

Функциональный анализ

Осень 2023

Оглавление

Оглавление	1
1 Введение	2
1.1 Зачем изучать функциональный анализ	3
2 Метрические пространства	5
2.1 Банаховы пространства	8
2.2 Пространства ограниченных функций	11
2.3 Пространство последовательностей с \sup нормой	13
2.4 Пространства n раз непрерывно дифференцируемых функций на отрезке	14
3 Пространство суммируемых функций (Лебега L^p)	15
3.1 Теория меры	15
3.2 Классические неравенства	17
3.3 Пространство Лебега	20
3.4 Пространства l_n^p, l^p	23
3.5 Неполное нормированное пространство	26
4 Пополнение метрического пространства	28
4.1 Пополнение метрического пространства	29
4.2 Теорема о вложенных шарах	32
4.3 Сепарабельные пространства	35
4.4 Нигде не плотные множества	39
4.5 Полные семейства элементов	40

Глава 1

Введение

12.09.23

День рождения функционального анализа – 1932 год. В этом году вышла книжка "Теория линейных операторов", автор – С. Банах. Главная цель функционального анализа – изучение линейных операторов (но не только их). Главным объектом у нас будет X – линейное топологическое пространство. Оно же линейное пространство над \mathbb{C} (или \mathbb{R}). Есть непрерывные операции

1. $(x, z) \rightarrow x + z \quad x, z \in X$
2. $(\alpha, x) \rightarrow \alpha x \quad \alpha \in \mathbb{C}$

Если у нас есть топологическое пространство, то у нас есть все любимые объекты из математического анализа – пределы, непрерывность, производные, интегралы.

Пусть есть X, Y – линейные топологические пространства. Также есть линейное отображение $A : X \rightarrow Y$

Определение 1.1 (Линейное отображение).

$$A(\alpha x + \beta z) = \alpha Ax + \beta Az$$

Если $\dim X < +\infty, \dim Y < +\infty$, то это линейная алгебра.

$$A : X \rightarrow X, \dim X = n, A = A^* \Rightarrow \exists \text{ ОНБ } \{u_j\}_{j=1}^n$$

λ_j – собственные

$$Au_j = \lambda_j u_j$$

Теорема 1.1 (Гильберт). X – гильбертово (сепарабельное) пространство. $A = A^*$ $A : X \rightarrow X, \Rightarrow \exists$ ОНБ из собственных векторов.

Если $\dim Y = 1$, т.е. $Y = \mathbb{C}$ (или \mathbb{R}), то $A : X \rightarrow \mathbb{C}$, A – линейный функционал.

X – пространство функций, $f \in X$.

В математическом анализе мы изучаем $f \stackrel{?}{\Rightarrow} f'$. В функциональном анализе же у нас X – пространство функций, $f \in X$

$$D(f) = f' \quad D : X \rightarrow Y \quad (1.1)$$

и здесь мы задаемся вопросами о следующих свойствах $D(f)$

- компактность
- самоспряженность
- непрерывность

Отцы основатели функционального анализа:

- Ф. Гильберт (1862 - 1943) Гильбертовы пространства;
- С. Банах (1892 -1945) Банаховы пространства;
- Ф.Рисс (1880-1956) пространства Лебега L^p .

Ну и хочется еще упомянуть для вас, компьютер саентистов, отцов основателей кибернетики, который оставили немалый след в функциональном анализе

- Н. Винер (1894-1964);
- Д. фон Нейман (1903 - 1957). Про его архитектуру, наверное, что-то слышали?

1.1. Зачем изучать функциональный анализ

Во-первых, он позволяет посмотреть на задачу с высокого уровня абстракции.

Рассмотрим пространство непрерывных функций $C[a, b]$, там введем норму $|f| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$. Рассмотрим пространство многочленов $P_n = \{\sum_{k=0}^n a_k x^k, a_k \in \mathbb{R}\}$. Существует ли такой многочлен, на котором инфимум достигается? И если да, то единственный ли он?

$$E_n(f) = \inf_{p \in P_n} \|f - p\| = \min_{p \in P_n} \|f - p\|$$

На первый вопрос ответ да, это следует из общей теоремы функционального анализа.

$$\dim P_n = n + 1 < +\infty$$

На второй же вопрос ответ тоже да, и тут функциональный анализ не при чем. Суть в том, что у многочлена степени n не может быть больше n корней.

Ну и еще немаловажные причины

1. язык функционального анализа – междисциплинарный язык математики;
2. его результаты применяются в математической физике, которая у нас будет в следующем семестре;
3. это интересно и важно. $0, 1, 2 = o(3)$;
4. у нас будет экзамен, на котором придется говорить уже нам.

Дополнительная литература по курсу. Первая рассчитана на студентов: в некоторых местах рассказывается, как придумать доказательство, как прийти к тому, что требуется, а не в обратную сторону, как обычно. Остальные же книги поумнее.

1. А.Н.Колмогоров, С.В. Фомин ”Элементы теории функций и Ф.А.”;
2. М.Рид, Б. Саймон. 1 том ”методы современной физики”. Тонкая (можно осилить), рассказывается также про применение ФА;
3. А.В. Канторович, Г.Г Акилов ”Функциональный анализ”. Похожа на энциклопедию. Но там можно найти всё;
4. К. Итосида ”Функциональный анализ”;
5. У. Рудин.

Глава 2

Метрические пространства

Начнём с того, что все знают. Надо ведь с чего-то начать. Мы будем несколько раз к ним возвращаться, а не изучим всё сразу. Один из полезных результатов – новое описание компакта в метрических пространствах. Он будет самым рабочим. А компакт вещь очень полезная. Компакты в гигантских пространствах напоминают компакты в \mathbb{R}^n или в \mathbb{C}^n и обладают теми же полезными свойствами.

Определение 2.1 (Метрика). X - множество. $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, ρ – метрика, если она обладает следующими свойствами

1. $\rho(x, y) \geq 0$ $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\rho(y, x) = \rho(x, y)$
3. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$

Введём стандартное обозначение открытого шара. $x \in X, r > 0$
 $B_r(x) = \{y \in X : \rho(x, y) < r\}$ – шар с радиусом r . $\{B_r(x)\}_{r>0}$ – база окрестности в точке x .

G – открытое, если $\forall x \in G \exists r > 0 : B_r(x) \subset G$.

$F \subset X, F$ – замкнутое $\Leftrightarrow X \setminus F$ – открытое. В метрическом пространстве удобно характеризовать замкнутое множества с помощью последовательностей. Вспомним, что такое сходящаяся последовательность. $\{x_n\}_{n=1}^\infty, x_n \in X, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x_0) = 0$

F – замкнутое \Leftrightarrow если $x_{n=1}^\infty, x_i \in F, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow x_0 \in F$

Определение 2.2 (Фундаментальная последовательность). $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, x_n – фундаментальная, если $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : (n > N \wedge m > N) \Rightarrow \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ или же

$$\Leftrightarrow \lim_{n, m \rightarrow \infty} \rho(x_n, x_m) = 0$$

Замечание 2.1. Если $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, то $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ фундаментальная.

Определение 2.3 (Полное метрическое пространство). (X, ρ) – полное, если все фундаментальные последовательности имеют предел (лежит в X)

Почему хорошо жить в полном метрическом пространстве?

Замечание 2.2 (о пользе полноты). $F : X \rightarrow \mathbb{R}, (X, \rho), F$ – непрерывная.

Стоит задача найти $x_0 \in X$ т.ч. $F(x_0) = 0$

Алгоритм: $\{x_n\}_{n=1}^\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = 0, \lim_{n, m \rightarrow \infty} \rho(x_n, x_m) = 0$ Если (X, ρ) – полное, то $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, F(x_0) = 0$ А если нет, то из наших вычислений вообще ничего не следует, возможно, решения вообще нет.

Пример 2.1. $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ – полные.

Пример 2.2. $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, т.е. \mathbb{Q} – неполное.

Потом приведем примеры поинтереснее. Кстати, древние греки пришли в ужас, когда узнали, что \mathbb{Q} – неполное.

Определение 2.4. $(X, \rho), A \subset X, A$ – ограниченное, если

$$\exists R > 0, x_0 \in X : A \subset B_R(x_0)$$

Теорема 2.1 (Свойства фундаментальных последовательностей). (X, ρ) – метрическое пространство, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальная последовательность

1. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ограниченная
2. Если $\exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, т.ч. $\exists \lim x_{n_k} = a$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

3. $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}, \varepsilon_k > 0, \exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, т.ч. $\rho(x_{n_k}, x_{n_j}) < \varepsilon_k$ при $j > k$

1 утверждение. $\varepsilon = 1, \exists N : n > N, \rho(x_n, x_N) < 1$. Возьмём $R = \max\{\rho(x_1, x_N), \dots, \rho(x_{N-1}, x_N)\} + 1$. Единичка на всякий случай. Тогда $x_j \in B_R(x_N) \forall j \in \mathbb{N}$ \square

2 утверждение. $\varepsilon > 0, \exists N : (n > N \wedge m > N) \Rightarrow \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$
 $\exists n_k : \rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon \wedge n_k > N$ Пусть есть какое-то $m > N$. Тогда $\rho(x_m, a) < \rho(x_m, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, a) < 2\varepsilon$

$\varepsilon_1 \exists n_1 : (n > n_1 \wedge n > m) \Rightarrow \rho(x_m, x_n) < \varepsilon_1 \Rightarrow \rho(x_m, x_{n_1}) < \varepsilon_1$ при $m > n_1$. Тогда по индукции \exists выбрали $n_1, \dots, n_{k-1}, k \geq 2, m > n_j \Rightarrow \rho(x_m, x_{n_j}) < \varepsilon_j, j = 1, 2, \dots, k-1$

$$\varepsilon_k \exists n_k > n_{k-1} : m \geq n_k \quad \rho(x_m, x_{n_k}) < \varepsilon_k$$

