

# Функциональный анализ

Курс Виденского И.В.

Осень 2023

# Оглавление

Оглавление	1
<b>I Метрические пространства</b>	<b>3</b>
<b>1 Введение</b>	<b>4</b>
1.1 Зачем изучать функциональный анализ . . . . .	5
<b>2 Метрические пространства</b>	<b>7</b>
2.1 Банаховы пространства . . . . .	10
2.2 Пространства ограниченных функций . . . . .	13
2.3 Пространство последовательностей с $\sup$ нормой . . . . .	15
2.4 Пространства $n$ раз непрерывно дифференцируемых функций на отрезке . . . . .	16
<b>3 Пространство суммируемых функций (Лебега <math>L^p</math>)</b>	<b>18</b>
3.1 Теория меры . . . . .	18
3.2 Классические неравенства . . . . .	20
3.3 Пространство Лебега . . . . .	23
3.4 Пространства $l_n^p, l^p$ . . . . .	26
3.5 Неполное нормированное пространство . . . . .	29
3.6 Пополнение метрического пространства . . . . .	30
3.7 Теорема о вложенных шарах . . . . .	35
3.8 Сепарабельные пространства . . . . .	37
3.9 Нигде не плотные множества . . . . .	42
3.10 Полные семейства элементов . . . . .	43
3.11 Полные и плотные множества в $L^p$ . . . . .	44
<b>4 Метрические компакты</b>	<b>51</b>
4.1 Относительно компактные множества в $C(K)$ . . . . .	58

**II Линейные операторы 65****5 Линейные операторы в линейных пространствах 66**

- 5.1 Линейные операторы в линейных пространствах . . . . . 66
- 5.2 Линейные операторы в нормированных пространствах . 69
- 5.3 Линейные функционалы . . . . . 76
- 5.4 Изоморфные линейные пространства . . . . . 81
- 5.5 Конечномерные пространства . . . . . 84
- 5.6 Конечномерные подпространства . . . . . 88
- 5.7 Конечномерность нормированного пространства с компактным единичным шаром . . . . . 91
- 5.8 Факторпространство . . . . . 94

**III Гильбертовы пространства 97****6 Гильбертовы пространства 98**

- 6.1 Введение . . . . . 98
- 6.2 Пространство, сопряжённое к гильбертову . . . . . 115
- 6.3 Классические ряды Фурье . . . . . 117

**IV Линейные функционалы 121****7 Геометрический смысл линейного функционала 122**

- 7.1 Продолжение линейного функционалов . . . . . 124

**Часть I**

**Метрические пространства**

# Глава 1

## Введение

День рождения функционального анализа — 1932 год. В этом году вышла книжка «Теория линейных операторов», автор — С. Банах. Главная цель функционального анализа — изучение линейных операторов (но не только их). Главным объектом у нас будет  $X$  — линейное топологическое пространство. Оно же линейное пространство над  $\mathbb{C}$  (или  $\mathbb{R}$ ). Есть непрерывные операции

1.  $(x, z) \rightarrow x + z \quad x, z \in X$
2.  $(\alpha, x) \rightarrow \alpha x \quad \alpha \in \mathbb{C}$

Если у нас есть топологическое пространство, то у нас есть все любимые объекты из математического анализа — пределы, непрерывность, производные, интегралы.

Пусть есть  $X, Y$  — линейные топологические пространства. Также есть линейное отображение  $A : X \rightarrow Y$

**Определение 1.1** (Линейное отображение).

$$A(\alpha x + \beta z) = \alpha Ax + \beta Az$$

Если  $\dim X < +\infty, \dim Y < +\infty$ , то это линейная алгебра.

$$A : X \rightarrow X, \dim X = n, A = A^* \Rightarrow \exists \text{ ОНБ } \{u_j\}_{j=1}^n$$

$\lambda_j$  —  $j$ -е собственное число

$$Au_j = \lambda_j u_j$$

**Теорема 1.1** (Гильберт).  $X$  — гильбертово (сепарабельное) пространство.  $A = A^*, A : X \rightarrow X \Rightarrow \exists$  ОНБ из собственных векторов.

Если  $\dim Y = 1$ , т.е.  $Y = \mathbb{C}$  (или  $\mathbb{R}$ ), то  $A : X \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $A$  — линейный функционал.

В математическом анализе мы изучаем  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . В функциональном анализе же у нас  $X$  — пространство функций,  $f \in X$

$$D(f) = f' \quad D : X \rightarrow Y$$

и здесь мы задаемся вопросами о следующих свойствах  $D(f)$

- компактность
- самосопряжённость
- непрерывность

Отцы-основатели функционального анализа:

- Ф. Гильберт (1862–1943) Гильбертовы пространства;
- С. Банах (1892–1945) Банаховы пространства;
- Ф.Рисс (1880–1956) пространства Лебега  $L^p$ .

Ну и хочется ещё упомянуть для вас, компьютер саентистов, отцов основателей кибернетики, которые оставили немалый след в функциональном анализе

- Н. Винер (1894–1964);
- Д. фон Нейман (1903–1957). Про его архитектуру, наверное, что-то слышали?

## 1.1. Зачем изучать функциональный анализ

Во-первых, он позволяет посмотреть на задачу с высокого уровня абстракции.

Рассмотрим пространство непрерывных функций  $C[a, b]$ , там введём норму  $|f| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$ . Рассмотрим пространство многочленов  $P_n = \{\sum_{k=0}^n a_k x^k, a_k \in \mathbb{R}\}$ . Существует ли такой многочлен, на котором инфимум достигается? И если да, то единственный ли он?

$$E_n(f) = \inf_{p \in P_n} \|f - p\| = \min_{p \in P_n} \|f - p\|$$

На первый вопрос ответ да, это следует из общей теоремы функционального анализа.

$$\dim P_n = n + 1 < +\infty$$

На второй же вопрос ответ тоже да, и тут функциональный анализ ни при чём. Суть в том, что у многочлена степени  $n$  не может быть больше  $n$  корней.

Ну и ещё немаловажные причины

1. язык функционального анализа — междисциплинарный язык математики;
2. его результаты применяются в математической физике, которая у нас будет в следующем семестре;
3. это интересно и важно.  $0, 1, 2 = o(3)$ ;
4. у нас будет экзамен, на котором придется говорить уже нам.

Дополнительная литература по курсу. Первая рассчитана на студентов: в некоторых местах рассказывается, как придумать доказательство, как прийти к тому, что требуется, а не в обратную сторону, как обычно. Остальные же книги поумнее.

1. А.Н.Колмогоров, С.В. Фомин «Элементы теории функций и Ф.А.»;
2. М.Рид, Б. Саймон. 1 том «методы современной физики». Тонкая (можно осилить), рассказывается также про применение ФА;
3. А.В. Канторович, Г.Г Акилов «Функциональный анализ». Похожа на энциклопедию. Но там можно найти всё;
4. К. Итосида «Функциональный анализ»;
5. У. Рудин.

## Глава 2

# Метрические пространства

Начнём с того, что все знают, надо ведь с чего-то начать. Мы будем несколько раз возвращаться к метрическим пространствам, а не изучим всё сразу. Один из полезных результатов, который мы получим, это новое описание компакта в метрических пространствах. Он будет самым рабочим. А компакт — вещь очень полезная. Компакты в гигантских пространствах напоминают компакты в  $\mathbb{R}^n$  или в  $\mathbb{C}^n$  и обладают теми же полезными свойствами.

**Определение 2.1** (Метрика).  $X$  — множество.  $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\rho$  — **метрика**, если при  $x \in X \wedge y \in X \wedge z \in X$  она обладает следующими свойствами

1.  $\rho(x, y) \geq 0 \wedge (\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y)$
2.  $\rho(y, x) = \rho(x, y)$
3.  $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$

Введём стандартное обозначение открытого шара.  $x \in X, r > 0$   
 $B_r(x) = \{y \in X : \rho(x, y) < r\}$  — шар с радиусом  $r$ .  $\{B_r(x)\}_{r>0}$  — база окрестности в точке  $x$ .

$G$  — открытое, если  $\forall x \in G \exists r > 0 B_r(x) \subset G$ .

$F$  — замкнутое  $\Leftrightarrow F \subset X \wedge X \setminus F$  — открытое.

В метрическом пространстве удобно характеризовать замкнутое множества с помощью последовательностей. Вспомним, что такое сходящаяся последовательность.

$\{x_n\}_{n=1}^\infty$  — последовательность  $\wedge \forall n \in \mathbb{N} x_n \in X \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Leftrightarrow$   
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x_0) = 0$



$(X, \rho)$  — метрическое пространство  $\Rightarrow (F$  — замкнутое  $\Leftrightarrow \{x_n\}_{n=1}^\infty$  — последовательность  $\wedge \forall n \in \mathbb{N} x_n \in F \wedge (\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow x_0 \in F))$

**Определение 2.2** (Фундаментальная последовательность).  
 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  — фундаментальная  $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N} ((n > N \wedge m > N) \Rightarrow \rho(x_n, x_m) < \varepsilon) \Leftrightarrow \lim_{n, m \rightarrow \infty} \rho(x_n, x_m) = 0$

**Замечание 2.1.**  $\exists x_0 \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \{x_n\}_{n=1}^\infty$  — фундаментальная

**Определение 2.3** (Полное метрическое пространство).  
 $(X, \rho)$  — полное, если все фундаментальные последовательности имеют предел, лежащий в  $X$

Почему хорошо жить в полном метрическом пространстве?

**Замечание 2.2** (о пользе полноты).  $F : X \rightarrow \mathbb{R}, (X, \rho)$  — метрическое пространство,  $F$  — непрерывная.

Стоит задача найти  $x_0 \in X$  т.ч.  $F(x_0) = 0$   
 Алгоритм:  $\{x_n\}_{n=1}^\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = 0, \lim_{n, m \rightarrow \infty} \rho(x_n, x_m) = 0$  Если  $(X, \rho)$  — полное, то  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, F(x_0) = 0$  А если нет, то из наших вычислений вообще ничего не следует, возможно, решения вообще нет.

**Пример 2.1.**  $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$  — полные.

**Пример 2.2.**  $\mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$  — неполное.

**Пример 2.3.**  $\mathbb{Q}$  — неполное.

Потом приведем примеры поинтереснее. Кстати, древние греки пришли в ужас, когда узнали, что  $\mathbb{Q}$  — неполное.

**Определение 2.4.**  $(X, \rho)$  — метрическое пространство,  $A \subset X, A$  — ограниченное, если

$$\exists R > 0 \exists x_0 \in X A \subset B_R(x_0)$$

**Теорема 2.1** (Свойства фундаментальных последовательностей).  $(X, \rho)$  — метрическое пространство,  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  — фундаментальная последовательность, тогда выполняется:

1.  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  — ограниченная, т.е.  $\exists R > 0 \exists x_0 \in X \forall n \in \mathbb{N} x_n \in B_R(x_0)$
2.  $\exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$  — подпоследовательность  $\Rightarrow (\exists a \in X \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a \Rightarrow \exists a \in X \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k})$
3.  $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^\infty$  — произвольная последовательность действительных чисел  $\wedge \forall k \in \mathbb{N} \varepsilon_k > 0 \Rightarrow \exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$  — подпоследовательность  $\forall j \in \mathbb{N} (j > k \Rightarrow \rho(x_{n_k}, x_{n_j}) < \varepsilon_k)$

*1 утверждение.* Возьмём  $\varepsilon = 1$ , тогда из фундаментальности  $\exists N \forall n \in \mathbb{N} (n > N \Rightarrow \rho(x_n, x_N) < 1)$ .

Возьмём  $R = \max\{\rho(x_1, x_N), \dots, \rho(x_{N-1}, x_N)\} + 1$ . Единичка на всякий случай.

Тогда  $\forall n \in \mathbb{N} x_n \in B_R(x_N)$ . □

*2 утверждение.* Возьмём  $\varepsilon > 0$ , тогда по фундаментальности  $\exists N \forall n \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N} ((n > N \wedge m > N) \Rightarrow \rho(x_n, x_m) < \varepsilon)$ . Возьмём это  $N$ .

$\exists a \lim x_{n_k} = a \Rightarrow \exists n_k (\rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon \wedge n_k > N)$ . Возьмём это  $n_k$ .

Возьмём некоторое  $m > N$ . Тогда  $\rho(x_m, a) < \rho(x_m, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, a) < 2\varepsilon$  □

*3 утверждение.* Докажем по индукции:

$\varepsilon_1 : \exists n_1 \forall n \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N} ((n > n_1 \wedge m > n) \Rightarrow \rho(x_m, x_n) < \varepsilon_1)$ . Выберем  $n_1$ , тогда  $\forall m \in \mathbb{N} (m > n_1 \Rightarrow \rho(x_m, x_{n_1}) < \varepsilon_1)$ .

$\varepsilon_k$  : по индукции выбрали  $n_1, \dots, n_{k-1}$ ,  $k \geq 2$ .  $\forall j \in (1 \dots k-1) \forall m \in \mathbb{N} (m > n_j \Rightarrow \rho(x_m, x_{n_j}) < \varepsilon_j)$ . Из фундаментальности исходной последовательности  $\exists n_k (n_k > n_{k-1} \wedge \forall m \in \mathbb{N} (m > n_k \Rightarrow \rho(x_m, x_{n_k}) < \varepsilon_k))$  □

**Следствие 2.1.**  $(X, \rho)$ ,  $\{x_n\}$  — фундаментальная последовательность, тогда

$$\exists \{x_{n_k}\} \text{ т.ч. } \sum_{k=1}^{\infty} \rho(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < +\infty$$

*Доказательство.* По 3 свойству при  $\varepsilon_k = \frac{1}{2^k}$ .  $\square$

**Теорема 2.2** (О замкнутом подмножестве).  $(X, \rho)$  — метрическое пространство, тогда

1.  $(X, \rho)$  — полное,  $Y \subseteq X$ ,  $Y$  — замкнутое  $\Rightarrow (Y, \rho)$  — полное
2.  $Y \subseteq X$ ,  $(Y, \rho)$  — полное  $\Rightarrow Y$  — замкнутое

*1 утверждение.* Доказательство следует прямо из определения. Значим, что  $Y$  — замкнутое подмножество полного пространства. Берем фундаментальную последовательность.  $Y \subset X$ , пусть  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \forall n \in \mathbb{N} x_n \in Y$  — фундаментальная.  $\forall n \in \mathbb{N} x_n \in X, X$  — полное  $\Rightarrow \exists x_0 \in X \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ .  $Y$  — замкнутое, значит  $x_0 \in Y \Rightarrow (Y, \rho)$  — полное.  $\square$

*2 утверждение.* Второй пункт не труднее первого. Пусть  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  — произвольная фундаментальная последовательность в  $Y$ .

$Y$  — полное  $\Rightarrow \exists x_0 \in Y \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow Y$  — замкнутое из-за произвольности последовательности.  $\square$

## 2.1. Банаховы пространства

Сначала введём понятие полунормы.

**Определение 2.5** (полунорма). Пусть  $X$  — линейное пространство над  $\mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ . Отображение  $p : X \rightarrow \mathbb{R}$  называется полунормой, если при  $x \in X \wedge y \in X \wedge (\lambda \in \mathbb{R} \vee \lambda \in \mathbb{C})$

1.  $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$  (полуаддитивность)
2.  $p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$

**Свойство 2.1.**  $p$  — полунорма  $\Rightarrow$

$$\forall x \in X p(x) \geq 0 \wedge p(0) = 0$$

*Доказательство.*  $p(0) = p(0 \cdot 0) = 0 \cdot p(0) = 0$ . Пусть  $x \in X \Rightarrow 0 = x + (-x) \Rightarrow p(0) \leq p(x) + \underbrace{p(-x)}_{p(x)} = 2p(x) \Rightarrow p(x) \geq 0$   $\square$

**Определение 2.6** (Норма).  $X$  — линейное пространство,  $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ .  $p$  — норма  $\Leftrightarrow (p \text{ — полунорма} \wedge (p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0))$ . Будем обозначать  $\|x\| := p(x)$ .

$(X, \|\cdot\|)$  будем обозначать нормированное пространство. и при  $(x \in X \wedge y \in X)$   $\rho(x, y) := \|x - y\|$ . Тогда  $(X, \|\cdot\|)$  — метрическое пространство.

**Определение 2.7** (банахово пространство).  $(X, \|\cdot\|)$  — банахово, если оно полное

Еще пару определений перед критерием банахова пространства.

**Определение 2.8** (подпространство в алгебраическом смысле).  $X$  — линейное пространство,  $L \subset X$ .  $L$  — подпространство в алгебраическом смысле  $\Leftrightarrow \forall x \in L \forall y \in L \forall \alpha \in K \forall \beta \in K \alpha x + \beta y \in L$ .

**Определение 2.9** (подпространство).  $(X, \|\cdot\|)$ ,  $L \subset X$ ,  $L$  — подпространство, если

- $L$  подпространство в алгебраическом смысле
- $L = \bar{L}$  ( $\bar{L}$  — замыкание)

Теперь нам потребуется сходимость рядов. Для того, чтобы говорить о сходимости, нужна топология.

**Определение 2.10** (Сходимость).

$$(X, \|\cdot\|) \quad \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \quad S_n = \sum_{k=1}^n x_k$$

$\sum_{k=1}^{\infty} x_k$  (\*), (\*) сходится, если  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \in X$

(\*) сходится абсолютно, если  $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$  сходится

В  $\mathbb{R}^n$  (или в  $\mathbb{C}^n$ ) если у нас была абсолютная сходимость, то была и обычная, но вообще говоря, это не так.

**Теорема 2.3** (Критерий полноты нормированного пространства (банаховости)).  $(X, \|\cdot\|)$  - полное  $\Leftrightarrow$  из абсолютной сходимости ряда следует сходимость ряда.

*Доказательство.* Предположим, что наше пространство полное ( $\Rightarrow$ ).  $(X, \rho)$  — полное,  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$  — последовательность, при этом

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| \text{ сходится} \quad (**)$$

Цель такая: последовательность  $S_n$  — фундаментальная. Сейчас применим критерий Коши к ряду (\*\*). Это ряд из чисел, так что всё в порядке. Пусть  $\varepsilon > 0$ . По критерию Коши  $\exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \forall p \in \mathbb{N} (n > N \Rightarrow \sum_{k=n+1}^{n+p} \|x_k\| < \varepsilon)$ .  
 $S_n = \sum_{k=1}^n x_k$ .

$$\begin{aligned} \|S_{n+p} - S_n\| &= \left\| \sum_{k=1}^p x_{n+k} \right\| \leq \sum_{k=1}^p \|x_{n+k}\| = \sum_{k=n+1}^{n+p} \|x_k\| < \varepsilon \\ \Rightarrow \{S_n\}_{n=1}^{\infty} &\text{ — фундаментальная, } (X, \rho) \text{ — полное} \\ \Rightarrow \exists S \in X \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= S \\ &\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} x_k \text{ сходится} \end{aligned}$$

Мы так запаслись номерами, чтобы выражение было меньше  $\varepsilon$ .

Теперь ( $\Leftarrow$ ). У нас кроме определения ничего нет. Возьмём какую-то фундаментальную последовательность. Откуда взять предел? Есть соотношения между элементами последовательности. Возьмём подпоследовательность, ведь у нас есть следствие 2.1! Из свойств фундаментальных последовательностей, мы знаем, что

$$\begin{aligned} \exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \text{ — подпоследовательность } \|x_{n_1}\| + \sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| &\text{ сходится} \\ \Rightarrow \text{последовательность } x_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) &\text{ сходится} \end{aligned}$$

Но её последовательность частичных сумм — это в точности оригинальная подпоследовательность:

$$S_m = x_{n_1} + \sum_{k=1}^{m-1} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) = x_{n_m} \Rightarrow \exists S \in X \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = S$$

Далее из части 2 Теоремы 2.1

$$\exists S \in X \lim_{m \rightarrow \infty} x_{n_m} = S \Rightarrow \exists S \in X \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = S$$

□

## 2.2. Пространства ограниченных функций

**Определение 2.11.** Пусть  $A$  — произвольное множество. Стандартное обозначение  $m(A)$  — множество всех ограниченных функций из него в комплексные (или только в действительные, не важно) числа

$$m(A) = \{f | f : A \rightarrow \mathbb{C} \wedge \sup_{x \in A} |f(x)| < +\infty\}$$

$$f \in m(A) \Rightarrow \|f\|_\infty = \sup_{x \in A} |f(x)|.$$

**Теорема 2.4.**  $(m(A), \|\cdot\|_\infty)$  — банахово пространство

*Доказательство.* Нужно проверить две вещи. Во-первых, что  $\|\cdot\|_\infty$  удовлетворяет аксиомам нормы. А во-вторых, что пространство с таким определением является полным. Просто по определению, никаких хитрых критериев — возьмём фундаментальную подпоследовательность и покажем, что у нее есть предел.

Проверяем, что  $\|\cdot\|_\infty$  удовлетворяет аксиомам нормы.

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \|\lambda f\|_\infty = \sup_{x \in A} |\lambda| \cdot \|f(x)\| = |\lambda| \cdot \sup_{x \in A} \|f(x)\| = |\lambda| \cdot \|f\|_\infty$$

Нужно проверить неравенство треугольника.

$$\begin{aligned} \forall f \in m(A) \forall g \in m(A) \forall x \in A |f(x) + g(x)| &\leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \\ \Rightarrow \forall f \in m(A) \forall g \in m(A) \|f + g\|_\infty &= \sup_{x \in A} |f(x) + g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \end{aligned}$$

Следующая аксиома нормы:

$$\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \forall x \in A f(x) = 0 \text{ т.е. } f \text{ — нулевая функция}$$

Теперь мы проверили аксиомы нормы. Доказываем полноту.  $\{f_n\}_{n=0}^\infty$  — фундаментальная в  $m(A)$ .

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (m > N \wedge n > N) \Rightarrow \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon \text{ т.е. } \sup_{x \in A} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Первый вопрос: откуда взять претендента на роль предела? Еще желательно, чтобы он был единственный. Берём  $\varepsilon, N$  из формулы выше, фиксируем  $x$ . Если для супремума есть неравенство, то и для  $x$  тем более.  $\forall x \in A ((n > N \wedge m > N) \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon) \Rightarrow \{f_n(x)\}_{n=0}^\infty$  — фундаментальная последовательность чисел в  $\mathbb{C}$ .

$$\Rightarrow \forall x \in A \exists L \in \mathbb{C} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = L$$

$$\text{Определим } f := (x \in A \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x))$$

$$\begin{aligned} (n > N \wedge m > N \Rightarrow \forall x \in A |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon) & \quad \text{пусть } m \rightarrow \infty \\ \Rightarrow (n > N \Rightarrow \forall x \in A |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon) \\ \Rightarrow (n > N \Rightarrow \|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon) \end{aligned}$$

Последнее соображение, которое нужно добавить, это то, что  $f$  — элемент  $A$ . Для  $n > N$  можем записать  $f$  как  $f = (f - f_n) + f_n$ ,  $f_n \in m(A)$ ,  $f - f_n \in m(A)$ .

$$\Rightarrow \|f\|_\infty = \|(f - f_n) + f_n\|_\infty \leq \|f - f_n\|_\infty + \|f_n\|_\infty < +\infty \Rightarrow f \in m(A)$$

□

Давайте заметим, что у нас получилось определение равномерной непрерывности из математического анализа.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f \in m(A) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| = 0 \Leftrightarrow f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{x \in A} f$$

**Определение 2.12** (Топологический компакт). Множество  $K$  — топологический компакт, если оно обладает следующими свойствами

1.  $(\forall \alpha \in A \ G_\alpha \text{ — открытое множество } \wedge K \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \Rightarrow \exists \{\alpha_j\}_{j=1}^n \text{ — конечная подпоследовательность } K \subseteq \bigcup_{j=1}^n G_{\alpha_j})$
2. Хаусдорфовость  $\forall x \in K \forall y \in K (x \neq y \Rightarrow \exists U \exists V (U \text{ — открытое множество } \wedge V \text{ — открытое множество } \wedge x \in U \wedge y \in V \wedge U \cap V = \emptyset))$

**Определение 2.13.**  $C(K) = \{f | f : K \rightarrow \mathbb{R} \wedge f \text{ непрерывна}\}$

$$\|f\|_{C(K)} = \|f\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)| = \max_{x \in K} |f(x)|$$

**Следствие 2.2.**  $K$  — топологический компакт  $\Rightarrow C(K)$  — банахово

*Доказательство.*  $C(K) \subset m(K)$ .  $C(K)$  — подпространство в алгебраическом смысле. Проверим, что  $C(K)$  — замкнуто в  $m(K)$

$$\{f_n\}, f_n \in C(K), \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f_n \xrightarrow{K, n \rightarrow \infty} f \Rightarrow f \in C(K) \Rightarrow C(K)$$

тогда  $m(K)$  — полное и  $C(K)$  — полное. □

## 2.3. Пространство последовательностей с $\sup$ нормой

**Определение 2.14.**  $\mathbb{C}^n, n \in \mathbb{N}, l_n = \{x^\infty = (x_1, \dots, x_n), x_j \in \mathbb{C}\}$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$$

$A = \{1, 2, \dots, n\}, l_n^\infty = m(A) \Rightarrow l_n^\infty$  — полное Удобно думать, что последовательность — это функция на множестве натуральных чисел.



**Определение 2.15** ( $l^\infty$ ).

$$l^\infty = \{X = \{x_j\}_{j=1}^\infty, \sup_{j \in \mathbb{N}} |x_j| < +\infty\}$$

$$\|x\|_\infty = \sup_{j \in \mathbb{N}} |x_j| \quad A = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$$

$$X = \{x\}_{j=1}^\infty \in m(A), f(j) = x_j$$

$$l^\infty := m(\mathbb{N}) \Rightarrow l^\infty \text{ — полное}$$

**Определение 2.16.**

$$c = \{X = \{x\}_{j=1}^\infty, x_j \in \mathbb{C} \mid \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0\}$$

$$c \subset l^\infty, \|x\| = \|x\|_\infty = \sup \|X\|$$

$$c_0 = \{x = \{x\}_{j=1}^\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} x_j = 0\}, c_0 \subset c \subset l^\infty$$

$c, c_0$  — замкнутые подпространства в  $l^\infty \Rightarrow c, c_0$  — банаховы.

## 2.4. Пространства $n$ раз непрерывно дифференцируемых функций на отрезке

**Определение 2.17** (норма  $n$  производной).

$$n \in \mathbb{N} \quad C^{(n)}[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists f^{(n)} \in C[a, b]\}$$

$$\|f\|_{(n)} = \max_{0 \leq k \leq n} \|f^{(k)}\|, f^0 = f$$

**Теорема 2.5.** В  $C^{(n)}[a, b]$  — банахово.

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \{f_m\}_{m=1}^{\infty} & \text{ — фундаментальная последовательность в } C^{(n)}[a, b] \\ \varepsilon > 0 \exists N : (m > n \wedge q > n) & \Rightarrow \|f_m - f_q\|_{C^{(n)}} < \varepsilon \Rightarrow \|f_m^{(k)} - f_q^{(k)}\|_{\infty} < \varepsilon \\ & k = 0, 1, \dots, n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{f_m^{(k)}\} & \text{ — фундаментальная в полном пространстве } C[a, b] \\ & \Rightarrow \exists \varphi_k \in C[a, b], f_n^{(k)} \underset{[a, b]}{\rightrightarrows} \varphi_k, k = 0, 1, \dots, n \end{aligned}$$

$$\overset{\text{Анализ}}{\Rightarrow} (f_k^{(n)} \underset{[a, b]}{\rightrightarrows} \varphi_0 \wedge \varphi_k^0 \underset{[a, b]}{\rightrightarrows} \varphi_1) \Rightarrow \varphi_1 = \varphi'_0, \varphi_2 = \varphi''_0, \dots, \varphi_n = \varphi_0^{(n)} \quad (2.1)$$

□

## Глава 3

# Пространство суммируемых функций (Лебега $L^p$ )

Сейчас будет небольшой экскурс в теорию меры, которая была на математическом анализе. Мы ничего доказывать не будем и поверим, что все утверждения верны и в общем случае.

### 3.1. Теория меры

**Определение 3.1** (Мера).  $(X, U, \mu)$  — пространство с мерой.  $X$  — множество,  $U$  —  $\sigma$ -алгебра подмножества  $X$

1.  $\emptyset \in U$
2.  $A \in U \Rightarrow X - A \in U$
3.  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}, A_n \in U, A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow A \in U$

$$\mu : U \rightarrow [0, +\infty]$$

— мера, если

1.  $\mu(\emptyset) = 0$
2.  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, A_n \cap A_m = \emptyset, n \neq m, A_n \in U \Rightarrow \mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$  (счетная аддитивность)

Предположения:

1.  $\mu$  — полная мера, то есть  $A \in U, \mu(A) = 0 \Rightarrow (\forall B \subset A \Rightarrow B \in U, (\Rightarrow \mu B) = 0)$

2.  $\mu$  —  $\sigma$ -конечна, то есть  $X = \cup_{j=1}^{\infty} X_j, \mu(X_j) < +\infty$

Пока можем думать, что речь идет о мере Лебега. Потом приведём другие примеры. В теории пространств будем считать, что функция действует из  $X$  в  $\mathbb{R}$  или в  $\mathbb{C}$  (не особо важно).

**Определение 3.2** (Измеримая функция).  $f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ .  $f$  — измерима, если

$$\forall c \in \mathbb{R}, x \underbrace{\{x : c < f(x)\}}_{\text{измеримое множество}} \in U$$

$$f : X \rightarrow \mathbb{C} \Rightarrow f = u + iv, u, v : X \rightarrow \mathbb{R}$$

$f$  — измерима, если  $u, v$  — измеримы

Как же определяется интеграл? Пусть есть какой-то элемент  $\sigma$ -алгебры  $e \in U$ ,  $\chi_e(x) = \begin{cases} 1, x \in E \\ 0, x \notin e \end{cases}$ . Множество простых функций определяется как

$$S = \{g(x) = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{e_k}, c_k \in \mathbb{C}, e_k \in U\}$$

$$g \in S, \int_X g(x) d\mu = \sum_{k=1}^n c_k \mu e_k.$$

$f(x)$  — измеримая, если  $f(x) \geq e, x \in X$

**Определение 3.3** (Произвольно измеримая функция).

$$\int_X f d\mu = \sup \left\{ \int_X g(x) d\mu : 0 \leq g(x) \leq f(x), x \in X, c_k \in \mathbb{R}, c_k > 0 \right\}$$

**Определение 3.4** (Измеримая функция).  $f$  — измерима, если

$$f_+(x) = \max(f(x), 0) \wedge f_-(x) = \max(-f(x), 0) \Rightarrow f = f_+ - f_-$$

Если  $\int_X f_+ d\mu$  — конечен или  $\int_X f_- d\mu$  — конечен, то  $\int_X f d\mu = \int_X f_+ d\mu - \int_X f_- d\mu$  Если  $f$  — измеримая,  $f : X \rightarrow \mathbb{C} \Rightarrow f = u + iv$

$$\int_X f d\mu = \int_X u d\mu + i \int_X v d\mu$$

**Определение 3.5** (Множество суммируемых функций).

$L(X, \mu)$  — множество суммируемых функций =

$$\left\{ f_i : \int_X |f| d\mu < +\infty \right\}, |f| = f_+ + f_-$$

Прежде чем двигаться дальше, приведем примры других мер (кроме мер Лебега)

**Пример 3.1.**  $E \subset \mathbb{R}^n$ ,  $E$  — измерима по Лебегу,  $\lambda$  — мера Лебега,  $w(x) \geq 0, x \in E$ ,  $w$  — измерима по Лебегу.

$e \subset E$ ,  $e$  — измеримо по Лебегу.  $\mu e = \int_e w(x) d\lambda$ ,  $w(x)$  — плотность меры  $\mu$ ,  $w(x)$  — её вес.

Вторая мера в каком-то смысле противоположная. Она сосредоточена на наборе точек и называется дискретной.

**Пример 3.2.**  $X$  — множество ( $X \neq \emptyset$ ),  $a \in X$

$$\sigma_n, e \subset X, \sigma_a(e) = \begin{cases} 1, a \in E \\ 0, a \notin e \end{cases}$$

$\forall e, e \subset X, e$  — измеримо

**Пример 3.3** (Дискретная мера).  $X$  — бесконечное множество.  $\{a_j\}_{j=1}^\infty, a_j \in X, a_j \neq a_k, j \neq k$

$$\{h_j\}_{j=1}^\infty, h_j > 0$$

$$\mu = \sum_{j=1}^\infty h_j \delta_{a_j}, e \subset X \quad \mu E = \sum_{\{j: a_j \in E\}} h_j$$

План такой: хотим ввести норму на множестве интегрируемых функций. Для этого нам надо ввести некоторые неравенства.

## 3.2. Классические неравенства

**Теорема 3.1** (Неравенство Юнга).  $p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  ( $q$  — сопряженный показатель)

$$\Rightarrow ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^p}{q}$$

*Доказательство.* Пусть  $b$  — фиксировано,  $\varphi(x) = \frac{x^p}{p} - xb, x \in [0, +\infty)$ . Хотим найти  $\min_{x \in [0, +\infty)} \varphi(x)$ . Для этого посмотрим, где производная обращается в 0.  $\varphi'(x) = x^{p-1} - b, \varphi'(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 = b^{\frac{1}{p-1}} \Rightarrow \varphi(x) > \varphi(x_0) \forall x \neq x_0, x \geq 0$ . Таким образом,  $x_0$  — строгий локальный минимум.

$$\begin{aligned}\varphi(x_0) &= \frac{1}{p} b^{\frac{p}{p-1}} - b^{\frac{p}{p-1}} = b^{\frac{p}{p-1}} \left( \frac{1}{p} - 1 \right) = \frac{b^q}{q} \\ -\frac{1}{q} &= \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p} \Rightarrow q = \frac{p}{p-1} \\ \varphi(x) &\geq -\frac{b^q}{q} \forall x \in [0, +\infty) \text{ то есть ОК}\end{aligned}$$

$$\varphi(x_0) = \frac{1}{p} b^{\frac{p}{p-1}} - b^{\frac{p}{p-1}} = b^{\frac{p}{p-1}} \left( \frac{1}{p} - 1 \right) = \frac{b^q}{q}$$

□

**Замечание 3.1.** Равенство в неравенстве Юнга достигается только при  $a = b^{\frac{1}{p-1}}$

**Теорема 3.2** (Неравенство Гельдера).  $(X, U, \mu)$  — пространство с мерой.  $f, g$  — измеримые,  $p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow$

$$\int_X |fg| d\mu \leq \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \int_X |g|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \quad (*)$$

Если  $p = q = 2$ , то это «Неравенство Коши-Бунаковского-Шварца», или на молодёжном математическом сленге неравенство КБШ

*Доказательство.* Для начала отбросим какие-то простые случаи.

