Функциональный анализ

Осень 2023

Оглавление

Оглавление **1**

1 Введение **2**
1.1 Зачем изучать функциональный анализ 3

2 Метрические пространства **5**
2.1 Банаховы пространства 8
2.2 Пространства ограниченных функций 11
2.3 Пространство последовательностей с sup нормой 13
2.4 Пространства n раз непрерывно дифференцируемых функций на отрезке 14

3 Пространство суммируемых функций (Лебега L^p) **15**
3.1 Теория меры 15
3.2 Классические неравенства 17
3.3 Пространство Лебега 20
3.4 Пространства l_n^p, l^p 23
3.5 Неполное нормированное пространство 26

4 Пополнение метрического пространства **28**
4.1 Пополнение метрического пространства 29
4.2 Теорема о вложенных шарах 32
4.3 Сепарабельные пространства 35
4.4 Нигде не плотные множества 39
4.5 Полные семейства элементов 40
4.6 Полные и плотные множества в L^p 41

5 Метрические компакты **48**
5.1 Относительно компактные множества в $C(K)$ 55

Глава 1

Введение

12.09.23

День рождения функционального анализа – 1932 год. В этом году вышла книжка "Теория линейных операторов", автор – С. Банах. Главная цель функционального анализа – изучение линейных операторов (но не только их). Главным объектом у нас будет X – линейное топологическое пространство. Оно же линейное пространство над $\mathbb{C}$ (или $\mathbb{R}$). Есть непрерывные операции

1. $(x, z) \to x + z \quad x, z \in X$
2. $(\alpha, x) \to \alpha x \quad \alpha \in \mathbb{C}$

Если у нас есть топологическое пространство, то у нас есть все любимые объекты из математического анализа – пределы, непрерывность, производные, интегралы.

Пусть есть X, Y – линейные топологические пространства. Также есть линейное отображение $A : X \to Y$

Определение 1.1 (Линейное отображение)**.**

$$A(\alpha x + \beta z) = \alpha Ax + \beta Az$$

Если $\dim X < +\infty, \dim Y < +\infty$, то это линейная алгебра.

$$A : X \to X, \dim X = n, A = A^* \Rightarrow \exists\, \text{ОНБ} \{u_j\}_{j=1}^n$$

λ_j – собственные

$$Au_j = \lambda_j u_j$$

Теорема 1.1 (Гильберт). X – гильбертово (сепарабельное) пространство. $A = A^* \quad A \cdot X \to X, \Rightarrow \exists$ ОНБ из собственных векторов.

Если $\dim Y = 1$, т.е. $Y = \mathbb{C}$ (или $\mathbb{R}$), то $A : X \to \mathbb{C}$, A – линейный функционал.

X - пространство функций, $f \in X$.

В математическом анализе мы изучаем $f \overset{?}{\Rightarrow} f'$. В функциональном анализе же у нас X – пространство функций, $f \in X$

$$D(f) = f' \quad D : X \to Y \tag{1.1}$$

и здесь мы задаемся вопросами о следующих свойствах $D(f)$

- компактность
- самоспрояженность
- непрерывность

Отцы основатели функционального анализа:

- Ф. Гильберт (1862 - 1943) Гильбертовы пространства;
- С. Банах (1892 -1945) Банаховы пространства;
- Ф.Рисс (1880-1956) пространства Лебега L^p.

Ну и хочется еще упомянуть для вас, компьютер саентистов, отцов основателей кибернетики, который оставили немалый след в функциональном анализае

- Н. Винер (1894-1964);
- Д. фон Нейман (1903 - 1957). Про его архитектуру, наверное, что-то слышали?

1.1. Зачем изучать функциональный анализ

Во-первых, он позволяет посмотреть на задачу с высокого уровня абстракции.

Рассмотрим пространство непрерывных функций $C[a,b]$, там введем норму $|f| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$. Рассмотрим пространство многочленов $P_n = \{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k, a_k \in \mathbb{R}\}$ Существует ли такой многочлен, на котором инфимум достигается? И если да, то единственный ли он?

$$E_n(f) = \inf_{p\in P_n} ||f-p|| = \min_{p\in P_n} ||f-p||$$

На первый вопрос ответ да, это следует из общей теоремы функционального анализа.

$$\dim P_n = n+1 < +\infty$$

На второй же вопрос ответ тоже да, и тут функциональный анализ не при чем. Суть в том, что у многочлена степени n не может быть больше n корней.

Ну и еще немаловажные причины

1. язык функционального анализа – междисциплинарный язык математики;
2. его результаты применяются в математической физике, которая у нас будет в следующем семестре;
3. это интересно и важно. $0,1,2 = o(3)$;
4. у нас будет экзамен, на котором придется говорить уже нам.

Дополнительная литература по курсу. Первая рассчитана на студентов: в некоторых местах рассказывается, как придумать доказательство, как прийти к тому, что требуется, а не в обратную сторону, как обычно. Остальные же книги поумнее.

1. А.Н.Колмогоров, С.В. Фомин "Элементы теории функций и Ф.А.";
2. М.Рид, Б. Саймон. 1 том "методы современной физики". Тонкая (можно осилить), рассказывается также про применение ФА;
3. А.В. Канторович, Г.Г Акилов "Функциональный анализ". Похожа на энциклопедию. Но там можно найти всё;
4. К. Итосида "Функциональный анализ";
5. У. Рудин.

Глава 2

Метрические пространства

Начнём с того, что все знают. Надо ведь с чего-то начать. Мы будем несколько раз к ним возвращаться, а не изучим всё сразу. Один из полезных результатов – новое описание компакта в метрических пространствах. Он будет самым рабочим. А компакт вещь очень полезная. Компакты в гигантских пространствах напоминают компакты в $\mathbb{R}^n$ или в $\mathbb{C}^n$ и обладают теми же полезными свойствами.

Определение 2.1 (Метрика). X - множество. $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$, ρ – **метрика**, если она обладает следующими свойствами

1. $\rho(x, y) \geq 0 \quad \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\rho(y, x) = \rho(x, y)$
3. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$

Введём стандартное обозначение открытого шара. $x \in X, r > 0$

$B_r(x) = \{y \in X : \rho(x, y) < r\}$ – шар с радиусом r. $\{B_r(x)\}_{r>0}$ – база окрестности в точке x.

G – открытое, если $\forall\, x \in G\, \exists\, r > 0 : B_r(x) \subset G$.

$F \subset X, F$ – замкнутое $\Leftarrow X \setminus F$ – открытое. В метрическом пространстве удобно характеризовать замкнутое множества с помощью последовательностей. Вспомним, что такое сходящаяся последовательность. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in X$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, x_0) = 0$

F – замкнутое $\Leftarrow$ если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_i \in F$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow x_0 \in F$

Определение 2.2 (Фундаментальная последовательность)**.** $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n$ – фундаментальная, если $\forall \varepsilon > 0 \exists\, N \in \mathbb{N} : (n > N \wedge m > N) \Rightarrow \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ или же

$$\Leftrightarrow \lim_{n,m\to\infty} \rho(x_n, x_m) = 0$$

Замечание 2.1. Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, то $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальная.

