# Функциональный анализ

Осень 2023

# Оглавление

# Глава 1

# Введение

12.09.23

День рождения функционального анализа – 1932 год. В этом году вышла книжка "Теория линейных операторов", автор – С. Банах. Главная цель функционального анализа – изучение линейных операторов (но не только их). Главным объектом у нас будет $X$ – линейное топологическое пространство. Оно же линейное пространство над $\mathbb{C}$ (или $\mathbb{R}$). Есть непрерывные операции

1. $(x, z) \to x + z \quad x, z \in X$
2. $(\alpha, x) \to \alpha x \quad \alpha \in \mathbb{C}$

Если у нас есть топологическое пространство, то у нас есть все любимые объекты из математического анализа – пределы, непрерывность, производные, интегралы.

Пусть есть $X, Y$ – линейные топологические пространства. Также есть линейное отображение $A : X \to Y$

**Определение 1.1** (Линейное отображение)**.**

$$A(\alpha x + \beta z) = \alpha Ax + \beta Az$$

Если $\dim X < +\infty, \dim Y < +\infty$, то это линейная алгебра.

$$A : X \to X, \dim X = n, A = A^* \implies \exists \text{ ОНБ}\{u_j\}_{j=1}^n$$

$\lambda_j$ – собственные

$$Au_j = \lambda_j u_j$$

**Теорема 1.1** (Гильберт). $X$ – гильбертово (сепарабельное) пространство. $A = A^* \quad A \cdot X \to X, \implies \exists$ ОНБ из собственных векторов.

Если $\dim Y = 1$, т.е. $Y = \mathbb{C}$ (или $\mathbb{R}$), то $A : X \to \mathbb{C}$, $A$ – линейный функционал.

$X$ - пространство функций, $f \in X$.

В математическом анализе мы изучаем $f \overset{?}{\implies} f'$. В функциональном анализе же у нас $X$ – пространство функций, $f \in X$

$$D(f) = f' \quad D : X \to Y \tag{1.1}$$

и здесь мы задаемся вопросами о следующих свойствах $D(f)$

- компактность
- самоспрояженность
- непрерывность

Отцы основатели функционального анализа:

- Ф. Гильберт (1862 - 1943) Гильбертовы пространства;
- С. Банах (1892 -1945) Банаховы пространства;
- Ф.Рисс (1880-1956) пространства Лебега $L^p$.

Ну и хочется еще упомянуть для вас, компьютер саентистов, отцов основателей кибернетики, который оставили немалый след в функциональном анализае

- Н. Винер (1894-1964);
- Д. фон Нейман (1903 - 1957). Про его архитектуру, наверное, что-то слышали?

## 1.1. Зачем изучать функциональный анализ

Во-первых, он позволяет посмотреть на задачу с высокого уровня абстракции.

Рассмотрим пространство непрерывных функций $C[a,b]$, там введем норму $|f| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$. Рассмотрим пространство многочленов $P_n = \{\sum_{k=0}^n a_k x^k, a_k \in \mathbb{R}\}$ Существует ли такой многочлен, на котором инфимум достигается? И если да, то единственный ли он?

$$E_n(f) = \inf_{p\in P_n} ||f-p|| = \min_{p\in P_n} ||f-p||$$

На первый вопрос ответ да, это следует из общей теоремы функционального анализа.

$$\dim P_n = n+1 < +\infty$$

На второй же вопрос ответ тоже да, и тут функциональный анализ не при чем. Суть в том, что у многочлена степени $n$ не может быть больше $n$ корней.

Ну и еще немаловажные причины

1. язык функционального анализа – междисциплинарный язык математики;

2. его результаты применяются в математической физике, которая у нас будет в следующем семестре;

3. это интересно и важно. $0, 1, 2 = o(3)$;

4. у нас будет экзамен, на котором придется говорить уже нам.

Дополнительная литература по курсу. Первая рассчитана на студентов: в некоторых местах рассказывается, как придумать доказательство, как прийти к тому, что требуется, а не в обратную сторону, как обычно. Остальные же книги поумнее.

1. А.Н.Колмогоров, С.В. Фомин "Элементы теории функций и Ф.А.";

2. М.Рид, Б. Саймон. 1 том "методы современной физики". Тонкая (можно осилить), рассказывается также про применение ФА;

3. А.В. Канторович, Г.Г Акилов "Функциональный анализ". Похожа на энциклопедию. Но там можно найти всё;

4. К. Итосида "Функциональный анализ";

5. У. Рудин.

# Глава 2

# Метрические пространства

Начнём с того, что все знают. Надо ведь с чего-то начать. Мы будем несколько раз к ним возвращаться, а не изучим всё сразу. Один из полезных результатов – новое описание компакта в метрических пространствах. Он будет самым рабочим. А компакт вещь очень полезная. Компакты в гигантских пространствах напоминают компакты в $\mathbb{R}^n$ или в $\mathbb{C}^n$ и обладают теми же полезными свойствами.

**Определение 2.1** (Метрика). $X$ - множество. $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$, $\rho$ – **метрика**, если она обладает следующими свойствами

1. $\rho(x, y) \geq 0 \quad \rho(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y$
2. $\rho(y, x) = \rho(x, y)$
3. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$

Введём стандартное обозначение открытого шара. $x \in X, r > 0$

$B_r(x) = \{y \in X : \rho(x, y) < r\}$ – шар с радиусом $r$. $\{B_r(x)\}_{r>0}$ – база окрестности в точке $x$.

$G$ – открытое, если $\forall\, x \in G \exists\, r > 0 : B_r(x) \subset G$.

$F \subset X, F$ – замкнутое $\Leftarrow X \setminus F$ – открытое. В метрическом пространстве удобно характеризовать замкнутое множества с помощью последовательностей. Вспомним, что такое сходящаяся последовательность. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in X, \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, x_0) = 0$

$F$ – замкнутое $\Leftarrow$ если $x_{n n=1}^{\infty}, x_i n \in F, \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow x_0 \in F$

**Определение 2.2** (Фундаментальная последовательность)**.** $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n$ – фундаментальная, если $\forall \varepsilon > 0 \exists\, N \in \mathbb{N} : (n > N \wedge m > N) \Rightarrow \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ или же

$$\Leftrightarrow \lim_{n,m\to\infty} \rho(x_n, x_m) = 0$$

**Замечание 2.1.** Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, то $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальная.

**Определение 2.3** (Полное метрическое пространство)**.** $(X, \rho)$ – полное, если все фундаментальные последовательности имеют предел (лежит в $X$)

Почему хорошо жить в полном метрическом пространстве?

**Замечание 2.2** (о пользе полноты)**.** $F : X \to \mathbb{R}, (X, \rho)$, $F$ – непрерывная.

Стоит задача найти $x_0 \in X$ т.ч. $F(x_0) = 0$
Алгоритм: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\lim\limits_{n\to\infty} F(x_n) = 0$, $\lim\limits_{n,m\to\infty} \rho(x_n, x_m) = 0$ Если $(X, \rho)$ – полное, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0, F(x_0) = 0$ А если нет, то из наших вычислений вообще ничего не следует, возможно, решения вообще нет.

**Пример 2.1.** $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ – полные.

**Пример 2.2.** $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, т.е. $\mathbb{Q}$ – неполное.

Потом приведем примеры поинтереснее. Кстати, древние греки пришли в ужас, когда узнали, что $\mathbb{Q}$ – неполное.

**Определение 2.4.** $(X, \rho), A \subset X, A$ – ограниченное, если

$$\exists\, R > 0, x_0 \in X : A \subset B_R(x_0)$$

**Теорема 2.1** (Свойства фундаметнальных последовательностей)**.** $(X, \rho)$ – метрическое пространство, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальная последовательность

1. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ограниченная
2. Если $\exists\, \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, т.ч. $\exists \lim x_{n_k} = a$, то
$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$
3. $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}, \varepsilon_k > 0, \exists\, \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, т.ч. $\rho(x_{n_k}, x_{n_j})$ при $j > k$

*1 утверждение.* $\varepsilon = 1, \exists\, N : n > N, \rho(x_n, x_N) < 1$. Возьмём $R = \max\{\rho(x_1, x_N), \ldots, \rho(x_{N-1}, x_N)\} + 1$. Единичка на всякий случай. Тогда $x_j \in B_R(x_n) \forall\, j \in \mathbb{N}$ □

*2 утверждение.* $\varepsilon > 0, \exists\, N : (n > N \wedge m > N) \Rightarrow \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ $\exists n_k : \rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon \wedge n_k > N$ Пусть есть какое-то $m > N$. Тогда $\rho(x_m, a) < \rho(x_m, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, a) < 2\varepsilon$

$\varepsilon_1 \exists\, n_1 : (n > n_1 \wedge n > m) \Rightarrow \rho(x_m, x_n) < \varepsilon_1 \Rightarrow \rho(x_m, x_{n_1}) < \varepsilon_1$ при $m > n_1$. Тогда по индукции $\exists$ выбрали $n_1, \ldots, n_{k-1}$, $k \geq 2$ $m > n_j \Rightarrow \rho(x_m, x_{n_j}) < \varepsilon_j, j = 1, 2, \ldots, k-1$

$$\varepsilon_k \exists\, n_k > n_{k-1} : m \geq n_k \quad \rho(x_m, x_{n_k}) < \varepsilon_k$$

□

**Следствие 2.1.** $(X, \rho)$, $\{x_n\}$ – фундаментальная последовательность, тогда

$$\exists\, \{x_{n_k}\} \text{ т.ч. } \sum_{k=1}^{\infty} \rho(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < +\infty$$

*Доказательство.* По 3 свойству при $\varepsilon_k = \frac{1}{2^k}$ □

**Теорема 2.2** (О замкнутом подмножестве). $(X, \rho)$ – метрическое пространство

1. $(X, \rho)$ – полное, $Y \subset X$, $X$ – замкнутое $\Rightarrow (Y, \rho)$ – полное
2. Теперь просто предполагаем $(X, \rho)$ – метрическое пространство, $(Y, \rho)$ – полное. Тогда $Y$ – замкнутое

*1 утверждение.* Доказательство следует прямо из определениеЗнаем что $Y$ замкнутое поднмножество полного пространства. Берем фундаментальную последовательность. $Y \subset X$, пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in Y$ – фундаментальная. $x_n \in x, X$ – полное $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0, x_0 \in X$. $Y$ – замкнутое, значит $x_0 \in Y \Rightarrow (Y, \rho)$ – полное. $\square$

*2 утверждение.* Второй пункт не труднее первого. Пусть $x_n \in Y$. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \{x_n\}$ – фундаментальная. $X$ – полное. Тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in Y \Rightarrow x_0 \in Y \Rightarrow Y$ – замкнутое. $\square$

## 2.1. Банаховы пространства

Сначала введём понятие полунормы.