$A = \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, B = \left( \int_X |g|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$ . Если  $A = 0 \Leftrightarrow |f| = 0$  почти всюду по  $\mu \Leftrightarrow f(x) = 0$  почти всюду по  $\mu$  (то есть  $\mu\{x : f(x) \neq 0\} = 0$ ) На всякий случай поясним, почему функция равна 0 почти всюду по мере  $\mu$

$$\int_X |f| d\mu = 0 \Rightarrow e = \{x : f(x) = 0\}, m \in \mathbb{N}, e_m = \{x : |f(x)| > \frac{1}{m}\}$$

$$e = \bigcup_{m=1}^{\infty} e_m \quad \int_X |f| d\mu \geq \int_{e_m} |f| d\mu \geq \frac{1}{m} \mu e_m \Rightarrow \mu e_m = 0 \Rightarrow \mu E = 0$$

$$\Rightarrow f(x) \cdot g(x) = 0 \text{ п.в.} \quad 0 \leq 0 \quad (*)$$

Если  $A = +\infty$ , то  $(*)$

пусть  $0 < A < +\infty, 0 < R < +\infty$

Неравенство Гельдера однородное, то есть если мы  $f$  умножим на константу, то левая и правая часть умножится на неё же, аналогично с  $g$ . Иногда бывает удобно ввести нормировку.

$$f_1(x) = \frac{f(x)}{A}, g_1(x) = \frac{g(x)}{B}, \int_X |f_1(x)|^p d\mu = \frac{A^p}{A^p} = 1, \int_X |g_1(x)|^q d\mu = 1$$

Пусть  $x$  — фиксирован,  $a = |f(x)|$ ,  $b = |g(x)| \xRightarrow{\text{н.Юнга}}$

$$|f_1(x)| \cdot |g_1(x)| \leq \frac{|f_1(x)|^p}{p} + \frac{|g_1(x)|^q}{q} \text{ проинтегрируем } X \text{ по } \mu$$

$$\Rightarrow \int_X |f_1| \cdot |g_1| d\mu \leq \frac{1}{p} \int_X |f_1|^p d\mu + \frac{1}{q} \int_X |g_1|^q d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Умножаем на  $AB \Rightarrow \int_X |fg| d\mu \leq AB$  □

**Теорема 3.3** (Неравенство Минковского).  $(X, U, \mu)$ ,  $f, g$  — измеримые,  $1 \leq p < +\infty \Rightarrow$

$$\underbrace{\left( \int_X |f(x) + g(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}}_C \leq \underbrace{\left( \int_X |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}}_A + \underbrace{\left( \int_X |g(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}}_B \quad (*)$$

*Доказательство.* Сначала разберём простые случаи.  $p = 1$ ,  $x$  — фиксирован.  $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$  проинтегрируем по  $X \Rightarrow (*)$  при  $p = 1$ . Теперь пусть  $p > 1$ . Если  $A = +\infty$ , или  $B = +\infty$ , или  $C = 0$ , то  $(*)$ .

Теперь же пусть  $A < +\infty, B < +\infty, C > 0$ . Доказательство будет в два этапа. На первом этапе получим гораздо более слабое утверждение, вообще не то, что требуется в теореме, но оно нам понадобится. Докажем, что  $C < +\infty$ .

$a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow |a+b| \leq |a|+|b| \leq 2 \max(|a|, |b|) \Rightarrow |a+b|^p \leq 2^p \max(|a|^p, |b|^p) \leq 2^p(|a|^p + |b|^p) \Rightarrow$  при фиксированном  $x$

$$|f(x) + g(x)|^p \leq 2^p(|f(x)|^p + |g(x)|^p) \text{ проинтегрируем по } X$$

$\Rightarrow C^p \leq 2^p(A^p + B^p) \Rightarrow C < +\infty$ . Первая часть доказательства закончена.

$$C^p = \int_X |f+g|^p d\mu = \int_X |f+g| \cdot |f+g|^{p-1} d\mu \leq \int_X |f| \cdot |f+g|^{p-1} d\mu + \int_X |g| \cdot |f+g|^{p-1} d\mu$$

$$\int_X |f| \cdot |f+g|^{p-1} d\mu \stackrel{\text{н. Гельдера}}{\leq} \left( \int_X |f+g| d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \underbrace{\left( \int_X |f+g| d\mu \right)}_A^{(p-1)q} = AC$$

$$\begin{aligned} \int_X |g| \cdot |f+g|^{p-1} d\mu &\stackrel{\text{аналогично}}{\leq} BC^{\frac{p}{q}} \Rightarrow \\ C^p &\leq (A+B)C^{\frac{p}{q}}, \quad 0 < C < +\infty \Rightarrow \\ C^{p-\frac{p}{q}} = C &\Rightarrow C \leq A+B \text{ (это (*))} \end{aligned}$$

□

### 3.3. Пространство Лебега

Отсюда и до определения  $L^\infty$  очень аккуратно с  $\mathcal{L}$  и  $L$  читать. Тут точно есть путаница, но записи лекции нет, чтобы ее устранить.

**Определение 3.6.**  $(X, U, \mu)$  — пространство с мерой.  $L(X, \mu)$  — пространство суммируемых функций.  $1 \leq p < +\infty$   $\mathcal{L}^p(X, \mu) = \{f : |f|^p \in L(X, \mu)\}$

$$f \in L^p(X, \mu), \|f\|_p = \left( \int_X |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

Проверим, что  $\|f\|_p$  — это полунорма на  $L^p(X, \mu)$ .  $c \in \mathbb{R}$  (или  $\mathbb{C}$ ).  $\|cf\|_p = |c| \|f\|_p$

$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$  — неравенство Минковского

$\|f\| = 0 \Leftrightarrow \int_X |f(x)|^p d\mu = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$  почти всюду по мере  $\mu$  на  $X$ .

**Пример 3.4.**  $L[0, 1], \lambda$  — мера Лебега на  $[0, 1]$ .

функция Дирихле  $\varphi(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad \int_0^1 |\varphi(x)| d\lambda = 0.$



$N = \{f \text{ — измерима} \wedge f(x) = 0 \text{ почти всюду на } X \text{ по } \mu\}$ .  $\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f \in N$  (не зависит от  $p$ ). Рецепт приготовления пространства с нормой из полуфбриката. пространство с полунормой.  $N$  — подпространство в  $L^p$ ,  $L^p/N$  — факторпространство.

$g, f \in L^p, f \sim g \Leftrightarrow f - g \in N \Leftrightarrow f(x) = g(x)$  почти всюду по  $\mu$ .  $\bar{f}$  — класс эквивалентности,  $\bar{f} = \{g : f \sim g\}$ .

$\|\bar{f}\|_p := \|f\|$ , то есть можно взять любую функцию из класса эквивалентности.

$$\|\bar{f}\|_p = 0 \Leftrightarrow \int_X |f|^p d\mu = 0 \Leftrightarrow f \in N \Rightarrow \bar{f} = N = \bar{0} \Rightarrow$$

$\|\bar{f}\|_p$  — норма на  $L^p$ . Говорят, что  $f \in L^p$ , возьмём функцию из  $L^p$ , но имеют в виду, что возьмут класс эквивалентности, а из него возьмут функцию

Одна из главных целей — доказать, что эти пространства Банаховы. Сначала определим  $L^\infty(X, \mu)$  (существенно ограниченные функции).

**Определение 3.7** ( $L^\infty(X, \mu)$ ).  $f \in L^\infty(X, \mu)$ , если

$$\exists c > 0 |f(x)| \leq c \text{ почти всюду на } X \text{ по } \mu (\mu\{x : |f(x)| > c\} = 0)$$

Возьмём точную нижнюю грань этой константы.  $\|f\|_\infty = \inf\{c \geq 0 : \mu\{x : |f(x)| > c\} = 0\}$  (существующий суп, или на подлом англосаксонском  $\text{ess sup}_X f$ )

**Свойство 3.1.**  $f \in \mathcal{L}^\infty(X, \mu) \Rightarrow \mu\{f(x) > \|f\|_\infty\} = 0$

*Доказательство.*  $e = \{x : |f(x)| > \|f\|_\infty\}, m \in \mathbb{N}$ .

$e_m = \{x : |f(x)| > \|f\|_\infty + \frac{1}{m}\} \Rightarrow \mu e_m = 0$  по определению  $\text{ess sup}_X f$   
 $\Rightarrow e = \bigcup_{m=1}^\infty e_m \Rightarrow \mu e = 0$  □

$\|f\|_\infty$  — полунорма на  $\mathcal{L}^\infty$

$$\lambda \neq 0 \quad |\lambda f(x)| \leq |\lambda| \cdot c \Leftrightarrow |f(x)| \leq c \Rightarrow \|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \|f\|_\infty,$$

$f, g \in \mathcal{L}^\infty, x \in X \Rightarrow |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$  для п.в.  $x$  на  $X$   
 $\Rightarrow \|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$

$\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \mu\{x : |f(x)| > 0\} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \text{ п.в. на } X \Leftrightarrow f \in N = \{f - \text{измерима, } f(x) = 0 \text{ п.в. на } X\}$

$$L^\infty = \mathcal{L}^\infty / N$$

Все, что Н.А. доказал для меры Лебега, верно и для других мер. Те доказательства и так были не особо веселые, чтобы их повторять.

**Теорема 3.4** (Фату).  $(X, U, \mu)$ ,  $\{g_n\}_{n=1}^\infty, g_n$  — измеримые,  $g_n(x) \geq 0$

$$g_n(x) \xrightarrow{\text{п.в.}} g(x) \quad \int_X g_n(x) d\mu \leq C \text{ не зависит от } n \\ \Rightarrow \int_X g(x) d\mu \leq C$$

Первая существенная теорема, которая нам встретилась.

**Теорема 3.5** (полнота пространства Лебега).  $(X, U, \mu), 1 \leq p \leq +\infty \Rightarrow L^p(X, \mu)$  — банаховы.

*Доказательство.* при  $1 \leq p < +\infty$  воспользуемся критерием полноты (если сходится ряд из норм, то сам ряд сходится)

$$\{f_n\}_{n=1}^\infty, f_n \in L^p, \sum_{n=1}^\infty \|f_n\|_p \leq C < +\infty \\ S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$$

Докажем, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n(x) - f(x)\|_p = 0$ . Существует ли  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$  почти всюду на  $X$ ?

Рассмотрим  $\sigma_n(x) = \sum_{k=1}^n |f_k(x)| \Rightarrow \sigma_n(x)$  возрастает  $\Rightarrow \exists \sigma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x)$ . Возможно,  $\sigma(x) = +\infty$  для некоторых  $x$ .

$$\|\sigma_n\|_p \leq \sum_{k=1}^n \|f_k\|_p \leq C$$

$$\int_X |\sigma_n(x)|^p d\mu \leq C^p \wedge \sigma_n(x)^p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sigma(x)^p \forall x \in X \stackrel{\text{т. Фату}}{\Rightarrow}$$

$\int_X \sigma(x)^p d\mu \leq c^p$  Самое главное, что мы из этого заключаем:  $\sigma(x) < +\infty$  п.в. на  $X$  по  $\mu$ .

$$x \in X \quad \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| < +\infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \text{ — сходится}$$

$$f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \text{ определена п.в. на } X, \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p < +\infty, \varepsilon > 0$$

Применим критерий Коши:  $\exists N \in \mathbb{N} \quad m > n > N \Rightarrow \sum_{k=n+1}^m \|f_k\|_p < \varepsilon$   
 $\varepsilon \Rightarrow \|S_m(x) - S_n(x)\|_p \leq \sum_{k=n+1}^m \|f_k\|_p < \varepsilon$

$$\int_x |S_m(x) - S_n(x)|^p d\mu < \varepsilon^p (n \text{ фиксировано}) \wedge |S_m(x) - S_n(x)|^m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} |f(x) - S_n(x)|$$

$$\xRightarrow{\text{Фатту}} \int_X |f - S_n|^p d\mu \leq \varepsilon^p \Rightarrow \|f - S_n\| \leq \varepsilon$$

$f - S_n \in L_p, S_n \in L^p \Rightarrow f = (f - S_n) + S_n \Rightarrow f \in L_p$  и  $\|f - S_n\|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$   
 Теперь осталось рассмотреть случай  $p = \infty$ .  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  фундаментальная,  $f_n \in L^{\infty}$ ,

$$|f_n(x)| \leq \|f_n\|_{\infty} \quad x \in X \setminus e_n, \mu e_n = 0 \quad n \in \mathbb{N}$$

$e = \cup_{n=1}^{\infty} e_n, X_1 = X \setminus e \Rightarrow f_n \in m(X_1)$  — ограниченная функция.  $m(X_1)$  — полное  $\Rightarrow \{f_n\}$  — фундаментальна в  $m(X_1) \Rightarrow \exists f \in m(X_1) \quad \sup_{x \in X_1} |f(x) - f_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Положим  $f(x) = 0$  если  $x \in e \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L^{\infty}} = 0 \quad \square$

### 3.4. Пространства $l_n^p, l^p$

$n \in \mathbb{N}, 1 \leq p < +\infty$ .

**Определение 3.8.**

$$l_n^p = \left\{ \mathbb{R}^n, x = (x_1, \dots, x_n), x_j \in \mathbb{R}, \|x\|_p = \left( \sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\}$$

Рассмотрим  $X = \{1, 2, \dots, n\}$ . Возьмём дискретную меру  $\mu(j) = 1$  при  $1 \leq j \leq n$ ,  $l_n^p = L^p(X, \mu)$ .  $f \in L^p(X, \mu)$ ,  $f(j) = x_j \Rightarrow l_n^p$  — полное.

Посмотрим, что будет обозначать сходимость этой нормы.

**Теорема 3.6.**  $\{x^{(m)}\}_{m=1}^\infty, x = (x_1, \dots, x_n), x^{(m)} = (x_1^{(m)}, \dots, x_n^{(m)}), x^{(m)} \in l_n^p, q \leq p \leq +\infty$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|x - x^{(m)}\|_p = 0 \Leftrightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} x_j^{(m)} = x_j, 1 \leq j \leq n$$

*Доказательство.*  $\Rightarrow$

Пусть  $j$  — фиксировано,  $\lim_{m \rightarrow \infty} x^{(m)} = x$  в  $l_n^p$ .

При  $p < +\infty$   $\|x - x^{(m)}\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i - x_i^{(m)}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq |x_j - x_j^{(m)}|$ . Так как  $\|x - x^{(m)}\|_p \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} |x_j - x_j^{(m)}| = 0$ .

При  $p = \infty$   $\|x - x^{(m)}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - x_i^{(m)}| \geq |x_j - x_j^{(m)}|$ . Так как  $\|x - x^{(m)}\|_\infty \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} |x_j - x_j^{(m)}| = 0$

Теперь  $\Leftarrow$

$$1 \leq j \leq n \quad \lim_{m \rightarrow \infty} |x_j - x_j^{(m)}| = 0 \Rightarrow \left( \sum_{j=1}^n \|x_j - x_j^{(m)}\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{и} \Rightarrow \max_{1 \leq j \leq n} |x_j - x_j^{(m)}| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

□

**Определение 3.9.**  $l_p = \{x : \{x_j\}_{j=1}^\infty, x_j \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \wedge \sum_{j=1}^\infty |x_j|^p < +\infty\}$

$$\|x\|_p = \left( \sum_{j=1}^\infty |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$X = \mathbb{N}, \mu(j) = 1, \mu = \sum_{n=1}^\infty \sigma_n$$

$$l^p = L^p(\mathbb{N}, \mu) \Rightarrow \text{полное} \quad 1 \leq p < +\infty$$

**Замечание 3.2.**  $\{x^{(m)}\}_{m=1}^\infty, x^{(m)} \in l^p, \lim_{m \rightarrow \infty} \|x^{(m)} - x\|_p = 0 \Rightarrow \forall j \lim_{m \rightarrow \infty} x_j^{(m)} = x_j$  Например,  $\nrightarrow$  при  $e_m = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots)$

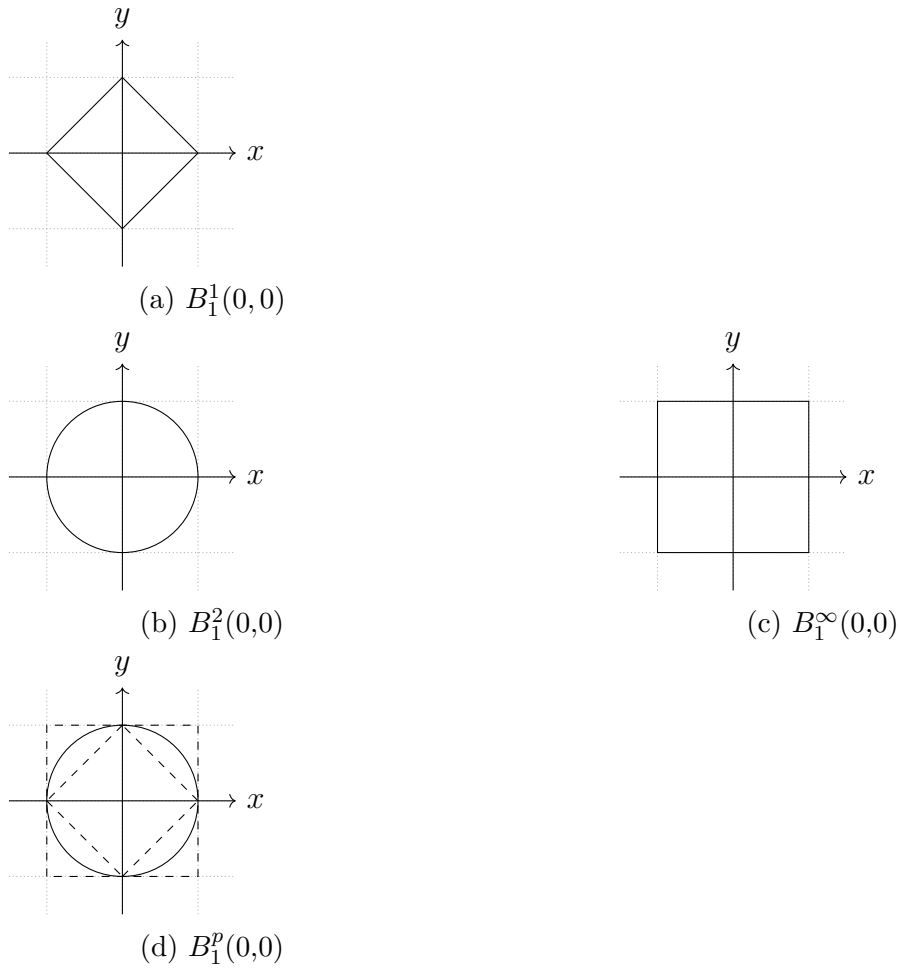


Рис. 3.1: Примеры единичных шаров в  $l_2^p$

Пусть  $j$  фиксировано.  $\lim_{m \rightarrow \infty} (e_m)_j = 0$   $\|e_m - \mathbb{0}\|_p = 1 \quad \forall p, 1 \leq p \leq +\infty$ . В качестве упражнения доказать, что  $l^p$  — полное непосредственно.

На рисунке 3.1 приведены примеры единичных шаров в  $l_2^p = \{(x, y) : (|x|^p + |y|^p)^{\frac{1}{p}}\}, 1 \leq p < +\infty$ . Для  $l_2^\infty$  норма определяется  $\|(x, y)\|_\infty = \max(|x|, |y|)$

### 3.5. Неполное нормированное пространство

**Определение 3.10** (Финитное линейное пространство).

$$F = \{x - \{x_j\}_{j=1}^{\infty}, x_j \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \exists N(x) \in \mathbb{N} : n > N(x) \Rightarrow x_n = 0\}$$

$F \subset l^p$   $1 \leq p \leq +\infty$ .  $(F, \|\cdot\|_p)$  — не полное,  $F$  — не замкнуто. Будем брать геометрическую прогрессию и обрывать ее на некотором члене.

$$x^{(m)} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^m}, 0, 0, 0, \dots \right\} \in F$$

$$X = \left\{ \frac{1}{2^k} \right\}_{k=1}^{\infty} \in l^p$$

$$1 \leq p < +\infty \quad \|x - x^{(m)}\|_p = \left( \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^{kp}} \right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

Следовательно,  $F$  — не замкнуто.

В качестве упражнения проверить, что  $\overline{F}$  в  $l^p$  =? при  $p < +\infty$  и при  $p = \infty$ .

**Теорема 3.7.**  $C[a, b], \|f\|_p = \left( \int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < +\infty$

$(C[a, b], \|\cdot\|)$  — не полное

*Доказательство.* При  $p = 1$ ,  $[a, b] = [-1, 1]$ ,  $f \in C[a, b]$ ,  $\int_a^b |f(x)|^p dx = 0 \Leftrightarrow f(x) \equiv 0$ . Предъявим фундаментальную последовательность, предел которой не будет непрерывной функцией.

$$f_n = \begin{cases} 0 & -1 \leq x \leq 0 \\ nx & x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 1 & x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}, f \in C[-1, 1]$$

$f_n$  — фундаментальная в  $(C[-1, 1], p = 1)$

Пусть  $m > n$ .

$$\int_{-1}^1 |f_m(x) - f_n(x)| dx = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right) \leq \frac{1}{2n} \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$$

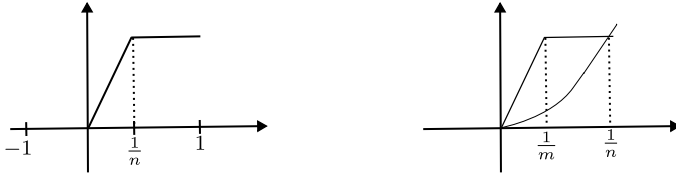


Рис. 3.2: Доказательство теоремы 3.7

Пусть  $\exists f \in C[-1, 1] : \|f - f_n\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$$m \geq n \quad \int_{\frac{1}{n}}^1 \underbrace{|f(x) - 1|}_{=0} dx \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

$$\int_{\frac{1}{n}}^1 |f(x) - 1| dx \leq \int_0^1 |f(x) - f_m(x)| dx \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow f(x) = 1, x \in [\frac{1}{n}, 1] \forall n$$

$$\begin{cases} \Rightarrow f(x) = 1, x \in (0, 1], f \text{ непрерывна}, f(0) = 1 \\ \text{аналогично } f(x) \equiv 0 \text{ на } [-1, 0] \end{cases} \Rightarrow \text{противоречие}$$

□

### 3.6. Пополнение метрического пространства

Мы привели несколько примеров нормированных пространств, не являющихся полными. Приведём еще один пример.

**Определение 3.11.**

$$\mathcal{P} = \left\{ p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, a_k \in \mathbb{R}, n \geq 0 \right\}$$

$\mathcal{P}$  (подпространство в алгебраическом смысле)  $\subset C[a, b]$ ,  $\|p\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |p(x)|$ ,  $e^x \notin \mathcal{P}$ ,  $p_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$ ,  $\Rightarrow p_n \xrightarrow{[a, b], n \rightarrow \infty} e^x$  это не многочлен, потому что если сколько-то раз продифференцировать многочлен, он станет тождественным 0  $\Rightarrow \overline{\mathcal{P}} \setminus \mathcal{P} \ni e^x \Rightarrow \mathcal{P}$  — не замкнуто  $\Rightarrow \mathcal{P}$  — не полное.

$$\overline{\mathcal{P}} = C[a, b]$$

**Теорема 3.8** (Вейерштрасса, 1885).  $f \in C[a, b], \forall \varepsilon > 0 \exists p \in \mathcal{P}$  т.ч.  $\|f - p\| < \varepsilon$  (любую функцию на отрезке можно приблизить многочленами)

$$p_n \xrightarrow[G]{} f \Rightarrow f \text{ аналитическая в } G$$

Несколько простых свойств метрики, и все следуют из неравенства треугольника

**Теорема 3.9** (Свойства метрики).  $(X, \rho)$  — метрическое

1.  $x, y, z, u \in X \Rightarrow |\rho(x, u) - \rho(y, z)| \leq \rho(x, y) + \rho(u, z)$
2.  $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow \rho(x, y)$  — непрерывная функция
3.  $A \subset X, A$  — подмножество,  $\rho(x, A) = \inf_{y \in A} \rho(x, y) \Rightarrow \rho(x, A)$  — непрерывная функция от  $x$
4.  $A \subset X, A = \overline{A}, x_0 \notin A \Rightarrow \rho(x_0, A) > 0$

*Доказательство.* 1.  $\rho(x, u) \leq \rho(x, y) + \rho(y, u) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) + \rho(z, u) \Rightarrow \rho(x, u) - \rho(y, z) \leq \rho(x, y) + \rho(z, u)$  Аналогично  $\rho(y, z) - \rho(x, u) \leq \dots$  из всего  $\Rightarrow 1)$

2. Докажем непрерывность с помощью последовательности.  
 $\rho(x, y)$  — непрерывная?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x) = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(y_n, y)$$

$$|\rho(x, y) - \rho(x_n, y_n)| \stackrel{(1)}{\leq} \rho(x, x_n) + \rho(y, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n) = \rho(x, y)$$

3.  $A \subset X, x, z \in X, |\rho(x, A) - \rho(z, A)| \leq ?$   
 Пусть  $y \in A$

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &\leq \rho(x, z) + \rho(z, y) \Rightarrow \rho(x, A) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) \quad \forall y \in A \\ &\Rightarrow \rho(x, A) \leq \rho(x, z) + \inf_{y \in A} \rho(z, y) = \rho(x, z) + \rho(z, A) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\rho(x, A) - \rho(z, A) \leq \rho(x, z)$$



Но нам нужен модуль. Можем сказать, что  $x$  и  $z$  ничем не отличаются, аналогично  $\rho(z, A) - \rho(x, A) \leq \rho(x, z) \Rightarrow 3$

4.

$$x_0 \notin A \Rightarrow x_0 \in X \setminus A \text{ открытое} \\ \Rightarrow \exists \delta > 0 \quad B_\delta(x_0) \subset X \setminus A \Rightarrow \rho(x_0, A) \geq \delta$$

□

Перед определением пополнения нам потребуется несколько определений, связанных с отображениями в метрических пространствах.  $(X, \rho), (Y, d)$  — метрические пространства.  $T : X \rightarrow Y$ .

**Определение 3.12** (Изометрическое вложение).

$$d(T_x, T_z) = \rho(x, z) \quad \forall x, z \in X$$

Обозначение:  $X \hookrightarrow Y$

**Определение 3.13** (Изометрия).  $T$  — изометрическое вложение,  $T(X) = Y$

**Определение 3.14** (Изометричность пространств).  $(X, \rho), (Y, d)$  изометричны, если  $\exists T : X \rightarrow Y, T$  — изометрия

**Свойство 3.2.**  $T$  — изометрическое вложение  $\Rightarrow T$  — инъективное, непрерывное

*Доказательство.*  $x, z \in X, T : X \rightarrow Y$ , пусть  $T_x = T_z \Rightarrow d(T_x, T_z) = 0$ . Значит, исходное расстояние тоже 0 по свойству метрики.  $d(x, z) = 0 \Rightarrow x = z$

Инъективность проверили, теперь непрерывность, это еще проще.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x, x_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} d(T_{x_n}, T_x) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} T_{x_n} = T_x$$

□

**Свойство 3.3.** Если  $T$  — изометрия, то  $\exists T^{-1}$  — изометрия.

**Свойство 3.4.** «Изометричность» — отношение эквивалентности на множестве метрических пространств

И наконец

**Определение 3.15** (Пополнение м. пространства).  $(X, \rho)$  — метрическое пространство.  $(Z, d)$  — полное метрическое пространство.  $(Z, d)$  — пополнение  $(X, \rho)$ , если существует  $T : X \rightarrow Z$

1.  $T$  — изометрическое вложение
2.  $\overline{T(X)} = Z$

**Замечание 3.3.** Не обязательно искать пространство, удовлетворяющее и второму свойству. Достаточно найти такое, которое удовлетворяет первому.  $(X, \rho)$  — метрическое пространство,  $(U, d)$  — полное метрическое пространство. Пусть  $\exists T : X \rightarrow U$  — изометрическое вложение. Если 2 свойство не выполняется, то легко такое  $Z$  построить. Возьмём замыкание образа.  $Z = \overline{T(X)} \Rightarrow (Z, d)$  — пополнение  $X$ .

Теперь обещанная теорема. Возьмём любое метрическое пространство и покажем, что у него есть пополнение.

**Теорема 3.10** (О пополнении метрического пространства).  
 $(X, \rho)$  — метрическое  $\Rightarrow \exists$  пополнение  $(Z, d)$

*Доказательство.* Есть классическое доказательство с рассмотрением всех фундаментальных последовательностей, рассмотрением факторпространства, муторным разбором случаев. Мы пойдем другим путём. Будет короткое, но **фантастически** непонятное доказательство в том смысле, что непонятно, как его придумать.

Мы собираемся использовать  $m(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R}, \sup_{x \in X} |f(x)| < +\infty\}$

$$\|f\|_{m(X)} = \|f\|_{\infty} = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

$m(X)$  — полное пространство.

Каждой точке мы сопоставим функцию. Вот такая идея!  $\varphi : X \rightarrow m(X)$ . Оно же будет изометрическим вложением, то есть будет сохранять расстояния.

Сначала будет маленькое облегчающее предположение про  $X$ , от которого мы потом откажемся. Пусть  $X$  — ограниченное, то есть  $\exists M > 0$  т.ч.  $\forall x, y \in X \rho(x, y) \leq M$ . Единственная цель предположения — формула для  $\varphi$  будет чуть проще. Вообще, можно было бы обойтись и без него.

$t \in X, t$  — фиксирован,  $f_t(x) = \rho(x, t)$ . При фиксированном  $t$  — это функция на  $X$ . Именно сюда наше отображение будет отображать  $t$ . Одной точке — целая функция, понятно?

$$\begin{aligned}\varphi(t) &:= f_t(x) \text{ т.е. } \varphi : t \rightarrow f_t(x) \\ |f_t(x)| &\leq M \Rightarrow f_t \in m(X)\end{aligned}$$

Самое главное. Проверим, что отображение сохраняет расстояния. Это очень легко. Возьмём 2 точки.

$$\begin{aligned}\text{Пусть } t, s \in X, \quad \|f_t - f_s\|_\infty &= \sup_{x \in X} |\rho(x, y) - \rho(x, s)| \\ |\rho(x, t) - \rho(x, s)| &\leq \rho(t, s), \quad \text{Пусть } x = t \Rightarrow |\rho(t, t) - \rho(t, s)| = \rho(t, s) \\ \Rightarrow \|\varphi(t) - \varphi(s)\|_\infty &= \rho(t, s) \Rightarrow \varphi - \text{изометрическое вложение}\end{aligned}$$

Посмотрим, что будет, если откажемся от этого облегчающего предположения. Надо будет чуть исправить отображение  $\varphi$ .  $X$  — любое метрическое пространство.  $a \in X$  — фиксированная точка.

$$t \in X, f_t(x) = \rho(x, t) - \rho(x, a) \Rightarrow |f_t(x)| \leq \rho(a, t) \Rightarrow f_t \in m(X)$$

Раньше мы могли так брать и не вылетать из пространства из-за ограниченности. Вычтем эту штуку, чтобы попасть, куда надо.

$$t, s \in X \Rightarrow f_t(x) - f_s(x) = \rho(x, t) - \rho(x, s) \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \|f_t - f_s\|_\infty = \rho(s, t)$$

$$\text{Пополнение } X: \overline{\varphi(X)}^{\|\cdot\|_\infty} = Z, (Z, \|\cdot\|_\infty)$$

□

Таким образом, изучение метрических пространств можно свести к изучению подмножества пространства непрерывных функций.

**Замечание 3.4.** Забегая далеко вперёд.  $(X, \|\cdot\|)$  — нормированное,  $X^*$  — множество непрерывных линейных функционалов на  $X$ ,  $X^*$  — полное (ВСЕГДА).

Мы построим каноническое вложение  $\pi : X \rightarrow \underbrace{(X^*)^*}_{\text{полное}}, \overline{\varphi(x)}^{X^{**}}$  — пополнение  $X$ .

### 3.7. Теорема о вложенных шарах

Когда-то в анализе была теорема Кантора о том, что если есть последовательность вложенных друг в друга отрезков, то их пересечение не пусто. Мы докажем похожее утверждение для метрических пространств. Оказывается, то утверждение было связано с полнотой вещественной прямой  $\mathbb{R}$ .  $(X, \rho)$  — метрическое пространство,  $r > 0, x \in X$  Введём стандартное обозначение замкнутого шара.

$$D_r(x) = \{y \in X : \rho(x, y) \leq r\}$$

**Теорема 3.11** (О вложенных шарах).  $(X, \rho)$  — метрическое пространство.  $X$  — полное ( $| \Leftrightarrow (\forall \{D_n\}_{n=1}^{\infty}, D_n = D_{r_n}(x_n), D_{n+1} \subset D_n, \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0 \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{+\infty} D_n \neq \emptyset$ ). По сравнению с теоремой Кантора у нас есть дополнительное предположение о стремлении к нулю, которое здесь важно, а на прямой было как данность.

*Доказательство.*  $\Rightarrow X$  — полное

$$\{D_n\}_{n=1}^{\infty}, D_n = D_{r_n}(x_n), D_{n+1} \subset D_n, \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$$

Надо проверить, что центры шаров образуют фундаментальную последовательность, то есть что  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  — фундаментальная.