Определение 2.3 (Полное метрическое пространство)**.** (X, ρ) – полное, если все фундаментальные последовательности имеют предел (лежит в X)

Почему хорошо жить в полном метрическом пространстве?

Замечание 2.2 (о пользе полноты)**.** $F : X \to \mathbb{R}, (X, \rho)$, F – непрерывная.

Стоит задача найти $x_0 \in X$ т.ч. $F(x_0) = 0$
Алгоритм: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\lim\limits_{n\to\infty} F(x_n) = 0$, $\lim\limits_{n,m\to\infty} \rho(x_n, x_m) = 0$ Если (X, ρ) – полное, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0, F(x_0) = 0$ А если нет, то из наших вычислений вообще ничего не следует, возможно, решения вообще нет.

Пример 2.1. $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ – полные.

Пример 2.2. $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, т.е. $\mathbb{Q}$ – неполное.

Потом приведем примеры поинтереснее. Кстати, древние греки пришли в ужас, когда узнали, что $\mathbb{Q}$ – неполное.

Определение 2.4. $(X, \rho), A \subset X, A$ – ограниченное, если

$$\exists\, R > 0, x_0 \in X : A \subset B_R(x_0)$$

Теорема 2.1 (Свойства фундаметнальных последовательностей)**.** (X, ρ) – метрическое пространство, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальная последовательность

1. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ограниченная
2. Если $\exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, т.ч. $\exists \lim x_{n_k} = a$, то
$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$
3. $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}, \varepsilon_k > 0, \exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, т.ч. $\rho(x_{n_k}, x_{n_j})$ при $j > k$

1 утверждение. $\varepsilon = 1, \exists N : n > N, \rho(x_n, x_N) < 1$. Возьмём $R = \max\{\rho(x_1, x_N), \ldots, \rho(x_{N-1}, x_N)\} + 1$. Единичка на всякий случай. Тогда $x_j \in B_R(x_n) \forall j \in \mathbb{N}$ □

2 утверждение. $\varepsilon > 0, \exists N : (n > N \wedge m > N) \Rightarrow \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ $\exists n_k : \rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon \wedge n_k > N$ Пусть есть какое-то $m > N$. Тогда $\rho(x_m, a) < \rho(x_m, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, a) < 2\varepsilon$

$\varepsilon_1 \exists n_1 : (n > n_1 \wedge n > m) \Rightarrow \rho(x_m, x_n) < \varepsilon_1 \Rightarrow \rho(x_m, x_{n_1}) < \varepsilon_1$ при $m > n_1$. Тогда по индукции $\exists$ выбрали $n_1, \ldots, n_{k-1}$, $k \geq 2$ $m > n_j \Rightarrow \rho(x_m, x_{n_j}) < \varepsilon_j, j = 1, 2, \ldots, k-1$

$$\varepsilon_k \exists n_k > n_{k-1} : m \geq n_k \quad \rho(x_m, x_{n_k}) < \varepsilon_k$$

□

Следствие 2.1. (X, ρ), $\{x_n\}$ – фундаментальная последовательность, тогда

$$\exists \{x_{n_k}\} \text{ т.ч. } \sum_{k=1}^{\infty} \rho(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < +\infty$$

Доказательство. По 3 свойству при $\varepsilon_k = \frac{1}{2^k}$ □

Теорема 2.2 (О замкнутом подмножестве). (X, ρ) – метрическое пространство

1. (X, ρ) – полное, $Y \subset X$, X – замкнутое $\Rightarrow (Y, \rho)$ – полное
2. Теперь просто предполагаем (X, ρ) – метрическое пространство, (Y, ρ) – полное. Тогда Y – замкнутое

1 утверждение. Доказательство следует прямо из определениеЗнаем что Y замкнутое поднмножество полного пространства. Берем фундаментальную последовательность. $Y \subset X$, пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in Y$ – фундаментальная. $x_n \in x, X$ – полное $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0, x_0 \in X$. Y – замкнутое, значит $x_0 \in Y \Rightarrow (Y, \rho)$ – полное. □

2 утверждение. Второй пункт не труднее первого. Пусть $x_n \in Y$. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \{x_n\}$ – фундаментальная. X – полное. Тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in Y \Rightarrow x_0 \in Y \Rightarrow Y$ – замкнутое. □

2.1. Банаховы пространства

Сначала введём понятие полунормы.

Определение 2.5 (полунорма). Пусть X – линейное пространство над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Отображение $p : X \to \mathbb{R}$ называется полунормой, если

1. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ (полуаддитивность)
2. $p(\lambda x) = |\lambda| p(x); x, y \in X, \lambda \in \mathbb{R}$ или $(\mathbb{C})$

Свойство 2.1. p – полунорма $\Rightarrow$

$$p(\mathbb{0}) = 0, p(x) \geq 0 \,\forall\, x \in X$$

Доказательство. $p(\mathbb{0}) = p(0 \cdot \mathbb{0}) = 0 \cdot p(\mathbb{0}) = 0$. Пусть $x \in X \Rightarrow \mathbb{0} = x + (-x) \Rightarrow p(\mathbb{0}) \leq p(x) + \underbrace{p(-x)}_{p(x)} = 2p(x) \Rightarrow p(x) > 0$ □

Определение 2.6 (Норма)**.** X – линейное пространство, $p: X \to \mathbb{R}$. p – норма, если p – полунорма и $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = \mathbb{0}$. Будем обозначать $||x|| := p(x)$.

$(X, ||\cdot||)$ будем обозначать нормированное пространство. и $x, y \in X, \rho(x, y) := ||x - y|$. Тогда $(X, ||\cdot||)$ – метрическое пространство.

Определение 2.7 (банахово пространство)**.** $(X, ||\cdot||)$ – банахово, если оно полное

Еще пару определений перед критерием банахова пространства.

Определение 2.8 (подпространство в алгебраическом смысле)**.** X – линейнрое пространство, $L \subset X$. L – подпространство в алгебраическом смысле, если $x, y \in L, \alpha, \beta \in K \Rightarrow \alpha x + \beta y \in L$.

Определение 2.9 (подпространство)**.** $(X, ||\cdot||)$, $L \subset X$, L – подпространство, если

- L подпространство в алгебраическом смысле
- $L = \overline{L}$ ($\overline{L}$ – замыкание)

Теперь нам потребуется сходимость рядов. Для того, чтобы говорить о сходимости, нужна топология.

Определение 2.10 (Сходимость)**.**

$$(X, ||\cdot||) \quad \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$$

$\sum_{k=1}^{\infty} x_k(*)$, (*) сходится, если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \in X$
(*) сходится абсолютно, если $\sum_{k=1}^{\infty} ||x_k||$ сходится

В $\mathbb{R}^n$ (или в $\mathbb{C}^n$) если у нас была абсолютная сходимость, то была и обычная, но вообще говоря, это не так.