\square

Следствие 2.1. $(X, \rho), \{x_n\}$ – фундаментальная последовательность, тогда

$$\exists \{x_{n_k}\} \text{ т.ч. } \sum_{k=1}^{\infty} \rho(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < +\infty$$

Доказательство. По 3 свойству при $\varepsilon_k = \frac{1}{2^k}$ \square

Теорема 2.2 (О замкнутом подмножестве). (X, ρ) – метрическое пространство

1. (X, ρ) – полное, $Y \subset X$, X – замкнутое $\Rightarrow (Y, \rho)$ – полное
2. Теперь просто предполагаем (X, ρ) – метрическое пространство, (Y, ρ) – полное. Тогда Y – замкнутое

1 утверждение. Доказательство следует прямо из определения. Знаем что Y замкнутое подмножество полного пространства. Берем фундаментальную последовательность. $Y \subset X$, пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in Y$ – фундаментальная. $x_n \in X$, X – полное $\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, x_0 \in X$. Y – замкнутое, значит $x_0 \in Y \Rightarrow (Y, \rho)$ – полное. \square

2 утверждение. Второй пункт не труднее первого. Пусть $x_n \in Y$. $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \{x_n\}$ – фундаментальная. X – полное. Тогда $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in Y \Rightarrow x_0 \in Y \Rightarrow Y$ – замкнутое. \square

2.1. Банаховы пространства

Сначала введём понятие полунормы.

Определение 2.5 (полунорма). Пусть X – линейное пространство над \mathbb{R} или \mathbb{C} . Отображение $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ называется полунормой, если

1. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ (полуаддитивность)
2. $p(\lambda x) = |\lambda|p(x); x, y \in X, \lambda \in \mathbb{R}$ или (\mathbb{C})

Свойство 2.1. p – полунорма \Rightarrow

$$p(0) = 0, p(x) \geq 0 \forall x \in X$$

Доказательство. $p(0) = p(0 \cdot 0) = 0 \cdot p(0) = 0$. Пусть $x \in X \Rightarrow 0 = x + (-x) \Rightarrow p(0) \leq p(x) + \underbrace{p(-x)}_{p(x)} = 2p(x) \Rightarrow p(x) \geq 0$ \square

Определение 2.6 (Норма). X – линейное пространство, $p : X \rightarrow \mathbb{R}$. p – норма, если p – полунорма и $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Будем обозначать $\|x\| := p(x)$.

$(X, \|\cdot\|)$ будем обозначать нормированное пространство. и $x, y \in X, \rho(x, y) := \|x - y\|$. Тогда $(X, \|\cdot\|)$ – метрическое пространство.

Определение 2.7 (банахово пространство). $(X, \|\cdot\|)$ – банахово, если оно полное

Еще пару определений перед критерием банахова пространства.

Определение 2.8 (подпространство в алгебраическом смысле). X – линейное пространство, $L \subset X$. L – подпространство в алгебраическом смысле, если $x, y \in L, \alpha, \beta \in K \Rightarrow \alpha x + \beta y \in L$.

Определение 2.9 (подпространство). $(X, \|\cdot\|)$, $L \subset X$, L – подпространство, если

- L подпространство в алгебраическом смысле
- $L = \bar{L}$ (\bar{L} – замыкание)

Теперь нам потребуется сходимость рядов. Для того, чтобы говорить о сходимости, нужна топология.

Определение 2.10 (Сходимость).

$$(X, \|\cdot\|) \quad \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \quad S_n = \sum_{k=1}^n x_k$$

$\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ (*), (*) сходится, если $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \in X$

(*) сходится абсолютно, если $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ сходится

В \mathbb{R}^n (или в \mathbb{C}^n) если у нас была абсолютная сходимость, то была и обычная, но вообще говоря, это не так.

Теорема 2.3 (Критерий полноты нормированного пространства (банаховости)). $(X, \|\cdot\|)$ - полное \Rightarrow из абсолютной сходимости ряда следует сходимость ряда.

Доказательство. Предположим, что наше пространство полное (\Rightarrow). (X, ρ) - полное, $\{x\}_{k=1}^{\infty}$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| \text{ сходится} \quad (**)$$

Цель такая: последовательность S_n - фундаментальная. Сейчас применим критерий Коши к ряду (**). Это ряд из чисел, так что все в порядке. Пусть $\varepsilon > 0$. По критерию Коши $\exists N \in \mathbb{N} : (n > N \wedge p \in \mathbb{N}) \Rightarrow \sum_{k=1}^p \|x_k\| < \varepsilon$.

$$S_n = \sum_{k=1}^n x_k.$$

$$\|S_{n+p} - S_n\| = \left\| \sum_{k=1}^p x_{n+k} \right\| \leq \sum_{k=1}^p \|x_{n+k}\| < \varepsilon$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \{S\}_{n=1}^{\infty} - \text{фундаментальная, } (X, \rho) - \text{полное} &\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \\ &\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \text{сходится} \end{aligned}$$

Мы так запаслись номерами, чтобы выражение было меньше ε

Теперь (\Leftarrow). У нас кроме определения ничего нет. Возьмём какую-то фундаментальную последовательность. Откуда взять предел? Есть соотношения между элементами последовательности. Возьмём какую-то подпоследовательность, ведь у нас есть следствие! Из свойств фундаментальных последовательностей, мы знаем, что существует

$$\begin{aligned} \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : \|x_{n_1}\| + \sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \infty \\ \Rightarrow x_{n_1} + \sum_{k=1}^n (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) - \text{сходится} \\ S_m = x_{n_1} + \sum_{k=1}^{m-1} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) = x_{n_m} \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_m} = S \end{aligned}$$

□

2.2. Пространства ограниченных функций

Определение 2.11. Пусть A – произвольное множество. Стандартное обозначение $m(A)$ – множество всех ограниченных функций.

$$m(A) = \{f : A \rightarrow \mathbb{R} \text{ или } \mathbb{C}, \sup_{x \in A} |f(x)| < \infty\}$$

$$f \in m(A), \|f\|_\infty = \sup_{x \in A} |f(x)|.$$

Теорема 2.4. $(m(A), \|\cdot\|_\infty)$ – банахово пространство

Доказательство. Нужно проверить две вещи. Во-первых, что норма удовлетворяет аксиомам нормы. А во-вторых, что пространство с таким определением является полным. Просто по определению, никаких хитрых критериев. Возьмём фундаментальную подпоследовательность и покажем, что у нее есть предел.

Проверяем, что $\|\cdot\|_\infty$ удовлетворяет аксиомам нормы.

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in A} |f(x)| \geq 0, \|f\|_\infty = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \forall x \in A \text{ т.е. } f = 0$$

$$\lambda \in \mathbb{R} \text{ (или } \mathbb{C}). \|\lambda f\|_\infty = \sup_{x \in A} |\lambda| \cdot |f(x)| = |\lambda| \cdot \|f\|_\infty$$

Нужно проверить неравенство треугольника.

$f, g \in m(A)$. x – фиксированная точка в A

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \forall x \in A$$

$$\Rightarrow \|f + g\|_\infty = \sup_{x \in A} |f(x) + g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

Теперь мы проверили аксиомы нормы. Доказываем полноту. $\{f_n\}$ – фундаментальная в $m(A)$.

$$\varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : (m > N \wedge n > N) \Rightarrow \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon \text{ т.е. } \sup_{x \in A} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Первый вопрос: откуда взять претендента на роль предела? Еще желательно, чтобы он был единственный. Фиксируем x . Если для супремума есть неравенство, то и для x тем более. $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ при $n, m > N$. $\Rightarrow \{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ – последовательность чисел в \mathbb{C} или \mathbb{R} .

$$\Rightarrow \{f_n(x)\}_{n=1}^\infty \text{ – фундаментальная} \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \forall x \in A \text{ фиксированный}$$

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &< \varepsilon \quad \text{пусть } m \rightarrow \infty \\ \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| &\leq \varepsilon, x \in A \forall x \in A \\ \Rightarrow \|f_n - f\|_\infty &= \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \text{ при } n > A \end{aligned}$$

Последнее соображение, которое нужно добавить, это то, что f – элемент A . Мы можем записать f как $f = (f - f_n) + f_n, f_n \in m(A), f - f_n \in m(A)$.

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f \in m(A)$$

□

Давайте заметим, что у нас получилось определение равномерной непрерывности из математического анализа.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f \in m(A) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| = 0 \Leftrightarrow f_n \xrightarrow[A, n \rightarrow \infty]{} f$$

Определение 2.12 (Топологический компакт). Множество K – топологический компакт, если оно обладает следующими свойствами

1. $\forall \{G_\alpha\}_{\alpha \in A}, G_\alpha$ – открытые множества $K \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \exists \{\alpha_j\}_{j=1}^n, K \subset \bigcup_{j=1}^n G_{\alpha_j}$
2. Хаусдорфовость $\forall x, y (x \neq y) \in K \exists U, V$ – открытые множества, $x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset$

Определение 2.13. $C(K) = \{f : K \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ непрерывна}\}$

$$\|f\|_{C(K)} = \|f\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)| = \max_{x \in K} |f(x)|$$

Следствие 2.2. K – топологический компакт $\Rightarrow C(K)$ – банахово

Доказательство. $C(K) \subset m(K)$. $C(K)$ – подпространство в алгебраическом смысле. Проверим, что $C(K)$ – замкнуто в $m(K)$

$$\{f_n\}, f_n \in C(K), \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f_n \xrightarrow{K, n \rightarrow \infty} f \Rightarrow f \in C(K) \Rightarrow C(K)$$

тогда $m(K)$ – полное и $C(K)$ – полное. \square

2.3. Пространство последовательностей с sup нормой

Определение 2.14. $\mathbb{C}^n, n \in \mathbb{N}, l_n = \{x^\infty = (x_1, \dots, x_n), x_j \in \mathbb{C}\}$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$$

$A = \{1, 2, \dots, n\}, l_n^\infty = m(A) \Rightarrow l_n^\infty$ – полное Удобно думать, что последовательность – это функция на множестве натуральных чисел.

