный элемент наилучшего приближения. Если же $L = \{y = x\}$, все точки отрезка — элементы наилучшего приближения

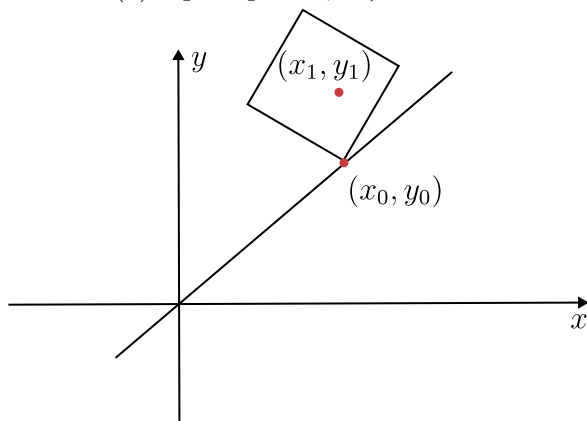
Пример 5.12 (l_2^2). $l_2^2 = \{(x, y) : \|(x, y)\|_2 = \sqrt{|x|^2 + |y|^2}\} \forall L \exists !$ элемент наилучшего приближения, при $1 < p < +\infty$ аналогично



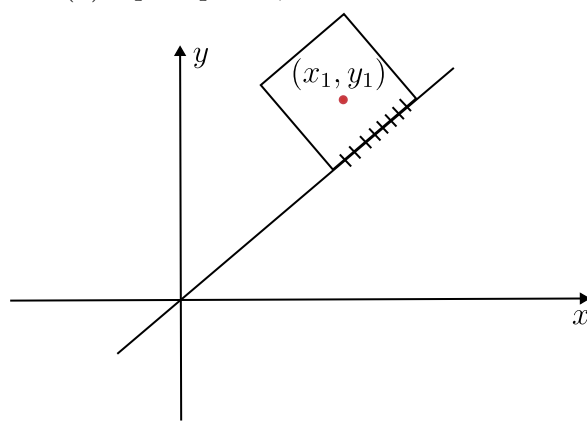
(a) Пример 5.10, $k \neq 0$



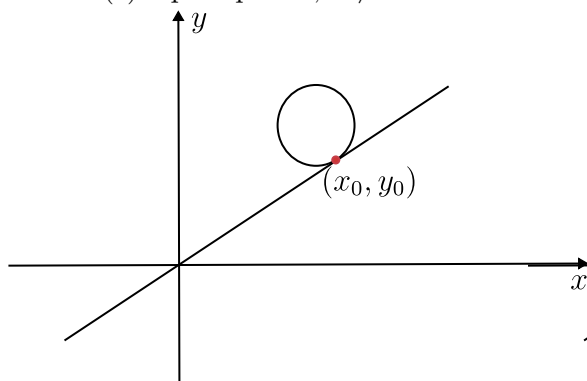
(b) Пример 5.10, $k = 0$



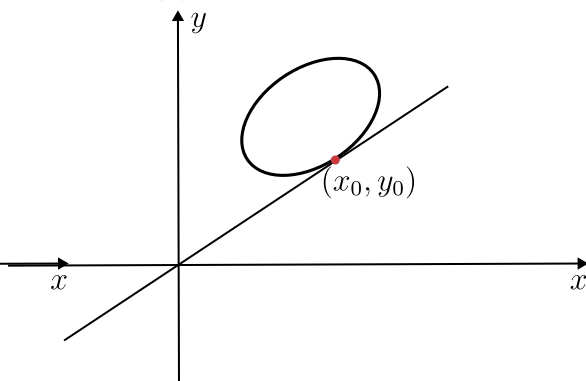
(c) Пример 5.11, $k \neq \pm 1$



(d) Пример 5.11, $k = 1$



(e) Пример 5.12, l_2^2



(f) Пример 5.12, $1 < p < +\infty$

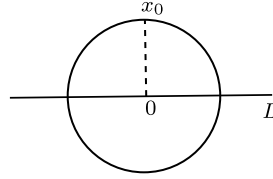


Рис. 5.2: Почти перпендикуляр

Следствие 5.9 (про многочлены). $C_{\mathbb{R}}[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}\},$

$$\mathcal{P}_n \left\{ p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, a_k \in \mathbb{R} \right\}$$

$$E_n(f) = \inf_{p \in \mathcal{P}_n} \|f - p\|_{\infty}$$

$$\Rightarrow \exists p_0 \text{ т.ч. } E_n(f) = \|f - p_0\|_{\infty}, p_0$$

носит торжественное название многочлена наилучшего приближения

Доказательство. $\dim \mathcal{P}_n = n + 1 \Rightarrow \exists p_0$ □

Замечание 5.4. $\exists!$ p_0 , так как $p_0(x) = 0$ только в n точках. В пространстве непрерывных функций единичный шар устроен совершенно кошмарно, хотя норма устроена похожим образом на l^{∞} . В шаре полно отрезков.

5.7. Конечномерность нормированного пространства с компактным единичным шаром

Лемма 5.2 (Ф.Рисс, о почти перпендикуляре). $(X, \|\cdot\|), L \subsetneq X, L$ — замкнутое подпространство, $0 < \varepsilon < 1$

$$\Rightarrow \exists x_0, \|x_0\| = 1, \rho(x_0, L) > 1 - \varepsilon$$

На рисунке 5.2 показано, причём тут «почти перпендикуляр». Хотелось, чтобы x_0 , был элемент на расстоянии 1, но 1 обеспечить нельзя, но $1 - \varepsilon$ — можно.

Доказательство.

$$z \in X \setminus L, d = \rho(z, L) = \inf_{y \in L} \|z - y\| \Rightarrow \exists y_0 \in L : d \leq \|z - y_0\| < d(1 + \varepsilon)$$

$$x_0 = \frac{z - y_0}{\|z - y_0\|}, \|x_0\| = 1$$

оценим норму разности

$$\begin{aligned} \text{пусть } y \in L \quad \|x_0 - y\| &= \left\| \frac{z - y_0}{\|z - y_0\|} - y \right\| = \frac{1}{\|z - y_0\|} \left\| \underbrace{z - y_0 - y}_{\geq d} \right\| \geq \\ &= \frac{d}{d(1 + \varepsilon)} = \frac{1}{1 + \varepsilon} \end{aligned}$$

$$\forall y \in L \Rightarrow \rho(x_0, L) \geq \frac{1}{1 + \varepsilon} > 1 - \varepsilon \quad \square$$

Замечание 5.5. Если $\exists y_0 \in L : \|z - y_0\| = d$, то $x_0 = \frac{z - y_0}{\|z - y_0\|} \Rightarrow \rho(x_0, L) = 1$

Следствие 5.10 (из замечания). $(X, \|\cdot\|), L \subsetneq X, L$ — подпространство, $\dim L < +\infty$

$$\Rightarrow \exists x_0 \in X \setminus L, \|x_0\| = 1, \rho(x_0, L) = 1$$

А это следствие нам понадобится несколько раз.