> **Теорема 2.3** (Критерий полноты нормированного пространства (банаховости))**.** $(X, ||\cdot||)$ - полное $\Rightarrow$ из абсолютной сходимости ряда следует сходимость ряда.

Доказательство. Предположим, что наше пространство полное ($\Rightarrow$). (X, ρ) – полное, $\{x\}k_{k=1}^{\infty}$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} ||x_k|| \text{ сходится} \qquad (**)$$

Цель такая: последовательность S_n – фундаментальная. Сейчас применим критерий коши к ряду (**). Это ряд из чисел, так что все в порядке. Пусть $\varepsilon > 0$. По критерию Коши $\exists\, N \in \mathbb{N} : (n > N \wedge p \in \mathbb{N}) \Rightarrow \sum_{k=1}^{p} ||x_k|| < \varepsilon$.

$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$.

$$||S_{n+p} - S_n|| = \left|\left|\sum_{k=1}^{p} x_{n+k}\right|\right| \leq \sum_{k=1}^{p} ||x_{n+k}|| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \{S\}n_{n=1}^{\infty} \text{ – фундаментальная}, (X, \rho) \text{ – полное} \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} S_n = S$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \text{ сходится}$$

Мы так запаслись номерами, чтобы выражение было меньше ε

Теперь ($\Leftarrow$). У нас кроме определения ничего нет. Возьмём какую-то фундаментальную последовательность. Откуда взять предел? Есть соотношения между элементами последовательности. Возьмём какую-то подпоследовательность, ведь у нас есть следствие! Из свойств фундаментальных последовательностей, мы знаем, что существует

$$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : ||x_{n_1}|| + \sum_{k=1}^{\infty} ||x_{n_{k+1} - x_{n_k}} + \infty$$

$$\Rightarrow x_{n_1} + \sum_{k=1}^{n} (x_{n_{k+1}}) - x_{n_k} \text{ – сходится}$$

$$S_m = x_{n_1} + \sum_{k=1}^{m-1} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) = x_{n_m} \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} x_{n_m} = S$$

$\square$

2.2. Пространства ограниченных функций

Определение 2.11. Пусть A – произвольное множество. Стандартное обозначение $m(A)$ – множество всех ограниченных функций.

$$m(A) = \{f : A \to \mathbb{R} \text{ или } \mathbb{C}, \sup_{x\in A} |f(x)| < \infty\}$$

$f \in m(A), ||f||_\infty = \sup_{x\in A} |f(x)|$.

Теорема 2.4. $(m(A), ||\cdot||_\infty)$ – банахово пространство

Доказательство. Нужно проверить две вещи. Во-первых, что норма удовлетворяет аксиомам нормы. А во-вторых, что пространство с таким определением является полным. Просто по определению, никаких хитрых критериев. Возьмём фундаментальную подпоследовательность и покажем, что у нее есть предел.

Проверяем, что $||\cdot||_\infty$ удовлетворяет аксиомам нормы.

$$||f||_\infty = \sup_{x\in A} |f(x)| \geq 0, ||f||_\infty 0 \Rightarrow f(x) 0 \forall\, x \in A \text{ т.е. } f = \mathbb{0}$$

$\lambda \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$). $||\lambda f|| = \sup_{x\in A} |\lambda| \cdot ||f||_\infty$
Нужно проверить неравенство треугольника.
$f, g \in m(A)$. x – фиксированная точка в A
$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty \forall\, x \in A$

$$\Rightarrow ||f + g||_\infty = \sup_{x\in A} |f(x) + g(x)| \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty$$

Теперь мы проверили аксиомы нормы. Доказываем полноту. $\{f_n\}$ – фундаментальная в $m(A)$.

$$\varepsilon > 0\, \exists\, N \in \mathbb{N} : (m > N \wedge n > N) \Rightarrow ||f_n - f_m||_\infty < \varepsilon \text{ т.е. } \sup_{x\in A} |f_n(x) - f_m(x)|$$

Первый вопрос: откуда взять претендента на роль предела? Еще желательно, чтобы он был единственный. Фиксируем x. Если для супремума есть неравенство, то и для x тем более. $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ при $n, m > N$. $\Rightarrow \{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность чисел в $\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow \{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – фундаментальная $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \forall\, x \in A \text{х фиксированный}$$

$$\begin{gathered} |f_n(x) = f_m(x)| < \varepsilon \quad \text{ пусть } m \to \infty \\ \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon, x \in A \,\forall\, x \in A \\ \Rightarrow ||f_n - f||_\infty = \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon \text{ при } n > A \end{gathered}$$

Последнее сображение, которое нужно добавить, это то, что f – элемент A. Мы можем записать f как $f = (f - f_n) + f_n, f_n \in m(A), f - f_n \in m(A)$.

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} ||f - f_n|| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} f_n = f \in m(A)$$

□

Давайте заметим, что у нас получилось определение равномерной непрерывности из математического анализа.

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \in m(A) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| = 0 \Leftrightarrow f_n \underset{A, n\to\infty}{\rightrightarrows} f$$

Определение 2.12 (Топологический компакт)**.** Множество K – топологический компакт, если оно обладает следующими свойствами

1. $\forall\, \{G_\alpha\}_{\alpha\in A}, G_\alpha$ – открытые множества $K \subset \bigcup_{\alpha\in A} G_\alpha \exists\, \{\alpha_j\}_{j=1}^n, K \subset \bigcup_{j=1}^n G_{\alpha_j}$
2. Хаусдорфовость $\forall\, x, y (x \ne y) \in K \,\exists\, U, V$ – открытые множества, $x \in U, y \in V, U \cap V = \varnothing$

Определение 2.13. $C(K) = \{f : K \to \mathbb{R}, f \text{ непрерывна}\}$

$$||f||_{C(K)} = ||f||_\infty = \sup_{x\in K} |f(x)| = \max_{x\in K} |f(x)|$$

Следствие 2.2. K – топологический компакт $\Rightarrow C(K)$ – банахово

Доказательство. $C(K) \subset m(K)$. $C(K)$ – подпространство в алгебраическом смысле. Проверим, что $C(K)$ – замкнуто в $m(K)$

$$\{f_n\}, f_n = C(K), \lim_{n\to\infty} |f - f_n|_\infty = 0 \Leftrightarrow f_n \underset{K, n\to\infty}{\rightrightarrows} f \Rightarrow f \in C(K) \Rightarrow C(K)$$

тогда $m(K)$ – полное и $C(K)$ – полное. □

2.3. Пространство последовательностей с $\sup$ нормой

Определение 2.14. $\mathbb{C}^n, n \in \mathbb{N}, l_n = \{x^\infty = (x_1, \ldots, x_n), x_j \in \mathbb{C}\}$

$$||x||_\infty = \max_{1\le j\le n} |x_j|$$

$A = \{1, 2, \ldots, n\}, l_n^\infty = m(A) \Rightarrow l_n^\infty$ – полное Удобно думать, что последовательность – это функция на множестве натуральных чисел.