**Определение 2.5** (полунорма). Пусть $X$ – линейное пространство над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Отображение $p : X \to \mathbb{R}$ называется полунормой, если

1. $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ (полуаддитивность)
2. $p(\lambda x) = |\lambda| p(x); x, y \in X, \lambda \in \mathbb{R}$ или $(\mathbb{C})$

**Свойство 2.1.** $p$ – полунорма $\Rightarrow$

$$p(\nvdash) = 0, p(x) \geq 0 \forall x \in X$$

*Доказательство.* $p(\nvdash) = p(0 \cdot \nvdash) = 0 \cdot p(\nvdash) = 0$. Пусть $x \in X \Rightarrow \nvdash = x + (-x) \Rightarrow p(\nvdash) \leq p(x) + \underbrace{p(-x)}_{p(x)} = 2p(x) \Rightarrow p(x) > 0$ $\square$

**Определение 2.6** (Норма)**.** $X$ – линейное пространство, $p : X \to \mathbb{R}$. $p$ – норма, если $p$ – полунорма и $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = \not{V}$. Будем обозначать $||x|| := p(x)$.

$(X, || \cdot ||)$ будем обозначать нормированное пространство. и $x, y \in X, \rho(x, y) := ||x - y|$. Тогда $(X, || \cdot ||)$ – метрическое пространство.

**Определение 2.7** (банахово пространство)**.** $(X, || \cdot ||)$ – банахово, если оно полное

Еще пару определений перед критерием банахова пространства.

**Определение 2.8** (подпространство в алгебраическом смысле)**.** $X$ – линейнрое пространство, $L \subset X$. $L$ – подпространство в алгебраическом смысле, если $x, y \in L, \alpha, \beta \in K \Rightarrow \alpha x + \beta y \in L$.

**Определение 2.9** (подпространство)**.** $(X, || \cdot ||)$, $L \subset X$, $L$ – подпространство, если

- $L$ подпространство в алгебраическом смысле
- $L = \overline{L}$ ($\overline{L}$ – замыкание)

Теперь нам потребуется сходимость рядов. Для того, чтобы говорить о сходимости, нужна топология.

**Определение 2.10** (Сходимость)**.**

$$(X, || \cdot ||) \quad \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$$

$\sum_{k=1}^{\infty} x_k (*)$, (*) сходится, если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \in X$
(*) сходится абсолютно, если $\sum_{k=1}^{\infty} ||x_k||$ сходится

В $\mathbb{R}^n$ (или в $\mathbb{C}^n$) если у нас была абсолютная сходимость, то была и обычная, но вообще говоря, это не так.

**Теорема 2.3** (Критерий полноты нормированного пространства (банаховости))**.** $(X, ||\cdot||)$ - полное $\Rightarrow$ из абсолютной сходимости рядаследует сходимость ряда.

*Доказательство.* Предположим, что наше пространство полное ($\Rightarrow$). $(X,\rho)$ – полное, $\{x\}k_{k=1}^{\infty}$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} ||x_k|| \text{ сходится} \qquad (**)$$

Цель такая: последовательность $S_n$ – фундаментальная. Сейчас применим критерий коши к ряду (**). Это ряд из чисел, так что все в порядке. Пусть $\varepsilon > 0$. По критерию Коши $\exists N \in \mathbb{N} : (n > N \wedge p \in \mathbb{N}) \Rightarrow \sum_{k=1}^{p} ||x_k|| < \varepsilon$.

$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$.

$$||S_{n+p} - S_n|| = \left|\left|\sum_{k=1}^{p} x_{n+k}\right|\right| \le \sum_{k=1}^{p} ||x_{n+k}|| < \varepsilon$$
$$\Rightarrow \{S\}n_{n=1}^{\infty} - \text{фундаментальная}, (X,\rho) - \text{полное} \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} S_n = S$$
$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \text{ сходится}$$

Мы так запаслись номерами, чтобы выражение было меньше $\varepsilon$

Теперь ($\Rightarrow$). У нас кроме определения ничего нет. Возьмём какую-то фундаментальную последовательность. Откуда взять предел? Есть соотношения между элементами последовательности. Возьмём какую-то подпоследовательность, ведь у нас есть следствие! Из свойств фундаментальных последовательностей, мы знаем, что существует

$$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : ||x_{n_1}|| + \sum_{k=1}^{\infty} ||x_{n_{k+1} - x_{n_k}} + \infty$$
$$\Rightarrow x_{n_1} + \sum_{k=1}^{n} (x_{n_{k+1}}) - x_{n_k} - \text{сходится}$$
$$S_m = x_{n_1} + \sum_{k=1}^{m-1} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) = x_{n_m} \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} x_{n_m} = S$$

$\square$

## 2.2. Пространства ограниченных функций

**Определение 2.11.** Пусть $A$ – произвольное множество. Стандартное обозначение $m(A)$ – множество всех ограниченных функций.

$$m(A) = \{f : A \to \mathbb{R} \text{ или } \mathbb{C}, \sup_{x \in A} |f(x)| < \infty\}$$

$f \in m(A), ||f||_\infty = \sup_{x \in A} |f(x)|$.

**Теорема 2.4.** $(m(A), ||\cdot||_\infty)$ – банахово пространство

*Доказательство.* Нужно проверить две вещи. Во-первых, что норма удовлетворяет аксиомам нормы. А во-вторых, что пространство с таким определением является полным. Просто по определению, никаких хитрых критериев. Возьмём фундаментальную подпоследовательность и покажем, что у нее есть предел.

Проверяем, что $||\cdot||_\infty$ удовлетворяет аксиомам нормы.

$$||f||_\infty = \sup_{x \in A} |f(x)| \geq 0, ||f||_\infty 0 \Rightarrow f(x) 0 \forall\, x \in A \text{ т.е. } f = \not{\mathbb{1}}$$

$\lambda \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$). $||\lambda f|| = \sup_{x \in A} |\lambda| \cdot ||f||_\infty$

Нужно проверить неравенство треугольника.

$f, g \in m(A)$. $x$ – фиксированная точка в $A$

$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty \forall\, x \in A$

$$\Rightarrow ||f + g||_\infty = \sup_{x \in A} |f(x) + g(x)| \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty$$

Теперь мы проверили аксиомы нормы. Доказываем полноту. $\{f_n\}$ – фундаментальная в $m(A)$.

$$\varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N} : (m > N \wedge n > N) \Rightarrow ||f_n - f_m||_\infty < \varepsilon \text{ т.е. } \sup_{x \in A} |f_n(x) - f_m(x)|$$

Первый вопрос: откуда взять претендента на роль предела? Еще желательно, чтобы он был единственный. Фиксируем $x$.Если для супремума есть неравенство, то и для $x$ тем более. $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ при $n, m > N$. $\Rightarrow \{f_n(x)\}_{n=1}^\infty ==$ последовательность чисел в $\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow \{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ – фундаментальная $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \forall\, x \in A \text{x фиксированный}$$

$$|f_n(x) = f_m(x)| < \varepsilon \quad \text{пусть } m \to \infty$$
$$\Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon, x \in A \forall\, x \in A$$
$$\Rightarrow ||f_n - f||_\infty = \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon \text{ при } n > A$$

Последнее соображение, которое нужно добавить, это то, что $f$ – элемент $A$. Мы можем записать $f$ как $f = (f - f_n) + f_n, f_n \in m(A), f - f_n \in m(A)$.

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} ||f - f_n|| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} f_n = f \in m(A)$$

□

Давайте заметим, что у нас получилось определение равномерной непрерывности из математического анализа.

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \in m(A) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| = 0 \Leftrightarrow f_n \underset{A, n\to\infty}{\rightrightarrows} f$$

**Определение 2.12** (Топологический компакт)**.** Множество $K$ – топологический компакт, если оно обладает следующими свойствами

1. $\forall\, \{G_\alpha\}_{\alpha\in A}, G_\alpha$ – открытые множества $K \subset \bigcup_{\alpha\in A} G_\alpha \exists\, \{\alpha_j\}_{j=1}^n, K \subset \bigcup_{j=1}^n G_{\alpha_j}$
2. Хаусдорфовость $\forall\, x, y (x \ne y) \in K\, \exists\, U, V$ – открытые множества, $x \in U, y \in V, U \cap V = \varnothing$

**Определение 2.13.** $C(K) = \{f : K \to \mathbb{R}, f \text{ непрерывна}\}$

$$||f||_{C(K)} = ||f||_\infty = \sup_{x\in K} |f(x)| = \max_{x\in K} |f(x)|$$

**Следствие 2.2.** $K$ – топологический компакт $\Rightarrow C(K)$ – банахово

*Доказательство.* $C(K) \subset m(K)$. $C(K)$ – подпространство в алгебраическом смысле. Проверим, что $C(K)$ – замкнуто в $m(K)$

$$\{f_n\}, f_n = C(K), \lim_{n\to\infty} |f - f_n|_\infty = 0 \Leftrightarrow f_n \underset{K,n\to\infty}{\rightrightarrows} f \Rightarrow f \in C(K) \Rightarrow C(K)$$

тогда $m(K)$ – полное и $C(K)$ – полное. □

## 2.3. Пространство последовательностей с sup нормой

**Определение 2.14.** $\mathbb{C}^n, n \in \mathbb{N}, l_n = \{x^\infty = (x_1, \ldots, x_n), x_j \in \mathbb{C}\}$

$$||x||_\infty = \max_{1\le j\le n} |x_j|$$

$A = \{1, 2, \ldots, n\}, l_n^\infty = m(A) \Rightarrow l_n^\infty$ – полное Удобно думать, что последовательность – это функция на множестве натуральных чисел.