Следствие 5.11. $(X, \|\cdot\|), \{L_n\}_{n=1}^\infty, L_n$ — замкнутые подпространства. $L_n \subsetneq L_{n+1}, L_1 \neq \emptyset \Rightarrow$

$$\exists \{y_n\}_{n=1}^\infty, y_n \in L_n, \rho(y_{n+1}, L_n) \geq \frac{1}{2}, \|y_n\| = 1$$

Доказательство. пусть $y_1 \in L_1, \|y_1\| = 1, L_1 \subsetneq L_2 \xrightarrow{\text{Лемма}} \exists y_2 \in L_2, \|y_2\| = 1. \rho(y_2, L_1) \geq \frac{1}{2}$ и так далее по индукции \square

Теорема 5.13 (Ф.Рисс). $(X, \|\cdot\|), B = \{x : \|x\| < 1\}. \bar{B} = \{x : \|x\| \leq 1\}$

$$\bar{B} \text{ — компакт} \Leftrightarrow \dim X < +\infty$$

Доказательство. \Leftarrow уже доказали

\Rightarrow

пусть $\dim X = \infty \Rightarrow \exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — линейно независимы

$$L_n = \text{Lin} \{x_j\}_{j=1}^n, \dim L_n = n, L_n \subsetneq L_{n+1}$$

$$\stackrel{\text{Сл.2}}{\Rightarrow} \exists \{y_n\}_{n=1}^{\infty}, \|y_n\| = 1, \rho(y_n, L_{n-1}) > \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\|y_n - y_m\| > \frac{1}{2} \forall n, m \Rightarrow \nexists \text{ фундаментальной подпоследовательности} \Rightarrow$$

$$\nexists \{y_{n_k}\} : \exists \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} \Rightarrow \bar{B} \text{ не компакт}$$

□

Вот так нам удалось установить, что если в пространстве единичный шар — компакт, то пространство конечномерное.

Теорема 5.14 (о продолжении линейного оператора). $(X, \|\cdot\|)$ — нормированное, $(Y, \|\cdot\|)$ — банахово, $L \subset X, L$ — подпространство в алгебраическом смысле

$$\bar{L} = X, A \in \mathcal{B}(L, Y) \Rightarrow \exists! V \in \mathcal{B}(X, Y) : \|V\|_{\mathcal{B}(X, Y)} = \|A\|_{\mathcal{B}(L, Y)}$$

Доказательство. Сначала мы должны распространить оператор, то есть определить, как он будет действовать на произвольный элемент X . Пусть $x \in X$.

$$\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in L, \lim_{n \rightarrow \infty} \|x - x_n\| = 0$$

$$\{Ax_n\}_{n=1}^{\infty}, Ax_n \in Y, \{Ax_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ — фундаментальная в } Y, \|Ax_n - Ax_m\| \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$$

Раз последовательность имеет предел, то она фундаментальная. Значит мы не зря в условии требовали банаховость. Y — банахово, тогда $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n \in Y$

$$Vx := \lim_{n \rightarrow \infty} AX_n$$

надо убедиться, что определение корректно, то есть что предел не зависит от изначально выбранной последовательности:

$$\begin{aligned} \text{пусть } \{z_n\}_{n=1}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = x \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} Az_n \\ z_n \in L \quad \|Ax_n - Az_n\| \leq \|A\| \underbrace{\|x_n - z_n\|}_{\substack{\rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Az_n \end{aligned}$$

корректность проверена

$$\text{пусть } x \in L, \text{ пусть } x_n = x \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow Vx = \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = Ax \Rightarrow V|_L = A$$

$$\begin{aligned} \text{пусть } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \Rightarrow Vx = \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n \Rightarrow \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|x\| \quad \|Vx\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|A\| \cdot \|x_n\| = \|A\| \|x\| \\ \Rightarrow \|V\| \leq \|A\| \\ \|V\| = \sup_{\{x \in X: \|x\|=1\}} \|Vx\| \geq \sup_{\{x \in L: \|x\|=1\}} \|Vx\| = \|A\| \\ \Rightarrow \|V\| = \|A\| \end{aligned}$$

□

Следующая конструкция, которая ранее упоминалась, это факторпространства.

5.8. Факторпространство

Определение 5.14 (класс эквивалентности). X — линейное пространство над \mathbb{C} , Y — подпространство. $X/Y = \{\bar{x}\}_{x \in X}$

$$\begin{aligned} x \sim z \text{ если } x - z \in Y \\ \bar{x} = \{z : z = x + h, h \in Y\} \\ \bar{x} + \bar{y} = \overline{x + y} \\ \lambda \in \mathbb{C}, \lambda \bar{x} = \overline{\lambda x} \\ \varphi : X \Rightarrow X/Y \quad \varphi(x) = \bar{x} \end{aligned}$$

φ — линейное (канонический гомоморфизм).

Если пространство будет не замкнутым, то будут ненулевые элементы с нулевой нормой (те, что лежат в замыкании).