Определение 2.15 (l^∞).

$$l^\infty = \{X = \{x_j\}_{j=1}^\infty, \sup_{j \in \mathbb{N}} |x_j| < +\infty\}$$

$$\|x\|_\infty = \sup_{j \in \mathbb{N}} |x_j| \quad A = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$$

$$X = \{x\}_{j=1}^\infty \in m(A), f(j) = x_j$$

$$f: A \rightarrow \mathbb{C}$$

$$l^\infty := m(\mathbb{N}) \Rightarrow l^\infty \text{ – полное}$$

Определение 2.16.

$$c = \{X = \{x\}_{j=1}^\infty, x_j \in \mathbb{C} \mid \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0\}$$

$$c \subset l^\infty, \|x\| = \|x\|_\infty = \sup \|X\|$$

$$c_0 = \{x = \{x\}_{j=1}^\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} x_j = 0\}, c_0 \subset c \subset l^\infty$$

c, c_0 – замкнутые подпространства в $l^\infty \Rightarrow c, c_0$ – банаховы.

2.4. Пространства n раз непрерывно дифференцируемых функций на отрезке

Определение 2.17. (норма n производной)

$$n \in \mathbb{N} \quad C^{(n)}[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists f^{(n)} \in C[a, b]\}$$

$$\|f\|_{(n)} = \max_{0 \leq k \leq n} \|f^{(k)}\|_{\infty}, \quad f^{(0)} = f$$

Теорема 2.5. В $C^{(n)}[a, b]$ – банахово.

Доказательство.

$$\begin{aligned} \{f_m\}_{m=1}^{\infty} - \text{фундаментальная последовательность в } C^{(n)}[a, b] \\ \varepsilon > 0 \exists N : (m > n \wedge q > n) \Rightarrow \|f_m - f_q\|_{C^{(n)}} < \varepsilon \Rightarrow \|f_m^{(k)} - f_q^{(k)}\|_{\infty} < \varepsilon \\ k = 0, 1, \dots, n \end{aligned}$$

$\{f_m^{(k)}\}$ – фундаментальная в полном пространстве $C[a, b]$

$$\Rightarrow \exists \varphi_k \in C[a, b], f_n^{(k)} \rightrightarrows_{[a, b]} \varphi_k, k = 0, 1, \dots, n$$

$$\stackrel{\text{Анализ}}{\Rightarrow} (f_k^{(n)} \rightrightarrows_{[a, b]} \varphi_0 \wedge \varphi_k^0 \rightrightarrows_{[a, b]} \varphi_1) \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_0', \varphi_2 = \varphi_0'', \dots, \varphi_n = \varphi_0^{(n)} \quad (2.1)$$

□

19.09.23

Глава 3

Пространство суммируемых функций (Лебега L^p)

Сейчас будет небольшой экскурс в теорию меры, которая была на математическом анализе. Мы ничего доказывать не будем и поверим, что все утверждения верны и в общем случае.

3.1. Теория меры

Определение 3.1 (Мера). (X, U, μ) – пространство с мерой. X – множество, U – σ -алгебра подмножества X

1. $\emptyset \in U$
2. $A \in U \Rightarrow X - A \in U$
3. $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}, A_n \in U, A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow A \in U$

$$\mu : U \rightarrow [0, +\infty]$$

– мера, если

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, A_n \cap A_m = \emptyset, n \neq m, A_n \in U \Rightarrow \mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ (счетная аддитивность)

Предположения:

1. μ – полная мера, то есть $A \in U, \mu(A) = 0 \Rightarrow (\forall B \subset A \Rightarrow B \in U)$

$$U, (\Rightarrow \mu B) = 0)$$

2. μ – σ -конечна, то есть $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} X_j, \mu(X_j) < +\infty$

Пока можем думать, что речь идет о мере Лебега. Потом приведём другие примеры. В теории пространств будем считать, что функция действует из X в \mathbb{R} или в \mathbb{C} (не особо важно).

Определение 3.2 (Измеримая функция). $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. f – измерима, если

$$\forall c \in \mathbb{R}, x \underbrace{\{x : c < f(x)\}}_{\text{измеримое множество}} \in U$$

$$f : X \rightarrow \mathbb{C} \Rightarrow f = u + iv, u, v : X \rightarrow \mathbb{R}$$

f – измерима, если u, v – измеримы

Как же определяется интеграл? Пусть есть какой-то элемент σ -алгебры $e \in U$, $\chi_e(x) = \begin{cases} 1, x \in E \\ 0, x \notin e \end{cases}$. Множество простых функций определяется как

$$S = \{g(x) = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{e_k}, c_k \in \mathbb{C}, e_k \in U\}$$

$$g \in S, \int_X g(x) d\mu = \sum_{k=1}^n c_k \mu e_k.$$

$f(x)$ – измеримая, если $f(x) \geq e, x \in X$

Определение 3.3 (Произвольно измеримая функция).

$$\int_X f d\mu = \sup \left\{ \int_X g(x) d\mu : 0 \leq g(x) \leq f(x), x \in X, c_k \in \mathbb{R}, c_k > 0 \right\}$$

Определение 3.4 (Измеримая функция). f – измерима, если

$$f_+(x) = \max(f(x), 0) \wedge f_-(x) = \max(-f(x), 0) \Rightarrow f = f_+ - f_-$$

Если $\int_X f_+ d\mu$ – конечен или $\int_X f_- d\mu$ – конечен, то $\int_X f d\mu = \int_X f_+ d\mu - \int_X f_- d\mu$ Если f – измеримая, $f : X \rightarrow \mathbb{C} \Rightarrow f = u + iv$

$$\int_X f d\mu = \int_X u d\mu + i \int_X v d\mu$$

Определение 3.5 (Множество суммируемых функций).
 $L(X, \mu)$ – множество суммируемых функций =

$$\left\{ f_i : \int_X |f| d\mu < +\infty \right\}, |f| = f_+ + f_-$$

Прежде чем двигаться дальше, приведем примры других мер (кроме мер Лебега)

Пример 3.1. $E \subset \mathbb{R}^n$, E – измерима по Лебегу, λ – мера Лебега, $w(x) \geq 0, x \in E$, w – измерима по Лебегу.

$e \subset E$, e – измеримо по Лебегу. $\mu e = \int_e w(x) d\lambda$, $w(x)$ – плотность меры μ , $w(x)$ – её вес.

Вторая мера в каком-то смысле противоположная. Она сосредоточена на наборе точек и называется дискретной.

Пример 3.2. X – множество ($X \neq \emptyset$), $a \in X$

$$\sigma_n, e \subset X, \sigma_a(e) = \begin{cases} 1, a \in e \\ 0, a \notin e \end{cases}$$

$\forall e, e \subset X, e$ – измеримо

Пример 3.3 (Дискретная мера). X – бесконечное множество. $\{a_j\}_{j=1}^\infty, a_j \in X, a_j \neq a_k, j \neq k$
 $\{h_j\}_{j=1}^\infty, h_j > 0$

$$\mu - \sum_{j=1}^\infty h_j \delta_{a_j}, e \subset X \quad \mu E = \sum_{\{j: a_j \in E\}} h_j$$

План такой: хотим ввести норму на множестве интегрируемых функций. Для этого нам надо ввести некоторые неравенства.

3.2. Классические неравенства

Теорема 3.1 (Неравенство Юнга). $p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (q – сопряженный показатель)

$$\Rightarrow ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^p}{q}$$

Доказательство. Пусть b – фиксировано, $\varphi(x) = \frac{x^p}{p} - xb, x \in [0, +\infty)$. Хотим найти $\min_{x \in [0, +\infty)} \varphi(x)$. Для этого посмотрим, где производная обращается в 0. $\varphi'(x) = x^{p-1} - b, \varphi'(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 = b^{\frac{1}{p-1}} \Rightarrow \varphi(x) > \varphi(x_0) \forall x \neq x_0, x \geq 0$. Таким образом, x_0 – строгий локальный минимум.

$$\begin{aligned}\varphi(x_0) &= \frac{1}{p} b^{\frac{p}{p-1}} - b^{\frac{p}{p-1}} = b^{\frac{p}{p-1}} \left(\frac{1}{p} - 1 \right) = \frac{b^q}{q} \\ -\frac{1}{q} &= \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p} \Rightarrow q = \frac{p}{p-1} \\ \varphi(x) &\geq -\frac{b^q}{q} \forall x \in [0, +\infty) \text{ то есть ОК}\end{aligned}$$

$$\varphi(x_0) = \frac{1}{p} b^{\frac{p}{p-1}} - b^{\frac{p}{p-1}} = b^{\frac{p}{p-1}} \left(\frac{1}{p} - 1 \right) = \frac{b^q}{q}$$

□

Замечание 3.1. Равенство в неравенстве Юнга достигается только при $a = b^{\frac{1}{p-1}}$

Теорема 3.2 (Неравенство Гельдера). (X, U, μ) — пространство с мерой. f, g — измеримые, $p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow$

$$\int_X |fg| d\mu \leq \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_X |g|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \quad (*)$$

Если $p = q = 2$, то это "Неравенство Коши-Бунаковского-Шварца", или на молодёжном математическом сленге неравенство КБШ

Доказательство. Для начала отбросим какие-то простые случаи.