**Определение 2.15** ($l^\infty$)**.**

$$l^\infty = \{X = \{x_j\}_{j=1}^\infty, \sup_{j\in\mathbb{N}} |x_j| < +\infty\}$$

$$||x||_\infty \sup_{j\in\mathbb{N}} |x_j| \quad A = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$$

$$X = \{x\}j_{j=1}^\infty \in m(A), \underset{f:A\to\mathbb{C}}{f(j) = x_j}$$

$$l^\infty := m(\mathbb{N}) \Rightarrow l^\infty \text{ – полное}$$

**Определение 2.16.**

$$c = \{X = \{x\}j_{j=1}^\infty, x_j \in \mathbb{C} \quad \exists \lim_{n\to\infty} x_n = x_0\}$$

$$c \subset l^\infty, ||x|| = ||x||_\infty = \sup ||X||$$

$$c_0 = \{x = \{x\}_{j=1}^\infty, \lim_{n\to\infty} x_j = 0\}, c_0 \subset c \subset l^\infty$$

$c, c_0$ – замкнутые подпространства в $l^\infty \Rightarrow c, c_0$ – банаховы.

## 2.4. Пространства $n$ раз непрерывно дифференцируемых функций на отрезке

**Определение 2.17.** (норма $n$ производной)

$$n \in \mathbb{N} \quad C^{(n)}[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R}\} \,\exists\, f^{(n)} \in C[a,b]$$

$$|||f||_{\underset{C[a,b]}{(n)}} = \max_{0 \le k \le n}, f^0 = f$$

**Теорема 2.5.** В $C^{(n)}[a,b]$ – банахово.

*Доказательство.*

$$\{f_m\}_{m=1}^{\infty} \text{ – фундаментальная последовательность в } C^{(n)}[a,b]$$

$$\varepsilon > 0 \exists\, N : (m > n \land q > n) \Rightarrow ||f_m - f_q||_{C^{(n)}} < \varepsilon \Rightarrow ||f_m^{(k)} < f_q^{(k)}||_\infty < \varepsilon$$

$$k = 0, 1, \ldots, n$$

$\{f_m^{(k)}\}$ – фундаментальная в полном пространстве $C[a,b]$

$$\Rightarrow \exists\, \varphi_k \in C[a,b], f_n^{(k)} \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} \varphi_k, k = 0, 1, \ldots, n$$

$$\overset{\text{Анализ}}{\Rightarrow} (f_k^{(n)} \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} \varphi_0 \land \varphi_k^0 \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} \varphi_1) \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_0', \varphi_2 = \varphi_0'', \ldots, \varphi_n = \varphi_0^{(n)} \quad (2.1)$$

□

19.09.23

# Глава 3

# Пространство суммируемых функций (Лебега $L^p$)

Сейчас будет небольшой экскурс в теорию меры, которая была на математическом анализе. Мы ничего доказывать не будем и поверим, что все утверждения верны и в общем случае.

## 3.1. Теория меры

**Определение 3.1** (Мера)**.** $(X, U, \mu)$ – пространство с мерой. $X$ – множество, $U$ – $\sigma$-алгебра подмножества $X$

1. $\varnothing \in U$
2. $A \in U \Rightarrow X - A \in U$
3. $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}, A_n \in U, A \infty_{n=1} A_n \Rightarrow A \in U$

$$\mu : U \to [0, +\infty]$$

– мера, если

1. $\mu(\varnothing) = 0$
2. $A = U_{n=1}^{\infty}\{A_n\}, A_n \cap A_m = \varnothing, n \neq m, A_n \in U \Rightarrow \mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n$ (счетная аддитивность)

Предположения:

1. $\mu$ – полная мера, то есть $A \in U, \mu(A) = 0 \Rightarrow (\forall B \subset A \Rightarrow B \in$

$U, (\Rightarrow \mu B) = 0)$

2. $\mu$ – $\sigma$-конечна, то есть $X = \cup_{j=1}^{\infty} X_j, \mu(X_j) < +\infty$

Пока можем думать, что речь идет о мере Лебега. Потом приведём другие примеры. В теории пространств будем считать, что функция действует из $X$ в $\mathbb{R}$ или в $\mathbb{C}$ (не особо важно).

**Определение 3.2** (Измеримая функция). $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. $f$ – измерима, если

$$\forall\, c \in \mathbb{R}, x \underbrace{\{x : c < f(x)\}}_{\text{измеримое множество}} \in U$$

$$f : X \to \mathbb{C} \Rightarrow f = u + iv, u, v : X \to \mathbb{R}$$

$f$ – измерима, если $u, v$ – измеримы

Как же определяется интеграл? Пусть есть какой-то элемент $\sigma$-алгебры $e \in U$, $\chi_e(x) = \begin{cases} 1, x \in E \\ 0, x \notin e \end{cases}$. Множество простых функций определяется как

$$S = \{g(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{e_k}, c_k \in \mathbb{C}, e_k \in U\}$$

$g \in S, \int_X g(x) d\mu = \sum_{k=1}^{n} c_k \mu e_k$.

$f(x)$ – измеримая, если $f(x) \geq e, x \in X$

**Определение 3.3** (Произвольно измеримая функция).

$$\int_X f d\mu = \sup \left\{ \int_X g(x) d\mu : 0 \leq g(x) \leq g(x), x \in X, c_k \in \mathbb{R}, c_k > 0 \right\}$$

**Определение 3.4** (Измеримая функция). $f$ – измерима, если

$$f_+(x) = \max_( f(x), 0) \wedge f_-(x) = \max(-f(x), 0) \Rightarrow f = f_+ - f_-$$

Если $\int_X f_+ d\mu$ – конечен или $\int_X f_- d\mu$ – конечен, то $\int_X f d\mu = \int_X f_+ d\mu - \int_X f_- d\mu$ Если $f$ – измеримая, $f : X \to \mathbb{C} \Rightarrow f = u + iv$

$$\int_X f d\mu = \int_X u d\mu + i \int_X v d\mu$$

**Определение 3.5** (Множество суммируемых функций)**.** $L(X,\mu)$ – множество суммируемых функций =

$$\left\{f_i : \int_X |f| d\mu < +\infty\right\}, |f| = f_+ + f_-$$

Прежде чем двигаться дальше, приведем примры других мер (кроме мер Лебега)

**Пример 3.1.** $E \subset \mathbb{R}^n$, $E$ – измерима по Лебегу, $\lambda$ – мера Лебега, $w(x) \geq 0, x \in E$, $w$ – измерима по Лебегу.

$e \subset E, e$ – измеримо по Лебегу. $\mu e = \int_e w(x) d\lambda, w(x)$ – плотность меры $\mu$, $w(x)$ – её вес.

Вторая мера в каком-то смысле противоположная. Она сосредоточна на наборе точек и называется дискретной.

**Пример 3.2.** $X$ – множество ($X \neq \varnothing$), $a \in X$

$$\sigma_n, e \subset X, \sigma_a(e) = \begin{cases} 1, a \in E \\ 0, a \notin e \end{cases}$$

$\forall\, e, e \subset X, e$ – измеримо

**Пример 3.3** (Дискретная мера)**.** $X$ – бесконечное множество. $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}, a_j \in X, a_j \neq a_k, j \neq k$

$\{h_j\}_{j=1}^{\infty}, h_j > 0$

$$\mu - \sum_{\gamma=1}^{\infty} h_j \delta_{a_j}, e \subset X \quad \mu E = \sum_{\{j : a_j \in E\}} h_j$$

План такой: хотим ввести норму на множестве интегрирумеых функций. Для этого нам надо ввести некоторые неравенства.

## 3.2. Классические неравенства

**Теорема 3.1** (Неравенство Юнга)**.** $p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ($q$ – сопряженный показатель)

$$\Rightarrow ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^p}{q}$$

*Доказательство.* Пусть $b$ – фиксировано, $\varphi(x) = \frac{x^p}{p} - xb, x \in [0, +\infty)$. Хотим найти $\min_{x\in[0,+\infty)} \varphi(x)$. Для этого посмотрим, где производная обращается в 0. $\varphi'(x) = x^{p-1} - b$, $\varphi'(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 = b^{\frac{1}{p-1}} \Rightarrow \varphi(x) > \varphi(x) > \varphi(x_0) \forall\, x \neq x_0, x \geq 0$. Таким образом, $x_0$ – строгий локальный минимум.

$$\varphi(x_0) = \frac{1}{p} b^{\frac{p}{p-1}} - b^{\frac{p}{p-1}} = b^{\frac{p}{p-1}} \left(\frac{1}{p} - 1\right) = \frac{b^q}{q}$$

$$-\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p} \Rightarrow q = \frac{p}{p-1}$$

$$\varphi(x) \geq -\frac{b^q}{q} \,\forall\, x \in [0, +\infty) \text{то есть ОК}$$

$$\varphi(x_0) = \frac{1}{p} b^{\frac{p}{p-1}} - b^{\frac{p}{p-1}} = b^{\frac{p}{p-1}} \left(\frac{1}{p} - 1\right) = \frac{b^q}{q}$$

□

**Замечание 3.1.** Равенство в неравенстве Юнга достигается только при $a = b^{\frac{1}{p-1}}$

**Теорема 3.2** (Неравенство Гельдера)**.** $(X, U, \mu)$ — пространство с мерой. $f, g$ – измеримые, $p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow$

$$\int_X |fg| d\mu \leq \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_X |g|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (*)$$

Если $p = q = 2$, то это "Неравенство Коши-Бунаковского-Шварца", или на молодёжном математическом слэнге неравенство КБШ

*Доказательство.* Для начала отбросим какие-то простые случаи. $A = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}, B = \left(\int_X |g|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$. Если $A = 0 \Leftrightarrow |f| = 0$ почти всюду по $\mu \Leftrightarrow f(x) = 0$ почти всюду по $\mu$ (то есть $\mu\{x : f(x) \neq 0\} = 0$) На всякий случай поясним, почему функция равна 0 почти всюду по мере $\mu$

$$\int_X |f| d\mu = 0 \Rightarrow e = \{x : f(x) = 0\}, m \in \mathbb{N}, e_m = \{x : |f(x)| > \frac{1}{m}\}$$

$$e = \cup_{m=1}^{\infty} e_m \quad \int_X |f| d\mu \geq \int_{e_m} |f| d\mu \geq \frac{1}{m} \mu e_m \Rightarrow \mu e_m = 0 \Rightarrow \mu E = 0$$

$$\Rightarrow f(x)\cdot g(x) = 0 \text{ п.в.} \quad 0 \leq 0 \tag{*}$$

Если $A = +\infty$, то (*)

$$\text{пусть } 0 < A < +\infty, 0 < R < +\infty$$

Неравенство Гельдера однородное, то есть если мы $f$ умножим на константу, то левая и правая часть умножится на неё же, аналогично с $g$. Иногда бывает удобно ввести нормировку.