Определение 5.15. $(X, \|\cdot\|)$ — нормированное, Y — замкнутое подпространство. $X/Y = \{\bar{x}\}_{x \in X}$,

$$\|\bar{x}\| = \inf_{z \in \bar{x}} \|z\| = \inf_{y \in Y} \|x - y\| = \rho(x, Y)$$

Теорема 5.15. $(X, \|\cdot\|), Y$ — замкнутое подпространство \Rightarrow

1. $\|\bar{x}\|$ в X/Y удовлетворяет аксиомам нормы
2. $\varphi : X \rightarrow X/Y, \varphi(x) = \bar{x} \Rightarrow \varphi \in \mathcal{B}(X, X/Y), \|\varphi\| = 1$
3. Если X — банахово, то X/Y — банахово

1.

$$\lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0, x \in X$$

$$\|\lambda \bar{x}\| = \inf_{z \in \bar{x}} \|\lambda z\| = |\lambda| \inf_{z \in \bar{x}} \|z\| = |\lambda| \cdot \|\bar{x}\|$$

$$\text{пусть } \bar{x}, \bar{u} \in X/Y, z \in \bar{x}, v \in \bar{u}$$

$$\begin{aligned} \|\bar{x} + \bar{u}\| &\leq \|z + v\| \leq \|z\| + \|v\| \quad \forall z \in \bar{x}, \forall v \in \bar{u} \\ \Rightarrow \|\bar{x} + \bar{u}\| &\leq \inf_{z \in \bar{x}} \|z\| + \inf_{v \in \bar{u}} \|v\| = \|\bar{x}\| + \|\bar{u}\| \end{aligned}$$

теперь проверяем в 0, тут как раз нужна замкнутость

$$\|\bar{x}\| = 0 \quad \|\bar{x}\| = \rho(x, Y) = 0 \Rightarrow x \in Y \Rightarrow \bar{x} = Y = \bar{0}$$

□

2. $\|\varphi(x)\| = \|\bar{x}\| = \inf_{z \in \bar{x}} \|z\| \leq \|x\| \Rightarrow \varphi \in \mathcal{B}(X, X/Y), \|\varphi\| \leq 1$. По лемме о почти перпендикуляре, пусть $\varepsilon > 0 \exists x_0, \|x_0\| = 1$

$$\begin{aligned} \rho(x_0, Y) &> 1 - \varepsilon \Rightarrow \|\varphi(x_0)\| = \rho(x_0, Y) > 1 - \varepsilon \\ \Rightarrow \|\varphi\| &= \sup_{\{x: \|x\|=1\}} \|\varphi(x)\| > 1 - \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \|\varphi\| = 1 \end{aligned}$$

□

3. Воспользуемся критерием полноты: если сходится ряд из норм, то сходится и сам ряд. X/Y — полное?

$$\begin{aligned} \text{пусть } \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \|\overline{x_n}\| < +\infty & \left(\stackrel{?}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} \overline{x_n} \text{сходится в } X/Y \right) \\ \|\overline{x_n}\| = \inf_{z \in \overline{x_n}} \|z\| & \Rightarrow \exists z_n \in \overline{x_n} : \|z_n\| \leq 2 \|\overline{x_n}\| \\ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \|z_n\| < +\infty & X - \text{ банахово, и по критерию полноты } \Rightarrow \\ & \exists S = \sum_{n=1}^{\infty} z_n, s \in X \end{aligned}$$

рассмотрим частичные суммы

$$\begin{aligned} \begin{cases} S_n = \sum_{k=1}^n z_k, \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s \\ \varphi(s_n) = \sum_{k=1}^n \varphi(z_k) = \sum_{k=1}^n \overline{x_k} \end{cases} & \varphi \text{ непрерывна } \Rightarrow \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(s_n) = \varphi(s) \in X/Y & \\ \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \overline{x_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{x_k} & \Rightarrow X/Y - \text{ банахово} \end{aligned}$$

□

Часть III

Гильбертовы пространства

Глава 6

Гильбертовы пространства

6.1. Введение

Кто-то говорил, что матобесам в курсе ФА надо читать только гильбертовы пространства. Но неизвестно, как жить без трех китов функционального анализа, которые нас ждут дальше :(. А вы бы хотели 32 лекции про гильбертовы пространства?

Определение 6.1. H — линейное пространство над \mathbb{C} . Скалярное произведение $H \times H \rightarrow \mathbb{C}$, $x, y \in H$, (x, y) — скалярное произведение удовлетворяет следующим аксиомам

1. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $x, y \in H$
2. $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$
3. $(y, x) = \overline{(x, y)}$ (комплексное сопряжение)
4. $(x, x) \geq 0$, $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

если H над \mathbb{R} , то 3 выглядит как $(y, x) = (x, y)$

Снабдим H нормой: $\|x\| := \sqrt{(x, x)}$ — норма, порожденная скалярным произведением. $(H, \|\cdot\|)$ называется предгильбертовым пространством.

Если $(H, \|\cdot\|)$ полное, то H — гильбертово.

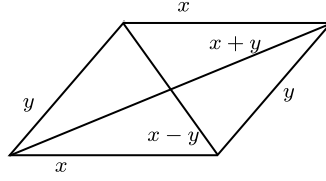


Рис. 6.1: Тождество параллелограмма

Свойство 6.1 (скалярное произведение). 1. $x, y \in H \Rightarrow |(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ (неравенство К-Б)

2. $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ удовлетворяет аксиомам нормы

3. $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ (тождество параллелограмма)

4. непрерывность (x, y) , то есть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (x, y)$

2.

$$\begin{aligned} \|x\| = 0 &\Leftrightarrow (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ \|\lambda x\|^2 &= (\lambda x, \lambda x) = \lambda \cdot \bar{\lambda} (x, x) = |\lambda|^2 \|x\|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y, x + y) = \|x\|^2 + (x, y) + (y, x) + \|y\|^2 = \\ &= \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re}(x, y) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2 \|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

□

Кто не верит в тождество параллелограмма, может проверить сам

4.

$$\begin{aligned} |(x, y) - (x_n, y_n)| &\leq |(x, y) - (x, y_n)| + |(x, y_n) - (x_n, y_n)| = \\ &= |(x, y - y_n)| + |(x - x_n, y_n)| \stackrel{\text{К-Б}}{\leq} \\ &\leq \|x\| \cdot \underbrace{\|y - y_n\|}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\|x - x_n\|}_{\rightarrow 0} \underbrace{\|y_n\|}_{\leq M} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n\| = \|y\| \Rightarrow \exists M : \|y_n\| \leq M$$

□

Пример 6.1.

$$l_n^2 = \{x : x = \{x_1, \dots, x_n\}, x_j \in \mathbb{C}\}, \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2}$$

$$(x, y) = \sum_{j=1}^n x_j \overline{y_j}, l_n^2 \text{ — гильбертово}$$

$$y = (y_1, \dots, y_n), y_j \in \mathbb{C}, \overline{y_j} \text{ — комплексное сопряжение}$$

Пример 6.2 (l^2). $l^2 = \{x : x = \{x_j\}_{j=1}^\infty, \|x\| = \sqrt{\sum_{j=1}^\infty |x_j|^2} < +\infty\}$.
 $(x, y) = \sum_{j=1}^\infty x_j \overline{y_j}$. l^2 — гильбертово