$A = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, B = \left(\int_X |g|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$. Если $A = 0 \Leftrightarrow |f| = 0$ почти всюду по $\mu \Leftrightarrow f(x) = 0$ почти всюду по μ (то есть $\mu\{x : f(x) \neq 0\} = 0$) На всякий случай поясним, почему функция равна 0 почти всюду по мере μ

$$\int_X |f| d\mu = 0 \Rightarrow e = \{x : f(x) = 0\}, m \in \mathbb{N}, e_m = \{x : |f(x)| > \frac{1}{m}\}$$

$$e = \bigcup_{m=1}^{\infty} e_m \quad \int_X |f| d\mu \geq \int_{e_m} |f| d\mu \geq \frac{1}{m} \mu e_m \Rightarrow \mu e_m = 0 \Rightarrow \mu E = 0$$

$$\Rightarrow f(x) \cdot g(x) = 0 \text{ п.в.} \quad 0 \leq 0 \quad (*)$$

Если $A = +\infty$, то $(*)$

пусть $0 < A < +\infty, 0 < R < +\infty$

Неравенство Гельдера однородное, то есть если мы f умножим на константу, то левая и правая часть умножится на неё же, аналогично с g . Иногда бывает удобно ввести нормировку.

$$f_1(x) = \frac{f(x)}{A}, g_1(x) = \frac{g(x)}{B}, \int_X |f_1(x)|^p d\mu = \frac{A^p}{A^p} = 1, \int_X |g_1(x)|^q d\mu = 1$$

Пусть x – фиксирован, $a = |f(x)|, b = |g(x)| \xrightarrow{\text{п.Юнга}}$

$$\begin{aligned} |f_1(x)| \cdot |g_1(x)| &\leq \frac{|f_1(x)|^p}{p} + \frac{|g_1(x)|^q}{q} \text{ проинтегрируем } X \text{ по } \mu \\ \Rightarrow \int_X |f_1| \cdot |g_1| d\mu &\leq \frac{1}{p} \int_X |f_1|^p d\mu + \frac{1}{q} \int_X |g_1|^q d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \end{aligned}$$

Умножаем на $AB \Rightarrow \int_X |fg| d\mu \leq AB$ □

Теорема 3.3 (Неравенство Минковского). $(X, U, \mu), f, g$ – измеримые, $1 \leq p < +\infty \Rightarrow$

$$\underbrace{\left(\int_X |f(x) + g(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}}_C \leq \underbrace{\left(\int_X |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}}_A + \underbrace{\left(\int_X |fg(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}}_B \quad (*)$$

Доказательство. Сначала разберём простые случаи. $p = 1, x$ – фиксирован. $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$ проинтегрируем по $X \Rightarrow (*)$ при $p = 1$. Теперь пусть $p > 1$. Если $A = +\infty$, или $B = +\infty$, или $C = 0$, то $(*)$.

Теперь же пусть $A < +\infty, B < +\infty, C > 0$. Доказательство будет в два этапа. На первом этапе получим гораздо более слабое утверждение, вообще не то, что требуется в теореме, но оно нам понадобится. Докажем, что $C < +\infty$.

$a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow |a+b| \leq |a|+|b| \leq 2 \max(|a|, |b|) \Rightarrow |a+b|^p \leq 2^p \max(|a|^p, |b|^p) \leq 2^p(|a|^p + |b|^p) \Rightarrow$ при фиксированном x

$$|f(x) + g(x)|^p \leq 2^p(|f(x)|^p + |g(x)|^p) \text{ проинтегрируем по } X$$

$\Rightarrow C^p \leq 2^p(A^p + B^p) \Rightarrow C < +\infty$. Первая часть доказательства закончена.

$$C^p = \int_X |f+g|^p d\mu = \int_X |f+g| \cdot |f+g|^{p-1} d\mu \leq \int_X |f| \cdot |f+g|^{p-1} d\mu + \int_X |g| \cdot |f+g|^{p-1} d\mu$$

$$\int_X |f| \cdot |f+g|^{p-1} d\mu \stackrel{\text{н. Гельдера}}{\leq} \left(\int_X |f+g| d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\underbrace{\int_X |f+g| d\mu}_A \right)^{(p-1)q} = AC$$

$$\begin{aligned} \int_X |g| \cdot |f+g|^{p-1} d\mu &\stackrel{\text{аналогично}}{\leq} BC^{\frac{p}{q}} \Rightarrow \\ C^p &\leq (A+B)C^{\frac{p}{q}}, \quad 0 < C < +\infty \Rightarrow \\ C^{p-\frac{p}{q}} = C &\Rightarrow C \leq A+B \text{ (это (*))} \end{aligned}$$

□

3.3. Пространство Лебега

Отсюда и до определения L^∞ очень аккуратно с \mathcal{L} и L читать. Тут точно есть путаница, но записи лекции нет, чтобы ее устранить.

Определение 3.6. (X, U, μ) – пространство с мерой. $L(X, \mu)$ – пространство суммируемых функций. $1 \leq p < +\infty$ $\mathcal{L}^p(X, \mu) = \{f : |f|^p \in L(X, \mu)\}$

$$f \in L^p(X, \mu), \|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

Проверим, что $\|f\|_p$ – это полунорма на $L^p(X, \mu)$. $c \in \mathbb{R}$ (или \mathbb{C}). $\|cf\|_p = |c| \|f\|_p$

$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ – неравенство Минковского

$\|f\| = 0 \Leftrightarrow \int_X |f(x)|^p d\mu = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ почти всюду по мере μ на X .

Пример 3.4. $L[0, 1], \lambda$ – мера Лебега на $[0, 1]$.

функция Дирихле $\varphi(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad \int_0^1 |\varphi(x)| d\lambda = 0.$

$N = \{f - \text{измерима} \wedge f(x) = 0 \text{ почти всюду на } X \text{ по } \mu\}$. $\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f \in N$ (не зависит от p). Рецепт приготовления пространства с нормой из полуфбриката. пространство с полунормой. N – подпространство в L^p , $L^p = L^p/N$ – факторпространство.

$g, f \in L^p, f \sim g \Leftrightarrow f - g \in N \Leftrightarrow f(x) = g(x) \text{ почти всюду по } \mu$. \bar{f} – класс эквивалентности, $\bar{f} = \{g : f \sim g\}$.

$\|\bar{f}\|_p := \|f\|$, то есть можно взять любую функцию из класса эквивалентности.

$$\|\bar{f}\|_p = 0 \Leftrightarrow \int_X |f|^p d\mu = 0 \Leftrightarrow f \in N \Rightarrow \bar{f} = N = \bar{0} \Rightarrow$$

$\|\bar{f}\|_p$ – норма на L^p . Говорят, что $f \in L^p$, возьмём функцию из L^p , но имеют в виду, что возьмут класс эквивалентности, а из него возьмут функцию

Одна из главных целей – доказать, что эти пространства Банаховы. Сначала определим $L^\infty(X, \mu)$ (существенно ограниченные функции).

Определение 3.7 ($L^\infty(X, \mu)$). $f \in L^\infty(X, \mu)$, если

$$\exists c > 0 |f(x)| \leq c \text{ почти всюду на } X \text{ по } \mu (\mu\{x : |f(x)| > c\} = 0)$$

Возьмём точную нижнюю грань этой константы. $\|f\|_\infty = \inf\{c \geq 0 : \mu\{x : |f(x)| > c\} = 0\}$ (существующий \sup , или на подлом англосаксонском $\text{ess sup}_X f$)

Свойство 3.1. $f \in \mathcal{L}^\infty(X, \mu) \Rightarrow \mu\{f(x) > \|f\|_\infty\} = 0$

Доказательство. $e = \{x : |f(x)| > \|f\|_\infty\}, m \in \mathbb{N}$.

$$e_m = \{x : |f(x)| > \|f\|_\infty + \frac{1}{m}\} \Rightarrow \mu e_m = 0 \text{ по определению } \text{ess sup}_X f \\ \Rightarrow e = \bigcup_{m=1}^\infty e_m \Rightarrow \mu e = 0 \quad \square$$

$\|f\|_\infty$ – полунорма на \mathcal{L}^∞

$$\lambda \neq 0 \quad |\lambda f(x)| \leq |\lambda| \cdot c \Leftrightarrow |f(x)| \leq c \Rightarrow \|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \|f\|_\infty,$$

$$f, g \in \mathcal{L}^\infty, x \in X \Rightarrow |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \text{ для п.в. } x \text{ на } X \\ \Rightarrow \|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

$\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \mu\{x : |f(x)| > 0\} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ п.в. на $X \Leftrightarrow f \in N = \{f - \text{измерима, } f(x) = 0 \text{ п.в. на } X\}$

$$L^\infty = \mathcal{L}^\infty / N$$

Все, что Н.А. доказал для меры Лебега, верно и для других мер. Те доказательства и так были не особо веселые, чтобы их повторять.

Теорема 3.4 (Фату). (X, U, μ) , $\{g_n\}_{n=1}^\infty, g_n$ — измеримые, $g_n(x) \geq 0$

$$\begin{aligned} g_n(x) \xrightarrow{\text{п.в.}} g(x) \quad \int_X g_n(x) d\mu \leq C \text{ не зависит от } n \\ \Rightarrow \int_X g(x) d\mu \leq C \end{aligned}$$

Первая существенная теорема, которая нам встретилась.

Теорема 3.5 (полнота пространства Лебега). $(X, U, \mu), 1 \leq p \leq +\infty \Rightarrow L^p(X, \mu)$ — банаховы.

Доказательство. при $1 \leq p < +\infty$ воспользуемся критерием полноты (если сходится ряд из норм, то сам ряд сходится)

$$\begin{aligned} \{f_n\}_{n=1}^\infty, f_n \in L^p, \sum_{n=1}^\infty \|f_n\|_p \leq C < +\infty \\ S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x) \end{aligned}$$

Докажем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n(x) - f(x)\|_p = 0$. Существует ли $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$ почти всюду на X ?