$$f_1(x) = \frac{f(x)}{A}, g_1(x) = \frac{g(x)}{B}, \int_X |f_1(x)|^p d\mu = \frac{A^p}{A^p} = 1, \int_X |g_1(x)|^q d\mu = 1$$

Пусть $x$ – фиксирован, $a = |f(x)|$, $b = |g(x) \overset{\text{н.Юнга}}{\Rightarrow}$

$$|f_1(x)|\cdot|g_1(x)| \leq \frac{|f_1(x)|^p}{p} + \frac{|g_1(x)|^q}{q} \text{ проинтегрируем} X \text{ по } \mu$$

$$\Rightarrow \int_x |f_1|\cdot|g_1|d\mu \leq \frac{1}{p}\int_X |f_1|^p d\mu + \frac{1}{q}\int_X |g_1|^q d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Умножаем на $AB \Rightarrow \int_X |fg|d\mu \leq AB$ □

**Теорема 3.3** (Неравенство Минковского). $(X, U, \mu)$, $f, g$ – измеримые, $1 \leq p < +\infty \Rightarrow$

$$\underbrace{\left(\int_X |f(x)+g(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}}_{C} \leq \underbrace{\left(\int_X |f(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}}_{A} + \underbrace{\left(\int_X |fg(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}}_{B} \tag{*}$$

*Доказательство.* Сначала разберём простые случаи. $p = 1, x$ – фиксирован. $|f(x)+g(x)| \leq |f(x)|+|g(x)|$ проинтегрируем по $X \Rightarrow (*)$ при $p = 1$. Теперь пусть $p > 1$. Если $A = +\infty$, или $B = +\infty$, или $C = 0$, то (*).

Теперь же пусть $A < +\infty, B < +\infty, C > 0$. Доказателсьвто будет в два этапа. На первом этапе получим гораздо более слабое утверждение, вообще не то, что требуется в теореме, но оно нам понадобится. Докажем, что $C < +\infty$.

$a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow |a+b| \leq |a|+|b| \leq 2\max(|a|,|b|) \Rightarrow |a+b|^p \leq 2^p \max(|a|^p, |b|^p) \leq 2^p(|a|^p + |b|^p) \Rightarrow$ при фиксированном $x$

$$|f(x)+g(x)|^p \leq 2^p(|f(x)|^p + |g(x)|^p) \text{ проинтегрируем по } X$$

$\Rightarrow C^p \le 2^p(A^p + B^p) \Rightarrow C < +\infty$. Первая часть доказательства закончена.

$$C^p = \int_X |f+g|^p d\mu = \int_X |f+g|\cdot|f+g|^{p-1} d\mu \le \int_X |f|\cdot|f+g|^{p-1} d\mu + \int_X |g|\cdot|f+g|^{p-1} d\mu$$

$$\int_X |f|\cdot|f+g|^{p-1} d\mu \overset{\text{н. Гельдера}}{\le} \left(\int_X |f+g| d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\underbrace{\int_X |f+g| d\mu}_{A}\right)^{(p-1)q} = AC$$

$$\int_X |g|\cdot|f+g|^{p-1} d\mu \overset{\text{аналогично}}{\le} BC^{\frac{p}{q}} \Rightarrow$$
$$C^p \le (A+B)C^{\frac{p}{q}}, \quad 0 < C < +\infty \Rightarrow$$
$$C^{p-\frac{p}{q}} = C \Rightarrow C \le A + B(\text{ это } (*))$$

□

## 3.3. Пространство Лебега

Отсюда и до определения $L^\infty$ очень аккуратно с $\mathcal{L}$ и $L$ читать. Тут точно есть путаница, но записи лекции нет, чтобы ее устранить.

**Определение 3.6.** $(X, U, \mu)$ – пространство с мерой. $L(X, \mu)$ – пространство суммируемых функций. $1 \le p < +\infty$ $\mathcal{L}^p(X, \mu) = \{f : |f|^p \in L(X, \mu)\}$

$$f \in L^p(X, \mu), ||f||_p = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

Проверим, что $||f||_p$ – это полунорма на $L^p(X, \mu)$. $c \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$). $||cf||_p = |c|||f||_p$

$$||f+g||_p \le ||f||_p + ||g||_p \text{ – неравенство Минковского}$$

$||f|| = 0 \Leftrightarrow \int_X |f(x)|^p d\mu = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ почти всюду по мере $\mu$ на $X$.

**Пример 3.4.** $L[0,1], \lambda$ – мера Лебега на $[0,1]$.

функция Дирихле $\varphi(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ $\int_0^1 |\varphi(x)| d\lambda = 0$.

$N = \{f$ – измерима $\wedge f(x) = 0$ почти всюду на $X$по $\mu\}$. $||f||_p = 0 \Leftrightarrow f \in N$ (не зависит от $p$). Рецепт приготовления пространства с нормой из полуфбриката. пространство с полунормой. $N$ – подпространство в $L^p$, $L^p = L^p/N$ – факторпространство.

$g, f \in L^p, f\ g \Leftrightarrow f - g \in N \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ почти всюду по $\mu$. $\overline{f}$ – класс эквивалентности, $\overline{f} = \{g : f\ g\}$.

$||\overline{f}||_p := ||f||$, то есть можно взять любую функцию из класса эквивалнентности.

$$||\overline{f}||_p = 0 \Leftrightarrow \int_X |f|^p d\mu = 0 \Leftrightarrow f \in N \Rightarrow \overline{f} = N = \overline{0} \Rightarrow$$

$||\overline{f}||_p$ – норма на $L^p$. Говорят, что $f \in L^p$, возьмём функцию из $L^p$, но имеют в виду, что возьмут класс экивалентности, а из него возьмут функцию

Одна из главных целей – доказать, что эти пространства Банаховы. Сначала определим $L^\infty(X, \mu)$ (существенно ограниченные функции).

**Определение 3.7** ($L^\infty(X, \mu)$). $f \in L^\infty(X, \mu)$, если

$$\exists\, c > 0 |f(x)| \leq c \text{ почти всюду на} X \text{ по } \mu(\mu\{x : |f(x)| > c\} = 0)$$

Возьмём точную нижнюю грань этой константы. $||f||_\infty = \inf\{c \geq 0 : \mu\{x : ||f(x)|| > c\} = 0\}$ (существуенный sup или на подлом англосаксонском $\text{ess}\sup_X f$)

**Свойство 3.1.** $f \in \mathcal{L}^\infty(X, \mu) \Rightarrow \mu\{f(x) > ||f||_\infty\} = 0$

*Доказательство.* $e = \{x : |f(x) > ||f||_\infty\}, m \in \mathbb{N}$.
$e_m = \{x : |f(x)| > ||f||_\infty + \frac{1}{m}\} \Rightarrow \mu e_m = 0$ по определеннию $\text{ess}\sup_X f$
$\Rightarrow e = \cup_{m=1}^\infty e_m \Rightarrow \mu e = 0$ □

$$||f||_\infty \text{ – полунорма на } \mathcal{L}^\infty$$
$$\lambda \neq 0 \quad |\lambda f(x)| \leq |\lambda| \cdot c \Leftrightarrow |f(x) \leq c \Rightarrow ||\lambda f||_\infty = |\lambda| ||f||_\infty,$$
$$f, g \in \mathcal{L}^\infty, x \in X \Rightarrow |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty \text{ для п.в. } x \text{ на } X$$
$$\Rightarrow ||f + g||_\infty < ||f||_\infty + ||g||_\infty$$

$||f||_\infty = 0 \Leftrightarrow \mu\{x : |f(x)| > 0\} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ п.в. на $X \Leftrightarrow f \in N = \{f$ – измерима, $f(x) = 0$ п.в. на $X\}$

$$L^\infty = \mathcal{L}^\infty / N$$

Все, что Н.А. доказал для меры Лебега, верно и для других мер. Те доказательства и так были не особо веселые, чтобы их повторять.

**Теорема 3.4** (Фату)**.** $(X, U, \mu)$, $\{g_n\}_{n=1}^\infty, g_n$ – измеримые, $g_n(x) \geq 0$

$$g_n(x) \underset{\text{п.в.}}{\longrightarrow} g(x) \qquad \int_X g_n(x) d\mu \leq C \text{ не зависит от n}$$
$$\Rightarrow \int_X g(x) d\mu \leq C$$

Первая существенная теорема, которая нам встретилась.

**Теорема 3.5** (полнота пространства Лебега)**.** $(X, U, \mu), 1 \leq p \leq +\infty \Rightarrow L^p(X, \mu)$ – банаховы.