Пусть  $\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad r_n < \varepsilon$  при  $n \geq N$ .

$$(n > N \wedge m > N) \Rightarrow (x_n \in D_n \wedge x_m \in D_n) \Rightarrow \rho(x_n, x_m) \leq \leq \rho(x_n, x_N) + \rho(x_m, x_N) \leq 2\varepsilon$$

$$X \text{ — полное} \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

любое фиксированное  $m \in \mathbb{N} \quad x_n \in D_m \forall n \geq m, D_m$  — замкнутое

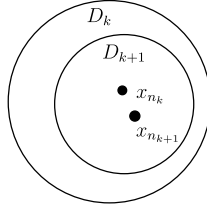
$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty, n \geq m} x_n = x \in D_m$$

$$\Rightarrow x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} D_m$$

$\Leftarrow$

Ничего кроме определения для доказательства полноты у нас нет.

Пусть  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  — фундаментальная. Возьмём достаточно быстро убывающую последовательность  $\varepsilon_k = \frac{1}{2^k}$ . Существует  $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}, \rho(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) <$



$$\frac{1}{2^{k+1}} \cdot D_k = D_{\varepsilon_k}(x_{n_k})$$

$$\begin{cases} y \in D_{k+1} \Rightarrow \rho(y, x_{n_{k+1}}) \leq \frac{1}{2^{k+1}} \\ \rho(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < \frac{1}{2^{k+1}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \rho(y, x_{n_k}) &\leq \rho(y, x_{n_{k+1}}) + \rho(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) < \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^k} \\ &\Rightarrow y \in D_k \Rightarrow D_{k+1} \subset D_k \end{aligned}$$

Мы взяли произвольный элемент из  $D_{k+1}$  и показали, что он принадлежит  $D_k$ , то есть показали вложенность элементов последовательности.

$$\Rightarrow \exists x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} D_k \quad \rho(x, x_{n_k}) \leq \frac{1}{2^k} \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$$

По свойству фундаментальных последовательностей из первой лекции  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  □

**Замечание 3.5.** В условиях теоремы пересечение вложенных шаров  $\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$  состоит из одной точки.

*Доказательство.* Пусть  $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n, \Rightarrow \rho(x, x_n) \leq r_n, \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ . А мы знаем, что предел в метрическом пространстве единственный. □

**Замечание 3.6.** Условие, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$  в теореме существенно.

**Пример 3.5** (Замкнутые множества).  $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}, F_n$  — замкнутое,  $F_{n+1} \subset F_n, F_n \subset \mathbb{R}, \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset, F_n = [n, +\infty)$

**Пример 3.6** (По теореме).

$$X[1, +\infty) \quad \rho(x, y) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{x+y}, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

Проверим, что  $\rho$  — метрика.  $x, y, z$

$$\rho(x, y) + \rho(y, z) = 1 + \frac{1}{x+y} + 1 + \frac{1}{y+z} > 1 + 1 > 1 + \frac{1}{x+z} = \rho(x, z)$$

Проверяем полноту. Пусть  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  фундаментальная,  $\varepsilon = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \exists N \in \mathbb{N} : (n \geq N \wedge m \geq N) \rho(x_n, x_m) < \frac{1}{2} &\Rightarrow \left( \rho(x_n, x_N) < \frac{1}{2} \wedge \rho(x_m, x_N) < \frac{1}{2} \right) \Rightarrow \\ &x_N = x_{N+1} = x_{N+2} = \dots \\ \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = X_N &\Rightarrow (X, \rho) \text{ — полное} \end{aligned}$$

Полноту проверили.

$$r_n = 1 + \frac{1}{2n}, x_n = n; D_n = D_{r_n}(n), h \in D_n. \text{ Пусть } x \neq n, x \in D_n \Rightarrow \rho(x, x_n) = 1 + \frac{1}{x+n} \leq 1 + \frac{1}{2n}$$

**Замечание 3.7** (Домашнее задание). Если  $(X, \|\cdot\|)$  — банахово, то  $D_{n+1} \subset D_n \{D_n\}_{n=1}^{\infty} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n \neq \emptyset$  (требование  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$  лишнее)

### 3.8. Сепарабельные пространства

$(X, \rho)$  — метрическое пространство,

**Определение 3.16** ( $A$  плотно в  $C$ ).  $A \subset X, C \subset X$ .  $A$  плотно в  $C$ , если  $C \subset \overline{A} \Leftrightarrow$

$$\forall x \in C \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A \rho(x, A) < \varepsilon \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 C \subset \bigcup_{a \in A} B_{\varepsilon}(a)$$

Любой элемент  $C$  можно сколь угодно хорошо приблизить элементами из  $A$ .

**Определение 3.17** ( $A$  всюду плотно в  $C$ ).  $A$  — всюду плотно в  $X$ , если  $\overline{A} = X$

Чем же полезно это свойство? Если хотят доказать свойство для  $X$ , то часто доказывают сначала для всюду плотного подмножества.

**Определение 3.18** (Сепарабельное пространство).  $(X, \rho)$  — сепарабельное, если  $\exists E \subset X, E = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \overline{E} = X$

**Теорема 3.12.**  $n \in \mathbb{N}, q \leq p \leq +\infty,$

$l_n^p$  — сепарабельное

*Доказательство.*

$$l_n^p = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p) = \{x = (x_1, \dots, x_n), x_j \in \mathbb{R}, \|x\|_p\}$$

$$E = \mathbb{Q}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n), x_j \in \mathbb{Q}\}$$

Если  $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_p), \tilde{\mathbb{Q}} = \{x + iy, x, y \in \mathbb{Q}\}, E = \tilde{\mathbb{Q}}^n$

□

**Теорема 3.13.**  $F$  — финитные последовательности,  $1 \leq p \leq +\infty$

$(F, \|\cdot\|_p)$  — сепарабельно

*Доказательство.*  $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_{N(x)}, 0, 0, \dots), x_j \in \mathbb{Q}\}$ . Попросту говоря, все финитные последовательности, координаты которых рациональны. □

**Теорема 3.14.**  $l^p, 1 \leq p < +\infty, C_0$  — сепарабельные

*Доказательство.* На прошлой лекции мы доказали, что

$$(F, \|\cdot\|_p), \overline{F}^{\|\cdot\|_p} = l^p \text{ при } 1 \leq p < +\infty$$

$$\begin{cases} E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}^n \text{ — всюду плотно в } F \\ F \text{ — всюду плотное в } l^p \end{cases} \Rightarrow$$

$$E \text{ всюду плотно в } l^p, 1 \leq p < +\infty$$

Почему любой элемент из  $l^p$  может быть приближен финитной последовательностью? Мы ее просто отрезаем. □

Ответ на упражнение для читателя, которое было на прошлой лекции:  $F$  — подпространство в алгебраическом смысле,  $F \subset l^\infty$ ,  $\overline{F}^{\|\cdot\|_\infty} = C_0$

$$x_0 \in C_0 \Leftrightarrow x = \{x_n\}_{n=1}^\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

берем первые  $m$  координат и дополняем их нулями

$$x^{(m)} = (x_1, \dots, x_m, 0, 0, \dots, 0, \dots) \Rightarrow x^{(m)} \in F$$

$$\|x - x^{(m)}\|_\infty = \sup_{k > m} |x_k| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

Остаётся вопрос, почему  $C_0$  — замкнутое множество. Можно в лоб, а можно по-учёному рассудить.

$$\begin{aligned} &\text{пусть } \{y^{(m)}\}_{m=1}^\infty, y^{(m)} \in C_0, y^{(m)} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} y \text{ в } C_0 \\ \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} \|y - y^{(m)}\|_\infty &= 0 \quad y = \{y_n\}_{n=1}^\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0 ??? \end{aligned}$$

А это равномерная сходимостъ на множестве натуральных чисел, то есть это тот случай, когда можно менять местами пределы.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n^{(m)}}_{=0} = 0$$

Упражнение:  $C$  — сепарабельное,  $C \subset l^\infty$

**Теорема 3.15.**  $l^\infty$  — не сепарабельное

Какой бы шарик из  $X$  мы бы не предъявили, там всегда будет элемент всюду плотного множества.

*Доказательство.*

$$A \subset \mathbb{N} \quad X_n^A = \begin{cases} 1, n \in A \\ 0, n \notin A \end{cases}$$

Мощность  $\{A, A \subset \mathbb{N}\}$  — континуум ( $>$  счётное). Это и будет центр пересекающихся шариков. Посмотрим, каким будет расстояние между двумя разными точками.

$$A \subset \mathbb{N}, C \subset \mathbb{N}, A \neq C$$

$$X_n^A - X_n^C = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases} \Rightarrow \|x^A - x^C\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |X_n^A - X_n^C| = 1$$



То есть если 2 множества не равны, то расстояние между ними — единица.

$$B_{\frac{1}{2}}(x^A) \cap B_{\frac{1}{2}}(x^C) = \emptyset$$

Мы предъявили несчётный набор дизъюнктивных шариков.  $E$  — всюду плотно в  $l^\infty \Rightarrow \forall A \subset \mathbb{N} \exists e_A \in B_{\frac{1}{2}}(x^A)$

$$A \neq C \Rightarrow e_A \neq e_C, \quad \underbrace{\{e_A\}_{A \subset \mathbb{N}}}_{\text{несчётно}} \subset E \Rightarrow E \text{ несчётно}$$

То, что у всех шариков одинаковый радиус — это просто приятный бонус.  $\square$

**Теорема 3.16.**  $(X, \rho)$  — сепарабельное,  $Y \subset X \Rightarrow (Y, \rho)$  — сепарабельное.

*Доказательство.*  $\exists E = \{x_n\}_{n=1}^\infty$  — всюду плотно в  $X$ ,  $x_0 \in X$

$$\begin{aligned} \rho(x_n, Y) &= \inf_{y \in Y} \rho(x_n, y) \Rightarrow \\ \exists \{y_{n,k}\}_{k=1}^\infty \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_{n,k}) &= \rho(x_n, Y) \\ y_{n,k} \in Y, F = \{y_{n,k}\}_{n,k} &\text{ — счётное, } F \subset Y \end{aligned}$$

Проверим, что  $F$  — всюду плотно в  $Y$ . Пусть  $y \in Y, \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists x_n : \rho(y, x_n) < \varepsilon$ . Из этого неравенства мы делаем вывод, что  $\rho(x_n, Y) < \varepsilon$ . Значит,  $\exists k : \rho(x_n, y_{n,k}) < \varepsilon \Rightarrow$

$$\rho(y, y_{n,k}) \leq \rho(y, x_n) + \rho(x_n, y_{n,k}) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

$\square$

**Следствие 3.1.**  $X$  — бесконечное множество  $\Rightarrow m(X)$  — не сепарабельное.

*Доказательство.* Можно слово в слово повторить доказательство для  $l^\infty$ , но мы воспользуемся последними доказанными теоремами.

$$\begin{aligned} & \exists \{a_j\}_{j=1}^\infty, a_j \in X, a_j \neq a_i \text{ при } i \neq j \\ Y &= \{f \in m(X), f(x) = 0 \text{ если } x \neq a_j\} \sup_{j \in \mathbb{N}} |f(a_j)| < +\infty \\ Y &\text{ изометрично } l^\infty, f \in Y, T(f) = \{f(a_j)\}_{j=1}^\infty \in l^\infty \\ Y &\text{ — не сепарабельно } \Rightarrow \text{ и по последней теореме} \\ & m(X) \text{ — не сепарабельно} \end{aligned}$$

□

**Теорема 3.17.**

$C[a, b]$  — сепарабельно

1 часть.

$$\begin{aligned} L &= \{ \text{ломанные} \} \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \quad \{y_k\}_{k=0}^n, y_k \in \mathbb{R} \\ L(x) &\text{ — ломанные} \\ L(x_k) &= y_k, k = 0, 1, \dots, n \quad l(x) \text{ линейная на } [x_k, x_{k+1}] \end{aligned}$$

Отметим, что  $L$  — всюду плотное множество в пространстве непрерывных функций. Это связано с равномерной непрерывностью. Никаких надежд на то, что оно будет счётным нет.

$$\begin{aligned} & \text{пусть } f \in C[a, b], \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : |x - y| < \delta \\ & \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \\ & \exists \{x_k\}_{k=0}^n \text{ — разбиение} \quad x_{k+1} - x_k < \delta \\ & y_k := f(x_k) \quad L(x) \text{ — ломаная} \\ & \Rightarrow |f(x) - L(x)| < \varepsilon \Rightarrow \|f - L\|_\infty \leq \varepsilon \Rightarrow \overline{\mathcal{L}} = C[a, b] \end{aligned}$$

как сделать так, чтобы множество ломаных было счётным? возьмём в качестве вершин элементы  $\mathbb{Q}$

$$\begin{aligned} E &= \{L \in \mathcal{L}, x_k, y_k \in \mathbb{Q}\} \text{ — счетное множество} \\ \begin{cases} \mathcal{L} \subset \overline{E} \\ \overline{\mathcal{L}} = C[a, b] \end{cases} &\Rightarrow E \text{ — всюду плотно, т.е. } \overline{E} = C[a, b] \end{aligned}$$

□

2 часть. по т. Вейерштрасса замыкание многочленов — тоже пространство непрерывных функций.

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= \{p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k\} \quad \overline{\mathcal{P}} = C[a, b] \\ E &= \{p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, a_k \in \mathbb{Q}\} \\ \begin{cases} \mathcal{P} \subset \overline{E} \\ \overline{\mathcal{P}} = C[a, b] \end{cases} &\Rightarrow \overline{E} = C[a, b]\end{aligned}$$

□

### 3.9. Нигде не плотные множества

**Определение 3.19.**  $(X, \rho)$  — метрическое пространство.  $A \subset X$ ,  $A$  — **нигде не плотно** в  $X$ , если

$$\forall B_r(x) \text{ при } r > 0, x \in X \quad B_r(x) \not\subset \overline{A} \Leftrightarrow \text{Int}(\overline{A}) = \emptyset \Leftrightarrow$$

Если мы рассмотрим замыкание, никакого шарика там не будет. Иначе: если мы рассмотрим внутренность замыкания, она будет пустой.

$$\begin{aligned}\forall r > 0, x \in X \quad B_r(x) \ni B_{r_1}(x_1) \subset B_r(x), B_{r_1}(x_1) \cap A = \emptyset \\ \Leftrightarrow \forall r > 0, x \in X \quad D_r(x) \ni D_{r_1}(x_1) \subset D_r(X), D_{r_1}(x_1) \cap A = \emptyset\end{aligned}$$

Скоро докажем связь между нигде не плотными множествами и полными пространствами. Но сперва определение, которое не будет часто встречаться, но сам факт — полезный.

**Определение 3.20** (множество первой категории).  $M \subset X, (X, \rho)$ .  $M$  — **множество первой категории**, если

$$M = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j, E_j \text{ нигде не плотно в } X$$

$M$  — **множество второй категории**, если  $M$  нельзя представить в виде объединения счетного числа нигде не плотных множеств.

**Теорема 3.18** (Бэр, о категориях).  $(X, \rho)$  — полное  $\Rightarrow X$  — множество второй категории.

*Доказательство.* Можно было бы даже от противного. Но мы возьмём семейство  $\{M_j\}_{j=1}^\infty$ ,  $M_j$  — нигде не плотно в  $X$ ,  $E = \bigcup_{j=1}^\infty M_j$ . Мы докажем, что найдётся хоть одна точка, которая принадлежит  $X$  и не принадлежит  $E$ . Это и будет означать, что  $X$  невозможно представить в виде такого объединения.

$$\begin{aligned} x_0 \in X \quad D_0 &= \{y : \rho(x_0, y) \leq 1\} \\ M_1 \text{ — нигде не плотно} &\Rightarrow \exists D_1 = D_{r_1}(x_1) \subset D_0, D_1 \cap M_1 = \emptyset \\ r_1 &< 1 \end{aligned}$$

Теперь мы то же соображение применим к множеству  $M_2$ , которое тоже нигде не плотно

$$\begin{aligned} \exists D_2 = D_{r_2}(x_2) &\subset D_1, D_2 \cap M_2 = \emptyset \\ r_2 &< \frac{1}{2} \end{aligned}$$

и так далее  $\left\{ \begin{array}{l} \{D_n\}_{n=1}^\infty, D_n = D_{r_n}(x_n), D_{n+1} \subset D_n \\ D_n \cap M_n = \emptyset, r_n < \frac{1}{n} \end{array} \right.$  по теореме о вложенных шарах  $\Rightarrow \exists x \in \bigcap_{n=1}^\infty D_n, (x \in D_n \wedge x \in X \setminus E) \Rightarrow x \notin M_n \forall n \Rightarrow x \notin E$  □

### 3.10. Полные семейства элементов

Теперь мы будем понимать полноту в совершенно другом смысле. Сначала вспомним, что такое линейная оболочка пространства.

**Определение 3.21** (Линейная оболочка).  $X$  — линейное пространство над  $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ . Рассмотрим семейство  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$  — семейство элементов,  $x_\alpha \in X$ .

$$\mathcal{L}\{x_\alpha\}_{\alpha \in A} = \left\{ \sum_{k=1}^n c_k x_{\alpha_k}, c_k \in \mathbb{R}(\mathbb{C}), n \in \mathbb{N} \right\}$$

**Определение 3.22** (Полное семейство).  $(X, \|\cdot\|)$ ,  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$  — полное семейство, если  $\overline{\mathcal{L}\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}} = X$ . То есть линейная оболочка всюду плотна в  $X$ .

**Пример 3.7.**  $C[a, b]$ ,  $\{x^n\}_{n=0}^{+\infty}$  — полное семейство в  $C[a, b]$ , так как  $\mathcal{P} = \mathcal{L}\{x^n\}_{n=0}^{+\infty}$ ,  $\overline{\mathcal{P}} = C[a, b]$

**Пример 3.8.**  $l^p$ ,  $1 \leq p < +\infty$ ,  $C_0$

$e_n = (1, 0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_n, 0, \dots)$ ,  $\{e_n\}_{n=1}^\infty$  — полное семейство

$\mathcal{L}\{e_n\}_{n=1}^\infty = F$  — финитная последовательность

Упражнение:  $C$  — что будет полным семейством?

**Утверждение 3.1.**  $(X, \|\cdot\|)$  — нормированное пространство. В нём существует  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  — полное семейство

$X$  — сепарабельное

*Доказательство.* Рассмотрим линейную оболочку  $L = \mathcal{L}\{x_n\}_{n=1}^\infty = \left\{x = \sum_{j=1}^n c_j x_j, c_j \in \mathbb{R}(\mathbb{C})\right\}$ .  $\overline{L} = X$ .

$E = \left\{x = \sum_{j=1}^n c_j x_j, c_j \in \mathbb{Q}\right\}$  — счётное всюду плотное

$$(L \subset \overline{E} \wedge \overline{L} = X) \Rightarrow \overline{E} = X$$

□

**Замечание 3.8.**  $l^\infty$ ,  $E = \{x = \{x_n\}_{n=1}^\infty, x_n \in \mathbb{Q}, \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < +\infty\}$ .  $\overline{E} = l^\infty$ ,  $E$  — не счётное.

### 3.11. Полные и плотные множества в $L^p$

Сначала небольшое замечание.  $(X, U, \mu)$  — пространство с мерой  $e \in U$  — измеримые множества,  $\chi_e(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$  — характеристическая функция.  $\chi \in L^\infty(X, \mu)$ ,  $\forall e \in U$

$$\chi_e \in L^p(X, \mu) \text{ при } 1 \leq p < +\infty \Leftrightarrow \int_X (\chi_e(x))^p d\mu < +\infty \Leftrightarrow \mu e < +\infty$$

**Теорема 3.19.**  $(X, U, \mu)$  — пространство с мерой  $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \{\chi_e\}_{e \in U} & \text{ — полное семейство в } L^\infty(X, \mu) \\ \{\chi_e\}_{e \in U, \mu E < +\infty} & \text{ — полное семейство в } L^p(X, \mu), 1 \leq p < +\infty \end{aligned}$$

Для доказательства этой теоремы нужно будет вспомнить теорему Лебега из анализа (она у нас уже была).

**Теорема 3.20** (Лебег).  $\{h_n(x)\}_{n=1}^\infty$  — измеримые,  $\varphi(x)$ .  
 $\int_X \varphi(x) d\mu < +\infty, |h_n(x)| \leq \varphi(x)$  п.в. на  $X$

$$h_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.в. по } \mu} h(x) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X h_n(x) d\mu = \int_X h(x) d\mu$$

*Доказательство.* Вспомним конструкцию, которая была в математическом анализе.  $f$  — измеримая,  $f(x) \geq 0, x \in X$ . Рассмотрим разбиение множества  $X$ , а по нему построим соответствующую простую функцию

$$\begin{aligned} n \in \mathbb{N} \quad e_k &= \left\{ x \in X : \frac{k}{n} \leq f(x) < \frac{k+1}{n} \right\}, k = 0, 1, \dots, n^2 - 1 \\ e_{n^2} - \{x : f(x) \geq n\} &\Rightarrow X = \bigcup_{k=0}^{n^2} e_k, e_k \cap e_j = \emptyset (k \neq j) \end{aligned}$$

Теперь построим измеримые функции, потом они будут простыми.

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{k}{n} \chi_{e_k} \quad 0 \leq g_n(x) \leq f(x), x \in X$$

$$f(x) \leq g_n(x) + \frac{1}{n}, x \in \bigcup_{k=0}^{n^2-1} e_k$$

Теперь все готово, чтобы обсудить случай  $L^\infty$ . Пусть  $f \in L^\infty(X, \mu) \Rightarrow n \geq \|f\|_\infty \Rightarrow \mu(e_{n^2}) = 0. \Rightarrow |f(x) - g_n(x)| \leq \frac{1}{n}$  для п.в.  $x \in X$   
 $\Rightarrow \|f - g_n\|_\infty \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, g_n \in \mathcal{L}\{\chi_e\}_{e \in U}$   
 $\Rightarrow f \in \overline{\mathcal{L}\{\chi_e\}_{e \in U}}$

Посмотрим теперь, что происходит с конечными  $p$ . Тут вспоминаем теорему Лебега, она была верна для интеграла Лебега, но верна и для

произвольной меры.

$$\begin{cases} f(x) \in L^p(X, \mu), 1 \leq p < +\infty & |f(x) - g_n(x)|^p \leq |f(x)|^p \\ g_n(x)f(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.в.}} 0 & \end{cases} \xRightarrow{\text{Лебег}}$$

все, что надо — убедиться, что мера конечная  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_X |f - g_n|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = 0$

$$\begin{aligned} f \in L^p \Rightarrow \mu e_k < +\infty \quad f(x) \geq \frac{k}{n}, x \in e_k \Rightarrow \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} &\geq \left( \int_{e_k} \left( \frac{k}{n} \right)^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= \frac{k}{n} (\mu e_k)^{\frac{1}{p}} \Rightarrow \mu e_k < +\infty \\ &\Rightarrow f \in \overline{\mathcal{L}\{\chi_e\}_{e \in U, \mu e < +\infty}} \end{aligned}$$

Теперь покажем, что для произвольных  $f$  рассуждение тоже верно. Рассмотрим замыкание линейное оболочка

$$\begin{aligned} \begin{cases} f : X \rightarrow \mathbb{R}, \Rightarrow f = f_+ - f_-, f_+(x) \geq 0, f_-(x) \geq 0 \\ f : X \rightarrow \mathbb{C} \Rightarrow f = u + iv; u, v : X \rightarrow \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \\ \forall f \in L^p, f \in \overline{\mathcal{L}\{\chi_e\}_{e \in U}} \\ (p = \infty \forall e, p < +\infty, \mu e < +\infty) \end{aligned}$$

□

Теперь, зная эту теорему, посмотрим, какое множество будет полным в пространстве  $l^\infty$

**Следствие 3.2.**  $l^\infty, A \subset \mathbb{N}, X^A = \{x_n^A\}_{n=1}^\infty, X_n^A = \begin{cases} 1, & n \in A \\ 0, & n \notin A \end{cases} \Rightarrow$

$\{X^A\}_{A \subset \mathbb{N}}$  — полное семейство в  $l^\infty$

*Доказательство.*  $l^\infty = L^\infty(\mathbb{N}, \mu), \mu(n) = 1 \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall A \subset \mathbb{N}, A$  — измеримо

$$\chi_A = X^A \Rightarrow \{X^A\}_{A \subset \mathbb{N}} \text{ — полное семейство}$$

□

**Теорема 3.21.**  $(\mathbb{R}^n, U, \lambda)$ ,  $\lambda$  — классическая мера Лебега.  $U$  — измеримые по Лебегу множества.

$$\mathcal{R} = \left\{ \Delta = \prod_{j=1}^n [a_j, b_j), a_j < b_j; a_j, b_j \in \mathbb{R} \right\} \text{ — множество ячеек}$$

$$\Rightarrow \{\chi_\Delta\}_{\Delta \in \mathcal{R}} \text{ — полное семейство в } L^p(\mathbb{R}^n, \lambda), 1 \leq p < +\infty$$

Достаточно рассмотреть характеристические множества ячеек.

*Доказательство.* Собираемся приблизить множество линейной комбинацией характеристических функций ячеек. Вспомним определение внешней меры.

$$e \in U, \lambda(e) < +\infty$$

$$\lambda(e) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(\Delta_k), e \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k, \Delta_k \in \mathcal{R}, \Delta_k \cap \Delta_j = \emptyset \right\}$$

Сначала просто по определению нижней грани.  $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \{\Delta_k\}_{k=1}^n$ .

$$\lambda(e) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(\Delta_k) < \lambda(e) + \varepsilon.$$

$$e \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k, \Delta_k \in \mathcal{R}, \Delta_k \cap \Delta_j = \emptyset \text{ при } k \neq j.$$

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k, e \subset A, \lambda(A \setminus e) < \varepsilon$$

$$\begin{aligned} \exists N \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=N+1}^{\infty} \lambda(\Delta_k) < \varepsilon, B = \bigcup_{k=1}^N \Delta_k \\ \Rightarrow \lambda(A \setminus B) < \varepsilon \end{aligned}$$

$$\|\chi_e - \chi_b\|_p \leq \|\chi_e - \chi\|_p + \|\chi_A - \chi_B\|_p \leq$$

$$\left( \int_{A \setminus e} 1 d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_{A \setminus B} 1 d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon^{\frac{1}{p}} + \varepsilon^{\frac{1}{p}} = 2\varepsilon^{\frac{1}{p}}$$

$$\chi_b = \sum_{k=1}^N \chi_{\Delta_k} \in \mathcal{L}\{\chi_\Delta\}_{\Delta \in \mathcal{R}}$$

$$\left\{ \overline{\mathcal{L}\{\chi_e\}_{e \in U}} = L^p \right. \quad \Rightarrow \quad \left. \overline{\mathcal{L}\{\chi_\Delta\}_{\Delta \in \mathcal{R}}} = L^p, 1 \leq p < +\infty \right.$$

□



**Следствие 3.3.**  $E \subset \mathbb{R}^n$ ,  $E$  — измеримые по Лебегу,  $1 \leq p < +\infty$   
 $\Rightarrow L^p(E, \lambda)$  — сепарабельные  
 ( $\lambda$  — мера лебега)

*Доказательство.* Докажем, что  $L^p(\mathbb{R}^n, \lambda)$  — сепарабельное.

$$\mathcal{R} = \left\{ \Delta = \prod_{j=1}^n [a_j, b_j), a_j < b_j, a_j, b_j \in \mathbb{R} \right\} \text{ — полные семейства в } L^p$$

Теперь мы возьмём только такие ячейки, полуинтервалы которых мы перемножаем, имеют рациональные концы. Пока что можем сказать, что это счётное множество.

$$R_0 = \left\{ \Delta = \prod_{j=1}^n [a_j, b_j), a_j < b_j, a_j, b_j \in \mathbb{Q} \right\} \text{ — счётное множество}$$

$$\Delta \in \mathcal{R} \quad 0$$

$$\Rightarrow \exists \Delta_0 \in R_0, \Delta \subset \Delta_0, \lambda(\Delta_0 \setminus \Delta) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \|\chi_{\Delta_0} - \chi_{\Delta}\|_p = \|\chi_{\Delta_0 \setminus \Delta}\|_p = \left( \int_{\Delta_0 \setminus \Delta} 1 dx \right)^{\frac{1}{p}} = (\lambda(\Delta_0 \setminus \Delta))^{\frac{1}{p}} < \varepsilon^{\frac{1}{p}}$$

$$\Rightarrow \forall \Delta \in \mathcal{R} \quad \chi_{\Delta} \in \overline{\mathcal{L}\{\chi_{\Delta}\}_{\Delta \in R_0}}$$

$R_0$  — полное счётное семейство  $\xRightarrow{\text{утверждение}} L^p(\mathbb{R}^n, \lambda)$  — сепарабельное.

$$E \subset \mathbb{R}^n, E \text{ — измеримое, } f \in L^p(E, \lambda)$$

$$\text{пусть } f(x) = 0, x \in \mathbb{R}^n \setminus E \Rightarrow f \in L^p(\mathbb{R}^n, \lambda)$$

$$\Rightarrow L^p(E, \lambda) \text{ — подпространство } L^p(\mathbb{R}^n, \lambda) \Rightarrow L^p(E, \lambda) \text{ — сепарабельно}$$

□

**Определение 3.23.**  $(X, U, \mu)$  — пространство с мерой.  $(X, \rho)$  — метрическое пространство.  $\mu$  — **борелевская мера**, если  $(G \text{ — открытое} \Rightarrow G \in U)$

$\beta$  — минимальная  $\sigma$ -алгебра, содержащая все открытые множества.  $\beta$  — **борелевские множества**, то есть  $\beta \subset U$ .

Чем же хороши борелевские меры? Оказывается, они безумно связаны с непрерывными функциями

**Замечание 3.9.** Пусть  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  — непрерывная  $\Rightarrow f^{-1}((c, +\infty))$ ,  $c \in \mathbb{R}$ ,  $(c, +\infty)$  — открытое в  $\mathbb{R}$ . Определение непрерывной функции из топологии: прообраз любого открытого множества открыт. Так как прообраз  $f$  открыт в  $X \Rightarrow f$  — измеримая по  $\mu$ , если  $\mu$  — борелевская.

**Замечание 3.10.**  $\lambda$  — мера Лебега в  $\mathbb{R}^n$ , тогда  $\lambda$  — борелевская.

Еще более специальное определение. Этим свойством мера Лебега тоже обладает.

**Определение 3.24** (регулярная мера).  $(X, U, \mu)$ ,  $(X, \rho)$ ,  $\mu$  — борелевская.  $\mu$  — **регулярная мера**, если  $\forall e \in U$

$$\sup_{\{F \subset e, F \text{ — замкнутое}\}} \{\mu(F)\} = \mu e = \inf_{\{e \subset G, G \text{ — открытое}\}} \mu G$$

**Замечание 3.11.**  $\lambda$ -мера Лебега — регулярная.

На самом деле эти 2 свойство друг из друга следуют, но мы это доказывать не будем.

**Теорема 3.22.**  $(X, U, \mu)$ ,  $(X, \rho)$ ,  $\mu$  — регулярная мера  $\Rightarrow$  непрерывная функция плотна в  $L^p(X, \mu)$ ,  $1 \leq p < +\infty$ .

$$\overline{C(X) \cap L^p(X, \mu)}^{\|\cdot\|_p} = L^p(X, \mu)$$

*Доказательство.* Мы уже знаем, что полное семейство — это семейство характеристических функций всех измеримых функций, и мы будем этим изо всех сил пользоваться. Возьмём какую-то характеристическую функцию из множества и ее будем приближать непрерывными функциями.

$\{\chi_e\}_{e \in U, \mu e < +\infty}$  — полное семейство.

пусть  $e \in U$ ,  $\mu e < +\infty$ ,  $0, \mu$  — регулярная  $\Rightarrow \exists F \subset e \subset G$ ,  $F$  — замкнутое,  $G$  — открытое.  $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$

Когда мы попадем в  $X \setminus G$  она будет равна нулю.

$$\varphi(x) = \frac{\rho(x, X \setminus G)}{\rho(x, X \setminus G) + \rho(x, F)}$$

Нужно позаботиться о том, чтобы знаменатель не был равен нулю.

$\rho(x, A)$  — непрерывная функция  $\forall A \subset X$ .  $X \setminus G$  — замкнутое,  $F$  — замкнутое. Если  $\rho(x, F) = 0 \Rightarrow x \in F \Rightarrow x \notin X \setminus G \Rightarrow \rho(x, X \setminus G) > 0$

$$\Rightarrow \rho(x, X \setminus G) + \rho(x, F) > 0 \forall x \in X \Rightarrow \varphi \in C(X)$$

$$\varphi(x) = 0, x \in X \setminus G, \varphi(x) = 1, x \in F \quad \forall x \in X \quad 0 \leq \varphi(x) \leq 1$$

Понятно, что модуль  $\varphi(x)$  совпадает с характеристической функцией множества  $e$ .

$$\begin{aligned} |\chi_e(x) - \varphi(x)| &\leq 1 \quad \forall x \in X \\ \chi_e(x) - \varphi(x) &= 0 \quad x \in F \text{ или } x \in X \setminus G \\ \Rightarrow \|\chi_e - \varphi\|_p &= \left( \int_X |\chi_e(x) - \varphi(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \left( \int_{G \setminus F} |\chi_e(x) - \varphi(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\leq (\mu(G \setminus F))^{\frac{1}{p}} < \varepsilon^{\frac{1}{p}} \\ &\Rightarrow \chi_e \in \overline{C(X)}^{\|\cdot\|_p} \end{aligned}$$

Тем самым мы доказали, что  $\chi_e(x)$  может быть приближена непрерывными функциями. Может быть, стоит отметить, что  $\mu G < \mu e + \varepsilon < +\infty$   $\int_X |\varphi(x)|^p d\mu - \int_G |\varphi(x)|^p d\mu < \mu G \Rightarrow \varphi \in L^p(X, \mu)$

□

Раз утверждение верно для любых регулярных мер, то оно верно и для меры Лебега.