Рассмотрим $\sigma_n(x) = \sum_{k=1}^n |f_k(x)| \Rightarrow \sigma_n(x)$ возрастает $\Rightarrow \exists \sigma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x)$. Возможно, $\sigma(x) = +\infty$ для некоторых x .

$$\|\sigma_n\|_p \leq \sum_{k=1}^n \|f_k\|_p \leq C$$

$$\int_X |\sigma_n(x)|^p d\mu \leq C^p \wedge \sigma_n(x)^p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sigma(x)^p \forall x \in X \stackrel{\text{т. Фату}}{\Rightarrow}$$

$\int_X \sigma(x)^p d\mu \leq c^p$ Самое главное, что мы из этого заключаем: $\sigma(x) < +\infty$ п.в. на X по μ .

$$x \in X \quad \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| < +\infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) - \text{сходится}$$

$$f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \text{ определена п.в. на } X, \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p < +\infty, \varepsilon > 0$$

Применим критерий Коши: $\exists N \in \mathbb{N} \quad m > n > N \Rightarrow \sum_{k=n+1}^m \|f_k\|_p < \varepsilon$
 $\varepsilon \Rightarrow \|S_m(x) - S_n(x)\|_p \leq \sum_{k=n+1}^m \|f_k\|_p < \varepsilon$

$$\int_x |S_m(x) - S_n(x)|^p d\mu < \varepsilon^p (n \text{ фиксировано}) \wedge |S_m(x) - S_n(x)|^m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} |f(x) - S_n(x)|$$

$$\stackrel{\text{Фатты}}{\Rightarrow} \int_X |f - S_n|^p d\mu \leq \varepsilon^p \Rightarrow \|f - S_n\| \leq \varepsilon$$

$f - S_n \in L_p, S_n \in L^p \Rightarrow f = (f - S_n) + S_n \Rightarrow f \in L_p$ и $\|f - S_n\|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$
 Теперь осталось рассмотреть случай $p = \infty$. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальная, $f_n \in L^{\infty}$,

$$|f_n(x)| \leq \|f_n\|_{\infty} \quad x \in X \setminus e_n, \mu e_n = 0 \quad n \in \mathbb{N}$$

$e = \cup_{n=1}^{\infty} e_n, X_1 = X \setminus e \Rightarrow f_n \in m(X_1)$ – ограниченная функция. $m(X_1)$ – полное $\Rightarrow \{f_n\}$ – фундаментальна в $m(X_1) \Rightarrow \exists f \in m(X_1) \quad \sup_{x \in X_1} |f(x) - f_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Положим $f(x) = 0$ если $x \in e \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L^{\infty}} = 0 \quad \square$

3.4. Пространства l_n^p, l^p

$n \in \mathbb{N}, 1 \leq p < +\infty$.

Определение 3.8.

$$l_n^p = \left\{ \mathbb{R}^n, x = (x_1, \dots, x_n), x_j \in \mathbb{R}, \|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\}$$

Рассмотрим $X = \{1, 2, \dots, n\}$. Возьмём дискретную меру $\mu(j) = 1$ при $1 \leq j \leq n$, $l_n^p = L^p(X, \mu)$. $f \in L^p(X, \mu)$, $f(j) = x_j \Rightarrow l_n^p$ – полное.

Посмотрим, что будет обозначать сходимость этой нормы.

Теорема 3.6. $\{x^{(m)}\}_{m=1}^\infty$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $x^{(m)} = (x_1^{(m)}, \dots, x_n^{(m)})$, $x^{(m)} \in l_n^p$, $q \leq p \leq +\infty$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|x - x^{(m)}\|_p = 0 \Leftrightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} x_j^{(m)} = x_j, 1 \leq j \leq n$$

Доказательство. \Rightarrow

Пусть j – фиксировано, $\lim_{m \rightarrow \infty} x^{(m)} = x$ в l_n^p .

При $p < +\infty$ $\|x - x^{(m)}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - x_i^{(m)}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq |x_j - x_j^{(m)}|$. Так как $\|x - x^{(m)}\|_p \rightarrow 0 \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} |x_j - x_j^{(m)}| = 0$.

При $p = \infty$ $\|x - x^{(m)}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - x_i^{(m)}| \geq |x_j - x_j^{(m)}|$. Так как $\|x - x^{(m)}\|_\infty \rightarrow 0 \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} |x_j - x_j^{(m)}| = 0$

Теперь \Leftarrow

$$1 \leq j \leq n \quad \lim_{m \rightarrow \infty} |x_j - x_j^{(m)}| = 0 \Rightarrow \left(\sum_{j=1}^n \|x_j - x_j^{(m)}\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{и} \Rightarrow \max_{1 \leq j \leq n} |x_j - x_j^{(m)}| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

□

Определение 3.9. $l_p = \{x : \{x_j\}_{j=1}^\infty, x_j \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \wedge \sum_{j=1}^\infty |x_j|^p < +\infty\}$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^\infty |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$X = \mathbb{N}, \mu(j) = 1, \mu = \sum_{n=1}^\infty \sigma_n$$

$$l^p = L^p(\mathbb{N}, \mu) \Rightarrow \text{полное} \quad 1 \leq p < +\infty$$

Замечание 3.2. $\{x^{(m)}\}_{m=1}^\infty$, $x^{(m)} \in l^p$, $\lim_{m \rightarrow \infty} \|x^{(m)} - x\|_p = 0 \Rightarrow \forall j \lim_{m \rightarrow \infty} x_j^{(m)} = x_j$ Например, \nrightarrow при $e_m = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots)$

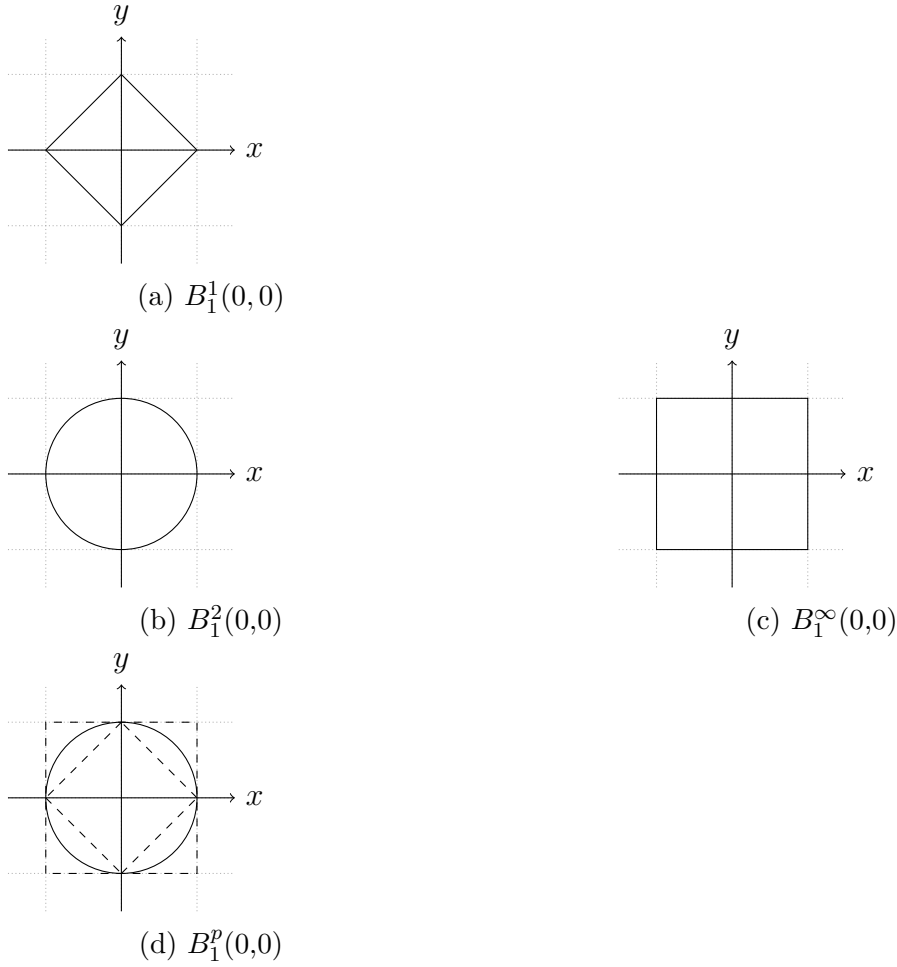


Рис. 3.1: Примеры единичных шаров в l_2^p

Пусть j фиксировано. $\lim_{m \rightarrow \infty} (e_m)_j = 0$ $\|e_m - \mathbb{0}\|_p = 1 \quad \forall p, 1 \leq p \leq +\infty$. В качестве упражнения доказать, что l^p – полное непосредственно.

На рисунке 3.1 приведены примеры единичных шаров в $l_2^p = \{(x, y) : (|x|^p + |y|^p)^{\frac{1}{p}}\}, 1 \leq p < +\infty$. Для l_2^∞ норма определяется $\|(x, y)\|_\infty = \max(|x|, |y|)$

3.5. Неполное нормированное пространство

Определение 3.10 (Финитное линейное пространство).

$$F = \{x = \{x_j\}_{j=1}^{\infty}, x_j \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \exists N(x) \in \mathbb{N} : n > N(x) \Rightarrow x_n = 0\}$$

$F \subset l^p \quad 1 \leq p \leq +\infty$. $(F, \|\cdot\|_p)$ – не полное, F – не замкнуто. Будем брать геометрическую прогрессию и обрывать ее на некотором члене.

$$x^{(m)} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^m}, 0, 0, 0, \dots \right\} \in F$$

$$X = \left\{ \frac{1}{2^k} \right\}_{k=1}^{\infty} \in l^p$$

$$1 \leq p < +\infty \quad \|x - x^{(m)}\|_p = \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^{kp}} \right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

Следовательно, F – не замкнуто.