*Доказательство.* при $1 \leq p < +\infty$ воспользуемся критерием полноты (если сходится ряд из норм, то сам ряд сходится)

$$\{f_n\}_{n=1}^\infty, f_n \in L^p, \sum_{n=1}^\infty ||f_n||_p \leq C < +\infty$$
$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$$

Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} ||S_n(x) - f(x)||_p = 0$. Существует ли $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$ почти всюду на $X$?
Рассмотрим $\sigma_n(x) = \sum_{k=1}^n |f_k(x)| \Rightarrow \sigma_n(x)$ возрастает $\Rightarrow \exists\ \sigma(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n(x)$. Возможно, $\sigma(x) = +\infty$ для некоторых $x$.

$$||\sigma_n||_p \leq \sum_{k=1}^n ||f_k||_p \leq C$$

$$\int_X |\sigma_n(x)|^p d\mu \leq C^p \wedge \sigma_n(x)^p \underset{n\to\infty}{\to} \sigma_(x)^p \, \forall\, x \in X \overset{\text{т. Фату}}{\Rightarrow}$$

$\int_X \sigma(x)^p d\mu \leq c^p$ Самое главное, что мы из этого заключаем: $\sigma(x) < +\infty$ п.в. на $X$ по $\mu$.

$$x \in X \quad \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| < +\infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \text{ – сходится}$$

$$f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \text{ определена п.в. на } X, \lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} ||f_k||_p < +\infty, \varepsilon > 0$$

Применим критерий Коши: $\exists\, N \in \mathbb{N} \quad m > n > N \Rightarrow \sum_{k=n+1}^{m} ||f_k||_p < \varepsilon \Rightarrow ||S_m(x) - S_n(x)||_p \leq \sum_{k=n+1}^{m} ||f_k||_p < \varepsilon$

$$\int_x |S_m(x) - S_n(x)|^p d\mu < \varepsilon^p (n \text{ фиксировано}) \wedge |S_m(x) - S_n(x)|^m \underset{m\to\infty}{\to} |f(x) - S_n(x)|$$

$$\overset{\text{Фату}}{\Rightarrow} \int_X |f - S_n|^p d\mu \leq \varepsilon^p \Rightarrow ||f - S_n|| \leq \varepsilon$$

$f - S_n \in L_p, S + n \in L^p \Rightarrow f = (f - S_n) + S_n \Rightarrow f \in L_p$ и $||f - S_n||_p \underset{n\to\infty}{\to} 0$
Теперь осталось рассмотреть случай $p = \infty$. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальная, $f_n \in L^\infty$,

$$|f_n(x)| \leq ||f_n||_\infty \quad x \in X \setminus e_n, \mu e_n = 0 \quad n \in \mathbb{N}$$

$e = \cup_{n=1}^{\infty}, X_1 = X \setminus e \Rightarrow f_n \in m(X_1)$ – ограниченная функция. $m(X_1)$ – полное $\Rightarrow \{f_n\}$ – фундаментальна в $m(X_1) \Rightarrow \exists./f \in m(X_1) \quad \sup_{x\in X_1} |f(x) - f_n(x)| \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Положим $f(x) = 0$ если $x \in e \Rightarrow \lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_{L^\infty} = 0 \quad \square$

## 3.4. Пространства $l_n^p, l^p$

$n \in \mathbb{N}, 1 \leq p < +\infty$.

**Определение 3.8.**

$$l_n^p = \left\{ \mathbb{R}^n, x = (x_1, \ldots, x_n), x_j \in \mathbb{R}, ||x||_p = \left( \sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\}$$

Рассмотрим $X = \{1, 2, \dots, n\}$. Возьмём дискретную меру $\mu(j) = 1$ при $1 \leq j \leq n$, $l_n^p = L^p(X, \mu)$. $f \in L^p(X, \mu), f(j) = x_j \Rightarrow l_n^p$ – полное.

Посмотрим, что будет обозначать сходимость этой нормы.

**Теорема 3.6.** $\{x^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}, x = (x_1, \dots, x_n), x^{(m)} = (x_1^{(m)}, \dots, x_n^{(m)})$, $x^{(m)} \in l_n^p, q \leq p \leq +\infty$

$$\lim_{m\to\infty} ||x - x^{(m)}||_p = 0 \Leftrightarrow \lim_{m\to\infty} x_j^{(m)} = x_j, 1 \leq j \leq n$$

*Доказательство.* $\Rightarrow$

Пусть $j$ – фиксировано, $\lim\limits_{m\to\infty} x^{(m)} = x$ в $l_n^p$.

При $p < +\infty$ $||x - x^{(m)}||_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - x_i^{(m)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq |x_j - x_j^{(m)}$. Так как $||x - x^{(m)}||_p \underset{m\to\infty}{\to} 0 \Rightarrow \lim\limits_{m\to\infty} |x_j - x_j^{(m)}| = 0$.

При $p = \infty$ $||x - x^{(m)}||_\infty = \max_{1\leq i\leq m}\{|x_i - x_i^{(m)}|\} \geq |x_j - x_j^{(m)}|$. Так как $||x - x^{(m)}||_\infty \underset{m\to\infty}{\to} 0 \Rightarrow \lim\limits_{m\to\infty} |x_j - x_j^{(m)}| = 0$

Доказательсвто $\Leftarrow$

$$1 \leq j \leq n \quad \lim_{m\to\infty} |x_j - x_j^{(m)}| = 0 \Rightarrow \left(\sum_{j=1}^n ||x_j - x_j^{(m)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \underset{m\to\infty}{\to} 0$$

$$\text{и } \Rightarrow \max_{1\leq j\leq n} |x_j - x_j^{(m)}| \underset{m\to\infty}{\to} 0$$

□

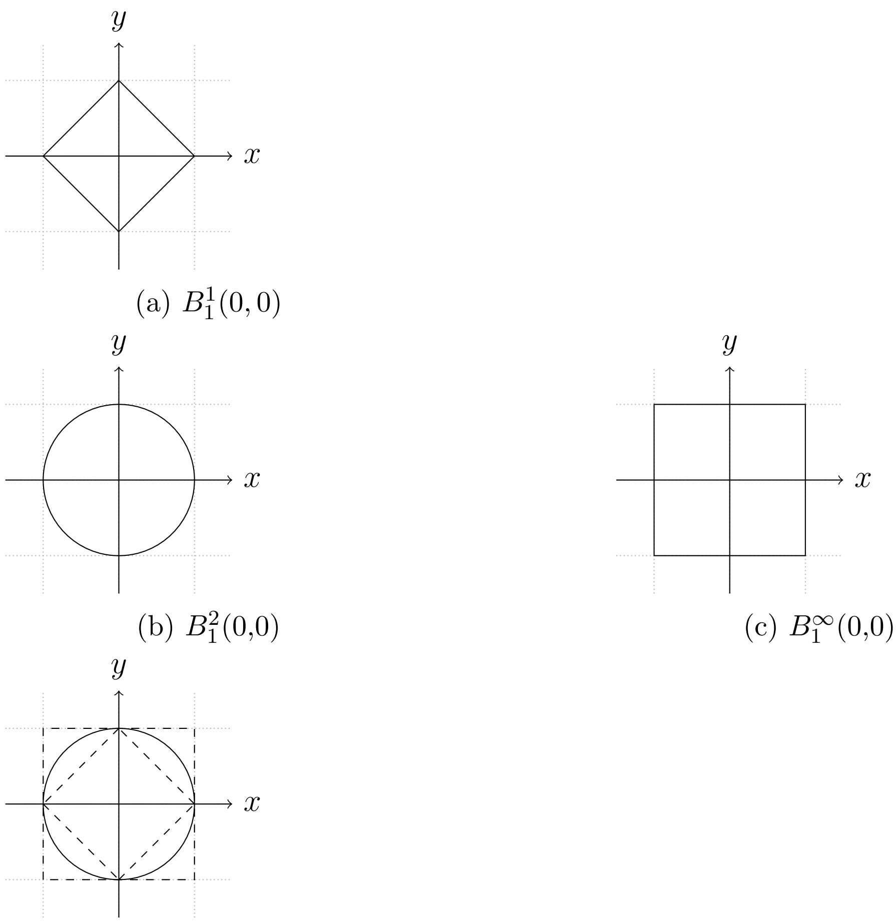
**Определение 3.9.** $l_p = \{x : \{x_j\}_{j=1}^{\infty}, x_j \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \wedge \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < +\infty\}$

$$||x||_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$X = \mathbb{N}$, $\mu(j) = 1$, $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n$

$$l^p = L^p(\mathbb{N}, \mu) \Rightarrow \text{ полное } \quad 1 \leq p < +\infty$$

**Замечание 3.2.** $\{x^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}, x^{(m)} \in l^p$, $\lim\limits_{m\to\infty} ||x^{(m)} - x|_p = 0 \Rightarrow \forall j \lim\limits_{m\to\infty} x_j^{(m)} = x_j$ Например, $\not\Leftarrow$ при $e_m = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots)$




(a) $B_1^1(0,0)$

(b) $B_1^2(0{,}0)$

(c) $B_1^\infty(0{,}0)$

(d) $B_1^p(0{,}0)$

Рис. 3.1: Примеры единичных шаров в $l_2^p$

Пусть $j$ фиксировано. $\lim\limits_{m\to\infty}(e_m)_j = 0 \quad ||e_m - \nvdash||_p = 1 \quad \forall\, p, 1 \le p \le +\infty$. В качестве упражнения доказать, что $l^p$ – полное непосредственно.

На рисунке 3.1 приведены примеры единичных шаров в $l_2^p = \{(x,y) : (|x|^p + |y|^p)^{\frac{1}{p}}\}, 1 \le p < +\infty$. Для $l_2^\infty$ норма определяется $||(x,y)||_\infty = \max(|x|,|y|)$

## 3.5. Неполное нормированное пространство

**Определение 3.10** (Финитное линейное пространство).

$$F = \{x - \{x_j\}_{j=1}^{\infty}, x_j \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \exists\ N(x) \in \mathbb{N} : n > N(x) \Rightarrow x_n = 0\}$$

$F \subset l^p \quad 1 \leq p \leq +\infty$. $(F, ||\cdot||_p)$ – не полное, $F$ – не замкнуто. Будем брать геометрическую прогрессию и обрывать ее на некотором члене.

$$x^{(m)} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^m}, 0, 0, 0, \dots\right\} \in F$$

$$X = \left\{\frac{1}{2^k}_{k=1}^{\infty}\right\} \in l^p$$

$$1 \leq p < +\infty \quad ||x - x^{(m)}||_p = \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^{kp}}\right)^{\frac{1}{p}} \underset{m\to\infty}{\to} 0$$

Следовательно, $F$ – не замкнуто.

В качестве упражнения проверить, что $\overline{F}$ в $l^p$ =? при $p < +\infty$ и при $p = \infty$.