Определение 2.15 (l^∞).

$$l^\infty = \{X = \{x_j\}_{j=1}^\infty, \sup_{j\in\mathbb{N}} |x_j| < +\infty\}$$

$$||x||_\infty \sup_{j\in\mathbb{N}} |x_j| \quad A = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$$

$$X = \{x\}j_{j=1}^\infty \in m(A), \underset{f:A\to\mathbb{C}}{f(j) = x_j}$$

$$l^\infty := m(\mathbb{N}) \Rightarrow l^\infty \text{ – полное}$$

Определение 2.16.

$$c = \{X = \{x\}j_{j=1}^\infty, x_j \in \mathbb{C} \quad \exists \lim_{n\to\infty} x_n = x_0\}$$

$$c \subset l^\infty, ||x|| = ||x||_\infty = \sup ||X||$$

$$c_0 = \{x = \{x\}_{j=1}^\infty, \lim_{n\to\infty} x_j = 0\}, c_0 \subset c \subset l^\infty$$

c, c_0 – замкнутые подпространства в $l^\infty \Rightarrow c, c_0$ – банаховы.

2.4. Пространства n раз непрерывно дифференцируемых функций на отрезке

Определение 2.17. (норма n производной)

$$n \in \mathbb{N} \quad C^{(n)}[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R}\} \,\exists\, f^{(n)} \in C[a,b]$$

$$|||f||_{\underset{C[a,b]}{(n)}} = \max_{0 \le k \le n}, f^0 = f$$

Теорема 2.5. В $C^{(n)}[a,b]$ – банахово.

Доказательство.

$$\{f_m\}_{m=1}^{\infty} \text{ – фундаментальная последовательность в } C^{(n)}[a,b]$$

$$\varepsilon > 0 \exists\, N : (m > n \wedge q > n) \Rightarrow ||f_m - f_q||_{C^{(n)}} < \varepsilon \Rightarrow ||f_m^{(k)} < f_q^{(k)}||_\infty < \varepsilon$$

$$k = 0, 1, \dots, n$$

$\{f_m^{(k)}\}$ – фундаментальная в полном пространстве $C[a,b]$

$$\Rightarrow \exists\, \varphi_k \in C[a,b], f_n^{(k)} \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} \varphi_k, k = 0, 1, \dots, n$$

$$\overset{\text{Анализ}}{\Rightarrow} (f_k^{(n)} \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} \varphi_0 \wedge \varphi_k^0 \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} \varphi_1) \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_0', \varphi_2 = \varphi_0'', \dots, \varphi_n = \varphi_0^{(n)} \quad (2.1)$$

□

19.09.23

Глава 3

Пространство суммируемых функций (Лебега L^p)

Сейчас будет небольшой экскурс в теорию меры, которая была на математическом анализе. Мы ничего доказывать не будем и поверим, что все утверждения верны и в общем случае.

3.1. Теория меры

Определение 3.1 (Мера). (X, U, μ) – пространство с мерой. X – множество, U – σ-алгебра подмножества X

1. $\varnothing \in U$
2. $A \in U \Rightarrow X - A \in U$
3. $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}, A_n \in U, A\infty_{n=1}A_n \Rightarrow A \in U$

$$\mu : U \to [0, +\infty]$$

– мера, если

1. $\mu(\varnothing) = 0$
2. $A = U_{n=1}^{\infty}\{A_n\}, A_n \cap A_m = \varnothing, n \neq m, A_n \in U \Rightarrow \mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n$ (счетная аддитивность)

Предположения:

1. μ – полная мера, то есть $A \in U, \mu(A) = 0 \Rightarrow (\forall B \subset A \Rightarrow B \in$

$U, (\Rightarrow \mu B) = 0)$

2. μ – σ-конечна, то есть $X = \cup_{j=1}^{\infty} X_j, \mu(X_j) < +\infty$

Пока можем думать, что речь идет о мере Лебега. Потом приведём другие примеры. В теории пространств будем считать, что функция действует из X в $\mathbb{R}$ или в $\mathbb{C}$ (не особо важно).

Определение 3.2 (Измеримая функция)**.** $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. f – измерима, если

$$\forall\, c \in \mathbb{R}, x \underbrace{\{x : c < f(x)\}}_{\text{измеримое множество}} \in U$$

$$f : X \to \mathbb{C} \Rightarrow f = u + iv, u, v : X \to \mathbb{R}$$

f – измерима, если u, v – измеримы

Как же определяется интеграл? Пусть есть какой-то элемент σ-алгебры $e \in U$, $\chi_e(x) = \begin{cases} 1, x \in E \\ 0, x \notin e \end{cases}$. Множество простых функций определяется как

$$S = \{g(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{e_k}, c_k \in \mathbb{C}, e_k \in U\}$$

$g \in S, \int_X g(x) d\mu = \sum_{k=1}^{n} c_k \mu e_k$.

$f(x)$ – измеримая, если $f(x) \geq e, x \in X$

Определение 3.3 (Произвольно измеримая функция)**.**

$$\int_X f d\mu = \sup\left\{\int_X g(x) d\mu : 0 \leq g(x) \leq g(x), x \in X, c_k \in \mathbb{R}, c_k > 0\right\}$$

Определение 3.4 (Измеримая функция)**.** f – измерима, если

$$f_+(x) = \max_{(} f(x), 0) \,\wedge\, f_-(x) = \max(-f(x), 0) \Rightarrow f = f_+ - f_-$$

Если $\int_X f_+ d\mu$ – конечен или $\int_X f_- d\mu$ – конечен, то $\int_X f d\mu = \int_X f_+ d\mu - \int_X f_- d\mu$ Если f – измеримая, $f : X \to \mathbb{C} \Rightarrow f = u + iv$

$$\int_X f d\mu = \int_X u d\mu + i \int_X v d\mu$$

Определение 3.5 (Множество суммируемых функций)**.** $L(X, \mu)$ – множество суммируемых функций =

$$\left\{f_i : \int_X |f| d\mu < +\infty\right\}, |f| = f_+ + f_-$$

Прежде чем двигаться дальше, приведем примры других мер (кроме мер Лебега)

Пример 3.1. $E \subset \mathbb{R}^n$, E – измерима по Лебегу, λ – мера Лебега, $w(x) \geq 0, x \in E$, w – измерима по Лебегу.

$e \subset E, e$ – измеримо по Лебегу. $\mu e = \int_e w(x) d\lambda, w(x)$ – плотность меры μ, $w(x)$ – её вес.

Вторая мера в каком-то смысле противоположная. Она сосредоточна на наборе точек и называется дискретной.