В качестве упражнения проверить, что \overline{F} в l^p =? при $p < +\infty$ и при $p = \infty$.

Теорема 3.7. $C[a, b], \|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < +\infty$

$(C[a, b], \|\cdot\|)$ – не полное

Доказательство. При $p = 1$, $[a, b] = [-1, 1]$, $f \in C[a, b]$, $\int_a^b |f(x)|^p dx = 0 \Leftrightarrow f(x) \equiv 0$. Предъявим фундаментальную последовательность, предел которой не будет непрерывной функцией.

$$f_n = \begin{cases} 0, & -1 \leq x \leq 0 \\ nx, & x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 1, & x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}, f \in C[-1, 1]$$

f_n – фундаментальная в $(C[-1, 1], p = 1)$

Пусть $m > n$.

$$\int_{-1}^1 |f_m(x) - f_n(x)| dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right) \leq \frac{1}{2n} \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$$

Пусть $\exists f \in C[-1, 1] : \|f - f_n\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$$m \geq n \quad \int_{\frac{1}{n}}^1 \underbrace{|f(x) - 1|}_{=0} dx \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

$$\int_{\frac{1}{n}}^1 |f(x) - 1| dx \leq \int_0^1 |f(x) - f_m(x)| dx \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow f(x) = 1, x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \forall n$$

$$\begin{cases} \Rightarrow f(x) = 1, x \in (0, 1], f \text{ непрерывна}, f(0) = 1 \\ \text{аналогично } f(x) \equiv 0 \text{ на } [-1, 0] \end{cases} \Rightarrow \text{противоречие}$$

□

Глава 4

Пополнение метрического пространства

26.09.23

Мы привели несколько примеров нормированных пространств, не являющихся полными. Приведём еще один пример.

Определение 4.1.

$$P = \left\{ p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, a_k \in \mathbb{R}, n \geq 0 \right\}$$

P (подпространство в алгебраическом смысле) $\subset C[a, b]$, $\|p\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |p(x)|$, $e^x \notin P$, $p_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$, $\Rightarrow p_n \xrightarrow{[a, b], n \rightarrow \infty} e^x$ это не многочлен, потому что если сколько-то раз продифференцировать многочлен, он станет тождественным 0 $\Rightarrow \overline{P} \setminus P \ni e^x \Rightarrow P$ – не замкнуто $\Rightarrow P$ – не полное.

$$\overline{P} = C[a, b]$$

Теорема 4.1 (Вейерштрасса, 1885). $f \in C[a, b], \forall \varepsilon > 0 \exists p \in P$ т.ч. $\|f - p\| < \varepsilon$ (любую функцию на отрезке можно приблизить многочленами)

$$p_n \xrightarrow{G} f \Rightarrow f \text{ аналитическая в } G$$

4.1. Пополнение метрического пространства

Несколько простых свойств метрики, и все следуют из неравенства треугольника

Теорема 4.2 (Свойства метрики). (X, ρ) – метрическое

1. $x, y, z, u \in X \Rightarrow |\rho(x, u) - \rho(y, z)| \leq \rho(x, y) + \rho(u, z)$
2. $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow \rho(x, y)$ – непрерывная функция
3. $A \subset X, A$ – подмножество, $\rho(x, A) = \inf_{y \in A} \rho(x, y) \Rightarrow \rho(x, A)$ – непрерывная функция от x
4. $A \subset X, A = \overline{A}, x_0 \notin A \Rightarrow \rho(x_0, A) > 0$

Доказательство. 1. $\rho(x, u) \leq \rho(x, y) + \rho(y, u) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) + \rho(z, u) \Rightarrow \rho(x, u) - \rho(y, z) \leq \rho(x, y) + \rho(z, u)$ Аналогично $\rho(y, z) - \rho(x, u) \leq \dots$ из всего $\Rightarrow 1)$

2. Докажем непрерывность с помощью последовательности.
 $\rho(x, y)$ – непрерывная?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x) = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(y_n, y)$$

$$|\rho(x, y) - \rho(x_n, y_n)| \stackrel{(1)}{\leq} \rho(x, x_n) + \rho(y, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n) = \rho(x, y)$$

3. $A \subset X, x, z \in X, |\rho(x, A) - \rho(z, A)| \leq ?$
 Пусть $y \in A$

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &\leq \rho(x, z) + \rho(z, y) \Rightarrow \rho(x, A) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) \forall y \in A \\ &\Rightarrow \rho(x, A) \leq \rho(x, z) + \inf_{y \in A} \rho(z, y) = \rho(x, z) + \rho(z, A) \Rightarrow \\ &\rho(x, A) - \rho(z, A) \leq \rho(x, z) \end{aligned}$$

Но нам нужен модуль. Можем сказать, что x и z ничем не отличаются, аналогично $\rho(z, A) - \rho(x, A) \leq \rho(x, z) \Rightarrow 3$

4.

$$x_0 \notin A \Rightarrow x_0 \in X \setminus A \text{ открытое}$$

ГЛАВА 4. ПОПОЛНЕНИЕ МЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА 40

$$\Rightarrow \exists \delta > 0 \quad B_\delta(x_0) \subset X \setminus A \Rightarrow \rho(x_0, A) \geq \delta$$

□

Перед определением пополнения нам потребуется несколько определений, связанных с отображениями в метрических пространствах.

$(X, \rho), (Y, d)$ – метрические пространства. $T : X \rightarrow Y$.

Определение 4.2 (Изометрическое вложение).

$$d(T_x, T_z) = \rho(x, z) \quad \forall x, z \in X$$

Обозначение: $X \hookrightarrow Y$

Определение 4.3 (Изометрия). T – изометрическое вложение, $T(X) = Y$

Определение 4.4 (Изометричность пространств). $(X, \rho), (Y, d)$ изометричны, если $\exists T : X \rightarrow Y, T$ – изометрия

Свойство 4.1. T – изометрическое вложение $\Rightarrow T$ – инъективное, непрерывное

Доказательство. $x, z \in X, T : X \rightarrow Y$, пусть $T_x = T_z \Rightarrow d(T_x, T_z) = 0$. Значит, исходное расстояние тоже 0 по свойству метрики. $d(x, z) = 0 \Rightarrow x = z$

Инъективность проверили, теперь непрерывность, это еще проще.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x, x_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} d(T_{x_n}, T_x) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} T_{x_n} = T_x$$

□

Свойство 4.2. Если T – изометрия, то $\exists T^{-1}$ – изометрия.

Свойство 4.3. "Изометричность" – отношение эквивалентности на множестве метрических пространств

И наконец

Определение 4.5 (Пополнение м. пространства). (X, ρ) – метрическое пространство. (Z, d) – полное метрическое пространство. (Z, d) – пополнение (X, ρ) , если существует $T : X \rightarrow Z$

1. T – изометрическое вложение
2. $\overline{T(X)} = Z$

Замечание 4.1. Не обязательно искать пространство, удовлетворяющее и второму свойству. Достаточно найти такое, которое удовлетворяет первому. (X, ρ) – метрическое пространство, (U, d) – полное метрическое пространство. Пусть $\exists T : X \rightarrow U$ – изометрическое вложение. Если 2 свойство не выполняется, то легко такое Z построить. Возьмём замыкание образа. $Z = \overline{T(X)} \Rightarrow (Z, d)$ – пополнение X .

Теперь обещанная теорема. Возьмём любое метрическое пространство и покажем, что у него есть пополнение.

Теорема 4.3 (О пополнении метрического пространства). (X, ρ) – метрическое $\Rightarrow \exists$ пополнение (Z, d)

Доказательство. Есть классическое доказательство с рассмотрением всех фундаментальных последовательностей, рассмотрением факторпространства, муторным разбором случаев. Мы пойдем другим путём. Будет короткое, но **фантастически** непонятное доказательство в том смысле, что непонятно, как его придумать.

Мы собираемся использовать $m(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R}, \sup_{x \in X} |f(x)| < +\infty\}$

$$\|f\|_{m(X)} = \|f\|_{\infty} = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

$m(X)$ – полное пространство.

Каждой точке мы сопоставим функцию. Вот такая идея! $\varphi : X \rightarrow m(X)$. Оно же будет изометрическим вложением, то есть будет сохранять расстояния.

Сначала будет маленькое облегчающее предположение про X , от которого мы потом откажемся. Пусть X – ограниченное, то есть $\exists M > 0$ т.ч. $\forall x, y \in X \rho(x, y) \leq M$. Единственная цель предположения – формула для φ будет чуть проще. Вообще, можно было бы обойтись и без него.

$t \in X, t$ – фиксирован, $f_t(x) = \rho(x, t)$. При фиксированном t – это

функция на X . Именно сюда наше отображение будет отображать t .
Одной точке – целая функция, понятно?

$$\begin{aligned}\varphi(t) &:= f_t(x) \text{ т.е. } \varphi : t \rightarrow f_t(x) \\ |f_t(x)| &\leq M \Rightarrow f_t \in m(X)\end{aligned}$$

Самое главное. Проверим, что отображение сохраняет расстояния.
Это очень легко. Возьмём 2 точки.

$$\text{Пусть } t, s \in X, \quad \|f_t - f_s\|_\infty = \sup_{x \in X} |\rho(x, t) - \rho(x, s)|$$

$$|\rho(x, t) - \rho(x, s)| \leq \rho(t, s), \quad \text{Пусть } x = t \Rightarrow |\rho(t, t) - \rho(t, s)| = \rho(t, s)$$

$$\Rightarrow \|\varphi(t) - \varphi(s)\|_\infty = \rho(t, s) \Rightarrow \varphi - \text{изометрическое вложение}$$

Посмотрим, что будет, если откажемся от этого облегчающего предположения. Надо будет чуть исправить отображение φ . X – любое метрическое пространство. $a \in X$ – фиксированная точка.

$$t \in X, f_t(x) = \rho(x, t) - \rho(x, a) \Rightarrow |f_t(x)| \leq \rho(a, t) \Rightarrow f_t \in m(X)$$

Раньше мы могли так брать и не вылетать из пространства из-за ограниченности. Вычтем эту штуку, чтобы попасть, куда надо.

$$t, s \in X \Rightarrow f_t(x) - f_s(x) = \rho(x, t) - \rho(x, s) \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \|f_t - f_s\|_\infty = \rho(t, s)$$

$$\text{Пополнение } X: \overline{\varphi(X)}^{\|\cdot\|_\infty} = Z, (Z, \|\cdot\|_\infty)$$

□

Таким образом, изучение метрических пространств можно свести к изучению подмножества пространства непрерывных функций.