Главный пример

Пример 6.3. (X, U, μ) — пространство с мерой. $L^2(X, \mu)$,

$$\|f\| = \left(\int_X |f(x)|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty$$

$$(f, g) = \int_X f(x) \cdot \overline{g(x)} d\mu, L^2(X, \mu) \text{ — полное, } \Rightarrow \text{ гильбертово}$$

Пример 6.4 (пространство Харди). H^2 — пространство Харди

$$H^2 = \left\{ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, \|f\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 < +\infty \right\}$$

H^2 линейно изометрически изоморфно l^2 .

$$(f, g) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{b_n}, g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \Rightarrow H^2 \text{ гильбертово}$$

Отметим, где f будет аналитической

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 < +\infty &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0 \Rightarrow \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq 1 \\ &\Rightarrow R \geq 1 \end{aligned}$$

где R — радиус круга сходимости ряда $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, f \in H^2 \Rightarrow f \text{ аналитическая в } \{z : |z| < 1\}$$

Теперь примеры предгильбертовых пространств

Пример 6.5. F — финитные последовательности.

$(x, y) \in F, (x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \overline{y_j}$ (конечная сумма $F \subset l^2, \|x\| = \sqrt{\sum_{j=1}^N |x_j|^2}$), $x_{N+k} = 0, k \in \mathbb{N}$. F — предгильбертово (не полное)

Пример 6.6. $C[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}\}$

$$\|f\| = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, (f, g) = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

не полное \Rightarrow предгильбертово

Пример 6.7. $\mathcal{P} = \{p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, a_k \in \mathbb{C}, n \geq 0\}$.

$q(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k, (p, q) = \sum_{k=0}^n a_k \overline{b_k}$ предгильбертово. \mathcal{P} — линейно изометрически изоморфно $F : p(x) \rightarrow (a_0, a_1, \dots, a_n) \in F$. Пополнение \mathcal{P} по этой норме до гильбертова пространства есть l^2 .

Пример 6.8. $\mathcal{P}, \mathcal{P} \subset C[a, b]. (p, q) = \int_a^b p(x) \overline{q(x)} dx$ — предгильбертово, пополнением \mathcal{P} будет $L^2(a, b)$ по мере Лебега.

Определение 6.2. H — гильбертово,

1. $x, y \in H, (x, y) = 0$, то $x \perp y$ (x ортогонален y)
2. $M \subset H, M$ — подмножество. Ортогональным дополнением к нему будем называть

$$M^\perp = \{y \in H : (y, x) = 0 \forall x \in M\}$$

Свойство 6.2. $M \subset H$ — гильбертово $\Rightarrow M^\perp$ — замкнутое подпространство

Доказательство.

$$\begin{aligned} & y, z \in M^\perp, \lambda \in \mathbb{C}, \text{ пусть } x \in M \\ & (\lambda y + z, x) = \lambda \underbrace{(y, x)}_{=0} + \underbrace{(z, x)}_{=0} \Rightarrow \lambda y + z \in M^\perp \\ & \text{пусть } \{y_n\}_{n=1}^\infty, y_n \in M^\perp, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0, \text{ пусть } x \in M \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{(y_n, x)}_{=0} = (y_0, x) \Rightarrow (y_0, x) = 0 \Rightarrow y_0 \in M^\perp \end{aligned}$$

□

В гильбертовом пространстве всегда существует элемент наилучшего приближения, он ещё и единственный!

Теорема 6.1 (о существовании элемента наилучшего приближения в гильбертовом пространстве). H — гильбертово, $M \subset H$, M — замкнутое подпространство, $\forall x \in H \Rightarrow \exists ! z \in M : \|x - z\| = \min_{h \in M} \|x - h\| = \rho(x, M)$

Для произвольного метрического пространства мы доказывали, что если есть конечномерное подпространство, то элемент существует. Доказательство начнём с простой леммы.

Лемма 6.1. H — гильбертово, замкнутое подпространство $M \subset H$. $x \in H \setminus M$, $u, v \in M$, $d = \inf_{h \in M} \|x - h\|$

$$\Rightarrow \|u - v\|^2 \leq 2(\|u - x\|^2 + \|v - x\|^2) - 4d^2$$

Доказательство. Применим тождество параллелограмма к $(u - x)$, $(v - x)$

$$\|u - v\|^2 + \|u + v - 2x\|^2 = 2(\|u - x\|^2 + \|v - x\|^2)$$

тут 3 слагаемых из 4 участвуют в формулировке леммы, нужно оценить только второе слагаемое.

$$\|2x - u - v\| = 2 \left\| x - \frac{u + v}{2} \right\| \geq 2d$$

$$\frac{u + v}{2} \in M \Rightarrow \|u - v\|^2 \leq 2(\|u - x\|^2 + \|v - x\|^2) - 4d^2$$

□

Доказательство. Обозначим $d = \rho(x, M)$. Мы ещё не знаем, достигается ли расстояние, но знаем, что $\exists \{y_n\}_{n=1}^{\infty}, y_n \in M. \lim_{n \rightarrow \infty} \|x - y_n\| = d$. План такой: мы докажем, что последовательность фундаментальная, значит, предел лежит в M и всё доказано.

воспользуемся леммой и устремим в получившемся неравенстве n, m к ∞

$$\begin{aligned} \|y_n - y_m\|^2 &\stackrel{\text{лемма}}{\leq} 2(\underbrace{\|x - y_n\|^2}_{d^2} + \underbrace{\|x - y_m\|^2}_{d^2}) - 4d^2 \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0 \\ \Rightarrow \{y_n\}_{n=1}^\infty &\text{ — фундаментальная, } H \text{ — гильбертово} \Rightarrow \\ \exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n &= z, z \in M, \text{ т.к. } M \text{ замкнуто} \Rightarrow \\ d &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|x - y_n\| = \|x - z\| \end{aligned}$$

теперь проверим единственность

$$\text{пусть } \|x - z\| = d, \|x - u\| = d \quad z, u \in M$$

воспользуемся ещё раз леммой

$$\Rightarrow \|z - u\|^2 \leq 2(\underbrace{\|x - z\|^2}_{=d^2} + \underbrace{\|x - u\|^2}_{=d^2}) - 4d^2 = 0 \Rightarrow z = u$$

□

Теорема 6.2 (о проекции на подпространство). H — гильбертово, $M \subset H$, M — замкнутое подпространство

$$\forall x \in X \exists ! z, w : x = z + w, z \in M, w \in M^\perp$$

Этот элемент z как раз будет ближайшим элементом, который появился в предыдущей теореме.