## Глава 4

# Метрические компакты

Топологический компакт: из любого подпокрытия можно выбрать конечное подпокрытие.

**Утверждение 4.1** (из топологии). 1.  $(X, \rho)$  – метрическое пространство,  $K \subset X$ ,  $K$  – компакт  $\Leftrightarrow K$  – счётно-компактен, то есть

$$\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in K \quad \exists \{x_{n_j}\}_{j=1}^{\infty} \text{ т.ч. } \exists \lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_j} = x_0, x_0 \in K$$

2.  $K$  – компакт  $\Rightarrow K$  – ограниченное замкнутое множество.

**Пример 4.1.**  $\mathbb{R}^n$ ,  $K$  – компакт  $\Leftrightarrow K$  – ограниченное, замкнутое

**Замечание 4.1.** НИ В КОЕМ СЛУЧАЕ из того, что  $K$  – ограниченное замкнутое, не следует, что  $K$  – компакт

**Замечание 4.2.**  $l^2 = \left\{ x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \|x\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty, x_n \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \right\}$

$D = \{x \in l^2 : \|x\|_2 \leq 1\}$  – ограниченное, замкнутое

$e_n = (0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_n, 0, 0, \dots)$ ,  $n \neq m \quad \|e_n - e_m\|_2 = \sqrt{2} \Rightarrow \forall \{e_{n_j}\}$  – не фундаментальная. Тогда  $\nexists \lim_{j \rightarrow \infty} e_{n_j} \Rightarrow D$  – не компакт.

Ещё одно *напоминание*, кто такие относительно компактные множества.

**Определение 4.1** (относительный компакт).  $(X, \rho), A \subset X, A$  — относительно компактно, если  $\overline{A}$  — компакт. Или можно сказать

$$\Leftrightarrow \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in A \exists \{x_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}, \exists \lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_j} = x_0, x_0 \in X$$

Предел не обязательно принадлежит  $A$ .  $A$  в компакте предел обязательно лежит в  $A$ .

Мы получим новое описание компактных и относительно компактных множеств. В  $\mathbb{R}^n$  мы описывали относительные компакты. Для описания компакта нужно добавить замыкание.

Еще несколько определений:

**Определение 4.2** ( $\varepsilon$ -сеть).  $(X, \rho)$  — метрическое пространство.  $A \subset X, \varepsilon > 0$   
 $F$  —  $\varepsilon$ -сеть для  $A$ , если

$$\forall a \in A \exists f \in F : \rho(a, f) < \varepsilon$$

$$(\Leftrightarrow \forall a \in A B_{\varepsilon}(a) \cap F \neq \emptyset) \Leftrightarrow (A \subset \bigcup_{f \in F} B_{\varepsilon}(f))$$

**Определение 4.3.**  $A$  — вполне ограниченное множество, если для  $\forall \varepsilon > 0 \exists$  конечная  $\varepsilon$ -сеть для  $A$ .

Описание компактных и относительно-компактных множеств в терминах вполне ограниченных — как раз наша главная цель. Мы будем использовать это новое описание так: если мы в полном метрическом пространстве, то там относительная компактность и вполне ограниченность — одно и то же. А проверять вполне ограниченность — гораздо проще, чем проверять относительную компактность. Предъявим  $\varepsilon$ -сеть и всё!

**Замечание 4.3.**  $(X, \rho), A$  — вполне ограниченное  $\Rightarrow A$  — ограничено.

**Пример 4.2.**  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2) = l_n^2$   $A \subset \mathbb{R}^n$ .  $A$  — ограниченное  $\Leftrightarrow A$  вполне ограниченное

*Доказательство.*  $A$  — ограниченное  $\Leftrightarrow \exists M > 0, \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in A \Rightarrow |x_j| \leq M$   
 $A \subset Q = \{|x_j| \leq M, 1 \leq j \leq n\}$  Как же построить  $\varepsilon$ -сеть?

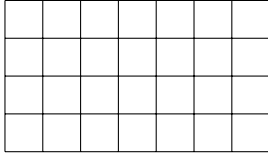


Рис. 4.1: классный поясняющий рисунок

Пусть  $\varepsilon > 0$ ,  $Q = \bigcup Q_j$ ,  $l$  – сторона  $Q_j$

$$\text{diam } Q_j = \sup_{x, y \in Q_j} \rho(x, y) = \sqrt{n} \cdot l < \varepsilon \Rightarrow l < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$$

$$l = \frac{M}{N}, N \in \mathbb{N}, \exists N : \frac{M}{N} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \Rightarrow$$

$F$  – вершины  $Q_j$  –  $\varepsilon$ -сеть

ЕС = equicontinuous

□

Убедимся в пространстве  $l^2$

**Пример 4.3.**  $D \subset l^2, D = \{x \in l^2 : \|x\|_2 \leq 1\}$  Убедимся, что  $D$  – не вполне ограниченное.

*Доказательство.*

$$\{e_n\}_{n=1}^\infty, e_n = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_n, 0, \dots), n \neq m, \|e_n - e_m\| = \sqrt{2}$$

$$B_{\frac{1}{2}}(e_n) \cap B_{\frac{1}{2}}(e_m) = \emptyset$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}, F = \frac{1}{2}\text{-сеть для } D$$

$$\Rightarrow \forall n \exists f_n \in F \cap B_{\frac{1}{2}}(e_n), f_n \neq f_m (n \neq m) \text{ так как } B_{\frac{1}{2}}(e_n) \cap B_{\frac{1}{2}}(e_m) = \emptyset$$

$$\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset F \Rightarrow F \text{ – не конечное}$$

□

Теперь посмотрим для  $l^\infty$

**Пример 4.4.**  $\Pi = \{x = \{x_n\}_{n=1}^\infty, |x_n| < \frac{1}{2^n}\} \subset l^\infty$ . Проверим, что  $\Pi$  – вполне ограничено. 0

$$\exists M \in \mathbb{N} \quad \left( \sum_{k=N+1}^\infty \left( \frac{1}{2^k} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

$$\Pi^* = \{x = \{x_1, \dots, x_N, 0, 0, \dots\}\}, |x_j| \leq \frac{1}{2^j}, 1 \leq j \leq N \quad x_{N+k} = 0, k \in \mathbb{N}$$

Если мы забудем про нули, то можем думать, что  $\Pi^*$  лежит в  $\mathbb{R}^n$ , и там оно ограниченное, а значит и вполне ограниченное.  $\Pi^* \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\Pi^*$  – ограниченное  $\Rightarrow$  вполне ограниченное  $\Rightarrow \exists F \subset \Pi^*$  – конечная  $\varepsilon$ -сеть. Докажем, что  $F$  –  $2\varepsilon$ -сеть для  $\Pi$ .

$$\begin{aligned} x \in \Pi &\Rightarrow x = \underbrace{(x_1, \dots, x_N, 0, \dots)}_y + \underbrace{(0, 0, \dots, 0, x_{N+1}, x_{N+2}, \dots)}_z \\ \|z\|_2 < \varepsilon \quad y \in \Pi^* &\Rightarrow \exists f \in F : \|y - f\|_2 < \varepsilon \Rightarrow \\ \|x - f\|_2 = \|(y - f) + z\|_2 &\leq \|y - f\|_2 + \|z\|_2 < 2\varepsilon \\ &\Rightarrow \Pi - \text{вполне ограничено} \end{aligned}$$

Таким образом, все множества можно описать в пространстве  $l^p$ . Перед тем, как доказывать основную теорему, несколько свойств вполне ограниченных множеств.

- Свойство 4.1.**
1.  $A$  – вполне ограничено  $\Rightarrow \bar{A}$  – вполне ограничено
  2.  $A \subset Y \subset X$ ,  $A$  – вполне ограничено в  $X \Rightarrow A$  – вполне ограниченное в  $Y$ .
  3.  $A$  – вполне ограничено  $\Rightarrow (A, \rho)$  – сепарабельно.

*1 свойство.*  $A \subset X, \varepsilon > 0$ .  $F$  – конечная  $\varepsilon$ -сеть для  $A$ . Проверим, что  $F$  –  $(2\varepsilon)$ -сеть для  $\bar{A}$

$$\begin{aligned} \text{пусть } x \in \bar{A} &\Rightarrow \exists y \in A : \rho(x, y) < \varepsilon, \exists f \in F : \rho(y, f) < \varepsilon \\ &\Rightarrow \rho(x, f) \leq \rho(x, y) + \rho(y, f) < 2\varepsilon \end{aligned}$$

□

*2 свойство.* Проблема в том, что надо двигать точки. Мы уже так делали, когда доказывали сепарабельность.  $A \subset Y \subset X, \varepsilon > 0, \{x_k\}_{k=1}^n$  –  $\varepsilon$ -сеть для  $A, x_k \in X$   
 $A \subset \bigcup_{k=1}^n B_\varepsilon(x_k)$ , если  $A \cap B_\varepsilon(x_k) \neq \emptyset$ , то пусть  $y_k \in A \cap B_\varepsilon(x_k)$  (если  $= \emptyset$ , то не будем выбирать)

Мы найдем  $\varepsilon$ -сеть из точек множества  $A$ , тогда она точно будет обслуживать и  $Y$ . Как же и куда сдвигать точки?

$$E = \{y_k\}_{k=1}^n$$

$$\begin{aligned} x \in A \Rightarrow \exists x_k : \rho(x, x_k) < \varepsilon \Rightarrow A \cap B_\varepsilon(x_k) \neq \emptyset \Rightarrow y_k \in B_\varepsilon(x_k) \Rightarrow \\ \rho(x_k, y_k) < \varepsilon \Rightarrow \rho(x, y_k) \leq \rho(x, x_k) + \rho(x_k, y_k) < 2\varepsilon \Rightarrow \\ E - (2\varepsilon)\text{-сеть для } A, E \subset A \end{aligned}$$

□

3 свойство.  $n \in \mathbb{N}$ ,  $F_n - (\frac{1}{n})$ -сеть для  $A$ ,  $F_n$  — конечное.

$$F \text{ (счетное) } = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \text{ — плотно в } A, \text{ то есть } A \subset \overline{F}$$

□

**Утверждение 4.2** (о разбиении).  $(X, \rho), A \subset X, \varepsilon > 0$ .  $F$  — конечная  $\varepsilon$ -сеть для  $A \Rightarrow$

$$\exists \{C_j\}_{j=1}^n \quad A = \bigcup_{j=1}^n C_j \quad C_j \cap C_k = \emptyset, j \neq k, \text{diam } C_j \leq 2\varepsilon, C_j \neq \emptyset$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} F = \{x_k\}_{k=1}^n, A \subset \bigcup_{k=1}^n B_\varepsilon(x_k) \\ C_1 = A \cap B_\varepsilon(x_1) \\ C_2 = (A \cap B_\varepsilon(x_2)) \setminus C_1 \\ C_k = A \cap B_\varepsilon(x_k) \setminus \left( \bigcup_{j=1}^{k-1} C_j \right) \quad k = 2, \dots, n \end{aligned}$$

если  $C_k = \emptyset$ , то забудем о нём.  $C_k \subset B_\varepsilon(x_k) \Rightarrow \text{diam } C_k \leq 2\varepsilon$

□

Теперь у нас всё готово для доказательства теоремы о том, как описывать компакты в терминах вполне ограниченных множеств.



**Теорема 4.1** (Хаусдорф).  $(X, \rho)$  – метрическое пространство,  $A \subset X$ .

$A$  – компакт  $\Leftrightarrow$

1.  $A$  полное, то есть  $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A, \{x_n\}$  – фундаментальная  $\exists \lim x_n = x_0 \in A$
2.  $A$  – вполне ограничено

Высока вероятность, что спросят на экзамене эту теорему, попытаюсь вытянуть.

*Доказательство.*  $\Rightarrow$

$A$  – компакт,  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  – фундаментальная,  $x_n \in A$ .

$A$  – компакт  $\Rightarrow \exists \{x_{n_j}\}, \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_j} = x_0, x_0 \in A$ . Тогда по свойствам фундаментальных последовательностей  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow (A, \rho)$  – полное метрическое пространство. Проверили первое условие. Теперь надо проверить второе: сначала покроем наш компакт безумным количеством шариков, а они ведь открытые множества, и среди них существует конечное подпокрытие.

пусть  $\varepsilon > 0$   $A \subset \bigcup_{a \in A} B_{\varepsilon}(a) \wedge A$  – компакт  $\Rightarrow, \exists \{a_j\}_{j=1}^n, a_j \in A :$

$$A \subset \bigcup_{j=1}^n B_{\varepsilon}(a_j) \Rightarrow F = \{a_j\}_{j=1}^n - \varepsilon\text{-сеть для } A$$

Это была тривиальная часть теоремы.  $\Leftarrow$ .

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in A$ . Собираемся применять лемму о разбиении.  $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$ .

По лемме  $\exists \{C_j^{(1)}\}_{j=1}^{N_1} \cdot A = \bigcup_{j=1}^{N_1} C_j^{(1)}, \text{diam } C_j^{(1)} \leq 1$ . Когда-то в детстве мы азнимались бесконечным делением пополам. Тут будем делать то же самое.  $\exists j : C_j^{(1)}$  содержит бесконечное число элементов  $\{x_n\}$ .  $A_1 :=$

$C_j^{(1)}$ .

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2^2}, \text{ по лемме о разбиении к } A_1 \Rightarrow \exists \left\{ C_j^{(2)} \right\}_{j=1}^{N_2}$$

$$\text{diam } C_j^{(2)} \leq \frac{1}{2} \quad A_1 = \bigcup_{j=1}^{N_2} C_j^{(2)}$$

$\exists 1 \leq j \leq N_2 \quad C_j^{(2)}$  содержит бесконечное количество элементов в  $x_n$

$$\text{и так далее } \{A_m\}_{m=1}^{\infty}, A_{m+1} \subset A_m, \text{diam } A_m \leq \frac{1}{2^m}$$

$A_m$  содержит бесконечное число элементов  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  (\*)

$$x_{n_1} \in A_1, \quad \exists n_2 > n_1 : x_{n_2} \in A_2 \text{ т.к. } (*)$$

$$\text{и так далее } \exists n_k \text{ т.ч. } n_k > n_{k-1} \quad x_{n_k} \in A_k$$

$$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}, x_{n_k} \in A_k, \text{diam } A_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \quad A_{k+1} \subset A_k$$

$$\Rightarrow \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} - \text{фундаментальная} \wedge A - \text{полное} \\ \Rightarrow \exists \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0, x_0 \in A$$

□

Часто описывают компакт, но фактически говорят об относительный компакте. Для описания компакта, опять же, надо просто добавить замкнутость.

**Следствие 4.1.**  $(X, \rho)$  – метрическое,  $A \subset X$ .

1.  $A$  – относительно компактно  $\Rightarrow A$  вполне ограничено
2.  $(X, \rho)$  – полное,  $A$  – относительно компактно  $\Leftrightarrow A$  вполне ограничено

Будем изо всех сил пользоваться теоремой Хаусдорфа.

*1 утверждение.*  $A$  – относительно компактно,  $\Rightarrow \bar{A}$  – компакт, тогда по теореме Хаусдорфа  $\bar{A}$  – вполне ограничено,  $A \subset \bar{A} \Rightarrow A$  вполне ограничено. □

*2 утверждение.*  $(X, \rho)$  – полное,  $A$  – вполне ограничено, тогда по ранее доказанному свойству ( $\bar{A}$  – вполне ограничено  $\wedge \bar{A}$  – замкнутое в  $X \Rightarrow \bar{A}$  – полное)  $\Rightarrow$  по теореме Хаусдорфа  $\bar{A}$  компакт  $\Rightarrow A$  – относительно компактно. □

Оказывается, можно вместо конечных  $\varepsilon$ -сетей можно утверждать чуть большее.

**Следствие 4.2.**  $(X, \rho)$  – полное,  $A \subset X$ . Если для  $\forall \varepsilon > 0 \exists$  относительно компактная  $\varepsilon$ -сеть, то  $A$  – относительно компактно

*Доказательство.*  $0, F$  –  $\varepsilon$ -сеть для  $A$ .  $F$  – относительно компактно  $\Rightarrow F$  вполне ограничено,  $\exists E$  – конечная  $\varepsilon$ -сеть для  $F \Rightarrow E$  –  $(2\varepsilon)$ -сеть для  $A \Rightarrow A$  – вполне ограничено  $\Rightarrow A$  – относительно компактно.  $\square$

## 4.1. Относительно компактные множества в $C(K)$

**Определение 4.4.**  $(K, \rho)$  – метрический компакт.  $C(K) = \{f : K \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C}), f \text{ – непрерывная}\}$ ,  $\|f\| = \max_{x \in K} |f(x)|$ .  $\Phi \subset C(K)$ .  $\Phi$  – **равностепенно непрерывно**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall f \in \Phi, \forall x, y \in K, \rho(x, y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

$EC$  – equicontinuous.

Равностепенная непрерывность отличается от равномерной непрерывности тем, что  $\delta$  не зависит от  $f$ , но от  $\varepsilon$  конечно зависит. Некоторый вариант теоремы Арцелла-Асколи, который, возможно, доказывали на дифурах:

**Теорема 4.2 (Асколи-Арцелла).**  $K$  – компакт,  $(K, \rho)$ ,  $\Phi \subset C(K)$ .  $\Phi$  – относительно компактно  $\Leftrightarrow$

1.  $\Phi$  – ограниченное в  $C(K)$
2.  $\Phi$  – равностепенно непрерывно ( $\Phi \in EC$  equicontinuous)

*Доказательство.* С самого начала отметим, что  $C(K)$  – полное. Вместо проверки относительной компактности  $\Phi$  будем проверять вполне ограниченность.

$\Rightarrow$

$\Phi$  – относительно компактно  $\Rightarrow \Phi$  – вполне ограничено  $\Rightarrow \Phi$  – ограничено, то есть  $\exists M \geq 0$  т.ч.  $\|f\| \leq M \forall f \in \Phi \Leftrightarrow \forall x \in K, \forall f \in \Phi |f(x)| \leq$

М.  $\varepsilon > 0 \exists \varepsilon$ -сеть  $\{\varphi_j\}_{j=1}^n, \varphi_j \in C(K), \varphi_j$  – равномерно непрерывна  
 $\exists \delta_j > 0$

$x, y \in K, \rho(x, y) < \delta_j \Rightarrow |\varphi_j(x) - \varphi_j(y)| < \varepsilon$

$\delta = \min_{1 \leq j \leq n} \delta_j$

здесь лекция закончилась

при описании относительного компакта мы получили такой результат:  
 $C(K)$  – полное  $\Rightarrow \Phi$  относительный компакт  $\Leftrightarrow \Phi$  – вполне ограничено. Будем этим пользоваться.

$\Rightarrow \Phi$  – вполне ограниченное  $\Rightarrow \Phi$  – ограничено

Пусть  $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \{\varphi_j\}_{j=1}^n$  –  $\varepsilon$ -сеть для  $\Phi$ .  $\varphi_j \in C(K) \Rightarrow \varphi_j$  – равномерно непрерывна

$\exists \delta_j > 0 \forall x, y \in K, \rho(x, y) < \delta_j \Rightarrow |\varphi_j(x) - \varphi_j(y)| < \varepsilon$

$$\delta = \min_{1 \leq j \leq n} \delta_j, \delta > 0$$

пусть  $f \in \Phi \Rightarrow \exists j : \|f - \varphi_j\| < \varepsilon$  то есть

надо оценить этот модуль через неравенство треугольника; справа, очевидно, будет 3 слагаемых

$$\max_{x \in K} |f(x) - \varphi_j(x)| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \text{пусть } x, y \in K, \rho(x, y) < \delta, |f(x) - f(y)| &\leq \underbrace{|f(x) - \varphi_j(x)|}_{< \varepsilon} + \\ &+ \underbrace{|\varphi_j(x) - \varphi_j(y)|}_{< \varepsilon \text{ так как } \delta \leq \delta_j} + |\varphi_j(y) - f(y)| < 3\varepsilon \end{aligned}$$

мы и проверили равностепенную непрерывность. Тривиальная часть доказательства закончена.

$\Leftarrow$

$\Phi$  – ограничено  $\Rightarrow \exists M > 0 : f \in \Phi \Rightarrow \|f\| \leq M \Rightarrow |f(x)| \leq M \forall x \in K$ .  
 Надо по определению построить конечную  $\varepsilon$ -сеть в множестве непрерывных функций. Но мы воспользуемся двумя облегчающими хитростями: 1.  $\Phi \subset C(K)$ , а  $C(K) \subset m(K)$ , и если множество имеет  $\varepsilon$ -сеть в большем пространстве, то в меньшем и подавно. Более того, сеть можно построить из элементов меньшего множества. Мы выберем ограниченные функции. 2. выберем относительно компактную  $\varepsilon$ -сеть в  $m(K)$  вместо конечной в  $C(K)$ , и этого будет достаточно.

$$\varepsilon > 0 \quad \Phi \subset C(K) \subset m(K) = \{f : K \rightarrow \mathbb{C}, \sup_{x \in K} |f(x)| < +\infty\}$$

$\varepsilon > 0 \quad \exists \delta$  из определения (EC)

применим к этой парочке лемму о разбиении  $(K, \rho), \delta > 0$

$$\exists \{C_j\}_{j=1}^n, \text{diam } C_j < \delta, K = \bigcup_{j=1}^n C_j, C_j \cap C_i = \emptyset (j \neq i), C_j \neq \emptyset$$

$$\Psi = \left\{ g(x) = \sum_{j=1}^n y_j \chi_{C_j}(x) \right\} \subset m(K), y_j \in \mathbb{C}, 1 \leq j \leq n$$

$$g \in \Psi, \|g\|_\infty = \sup_{x \in K} |g(x)| = \max_{1 \leq j \leq n} |y_j| = \|y\|_{l_n^\infty}, y = (y_1, \dots, y_n)$$

$$F : l_n^\infty \rightarrow \Psi, F(y) = \sum_{j=1}^n y_j \chi_{C_j}(x)$$

Мы выяснили, что  $F$  биекция, изометрия, линейное.

$Q = \{y = (y_1, \dots, y_n), |y_j| \leq M\}$  полидиск, что бы это пока не значило

$Q$  – компакт,  $F$  – непрерывна  $\Rightarrow F(Q)$  – компакт в  $m(K)$

$$E := F(Q), E = \left\{ g(x) = \sum_{j=1}^n y_j \chi_{C_j}(x), |y_j| \leq M \right\}$$

вот у нас есть компакт  $E$ , и мы собираемся проверить, что он и будет  $\varepsilon$ -сетью для  $\Phi$ . Будет полезно в каждом множестве выбрать по точке. Пусть  $x_j \in C_j, f \in \Phi, y_j := f(x_j)$ .

$$g(x) = \sum_{j=1}^n f(x_j) \chi_{C_j}(x), g \in E, |y_j| \leq M$$

Пусть  $x \in K \Rightarrow \exists j, x \in C_j \Rightarrow g(x) = f(x_j) \Rightarrow$

$$|f(x) - g(x)| = |f(x) - f(x_j)| < \varepsilon \text{ т.к. } \rho(x, x_j) < \delta$$

Вот это и то, что было обещано.  $E$  – компактная  $\varepsilon$ -сеть. □

**Замечание 4.4.** Условия теоремы не зависимы.

**Пример 4.5.**  $C[0, 1]. f_n(x) = x^2 + n, \{f_n\}$  – равностепенно непрерывны, но  $\{f_n\}$  не ограничено.

ограниченная, но не равностепенно непрерывная

**Пример 4.6.**  $C[0, 1], f_n(x) = x^n. \{f_n\}$  – ограничены, но не равностепенно непрерывны.

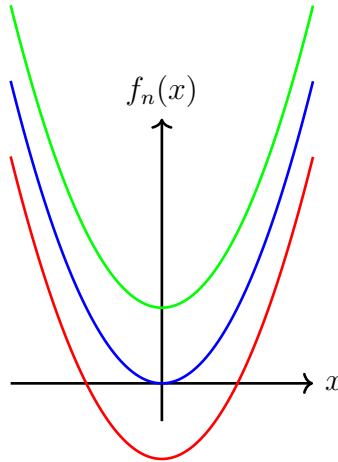


Рис. 4.2: Пример 4.5

**Теорема 4.1** (достаточные условия равностепенной непрерывности).  $(K, \rho)$  – компакт,  $\Phi \subset C(K)$ . Сначала какие-то абстрактные множества, потом будут более конкретные.

1. Если  $\exists M > 0, \alpha > 0, \beta > 0$  такие что

$$\forall f \in \Phi, (\forall x, y \in K \rho(x, y) < \beta) \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq M(\rho(x, y))^\alpha \\ \Rightarrow \Phi \in (EC)$$

2.  $C[a, b], \Phi \subset C[a, b]$ , пусть  $\exists L > 0$

$$\forall f \in \Phi \exists f'(x), x \in (a, b), |f'(x)| \leq L \Rightarrow \Phi \in (EC)$$

3. чуть более общий случай.  $K \subset G \subset \mathbb{R}^n$ ,  $K$  – компакт,  $G$  – открытое.

$$\exists L > 0 : \forall f \in \Phi, \exists \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \right| \leq L (1 \leq j \leq n), \forall x \in G \Rightarrow \Phi \in (EC)$$

4. про аналитические функции. предполагать можно будет гораздо меньшее.  $K \subset G \subset \mathbb{C}$ ,  $G$  – открытое,  $K$  – компакт.

$$\exists L > 0, f \in \Phi, f \text{ аналитическая в } G, \exists f'(x), \underbrace{|f(x)|}_{\text{ТУТ}} \leq L, \forall x \in G$$

ТУТ НЕ ПРОИЗВОДНАЯ, НА ЭКЗАМЕНЕ ЧАСТО ОШИБАЮТСЯ!!!!

Аналитичность – фантастическое свойство, в отличие от, например, дифференцируемости. Именно из-за неё ТАМ как раз и не производная.

1. Пусть  $\varepsilon > 0$ ,  $x, y \in K$ , пусть  $\rho(x, y) < \beta$ , пусть  $\delta < \beta, \rho(x, y) < \delta, \delta(\varepsilon) = ?$ .

$$\begin{aligned} f \in \Phi &\Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq M\rho(x, y)^\alpha < M\delta^\alpha \leq \varepsilon \\ &\Rightarrow \delta \leq \left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \\ \delta(\varepsilon) &= \min \left\{ \beta, \left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \right\}, \end{aligned}$$

□

Будем сводить остальные доказательства к первому пункту, находя  $M, \alpha, \beta$ . Второй пункт теперь совсем лёгкий.

2.  $\Phi \subset C[a, b]$ ,  $x, y \in [a, b]$ ,  $f \in \Phi$ . Для оценки разности  $f(x) - f(y)$  воспользуемся теоремой Лагранжа.

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= f'(c)(x - y) \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq |f'(c)||x - y| \leq L|x - y| \\ M &= L, \alpha = 1, (\beta - \forall) \xrightarrow{1} \Phi \in (EC) \end{aligned}$$

□

3. Пусть  $z, y \in K$  такие что  $[z, y] \subset G$ ,  $f \in \Phi$  Оценим разность  $f(y) - f(z)$ .

$$\begin{aligned} \Gamma : [0, 1] &\rightarrow [y, z] \\ \Gamma(t) &= ty + (1 - t)z, \Gamma(0) = z, \Gamma(1) = y \end{aligned}$$

опять можем воспользоваться теоремой Лагранжа

$$\begin{aligned} f(y) - f(z) &= f(\Gamma(1)) - f(\Gamma(0)) = (f(\Gamma(c)))'_t \\ (f(\Gamma(t)))'_t &= (f(ty + (1 - t)z))'_t = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\dots)(y_j - z_j) \end{aligned}$$

$$|f(\Gamma(t))'| \leq L \sum_{j=1}^n |y_j - z_j| \stackrel{\text{КБШ}}{\leq} L\sqrt{n} \left( \sum_{j=1}^n (y_j - z_j)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = L\sqrt{n}\rho(y, z)$$

Если выбрать  $\beta$  достаточно маленьким, то наш отрезок будет лежать в этом компакте.  $F = \mathbb{R}^n \setminus G$  – замкнутое,  $\rho(x, F)$  – непрерывная

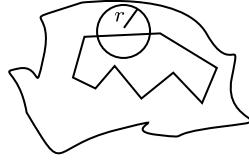


Рис. 4.3: Утопленность компакта

функция в  $\mathbb{R}^n \Rightarrow \rho(x, F)$  непрерывна на  $K \Rightarrow \exists x_o \in K, \rho(x_o, F) = \min_{x \in K} \rho(x, F)$

$$\begin{aligned} x_0 \notin F &\Rightarrow \rho(x_0, F) > 0, r := \rho(x_0, F) \\ \forall x \in K \ B_r(x) &\subset G, \beta = r \\ \rho(x, y) < r &\Rightarrow y \in B_r(x) \subset G \Rightarrow \\ &\text{отрезок } [x, y] \subset B_r(x) \subset G \\ &\Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq L\sqrt{n}\rho(x, y) \end{aligned}$$

$z$  и  $y$ , которые с самого начала были выбраны вместо  $x$  и  $y$ , чтобы не смущаться из-за  $dx$ , обратно превратились в  $x$  и  $y$ , все же поняли?

На пальцах: наш компакт настолько утоплен в  $G$ , что если мы возьмём шарик радиуса  $r$ , то шарик всё ещё лежит в  $G$ .  $\square$

4. Букву  $r$ , которую мы нашли в предыдущем пункте, будем изо всех сил использовать.  $K \subset G \subset \mathbb{C}$ . В 3 пункте выяснили, что  $\exists r > 0 : B_r(x) \subset G \forall x \in K, \beta = \frac{r}{3}$ .

$$\begin{aligned} x, y \in K, \rho(x, y) < \beta, \gamma &= \{\zeta \in \mathbb{C} : |x - \zeta| = 2\beta\} \\ f &\in \Phi \end{aligned}$$

разницу собираемся оценивать с помощью формулу Коши, поэтому никакие производные и не нужны!!!

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - x} d\zeta \\ f(y) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - y} d\zeta \\ f(x) - f(y) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\zeta) \frac{x - y}{(\zeta - x)(\zeta - y)} d\zeta \end{aligned}$$



оцениваем самым грубом образом, отправляя модули под интегралы

$$|f(\zeta)| \leq L, |\zeta - x| = 2\beta, |z - y| \geq \beta$$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq \frac{1}{2\pi} L \cdot |x - y| \cdot |\gamma| \cdot \frac{1}{(2\beta) \cdot \beta} = |x - y| L \frac{(2\beta) \cdot 2\pi}{(2\pi)(2\beta)\beta} = \\ &= \frac{L}{\beta} |x - y| \end{aligned}$$

и в обозначениях 1 пункта получаем  $M = \frac{L}{\beta}, \alpha = 1, \beta = \frac{r}{3}, \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \Phi \in (EC)$   $\square$

Перед тем, как мы покинем относительно компакты, пара упражнений, которые на экзамене спрашивали в качестве задачи на 5.

**Утверждение 4.3.**  $1 \leq p < +\infty$ .  $\Phi \subset l^p, \Phi$  – относительно компактно  $\Leftrightarrow$

1.  $\Phi$  – ограничено в  $l^p$

2.  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall x = \{x_j\}_{j=1}^\infty \in \Phi, \left( \sum_{j=N+1}^\infty |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$

**Утверждение 4.4.**  $\Phi \subset C_0, \Phi$  – относительно компактно  $\Leftrightarrow$

1.  $\Phi$  – ограничено

2.  $\varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall x \in \Phi \quad \sup_{j \geq N+1} |x_j| < \varepsilon$

Мы сейчас находимся на перепутье функционального анализа. Можно отправиться в Гильбертовы пространства, в линейные операторы или еще куда-то. Изучить-то придётся всё, но мы начинаем линейные операторы.

# **Часть II**

## **Линейные операторы**

## Глава 5

# Линейные операторы в линейных пространствах

Первый параграф про линейные пространства будет совсем простой, здесь будут самые тривиальные свойства, следующие из линейности.

### 5.1. Линейные операторы в линейных пространствах

**Определение 5.1** (Линейный оператор).  $X, Y$  — линейны над  $k$  ( $k = \mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ ).  $A : X \rightarrow Y$ ,  $A$  — **линейный оператор**, если

$$A(\alpha x + \beta z) = \alpha Ax + \beta Az, \quad x, z \in X, \alpha, \beta \in k$$

$\text{Lin}(X, Y)$  — множество линейных операторов из  $X$  в  $Y$ . Также нам понадобится линейное пространство над  $k$

$$\alpha \in k, A \in \text{Lin}(X, Y), (\alpha A)(x) := \alpha Ax, 0(x) = 0 \text{ (0 в пространстве } Y) \\ A, B \in \text{Lin}(X, Y), (A + B)(x) := Ax + Bx$$

Если  $X = Y$ , пишем только  $\text{Lin}(X)$ .

**Пример 5.1** (интегральный оператор).  $C[a, b], K(s, t) \in C([a, b] \times [a, b])$

$$f \in C[a, b], (\mathcal{K}f)(s) = \int_a^b k(s, t)f(t)dt \\ (\mathcal{K}f)(s) \in C[a, b], \mathcal{K} \in \text{Lin}(C[a, b])$$

**Пример 5.2** (оператор дифференцирования).  $X = C^{(1)}[0, 1] = \{f : f' \in C[0, 1]\}$ ,  $Y = C[0, 1]$ .  $f \in X, D(f) = f', D \in \text{Lin}(X, Y)$

**Пример 5.3** (оператор вложения).  $l^1 \subset l^2, x = \{x_n\}_{n=1}^\infty, \sum_{n=1}^\infty |x_n| < +\infty, x \in l^1 \Rightarrow \sum_{n=1}^\infty |x_n|^2 < +\infty \Rightarrow x \in l^2$

$$Ax = x, A \text{ оператор вложения } l^1 \xrightarrow{A} l^2$$

$$\forall 1 \leq p_1 < p_2 \leq +\infty \Rightarrow l^{p_1} \xrightarrow{A} l^{p_2}, Ax = x$$

$$A \in \text{Lin}(l^{p_1}, l^{p_2})$$

**Пример 5.4** (оператор, но не линейный).  $x = X$  — линейное пространство,  $x_0 \in X, x_0 \neq 0, Ax = x + x_0 \Rightarrow A$  — не линейный.