**Теорема 3.7.** $C[a,b], ||f||_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < +\infty$

$$(C[a,b], ||\cdot||) \text{ – не полное}$$

*Доказательство.* При $p = 1$, $[a,b] = [-1,1], f \in C[a,b], \int_a^b |f(x)|^p dx = 0 \Leftrightarrow f(x) \equiv 0$. Предъявим фундаментальную последовательность, предел которой не будет непрерывной функцией.

$$f_n = \begin{cases} 0, -1 \leq x \leq 0 \\ nx, x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 1, x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}, f \in C[-1,1]$$

$f_n$ – фундаментальная в $(C[-1,1], p = 1)$

Пусть $m > n$.

$$\int_{-1}^{1} |f_m(x) - f_n(x)| dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right) \leq \frac{1}{2n} \underset{n,m\to\infty}{\to} 0$$

Пусть $\exists\, ./ f \in C[-1,1] : ||f - f_n||_1 \underset{n\to\infty}{\to} 0$

$$m \geq n \qquad \int_{\frac{1}{n}}^{1} \underbrace{|f(x) - 1|}_{=0}\, dx \underset{m\to\infty}{\to} 0$$

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} |f(x) - 1| dx \leq \int_0^1 |f(x) - f_m(x)| dx \underset{m\to\infty}{\to} 0$$

$\Rightarrow f(x) = 1, x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \forall\, n$

$$\begin{cases} \Rightarrow f(x) = 1, x \in (0,1], f \text{ непрерывна }, f(0) = 1 \\ \text{аналогично } f(x) \equiv 0 \text{ на } [-1,0] \end{cases} \quad \Rightarrow \text{ противоречие}$$

$\square$

# Глава 4

# Пополнение метрического пространства

26.09.23

Мы привели несколько примеров нормированных пространств, не являющихся полными. Приведём еще один пример.

**Определение 4.1.**

$$\mathrm{P} = \left\{ p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, a_k \in \mathbb{R}, n \geq 0 \right\}$$

P (подпространство в алгебраическом смысле) $\subset C[a,b]$, $||p||_\infty = \max_{x\in[a,b]} |p(x)|$ $e^x \notin \mathrm{P}$, $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}, \Rightarrow p_n \underset{[a,b], n\to\infty}{\rightrightarrows} e^x$ это не многочлен, потому что если сколько-то раз продифференцировать многочлен, он станте тождественным $0 \Rightarrow \overline{\mathrm{P}} \setminus \mathrm{P} \ni e^x \Rightarrow \mathrm{P}$ – не замкнуто $\Rightarrow \mathrm{P}$ – не полное.

$$\overline{\mathrm{P}} = C[a,b]$$

**Теорема 4.1** (Вейерштрасса, 1885). $f \in C[a,b], \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, p \in \mathrm{P}$ т.ч. $||f - p|| < \varepsilon$ (любую функцию на отрезке можно приблизить многочленами)

$$p_n \underset{G}{\rightrightarrows} f \Rightarrow f \text{ аналитическая в } G$$

## 4.1. Пополнение метрического пространства

Несколько простых свойств метрики, и все следуют из неравенства треугольника

**Теорема 4.2** (Свойства метрики). $(X, \rho)$ – метрическое

1. $x, y, z, u \in X \quad \Rightarrow |\rho(x,u) - \rho(y,z)| \leq \rho(x,y) + \rho(u,z)$
2. $\rho : X \times X \to \mathbb{R} \Rightarrow \rho(x,y)$ – непрерывная функция
3. $A \subset X, A$ – подмножество, $\rho(x,A) = \inf_{y \in A} \rho(x,y) \Rightarrow \rho(x,A)$ – непрерывная функция от $x$
4. $A \subset X, A = \overline{A}, x_0 \notin A \Rightarrow \rho(x_0, A) > 0$

*Доказательство.* 1. $\rho(x,u) \leq \rho(x,y) + \rho(y,u) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z) + \rho(z,u) \Rightarrow \rho(x,u) - \rho(y,z) \leq \rho(x,y) + \rho(z,u)$ Аналогично $\rho(y,z) - \rho(x,u) \leq \ldots$ из всего $\Rightarrow 1)$

2. Докажем непрерывность с помощью последовательности.
$\rho(x,y)$ – непрерывная?

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \lim_{n\to\infty} y_n = y \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0 = \lim_{n\to\infty} \rho(y_n, y)$$

$\rho(x,y) - \rho(x_n,y_n)| \overset{(1)}{\leq} \rho(x,x_n) + \rho(y,y_n) \underset{n\to\infty}{\to} 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n,y_n) = \rho(x,y)$

3. $A \subset X$, $x, z \in X$, $|\rho(x,A) - \rho(z,A)| \leq ?$
Пусть $y \in A$

$$\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y) \Rightarrow \rho(x,A) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y) \, \forall \, y \in A$$
$$\Rightarrow \rho(x,A) \leq \rho(x,z) + \inf_{y\in A} \rho(z,y) = \rho(x,z) + \rho(z,A) \Rightarrow$$
$$\rho(x,A) - \rho(z,A) \leq \rho(x,z)$$

Но нам нужен модуль. Можем сказать, что $x$ и $z$ ничем не отличаются, аналогично $\rho(z,A) - \rho(x,A) \leq \rho(x,z) \Rightarrow 3$

4.
$$x_0 \notin A \Rightarrow x_0 \in X \setminus A \text{ открытое}$$

$$\Rightarrow \exists\, \delta > 0 \quad B_\delta(x_0) \subset X \setminus A \Rightarrow \rho(x_0, A) \geq \delta$$

□

Перед определением пополнения нам потребуется несколько определений, связанных с отображениями в метрических пространствах.

$(X, \rho), (Y, d)$ – метрические простарнства. $T : X \to Y$.

**Определение 4.2** (Изометрическое вложение)**.**

$$d(T_x, T_z) = \rho(x, z) \quad \forall\, x, z \in X$$

Обозначение: $X \hookrightarrow Y$

**Определение 4.3** (Изометрия)**.** $T$ – изометрическое вложение, $T(X) = Y$

**Определение 4.4** (Изометричность пространств)**.** $(X, \rho), (Y, d)$ изометричны, если $\exists\, T : X \to Y, T$ – изометрия

**Свойство 4.1.** $T$ – изометрическое вложение $\Rightarrow T$ – инъективное, непрерывное

*Доказательство.* $x, z \in X, T : X \to Y$, пусть $T_x = T_z \Rightarrow d(T_x, T_z) = 0$ Значит, исходное расстояние тоже 0 по свойству метрики. $d(x, z) = 0 \Rightarrow x = z$

Инъективность проверили, теперь непрерывность, это еще проще.

$$\lim_{n\to\infty} = x \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \rho(x, x_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} d(T_{X_n}, T_x) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} T_{X_n} = T_x$$

□

**Свойство 4.2.** Если $T$ – изометрия, то $\exists\, T^{-1}$ – изометрия.

**Свойство 4.3.** ”Изометричность” – отношение эквивалентности на множестве метрических пространств

И наконец

**Определение 4.5** (Пополнение м. пространства). $(X, \rho)$ – метрическое пространство. $(Z, d)$ – полное метрическое пространство. $(Z, d)$ – пополнение $(X, \rho)$, если существует $T : X \to Z$

1. $T$ – изометрическое вложение
2. $\overline{T(X)} = Z$

**Замечание 4.1.** Не обязательно искать пространство, удовлетворяющее и второму свойству. Достаточно найти такое, которое удовлетворяет первому. $(X, \rho)$ – метрическое пространство, $(U, d)$ – полное метрическое пространство. Пусть $\exists\, T : X \to U$ – изометрическое вложение. Если 2 свойство не выполняется, то легко такое $Z$ построить. Возьмём замыкание образа. $Z = \overline{T(X)} \Rightarrow (Z, d)$ – пополнение X.

Теперь обещанная теорема. Возьмём любое метрическое пространство и покажем, что у него есть пополнение.

**Теорема 4.3** (О пополнении метрического пространства). $(X, \rho)$ – метрическое $\Rightarrow \exists$ пополнение $(Z, d)$

*Доказательство.* Есть классическое доказательство с рассмотрением всех фундаметнальных последовательностей, рассмотрением фактор-пространства, муторным разбором случаев. Мы пойдем другим путём. Будет короткое, но **фантастически** непонятное доказательство в том смысле, что непонятно, как его придумать.
Мы собираемся использовать $m(X) = \{f : X \to \mathbb{R}, \sup_{x\in X} |f(x)| < +\infty\}$

$$||f||_{m(X)} = ||f||_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|$$

$m(X)$ – полное пространство.
Каждой точке мы сопоставим функцию. Вот такая идея! $\varphi : X \to m(X)$. Оно же будет изометрическим вложением, то есть будет сохранять расстояния.
Сначала будет маленькое облегчающее предположение про $X$, от которого мы потом откажемся. Пусть $X$ – ограниченное, то есть $\exists\, M > 0$ т.ч. $\forall\, x, y \in X\ \rho(x, y) \le M$. Единственная цель предположения – формула для $\varphi$ будет чуть проще. Вообще, можно было бы обойтись и без него.
$t \in X, t$ – фиксирован, $f_t(x) = \rho(x, t)$. При фиксированном $t$ – это

функция на $X$. Именно сюда наше отображение будет отображать $t$. Одной точке – целая функция, понятно?

$$\varphi(t) := f_t(x) \text{ т.е. } \varphi : t \to f_t(x)$$
$$|f_t(x)| \le M \Rightarrow f_t \in m(X)$$

Самое главное. Проверим, что отображение сохраняет расстояния. Это очень легко. Возьмём 2 точки.

$$\text{Пусть } t, s \in X, \quad ||f_t - f_s||_\infty = \sup_{x \in X} |\rho(x, y) - \rho(x, s)|$$
$$|\rho(x, t) - \rho(x, s)| \le \rho(t, s), \text{ Пусть } x = t \Rightarrow |\rho(t, t) - \rho(t, s)| = \rho(t, s)$$
$$\Rightarrow ||\varphi(t) - \varphi(s)||_\infty = \rho(t, s) \Rightarrow \varphi \text{ – изометрическое вложение}$$

Посмотрим, что будет, если откажемся от этого облегчающего предположения. Надо будет чуть исправить отображение $\varphi$. $X$ – любое метрическое пространство. $a \in X$ – фиксированная точка.
$t \in X, f_t(x) = \rho(x, t) - \rho(x, a) \Rightarrow |f_t(x)| \le \rho(a, t) \Rightarrow f_t \in m(X)$

Раньше мы могли так брать и не вылетать из пространства из-за ограниченности. Вычтем эту штуку, чтоыб попасть, куда надо.

$$t, s \in X \Rightarrow f_t(x) - f_s(x) = \rho(x, t) - \rho(x, s) \overset{(1)}{\Rightarrow} ||f_t - f_s||_\infty = \rho(s, t)$$

Пополнение $X$: $\overline{\varphi(X)}^{||\cdot||_\infty} = Z, (Z, ||\cdot||_\infty)$ □

Таким образом, изучение метрических пространств можно свести к изучению подмножества пространства непрерывных функций.