Пример 3.2. X – множество ($X \neq \varnothing$), $a \in X$

$$\sigma_n, e \subset X, \sigma_a(e) = \begin{cases} 1, a \in E \\ 0, a \notin e \end{cases}$$

$\forall\, e, e \subset X, e$ – измеримо

Пример 3.3 (Дискретная мера)**.** X – бесконечное множество. $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}, a_j \in X, a_j \neq a_k, j \neq k$

$\{h_j\}_{j=1}^{\infty}, h_j > 0$

$$\mu - \sum_{\gamma=1}^{\infty} h_j \delta_{a_j}, e \subset X \quad \mu E = \sum_{\{j : a_j \in E\}} h_j$$

План такой: хотим ввести норму на множестве интегрирумеых функций. Для этого нам надо ввести некоторые неравенства.

3.2. Классические неравенства

Теорема 3.1 (Неравенство Юнга)**.** $p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (q – сопряженный показатель)

$$\Rightarrow ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^p}{q}$$

Доказательство. Пусть b – фиксировано, $\varphi(x) = \frac{x^p}{p} - xb, x \in [0, +\infty)$. Хотим найти $\min_{x\in[0,+\infty)} \varphi(x)$. Для этого посмотрим, где производная обращается в 0. $\varphi'(x) = x^{p-1} - b$, $\varphi'(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 = b^{\frac{1}{p-1}} \Rightarrow \varphi(x) > \varphi(x) > \varphi(x_0) \forall x \neq x_0, x \geq 0$. Таким образом, x_0 – строгий локальный минимум.

$$\varphi(x_0) = \frac{1}{p}b^{\frac{p}{p-1}} - b^{\frac{p}{p-1}} = b^{\frac{p}{p-1}}\left(\frac{1}{p} - 1\right) = \frac{b^q}{q}$$

$$-\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p} \Rightarrow q = \frac{p}{p-1}$$

$$\varphi(x) \geq -\frac{b^q}{q} \forall x \in [0, +\infty) \text{ то есть OK}$$

$$\varphi(x_0) = \frac{1}{p}b^{\frac{p}{p-1}} - b^{\frac{p}{p-1}} = b^{\frac{p}{p-1}}\left(\frac{1}{p} - 1\right) = \frac{b^q}{q}$$

□

Замечание 3.1. Равенство в неравенстве Юнга достигается только при $a = b^{\frac{1}{p-1}}$

Теорема 3.2 (Неравенство Гельдера)**.** (X, U, μ) — пространство с мерой. f, g – измеримые, $p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow$

$$\int_X |fg|d\mu \leq \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_X |g|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (*)$$

Если $p = q = 2$, то это "Неравенство Коши-Буняковского-Шварца", или на молодёжном математическом сленге неравенство КБШ

Доказательство. Для начала отбросим какие-то простые случаи.
$A = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}, B = \left(\int_X |g|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$. Если $A = 0 \Leftrightarrow |f| = 0$ почти всюду по $\mu \Leftrightarrow f(x) = 0$ почти всюду по μ (то есть $\mu\{x : f(x) \neq 0\} = 0$) На всякий случай поясним, почему функция равна 0 почти всюду по мере μ

$$\int_X |f|d\mu = 0 \Rightarrow e = \{x : f(x) = 0\}, m \in \mathbb{N}, e_m = \{x : |f(x)| > \frac{1}{m}\}$$

$$e = \cup_{m=1}^{\infty} e_m \quad \int_X |f|d\mu \geq \int_{e_m} |f|d\mu \geq \frac{1}{m}\mu e_m \Rightarrow \mu e_m = 0 \Rightarrow \mu E = 0$$

$$\Rightarrow f(x)\cdot g(x)=0 \text{ п.в.} \quad 0\leq 0 \tag{*}$$

Если $A=+\infty$, то (*)

$$\text{пусть } 0<A<+\infty, 0<R<+\infty$$

Неравенство Гельдера однородное, то есть если мы f умножим на константу, то левая и правая часть умножится на неё же, аналогично с g. Иногда бывает удобно ввести нормировку.

$$f_1(x)=\frac{f(x)}{A}, g_1(x)=\frac{g(x)}{B}, \int_X|f_1(x)|^p d\mu=\frac{A^p}{A^p}=1, \int_X|g_1(x)|^q d\mu=1$$

Пусть x – фиксирован, $a=|f(x)|$, $b=|g(x)\overset{\text{н.Юнга}}{\Rightarrow}$

$$|f_1(x)|\cdot|g_1(x)|\leq\frac{|f_1(x)|^p}{p}+\frac{|g_1(x)|^q}{q} \text{ проинтегрируем} X \text{ по } \mu$$

$$\Rightarrow\int_x|f_1|\cdot|g_1|d\mu\leq\frac{1}{p}\int_X|f_1|^p d\mu+\frac{1}{q}\int_X|g_1|^q d\mu=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

Умножаем на $AB\Rightarrow\int_X|fg|d\mu\leq AB$ □

Теорема 3.3 (Неравенство Минковского). (X,U,μ), f,g – измеримые, $1\leq p<+\infty\Rightarrow$

$$\underbrace{\left(\int_X|f(x)+g(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}}_{C}\leq\underbrace{\left(\int_X|f(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}}_{A}+\underbrace{\left(\int_X|fg(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}}_{B} \tag{*}$$

Доказательство. Сначала разберём простые случаи. $p=1, x$ – фиксирован. $|f(x)+g(x)|\leq|f(x)|+|g(x)|$ проинтегрируем по $X\Rightarrow(*)$ при $p=1$. Теперь пусть $p>1$. Если $A=+\infty$, или $B=+\infty$, или $C=0$, то (*).

Теперь же пусть $A<+\infty, B<+\infty, C>0$. Доказателсьвто будет в два этапа. На первом этапе получим гораздо более слабое утверждение, вообще не то, что требуется в теореме, но оно нам понадобится. Докажем, что $C<+\infty$.

$a,b\in\mathbb{R}\Rightarrow|a+b|\leq|a|+|b|\leq 2\max(|a|,|b|)\Rightarrow|a+b|^p\leq 2^p\max(|a|^p,|b|^p)\leq 2^p(|a|^p+|b|^p)\Rightarrow$ при фиксированном x

$$|f(x)+g(x)|^p\leq 2^p(|f(x)|^p+|g(x)|^p) \text{ проинтегрируем по } X$$

$\Rightarrow C^p \leq 2^p(A^p + B^p) \Rightarrow C < +\infty$. Первая часть доказательства закончена.

$$C^p = \int_X |f+g|^p d\mu = \int_X |f+g|\cdot|f+g|^{p-1} d\mu \leq \int_X |f|\cdot|f+g|^{p-1} d\mu + \int_X |g|\cdot|f+g|^{p-1} d\mu$$

$$\int_X |f|\cdot|f+g|^{p-1} d\mu \overset{\text{н. Гельдера}}{\leq} \left(\int_X |f+g| d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\underbrace{\int_X |f+g| d\mu}_{A}\right)^{(p-1)q} = AC$$

$$\int_X |g|\cdot|f+g|^{p-1} d\mu \overset{\text{аналогично}}{\leq} BC^{\frac{p}{q}} \Rightarrow$$
$$C^p \leq (A+B)C^{\frac{p}{q}}, \quad 0 < C < +\infty \Rightarrow$$
$$C^{p-\frac{p}{q}} = C \Rightarrow C \leq A + B(\text{ это } (*))$$

□

3.3. Пространство Лебега

Отсюда и до определения L^∞ очень аккуратно с $\mathcal{L}$ и L читать. Тут точно есть путаница, но записи лекции нет, чтобы ее устранить.