Перед тем, как доказывать теорему, еще одно небольшое определение.

**Определение 5.2** (Выпуклое множество).  $B \subset X, X$  — линейное пространство.  $B$  — **выпуклое**, если

$$\forall x, z \in B, \forall t, 0 \leq t \leq 1 \Rightarrow tx + (1 - t)z \in B$$

то есть отрезок, соединяющий любые две точки, полностью лежит в этом множестве

**Теорема 5.1** (простейшие свойства линейного оператора).  $X, Y$  — линейные пространства над  $k$  ( $\mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ ),  $A \in \text{Lin}(X, Y)$

1.  $L \subset X, L$  — подпространство в  $X \Rightarrow A(L)$  — подпространство в  $Y$  (образ подпространства — подпространство)
2.  $M \subset Y, M$  — подпространство в  $Y \Rightarrow \underbrace{A^{-1}(M)}_{\text{прообраз}}$  — подпространство в  $X$
3.  $B \subset X, B$  — выпуклое  $\Rightarrow A(B)$  — выпуклое в  $Y$
4.  $C \subset Y, C$  — выпуклое  $\Rightarrow A^{-1}(C)$  — выпуклое в  $X$
5. пусть  $A$  — биекция  $\Rightarrow A^{-1} \in \text{Lin}(Y, X)$

Все 5 свойств доказывать не будем, покажем только несколько и скажем, что остальные доказываются аналогично.

1.  $L$  — подпространство,  $y, v \in A(L), \alpha \in k$ . Наша мечта — проверить ( $\stackrel{?}{\Rightarrow} \alpha y + v \in A(L)$ ), не обязательно писать  $\alpha$  и  $\beta$ .

$$\Rightarrow \exists x, y \in L : (Ax = y \wedge Au = v) \Rightarrow A(\alpha x + u) = \alpha Ax + Au = \alpha y + v \\ \alpha x + u \in L \Rightarrow A(\alpha x + u) \in A(L) \Rightarrow \alpha y + v \in A(L)$$

□

3 проверяется тютелька в тютельку как 1, а 2 — как 4, поэтому проверим 4.

4.  $C$  — выпуклое,  $x, u \in A^{-1}(C), 0 \leq t \leq 1$ .

$$(y := Ax \wedge v := Au) \quad y, v \in C \Rightarrow ty + (1 - t)v \in C \\ A(tx + (1 - t)u) = tAx + (1 - t)Au = ty + (1 - t)v \in C \\ \Rightarrow tx + (1 - t)u \in A^{-1}(C) \Rightarrow A^{-1}(C) \text{ выпуклое}$$

□

5.  $y, v \in Y \Rightarrow x = A^{-1}y, u = A^{-1}v \Rightarrow (Ax = y \wedge Au = v) \Rightarrow$

$$\text{пусть } \alpha \in k, \quad A(\alpha x + u) = \alpha Ax + Au = \alpha y + v \Rightarrow \\ \alpha x + u = A^{-1}(\alpha y + v) = \alpha A^{-1}y + A^{-1}v \Rightarrow \\ A^{-1} \in \text{Lin}(Y, X)$$

□

**Определение 5.3** (Ядро линейного оператора).  $A \in \text{Lin}(X, Y)$

$$\text{Ker } A = \{x \in X : Ax = 0\} \text{ — ядро } A$$

$$\text{Im } A = \{y \in Y : \exists x : Ax = y\} = A(X) \text{ — образ } A$$

**Следствие 5.1.**  $X, Y$  — линейные пространства,  $\Rightarrow \text{Ker } A$  — подпространство в  $X$ ,  $\text{Im } A$  — подпространство в  $Y$ .

**Определение 5.4** (произведение операторов).  $X, Y, Z$  — линейные пространства

$$X \xrightarrow{A} Y \xrightarrow{B} Z$$

$$A \in \text{Lin}(X, Y), B \in \text{Lin}(Y, Z), C = BA, C(x) := B(Ax), x \in X \Rightarrow \\ C \in \text{Lin}(X, Z), C \text{ — произведение } BA$$

Всё самое тривиальное для операторов в линейных пространствах мы вспомнили

## 5.2. Линейные операторы в нормированных пространствах

Линейные операторы в нормированных пространствах — главный объект, который изучает функциональный анализ.

**Определение 5.5** (Ограниченный оператор).  $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|), A \in \text{Lin}(X, Y)$ .  $A$  — **ограниченный**, если  $\forall C \subset X, C$  — ограниченное  $\Rightarrow A(C)$  — ограниченное в  $Y$ .

Оказывается, для операторов ограниченность эквивалентна непрерывности. Казалось бы, ограниченность сильно слабее, но если к ней добавить линейность, то будет аж непрерывность.

Обычно если в теореме 2 свойства, то говорят «если и только если», а если условий несколько, то говорят «равносильность». Подлые англичане говорят Following Conditions are Equivalent.

**Теорема 5.2** (эквивалентность ограниченности и непрерывности линейного оператора).  $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|), A \in \text{Lin}(X, Y)$ . Следующие условия равносильны (СУР) (FCE)

1.  $A$  непрерывен в точке 0
2.  $A$  непрерывен  $\forall x \in X$
3.  $\exists C > 0 : \|Ax\| \leq C\|x\| \forall x \in X$
4.  $A$  ограниченный
5.  $\exists r > 0 A(B_r(0))$  — ограниченное множество в  $Y$ .

Доказательство очень простое, и, конечно, строится на линейности

$1 \Rightarrow 2$ .  $A$  непрерывен в точке 0. Пусть  $\varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \|x\| < \delta \Rightarrow \|Ax\| < \varepsilon$  ( $A(0) = 0$ ). утверждается, что те же самые  $\varepsilon$  и  $\delta$  подходят.

пусть  $x_0 \in X$ , проверим, что  $A$  непрерывен в  $x_0$

пусть  $\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|A(x - x_0)\| < \varepsilon \Rightarrow \|Ax - Ax_0\| < \varepsilon$

□

2  $\Rightarrow$  1 очевидно

1  $\Rightarrow$  3. Пусть  $\varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \|x\| < \delta \Rightarrow \|Ax\| < \varepsilon$ .

$$\begin{aligned} z \in X, z \neq 0 \quad x = \frac{z}{\|z\|} \cdot \delta \Rightarrow \|x\| = \delta \Rightarrow \|Ax\| < \varepsilon \\ \Rightarrow \|A\left(\frac{z}{\|z\|} \cdot \delta\right)\| < \varepsilon \Rightarrow \|Az\| < \frac{\varepsilon}{\delta} \|z\| \text{ т.е. } C = \frac{\varepsilon}{\delta} \end{aligned}$$

□

3  $\Rightarrow$  4.  $B \subset X$ ,  $B$  — ограниченное, то есть  $\exists M > 0 : (\forall x \in B \wedge \|x\| < M) \xrightarrow{3} \|Ax\| \leq C\|x\| \leq CM \forall x \in B \Rightarrow \{A(B)\}$  — ограниченное. □

4  $\Rightarrow$  5 очевидно ( $B_r(0)$  — ограниченное)

5  $\Rightarrow$  1.  $\exists R > 0 A(B_r^x(0)) \subset B_R^y(0)$

$$\|x\| < r \Rightarrow \|Ax\| < R$$

непрерывность в 0 означает

$$\text{пусть } \varepsilon > 0 \quad \|x\| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \|Ax\| < \varepsilon$$

$$\delta(\varepsilon) = \varepsilon \cdot \frac{r}{R}$$

$$\|z\| < \varepsilon \cdot \frac{r}{R} \Rightarrow \|z \cdot \frac{R}{\varepsilon}\| < r \Rightarrow \|A\left(z \cdot \frac{R}{\varepsilon}\right)\| < R \Rightarrow \|Az\| < \varepsilon$$

□

с помощью теоремы, которую мы только что доказали, введём норму в этом пространстве.

**Определение 5.6** (норма оператора).  $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|)$

$$\underbrace{\mathcal{B}(X, Y)}_{\text{bounded}} = \{A \in \text{Lin}(X, Y) \wedge A \text{ — ограниченный}\}$$

$$A \in \mathcal{B}(X, Y)$$

$$\|A\| = \inf\{C : C > 0 \wedge \|Ax\| \leq C\|x\| \quad \forall x \in X\}$$

то бишь точная нижняя грань множества величин, на которые наш оператор увеличивает норму элемента.

Раз мы так объявили норму, то надо проверять аксиомы нормы.

**Утверждение 5.1.**  $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|), A \in \mathcal{B}(X, Y)$

1.  $\forall x \in X \|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$  (то есть  $\inf$  в определении нормы  $= \min$ )
2.  $\|A\|$  удовлетворяет аксиомам нормы

*Доказательство.*  $x$  - фиксирован,  $\Rightarrow \forall c > \|A\|, \|Ax\| \leq c \|x\| \Rightarrow \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$ . Был фиксирован, теперь любой, первое утверждение доказано. Теперь второе.

$\alpha \in k, \alpha \neq 0, x \in X, x$  — фиксирован

$$(\alpha A)(x) = \alpha Ax$$

$$\begin{aligned} \forall x \in X \quad \|(\alpha A)(x)\| &= \|\alpha \cdot Ax\| = |\alpha| \cdot \|Ax\| \leq |\alpha| \cdot \|A\| \cdot \|x\| \\ &\Rightarrow \|\alpha A\| \leq |\alpha| \|A\| \end{aligned}$$

Очевидное замечание по слёзной просьбе двух студенток, которые ничего не понимали. Если мы докажем  $\|Ax\| \leq M \|x\| \forall x \in X$ , то  $\|A\| \leq M$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left\| \frac{1}{\alpha} (\alpha A) \right\| &\leq \frac{1}{|\alpha|} \|\alpha A\| \Rightarrow |\alpha| \|A\| \leq \|\alpha A\| \\ &\Rightarrow \|\alpha A\| = |\alpha| \|A\| \\ A, B &\in \mathcal{B}(X, Y), x \in X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|(A+B)(x)\| &= \|Ax+Bx\| \leq \|Ax\| + \|Bx\| \leq \|A\| \cdot \|x\| + \|B\| \cdot \|x\| = \\ &= (\|A\| + \|B\|) \|x\| \quad \forall x \in X \\ &\Rightarrow \|A+B\| \leq \|A\| + \|B\| \end{aligned}$$

Как только есть какая-то константа, то настоящая норма меньше или равна этой константы.  $\|A\| = 0 \Rightarrow \forall x \in X \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| = 0$ .  $\Rightarrow Ax = 0 \forall x \in X \Rightarrow A = 0 \Rightarrow \|A\|$  — настоящая норма  $\square$



**Теорема 5.3** (вычисление нормы непрерывного оператора).  
 $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|), A \in \mathcal{B}(X, Y) \Rightarrow$

$$\|A\| = \underbrace{\sup_{\{\|x\| \leq 1\}} \|Ax\|}_a = \underbrace{\sup_{\{\|x\| < 1\}} \|Ax\|}_b = \underbrace{\sup_{\{\|x\|=1\}} \|Ax\|}_c = \underbrace{\sup_{\{x \in X, x \neq 0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}}_d$$

*Доказательство.* Очевидно  $a \geq b, a \geq c, d \geq c$ . Докажем  $\|A\| \geq a \geq b \geq \|A\|, \|A\| \geq d \geq c \geq \|A\|$ .

$$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \leq \|A\| \quad \forall x, \|x\| \geq 1 \Rightarrow \sup_{\{\|x\| \geq 1\}} \|Ax\| \leq \|A\| \Rightarrow a \leq \|A\|$$

Доказали  $\|A\| \geq a$ .

$$\text{Пусть } \varepsilon > 0, z \in X, z \neq 0 \Rightarrow \left\| \frac{z}{\|z\|(1+\varepsilon)} \right\| = \frac{1}{1+\varepsilon} < 1$$

$$\begin{aligned} \left\| A\left(\frac{z}{\|z\|(1+\varepsilon)}\right) \right\| &\leq b \Rightarrow \|Az\| \leq b(1+\varepsilon)\|z\| \quad \forall z \in X \\ &\Rightarrow \|A\| \leq b(1+\varepsilon) \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \|A\| \leq b \end{aligned}$$

Закончили с первой цепочкой неравенств.

$$\text{Пусть } x \neq 0 \Rightarrow \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \Rightarrow \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\| \Rightarrow d = \sup_{\{x \neq 0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\|.$$

$$\text{пусть } z \in X, z \neq 0, \left\| \frac{z}{\|z\|} \right\| = 1 \Rightarrow \left\| A\left(\frac{z}{\|z\|}\right) \right\| \leq c \Rightarrow \|Az\| \leq C\|z\| \quad \forall z \in X$$

$c$  — супремум по единичной сфере

$$\Rightarrow \|A\| \leq C$$

□

**Пример 5.5.**  $C[a, b], h(x) \in C[a, b]$  — фиксированная функция.  $f \in C[a, b], M_h(f) := h(x) \cdot f(x)$ .

$$M_h \in \text{Lin}(C[a, b])$$

Проверим, что он непрерывен и сосчитаем его норму.

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \|M_h(f)\|_\infty &= \max_{x \in [a, b]} |h(x) \cdot f(x)| \leq \max_{x \in [a, b]} |h(x)| \cdot \max_{x \in [a, b]} |f(x)| = \|h\|_\infty \cdot \|f\|_\infty \\ &\Rightarrow M_h \in \mathcal{B}(C[a, b]), \|M_h\|_{\mathcal{B}(C[a, b])} \leq \|h\|_\infty \end{aligned}$$

получили непрерывность; раз есть общая константа, не зависящая от  $f$ , то мы получаем и оценку для нормы

$$\begin{aligned} \chi_{[a, b]}(x) &= 1 \quad \forall x \in [a, b], \chi_{[a, b]} \in C[a, b], \|\chi_{[a, b]}\|_\infty = 1 \\ \|M_h\| &\geq \|M_h(f)\| / \|f\| = 1 \Rightarrow \|M_h\| \geq \|M_h(\chi_{[a, b]})\|_\infty = \|h\|_\infty \\ &\Rightarrow \|M_h\|_{\mathcal{B}(C[a, b])} = \|h\|_\infty \end{aligned}$$

□

Теперь посмотрим на оператор дифференцирования, это очень важный пример.

**Пример 5.6.**  $Y = C[a, b], X = \{f : \exists f' \in C[a, b]\}, 0 \leq a \leq b$

$X \subset Y, X$  — подпространство  $Y$ , то есть

$$\|f\|_X = \|f\|_Y = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

$$D(f) = f' \Rightarrow D \in \text{Lin}(X, Y),$$

$$D(x^n) = nx^{n-1} \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{\|D(x^n)\|}{\|x^n\|} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{nb^{n-1}}{b^n} = +\infty$$

при таком определении нормы оператор дифференцирования  $D$  не непрерывен.

**Пример 5.7.**  $Y = C[a, b], X = C^{(1)}[a, b]$

$$\|f\|_X = \max\{\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty\}$$

$$D(f) = f' \quad \|D(f)\| = \|f'\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |f'(x)| \leq \underbrace{\max\{\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty\}}_{\|f\|_X}$$

$$\Rightarrow D \in \mathcal{B}(X, Y), \|D\| \leq 1$$

**Теорема 5.4** (вложение пространств в  $l^p$ ). Пусть  $1 \leq p_1 < p_2 \leq +\infty$ .  $x \in l^{p_1}$ . Рассмотрим оператор вложения  $Ax = x \Rightarrow A \in \mathcal{B}(l^{p_1}, l^{p_2}), \|A\| = 1$ .

*Доказательство.* То, что он линейный, мы уже обсуждали, это очевидно. Удобно будет рассматривать последовательности из единичной сферы.  $x \in l^p, x = \{x_n\}_{n=1}^\infty, x_n \in \mathbb{C}$ .  $\|x\|_p = (\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < +\infty$ . Возьмём не просто последовательность из  $l^{p_1}$ , но и такую, что  $\|x\|_{p_1} = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^\infty |x_n|^{p_1} = 1 \quad Ax = x$ .

$$\begin{aligned} & \Rightarrow |x_n| \leq 1 \Rightarrow (|x_n|^{p_2}) < |x_n|^{p_1} \\ \|Ax\|_{p_2} &= \left( \sum_{n=1}^\infty |x_n|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \leq \left( \sum_{n=1}^\infty |x_n|^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_2}} = 1 \Rightarrow A \in \mathcal{B}(l^{p_1}, l^{p_2}) \\ \|A\| &= \sup_{\{\|x\|_{p_1}=1\}} \|Ax\|_{p_2} \leq 1 \Rightarrow \|A\|_{\mathcal{B}(l^{p_1}, l^{p_2})} \leq 1 \quad \text{при } p_2 < +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{теперь } p_2 = +\infty \quad \|x\|_{p_1} = 1 &\Rightarrow \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| \leq \|x\|_{p_1} \Rightarrow \|x\|_\infty \leq \|x\|_{p_1} \Rightarrow \\ &A \in \mathcal{B}(l^{p_1}, l^{p_2}) \quad \|A\| \leq 1 \end{aligned}$$

если  $e_1 = (1, 0, \dots)$ ,  $\|e_1\|_p = 1 \quad \forall p : 1 \leq p \leq +\infty$

$$\|A\| = \sup_{\{\|x\|_{p_1}=1\}} \|Ax\|_{p_2} \geq \|Ae_1\|_{p_2} = 1 \Rightarrow \|A\|_{\mathcal{B}(l^{p_1}, l^{p_2})} = 1 \quad \forall p_1 < p_2$$

□

Посмотрим теперь на похожую теорему для больших пространств  $L^p$ .

**Теорема 5.5** (вложение пространств в  $L^p(\mu)$  для конечной меры).  $(X, U, \mu), 1 \leq p_1 < p_2 \leq +\infty, \mu(X) < +\infty$ . Рассмотрим  $f \in L^{p_2}, Af = f \Rightarrow A \in \mathcal{B}(L^{p_2}, L^{p_1})$ .  $\|A\| = (\mu(X))^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}}, (\frac{1}{\infty} = 0)$

*Доказательство.* Начнём с самого простого случая. То есть что называлось существенно ограниченными функциями.  $p_2 = \infty, f \in L^\infty(\mu), |f(x)| \leq \|f\|_\infty$  п.в. для  $x \in X$  по  $\mu$ .

$$\|Af\|_{p_1} = \|f\|_{p_1} = \left( \int_X |f|^{p_1} d\mu \right)^{\frac{1}{p_1}} \leq \|f\|_\infty \left( \int_X d\mu \right)^{\frac{1}{p_1}} = \|f\|_\infty \mu(X)^{\frac{1}{p_1}}$$

Вот у нас получилась константа, которая обслуживает все функции  $f$ . Тогда, во-первых, оператор непрерывен, а во-вторых, это и есть оценка для нормы

$$\begin{aligned} \Rightarrow A \in \mathcal{B}(L^\infty, L^{p_1}), \|A\| &\leq (\mu(X))^{\frac{1}{p_1}} \\ \text{пусть } p_2 < +\infty, f \in L^{p_2}, \left( \int_X |f|^{p_2} d\mu \right)^{\frac{1}{p_2}} &= \|f\|_{p_2} \\ \|Af\|_{p_1} = \|f\|_{p_1} = \left( \int_X |f|^{p_1} d\mu \right)^{\frac{1}{p_1}} \text{ н. Гёльдера} &\leq \left[ \left( \int_X |f|^{p_2} d\mu \right)^{\frac{1}{p_2}} \left( \int_X 1^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \right]^{\frac{1}{p_1}} = \\ p = \frac{p_2}{p_1}, \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = 1 - \frac{p_1}{p_2} & \\ = \left( \int_X |f|^{p_2} d\mu \right)^{\frac{1}{p_2}} \cdot (\mu(X))^{(1 - \frac{p_1}{p_2}) \frac{1}{p_1}} &= \|f\|_{p_2} (\mu(X))^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}} \\ \Rightarrow A \in \mathcal{B}(L^{p_2}, L^{p_1}), \|A\| &\leq (\mu(X))^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}} \end{aligned}$$

Почти всё готово. Мы оценили норму сверху, и утверждается, что на самом деле имеет место равенство. На какой пробной функции получить неравенство с другой стороны? Наверное, все уже догадались. Раз есть  $\sup$ , то мы можем подставить какую-то конкретную функцию.  $p_2 < +\infty, \chi_X(x) \equiv 1$

$$\begin{aligned} \|A\| = \sup_{f \neq 0} \frac{\|Af\|_{p_1}}{\|f\|_{p_2}} &\geq \frac{\|A(\chi_X)\|_{p_1}}{\|\chi_X\|_{p_2}} = \frac{(\int_X \chi_X^{p_1} d\mu)^{\frac{1}{p_1}}}{(\int_X \chi_X^{p_2} d\mu)^{\frac{1}{p_2}}} = \\ &= \frac{(\mu(X))^{\frac{1}{p_1}}}{\mu(X)^{\frac{1}{p_2}}} = \mu(X)^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}} \end{aligned}$$

если  $p_2 = \infty, \|\chi_X\|_\infty = 1 \Rightarrow \|A\|_{\mathcal{B}(L^\infty, L^{p_1})} \geq \mu(X)^{\frac{1}{p_1}}$  □

Позже вычислим норму интегрального оператора, который часто встречается в анализе и в матфизике.

**Теорема 5.6** (полнота пространства операторов, действующих в банахово пространство).  $(X, \|\cdot\|)$  — нормированное,  $(Y, \|\cdot\|)$  — банахово  $\Rightarrow \mathcal{B}(X, Y)$  — банахово.

*Доказательство.* Тут без хитростей. По определению возьмём фундаментальную последовательность и покажем, что у нее есть предел. Сначала надо добыть оператор, который будет претендентом на

звание предела.  $\{A_n\}_{n=1}^\infty$  — фундаментальная,  $A_n \in \mathcal{B}(X, Y)$ . Пусть  $\varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} (n > N \wedge m > N) \Rightarrow \|A_n - A_m\| < \varepsilon$ .  $x \in X, x$  — фиксирован,  $\Rightarrow \|A_n x - A_m x\| = \|(A_n - A_m)x\| < \varepsilon \|x\|$ . Тогда  $\{A_n x\}_{n=1}^\infty$  — фундаментальная в  $Y, Y$  — банахово  $\Rightarrow$

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x \in Y, Ax := \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x \text{ поточечный предел}$$

$$\lim — \text{линейная} \Rightarrow A \in \text{Lin}(X, Y)$$

$$x — \text{фиксирован} \quad \|A_n x - A_m x\| < \varepsilon \|x\|, \text{ пусть } m \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow \|A_n x - Ax\| \leq \varepsilon \|x\| \quad \forall x \in X$$

$$\Rightarrow A_n - A \in \mathcal{B}(X, Y), \|A_n - A\| \leq \varepsilon \Rightarrow A = (A - A_n) + A_n \Rightarrow A \in \mathcal{B}(X, Y)$$

□

Поговорим немного о линейных функционалах. Вы только не думайте, что мы покидаем линейные операторы, это всё-таки главный объект изучения функционального анализа.

### 5.3. Линейные функционалы

**Определение 5.7** (линейный функционал).  $X$  — линейное пространство над  $k$  ( $\mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ ).  $\text{Lin}(X, k)$  — линейные функционалы на  $X$

**Определение 5.8** (сопряжённое пространство).  $(X, \|\cdot\|), X^* = \mathcal{B}(X, \mathbb{C})$  (или же  $X^* = \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ ) — сопряжённое пространство.  $X^*$  — линейные **НЕПРЕРЫВНЫЕ** функционалы.

Про непрерывность надо помнить. На экзамене часто спрашивают, что такое сопряжённое пространство, и не могут выпытать непрерывность. Что делают с такими студентами? Выгоняют.

**Следствие 5.2.**  $(X, \|\cdot\|), f \in X^* \Rightarrow$

$$\|f\| = \sup_{\{\|x\| \leq 1\}} |f(x)| = \sup_{\{\|x\| < 1\}} |f(x)| = \sup_{\{\|x\| = 1\}} |f(x)| = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}$$

**Следствие 5.3.**  $(X, \|\cdot\|) \Rightarrow X^* — \text{банахово}$

*Доказательство.*  $\mathbb{R}$  и  $\mathbb{C}$  — полные  $\Rightarrow \mathcal{B}(X, \mathbb{C})$  — банахово ( $\Rightarrow \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$  — банахово).  $\square$

**Пример 5.8.**  $X = l^p, (1 \leq p \leq +\infty), i \in \mathbb{N}$  — фиксированное число

$$x \in l^p \Rightarrow x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in \mathbb{C}, f(x) := x_i \Rightarrow f \in X^*, \|f\| = 1$$

$$\begin{aligned} |f(x)| = |x_i| &\leq \left( \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \text{ при } 1 \leq p < +\infty \text{ и} \\ &\leq \sup_n \|x_n\| = \|x\|_{\infty} \text{ при } p = +\infty \\ &\Rightarrow f \in \mathcal{B}(X, \mathbb{C}) = X^*, \|f\| \leq 1 \\ \|f\| &= \sup_{\{\|x\|=1\}} |f(x)| \geq |f(e_i)| = 1 \end{aligned}$$

Со временем мы считаем, что такое сопряженное пространство к  $l^p$  для конечных  $p$ . По секрету, это  $l^q$ , где  $p$  и  $q$  — сопряжены.

Почему всегда рассматривается компакт? Потому что на компакте функция достигает свой максимум, и иначе непонятно, как норму вводить.

**Пример 5.9.**  $C(K) = \{f : K \rightarrow \mathbb{C} \wedge f \text{ непрерывные}\}, x_0 \in K, K$  — компакт.

$f \in C(K), G(f) := f(x_0) \Rightarrow G \in X^*, \|G\| = 1$  (функционал значения в точке, подлые ангlosаксы говорят point evaluation).

$$\begin{aligned} G &\in \text{Lin}(C(K), \mathbb{C}) \\ f \in C(K), |G(f)| &= |f(x_0)| \leq \sup_{x \in K} |f(x)| = \|f\|_{C(K)} \Rightarrow \\ G &\in X^*, \|G\| \leq 1 \\ \left\{ \begin{array}{l} \chi_K(x) = 1, \chi_K \in C(K), \|\chi_K\| = 1, \chi_K(x_0) = 1 \\ \Rightarrow \|G\| = \sup_{\{\|f\|=1\}} |G(f)| \geq |G(\chi_K)| = 1 \end{array} \right. &\Rightarrow \|G\| = 1 \end{aligned}$$

Когда-то мы опишем пространство непрерывных функций, но доказывать, почему оно так выглядит, не будем, ибо это очень сложно, и придётся просто поверить в это описание. Сейчас докажем теорему про норму интегрального оператора в  $C[a, b]$ . Мы ей даже когда-то нескоро воспользуемся.

**Теорема 5.7.**  $C[a, b] = \{f|f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ непрерывная}\}$ . Ядро интегрального оператора  $k(s, t) \in C([a, b] \times [a, b])$ , пусть  $f \in C[a, b]$ .

$$(\mathcal{K}f)(s) := \int_a^b k(s, t)f(t)dt \quad \text{при } s \in [a, b] \Rightarrow$$

$$\mathcal{K} \in \mathcal{B}(C[a, b]), \|\mathcal{K}\| = \max_{a \leq s \leq b} \int_a^b |k(s, t)|dt$$

Доказательство начнём с важной леммы, помогающей вычислить норму линейного функционала. Когда мы сосчитаем норму линейного функционала, то будет очень нетрудно применить это для вычисления нормы линейного оператора.

**Лемма 5.1.**  $\varphi(t) \in C[a, b], \varphi$  — фиксирована.  $f \in C[a, b], G(f) := \int_a^b f(t)\varphi(t)dt \Rightarrow G \in (C[a, b])^*, \|G\| = \int_a^b |\varphi(t)|dt$ .

*Доказательство леммы.* Оценка сверху совершенно тривиальна.  $f \in C[a, b]$

$$\begin{aligned} |G(f)| &= \left| \int_a^b f(t)\varphi(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)||\varphi(t)|dt \leq \max_{t \in [a, b]} |f(t)| \cdot \int_a^b |\varphi(t)|dt = \\ &= \|f\|_\infty \int_a^b |\varphi(t)|dt \Rightarrow \\ G &\in (C[a, b])^*, \|G\| \leq \int_a^b |\varphi(t)|dt \end{aligned}$$

Теперь оценка  $\|G\|$  снизу. Сначала тривиальные замечания. Если  $\varphi(t) \geq 0 \forall t \in [a, b]$ , то  $\chi_{[a, b]}(x) \equiv 1$

$$|G(\chi_{[a, b]})| = \left| \int_a^b \varphi(t)dt \right| = \int_a^b \varphi(t)dt$$

Если  $\varphi(t) \leq 0 \forall t \in [a, b]$  — то же самое.

$$g(t) = \text{sign } \varphi(t) = \begin{cases} 1 & \varphi(t) > 0 \\ -1 & \varphi(t) < 0 \\ 0 & \varphi(t) = 0 \end{cases}$$

$G(g) = \int_a^b |\varphi(t)|dt$ , но  $g \notin C[a, b]$ . До сих пор мы всегда находили пробную функцию, на котором достигался  $\sup$ , а здесь такого элемента

нет. Поэтому будем приближать  $\varphi$  непрерывными функциями с точностью до  $\varepsilon$ , вот такая идея.

Пусть  $\varepsilon > 0, \varphi \in C[a, b] \Rightarrow \varphi$  — равномерно непрерывна на  $[a, b] \Rightarrow$

$$\exists \delta > 0 \mid s - t \mid < \delta \Rightarrow \mid \varphi(t) - \varphi(s) \mid < \varepsilon \quad a \leq s, t \leq b$$

$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b, t_k - t_{k-1} < \delta$ .

Рассмотрим  $\{\Delta_j\}_{j=1}^n$ .  $\Delta_j$  — интервалы  $[t_{k-1}, t_k]$ . Нумерация будет не по порядку, как сперва может показаться, а совершенно другая, и она никак не будет зависеть от расположения на отрезке. Разобьём интервал на 2 сорта. Первый — где функция положительна или отрицательна, то есть не меняет знак. Второй — где меняет знак или обращается в 0.  $\Delta_1, \dots, \Delta_r$  — те интервалы, на которых  $\varphi(t) > 0, t \in \Delta_j$  или  $\varphi(t) < 0, t \in \Delta_j$  ( $1 \leq j \leq r$ )

$\Delta_{r+1}, \dots, \Delta_n$  — те интервалы, для которых  $\exists s \in \Delta_j : \varphi(s) = 0, n \geq j > r$ .

$$\begin{aligned} & \text{пусть } t \in \Delta_j, j > r \Rightarrow \exists s \in \Delta_j, \varphi(s) = 0 \Rightarrow \\ & \mid \varphi(t) \mid = \mid \varphi(t) - \varphi(s) \mid < \varepsilon \Rightarrow \int_{\Delta_j} \mid \varphi(t) \mid dt < \varepsilon \mid \Delta_j \mid \\ & \Rightarrow \int_{\bigcup_{j=r+1}^n \Delta_j} \mid \varphi(t) \mid dt \leq \varepsilon \left( \sum_{j=r+1}^n \mid \Delta_j \mid \right) \leq \varepsilon(b-a) \\ & h(t) = \begin{cases} \text{sign } \varphi(t), t \in \Delta_j & 1 \leq j \leq r \\ \text{линейная на } \Delta_j & j > r \\ \text{если } [a, t_1] \in \Delta_j, j > r, \text{ то } h(a) = 0 \\ \text{если } [t_{n-1}, b] \in \Delta_j, j > r, \text{ то } h(b) = 0 \end{cases} \quad h \in C[a, b], \mid h(t) \mid \leq 1 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \|G\| &= \sup_{\{\|f\| \leq 1\}} |G(f)| \geq |G(h)| = \left| \int_a^b h(t) \varphi(t) dt \right| = \\
 &= \left| \int_{\bigcup_{j=1}^r \Delta_j} h(t) \varphi(t) dt + \int_{\bigcup_{j=r+1}^n \Delta_j} h(t) \varphi(t) dt \right| = \\
 &= \left| \int_{\bigcup_{j=1}^r \Delta_j} |\varphi(t)| dt + \int_{\bigcup_{j=r+1}^n \Delta_j} h(t) \varphi(t) dt \right| \geq \\
 &\geq \int_{\bigcup_{j=1}^r \Delta_j} |\varphi(t)| dt - \int_{\bigcup_{j=r+1}^n \Delta_j} |h(t)| |\varphi(t)| dt \geq \\
 &\geq \int_{\bigcup_{j=1}^r \Delta_j} |\varphi(t)| dt - \int_{\bigcup_{j=r+1}^n \Delta_j} |\varphi(t)| dt = \int_a^b |\varphi(t)| dt - 2 \int_{\bigcup_{j=r+1}^n \Delta_j} |\varphi(t)| dt \geq \\
 &\geq \int_a^b |\varphi(t)| dt - 2\varepsilon(b-a) \quad \forall \varepsilon > 0
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|G\| \geq \int_a^b |\varphi(t)| dt \quad \square$$

Главной частью доказательства теоремы было доказательство теоремы. Вернёмся к теореме.