Доказательство.

$$d := \rho(x, M) \quad \exists z \in M \quad \|x - z\| = d \quad w := x - z$$

проверим, что $w \perp M$; будем пользоваться тем, что для любой точки расстояние до M больше или равно d

$$\begin{aligned} \text{пусть } u \in M, u \neq 0 \forall t \in \mathbb{R} \quad z + tu \in M \\ d^2 \leq \|x - (z + tu)\|^2 = \|w - tu\|^2 = (w - tu, w - tu) = \underbrace{\|w\|^2}_{=d^2} - t(u, w) - t(w, u) + t^2 \|u\|^2 \Rightarrow \end{aligned}$$

так как 2 и 3 слагаемое комплексно сопряжённые

$$t \cdot 2 \operatorname{Re}(u, w) \leq t^2 \|u\|^2$$

неравенство верно для любого вещественного t

$$\left. \begin{array}{l} \text{пусть } t > 0 \Rightarrow 2 \operatorname{Re}(u, w) \leq t \|u\|^2 \quad \forall t > 0 \Rightarrow \operatorname{Re}(u, w) \leq 0 \\ \text{пусть } t < 0 \Rightarrow 2 \operatorname{Re}(u, w) \geq t \|u\|^2 \quad \forall t < 0 \Rightarrow \operatorname{Re}(u, w) \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \operatorname{Re}(u, w) = 0$$

$$\text{аналогично } \forall t \in \mathbb{R} \quad d^2 \leq \|x - (z + itu)\|^2 \Rightarrow \operatorname{Im}(u, w) = 0$$

$$\Rightarrow (u, w) = 0, \text{ то есть } w \perp M \Rightarrow w \in M^\perp$$

осталось проверить единственность

$$\begin{aligned} \text{пусть } x = z + w, x = z_1 + w_1 \quad z, z_1 \in M, w, w_1 \in M^\perp \\ \Rightarrow u = \underbrace{z - z_1}_{\in M} = \underbrace{w_1 - w}_{\in M^\perp} \Rightarrow u \perp \Rightarrow (u, u) = 0 \\ \Rightarrow u = 0 \Rightarrow z = z_1, w = w_1 \end{aligned}$$

□

Определение 6.3. H — гильбертово, X, Y — замкнутые подпространства. $H = X \oplus Y$. H — ортогональная сумма подпространств X и Y , если

1. $\forall h \in H \exists x \in X, y \in Y : h = x + y$
2. $\forall x \in X, y \in Y (x, y) = 0$

Замечание 6.1.

X, Y — подпространства в H , $X \perp Y$, то есть $\forall x \in X, \forall y \in Y (x, y) = 0 \Rightarrow X \cap Y = \{0\}$.

Доказательство. $u \in X \cap Y \Rightarrow u \perp u \Rightarrow u = 0$

□

Замечание 6.2. Если $H = X \oplus Y$, то $\forall x \in H \exists !x \in X, \exists !y \in Y$ т.ч. $h = x + y$

Доказательство. Пусть $h = x + y, h = x_1 + y_1$ $x, x_1 \in X, y, y_1 \in Y \Rightarrow$
 $\underbrace{x - x_1}_{\in X} = \underbrace{y_1 - y}_{\in Y} \xrightarrow{\text{Зам.1}} x = x_1, y = y_1$

□

- Следствие 6.1.** 1. M — замкнутое подпространство $\Rightarrow H = M \oplus M^\perp$
2. M — замкнутое подпространство $\Rightarrow (M^\perp)^\perp = M$
3. Если $H = X \oplus Y$, X, Y — замкнутые $\Rightarrow Y = X^\perp$

Определение 6.4 (оператор ортогонального проектирования). H — гильбертово, M — замкнутое подпространство. Знаем, что $\forall x \in H \exists ! z \in M, w \in M^\perp : h = z + w$

$$P_M(h) := z$$

P_M — оператор ортогонального проектирования на M .

Хоть в определении об этом нигде не сказано, но хорошо помнить, что $\|h - z\| = \min_{y \in M} \|h - y\|$. На экзамене часто пристают с вопросом, откуда же взять этот z . $w = P_{M^\perp}(h)$.

Теорема 6.3 (критерий принадлежности оператора множеству ортогональных проекторов). Теорема будет состоять из 2 частей. Первая полегче, в ней опишем простые свойства ортогонального проектора. Вторая посложнее, и в ней будет собственно критерий.

1. M — замкнутое подпространство, $P := P_M \Rightarrow$
- a) $P \in \mathcal{B}(H)$
 - b) $P^2 = P$
 - c) $(Px, y) = (x, Py), \forall x, y \in H$ (по секрету, это самосопряжённость)
2. пусть оператор P удовлетворяет свойствам 1-3 $\Rightarrow M := P(H), M$ — замкнутое, $P = P_M$

1 часть. 1. Сначала проверим, что $P_M \in \text{Lin}(H, M)$

$$h \in H \Rightarrow \exists ! z \in M, w \in M^\perp : h = z + w$$

утверждается, что $P(h) = z$

$$\alpha \in \mathbb{C} \Rightarrow \alpha h = \alpha z + \alpha w \quad \alpha z \in M, \alpha w \in M^\perp$$

по единственности разложения $\alpha z \Rightarrow$

$$P(\alpha h) = \alpha z$$

пусть $h_1 \in H \Rightarrow h_1 \in z_1 + w_1, z_1 \in M, w_1 \in M^\perp$

$$P(h_1) = z_1 \Rightarrow h + h_1 = \underbrace{(z + z_1) + (w + w_1)}_{\text{разложение единственно}} \quad z + z_1 \in M, w + w_1 \in M^\perp$$

$$\Rightarrow P(h + h_1) = z + z_1 = P(h) + P(h_1)$$

Теперь проверим непрерывность P

$$h = z + w, z \perp w \Rightarrow (h, h) = (z, z) + (w, w)$$

$$\|h\|^2 = \|z\|^2 + \|w\|^2$$

$$z = P(h) \Rightarrow \|P(h)\|^2 \leq \|h\|^2 \Rightarrow P \in \mathcal{B}(H)$$

$$\|P\| \leq 1$$

$$\text{если } M \neq \{0\}, \exists x \in M, x \neq 0 \Rightarrow Px = x \Rightarrow \|P\| \geq \frac{\|Px\|}{\|x\|} = 1$$

$$\Rightarrow \|P\| = 1$$

$$2. x \in M \Rightarrow Px = x,$$

$$\text{пусть } y = Px \Rightarrow y \in M \Rightarrow \underbrace{Py}_{=y=Px} = P(Px) \Rightarrow P^2x = Px$$