Определение 3.6. (X, U, μ) – пространство с мерой. $L(X, \mu)$ – пространство суммируемых функций. $1 \leq p < +\infty$ $\mathcal{L}^p(X, \mu) = \{f : |f|^p \in L(X, \mu)\}$

$$f \in L^p(X, \mu), ||f||_p = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

Проверим, что $||f||_p$ – это полунорма на $L^p(X, \mu)$. $c \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$). $||cf||_p = |c|||f||_p$

$$||f+g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p \text{ – неравенство Минковского}$$

$||f|| = 0 \Leftrightarrow \int_X |f(x)|^p d\mu = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ почти всюду по мере μ на X.

Пример 3.4. $L[0,1], \lambda$ – мера Лебега на $[0,1]$.

функция Дирихле $\varphi(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ $\int_0^1 |\varphi(x)| d\lambda = 0.$

$N = \{f$ – измерима $\wedge\ f(x) = 0$ почти всюду на Xпо $\mu\}$. $||f||_p = 0 \Leftrightarrow f \in N$ (не зависит от p). Рецепт приготовления пространства с нормой из полуфбриката. пространство с полунормой. N – подпространство в L^p, $L^p = L^p/N$ – факторпространство.

$g, f \in L^p, f\ g \Leftrightarrow f - g \in N \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ почти всюду по μ. $\overline{f}$ – класс эквивалентности, $\overline{f} = \{g : f\ g\}$.

$||\overline{f}||_p := ||f||$, то есть можно взять любую функцию из класса эквиналнентности.

$$||\overline{f}||_p = 0 \Leftrightarrow \int_X |f|^p d\mu = 0 \Leftrightarrow f \in N \Rightarrow \overline{f} = N = \overline{0} \Rightarrow$$

$||\overline{f}||_p$ – норма на L^p. Говорят, что $f \in L^p$, возьмём функцию из L^p, но имеют в виду, что возьмут класс экивалентности, а из него возьмут функцию

Одна из главных целей – доказать, что эти пространства Банаховы. Сначала определим $L^\infty(X, \mu)$ (существенно ограниченные функции).

Определение 3.7 ($L^\infty(X, \mu)$). $f \in L^\infty(X, \mu)$, если

$$\exists\, c > 0 |f(x)| \leq c \text{ почти всюду на } X \text{ по } \mu(\mu\{x : |f(x)| > c\} = 0)$$

Возьмём точную нижнюю грань этой константы. $||f||_\infty = \inf\{c \geq 0 : \mu\{x : ||f(x)|| > c\} = 0\}$ (существуенный sup, или на подлом англосаксонском $\operatorname{ess\,sup}_X f$)

Свойство 3.1. $f \in \mathcal{L}^\infty(X, \mu) \Rightarrow \mu\{f(x) > ||f||_\infty\} = 0$

Доказательство. $e = \{x : |f(x) > ||f||_\infty\}, m \in \mathbb{N}$.
$e_m = \{x : |f(x)| > ||f||_\infty + \frac{1}{m}\} \Rightarrow \mu e_m = 0$ по определеннию $\operatorname{ess\,sup}_X f$
$\Rightarrow e = \cup_{m=1}^\infty e_m \Rightarrow \mu e = 0$ □

$$||f||_\infty \text{ – полунорма на } \mathcal{L}^\infty$$
$$\lambda \neq 0 \quad |\lambda f(x)| \leq |\lambda| \cdot c \Leftrightarrow |f(x) \leq c \Rightarrow ||\lambda f||_\infty = |\lambda|||f||_\infty,$$
$$f, g \in \mathcal{L}^\infty, x \in X \Rightarrow |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty \text{ для п.в. } x \text{ на } X$$
$$\Rightarrow ||f + g||_\infty < ||f||_\infty + ||g||_\infty$$

$||f||_\infty = 0 \Leftrightarrow \mu\{x : |f(x)| > 0\} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ п.в. на $X \Leftrightarrow f \in N = \{f$ – измерима, $f(x) = 0$ п.в. на $X\}$

$$L^\infty = \mathcal{L}^\infty / N$$

Все, что Н.А. доказал для меры Лебега, верно и для других мер. Те доказательства и так были не особо веселые, чтобы их повторять.

Теорема 3.4 (Фату). (X, U, μ), $\{g_n\}_{n=1}^\infty, g_n$ – измеримые, $g_n(x) \geq 0$

$$g_n(x) \xrightarrow[\text{п.в.}]{} g(x) \quad \int_X g_n(x) d\mu \leq C \text{ не зависит от n}$$
$$\Rightarrow \int_X g(x) d\mu \leq C$$

Первая существенная теорема, которая нам встретилась.

Теорема 3.5 (полнота пространства Лебега). $(X, U, \mu), 1 \leq p \leq +\infty \Rightarrow L^p(X, \mu)$ – банаховы.

Доказательство. при $1 \leq p < +\infty$ воспользуемся критерием полноты (если сходится ряд из норм, то сам ряд сходится)

$$\{f_n\}_{n=1}^\infty, f_n \in L^p, \sum_{n=1}^\infty ||f_n||_p \leq C < +\infty$$
$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$$

Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} ||S_n(x) - f(x)||_p = 0$. Существует ли $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$ почти всюду на X?
Рассмотрим $\sigma_n(x) = \sum_{k=1}^n |f_k(x)| \Rightarrow \sigma_n(x)$ возрастает $\Rightarrow \exists\ \sigma(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n(x)$. Возможно, $\sigma(x) = +\infty$ для некоторых x.

$$||\sigma_n||_p \leq \sum_{k=1}^n ||f_k||_p \leq C$$

$$\int_X |\sigma_n(x)|^p d\mu \leq C^p \wedge \sigma_n(x)^p \xrightarrow[n\to\infty]{} \sigma_(x)^p \,\forall\, x \in X \overset{\text{т. Фату}}{\Rightarrow}$$

$\int_X \sigma(x)^p d\mu \leq c^p$ Самое главное, что мы из этого заключаем: $\sigma(x) < +\infty$ п.в. на X по μ.

$$x \in X \quad \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| < +\infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \text{ – сходится}$$

$$f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \text{ определена п.в. на } X, \lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} ||f_k||_p < +\infty, \varepsilon > 0$$

Применим критерий Коши: $\exists\, N \in \mathbb{N} \quad m > n > N \Rightarrow \sum_{k=n+1}^{m} ||f_k||_p < \varepsilon \Rightarrow ||S_m(x) - S_n(x)||_p \leq \sum_{k=n+1}^{m} ||f_k||_p < \varepsilon$

$$\int_x |S_m(x) - S_n(x)|^p d\mu < \varepsilon^p (n \text{ фиксировано}) \wedge |S_m(x) - S_n(x)|^m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} |f(x) - S_n(x)|$$
$$\overset{\text{Фату}}{\Rightarrow} \int_X |f - S_n|^p d\mu \leq \varepsilon^p \Rightarrow ||f - S_n|| \leq \varepsilon$$