*Доказательство.* Оценим сначала норму оператора сверху.  $(\mathcal{K}f)(s) = \int_a^b k(s, t) f(t) dt$ ,  $f \in C[a, b]$ .  $M = \max_{a \leq s \leq b} \int_a^b |k(s, t)| dt$ . Мы как раз хотим показать, что норма оператора будет равна  $M$ .

$$|(Kf)(s)| \leq \int_a^b |k(s, t)| |f(t)| dt \leq \|f\|_\infty \int_a^b |k(s, t)| dt \leq M \|f\|_\infty$$

$$\|\mathcal{K}f\|_\infty = \max_s |\mathcal{K}f(s)| \leq M \cdot \|f\| \quad \forall f \in C[a, b] \Rightarrow \mathcal{K} \in \mathcal{B}(C[a, b])$$

$$\|K\|_{\mathcal{B}(C[a, b])} \leq M$$

Теперь оценим  $\|\mathcal{K}\|$  снизу.

$$\begin{aligned}
 g(s) &= \int_a^b |k(s, t)| dt \Rightarrow g \in C[a, b] \Rightarrow \\
 \exists s_0 \quad g(s_0) &= \max g(s) \Rightarrow g(s_0) = M
 \end{aligned}$$

применим к произвольной непрерывной функции оператор

$$f \in C[a, b], \|(\mathcal{K}f)(s)\|_\infty = \max_{a \leq s \leq b} |\mathcal{K}f(s)| \geq |(\mathcal{K}f)(s_0)| = \left| \int_a^b k(s_0, t) f(t) dt \right| = |G(f)|$$

где  $\varphi(t) = K(s_0, t), G(f) = \int_a^b k(s_0, t)f(t)dt$ .

$$\|K\| = \sup_{\{\|f\| \leq 1\}} \|K(f)\| \geq \sup_{\{\|f\| \leq 1\}} |G(f)| = \|G\|_{(C[a,b])^*} \stackrel{\text{лемма}}{=} \int_a^b |\varphi(t)|dt = M \Rightarrow \|K\| = M$$

□

От сопряжённых пространств мы не уходим, а наоборот, углубляемся в них.

## 5.4. Изоморфные линейные пространства

**Определение 5.9** (изоморфность пространств).  $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|)$  — **линейно изоморфны**, если  $\exists A \in \mathcal{B}(X, Y), \exists A^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X)$ .  $A$  — **линейный изоморфизм**

**Замечание 5.1.** «Изоморфность» — отношение эквивалентности на множестве нормированных пространств.

Когда можно сказать, что два пространства изоморфны?

**Теорема 5.8** (критерий линейного изоморфизма).  $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|), A \in \text{Lin}(X, Y), A(X) = Y$  (то есть  $A$  — сюръекция).  
 $A$  — линейный изоморфизм  $\Leftrightarrow$  пусть  $0 < c_1 < C_2 < +\infty$  т.ч.  
 $c_1 \|x\| \leq \|Ax\| \leq C_2 \|x\|, \forall x \in X$

*Доказательство.*  $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{B}(X, Y) &\Rightarrow \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \quad \forall x \in X, C_2 = \|A\| \\ \exists A^{-1} \mathcal{B}(Y, X) &\Rightarrow \|A^{-1}y\| \leq \|A^{-1}\| \|y\| \quad \forall y \in Y \\ \text{пусть } x \in X, y = Ax &\Rightarrow \|A^{-1}(Ax)\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|Ax\| \Rightarrow \\ &\frac{1}{\|A^{-1}\|} \cdot \|x\| \leq \|Ax\| \quad c_1 = \frac{1}{\|A^{-1}\|} \end{aligned}$$

$\Leftarrow$

$\|Ax\| \leq C_2 \|x\| \Rightarrow A \in \mathcal{B}(X, Y) (\|A\| \leq C_2)$ . Теперь проверим, что  $A$

— инъекция. Без неравенства снизу мы сейчас как раз выведем, что образы различных иксов различны. Пусть  $Ax_1 = Ax_2 \Rightarrow A(x_1 - x_2) = 0$

$$0 = \|A(x_1 - x_2)\| \geq c \|x_1 - x_2\| \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow A \text{ — биекция}$$

$$\stackrel{\text{доказали}}{\Rightarrow} \exists A^{-1} \in \text{Lin}(Y, X)$$

$$\begin{cases} c_1 \|x\| \leq \|Ax\| \quad \forall x \in X \\ \text{пусть } y \in Y, x = A^{-1}y \end{cases} \Rightarrow$$

$$c_1 \|A^{-1}y\| \leq \|y\| \Rightarrow \|A^{-1}y\| \leq \frac{1}{c_1} \|y\| \Rightarrow A^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X) \left( \|A^{-1}\| \leq \frac{1}{c_1} \right)$$

□

Раз нам предстоит потом долгий разговор про обратные операторы, сразу отметим некоторое следствия из доказательства теоремы, чтобы не возвращаться к нему потом.

**Следствие 5.4** (из доказательства теоремы).  
( $X, \|\cdot\|$ ), ( $Y, \|\cdot\|$ ),  $A \in \text{Lin}(X, Y)$ ,  $A(X) = Y$

$$\exists A^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X) \Rightarrow \exists c > 0 : \|Ax\| \geq c \|x\| \quad \forall x \in X$$

*Доказательство.* Следует из доказательства теоремы. □

Часто бывает, что на одном и том же пространстве определены две различные нормы. Какие же нормы будут называться эквивалентными?

**Определение 5.10.**  $X$  — линейное пространство,  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  — две нормы на  $X$ .  $\|\cdot\|_1$  эквивалентна  $\|\cdot\|_2$ , если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\|_1 = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\|_2 = 0$$

По-другому можно сказать, что топологии, которые задают эти нормы, одинаковые:  $\Leftrightarrow G \subset X, G$  — открытое в  $(X, \|\cdot\|_1) \Leftrightarrow G$  — открытое в  $(X, \|\cdot\|_2)$

**Следствие 5.5.**  $X$  — линейное,  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  — нормы на  $X$ .  $\|\cdot\|_1$  эквивалентна  $\|\cdot\|_2 \Leftrightarrow \exists 0 < c_1 < c_2 \leq +\infty$  т.ч.

$$c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2 \|x\|_1$$

хотя в определении не утверждалось, что одну норму можно оценить через другую

*Доказательство.*  $X = (X, \|\cdot\|_1), Y = (X, \|\cdot\|_2)$  — как бы 2 разных пространства, но на одном множестве. Рассмотрим оператор  $Ix = x$ . Ясно, что  $I \in \text{Lin}(X, Y)$ ,  $I$  — биекция,  $I^{-1} \in \text{Lin}(Y, X)$ . Что означает, что  $\|\cdot\|_1$  эквивалентна  $\|\cdot\|_2$ ?  $\Leftrightarrow I, I^{-1}$  непрерывны  $\Leftrightarrow I$  — линейный изоморфизм  $X$  и  $Y$   $\xLeftrightarrow{\text{т.критерий линейного изоморфизма}}$   $c_1 \|x\|_1 \leq \underbrace{\|Ix\|_2}_{\|x\|_2} \leq C_2 \|x\|_1$

□

Не очень скоро мы получим обобщение этой теоремы. Окажется, что если пространство банахово в обеих нормах, то только одно из последних неравенств влечёт другое.

**Утверждение 5.2.**  $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|)$  — линейно изоморфны. Пусть  $X$  — банахово, тогда  $Y$  — банахово.

*Доказательство.*

$A : X \rightarrow Y \quad A \in \mathcal{B}(X, Y) \quad A$  — линейный изоморфизм

$A^{-1} : Y \rightarrow X \quad A^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X)$

$\{y_n\}_{n=1}^\infty$  — фундаментальная в  $Y \quad x_n = A^{-1}y_n$

$\|x_n - x_m\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|y_n - y_m\| \Rightarrow \{x_n\}_{n=1}^\infty$  фундаментальная в  $X$

теперь применяем наш, слава богу, непрерывный оператор

$$\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = Ax_0 \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = Ax_0 \Rightarrow$$

$Y$  полное

□

## 5.5. Конечномерные пространства

**Определение 5.11** (Размерность пространства).  $X$  — линейное пространство над  $\mathbb{C}$  или  $\mathbb{R}$ . Если  $\exists n$  линейно независимых элементов в  $X$ , и  $\forall (n+1)$  элементов линейно зависимы, то  $\dim X = n$

**Определение 5.12.** Если  $\forall n \in \mathbb{N} \exists n$  линейно независимых элементов, то  $X$  — **бесконечномерное**

**Теорема 5.9.**  $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|)$  — линейные пространства над  $\mathbb{C}$ ,  $\dim X = \dim Y = n$ .

$\Rightarrow X$  линейно изоморфно  $Y$

*Доказательство.* Поскольку мы обсудили, что изоморфность — отношение эквивалентности, то можно зафиксировать

$$X = l_n^2 = \left\{ x = (x_1, \dots, x_n), x_j \in \mathbb{C}, \|x\| = \left( \sum_{j=1}^n |x_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \quad \{f_j\}_{j=1}^n \text{ — базис в } Y$$

$$A : l_n^2 \rightarrow Y, A(e_j) = f_j$$

утверждается, что это и будет линейный изоморфизм

$$A \left( \sum_{j=1}^n x_j e_j \right) = \sum_{j=1}^n x_j f_j, A \in \text{Lin}(l_n^2, Y)$$

$$x \in l_n^2, x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$$

$$\|Ax\| = \left\| \sum_{j=1}^n x_j f_j \right\| \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \|f_j\| \stackrel{\text{КБШ}}{\leq} \underbrace{\left( \sum_{j=1}^n |x_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{\|x\|_{l_n^2}} \underbrace{\left( \sum_{j=1}^n \|f_j\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{:=M}$$

мы оценили норму оператора  $A$

$$\Rightarrow \|Ax\|_Y \leq \|x\|_{l_n^2} \cdot M \Rightarrow A \in \mathcal{B}(l_n^2, Y), \|A\| \leq M$$

$g(x) := \|Ax\|$  — функция на  $l_n^2 \Rightarrow g(x)$  — непрерывна на  $l_n^2$

Теперь рассмотрим эту функцию не на всём пространстве, а на единичной сфере  $S = \{x \in l_n^2, \|x\|_2 = 1\}$  — компакт в  $l_n^2$ .

$$x \in S, g(x) > 0, g \text{ непрерывная на компакте } S \Rightarrow \\ \exists x_0 \in S, g(x_0) = \min_{x \in S} g(x), r = g(x_0), r > 0$$

$$\text{пусть } x \in l_n^2, x \neq 0 \quad \frac{x}{\|x\|} \in S \Rightarrow g\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \geq r \Rightarrow$$

$$\left\| A\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \geq r \Rightarrow \|Ax\| \geq r \|x\| \quad \forall x \in l_n^2$$

$\Rightarrow$  — линейная изометрия

□

**Следствие 5.6.**  $(X, \|\cdot\|), \dim X = n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

1.  $X$  — банахово
2.  $K \subset X, K$  — относительно компактно  $\Leftrightarrow K$  — ограничено
3.  $K \subset X, K$  — компакт  $\Leftrightarrow K$  — ограничено и замкнуто

Мы когда-нибудь выясним, что если в пространстве единичный шар — компакт, то это пространство конечномерное.

*Доказательство.* 1.  $l_n^2$  — полное,  $X$  — линейно изоморфно  $l_n^2$  и по утверждению из конца предыдущего параграфа  $\Rightarrow l_n^2 X$  банахово

2.  $A \in \mathcal{B}(l_n^2, X), A^{-1} \in \mathcal{B}(X, l_n^2), A, A^{-1}$  — непрерывны

3. аналогично 2

□

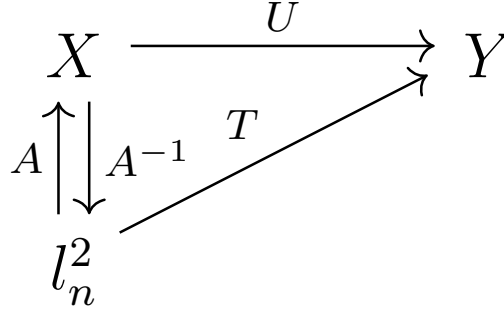
**Следствие 5.7.**  $X, \dim X = n, n \in \mathbb{N}$ , на  $X$  две нормы  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2 \Rightarrow \|\cdot\|_1$  эквивалентна  $\|\cdot\|_2$

*Доказательство.*  $(X, \|\cdot\|_1)$  линейно изоморфно  $(X, \|\cdot\|_2)$ .

□

**Теорема 5.10.**  $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|), \dim X = n, n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \text{Lin}(X, Y) = \mathcal{B}(X, Y)$$



*Доказательство.* Рассмотрим сначала частный случай, потом сведём произвольный случай к частному. Пусть  $T \in \text{Lin}(l_n^2, Y)$ .

$$e_j = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_j, \dots, 0)$$

$$x \in l_n^2, x = \{x_j\}_{j=1}^n, x = \sum_{j=1}^n x_j e_j \Rightarrow Tx = \sum_{j=1}^n x_j T e_j$$

оцениваем норму простейшим образом

$$\|Tx\| \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \cdot \|T e_j\| \stackrel{\text{КБШ}}{\leq} \left( \sum_{j=1}^n |x_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\left( \sum_{j=1}^n \|T e_j\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}}_M \leq \|x\|_2 \cdot M$$

2 множитель не зависит от  $x$ , и раз получилась независимая константа, то оператор непрерывен

$$\Rightarrow T \in \mathcal{B}(l_n^2, Y), \|T\| \leq M$$

теперь произвольный случай, пусть  $U \in \text{Lin}(X, Y)$ ,  $\dim X = n$

$A$  — линейный изоморфизм

$$T = UA \in \text{Lin}(l_n^2, Y) \stackrel{\text{доказали}}{\Rightarrow} T \in \mathcal{B}(l_n^2, Y)$$

$$\Rightarrow U = TA^{-1} \quad A, A^{-1} \text{ непрерывны} \Rightarrow U \in \mathcal{B}(X, Y)$$

□

ранее мы сформулировали следствие, и теперь скажем пару слов о доказательстве

**Следствие 5.8.**  $(X, \|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2), \dim X = n < +\infty$

$$\Rightarrow \|\cdot\|_1 \text{ эквивалентна } \|\cdot\|_2$$

*Доказательство.*  $(X = (X, \|\cdot\|_1)), Y = (X, \|\cdot\|_2)$

$$\begin{cases} Ix = x \Rightarrow I \in \text{Lin}(X, Y) \xrightarrow{\text{теорема}} I \in \mathcal{B}(X, Y) \\ I^{-1}x = x \quad I^{-1} : Y \rightarrow X \Rightarrow I^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X) \end{cases} \Rightarrow \|\cdot\|_1 \equiv \|\cdot\|_2$$

$$(\Leftrightarrow \exists 0 < c_1 < c_2 : c_1 \|x\|_1 \leq \|x_2\| \leq c_2 \|x_1\|)$$

Если последовательность сходится в одной норме, то под действием непрерывного оператора сходится и в другой.  $\square$

Последнее, что хочется сказать в этом параграфеЖ

**Теорема 5.11.**  $(X, \|\cdot\|), \dim X = n < +\infty \Rightarrow$

$$X^* = \mathcal{B}(X, \mathbb{C}) \quad \dim X^* = n$$

*Доказательство.*

$$\mathcal{B}(X, \mathbb{C}) = \text{Lin}(X, \mathbb{C})$$

$$\text{пусть } \{e_j\}_{j=1}^n \text{ — базис } X, x \in X \Rightarrow x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$$

$$f_j(x) = x_j, f_j : X \rightarrow \mathbb{C}, f_j \in \text{Lin}(X, \mathbb{C})$$

проверим  $\{f_j\}_{j=1}^n$  базис в  $X^*$

$$f \in X^*, x = \sum_{j=1}^n x_j e_j \Rightarrow f(x) = \sum_{j=1}^n x_j f(e_j) = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j, \alpha_j = f(e_j)$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j f_j(x) \quad \forall x \in X$$

$$\Rightarrow f = \sum_{j=1}^n \alpha_j f_j$$



Проверим, что  $\{f_j\}_{j=1}^n$  линейно независимы

$$\begin{aligned} \text{пусть } \sum_{j=1}^n c_j f_j = 0, \text{ то есть } 0(x) = 0 \forall x \in X \\ f_j(e_k) = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\left( \sum_{j=1}^n c_j f_j \right)}_{=0}(e_k) = c_k \Rightarrow c_k = 0, 1, \dots, n \\ \Rightarrow \{f_j\}_{j=1}^n \text{ — базис в } X^* \end{aligned}$$

□

Теперь мы расстаёмся с конечномерными пространствами.

## 5.6. Конечномерные подпространства

Начнём с некоторого общего определения, которое касается метрических пространств.

**Определение 5.13.**  $(X, \rho)$  — метрическое,  $Y \subset X, x_0 \in X, \rho(x_0, Y) = \inf_{y \in Y} \rho(x_0, y)$ . Если  $\exists y_0 \in Y$  т.ч.  $\rho(x_0, Y) = \rho(x_0, y_0)$ , то  $y_0$  — **элемент наилучшего приближения** для  $x_0$  в  $Y$

Возникают вопросы, существует ли он, и если да, то единственный ли? Тривиальное замечание

**Замечание 5.2.** Если  $Y$  компакт, то  $\exists y_0 \in Y : f(y) = \rho(x_0, y), f(y)$  непрерывна на  $Y$ .  $\exists y_0, f(y_0) = \min_{y \in Y} f(y)$

теперь мы имеем дело с конечномерным подпространством

**Теорема 5.12.**  $(X, ||\cdot||)$  — нормированное,  $L \subset X$ .  $L$  — подпространство (в алгебраическом смысле),  $\dim L = n < +\infty \Rightarrow$

1.  $L$  — замкнутое

2.  $\forall x_0 \in X \exists y_0 \in L$  — элемент наилучшего приближения

1. Естественно, о компактности никакой речи быть не может, но конечномерность нам поможет. Во-первых, мы уже отмечали, что все

конечномерные пространства — полные. Ещё мы доказывали линейную изоморфность. Таким образом,  $L$  — полное. А ещё почти на первой лекции мы обсуждали, что если есть полное подмножество метрического пространства, то оно автоматически оказывается замкнутым.  $\square$

2.

$$\text{пусть } x_0 \in X \setminus L \quad \rho(x_0, L) = d > 0 \\ \rho(x_0, L) = \inf_{y \in L} \|x_0 - y\| \Rightarrow \exists \{y_n\}_{n=1}^{\infty}, y_n \in L$$

План такой: мы докажем что последовательность ограниченная, значит, она относительно компактная, и из неё можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, а так как  $L$  замкнуто, то предел будет лежать в  $L$ . Для оценки воспользуемся неравенством треугольника

$$d < \|x_0 - y_n\| \leq d + \frac{1}{n} \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ ограничена в } L \\ \dim L < +\infty \Rightarrow \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ относительно компактна} \Rightarrow \\ \exists \{n_k\}_{k=1}^{\infty} \exists \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = y_0, L \text{ — замкнуто} \Rightarrow y_0 \in L \\ d \leq \|x_0 - y_{n_k}\| \leq d + \frac{1}{n_k} \Rightarrow \text{при } k \rightarrow \infty \|x_0 - y_0\| = d$$

$\square$

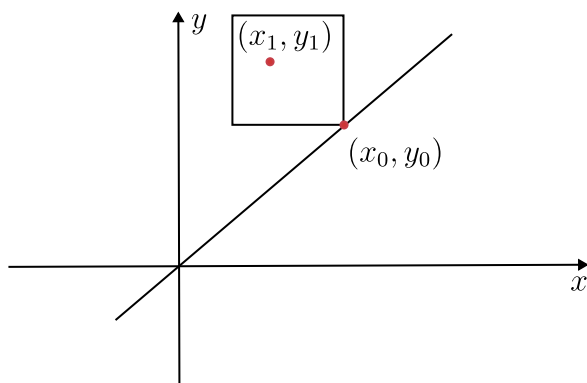
**Замечание 5.3.**  $\dim L < +\infty$ , элемент наименьшего приближения может быть не единственным.

**Пример 5.10** ( $l_2^{\infty}$ ).  $\|(x, y)\| = \max\{|x|, |y|\}$ .  $L = \{(x, y) : y = kx, k \neq 0\}$ .  $(\cdot)$  — элемент наилучшего приближения, единственный

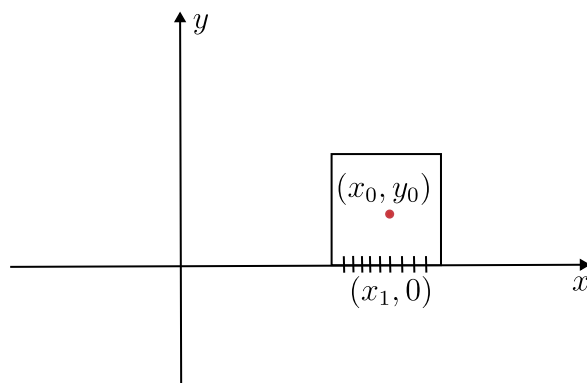
Если допустить  $k = 0$ , то все точки будут лежать на одном и том же расстоянии от  $(x_1, y_1)$ .  $\forall x \in [x_1 - y_1, x_1 + y_1], y = 0 \forall (\cdot)$  — элемент наилучшего приближения

**Пример 5.11** ( $l_2^1$ ).  $\|(x, y)\|_1 = |x| + |y|$ ,  $L = \{(x, y) : y = kx, k \neq \pm 1\}$ , тогда  $\exists$  единственный элемент наилучшего приближения. Если же  $L = \{y = x\}$ , все точки отрезка — элементы наилучшего приближения

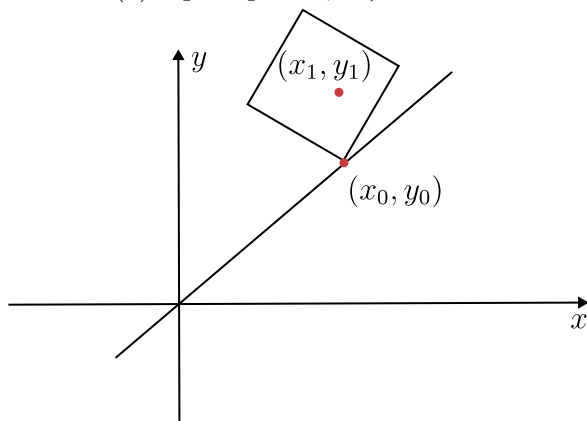
**Пример 5.12** ( $l_2^2$ ).  $l_2^2 = \{(x, y) : \|(x, y)\|_2 = \sqrt{|x|^2 + |y|^2}\} \forall L \exists !$  элемент наилучшего приближения, при  $1 < p < +\infty$  аналогично



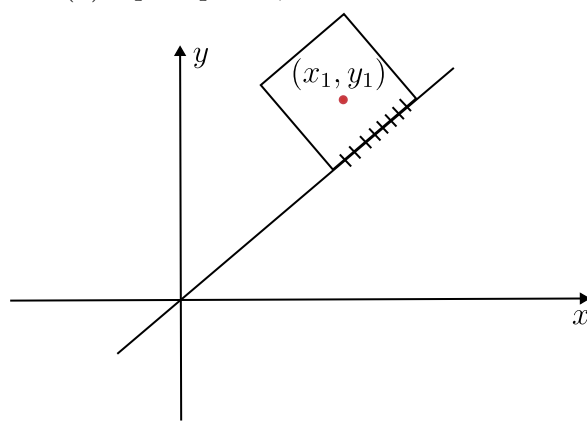
(a) Пример 5.10,  $k \neq 0$



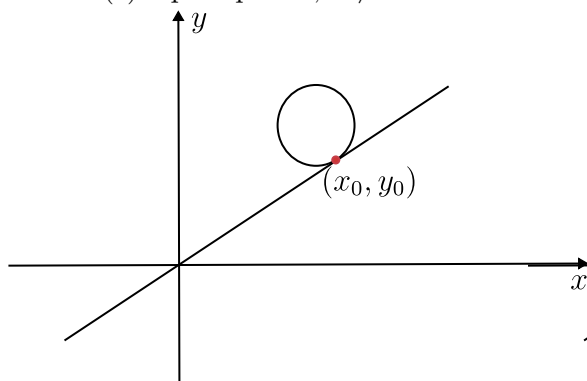
(b) Пример 5.10,  $k = 0$



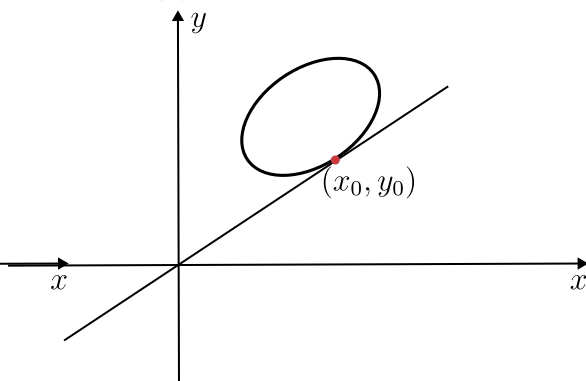
(c) Пример 5.11,  $k \neq \pm 1$



(d) Пример 5.11,  $k = 1$



(e) Пример 5.12,  $l_2^2$



(f) Пример 5.12,  $1 < p < +\infty$

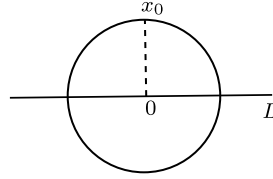


Рис. 5.2: Почти перпендикуляр

**Следствие 5.9** (про многочлены).  $C_{\mathbb{R}}[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}\},$

$$\mathcal{P}_n \left\{ p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, a_k \in \mathbb{R} \right\}$$

$$E_n(f) = \inf_{p \in \mathcal{P}_n} \|f - p\|_{\infty}$$

$$\Rightarrow \exists p_0 \text{ т.ч. } E_n(f) = \|f - p_0\|_{\infty}, p_0$$

носит торжественное название многочлена наилучшего приближения

*Доказательство.*  $\dim \mathcal{P}_n = n + 1 \Rightarrow \exists p_0$  □

**Замечание 5.4.**  $\exists!$   $p_0$ , так как  $p_0(x) = 0$  только в  $n$  точках. В пространстве непрерывных функций единичный шар устроен совершенно кошмарно, хотя норма устроена похожим образом на  $l^{\infty}$ . В шаре полно отрезков.

## 5.7. Конечномерность нормированного пространства с компактным единичным шаром

**Лемма 5.2** (Ф.Рисс, о почти перпендикуляре).  $(X, \|\cdot\|), L \subsetneq X, L$  — замкнутое подпространство,  $0 < \varepsilon < 1$

$$\Rightarrow \exists x_0, \|x_0\| = 1, \rho(x_0, L) > 1 - \varepsilon$$

На рисунке 5.2 показано, причём тут «почти перпендикуляр». Хотелось, чтобы  $x_0$ , был элемент на расстоянии 1, но 1 обеспечить нельзя, но  $1 - \varepsilon$  — можно.

*Доказательство.*

$$z \in X \setminus L, d = \rho(z, L) = \inf_{y \in L} \|z - y\| \Rightarrow \exists y_0 \in L : d \leq \|z - y_0\| < d(1 + \varepsilon)$$

$$x_0 = \frac{z - y_0}{\|z - y_0\|}, \|x_0\| = 1$$

оценим норму разности

$$\text{пусть } y \in L \quad \|x_0 - y\| = \left\| \frac{z - y_0}{\|z - y_0\|} - y \right\| = \frac{1}{\|z - y_0\|} \underbrace{\left\| z - y_0 - y \|z - y_0\| \right\|}_{\geq d} \geq \frac{d}{d(1 + \varepsilon)} = \frac{1}{1 + \varepsilon}$$

$$\forall y \in L \Rightarrow \rho(x_0, L) \geq \frac{1}{1 + \varepsilon} > 1 - \varepsilon \quad \square$$

**Замечание 5.5.** Если  $\exists y_0 \in L : \|z - y_0\| = d$ , то  $x_0 = \frac{z - y_0}{\|z - y_0\|} \Rightarrow \rho(x_0, L) = 1$

**Следствие 5.10** (из замечания).  $(X, \|\cdot\|), L \subsetneq X, L$  — подпространство,  $\dim L < +\infty$

$$\Rightarrow \exists x_0 \in X \setminus L, \|x_0\| = 1, \rho(x_0, L) = 1$$

А это следствие нам понадобится несколько раз.

**Следствие 5.11.**  $(X, \|\cdot\|), \{L_n\}_{n=1}^\infty, L_n$  — замкнутые подпространства.  $L_n \subsetneq L_{n+1}, L_1 \neq \emptyset \Rightarrow$

$$\exists \{y_n\}_{n=1}^\infty, y_n \in L_n, \rho(y_{n+1}, L_n) \geq \frac{1}{2}, \|y_n\| = 1$$

*Доказательство.* пусть  $y_1 \in L_1, \|y_1\| = 1, L_1 \subsetneq L_2 \xRightarrow{\text{Лемма}} \exists y_2 \in L_2, \|y_2\| = 1. \rho(y_2, L_1) \geq \frac{1}{2}$  и так далее по индукции  $\square$

**Теорема 5.13** (Ф.Рисс).  $(X, \|\cdot\|), B = \{x : \|x\| < 1\}. \bar{B} = \{x : \|x\| \leq 1\}$

$$\bar{B} \text{ — компакт} \Leftrightarrow \dim X < +\infty$$

*Доказательство.*  $\Leftarrow$  уже доказали

$\Rightarrow$

пусть  $\dim X = \infty \Rightarrow \exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  — линейно независимы

$$L_n = \text{Lin} \{x_j\}_{j=1}^n, \dim L_n = n, L_n \subsetneq L_{n+1}$$

$$\stackrel{\text{Сл.2}}{\Rightarrow} \exists \{y_n\}_{n=1}^{\infty}, \|y_n\| = 1, \rho(y_n, L_{n-1}) > \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\|y_n - y_m\| > \frac{1}{2} \forall n, m \Rightarrow \nexists \text{ фундаментальной подпоследовательности} \Rightarrow$$

$$\nexists \{y_{n_k}\} : \exists \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} \Rightarrow \bar{B} \text{ не компакт}$$

□

Вот так нам удалось установить, что если в пространстве единичный шар — компакт, то пространство конечномерное.

**Теорема 5.14** (о продолжении линейного оператора).  $(X, \|\cdot\|)$  — нормированное,  $(Y, \|\cdot\|)$  — банахово,  $L \subset X, L$  — подпространство в алгебраическом смысле

$$\bar{L} = X, A \in \mathcal{B}(L, Y) \Rightarrow \exists! V \in \mathcal{B}(X, Y) : \|V\|_{\mathcal{B}(X, Y)} = \|A\|_{\mathcal{B}(L, Y)}$$

*Доказательство.* Сначала мы должны распространить оператор, то есть определить, как он будет действовать на произвольный элемент  $X$ . Пусть  $x \in X$ .

$$\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in L, \lim_{n \rightarrow \infty} \|x - x_n\| = 0$$

$$\{Ax_n\}_{n=1}^{\infty}, Ax_n \in Y, \{Ax_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ — фундаментальная в } Y, \|Ax_n - Ax_m\| \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$$

Раз последовательность имеет предел, то она фундаментальная. Значит мы не зря в условии требовали банаховость.  $Y$  — банахово, тогда  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n \in Y$

$$Vx := \lim_{n \rightarrow \infty} AX_n$$

надо убедиться, что определение корректно, то есть что предел не зависит от изначально выбранной последовательности:

$$\begin{aligned} \text{пусть } \{z_n\}_{n=1}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = x \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} Az_n \\ z_n \in L \quad \|Ax_n - Az_n\| \leq \|A\| \underbrace{\|x_n - z_n\|}_{\substack{\rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Az_n \end{aligned}$$

корректность проверена

$$\text{пусть } x \in L, \text{ пусть } x_n = x \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow Vx = \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = Ax \Rightarrow V|_L = A$$

$$\begin{aligned} \text{пусть } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \Rightarrow Vx = \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n \Rightarrow \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|x\| \quad \|Vx\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|A\| \cdot \|x_n\| = \|A\| \|x\| \\ \Rightarrow \|V\| \leq \|A\| \\ \|V\| = \sup_{\{x \in X: \|x\|=1\}} \|Vx\| \geq \sup_{\{x \in L: \|x\|=1\}} \|Vx\| = \|A\| \\ \Rightarrow \|V\| = \|A\| \end{aligned}$$

□

Следующая конструкция, которая ранее упоминалась, это факторпространства.

## 5.8. Факторпространство

**Определение 5.14** (класс эквивалентности).  $X$  — линейное пространство над  $\mathbb{C}$ ,  $Y$  — подпространство.  $X/Y = \{\bar{x}\}_{x \in X}$

$$\begin{aligned} x \sim z \text{ если } x - z \in Y \\ \bar{x} = \{z : z = x + h, h \in Y\} \\ \bar{x} + \bar{y} = \overline{x + y} \\ \lambda \in \mathbb{C}, \lambda \bar{x} = \overline{\lambda x} \\ \varphi : X \Rightarrow X/Y \quad \varphi(x) = \bar{x} \end{aligned}$$

$\varphi$  — линейное (канонический гомоморфизм).

Если пространство будет не замкнутым, то будут ненулевые элементы с нулевой нормой (те, что лежат в замыкании).