Замечание 4.2. Забегая далеко вперёд. $(X, \|\cdot\|)$ – нормированное, X^* – множество непрерывных линейных функционалов на X , X^* – полное (ВСЕГДА).

Мы построим каноническое вложение $\pi : X \rightarrow \underbrace{(X^*)^*}_{\text{полное}}, \overline{\varphi(x)}^{X^{**}}$ –
пополнение X .

4.2. Теорема о вложенных шарах

Когда-то в анализе была теорема Кантора о том, что если есть последовательность вложенных друг в друга отрезков, то их пересечение не пусто. Мы докажем похожее утверждение для метрических пространств. Оказывается, то утверждение было связано с полнотой вещественной прямой \mathbb{R} . (X, ρ) – метрическое пространство, $r > 0, x \in X$
Введём стандартное обозначение замкнутого шара.

$$D_r(x) = \{y \in X : \rho(x, y) \leq r\}$$

Теорема 4.4 (О вложенных шарах). (X, ρ) – метрическое пространство. X – полное ($| \Leftrightarrow (\forall \{D_n\}_{n=1}^{\infty}, D_n = D_{r_n}(x_n), D_{n+1} \subset D_n, \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0 \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{+\infty} D_n \neq \emptyset)$). По сравнению с теоремой Кантора у нас есть дополнительное предположение о стремлении к нулю, которое здесь важно, а на прямой было как данность.

Доказательство. \Rightarrow X – полное

$$\{D_n\}_{n=1}^{\infty}, D_n = D_{r_n}(x_n), D_{n+1} \subset D_n, \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$$

Надо проверить, что центры шаров образуют фундаментальную последовательность, то есть что $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – фундаментальная.

Пусть $\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad r_n < \varepsilon$ при $n \geq N$.

$$(n > N \wedge m > N) \Rightarrow (x_n \in D_n \wedge x_m \in D_n) \Rightarrow \rho(x_n, x_m) \leq \\ \leq \rho(x_n, x_N) + \rho(x_m, x_N) \leq 2\varepsilon$$

$$X \text{ – полное} \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

любое фиксированное $m \in \mathbb{N} \quad x_n \in D_m \forall n \geq m, D_m$ – замкнутое

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty, n \geq m} x_n = x \in D_m$$

$$\Rightarrow x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} D_m$$

\Leftarrow

Ничего кроме определения для доказательства полноты у нас нет.

Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – фундаментальная. Возьмём достаточно быстро убывающую последовательность $\varepsilon_k = \frac{1}{2^k}$. Существует $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}, \rho(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < \frac{1}{2^{k+1}}$.

$$D_k = D_{\varepsilon_k}(x_{n_k})$$

$$\begin{cases} y \in D_{k+1} \Rightarrow \rho(y, x_{n_{k+1}}) \leq \frac{1}{2^{k+1}} \\ \rho(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < \frac{1}{2^{k+1}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\rho(y, x_{n_k}) \leq \rho(y, x_{n_{k+1}}) + \rho(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) < \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^k} \\ \Rightarrow y \in D_k \Rightarrow D_{k+1} \subset D_k$$

ГЛАВА 4. ПОПОЛНЕНИЕ МЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА 4

Мы взяли произвольный элемент из D_{k+1} и показали, что он принадлежит D_k , то есть показали вложенность элементов последовательности.

$$\Rightarrow \exists x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} D_k \quad \rho(x, x_{n_k}) \leq \frac{1}{2^k} \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$$

По свойству фундаментальных последовательностей из первой лекции $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ \square

Замечание 4.3. В условиях теоремы пересечение вложенных шаров $\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$ состоит из одной точки.

Доказательство. Пусть $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n, \Rightarrow \rho(x, x_n) \in r_n, \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. А мы знаем, что предел в метрическом пространстве единственный. \square

Замечание 4.4. Условие, что $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$ в теореме существенно.

Пример 4.1 (Замкнутые множества). $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}, F_n$ – замкнутое, $F_{n+1} \subset F_n, F_n \subset \mathbb{R}, \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset, F_n = [n, +\infty)$

Пример 4.2 (По теореме).

$$X[1, +\infty) \quad \rho(x, y) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{x+y}, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

Проверим, что ρ – метрика. x, y, z

$$\rho(x, y) + \rho(y, z) = 1 + \frac{1}{x+y} + 1 + \frac{1}{y+z} > 1 + 1 > 1 + \frac{1}{x+z} = \rho(x, z)$$

Проверяем полноту. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальная, $\varepsilon = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$$\exists N \in \mathbb{N} : (n \geq N \wedge m \geq N) \rho(x_n, x_m) < \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\rho(x_n, x_N) < \frac{1}{2} \wedge \rho(x_m, x_N) < \frac{1}{2} \right) \Rightarrow$$

$$x_N = x_{N+1} = x_{N+2} = \dots$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = X_N \Rightarrow (X, \rho) - \text{полное}$$

Полноту проверили.

$$r_n = 1 + \frac{1}{2n}, x_n = n; D_n = D_{r_n}(n), h \in D_n. \text{ Пусть } x \neq n, x \in D_n \Rightarrow \rho(x, x_n) = 1 + \frac{1}{x+n} \leq 1 + \frac{1}{2n}$$

Замечание 4.5 (Домашнее задание). Если $(X, \|\cdot\|)$ – банахово, то $D_{n+1} \subset D_n \{D_n\}_{n=1}^{\infty} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n \neq \emptyset$ (требование $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$ лишнее)

4.3. Сепарабельные пространства

(X, ρ) – метрическое пространство,

Определение 4.6 (A плотно в C). $A \subset X, C \subset X$. A плотно в C , если $C \subset \overline{A} \Leftrightarrow$

$$\forall x \in C \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A \rho(x, A) < \varepsilon \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 C \subset \bigcup_{a \in A} B_\varepsilon(a)$$

Любой элемент C можно сколь угодно хорошо приблизить элементами из A .

Определение 4.7 (A всюду плотно в C). A – всюду плотно в X , если $\overline{A} = X$

Чем же полезно это свойство? Если хотят доказать свойство для X , то часто доказывают сначала для всюду плотного подмножества.

Определение 4.8 (Сепарабельное пространство). (X, ρ) – **сепарабельное**, если $\exists E \subset X, E = \{x_n\}_{n=1}^\infty, \overline{E} = X$

Теорема 4.5. $n \in \mathbb{N}, q \leq p \leq +\infty$,

$$l_n^p \text{ – сепарабельное}$$

Доказательство.

$$l_n^p = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p) = \{x = (x_1, \dots, x_n), x_j \in \mathbb{R}, \|x\|_p\} \\ E = \mathbb{Q}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n), x_j \in \mathbb{Q}\}$$

Если $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_p), \tilde{\mathbb{Q}} = \{x + iy, x, y \in \mathbb{Q}\}, E = \tilde{\mathbb{Q}}^n$

□

Теорема 4.6. F – финитные последовательности, $1 \leq p \leq +\infty$

$$(F, \|\cdot\|_p) \text{ – сепарабельно}$$

Доказательство. $E = \bigcup_{n=1}^\infty \mathbb{Q}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_{N(x)}, 0, 0, \dots), x_j \in \mathbb{Q}\}$. Попросту говоря, все финитные последовательности, координаты которых рациональны. □

Теорема 4.7. $l^p, 1 \leq p < +\infty, C_0$ – сепарабельные

Доказательство. На прошлой лекции мы доказали, что

$$\begin{aligned} (F, \|\cdot\|_p), \overline{F}^{\|\cdot\|_p} = l^p \text{ при } 1 \leq p < +\infty \\ \begin{cases} E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}^n - \text{всюду плотно в } F \\ F - \text{всюду плотное в } l^p \end{cases} \Rightarrow \\ E \text{ всюду плотно в } l^p, 1 \leq p < +\infty \end{aligned}$$

Почему любой элемент из l^p может быть приближен финитной последовательностью? Мы ее просто отрезаем. \square

Ответ на упражнение для читателя, которое было на прошлой лекции: F – подпространство в алгебраическом смысле, $F \subset l^\infty, \overline{F}^{\|\cdot\|_\infty} = C_0$

$$x_0 \in C_0 \Leftrightarrow x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

берем первые m координат и дополняем их нулями

$$\begin{aligned} x^{(m)} = (x_1, \dots, x_m, 0, 0, \dots, 0, \dots) \Rightarrow x^{(m)} \in F \\ \|x - x^{(m)}\|_\infty = \sup_{k > m} |x_k| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Остаётся вопрос, почему C_0 – замкнутое множество. Можно в лоб, а можно по-учёному рассудить.

$$\begin{aligned} \text{пусть } \{y^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}, y^{(m)} \in C_0, y^{(m)} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} y \text{ в } C_0 \\ \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} \|y - y^{(m)}\|_\infty = 0 \quad y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0 ??? \end{aligned}$$

А это равномерная сходимостъ на множестве натуральных чисел, то есть это тот случай, когда можно менять местами пределы.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n^{(m)}}_{=0} = 0$$

Упражнение: C – сепарабельное, $C \subset l^\infty$

Теорема 4.8. l^∞ – не сепарабельное

Какой бы шарик из X мы бы не предъявили, там всегда будет элемент всюду плотного множества.