**Замечание 4.2.** Забегая далеко вперёд. $(X, ||\cdot||)$ – нормированное, $X^*$ – множество непрерывных линейных функционалов на $X$, $X^*$ – полное (ВСЕГДА).

Мы построим каноническое вложение $\pi : X \to \underbrace{(X^*)^*}_{\text{полное}}$, $\overline{\varphi(x)}^{X^{**}}$ – пополнение X.

## 4.2. Теорема о вложенных шарах

Когда-то в анализе была теорема Кантора о том, что если есть последовательность вложенных друг в друга отрезков, то их пересечение не пусто. Мы докажем похожее утверждение для метрических пространств. Оказывается, то утверждение было связано с полнотой вещественной прямой $\mathbb{R}$. $(X, \rho)$ – метрическое пространство, $r > 0, x \in X$ Введём стандартное обозначение замкнутого шара.

$$D_r(x) = \{y \in X : \rho(x, y) \leq r\}$$

**Теорема 4.4** (О вложенных шарах)**.** $(X, \rho)$ – метрическое пространство. $X$ – полное $(| \Leftrightarrow (\forall \{D_n\}_{n=1}^{\infty}, D_n = D_{r_n}(x_n)), D_{n+1} \subset D_n, \lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0 \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{+\infty} D_n \neq \varnothing)$. По сранению с теоремой Кантора у нас есть дополнительное предположение о стремлении к нулю, которое здесь важно, а на прямой было как данность.

*Доказательство.* $\Rightarrow$ $X$ – полное

$$\{D_n\}_{n=1}^{\infty}, D_n = D_{r_n}(x_n), D_{n+1} \subset D_n, \lim_{n\to\infty} r_n = 0$$

Надо проверить, что центры шаров образуют фундаментальную последовательность, то есть что $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – фундаментальная.
Пусть $\varepsilon > 0 \quad \exists\ N \in \mathbb{N} \quad r_n < \varepsilon$ при $n \geq N$.

$$(n > N \wedge m > N) \Rightarrow (x_n \in D_n \wedge x_m \in D_n) \Rightarrow \rho(x_n, x_m) \leq$$
$$\leq \rho(x_n, x_N) + \rho(x_m, x_N) \leq 2\varepsilon$$

$$X \text{ – полное } \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} x_n = x$$

любое фиксированное $m \in \mathbb{N} \quad x_n \in D_m \, \forall\, n \geq m, D_m$ – замкнутое

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty, n\geq m} x_n = x \in D_m$$

$$\Rightarrow x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} D_m$$

$\Leftarrow$

Ничего кроме определения для доказательства полноты у нас нет. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – фундаментальная. Возьмём достаточно быстро убывающую последовательность $\varepsilon_k = \frac{1}{2^k}$. Существует $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}, \rho(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < \frac{1}{2^{k+1}}$.
$D_k = D_{\varepsilon_k}(x_{n_k})$

$$\begin{cases} y \in D_{k+1} \Rightarrow \rho(y, x_{n_{k+1}}) \leq \frac{1}{2^{k+1}} \\ \rho(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < \frac{1}{2^{k+1}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\rho(y, x_{n_k}) \leq \rho(y, x_{n_{k+1}}) + \rho(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) < \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^k}$$
$$\Rightarrow y \in D_k \Rightarrow D_{k+1} \subset D_k$$

Мы взяли произвольный элемент из $D_{k+1}$ и показали, что он принадлежит $D_k$, то есть показали вложенность элементов последовательности.

$$\Rightarrow \exists\, x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} D_k \quad \rho(x, x_{n_k}) \le \frac{1}{2^k} \Rightarrow \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$$

По свойству фундаметнальных последовательностей из первой лекции $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ □

**Замечание 4.3.** В условиях теоремы пересечение вложенных шаров $\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$ состоит из одной точки.

*Доказательство.* Пусть $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n, \Rightarrow \rho(x, x_n) \in r_n, \lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. А мы знаем, что предел в метрическом пространстве единственный. □

**Замечание 4.4.** Условие, что $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$ в теореме существенно.

**Пример 4.1** (Замкнутые множества)**.** $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}, F_n$ – замкнутое, $F_{n+1} \subset F_n, F_n \subset \mathbb{R}, \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \varnothing, F_n = [n, +\infty)$

**Пример 4.2** (По теореме)**.**

$$X[1. + \infty) \quad \rho(x, y) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{x+y}, & x \ne y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

Проверим, что $\rho$ – метрика. $x, y, z$

$$\rho(x, y) + \rho(y, z) = 1 + \frac{1}{x+y} + 1 + \frac{1}{y+z} > 1 + 1 > 1 + \frac{1}{x+z} = \rho(x, z)$$

Проверяем полноту. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальная, $\varepsilon = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$$\exists\ N \in \mathbb{N} : (n \ge N \land m \ge N)\rho(x_n, x_m) < \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\rho(x_n, x_N) < \frac{1}{2} \land \rho(x_m, x_N) < \frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$x_N = x_{N+1} = x_{N+2} = \dots$$
$$\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} x_n = X_N \Rightarrow (X, \rho) \text{ – полное}$$

Полноту проверили.
$r_n = 1 + \frac{1}{2n}, x_n = n; D_n = D_{r_n}(n), h \in D_n$. Пусть $x \ne n, x \in D_n \Rightarrow \rho(x, x_n) = 1 + \frac{1}{x+n} \le 1 + \frac{1}{2n}$

**Замечание 4.5** (Домашнее задание)**.** Если $(X, ||\cdot||)$ – банахово, то $D_{n+1} \subset D_n \{D_n\}_{n=1}^{\infty} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n \ne \varnothing$ (требование $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$ лишнее)

## 4.3. Сепарабельные пространства

$(X, \rho)$ – метрическое пространство,

**Определение 4.6** ($A$ плотно в $C$). $A \subset X, C \subset X$. $A$ плотно в $C$, если $C \subset \overline{A} \Leftrightarrow$

$$\forall\, x \in C\, \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, a \in A\, \rho(x, A) < \varepsilon \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\, C \subset \bigcup_{a \in A} B_\varepsilon(a)$$

Любой элемент $C$ можно сколь угодно хорошо приблизить элементами из $A$.

**Определение 4.7** ($A$ всюду плотно в $C$). $A$ – всюду плотно в $X$, если $\overline{A} = X$

Чем же полезно это свойство? Если хотят доказать свойство для $X$, то часто доказывают сначала для всюду плотного подмножества.

**Определение 4.8** (Сепарабельное пространство). $(X, \rho)$ – **сепарабельное**, если $\exists\, E \subset X, E = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \overline{E} = X$

**Теорема 4.5.** $n \in \mathbb{N}, q \leq p \leq +\infty$,

$$l_n^p \text{ – сепарабельное}$$

*Доказательство.*

$$l_n^p = (\mathbb{R}^n, ||\cdot||_p) = \{x = (x_1, \dots, x_n), x_j \in \mathbb{R}, ||x||_p\}$$
$$E = \mathbb{Q}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n), x_j \in \mathbb{Q}\}$$

Если $(\mathbb{C}^n, ||\cdot||_p), \tilde{\mathbb{Q}} = \{x + iy,\ x, y \in \mathbb{Q}\}, E = \tilde{\mathbb{Q}}^n$ □

**Теорема 4.6.** $F$ – финитные последовательности, $1 \leq p \leq +\infty$

$$(F, ||\cdot||_p) \text{ – сепарабельно}$$

*Доказательство.* $E = \bigcup_{n=1}^{\infty}, \mathbb{Q}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_{N(x)}, 0, 0, \dots, ), x_j \in \mathbb{Q}\}$. Попросту говоря, все финитные последовательности, координаты которых рациональны. □

**Теорема 4.7.** $l^p, 1 \le p < +\infty, C_0$ – сепарабельные

*Доказательство.* На прошлой лекции мы доказали, что

$$(F, ||\cdot||_p), \overline{F}^{||\cdot||_p} = l^p \text{ при } 1 \le p < +\infty$$
$$\begin{cases} E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}^n \text{ – всюду плотно в } F \\ F \text{ – всюду плотное в } l^p \end{cases} \Rightarrow$$
$$E \text{ всюду плотно в } l^p, 1 \le p < +\infty$$

Почему любой элемент из $l^p$ может быть приближен финитной последовательностью? Мы ее просто отрезаем. □

Ответ на упражнение для читателя, которое было на прошлой лекции: $F$ – подпространство в алгебраическом смысле, $F \subset l^\infty$, $\overline{F}^{||\cdot||_\infty} = C_0$

$$x_0 \in C_0 \Leftrightarrow x = \{x_n\}_{n=1}^\infty, \lim_{n\to\infty} x_n = 0$$
берем первые $m$ координат и дополняем их нулями
$$x^{(m)} = (x_1, \dots, x_m, 0, 0, \dots, 0, \dots) \Rightarrow x^{(m)} \in F$$
$$||x - x^{(m)}||_\infty = \sup_{k>m} |x_k| \underset{m\to\infty}{\to} 0$$

Остаётся вопрос, почему $C_0$ – замкнутое множество. Можно в лоб, а можно по-учёному рассудить.

$$\text{пусть } \{y^{(m)}\}_{m=1}^\infty, y^{(m)} \in C_0,\ y^{(m)} \underset{m\to\infty}{\to} y \text{ в } C_0$$
$$\Rightarrow \lim_{m\to\infty} ||y - y^{(m)}||_\infty = 0 \qquad y = \{y_n\}_{n=1}^\infty, \lim_{n\to\infty} y_n = 0 \text{ ???}$$

А это равномерная сходимость на множестве натуральных чисел, то есть это тот случай, когда можно менять местами пределы.

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{m\to\infty} \underbrace{\lim_{n\to\infty} y_n^{(m)}}_{=0} = 0$$

Упражнение: $C$ – сепарабельное, $C \subset l^\infty$

**Теорема 4.8.** $l^\infty$ – не сепарабельное

Какой бы шарик из $X$ мы бы не предъявили, там всегда будет элемент всюду плотного множества.