3.

$$x, y \in H, P = P_m, Q = P_{M^\perp}$$

$$x = Px + Qx, y = Py + Qy$$

$$(Px, y) = (Px, Py + Qy) = (Px, Py)$$

$$(x, Py) = (Px + Qx, Py) = (Px, Py)$$

□

2 часть. $p \in \mathcal{B}(H), M := P(H), M$ — подпространство в алгебраическом смысле. План такой: проверим, что P совпадает с ортогональным проектором на M и что он отправляет ортогональное дополнение в 0. Проверим, что если $x \in M$, то $Px = x$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{пусть } x \in M \Rightarrow \exists y \in H : Py = x \Rightarrow P(Py) = Px \\ \text{по свойству ортогонального оператора } P^2 = P \Rightarrow P(Py) = Py = x \end{array} \right\} \Rightarrow x = Px$$

Проверим теперь замкнутость M

$$\begin{aligned} \text{пусть } \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in M, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} Px_n = Px_0 \\ Px_n = x_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = Px_0 \Rightarrow x_0 = Px_0 \Rightarrow x_0 \in P(H) = M \end{aligned}$$

осталось убедиться, что оператор P отправляет в 0 ортогональное дополнение

$$\text{пусть } y \in M^{\perp}$$

$$\begin{aligned} \|Py\|^2 = (Py, Py) \stackrel{\text{самосопряжённость}}{=} (y, P(Py)) = (y, Py) \text{ т.к. } y \in M^{\perp}, Py \in M = 0 \\ \Rightarrow Py = 0 \end{aligned}$$

□

Мы знаем, что оператор совпадает на M , а ортогональное дополнение отправляет в 0

$$\begin{aligned} h \in H \Rightarrow h = z + w, z \in M, w \in M^{\perp} \\ \Rightarrow P(z + w) = z \\ P_m(z + w) = z \\ \Rightarrow P = P_m \end{aligned}$$

Следствие 6.2 (ортогональный оператор на конечномерное подпространство). H — гильбертово, подпространство $M \subset H$, $\dim M = n, n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \{e_j\}_{j=1}^n \text{ — ортонормированный базис} \\ (e_j, e_k) = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases}, x \in H, P_M(x) = \sum_{j=1}^n (x, e_j) e_j \end{aligned}$$

Доказательство. $s_n = \sum_{j=1}^n (x, e_j) e_j, s_n \in M, w := x - s_n$. Проверим, что $w \in M^{\perp}$. Для этого проверим, что он ортогонален всем e_j

$$\begin{aligned} (s_n, e_k) &= \left(\sum_{j=1}^n (x, e_j) e_j, e_k \right) = (x, e_k) \\ \Rightarrow (x - s_n, e_k) &= 0 \Rightarrow (w, e_k) = 0 \forall k, 1 \leq k \leq n \\ \Rightarrow w \perp M, \Rightarrow w &\in M^{\perp} \Rightarrow P_M(x) = s_n \end{aligned}$$

□

Следствие 6.3 (критерий полноты системы элементов в гильбертовом пространстве). H — гильбертово, $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$, $x_\alpha \in H$ (A — множество индексов)

$$\{x_\alpha\}_{\alpha \in A} \text{ — полное} \Leftrightarrow (y \perp x_\alpha \forall \alpha \in A \Rightarrow y = 0)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \{x_\alpha\}_{\alpha \in A} \text{ — полное} &\Rightarrow \overline{\mathcal{L}\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}} = H \\ L &= \overline{\mathcal{L}\{x_\alpha\}} \\ L = H &\Leftrightarrow L^\perp = \{0\} \Leftrightarrow (y \perp x_\alpha \forall \alpha \in A \Rightarrow y = 0) \end{aligned}$$

□

Несмотря на то, что доказательство тривиальное, этот критерий полноты очень полезен.

Упражнения, которое когда-то давали в качестве задачи на 5 на экзамене

Утверждение 6.1. $l^2, L = \{x = \{x_n\}_{n=1}^\infty \in l^2 : \sum_{n=1}^\infty x_n = 0\}$.
Нужно доказать, что L — плотно в l^2

Утверждение 6.2. $z \in \mathbb{C}, |z| < 1, x_z = \{1, z, z^2, \dots, z^n, \dots\} \in l^2$.
 $\{z_n\}_{n=1}^\infty, |z_n| < 1, \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ Нужно доказать, что $\{x_{z_n}\}_{n=1}^\infty$ — плотное семейство в l^2

Утверждение 6.3. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a, |a| < 1$. Нужно доказать, что $\{x_{z_n}\}_{n=1}^\infty$ — плотное семейство в l^2

То, что $|a| < 1$ — очень важно. При равенстве утверждения неверны.

Определение 6.5 (коэффициент Фурье). H — гильбертово, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированная система

$$(e_j, e_k) = 0 \text{ при } j \neq k$$

$$(e_k, e_k) = 1, \|e_k\| = 1$$

$$M_n = \{\alpha e_n | \alpha \in \mathbb{C}\}, \dim M_n = 1, P_{M_n}$$

$$x \in H, P_{M_n}(x) = (x, e_n)e_n$$

$$(x, e_n) \text{ — коэффициент Фурье}$$

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n)e_n \text{ ряд Фурье по системе } \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$$

Определение 6.6.

$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ортогональная система (ОС)

$$(e_j, e_k) = 0, j \neq k, e_n \neq 0$$

$$M_n = \{\alpha e_n : \alpha \in \mathbb{C}\}$$

$$P_{M_n}(x) = \left(x, \frac{e_n}{\|e_n\|}\right) \cdot \frac{e_n}{\|e_n\|} = \frac{(x, e_n)}{\|e_n\|^2} e_n$$

коэффициент Фурье по системе $\{e_n\}$

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(x, e_n)|}{\|e_n\|^2} e_n$$

Когда мы пишем $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, мы подразумеваем бесконечномерность пространства. Если же вы возьмёте книжку Колмогорова, то гильбертово пространство в ней по определению бесконечномерное. Однако И.В. решил убрать это условие в своём курсе, Ввдь есть теория конечномерных банаховых пространств, где переходят к пределу и получают утверждения про бесконечномерные пространства. В общем: если вам попадётся кровожадный помощник на экзамене и вы скажете, что гильбертово пространство бесконечномерное, он спросит: «С какод стати?». Если не скажете — то он скажет, что вы даже не знаете определение, и вы в любом случае получите 2.