**Определение 5.15.**  $(X, \|\cdot\|)$  — нормированное,  $Y$  — замкнутое подпространство.  $X/Y = \{\bar{x}\}_{x \in X}$ ,

$$\|\bar{x}\| = \inf_{z \in \bar{x}} \|z\| = \inf_{y \in Y} \|x - y\| = \rho(x, Y)$$

**Теорема 5.15.**  $(X, \|\cdot\|), Y$  — замкнутое подпространство  $\Rightarrow$

1.  $\|\bar{x}\|$  в  $X/Y$  удовлетворяет аксиомам нормы
2.  $\varphi : X \rightarrow X/Y, \varphi(x) = \bar{x} \Rightarrow \varphi \in \mathcal{B}(X, X/Y), \|\varphi\| = 1$
3. Если  $X$  — банахово, то  $X/Y$  — банахово

1.

$$\lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0, x \in X$$

$$\|\lambda \bar{x}\| = \inf_{z \in \bar{x}} \|\lambda z\| = |\lambda| \inf_{z \in \bar{x}} \|z\| = |\lambda| \cdot \|\bar{x}\|$$

$$\text{пусть } \bar{x}, \bar{u} \in X/Y, z \in \bar{x}, v \in \bar{u}$$

$$\begin{aligned} \|\bar{x} + \bar{u}\| &\leq \|z + v\| \leq \|z\| + \|v\| \quad \forall z \in \bar{x}, \forall v \in \bar{u} \\ \Rightarrow \|\bar{x} + \bar{u}\| &\leq \inf_{z \in \bar{x}} \|z\| + \inf_{v \in \bar{u}} \|v\| = \|\bar{x}\| + \|\bar{u}\| \end{aligned}$$

теперь проверяем в 0, тут как раз нужна замкнутость

$$\|\bar{x}\| = 0 \quad \|\bar{x}\| = \rho(x, Y) = 0 \Rightarrow x \in Y \Rightarrow \bar{x} = Y = \bar{0}$$

□

2.  $\|\varphi(x)\| = \|\bar{x}\| = \inf_{z \in \bar{x}} \|z\| \leq \|x\| \Rightarrow \varphi \in \mathcal{B}(X, X/Y), \|\varphi\| \leq 1$ . По лемме о почти перпендикуляре, пусть  $\varepsilon > 0 \exists x_0, \|x_0\| = 1$

$$\begin{aligned} \rho(x_0, Y) &> 1 - \varepsilon \Rightarrow \|\varphi(x_0)\| = \rho(x_0, Y) > 1 - \varepsilon \\ \Rightarrow \|\varphi\| &= \sup_{\{x: \|x\|=1\}} \|\varphi(x)\| > 1 - \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \|\varphi\| = 1 \end{aligned}$$

□



3. Воспользуемся критерием полноты: если сходится ряд из норм, то сходится и сам ряд.  $X/Y$  — полное?

$$\begin{aligned} \text{пусть } \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \|\overline{x_n}\| < +\infty & \left( \stackrel{?}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} \overline{x_n} \text{сходится в } X/Y \right) \\ \|\overline{x_n}\| = \inf_{z \in \overline{x_n}} \|z\| & \Rightarrow \exists z_n \in \overline{x_n} : \|z_n\| \leq 2 \|\overline{x_n}\| \\ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \|z_n\| < +\infty & X - \text{ банахово, и по критерию полноты } \Rightarrow \\ & \exists S = \sum_{n=1}^{\infty} z_n, s \in X \end{aligned}$$

рассмотрим частичные суммы

$$\begin{aligned} \begin{cases} S_n = \sum_{k=1}^n z_k, \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s \\ \varphi(s_n) = \sum_{k=1}^n \varphi(z_k) = \sum_{k=1}^n \overline{x_k} \end{cases} & \varphi \text{ непрерывна } \Rightarrow \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(s_n) = \varphi(s) \in X/Y & \\ \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \overline{x_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{x_k} & \Rightarrow X/Y - \text{ банахово} \end{aligned}$$

□

## Часть III

# Гильбертовы пространства

## Глава 6

# Гильбертовы пространства

### 6.1. Введение

Кто-то говорил, что матобесам в курсе ФА надо читать только гильбертовы пространства. Но неизвестно, как жить без трех китов функционального анализа, которые нас ждут дальше :(. А вы бы хотели 32 лекции про гильбертовы пространства?

**Определение 6.1.**  $H$  — линейное пространство над  $\mathbb{C}$ . Скалярное произведение  $H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $x, y \in H$ ,  $(x, y)$  — скалярное произведение удовлетворяет следующим аксиомам

1.  $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $x, y \in H$
2.  $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$
3.  $(y, x) = \overline{(x, y)}$  (комплексное сопряжение)
4.  $(x, x) \geq 0$ ,  $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

если  $H$  над  $\mathbb{R}$ , то 3 выглядит как  $(y, x) = (x, y)$

Снабдим  $H$  нормой:  $\|x\| := \sqrt{(x, x)}$  — норма, порожденная скалярным произведением.  $(H, \|\cdot\|)$  называется предгильбертовым пространством.

Если  $(H, \|\cdot\|)$  полное, то  $H$  — гильбертово.

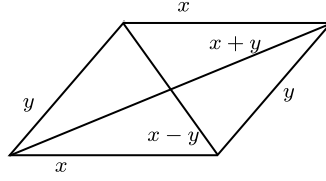


Рис. 6.1: Тождество параллелограмма

**Свойство 6.1** (скалярное произведение). 1.  $x, y \in H \Rightarrow |(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$  (неравенство К-Б)

2.  $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$  удовлетворяет аксиомам нормы

3.  $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$  (тождество параллелограмма)

4. непрерывность  $(x, y)$ , то есть  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (x, y)$

2.

$$\begin{aligned} \|x\| = 0 &\Leftrightarrow (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ \|\lambda x\|^2 &= (\lambda x, \lambda x) = \lambda \cdot \bar{\lambda} (x, x) = |\lambda|^2 \|x\|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y, x + y) = \|x\|^2 + (x, y) + (y, x) + \|y\|^2 = \\ &= \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re}(x, y) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2 \|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

□

Кто не верит в тождество параллелограмма, может проверить сам

4.

$$\begin{aligned} |(x, y) - (x_n, y_n)| &\leq |(x, y) - (x, y_n)| + |(x, y_n) - (x_n, y_n)| = \\ &= |(x, y - y_n)| + |(x - x_n, y_n)| \stackrel{\text{К-Б}}{\leq} \\ &\leq \|x\| \cdot \underbrace{\|y - y_n\|}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\|x - x_n\|}_{\rightarrow 0} \underbrace{\|y_n\|}_{\leq M} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n\| = \|y\| \Rightarrow \exists M : \|y_n\| \leq M$$

□

**Пример 6.1.**

$$l_n^2 = \{x : x = \{x_1, \dots, x_n\}, x_j \in \mathbb{C}\}, \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2}$$

$$(x, y) = \sum_{j=1}^n x_j \overline{y_j}, l_n^2 - \text{гильбертово}$$

$$y = (y_1, \dots, y_n), y_j \in \mathbb{C}, \overline{y_j} - \text{комплексное сопряжение}$$

**Пример 6.2** ( $l^2$ ).  $l^2 = \{x : x = \{x_j\}_{j=1}^\infty, \|x\| = \sqrt{\sum_{j=1}^\infty |x_j|^2} < +\infty\}$ .  
 $(x, y) = \sum_{j=1}^\infty x_j \overline{y_j}$ .  $l^2$  — гильбертово

Главый пример

**Пример 6.3.**  $(X, U, \mu)$  — пространство с мерой.  $L^2(X, \mu)$ ,

$$\|f\| = \left( \int_X |f(x)|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty$$

$$(f, g) = \int_X f(x) \cdot \overline{g(x)} d\mu, L^2(X, \mu) - \text{полное, } \Rightarrow \text{гильбертово}$$

**Пример 6.4** (пространство Харди).  $H^2$  — пространство Харди

$$H^2 = \left\{ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, \|f\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 < +\infty \right\}$$

$H^2$  линейно изометрически изоморфно  $l^2$ .

$$(f, g) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{b_n}, g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \Rightarrow H^2 \text{ гильбертово}$$

Отметим, где  $f$  будет аналитической

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 < +\infty &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0 \Rightarrow \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq 1 \\ &\Rightarrow R \geq 1 \end{aligned}$$

где  $R$  — радиус круга сходимости ряда  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, f \in H^2 \Rightarrow f \text{ аналитическая в } \{z : |z| < 1\}$$

Теперь примеры предгильбертовых пространств

**Пример 6.5.**  $F$  — финитные последовательности.

$(x, y) \in F, (x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \overline{y_j}$  (конечная сумма  $F \subset l^2, \|x\| = \sqrt{\sum_{j=1}^N |x_j|^2}$ ),  $x_{N+k} = 0, k \in \mathbb{N}$ .  $F$  — предгильбертово (не полное)

**Пример 6.6.**  $C[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}\}$

$$\|f\| = \left( \int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, (f, g) = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

не полное  $\Rightarrow$  предгильбертово

**Пример 6.7.**  $\mathcal{P} = \{p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, a_k \in \mathbb{C}, n \geq 0\}$ .

$q(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k, (p, q) = \sum_{k=0}^n a_k \overline{b_k}$  предгильбертово.  $\mathcal{P}$  — линейно изометрически изоморфно  $F : p(x) \rightarrow (a_0, a_1, \dots, a_n) \in F$ . Пополнение  $\mathcal{P}$  по этой норме до гильбертова пространства есть  $l^2$ .

**Пример 6.8.**  $\mathcal{P}, \mathcal{P} \subset C[a, b]$ .  $(p, q) = \int_a^b p(x) \overline{q(x)} dx$  — предгильбертово, пополнением  $\mathcal{P}$  будет  $L^2(a, b)$  по мере Лебега.

**Определение 6.2.**  $H$  — гильбертово,

1.  $x, y \in H, (x, y) = 0$ , то  $x \perp y$  ( $x$  ортогонален  $y$ )
2.  $M \subset H, M$  — подмножество. Ортогональным дополнением к нему будем называть

$$M^\perp = \{y \in H : (y, x) = 0 \forall x \in M\}$$

**Свойство 6.2.**  $M \subset H$  — гильбертово  $\Rightarrow M^\perp$  — замкнутое подпространство

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} & y, z \in M^\perp, \lambda \in \mathbb{C}, \text{ пусть } x \in M \\ & (\lambda y + z, x) = \lambda \underbrace{(y, x)}_{=0} + \underbrace{(z, x)}_{=0} \Rightarrow \lambda y + z \in M^\perp \\ & \text{пусть } \{y_n\}_{n=1}^\infty, y_n \in M^\perp, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0, \text{ пусть } x \in M \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{(y_n, x)}_{=0} = (y_0, x) \Rightarrow (y_0, x) = 0 \Rightarrow y_0 \in M^\perp \end{aligned}$$

□

В гильбертовом пространстве всегда существует элемент наилучшего приближения, он ещё и единственный!

**Теорема 6.1** (о существовании элемента наилучшего приближения в гильбертовом пространстве).  $H$  — гильбертово,  $M \subset H$ ,  $M$  — замкнутое подпространство,  $\forall x \in H \Rightarrow \exists ! z \in M : \|x - z\| = \min_{h \in M} \|x - h\| = \rho(x, M)$

Для произвольного метрического пространства мы доказывали, что если есть конечномерное подпространство, то элемент существует. Доказательство начнём с простой леммы.

**Лемма 6.1.**  $H$  — гильбертово, замкнутое подпространство  $M \subset H$ .  $x \in H \setminus M$ ,  $u, v \in M$ ,  $d = \inf_{h \in M} \|x - h\|$

$$\Rightarrow \|u - v\|^2 \leq 2(\|u - x\|^2 + \|v - x\|^2) - 4d^2$$

*Доказательство.* Применим тождество параллелограмма к  $(u - x), (v - x)$

$$\|u - v\|^2 + \|u + v - 2x\|^2 = 2(\|u - x\|^2 + \|v - x\|^2)$$

тут 3 слагаемых из 4 участвуют в формулировке леммы, нужно оценить только второе слагаемое.

$$\|2x - u - v\| = 2 \left\| x - \frac{u + v}{2} \right\| \geq 2d$$

$$\frac{u - v}{2} \in M \Rightarrow \|u - v\|^2 \leq 2(\|u - x\|^2 + \|v - x\|^2) - 4d^2$$

□

*Доказательство.* Обозначим  $d = \rho(x, M)$ . Мы ещё не знаем, достигается ли расстояние, но знаем, что  $\exists \{y_n\}_{n=1}^{\infty}, y_n \in M. \lim_{n \rightarrow \infty} \|x - y_n\| = d$ . План такой: мы докажем, что последовательность фундаментальная, значит, предел лежит в  $M$  и всё доказано.

воспользуемся леммой и устремим в получившемся неравенстве  $n, m$  к  $\infty$

$$\begin{aligned} \|y_n - y_m\|^2 &\stackrel{\text{лемма}}{\leq} 2(\underbrace{\|x - y_n\|^2}_{d^2} + \underbrace{\|x - y_m\|^2}_{d^2}) - 4d^2 \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0 \\ \Rightarrow \{y_n\}_{n=1}^\infty &\text{ — фундаментальная, } H \text{ — гильбертово} \Rightarrow \\ \exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n &= z, z \in M, \text{ т.к. } M \text{ замкнуто} \Rightarrow \\ d &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|x - y_n\| = \|x - z\| \end{aligned}$$

теперь проверим единственность

$$\text{пусть } \|x - z\| = d, \|x - u\| = d \quad z, u \in M$$

воспользуемся ещё раз леммой

$$\Rightarrow \|z - u\|^2 \leq 2(\underbrace{\|x - z\|^2}_{=d^2} + \underbrace{\|x - u\|^2}_{=d^2}) - 4d^2 = 0 \Rightarrow z = u$$

□

**Теорема 6.2** (о проекции на подпространство).  $H$  — гильбертово,  $M \subset H$ ,  $M$  — замкнутое подпространство

$$\forall x \in X \exists ! z, w : x = z + w, z \in M, w \in M^\perp$$

Этот элемент  $z$  как раз будет ближайшим элементом, который появился в предыдущей теореме.

*Доказательство.*

$$d := \rho(x, M) \quad \exists z \in M \quad \|x - z\| = d \quad w := x - z$$

проверим, что  $w \perp M$ ; будем пользоваться тем, что для любой точки расстояние до  $M$  больше или равно  $d$

$$\begin{aligned} \text{пусть } u \in M, u \neq 0 \forall t \in \mathbb{R} \quad z + tu \in M \\ d^2 \leq \|x - (z + tu)\|^2 = \|w - tu\|^2 = (w - tu, w - tu) = \underbrace{\|w\|^2}_{=d^2} - t(u, w) - t(w, u) + t^2 \|u\|^2 \Rightarrow \end{aligned}$$

так как 2 и 3 слагаемое комплексно сопряжённые

$$t \cdot 2 \operatorname{Re}(u, w) \leq t^2 \|u\|^2$$



неравенство верно для любого вещественного  $t$

$$\left. \begin{array}{l} \text{пусть } t > 0 \Rightarrow 2 \operatorname{Re}(u, w) \leq t \|u\|^2 \quad \forall t > 0 \Rightarrow \operatorname{Re}(u, w) \leq 0 \\ \text{пусть } t < 0 \Rightarrow 2 \operatorname{Re}(u, w) \geq t \|u\|^2 \quad \forall t < 0 \Rightarrow \operatorname{Re}(u, w) \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \operatorname{Re}(u, w) = 0$$

$$\text{аналогично } \forall t \in \mathbb{R} \quad d^2 \leq \|x - (z + itu)\|^2 \Rightarrow \operatorname{Im}(u, w) = 0$$

$$\Rightarrow (u, w) = 0, \text{ то есть } w \perp M \Rightarrow w \in M^\perp$$

осталось проверить единственность

$$\begin{aligned} \text{пусть } x = z + w, x = z_1 + w_1 \quad z, z_1 \in M, w, w_1 \in M^\perp \\ \Rightarrow u = \underbrace{z - z_1}_{\in M} = \underbrace{w_1 - w}_{\in M^\perp} \Rightarrow u \perp \Rightarrow (u, u) = 0 \\ \Rightarrow u = 0 \Rightarrow z = z_1, w = w_1 \end{aligned}$$

□

**Определение 6.3.**  $H$  — гильбертово,  $X, Y$  — замкнутые подпространства.  $H = X \oplus Y$ .  $H$  — ортогональная сумма подпространств  $X$  и  $Y$ , если

1.  $\forall h \in H \exists x \in X, y \in Y : h = x + y$
2.  $\forall x \in X, y \in Y (x, y) = 0$

**Замечание 6.1.**

$X, Y$  — подпространства в  $H$ ,  $X \perp Y$ , то есть  $\forall x \in X, \forall y \in Y (x, y) = 0 \Rightarrow X \cap Y = \{0\}$ .

*Доказательство.*  $u \in X \cap Y \Rightarrow u \perp u \Rightarrow u = 0$

□

**Замечание 6.2.** Если  $H = X \oplus Y$ , то  $\forall x \in H \exists !x \in X, \exists !y \in Y$  т.ч.  $h = x + y$

*Доказательство.* Пусть  $h = x + y, h = x_1 + y_1$   $x, x_1 \in X, y, y_1 \in Y \Rightarrow$   
 $\underbrace{x - x_1}_{\in X} = \underbrace{y_1 - y}_{\in Y} \xrightarrow{\text{Зам.1}} x = x_1, y = y_1$

□

- Следствие 6.1.** 1.  $M$  — замкнутое подпространство  $\Rightarrow H = M \oplus M^\perp$
2.  $M$  — замкнутое подпространство  $\Rightarrow (M^\perp)^\perp = M$
3. Если  $H = X \oplus Y$ ,  $X, Y$  — замкнутые  $\Rightarrow Y = X^\perp$

**Определение 6.4** (оператор ортогонального проектирования).  $H$  — гильбертово,  $M$  — замкнутое подпространство. Знаем, что  $\forall x \in H \exists ! z \in M, w \in M^\perp : h = z + w$

$$P_M(h) := z$$

$P_M$  — оператор ортогонального проектирования на  $M$ .

Хоть в определении об этом нигде не сказано, но хорошо помнить, что  $\|h - z\| = \min_{y \in M} \|h - y\|$ . На экзамене часто пристают с вопросом, откуда же взять этот  $z$ .  $w = P_{M^\perp}(h)$ .

**Теорема 6.3** (критерий принадлежности оператора множеству ортогональных проекторов). Теорема будет состоять из 2 частей. Первая полегче, в ней опишем простые свойства ортогонального проектора. Вторая посложнее, и в ней будет собственно критерий.

1.  $M$  — замкнутое подпространство,  $P := P_M \Rightarrow$
- a)  $P \in \mathcal{B}(H)$
  - b)  $P^2 = P$
  - c)  $(Px, y) = (x, Py), \forall x, y \in H$  (по секрету, это самосопряжённость)
2. пусть оператор  $P$  удовлетворяет свойствам 1-3  $\Rightarrow M := P(H), M$  — замкнутое,  $P = P_M$

1 часть. 1. Сначала проверим, что  $P_M \in \text{Lin}(H, M)$

$$h \in H \Rightarrow \exists ! z \in M, w \in M^\perp : h = z + w$$

утверждается, что  $P(h) = z$

$$\alpha \in \mathbb{C} \Rightarrow \alpha h = \alpha z + \alpha w \quad \alpha z \in M, \alpha w \in M^\perp$$

по единственности разложения  $\alpha z \Rightarrow$

$$P(\alpha h) = \alpha z$$

пусть  $h_1 \in H \Rightarrow h_1 \in z_1 + w_1$   $z_1 \in M, w_1 \in M^\perp$

$$P(h_1) = z_1 \Rightarrow h + h_1 = \underbrace{(z + z_1) + (w + w_1)}_{\text{разложение единственно}} \quad z + z_1 \in M, w + w_1 \in M^\perp$$

$$\Rightarrow P(h + h_1) = z + z_1 = P(h) + P(h_1)$$

Теперь проверим непрерывность  $P$

$$h = z + w, \quad z \perp w \Rightarrow (h, h) = (z, z) + (w, w)$$

$$\|h\|^2 = \|z\|^2 + \|w\|^2$$

$$z = P(h) \Rightarrow \|P(h)\|^2 \leq \|h\|^2 \Rightarrow P \in \mathcal{B}(H)$$

$$\|P\| \leq 1$$

$$\text{если } M \neq \{0\}, \exists x \in M, x \neq 0 \Rightarrow Px = x \Rightarrow \|P\| \geq \frac{\|Px\|}{\|x\|} = 1$$

$$\Rightarrow \|P\| = 1$$

$$2. \quad x \in M \Rightarrow Px = x,$$

$$\text{пусть } y = Px \Rightarrow y \in M \Rightarrow \underbrace{Py}_{=y=Px} = P(Px) \Rightarrow P^2x = Px$$

3.

$$x, y \in H, P = P_m, Q = P_{M^\perp}$$

$$x = Px + Qx, y = Py + Qy$$

$$(Px, y) = (Px, Py + Qy) = (Px, Py)$$

$$(x, Py) = (Px + Qx, Py) = (Px, Py)$$

□

2 часть.  $p \in \mathcal{B}(H), M := P(H), M$  — подпространство в алгебраическом смысле. План такой: проверим, что  $P$  совпадает с ортогональным проектором на  $M$  и что он отправляет ортогональное дополнение в 0. Проверим, что если  $x \in M$ , то  $Px = x$ .

$$\left. \begin{array}{l} \text{пусть } x \in M \Rightarrow \exists y \in H : Py = x \Rightarrow P(Py) = Px \\ \text{по свойству ортогонального оператора } P^2 = P \Rightarrow P(Py) = Py = x \end{array} \right\} \Rightarrow x = Px$$

Проверим теперь замкнутость  $M$

$$\begin{aligned} \text{пусть } \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in M, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} Px_n = Px_0 \\ Px_n = x_n &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = Px_0 \Rightarrow x_0 = Px_0 \Rightarrow x_0 \in P(H) = M \end{aligned}$$

осталось убедиться, что оператор  $P$  отправляет в 0 ортогональное дополнение

$$\text{пусть } y \in M^{\perp}$$

$$\begin{aligned} \|Py\|^2 &= (Py, Py) \stackrel{\text{самосопряжённость}}{=} (y, P(Py)) = (y, Py) \text{ т.к. } y \in M^{\perp}, Py \in M = 0 \\ &\Rightarrow Py = 0 \end{aligned}$$

□

Мы знаем, что оператор совпадает на  $M$ , а ортогональное дополнение отправляет в 0

$$\begin{aligned} h \in H &\Rightarrow h = z + w, z \in M, w \in M^{\perp} \\ &\Rightarrow P(z + w) = z \\ &P_m(z + w) = z \\ &\Rightarrow P = P_m \end{aligned}$$

**Следствие 6.2** (ортогональный оператор на конечномерное подпространство).  $H$  — гильбертово, подпространство  $M \subset H$ ,  $\dim M = n, n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \{e_j\}_{j=1}^n &\text{ — ортонормированный базис} \\ (e_j, e_k) &= \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases}, x \in H, P_M(x) = \sum_{j=1}^n (x, e_j) e_j \end{aligned}$$

*Доказательство.*  $s_n = \sum_{j=1}^n (x, e_j) e_j, s_n \in M, w := x - s_n$ . Проверим, что  $w \in M^{\perp}$ . Для этого проверим, что он ортогонален всем  $e_j$

$$\begin{aligned} (s_n, e_k) &= \left( \sum_{j=1}^n (x, e_j) e_j, e_k \right) = (x, e_k) \\ &\Rightarrow (x - s_n, e_k) = 0 \Rightarrow (w, e_k) = 0 \forall k, 1 \leq k \leq n \\ &\Rightarrow w \perp M, \Rightarrow w \in M^{\perp} \Rightarrow P_M(x) = s_n \end{aligned}$$

□

**Следствие 6.3** (критерий полноты системы элементов в гильбертовом пространстве).  $H$  — гильбертово,  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ,  $x_\alpha \in H$  ( $A$  — множество индексов)

$$\{x_\alpha\}_{\alpha \in A} \text{ — полное} \Leftrightarrow (y \perp x_\alpha \forall \alpha \in A \Rightarrow y = 0)$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \{x_\alpha\}_{\alpha \in A} \text{ — полное} &\Rightarrow \overline{\mathcal{L}\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}} = H \\ L &= \overline{\mathcal{L}\{x_\alpha\}} \\ L = H &\Leftrightarrow L^\perp = \{0\} \Leftrightarrow (y \perp x_\alpha \forall \alpha \in A \Rightarrow y = 0) \end{aligned}$$

□

Несмотря на то, что доказательство тривиальное, этот критерий полноты очень полезен.

Упражнения, которое когда-то давали в качестве задачи на 5 на экзамене

**Утверждение 6.1.**  $l^2, L = \{x = \{x_n\}_{n=1}^\infty \in l^2 : \sum_{n=1}^\infty x_n = 0\}$ .  
Нужно доказать, что  $L$  — плотно в  $l^2$

**Утверждение 6.2.**  $z \in \mathbb{C}, |z| < 1, x_z = \{1, z, z^2, \dots, z^n, \dots\} \in l^2$ .  
 $\{z_n\}_{n=1}^\infty, |z_n| < 1, \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$  Нужно доказать, что  $\{x_{z_n}\}_{n=1}^\infty$  — плотное семейство в  $l^2$

**Утверждение 6.3.** Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a, |a| < 1$ . Нужно доказать, что  $\{x_{z_n}\}_{n=1}^\infty$  — плотное семейство в  $l^2$

То, что  $|a| < 1$  — очень важно. При равенстве утверждения неверны.

**Определение 6.5** (коэффициент Фурье).  $H$  — гильбертово,  $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$  — ортонормированная система

$$(e_j, e_k) = 0 \text{ при } j \neq k$$

$$(e_k, e_k) = 1, \|e_k\| = 1$$

$$M_n = \{\alpha e_n | \alpha \in \mathbb{C}\}, \dim M_n = 1, P_{M_n}$$

$$x \in H, P_{M_n}(x) = (x, e_n)e_n$$

$$(x, e_n) \text{ — коэффициент Фурье}$$

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n)e_n \text{ ряд Фурье по системе } \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$$

**Определение 6.6.**

$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$  — ортогональная система (ОС)

$$(e_j, e_k) = 0, j \neq k, e_n \neq 0$$

$$M_n = \{\alpha e_n : \alpha \in \mathbb{C}\}$$

$$P_{M_n}(x) = \left(x, \frac{e_n}{\|e_n\|}\right) \frac{e_n}{\|e_n\|} = \frac{(x, e_n)}{\|e_n\|^2} e_n$$

коэффициент Фурье по системе  $\{e_n\}$

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|(x, e_n)\|}{\|e_n\|^2} e_n$$

Когда мы пишем  $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ , мы подразумеваем бесконечномерность пространства. Если же вы возьмёте книжку Колмогорова, то гильбертово пространство в ней по определению бесконечномерное. Однако И.В. решил убрать это условие в своём курсе, Ввдь есть теория конечномерных банаховых пространств, где переходят к пределу и получают утверждения про бесконечномерные пространства. В общем: если вам попадётся кровожадный помощник на экзамене и вы скажете, что гильбертово пространство бесконечномерное, он спросит: «С какод стати?». Если не скажете — то он скажет, что вы даже не знаете определение, и вы в любом случае получите 2.

**Следствие 6.4** (неравенство Бесселя).  $H$  — гильбертово,  $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$  — О.Н.С.,  $x \in H \Rightarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 \leq \|x\|^2$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} h &= \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j, \alpha_j \in \mathbb{C} \Rightarrow \\ \|h\|^2 &= \left( \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j, \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \right) = \sum_{k=1}^n |\alpha_k|^2 \\ L_n &= \mathcal{L} \{e_j\}_{j=1}^n, P_{L_n}(x) = \sum_{j=1}^n (x, e_j) e_j \\ \|P_{L_n}\| &\leq 1 \Rightarrow \|P_{L_n}(x)\|^2 \leq \|x\|^2 \Rightarrow \\ \sum_{j=1}^n |(x, e_j)|^2 &\leq \|x\|^2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \\ \sum_{j=1}^{\infty} |(x, e_j)|^2 &\leq \|x\|^2 \end{aligned}$$

□

Сейчас выясним, когда неравенство превращается в равенство, то есть когда можно узнать норму, вычислив эту сумму.

**Теорема 6.4** (о разложении элемента гильбертова пространства в ряд Фурье).  $H$  — гильбертово,  $x \in H$ ,  $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$  — О.Н.С., тогда следующие условия равносильны

1.  $x \in \overline{\mathcal{L} \{e_n\}_{n=1}^{\infty}}$
2.  $x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n$
3.  $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2$  (равенство Парсеваля)

*Доказательство.*  $1 \Rightarrow 2$

По виду первое утверждение куда более слабое, чем второе. В первом

можно приблизить элемент сколько угодно хорошо какими-то элементами. Во втором же есть сходимость к какому-то ряду.

$$x \in H, x \in \overline{\mathcal{L}\{e_n\}_{n=1}^{\infty}}, \text{ пусть } \varepsilon > 0$$

$$\exists y = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k, \|x - y\| < \varepsilon$$

$$L_n = \mathcal{L}\{e_k\}_{k=1}^n \Rightarrow \rho(x, L_n) < \varepsilon \quad P_{L_n}(x) = \underbrace{\sum_{j=1}^n (x, e_j) e_j}_{:= s_n}$$

$$\Rightarrow \|x - s_n\| \leq \|x - y\| < \varepsilon \quad L_n \subset L_{n+1} \Rightarrow$$

$$\|x - s_{n+1}\| \leq \|x - s_n\| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\forall m \geq n \quad \|x - s_m\| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = x$$

$$2 \Rightarrow 1 \text{ очевидно: } x = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \Rightarrow x \in \overline{\mathcal{L}\{e_j\}_{j=1}^{\infty}}$$

$$2 \Rightarrow 3$$

$$s_n = \sum_{k=1}^n (x, e_k) e_k, \quad x = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n, \text{ и по непрерывности скалярного произведения } \Rightarrow (x, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n, s_n) \Leftrightarrow$$

$$\|x\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n |(x, e_k)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2$$

$$3 \Rightarrow 2$$

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^n |(x, e_k)|^2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \|x\|^2$$

$$w_n := x - s_n, \quad w_n \perp s_n \Rightarrow \|x\|^2 = \underbrace{\|s_n\|^2}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|x\|^2} + \|w_n\|^2$$

$$\|s_n\|^2 = \sigma_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|w_n\|^2 = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|x - s_n\| = 0$$

□

**Следствие 6.5.**  $H$  — гильбертово,  $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$  — полная О.Н.С  $\Rightarrow$

$$\forall x \in H \quad x = \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k) e_k, \quad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2$$



Доказывать нечего, принадлежность линейной оболочке означает полноту.

**Определение 6.7.**  $(X, \|\cdot\|)$  — нормированное пространство,  $\{e_n\}_{n=1}^\infty$  — базис (Шаудера), если

$$\forall x \in X \exists! \{\alpha_n\}_{n=1}^\infty, \alpha_n \in \mathbb{C} : x = \sum_{n=1}^\infty \alpha_n e_n$$

**Пример 6.9.**  $l^p, 1 \leq p < +\infty, e_n = (0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_n, 0, \dots)$

$$x \in l^p, x = \{x_n\}_{n=1}^\infty = \sum_{n=1}^\infty x_n e_n, \|x - s_n\|_{l^p} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$c_0, x \in c_0, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \quad x = \sum_{n=1}^\infty x_n e_n \quad \|x - s_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Упражнение:  $c = \left\{ x = \{x_n\}_{n=1}^\infty, \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \right\} \subset l^\infty$ . Что тут будет базисом?

**Замечание 6.3.** Если в  $(X, \|\cdot\|)$  есть базис, то  $X$  — сепарабельно.

**Замечание 6.4** (Проблема Банаха, проблема базиса). Проблема Банаха, проблема базиса

$X$  — нормированное сепарабельное  $\stackrel{?}{\Rightarrow} \exists$  базис

Собирались товарищи во Львове в кафе и выводили эти проблемы. Обычно математики любят сидеть в тишине, но вот Банах любил сидеть в кафе. Вероятно, они там не только чай гоняли. Пер Энфлю в 1973 году дал ответ на этот вопрос: нет. Он предоставил множество контр-примеров. Да и вообще он знаменит своими контр-примерами. Сейчас в Америке где-то работает.

**Следствие 6.6.**  $H$  — гильбертово,  $\{e_n\}_{n=1}^\infty$  — полная О.Н.С.  $\Rightarrow \{e_n\}_{n=1}^\infty$  — базис в  $H$

*Доказательство.*

$$x \in H \Rightarrow x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n$$

$$\text{проверяем единственность: пусть } x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n, \alpha_n \in \mathbb{C}$$

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = x \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (\sigma_n, e_k) = (x, e_k)$$

$$\text{пусть } n \geq k \Rightarrow (\sigma_n, e_k) = \alpha_k \Rightarrow \alpha_k = (x, e_k)$$

□

**Теорема 6.5** (о существовании О.Н.Б. в сепарабельном гильбертовом пространстве).  $H$  — сепарабельное гильбертово пространство  $\Rightarrow$

$$\exists \{e_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ — О.Н.Б.}$$

По секрету, если убрать сепарабельность, то базис будет несчётный. Какова размерность, такой и базис. Обычно, когда говорят о гильбертовом пространстве, подразумевают гильбертово сепарабельное.

*Доказательство.* Будем действовать в 2 этапа. Сепарабельность означает, что есть счётное всюду плотное множество, возьмём его:  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ . 1 этап: по индукции выберем из него линейно независимую систему так, чтобы замыкание их линейной оболочки совпадало с замыканием линейной оболочки  $x_n$ . Оно будет полным и линейно-независимым. Потом применим к нему ортогонализацию Грама-Шмидта (а он ученик Гильберта, кстати)

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{n_1-1} = 0, x_{n_1} \neq 0 \quad z_1 = x_{n_1}$$

$$L_1 = \mathcal{L}(z_1) = \{\alpha z_1 | \alpha \in \mathbb{C}\}$$

$$x_{n_1+1}, \dots, x_{n_2-1} \in L_1, x_{n_2} \notin L_1, z_2 = x_{n_2}, L_2 = \mathcal{L}(z_1, z_2)$$

$$\text{пусть выбрали } z_1, \dots, z_m$$

$$z_m = x_{n_m}, x_{n_m+1}, \dots, x_{n_{m+1}-1} \in L_m, x_{n_{m+1}} \notin L_m$$

$$z_{m+1} = x_{n_{m+1}}$$

как мы их выбираем?

$$\begin{aligned} \{z_j\}_{j=1}^{\infty} & \text{ — линейно независимы} \\ \mathcal{L}(z_j)_{j=1}^m &= \mathcal{L}\{x_k\}_{k=1}^{n_m} \quad \forall m \Rightarrow \mathcal{L}\{z_j\}_{j=1}^{\infty} = \mathcal{L}\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \\ &\Rightarrow H = \overline{\mathcal{L}\{z_n\}_{n=1}^{\infty}} \Rightarrow \{z_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ — полная} \end{aligned}$$

Процесс ортогонализации Грама-Шмидта:

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{z_1}{\|z_1\|}, \text{ пусть } e_1, \dots, e_{n-1} \text{ — выбрали } \mathcal{L}\{e_j\}_{j=1}^{n-1} = \mathcal{L}\{z_j\}_{j=1}^{n-1} \\ L_n &= \mathcal{L}\{z_j\}_{j=1}^n, L_n \subsetneq L_{n+1} \quad e_n = \frac{z_n - P_{L_{n-1}}(z_n)}{\|z_n - P_{L_{n-1}}(z_n)\|} = \frac{z_n - \sum_{j=1}^{n-1} (z_n, e_j) e_j}{\|z_n - P_{L_{n-1}}(z_n)\|} \Rightarrow \\ &\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ — полная О.Н.С.} \Rightarrow \\ &\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ — базис (Шаудера)} \end{aligned}$$

□

Теперь докажем, что все сепарабельные линейные пространства похожи друг на друга как две капли воды: не просто линейно изоморфны, а линейно изометрически изоморфно. Для конечномерных тоже верно, нужно только рассматривать пространства одинаковой размерности.