*Доказательство.*

$$A \subset \mathbb{N} \quad X_n^A = \begin{cases} 1, n \in A \\ 0, n \notin A \end{cases}$$

Мощность $\{A, A \subset \mathbb{N}\}$ – континуум ($>$ счётное). Это и будет центр пересекающихся шариков. Посмотрим, каким будет расстояние между двумя разными точками.

$$A \subset \mathbb{N}, C \subset \mathbb{N}, A \notin \mathbb{C}$$

$$X_n^A - X_n^c = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases} \Rightarrow ||x^A - x^C||_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |X_n^A -_n^C| = 1$$

То есть если 2 множества не равны, то расстояние между ними – единица.

$$B_{\frac{1}{2}}(x^A) \cap B_{\frac{1}{2}}(x^C) = \varnothing$$

Мы предъявили несчётный набор дизъюнктных шариков. $E$ – всюду плотно в $l^\infty \Rightarrow \forall\, A \subset \mathbb{N}\, \exists\, e_A \in B_{\frac{1}{2}}(x^A)$

$$A \neq C \Rightarrow e_A \neq e_C, \qquad \underbrace{\{e_A\}_{a \subset \mathbb{N}}}_{\text{несчётно}} \subset E \Rightarrow E \text{ несчётно}$$

То, что у всех шариков одинаковый радиус – это просто приятный бонус. □

**Теорема 4.9.** $(X, \rho)$ – сепарабельное, $Y \subset X \Rightarrow (Y, \rho)$ – сепарабельное.

*Доказательство.* $\exists\ E = \{x_n\}_{n=1}^\infty$ – всюду плотно в $X$, $x_0 \in X$

$$\rho(x_n, Y) = \inf_{y \in Y} \rho(x_n, y) \Rightarrow$$

$$\exists\ \{y_{n,k}\}_{k=1}^\infty \quad \lim_{k \to \infty} \rho(x_n, y_{n,k}) = \rho(x_n, Y)$$

$$y_{n,k} \in Y,\ F = \{y_{n_k}\}_{n,k} \text{ – счётное },\ F \subset Y$$

Проверим, что $F$ – всюду плотно в $Y$. Пусть $y \in Y, \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\, x_n : \rho(y, x_n) < \varepsilon$. Из этого неравенства мы делаем вывод, что $\rho(x_n, Y) < \varepsilon$. Значит, $\exists\, k : \rho(x_n, y_{n,k}) < \varepsilon \Rightarrow$

$$\rho(y, y_{n,k}) \leq \rho(y, x_n) + \rho(x_n, y_{n,k}) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

□

**Следствие 4.1.** $X$ – бесконечное множество $\Rightarrow m(X)$ – не сепарабельное.

*Доказательство.* Можно слово в слово повторить доказательство для $l^\infty$, но мы воспользуемся последними доказанными теоремами.

$$\exists \{a_j\}_{j=1}^\infty, a_j \in X, a_j \neq a_i \text{ при } i \neq j$$
$$Y = \{f \in m(X), f(x) = 0 \text{ если } x \neq a_j\} \sup_{j\in\mathbb{N}} |f(a_j)| < +\infty$$
$$Y \text{ изометрично } l^\infty, f \in Y, T(f) = \{f(a_j)\}_{j=1}^\infty \in l^\infty$$
$$Y \text{ – не сепарабельно } \Rightarrow \text{ и по последней теореме}$$
$$m(X) \text{ – не сепарабельно}$$

□

**Теорема 4.10.**

$$C[a,b] \text{ – сепарабельно}$$

*1 часть.*

$$L = \{\text{ ломаные }\} \quad a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b \quad \{y_k\}_{k=0}^n, y_k \in \mathbb{R}$$
$$L(x) \text{ – ломаные}$$
$$L(x_k) = y_k,\ k = 0, 1, \ldots, n \quad l(x) \text{ линейная на } [x_k, x_{k+1}]$$

Отметим, что $L$ – всюду плотное множество в пространстве непрерывных функций. Это связано с равномерной непрерывностью. Никаких надежд на то, что оно будёт счётным нет.

$$\text{пусть } f \in C[a,b],\ \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\, \delta > 0 : |x - y| < \delta$$
$$\Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$
$$\exists \{x_k\}_{k=0}^n \text{ – разбиение} \quad x_{k+1} - x_k < \delta$$
$$y_k := f(x_k) \quad L(x) \text{ – ломаная}$$
$$\Rightarrow |f(x) - L(x)| < \varepsilon \Rightarrow ||f - L||_\infty \leq \varepsilon \Rightarrow \overline{\mathcal{L}} = C[a,b]$$

как сделать так, чтобы множество ломаных было счётным? возьмём в качестве вершин элементы $\mathbb{Q}$

$$E = \{L \in \mathcal{L},\ x_k, y_k \in \mathbb{Q}\} \text{ – счетное множество}$$
$$\begin{cases} \mathcal{L} \subset \overline{E} \\ \overline{\mathcal{L}} = C[a,b] \end{cases} \Rightarrow E \text{ – всюду плотно, т.е. } \overline{E} = C[a,b]$$

$\square$

*2 часть.* по т. Вейерштрасса замыкание многочленов – тоже пространство непрерывных функций.

$$\mathrm{P} = \{p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k\} \quad \overline{\mathrm{P}} - C[a,b]$$

$$E = \{p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,\ a_k \in \mathbb{Q}\}$$

$$\begin{cases} \mathrm{P} \subset \overline{E} \\ \overline{\mathrm{P}} = C[a,b] \end{cases} \Rightarrow \overline{E} = C[a,b]$$

$\square$

## 4.4. Нигде не плотные множества

**Определение 4.9.** $(X,\rho)$ – метрическое пространство. $A \subset X, A$ – **нигде не плотно** в $X$, если

$$\forall\, B_r(x) \text{ при } r > 0, x \in X \quad B_r(x) \not\subset \overline{A} \Leftrightarrow \mathrm{Int}(\overline{A}) = \varnothing \Leftrightarrow$$

Если мы рассмотрим замыкание, никакого шарика там не будет. Иначе: если мы рассмотрим внутренность замыкания, она будет пустой.

$$\forall\, r > 0, x \in X \quad B_r(x) \,\exists\, B_{r_1}(x_1) \subset B_r(x), B_{r_1}(x_1) \cap A = \varnothing$$
$$\Leftrightarrow \forall\, r > 0, x \in X\, D_r(x) \,\exists\, D_{r_1}(x_1) \subset D_r(X), D_{r_1}(x_1) \cap A = \varnothing$$

Скоро докажем связь между нигде не плотными множествами и полными пространствами. Но сперва определение, которое не будет часто встречаться, но сам факт – полезный.

**Определение 4.10** (множество первой категории)**.** $M \subset X, (X,\rho)$. $M$ – **множество первой категории**, если

$$M = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j, E_j \text{ нигде не плотно в } X$$

$M$ – **множество второй категории**, если $M$ нельзя представить в виде объединения счетного числа нигде не плотных множеств.

**Теорема 4.11** (Бэр, о категориях). $(X, \rho)$ – полное $\Rightarrow X$ – множество второй категории.

*Доказательство.* Можно было бы даже от противного. Но мы возьмём семейство $\{M_j\}_{j=1}^{\infty}$, $M_j$ – нигде не плотно в $X$, $E - \bigcup_{j=1}^{\infty} M_j$. Мы докажем, что найдётся хоть одна точка, которая принадлежит $X$ и не принадлежит $E$. Это и будет обозначать, что $X$ невозможно представить в виде такого объединения.

$$x_0 \in X \quad D_0 = \{y : \rho(x_0, y) \leq 1\}$$
$$M_1 \text{ – нигде не плотно } \Rightarrow \exists\, D_1 = D_{r_1}(x_1) \subset D_0, D_1 \cap M_1 = \varnothing$$
$$r_1 < 1$$

Теперь мы то же соображение применим к множеству $M_2$, которое тоже нигде не плотно

$$\exists\, D_2 = D_{r_2}(x_2) \subset D_1, D_2 \cap M_2 = \varnothing$$
$$r_2 < \frac{1}{2}$$

и так далее $\begin{cases} \{D_n\}_{n=1}^{\infty}, D_n = D_{r_n}(x_n), D_{n+1} \subset D_n \\ D_n \cap M_n = \varnothing, r_n < \frac{1}{n} \end{cases}$ по теореме о вложенных шарах $\Rightarrow\ \exists\, x \in \cap_{n=1}^{\infty} D_n, (x \in D_n \wedge x \in X \setminus E) \Rightarrow x \notin M_n \,\forall\, n \Rightarrow$ $x \notin E$ □

## 4.5. Полные семейства элементов

Теперь мы будем понимать полноту в совершенно другом смысле. Сначала вспомним, что такое линейная оболочка пространства.

**Определение 4.11** (Линейная оболочка). $X$ – линейное пространство над $\mathbb{R}(\mathbb{C})$. Рассмотрим семейство $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ – семейство элементов, $x_\alpha \in X$.

$$\mathcal{L}\{x_\alpha\}_{\alpha \in A} = \left\{ \sum_{k=1}^{n} c_k x_{\alpha_k}, c_k \in \mathbb{R}(\mathbb{C}), n \in \mathbb{N} \right\}$$

**Определение 4.12** (Полное семейство)**.** $(X, ||\cdot||)$, $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ – **полное семейство**, если $\overline{\mathcal{L}\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}} = X$. То есть линейная оболочка всюду плотна в $X$.

**Пример 4.3.** $C[a,b]$, $\{x^n\}_{n=0}^{+\infty}$ – полное семейство в $C[a,b]$, так как $\mathrm{P} = \mathcal{L}\{x^n\}_{n=0}^{+\infty}$, $\overline{\mathrm{P}} = C[a,b]$

**Пример 4.4.** $l^p$, $1 \le p < +\infty$, $C_0$

$$e_n = (1, 0, 0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{n}, 0, \ldots), \{e_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ – полное семейство}$$

$$\mathcal{L}\{e_n\}_{n=1}^{\infty} = F \text{ – финитная последовательность}$$

Упражнение: $C$ – что полное семейство?