Доказательство.

$$A \subset \mathbb{N} \quad X_n^A = \begin{cases} 1, n \in A \\ 0, n \notin A \end{cases}$$

Мощность $\{A, A \subset \mathbb{N}\}$ – континуум ($>$ счётное). Это и будет центр пересекающихся шариков. Посмотрим, каким будет расстояние между двумя разными точками.

$$A \subset \mathbb{N}, C \subset \mathbb{N}, A \neq C$$

$$X_n^A - X_n^C = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases} \Rightarrow \|x^A - x^C\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |X_n^A - X_n^C| = 1$$

То есть если 2 множества не равны, то расстояние между ними – единица.

$$B_{\frac{1}{2}}(x^A) \cap B_{\frac{1}{2}}(x^C) = \emptyset$$

Мы предъявили несчётный набор дизъюнктивных шариков. E – всюду плотно в $l^\infty \Rightarrow \forall A \subset \mathbb{N} \exists e_A \in B_{\frac{1}{2}}(x^A)$

$$A \neq C \Rightarrow e_A \neq e_C, \quad \underbrace{\{e_A\}_{A \subset \mathbb{N}}}_{\text{несчётно}} \subset E \Rightarrow E \text{ несчётно}$$

То, что у всех шариков одинаковый радиус – это просто приятный бонус. \square

Теорема 4.9. (X, ρ) – сепарабельное, $Y \subset X \Rightarrow (Y, \rho)$ – сепарабельное.

Доказательство. $\exists E = \{x_n\}_{n=1}^\infty$ – всюду плотно в X , $x_0 \in X$

$$\rho(x_n, Y) = \inf_{y \in Y} \rho(x_n, y) \Rightarrow$$

$$\exists \{y_{n,k}\}_{k=1}^\infty \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_{n,k}) = \rho(x_n, Y)$$

$$y_{n,k} \in Y, F = \{y_{n,k}\}_{n,k} \text{ – счётное, } F \subset Y$$

Проверим, что F – всюду плотно в Y . Пусть $y \in Y, \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists x_n : \rho(y, x_n) < \varepsilon$. Из этого неравенства мы делаем вывод, что $\rho(x_n, Y) < \varepsilon$. Значит, $\exists k : \rho(x_n, y_{n,k}) < \varepsilon \Rightarrow$

$$\rho(y, y_{n,k}) \leq \rho(y, x_n) + \rho(x_n, y_{n,k}) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

\square

Следствие 4.1. X – бесконечное множество $\Rightarrow m(X)$ – не сепарабельное.

Доказательство. Можно слово в слово повторить доказательство для l^∞ , но мы воспользуемся последними доказанными теоремами.

$$\begin{aligned} & \exists \{a_j\}_{j=1}^\infty, a_j \in X, a_j \neq a_i \text{ при } i \neq j \\ Y = \{f \in m(X), f(x) = 0 \text{ если } x \neq a_j\} \sup_{j \in \mathbb{N}} |f(a_j)| < +\infty \\ Y \text{ изометрично } l^\infty, f \in Y, T(f) = \{f(a_j)\}_{j=1}^\infty \in l^\infty \\ Y \text{ – не сепарабельно} \Rightarrow \text{и по последней теореме} \\ m(X) \text{ – не сепарабельно} \end{aligned}$$

□

Теорема 4.10.

$C[a, b]$ – сепарабельно

1 часть.

$$\begin{aligned} L = \{ \text{ломанные} \} \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \quad \{y_k\}_{k=0}^n, y_k \in \mathbb{R} \\ L(x) \text{ – ломанные} \\ L(x_k) = y_k, k = 0, 1, \dots, n \quad l(x) \text{ линейная на } [x_k, x_{k+1}] \end{aligned}$$

Отметим, что L – всюду плотное множество в пространстве непрерывных функций. Это связано с равномерной непрерывностью. Никаких надежд на то, что оно будет счётным нет.

$$\begin{aligned} \text{пусть } f \in C[a, b], \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : |x - y| < \delta \\ \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \\ \exists \{x_k\}_{k=0}^n \text{ – разбиение} \quad x_{k+1} - x_k < \delta \\ y_k := f(x_k) \quad L(x) \text{ – ломаная} \\ \Rightarrow |f(x) - L(x)| < \varepsilon \Rightarrow \|f - L\|_\infty \leq \varepsilon \Rightarrow \overline{\mathcal{L}} = C[a, b] \end{aligned}$$

как сделать так, чтобы множество ломаных было счётным? возьмём в качестве вершин элементы \mathbb{Q}

$$\begin{aligned} E = \{L \in \mathcal{L}, x_k, y_k \in \mathbb{Q}\} \text{ – счетное множество} \\ \begin{cases} \mathcal{L} \subset \overline{E} \\ \overline{\mathcal{L}} = C[a, b] \end{cases} \Rightarrow E \text{ – всюду плотно, т.е. } \overline{E} = C[a, b] \end{aligned}$$

□

2 часть. по т. Вейерштрасса замыкание многочленов – тоже пространство непрерывных функций.

$$P = \{p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k\} \quad \overline{P} = C[a, b]$$

$$E = \{p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, a_k \in \mathbb{Q}\}$$

$$\begin{cases} P \subset \overline{E} \\ \overline{P} = C[a, b] \end{cases} \Rightarrow \overline{E} = C[a, b]$$

□

4.4. Нигде не плотные множества

Определение 4.9. (X, ρ) – метрическое пространство. $A \subset X$, A – **нигде не плотно** в X , если

$$\forall B_r(x) \text{ при } r > 0, x \in X \quad B_r(x) \not\subset \overline{A} \Leftrightarrow \text{Int}(\overline{A}) = \emptyset \Leftrightarrow$$

Если мы рассмотрим замыкание, никакого шарика там не будет. Иначе: если мы рассмотрим внутренность замыкания, она будет пустой.

$$\begin{aligned} \forall r > 0, x \in X \quad B_r(x) \ni B_{r_1}(x_1) \subset B_r(x), B_{r_1}(x_1) \cap A = \emptyset \\ \Leftrightarrow \forall r > 0, x \in X \quad D_r(x) \ni D_{r_1}(x_1) \subset D_r(X), D_{r_1}(x_1) \cap A = \emptyset \end{aligned}$$

Скоро докажем связь между нигде не плотными множествами и полными пространствами. Но сперва определение, которое не будет часто встречаться, но сам факт – полезный.

Определение 4.10 (множество первой категории). $M \subset X, (X, \rho)$. M – **множество первой категории**, если

$$M = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j, E_j \text{ нигде не плотно в } X$$

M – **множество второй категории**, если M нельзя представить в виде объединения счетного числа нигде не плотных множеств.

Теорема 4.11 (Бэр, о категориях). (X, ρ) – полное $\Rightarrow X$ – множество второй категории.

Доказательство. Можно было бы даже от противного. Но мы возьмём семейство $\{M_j\}_{j=1}^{\infty}$, M_j – нигде не плотно в X , $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} M_j$. Мы докажем, что найдётся хоть одна точка, которая принадлежит X и не принадлежит E . Это и будет означать, что X невозможно представить в виде такого объединения.

$$\begin{aligned} x_0 \in X \quad D_0 = \{y : \rho(x_0, y) \leq 1\} \\ M_1 \text{ – нигде не плотно} \Rightarrow \exists D_1 = D_{r_1}(x_1) \subset D_0, D_1 \cap M_1 = \emptyset \\ r_1 < 1 \end{aligned}$$

Теперь мы то же соображение применим к множеству M_2 , которое тоже нигде не плотно

$$\begin{aligned} \exists D_2 = D_{r_2}(x_2) \subset D_1, D_2 \cap M_2 = \emptyset \\ r_2 < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

и так далее $\left\{ \begin{array}{l} \{D_n\}_{n=1}^{\infty}, D_n = D_{r_n}(x_n), D_{n+1} \subset D_n \\ D_n \cap M_n = \emptyset, r_n < \frac{1}{n} \end{array} \right.$ по теореме о вложенных шарах $\Rightarrow \exists x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n, (x \in D_n \wedge x \in X \setminus E) \Rightarrow x \notin M_n \forall n \Rightarrow x \notin E$ □

4.5. Полные семейства элементов

Теперь мы будем понимать полноту в совершенно другом смысле. Сначала вспомним, что такое линейная оболочка пространства.

Определение 4.11 (Линейная оболочка). X – линейное пространство над $\mathbb{R}(\mathbb{C})$. Рассмотрим семейство $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ – семейство элементов, $x_\alpha \in X$.

$$\mathcal{L}\{x_\alpha\}_{\alpha \in A} = \left\{ \sum_{k=1}^n c_k x_{\alpha_k}, c_k \in \mathbb{R}(\mathbb{C}), n \in \mathbb{N} \right\}$$

Определение 4.12 (Полное семейство). $(X, \|\cdot\|)$, $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ – полное семейство, если $\overline{\mathcal{L}\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}} = X$. То есть линейная оболочка всюду плотна в X .

Пример 4.3. $C[a, b]$, $\{x^n\}_{n=0}^{+\infty}$ – полное семейство в $C[a, b]$, так как $P = \mathcal{L}\{x^n\}_{n=0}^{+\infty}$, $\overline{P} = C[a, b]$

Пример 4.4. l^p , $1 \leq p < +\infty$, C_0

$e_n = (1, 0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_n, 0, \dots)$, $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ – полное семейство

$\mathcal{L}\{e_n\}_{n=1}^\infty = F$ – финитная последовательность

Упражнение: C – что полное семейство?