Следствие 6.4 (неравенство Бесселя). H — гильбертово, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ — О.Н.С., $x \in H \Rightarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 \leq \|x\|^2$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} h &= \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j, \alpha_j \in \mathbb{C} \Rightarrow \\ \|h\|^2 &= \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j e_j, \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \right) = \sum_{k=1}^n |\alpha_k|^2 \\ L_n &= \mathcal{L} \{e_j\}_{j=1}^n, P_{L_n}(x) = \sum_{j=1}^n (x, e_j) e_j \\ \|P_{L_n}\| &\leq 1 \Rightarrow \|P_{L_n}(x)\|^2 \leq \|x\|^2 \Rightarrow \\ \sum_{j=1}^n |(x, e_j)|^2 &\leq \|x\|^2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \\ \sum_{j=1}^{\infty} |(x, e_j)|^2 &\leq \|x\|^2 \end{aligned}$$

□

Сейчас выясним, когда неравенство превращается в равенство, то есть когда можно узнать норму, вычислив эту сумму.

Теорема 6.4 (о разложении элемента гильбертова пространства в ряд Фурье). H — гильбертово, $x \in H$, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ — О.Н.С., тогда следующие условия равносильны

1. $x \in \overline{\mathcal{L} \{e_n\}_{n=1}^{\infty}}$
2. $x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n$
3. $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2$ (равенство Парсеваля)

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$

По виду первое утверждение куда более слабое, чем второе. В первом

можно приблизить элемент сколько угодно хорошо какими-то элементами. Во втором же есть сходимость к какому-то ряду.

$$x \in H, x \in \overline{\mathcal{L}\{e_n\}_{n=1}^{\infty}}, \text{ пусть } \varepsilon > 0$$

$$\exists y = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k, \|x - y\| < \varepsilon$$

$$L_n = \mathcal{L}\{e_k\}_{k=1}^n \Rightarrow \rho(x, L_n) < \varepsilon \quad P_{L_n}(x) = \underbrace{\sum_{j=1}^n (x, e_j) e_j}_{:= s_n}$$

$$\Rightarrow \|x - s_n\| \leq \|x - y\| < \varepsilon \quad L_n \subset L_{n+1} \Rightarrow$$

$$\|x - s_{n+1}\| \leq \|x - s_n\| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\forall m \geq n \quad \|x - s_m\| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = x$$

$$2 \Rightarrow 1 \text{ очевидно: } x = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \Rightarrow x \in \overline{\mathcal{L}\{e_j\}_{j=1}^{\infty}}$$

$$2 \Rightarrow 3$$

$$s_n = \sum_{k=1}^n (x, e_k) e_k, \quad x = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n, \text{ и по непрерывности скалярного произведения } \Rightarrow (x, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n, s_n) \Leftrightarrow$$

$$\|x\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n |(x, e_k)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2$$

$$3 \Rightarrow 2$$

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^n |(x, e_k)|^2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \|x\|^2$$

$$w_n := x - s_n, \quad w_n \perp s_n \Rightarrow \|x\|^2 = \underbrace{\|s_n\|^2}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|x\|^2} + \|w_n\|^2$$

$$\|s_n\|^2 = \sigma_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|w_n\|^2 = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|x - s_n\| = 0$$

□

Следствие 6.5. H — гильбертово, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ — полная О.Н.С \Rightarrow

$$\forall x \in H \quad x = \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k) e_k, \quad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2$$

Доказывать нечего, принадлежность линейной оболочке означает полноту.

Определение 6.7. $(X, \|\cdot\|)$ — нормированное пространство, $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ — базис (Шаудера), если

$$\forall x \in X \exists! \{\alpha_n\}_{n=1}^\infty, \alpha_n \in \mathbb{C} : x = \sum_{n=1}^\infty \alpha_n e_n$$

Пример 6.9. $l^p, 1 \leq p < +\infty, e_n = (0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_n, 0, \dots)$

$$x \in l^p, x = \{x_n\}_{n=1}^\infty = \sum_{n=1}^\infty x_n e_n, \|x - s_n\|_{l^p} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$c_0, x \in c_0, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \quad x = \sum_{n=1}^\infty x_n e_n \quad \|x - s_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Упражнение: $c = \left\{ x = \{x_n\}_{n=1}^\infty, \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \right\} \subset l^\infty$. Что тут будет базисом?

Замечание 6.3. Если в $(X, \|\cdot\|)$ есть базис, то X — сепарабельно.

Замечание 6.4 (Проблема Банаха, проблема базиса). Проблема Банаха, проблема базиса

X — нормированное сепарабельное $\stackrel{?}{\Rightarrow} \exists$ базис

Собирались товарищи во Львове в кафе и выводили эти проблемы. Обычно математики любят сидеть в тишине, вот Банах любил сидеть в кафе. Вероятно, они там не только чай гоняли. Пер Энфлю в 1973 году дал ответ на этот вопрос: нет. Он предоставил множество контр-примеров. Да и вообще он знаменит своими контр-примерами. Сейчас в Америке где-то работает.

Следствие 6.6. H — гильбертово, $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ — полная О.Н.С. $\Rightarrow \{e_n\}_{n=1}^\infty$ — базис в H

Доказательство.

$$x \in H \Rightarrow x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n$$

$$\text{проверяем единственность: пусть } x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n, \alpha_n \in \mathbb{C}$$

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = x \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (\sigma_n, e_k) = (x, e_k)$$

$$\text{пусть } n \geq k \Rightarrow (\sigma_n, e_k) = \alpha_k \Rightarrow \alpha_k = (x, e_k)$$

□

Теорема 6.5 (о существовании О.Н.Б. в сепарабельном гильбертовом пространстве). H — сепарабельное гильбертово пространство \Rightarrow

$$\exists \{e_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ — О.Н.Б.}$$

По секрету, если убрать сепарабельность, то базис будет несчётный. Какова размерность, такой и базис. Обычно, когда говорят о гильбертовом пространстве, подразумевают гильбертово сепарабельное.