$f - S_n \in L_p, S + n \in L^p \Rightarrow f = (f - S_n) + S_n \Rightarrow f \in L_p$ и $||f - S_n||_p \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$
Теперь осталось рассмотреть случай $p = \infty$. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальная, $f_n \in L^{\infty}$,

$$|f_n(x)| \leq ||f_n||_{\infty} \quad x \in X \setminus e_n, \mu e_n = 0 \quad n \in \mathbb{N}$$

$e = \cup_{n=1}^{\infty}, X_1 = X \setminus e \Rightarrow f_n \in m(X_1)$ – ограниченная функция. $m(X_1)$ – полное $\Rightarrow \{f_n\}$ – фундаментальна в $m(X_1) \Rightarrow \exists ./ f \in m(X_1) \quad \sup_{x \in X_1} |f(x) - f_n(x)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Положим $f(x) = 0$ если $x \in e \Rightarrow \lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_{L^{\infty}} = 0 \quad \square$

3.4. Пространства l_n^p, l^p

$n \in \mathbb{N}, 1 \leq p < +\infty$.

Определение 3.8.

$$l_n^p = \left\{ \mathbb{R}^n, x = (x_1, \ldots, x_n), x_j \in \mathbb{R}, ||x||_p = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\}$$

Рассмотрим $X = \{1, 2, \dots, n\}$. Возьмём дискретную меру $\mu(j) = 1$ при $1 \le j \le n$, $l^p_n = L^p(X, \mu)$. $f \in L^p(X, \mu), f(j) = x_j \Rightarrow l^p_n$ – полное.

Посмотрим, что будет обозначать сходимость этой нормы.

Теорема 3.6. $\{x^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}, x = (x_1, \dots, x_n), x^{(m)} = (x_1^{(m)}, \dots, x_n^{(m)})$, $x^{(m)} \in l^p_n, q \le p \le +\infty$

$$\lim_{m\to\infty} ||x - x^{(m)}||_p = 0 \Leftrightarrow \lim_{m\to\infty} x_j^{(m)} = x_j, 1 \le j \le n$$

Доказательство. $\Rightarrow$
Пусть j – фиксировано, $\lim\limits_{m\to\infty} x^{(m)} = x$ в l^p_n.
При $p < +\infty$ $||x - x^{(m)}||_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - x_i^{(m)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \ge |x_j - x_j^{(m)}$. Так как $||x - x^{(m)}||_p \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \lim\limits_{m\to\infty} |x_j - x_j^{(m)}| = 0$.
При $p = \infty$ $||x - x^{(m)}||_\infty = \max_{1\le i\le m}\{|x_i - x_i^{(m)}|\} \ge |x_j - x_j^{(m)}|$. Так как $||x - x^{(m)}||_\infty \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \lim\limits_{m\to\infty} |x_j - x_j^{(m)}| = 0$
Теперь $\Leftarrow$

$$1 \le j \le n \quad \lim_{m\to\infty} |x_j - x_j^{(m)}| = 0 \Rightarrow \left(\sum_{j=1}^n ||x_j - x_j^{(m)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\text{и } \Rightarrow \max_{1\le j\le n} |x_j - x_j^{(m)}| \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

□

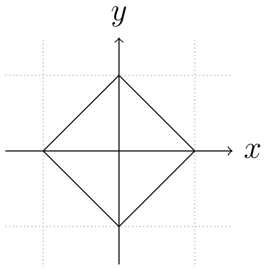
Определение 3.9. $l_p = \{x : \{x_j\}_{j=1}^\infty, x_j \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \wedge \sum_{j=1}^\infty |x_j|^p < +\infty\}$

$$||x||_p = \left(\sum_{j=1}^\infty |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

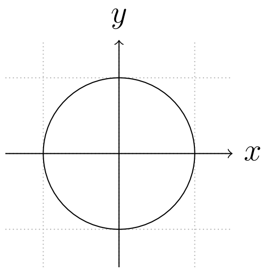
$X = \mathbb{N}$, $\mu(j) = 1$, $\mu = \sum_{n=1}^\infty \sigma_n$

$$l^p = L^p(\mathbb{N}, \mu) \Rightarrow \text{ полное } \quad 1 \le p < +\infty$$

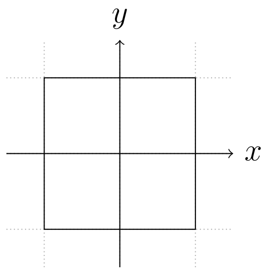
Замечание 3.2. $\{x^{(m)}\}_{m=1}^\infty, x^{(m)} \in l^p$, $\lim\limits_{m\to\infty} ||x^{(m)} - x||_p = 0 \Rightarrow \forall j \lim\limits_{m\to\infty} x_j^{(m)} = x_j$ Например, $\not\Leftarrow$ при $e_m = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots)$



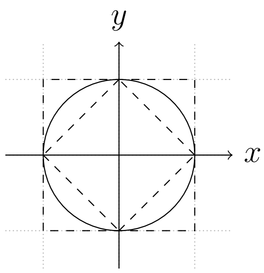
(a) $B_1^1(0,0)$



(b) B_1^2(0,0)



(c) B_1^∞(0,0)



(d) B_1^p(0,0)

Рис. 3.1: Примеры единичных шаров в l_2^p

Пусть j фиксировано. $\lim\limits_{m\to\infty}(e_m)_j = 0 \quad ||e_m - \mathbb{0}||_p = 1 \quad \forall\, p, 1 \le p \le +\infty$. В качестве упражнения доказать, что l^p – полное непосредственно.
На рисунке 3.1 приведены примеры единичных шаров в $l_2^p = \{(x,y) : (|x|^p + |y|^p)^{\frac{1}{p}}\}, 1 \le p < +\infty$. Для l_2^∞ норма определяется $||(x,y)||_\infty = \max(|x|,|y|)$

3.5. Неполное нормированное пространство

Определение 3.10 (Финитное линейное пространство)**.**

$$F = \{x - \{x_j\}_{j=1}^{\infty}, x_j \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \exists\ N(x) \in \mathbb{N} : n > N(x) \Rightarrow x_n = 0\}$$

$F \subset l^p \quad 1 \leq p \leq +\infty$. $(F, ||\cdot||_p)$ – не полное, F – не замкнуто. Будем брать геометрическую прогрессию и обрывать ее на некотором члене.

$$x^{(m)} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^m}, 0, 0, 0, \dots\right\} \in F$$

$$X = \left\{\frac{1}{2^k}_{k=1}^{\infty}\right\} \in l^p$$

$$1 \leq p < +\infty \quad ||x - x^{(m)}||_p = \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^{kp}}\right)^{\frac{1}{p}} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Следовательно, F – не замкнуто.