**Теорема.** Все сепарабельные бесконечномерные гильбертовы пространства линейно изометрически изоморфны друг другу

*Доказательство.*  $H$  — гильбертово сепарабельное,  $\dim H = \infty$ . Мы обсуждали, что линейный изоморфизм — отношение эквивалентности, отношение изометричности — тоже. Поэтому линейный изометрический изоморфизм есть отношение эквивалентности. Поэтому вместо того, чтобы брать  $H_1, H_2$ , возьмём  $H$  и  $l^2$  и покажем, что они линейно изометрически изоморфны.

$$\begin{aligned} &\text{пусть } \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ — О.Н.Б. в } H \\ \varphi : H &\rightarrow l^2 \quad x \in H \quad x \mapsto \{(x, f_n)\}_{n=1}^{\infty} \\ \|x\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} |(x, f_n)|^2 \Rightarrow \|x\|_H = \|\varphi(x)\|_{l^2} \\ \varphi \in \text{Lin}(H, l^2) &\text{ очевидно} \Rightarrow \varphi \in \mathcal{B}(H, l^2) \\ &\varphi \text{ — инъективен} \end{aligned}$$

проверим, что  $\varphi$  — сюръекция

$$\begin{aligned} & \text{пусть } y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^2 \\ & s_n = \sum_{k=1}^n y_k f_k, s_n \in H, \text{ пусть } m > n \\ & \|s_m - s_n\|^2 = \sum_{k=n+1}^m |y_k|^2 \xrightarrow{n, m \rightarrow 0} 0 \Rightarrow \{s_n\} \text{ — фундаментальная} \\ & \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s, s = \sum_{k=1}^{\infty} y_k f_k \Rightarrow \varphi(s) = y \end{aligned}$$

□

**Замечание 6.5.** Пусть  $m \in \mathbb{N}$ ,  $H$  — гильбертово пространство,  $\dim H = m \Rightarrow H$  — линейно изометрически изоморфно  $l_m^2$ .

## 6.2. Пространство, сопряжённое к гильбертову

Опишем все непрерывные функционалы в гильбертовом пространстве  $H$ .

**Теорема** (Ф.Рисс, общий вид линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве).  $H$  — гильбертово. Опишем набор линейных функционалов: покажем, что он непрерывный. Вторая часть будет утверждать, что других нет.

1.  $y \in H, y$  — фиксирован. Рассмотрим отображение

$$\begin{aligned} f_y : H &\rightarrow \mathbb{C} \quad x \mapsto (x, y) \quad \forall x \in H \\ &\Rightarrow f_y \in H^*, \|f_y\|_{H^*} = \|y\|_H \end{aligned}$$

2.  $f \in H^* \Rightarrow \exists ! y \in H : f = f_y$ , то есть  $f(x) = (x, y) \quad \forall x \in H$

1 часть.

$f_y \in \text{Lin}(H, \mathbb{C})$  — очевидно из свойств скалярного произведения

$$\begin{aligned} |f_y(x)| &= |(x, y)| \stackrel{\text{К-Б}}{\leq} \|x\| \cdot \|y\| \quad \forall x \in H \\ &\Rightarrow f_y \in H^*, \|f_y\|_{H^*} \leq \|y\|_H \end{aligned}$$

проведём тривиальное отбрасывание тривиальных случаев

$$\begin{aligned} y = 0 &\Rightarrow f_y = 0 \quad \|f_y\| = 0 \\ \text{пусть } y \neq 0 \quad \|f_y\| &= \sup_{x \in H, x \neq 0} \frac{|f_y(x)|}{\|x\|} \geq \frac{|f_y(y)|}{\|y\|} = \frac{(y, y)}{\|y\|} = \|y\| \\ &\Rightarrow \|f_y\|_{H^*} = \|y\|_H \end{aligned}$$

□

2 часть. Намёк, откуда брать  $y$ : мы знаем, что  $f_y(x) = 0 \Leftrightarrow (x, y) = 0 \Leftrightarrow x \in \{y\}^\perp$ . Сначала рассмотрим и отбросим тривиальный случай: пусть  $f(x) = 0$ , то есть  $f(x) = 0 \forall x \in H \Rightarrow$  пусть  $y = 0, f = f_0$ . Теперь пусть  $f \neq 0, N = \text{Ker } f (N = f^{-1}(0)) \Rightarrow n \subsetneq H, f$  — непрерывный  $\Rightarrow N$  — замкнутое подпространство. Значит, существует нетривиальное ортогональное дополнение  $N^\perp$ , то есть  $N^\perp \neq \{0\}$ , пусть  $x_0 \in N^\perp, x_0 \neq 0$

$$, v = \frac{x_0}{f(x_0)}, f(x_0) \neq 0, f(v) = 1, f(v) = \frac{1}{f(x_0)} \cdot f(x_0) = 1$$

установим следующую вещь:  $\dim N^\perp = 1$ , то есть все элементы дополнения кратны  $v$ ; вообще, это очевидно, гомоморфный образ группы изоморфен факторгруппе по ядру гомоморфизма, помните такую скороговорку из алгебры? но сейчас докажем аккуратно

$$\begin{aligned} \text{пусть } u \in N^\perp \quad \alpha &:= f(u) \quad f(\alpha v) = \alpha f(v) = \alpha \\ \Rightarrow f(u - \alpha v) &= 0 \Rightarrow u - \alpha v \in N \\ u, v \in N^\perp &\Rightarrow u - \alpha v \in N^\perp \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \Rightarrow f(u - \alpha v) &= 0 \Rightarrow u - \alpha v \in N \\ u, v \in N^\perp &\Rightarrow u - \alpha v \in N^\perp \end{aligned}} \right\} u - \alpha v = 0 \Rightarrow u = \alpha v \\ \forall u \in N^\perp f(u) &= \alpha \Rightarrow u = \alpha v \\ u = \alpha v &\Rightarrow f(u) = \alpha \end{aligned}$$

$v$  уже почти то, что нам надо, но мы его ещё должны нормировать, чтобы не отправлять те же элементы в 0, что и  $f$ ; найдём  $\beta : f_{\beta v}(v) = 1 = f(v)$

$$f_{\beta v}(v) = (v, \beta v) = \overline{\beta} \|v\|^2 = 1 \Rightarrow \beta = \frac{1}{\|v\|^2}$$

$$y = \frac{v}{\|v\|^2}$$

$$\begin{aligned} \text{пусть } x \in H, x &= h + \alpha v, h \in N, \alpha v \in N^\perp \\ f(x) &= \alpha, f_y(x) = \alpha \Rightarrow f = f_y \end{aligned}$$

Всё, что осталось проверить, это единственность:

$$\begin{aligned} f_y = f_z &\Rightarrow (x, y) = (x, z) \forall x \in H \\ &\Rightarrow (x, y - z) = 0 \forall x \in H \Rightarrow y - z = 0 \end{aligned}$$

□

**Замечание 6.6.** Рассмотрим отображение  $C : H \rightarrow H^*, C(y) = f_y$ . Во-первых, с суммой всё в порядке:  $C(y + z) = f_{y+z} = f_y + f_z = C(y) + C(z)$ . А с умножением на комплексное число уже не всё хорошо: пусть  $\alpha \in \mathbb{C}, C(\alpha y) = f_{\alpha y}, f_{\alpha y}(x) = \overline{\alpha}(x, y) = \overline{\alpha}f_y(x), C(\alpha y) = \overline{\alpha}C(y)$ , то есть умножение не совсем линейное. Но  $\|C(y)\|_{H^*} = \|y\|_H, C$  — **антилинейный изометрический изоморфизм**. Удобно думать, что сопряжённое к гильбертову пространство — это оно само. Говорят:  $H^* = H$ , а имеют в виду это взаимно-однозначное соответствие  $C(H) = H^*$ . Это очень просто, но фантастически удобно: сопряжённое — это оно само, но за удобство надо платить:  $\alpha$  переходит в  $\overline{\alpha}$ .

**Пример 6.10.** Есть  $l^2, (x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}, x, y \in l^2$ . Как устроены все линейные функционалы в пространстве последовательностей  $l^2$ ?  $f \in (l^2)^* \Rightarrow \exists ! y \in l^2 : f(x) = (x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$ .

**Пример 6.11.**  $(X, \mu), l^2(X, \mu), (f, g) = \int_X f(x) \overline{g(x)} d\mu$

$$F \in (L^2(X, \mu))^* \Rightarrow \exists ! g \in L^2(X, \mu) : F(f) = \int_X f(x) \overline{g(x)} d\mu$$

Посмотрим сейчас чуть-чуть, как эта теория применяется к классическим рядам Фурье, которые были у нас в анализе.

### 6.3. Классические ряды Фурье

Как сходятся ряды Фурье в  $L^2$  по мере Лебега?

**Пример 6.12.**

$$L^2_{\mathbb{R}}[-\pi, \pi] \text{ по мере Лебега } dx, (f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx, \{1, \cos nx, \sin nx\}_{n \in \mathbb{N}}$$

Для того, чтобы что-то утверждать, нам понадобится второй вариант теоремы Вейерштрасса: но доказывать мы его не будем.

**Теорема** (Вейерштрасса).  $f \in \tilde{C}_{\mathbb{R}}[-\pi, \pi] (f \in C[-\pi, \pi], f(-\pi) = f(\pi))$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists T(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

$$\|f - T\|_{\infty} = \max_{x \in [-\pi, \pi]} |f(x) - T(x)| < \varepsilon$$

то есть существует многочлен, который приближает нашу функцию с точностью до  $\varepsilon$

**Теорема 6.6.**  $\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n \in \mathbb{N}}$  — полная О.С. в  $L^2_{\mathbb{R}}[-\pi, \pi]$

*Доказательство.*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \sin(mx) dx = 0 \quad \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(nx))^2 dx = \pi = \int_{-\pi}^{\pi} (\sin nx)^2 dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = 2\pi \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos(mx) dx = 0 (n \neq m)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin(mx) dx = 0 (n \neq m)$$

$\Rightarrow \{1, \cos nx, \sin nx\}_{n \in \mathbb{N}}$  — ортонормированная система

мы уже доказали, что  $C[-\pi, \pi]$  плотно в  $L^2[-\pi, \pi]$  по мере Лебега, то есть любую функцию из  $L^2$  можно приблизить сколь угодно хорошо, найдя такую функцию  $g$ , что разница интегралов будет меньше  $\varepsilon$ , но  $g$  в отличие от  $f$  —  $2\pi$ -периодическая

$\Rightarrow \tilde{C}[-\pi, \pi]$  плотно в  $L^2[-\pi, \pi]$

$$\exists g \in \tilde{C}[-\pi, \pi] \quad \left( \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon \exists \delta > 0 : g(x) = f(x), x \in [-\pi, \pi - \delta]$$

$\Rightarrow \tilde{C}[-\pi, \pi]$  плотно в  $L^2[-\pi, \pi]$

$$\forall \varepsilon > 0 \forall f \in L^2[-\pi, \pi] \exists g \in \tilde{C}[-\pi, \pi], \|f - g\|_{L^2} < \varepsilon$$

по теореме Вейерштрасса  $\exists T = \alpha_0 + \sum_{k=1}^n \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx$

$$\|g - T\|_{\infty} < \varepsilon \Rightarrow \|g - T\|_2 = \left( \int_{-\pi}^{\pi} |g(x) - T(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} < (\varepsilon^2 \cdot 2\pi)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2\pi} \cdot \varepsilon$$

$\Rightarrow \|f - T\|_2 < \varepsilon(1 + \sqrt{2\pi}) \Rightarrow \{1, \cos nx, \sin nx\}$  — полная

□

**Следствие 6.7.** Пусть  $f \in L^2_{\mathbb{R}}[-\pi, \pi]$ . Коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx$$

Теперь что же значит  $f(x)$  разлагается в свой ряд Фурье?

$$S_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \Rightarrow$$

$$\left( \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (*)$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \text{ в смысле } (*)$$

**Пример 6.13.**  $L^2_{\mathbb{C}}[-\pi, \pi], f \in L^2_{\mathbb{C}}[-\pi, \pi], f = u + iv$

$$u, v \in L^2_{\mathbb{R}}[-\pi, \pi] \Rightarrow \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \right\} - \text{ОНБ}$$

**Пример 6.14.**  $L^2_{\mathbb{C}}[-\pi, \pi], \{e^{inx}\}_{n \in \mathbb{Z}} - \text{полная О.С.}$

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx, (e^{inx}, e^{imx}) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 2\pi & n = m \end{cases}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2} (a_n - ib_n), n \neq 0$$

$$c_0 = a_0$$

$$\sum_{k=-n}^n c_k e^{-ikx} = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = S_n x$$

$$\|f - S_n\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \{e^{inx}\}_{n \in \mathbb{Z}} - \text{полная система}$$

**Пример 6.15.**  $L^2_{\mathbb{R}}[0, \pi], \{\cos nx\}_{n=0}^{+\infty} - \text{полная О.С.}$



*Доказательство.*

$$\begin{aligned}
 & f \in L^2_{\mathbb{R}}[0, \pi], \text{ пусть } f(-x) = f(x), x \in (0, \pi] \\
 & f \in L^2_{\mathbb{R}}[-\pi, \pi], b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = 0 \\
 & \|f - S_n(f)\|_{L^2[-\pi, \pi]} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \left\| f - \left( a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx \right) \right\|_2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0
 \end{aligned}$$

□

Прощаемся с гильбертовыми пространствами.

# **Часть IV**

## **Линейные функционалы**

## Глава 7

# Геометрический смысл линейного функционала

Линейное пространство, без нормы, без топологии, может, уже даже в алгебре доказали.

**Теорема 7.1.**  $X$  — линейное пространство над  $\mathbb{C}$  ( $\mathbb{R}$ )

1.  $f \in \text{Lin}(X, \mathbb{C}), f \neq 0, L = \text{Ker } f \Rightarrow$

$$\dim(X/L) = 1$$

$\text{codim } L := \dim(X/L)$  — коразмерность, не то чтобы мы будем этим пользоваться, просто сообщение по секрету

2. пусть  $L \subset X, L$  — подпространство, такое что  $\dim(X/L) = 1$ .  
1.  $x_0 \in X \setminus L \Rightarrow \exists ! f \in \text{Lin}(X, \mathbb{C}), L = \text{Ker } f, f(x_0) = 1$

Поскольку образ одномерен, это и означает, что фактор по ядру имеет такую же размерность, а образ у нас это  $\mathbb{C}$

*1 утверждение.* Пусть  $x_0 \in X \setminus L \Rightarrow f(x_0) \neq 0, v = \frac{x_0}{f(x_0)} \Rightarrow f(v) = 1$

$$(X/L) = \{\bar{x}\}_{x \in X}, \bar{x} = \{x + y | y \in L\}$$

возьмём какой-то  $x \in X, \alpha := f(x), f(\alpha v) = \alpha f(v) = \alpha$

$$\Rightarrow f(x - \alpha v) = 0 \Rightarrow x - \alpha v \in L \Rightarrow \bar{x} = \alpha \bar{v}$$

$$\Rightarrow \dim(X/L) = 1$$

□

2 утверждение.

$$\begin{aligned}(X/L) = \{\bar{x}\}_{x \in X} \dim(X/L) = 1 &\Rightarrow \forall x \in X \exists \alpha \in \mathbb{C} : \bar{x} = \alpha \bar{x}_0 \\ &\text{определим } f : X \rightarrow \mathbb{C} \\ \text{установили, что } \forall x \exists \alpha \in \mathbb{C} : \bar{x} = \alpha \bar{x}_0, f(x) := \alpha &\Rightarrow f \in \text{Lin}(X, \mathbb{C}) \\ f(x_0) = 1 \\ \text{пусть } f(x) = 0 &\Rightarrow \bar{x} = 0 \cdot \bar{x}_0 = \bar{0} = L \Rightarrow x \in L \Rightarrow \\ \text{Ker } f = L\end{aligned}$$

Проверим единственность:

$$\begin{aligned}\text{пусть } g \in \text{Lin}(X, \mathbb{C}), \text{Ker } g = L, g(x_0) = 1 \\ \forall x \in X x = y + \alpha x_0 \text{ где } y \in L, \alpha \in \mathbb{C} \\ \Rightarrow f(x) = \alpha, g(x) = \alpha\end{aligned}$$

□

докажем теперь что-то с функционалами для нормированного пространства

**Теорема 7.2** (норма линейного функционала).  $(X, \|\cdot\|)$  — нормированное пространство.  $f \in X^*, f \neq 0, L = \text{Ker } f, f(x_0) = 1 \Rightarrow \|f\| = \frac{1}{\rho(x_0, L)}$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned}L = f^{-1}(0) &\Rightarrow L — замкнутое \\ d = \rho(x, L) &= \inf_{y \in L} \|x_0 - y\| \\ 1 = f(x_0) = f(x_0 - y) &\Rightarrow |f(x_0 - y)| \leq \|f\| \cdot \|x_0 - y\| \quad \forall y \in L \\ \Rightarrow 1 &\leq \|f\| \inf_{y \in L} \|x_0 - y\| = \|f\| \cdot d \Rightarrow \frac{1}{d} \leq \|f\|\end{aligned}$$

Получили неравенство в одну сторону. Теперь в другую:

$$\begin{aligned}x \notin L &\Rightarrow f(x) \neq 0, f\left(\frac{x}{f(x)}\right) = 1, f(x_0) = 1 \Rightarrow \\ f\left(\frac{x}{f(x)} - x_0\right) &= 0 \Rightarrow \frac{x}{f(x)} - x_0 = y, y \in L \\ \Rightarrow \frac{x}{f(x)} = x_0 - (-y) &\Rightarrow \left\|\frac{x}{f(x)}\right\| = \|x_0 - (-y)\| \geq d \\ \Rightarrow |f(x)| &\leq \frac{1}{d} \cdot \|x\| \Rightarrow \|f\| \leq \frac{1}{d}\end{aligned}$$

Вот и получили, что было обещано:  $\|f\| = \frac{1}{d}$   $\square$

**Замечание 7.1.** В условиях теоремы,  $M = f^{-1}(1)$ , тогда  $M = x_0 + L$ ,  $\rho(x_0, L) = \rho(0, M)$ . Вместо того, чтобы рассматривать ядро, можно рассматривать такое «сдвинутое ядро». Подпространство  $L$  можно сдвинуть на вектор, это довольно очевидно, не будем это доказывать.

## 7.1. Продолжение линейного функционалов

Новый раздел, в котором наконец появится существенная теорема, до этого были так...

Будет задан функционал с дополнительным условием, и мы будем продолжать его на всё пространство так, чтобы условие сохранилось. Нам понадобится не только анализ, но и математическая логика, в частности, лемма Цорна. Поскольку нам никто её не рассказывал, придётся её рассказать. Нам понадобится индукция: но не обычная, ведь у нас какие-то гигантские пространства, переход от  $n$  к  $n+1$  нам ничем не поможет, нужен более хитрый трюк.

**Определение 7.1** (частично упорядоченное множество).  $\mathcal{P}$  **частично упорядоченное множество**, если  $\mathcal{R} \subset \mathcal{P} \times \mathcal{P}$ ,  $(a, b) \in \mathcal{R}$ , то есть  $a \leq b$ .  $\mathcal{R}$  — порядок, если выполнены аксиомы

1.  $\forall a \in \mathcal{P}, (a, a) \in \mathcal{R}$ , то есть  $a \leq a$  (рефлексивность)
2. если  $(a \leq b \wedge b \leq c) \Rightarrow a \leq c$  (транзитивность)
3. если  $(a \leq b \wedge b \leq a)$ , то  $a = b$  (антисимметричность)

важно, что не для всех элементов определён порядок, а для каких-то

**Определение 7.2** (линейно упорядоченное множество).  $\mathcal{P}$  — частично упорядоченное,  $A \subset \mathcal{P}$ ,  $A$  — линейно упорядочено, если  $\forall a, b \in A, a \leq b$  или  $b \leq a$

**Определение 7.3** (верхняя грань множества).  $A \subset \mathcal{P}$ ,  $x$  — верхняя грань для  $A$ , если  $a \leq x \forall a \in A$

**Определение 7.4** (максимальный элемент множества).  $y$  — максимальный элемент в  $\mathcal{P}$ , если  $y \leq a \Rightarrow y = a$ . Максимальный в том смысле, что больше него не существует, но таких максимумом может быть хоть миллион, и они между собой не сравнимы.

**Лемма (Цорн).** Если в  $\mathcal{P}$  любое линейно упорядоченное множество имеет верхнюю грань, то в  $\mathcal{P}$  есть максимальный элемент

**Аксиома (Выбора).**  $\{B_\alpha\}_{\alpha \in A}, B_\alpha \neq \emptyset \Rightarrow \exists C = \{b_\alpha : b_\alpha \in B_\alpha\}_{\alpha \in A}$

Если есть алгоритм выбора элементов из множества, то пользуемся им, без этой аксиомы.

Для общего развития: Аксиома Выбора  $\Leftrightarrow$  Лемма Цорна.  
Закончили с ликбезом по теории множеств.

**Определение 7.5** (выпуклый функционал).  $X$  — линейное пространство над  $\mathbb{C}$  ( $\mathbb{R}$ ).  $p : x \rightarrow \mathbb{R}, p$  — выпуклый функционал, если

1.  $p(x + y) \leq p(x) + p(y) \forall x, y \in X$
2.  $p(tx) = tp(x) \forall t \geq 0$

**Замечание 7.2.**  $p$  — полунома, тогда  $p(\lambda x) = |\lambda|p(x) \forall \lambda \in \mathbb{C}(\mathbb{R}) \Rightarrow p$  — выпуклый функционал

Считается, что весь линейный функциональный анализ стоит на трёх китах, и мы дошли до Кита №1.

**Теорема 7.3** (Хан-Банах, о продолжении линейного функционала в вещественном пространстве).  $X$  — линейное пространство над  $\mathbb{R}$ ,  $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $p$  — выпуклый функционал.  $L \subset X$ ,  $L$  — подпространство,  $f \in \text{Lin}(L, \mathbb{R})$ ,  $f(x) \leq p(x) \forall x \in L$  (говорят  $f$  подчинён  $p$ )

$$\exists g \in \text{Lin}(X, \mathbb{R}), g(x) = f(x), x \in L \quad g(x) \leq p(x) \forall x \in X$$

Тут очень важно, что пространство вещественное, у нас будет другая теорема для комплексного. Эта теорема всё время возникает, мы ей либо по умолчанию пользуемся, либо следствиями из неё.

Доказательство будет состоять из 2 частей. Первая: — естественная часть МА, покажем, что существует функционал, продлённый на одну размерность больше и который совпадает с  $f$  на подпространстве. Во второй части продлим на всё  $X$ , там нам и понадобится это логическое жульничество.

*Доказательство.*

$$f \in \text{Lin}(L, \mathbb{R}), z \in X \setminus L$$

$$L_1 = \mathcal{L}(L, z) = \{x + tz : t \in \mathbb{R}, x \in L\}$$

докажем, что  $\exists f_1 \in \text{Lin}(L, \mathbb{R}) : f_1|_L = f, f_1(y) \leq p(y) \forall y \in L_1$ ; мы можем распорядиться только значением  $f_1$

$$f_1(z) = c \quad c \in \mathbb{R}, \text{ выберем «}c\text{» так, как надо}$$

$$y = x + tz \in L_1 \Rightarrow f_1(y) = f(x) + tc$$

хотим доказать  $f(x) + tc \leq p(x + tz) \forall t \in \mathbb{R}$ , и, так как можно из функционала выносить только положительные числа, это эквивалентно

$$\begin{cases} f(x) + tc \leq p(x + tz) & t > 0 \\ f(x) - tc \leq p(x - tz) & t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} f\left(\frac{x}{t}\right) + c \leq p\left(\frac{x}{t} + z\right) & \forall t, \frac{x}{t} \in L \\ f\left(\frac{x}{t}\right) - c \leq p\left(\frac{x}{t} - z\right) & \forall t, \frac{x}{t} \in L \end{cases} \Leftrightarrow x \in L$$

$$u = \frac{x}{t}, u \in L, v = \frac{x}{t} \Leftrightarrow \left[ \begin{aligned} f(u) + c &\leq p(u + z) \\ f(v) - c &\leq p(v - z) \end{aligned} \right] \Leftrightarrow$$

$$f(v) - p(v - z) \leq c \leq p(u + z) - f(u), u, v \in L$$

если такое  $c$  есть, все хорошо, а если нет — ужасно

$$\text{обозначим } A = \{f(v) - p(v - z) : v \in L\} \subset \mathbb{R}, B = \{p(u + z) - f(u) : u \in L\} \subset \mathbb{R}$$

проверим, что  $\forall a \in A, \forall b \in B a \leq b$ . это и будет означать, что между этими множествами и есть какой-то элемент (из-за полноты вещественной прямой)

$$f(v) - p(v - z) \leq p(u + z) - f(u) \Leftrightarrow$$

$$f(v) + f(u) \leq p(u + z) + p(v - z)$$

$$f(v) + f(u) = f(u + v) \leq p(u + v) \text{ из-за выпуклости } p \leq p(u + z) + p(v - z), u + v \in L$$

$$\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} : f_1(z) = c \Rightarrow f_1(y) \leq p(y) \forall y \in L_1, f_1|_L = f$$

итак, мы продолжили функционал на размерность+1, и если бы было сепарабельное или банахово пространство, мы бы ограничились обычной индукцией, увеличивая размерность на 1, и по непрерывности пришли бы к пределу, и замыкание было бы всем  $X$ . Но раз у нас всего этого нет, мы будем пользоваться леммой Цорна, которая по всем кардиналам эквивалентна трансфинитной индукции. Что же у нас тут будет частично упорядоченным множеством? Рассмотрим все возможные продолжения линейного функционала, удовлетворяющие условиям

$$\mathcal{P} = \{(M, h)\}$$

где  $L \subset M$  — подпространство  $X$ ,  $h \in \text{Lin}(M, \mathbb{R})$ ,  $h_L = f, h(x) \leq p(x) \forall x \in M$ . Докажем, что  $\exists M = x$ , то есть  $(X, h) \in \mathcal{P}$ . Раз в множестве  $\mathcal{P}$  есть максимальный элемент, то он равен  $M$ , вот такой краткий план.

Как определяется частичный порядок в  $\mathcal{P}$ ?  $(M_1, h_1) \leq (M_2, h_2)$ , если  $M_1 \subset M_2, h_{2M_1} = h_1$

$\{(M_\alpha, h_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  — линейно упорядоченное множество.

Построим верхнюю грань:

$$M_0 = \bigcup_{\alpha \in A} M_\alpha, h_0 : M_0 \rightarrow \mathbb{R}$$

пусть  $x \in M_0 \Rightarrow \exists \alpha \in A : x \in M_\alpha, h_0(x) := h_\alpha(x)$  и то, и другое определение требует обоснования корректности, ведь объединение подпространств не обязано быть подпространством (на вещественной плоскости: объединение 2 прямых, проходящих через 0 — непонятно, что вообще такое). Проверим, что  $M_0$  — подпространство

$$\text{пусть } x, y \in M_0 \Rightarrow \exists \alpha, \beta \in A : x \in M_\alpha, y \in M_\beta$$

вспоминаем про линейный порядок

$$(M_\alpha, h_\alpha) \leq (M_\beta, h_\beta) \text{ или } (M_\beta, h_\beta) \leq (M_\alpha, h_\alpha)$$

$$\begin{aligned} \text{пусть } (M_\alpha, h_\alpha) \leq (M_\beta, h_\beta) &\Rightarrow M_\alpha \subset M_\beta \Rightarrow x \in M_\beta \Rightarrow \lambda x + \mu y \in M_\beta \\ &\Rightarrow \lambda x + \mu y \in M_0 \Rightarrow M_0 \text{ подпространство} \end{aligned}$$

проверим корректность определения  $h_0$ , то есть что оно не должно зависеть от того, возьмём мы  $\alpha$  или  $\beta$

пусть  $x \in M_0$ , пусть  $x \in M_\alpha, x \in M_\beta$ , пусть  $(M_\alpha, h_\alpha) \leq (M_\beta, h_\beta)$  или наоборот

$$\Rightarrow h_\alpha(x) = h_\beta(x) \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} h_0(x) = h_\alpha(x) \\ h_0(x) = h_\beta(x) \end{array} \right] \text{ корректное определение}$$

$$h_0(x) \leq p(x) \forall x \in M_0 \text{ (очевидно)} \Rightarrow (M_0, h_0) \in \mathcal{P}$$

$$\alpha \in A \quad (M_\alpha, h_\alpha) \leq (M_0, h_0) \text{ — верхняя грань}$$



теперь, когда мы рассмотрели произвольное линейное упорядоченное множество и доказали, что у него есть верхняя грань, мы можем применить лемму Цорна

$$\Rightarrow \text{в } \mathcal{P} \exists \text{ максимальный элемент } (M, h) \in \mathcal{P}$$

$$\text{пусть } m \subsetneq X \exists z \in X \setminus M, M_1 = \text{Lin}(M, z)$$

построим, как в первой части продолжение  $(M_1, f_1) \in \mathcal{P}$

$$(M, h) \leq (M_1, f_1), M \subsetneq M_1 \text{ противоречит максимальной } (M, h)$$

$$\Rightarrow M = x, (M, h) \text{ — искомое продолжение}$$

□

Прежде, чем рассказать комплексный аналог, сначала применение вещественного случая.

**Теорема 7.4** (обобщённый предел ограниченной последовательности).

$$l_{\mathbb{R}}^{\infty} = \left\{ x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in \mathbb{R}, \|x\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < +\infty \right\}$$

$$\Rightarrow \exists F \in \mathcal{B}(l^{\infty}, \mathbb{R}) = (l^{\infty})^*$$

$$\forall x \in l^{\infty} \underline{\lim} x_n \leq F(x) \leq \overline{\lim} x_n$$

в частности, если  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ , то  $F(x) = x_0$

То есть каждой ограниченности сопоставляется число, причём это отображение линейное.

*Доказательство.*

$$x \in l^{\infty}, p(x) := \overline{\lim} x_n, x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^{\infty}$$

откуда же берётся неравенство треугольника, которое фигурирует в выпуклости. когда в детстве мы доказывали такое неравенство, оно даже в Демидовиче есть:

$$\overline{\lim}(x_n + y_n) \leq \overline{\lim} x_n + \overline{\lim} y_n$$

напоминание, как это доказывается через альтернативное определение верхнего предела

$$a_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, \dots\}, a_n \text{ убывают}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, a = \overline{\lim} x_n.$$

$$b_n = \sup_{k \geq 0} \{y_{n+k}\}, b_n \text{ убывают к } b, b = \overline{\lim} y_n.$$

$$c_n = \sup_{k \geq 0} \{x_{n+k} + y_{n+k}\}, c_n \text{ убывают к } c = \overline{\lim} (x_n + y_n)$$

$$\text{пусть } k \geq 0 \quad x_{n+k} + y_{n+k} \leq a_n + b_n \quad \forall k \Rightarrow c_n \leq a_n + b_n \Rightarrow c \leq a + b$$

Вот мы доказали, что это функционал

$$c = \left\{ x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \right\}$$

$$g : c \Rightarrow \mathbb{R} \quad x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in C \Rightarrow g(x) = x_0$$

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq p(x) = \overline{\lim} x_n$$

$$\text{по теореме Хана-Банаха } \exists F : l^{\infty} \rightarrow \mathbb{R}, F(x) \leq p(x)$$

$$F(x) = g(x) = x_0, \text{ если } x \in c$$

$$x \in l^{\infty}, p(-x) = \overline{\lim} (-x_n) = -\underline{\lim} x_n$$

$$-F(x) = F(-x) \leq p(-x) = -\underline{\lim} x_n \Rightarrow F(x) \geq \underline{\lim} x_n$$

В формулировке обещалось  $\|F\| = 1$ . мы можем взять  $x = (1, 1, 1, \dots)$

$$F(x) = 1, \|x\|_{\infty} = 1 \Rightarrow \|F\| \geq 1$$

$$\forall x \quad |F(x)| \leq \overline{\lim} x_n \leq \sup x_n = \|x\|_{\infty} \Rightarrow \|F\| \leq 1$$

□

Хочется последнее неравенство записать в более общем случае.

$$F(x) = 1, \|x\|_{\infty} = 1 \Rightarrow \|F\| \geq 1$$

$$\forall x \quad |F(x)| \leq \overline{\lim} x_n \leq \sup x_n = \|x\|_{\infty} \Rightarrow \|F\| \leq 1$$

**Утверждение 7.1.** 1.  $X$  — линейное,  $p(x)$  — выпуклый функционал,  $f \in \text{Lin}(X, \mathbb{R})$

$$f(x) \leq p(x) \Rightarrow f(x) \geq -p(-x)$$

2. если  $p(x)$  полунорма,  $f(x) \leq p(x) \quad \forall x \in X \Rightarrow |f(x)| \leq p(x)$

*Доказательство.* 1.  $f(x) \leq p(x) \Rightarrow f(-x) \leq p(-x) \Rightarrow -f(x) \leq p(-x) \Rightarrow f(x) \geq -p(x)$

2.  $p$  — полунорма  $\Rightarrow p(-x) = p(x) \Rightarrow -p(x) \leq f(x) \leq p(x) \Rightarrow |f(x)| \leq p(x)$

□