Доказательство. Будем действовать в 2 этапа. Сепарабельность означает, что есть счётное всюду плотное множество, возьмём его: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. 1 этап: по индукции выберем из него линейно независимую систему так, чтобы замыкание их линейной оболочки совпадало с замыканием линейной оболочки x_n . Оно будет полным и линейно-независимым. Потом применим к нему ортогонализацию Грама-Шмидта (а он ученик Гильберта, кстати)

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{n_1-1} = 0, x_{n_1} \neq 0 \quad z_1 = x_{n_1}$$

$$L_1 = \mathcal{L}(z_1) = \{\alpha z_1 | \alpha \in \mathbb{C}\}$$

$$x_{n_1+1}, \dots, x_{n_2-1} \in L_1, x_{n_2} \notin L_1, z_2 = x_{n_2}, L_2 = \mathcal{L}(z_1, z_2)$$

$$\text{пусть выбрали } z_1, \dots, z_m$$

$$z_m = x_{n_m}, x_{n_m+1}, \dots, x_{n_{m+1}-1} \in L_m, x_{n_{m+1}} \notin L_m$$

$$z_{m+1} = x_{n_{m+1}}$$

как мы их выбираем?

$$\begin{aligned} \{z_j\}_{j=1}^{\infty} & \text{ — линейно независимы} \\ \mathcal{L}(z_j)_{j=1}^m & = \mathcal{L}\{x_k\}_{k=1}^{n_m} \quad \forall m \Rightarrow \mathcal{L}\{z_j\}_{j=1}^{\infty} = \mathcal{L}\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \\ & \Rightarrow H = \overline{\mathcal{L}\{z_n\}_{n=1}^{\infty}} \Rightarrow \{z_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ — полная} \end{aligned}$$

Процесс ортогонализации Грама-Шмидта:

$$\begin{aligned} e_1 & = \frac{z_1}{\|z_1\|}, \text{ пусть } e_1, \dots, e_{n-1} \text{ — выбрали } \mathcal{L}\{e_j\}_{j=1}^{n-1} = \mathcal{L}\{z_j\}_{j=1}^{n-1} \\ L_n & = \mathcal{L}\{z_j\}_{j=1}^n, L_n \subsetneq L_{n+1} \quad e_n = \frac{z_n - P_{L_{n-1}}(z_n)}{\|z_n - P_{L_{n-1}}(z_n)\|} = \frac{z_n - \sum_{j=1}^{n-1} (z_n, e_j) e_j}{\|z_n - P_{L_{n-1}}(z_n)\|} \Rightarrow \\ & \{e_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ — полная О.Н.С.} \Rightarrow \\ & \{e_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ — базис (Шаудера)} \end{aligned}$$

□

Теперь докажем, что все сепарабельные линейные пространства похожи друг на друга как две капли воды: не просто линейно изоморфны, а линейно изометрически изоморфно. Для конечномерных тоже верно, нужно только рассматривать пространства одинаковой размерности.

Теорема. Все сепарабельные бесконечномерные гильбертовы пространства линейно изометрически изоморфны друг другу

Доказательство. H — гильбертово сепарабельное, $\dim H = \infty$. Мы обсуждали, что линейный изоморфизм — отношение эквивалентности, отношение изометричности — тоже. Поэтому линейный изометрический изоморфизм есть отношение эквивалентности. Поэтому вместо того, чтобы брать H_1, H_2 , возьмём H и l^2 и покажем, что они линейно изометрически изоморфны.

$$\begin{aligned} & \text{пусть } \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ — О.Н.Б. в } H \\ \varphi : H & \rightarrow l^2 \quad x \in H \quad x \mapsto \{(x, f_n)\}_{n=1}^{\infty} \\ \|x\|^2 & = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, f_n)|^2 \Rightarrow \|x\|_H = \|\varphi(x)\|_{l^2} \\ \varphi \in \text{Lin}(H, l^2) & \text{ очевидно} \Rightarrow \varphi \in \mathcal{B}(H, l^2) \\ & \varphi \text{ — инъективен} \end{aligned}$$

проверим, что φ — сюръекция

$$\begin{aligned} & \text{пусть } y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^2 \\ & s_n = \sum_{k=1}^n y_k f_k, s_n \in H, \text{ пусть } m > n \\ & \|s_m - s_n\|^2 = \sum_{k=n+1}^m |y_k|^2 \xrightarrow{n, m \rightarrow 0} 0 \Rightarrow \{s_n\} \text{ — фундаментальная} \\ & \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s, s = \sum_{k=1}^{\infty} y_k f_k \Rightarrow \varphi(s) = y \end{aligned}$$

□

Замечание 6.5. Пусть $m \in \mathbb{N}$, H — гильбертово пространство, $\dim H = m \Rightarrow H$ — линейно изометрически изоморфно l_m^2 .

6.2. Пространство, сопряжённое к гильбертову

Опишем все непрерывные функционалы в гильбертовом пространстве H .

Теорема (Ф.Рисс, общий вид линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве). H — гильбертово. Опишем набор линейных функционалов: покажем, что он непрерывный. Вторая часть будет утверждать, что других нет.

1. $y \in H, y$ — фиксирован. Рассмотрим отображение

$$\begin{aligned} f_y : H &\rightarrow \mathbb{C} \quad x \mapsto (x, y) \quad \forall x \in H \\ &\Rightarrow f_y \in H^*, \|f_y\|_{H^*} = \|y\|_H \end{aligned}$$

2. $f \in H^* \Rightarrow \exists ! y \in H : f = f_y$

1 часть.

$f_y \in \text{Lin}(H, \mathbb{C})$ — очевидно из свойств скалярного произведения

$$\begin{aligned} |f_y(x)| &= |(x, y)| \stackrel{\text{К-Б}}{\leq} \|x\| \cdot \|y\| \quad \forall x \in H \\ &\Rightarrow f_y \in H^*, \|f_y\|_{H^*} \leq \|y\|_H \end{aligned}$$

проведём тривиальное отбрасывание тривиальных случаев

$$\begin{aligned}
 y = 0 &\Rightarrow f_y = 0 \quad \|f_y\| = 0 \\
 \text{пусть } y \neq 0 \quad \|f_y\| &= \sup_{x \in H, x \neq 0} \frac{|f_y(x)|}{\|x\|} \geq \frac{|f_y(y)|}{\|y\|} = \frac{(y, y)}{\|y\|} = \|y\| \\
 &\Rightarrow \|f_y\|_{H^*} = \|y\|_H
 \end{aligned}$$

□