В качестве упражнения проверить, что $\overline{F}$ в l^p =? при $p < +\infty$ и при $p = \infty$.

Теорема 3.7. $C[a,b], ||f||_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < +\infty$

$$(C[a,b], ||\cdot||) \text{ – не полное}$$

Доказательство. При $p = 1$, $[a,b] = [-1,1], f \in C[a,b], \int_a^b |f(x)|^p dx = 0 \Leftrightarrow f(x) \equiv 0$. Предъявим фундаментальную последовательность, предел которой не будет непрерывной функцией.

$$f_n = \begin{cases} 0, -1 \leq x \leq 0 \\ nx, x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 1, x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases} \quad , f \in C[-1,1]$$

f_n – фундаментальная в $(C[-1,1], p = 1)$

Пусть $m > n$.

$$\int_{-1}^{1} |f_m(x) - f_n(x)| dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right) \leq \frac{1}{2n} \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Пусть $\exists\, ./ f \in C[-1,1] : ||f - f_n||_1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

$$m \geq n \qquad \int_{\frac{1}{n}}^{1} \underbrace{|f(x)-1|}_{=0}\, dx \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} |f(x)-1| dx \leq \int_{0}^{1} |f(x) - f_m(x)| dx \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$\Rightarrow f(x) = 1, x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \forall\, n$

$$\begin{cases} \Rightarrow f(x) = 1, x \in (0,1], f \text{ непрерывна }, f(0) = 1 \\ \text{аналогично } f(x) \equiv 0 \text{ на } [-1,0] \end{cases} \quad \Rightarrow \text{ противоречие}$$

$\square$

Глава 4

Пополнение метрического пространства

26.09.23

Мы привели несколько примеров нормированных пространств, не являющихся полными. Приведём еще один пример.

Определение 4.1.

$$\mathrm{P} = \left\{ p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, a_k \in \mathbb{R}, n \geq 0 \right\}$$

P (подпространство в алгебраическом смысле) $\subset C[a,b]$, $||p||_\infty = \max_{x\in[a,b]} |p(x)|$ $e^x \notin \mathrm{P}$, $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}, \Rightarrow p_n \underset{[a,b], n\to\infty}{\rightrightarrows} e^x$ это не многочлен, потому что если сколько-то раз продифференцировать многочлен, он станте тождественным $0 \Rightarrow \overline{\mathrm{P}} \setminus \mathrm{P} \ni e^x \Rightarrow \mathrm{P}$ – не замкнуто $\Rightarrow \mathrm{P}$ – не полное.

$$\overline{\mathrm{P}} = C[a,b]$$

Теорема 4.1 (Вейерштрасса, 1885)**.** $f \in C[a,b], \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, p \in \mathrm{P}$ т.ч. $||f - p|| < \varepsilon$ (любую функцию на отрезке можно приблизить многочленами)

$$p_n \underset{G}{\rightrightarrows} f \Rightarrow f \text{ аналитическая в } G$$

4.1. Пополнение метрического пространства

Несколько простых свойств метрики, и все следуют из неравенства треугольника

Теорема 4.2 (Свойства метрики)**.** (X, ρ) – метрическое

1. $x, y, z, u \in X \quad \Rightarrow |\rho(x, u) - \rho(y, z)| \leq \rho(x, y) + \rho(u, z)$
2. $\rho : X \times X \to \mathbb{R} \Rightarrow \rho(x, y)$ – непрерывная функция
3. $A \subset X, A$ – подмножество, $\rho(x, A) = \inf_{y \in A} \rho(x, y) \Rightarrow \rho(x, A)$ – непрерывная функция от x
4. $A \subset X, A = \overline{A}, x_0 \notin A \Rightarrow \rho(x_0, A) > 0$

Доказательство. 1. $\rho(x, u) \leq \rho(x, y) + \rho(y, u) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) + \rho(z, u) \Rightarrow \rho(x, u) - \rho(y, z) \leq \rho(x, y) + \rho(z, u)$ Аналогично $\rho(y, z) - \rho(x, u) \leq \ldots$ из всего $\Rightarrow 1)$

2. Докажем непрерывность с помощью последовательности. $\rho(x, y)$ – непрерывная?

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \lim_{n\to\infty} y_n = y \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0 = \lim_{n\to\infty} \rho(y_n, y)$$

$\rho(x, y) - \rho(x_n, y_n)| \overset{(1)}{\leq} \rho(x, x_n) + \rho(y, y_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = \rho(x, y)$

3. $A \subset X$, $x, z \in X$, $|\rho(x, A) - \rho(z, A)| \leq ?$
   Пусть $y \in A$

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) \Rightarrow \rho(x, A) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) \, \forall \, y \in A$$
$$\Rightarrow \rho(x, A) \leq \rho(x, z) + \inf_{y\in A} \rho(z, y) = \rho(x, z) + \rho(z, A) \Rightarrow$$
$$\rho(x, A) - \rho(z, A) \leq \rho(x, z)$$

Но нам нужен модуль. Можем сказать, что x и z ничем не отличаются, аналогично $\rho(z, A) - \rho(x, A) \leq \rho(x, z) \Rightarrow 3$

4.

$$x_0 \notin A \Rightarrow x_0 \in X \setminus A \text{ открытое}$$

$$\Rightarrow \exists\, \delta > 0 \quad B_\delta(x_0) \subset X \setminus A \Rightarrow \rho(x_0, A) \geq \delta$$

□

Перед определением пополнения нам потребуется несколько определений, связанных с отображениями в метрических пространствах.

$(X, \rho), (Y, d)$ – метрические простарнства. $T : X \to Y$.

Определение 4.2 (Изометрическое вложение)**.**

$$d(T_x, T_z) = \rho(x, z) \quad \forall\, x, z \in X$$

Обозначение: $X \hookrightarrow Y$

Определение 4.3 (Изометрия)**.** T – изометрическое вложение, $T(X) = Y$

Определение 4.4 (Изометричность пространств)**.** $(X, \rho), (Y, d)$ изометричны, если $\exists\, T : X \to Y, T$ – изометрия

Свойство 4.1. T – изометрическое вложение $\Rightarrow T$ – инъективное, непрерывное

Доказательство. $x, z \in X, T : X \to Y$, пусть $T_x = T_z \Rightarrow d(T_x, T_z) = 0$ Значит, исходное расстояние тоже 0 по свойству метрики. $d(x, z) = 0 \Rightarrow x = z$

Инъективность проверили, теперь непрерывность, это еще проще.

$$\lim_{n\to\infty} = x \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \rho(x, x_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} d(T_{X_n}, T_x) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} T_{X_n} = T_x$$

□

Свойство 4.2. Если T – изометрия, то $\exists\, T^{-1}$ – изометрия.

Свойство 4.3. ”Изометричность” – отношение эквивалентности на множестве метрических пространств

И наконец

Определение 4.5 (Пополнение м. пространства)**.** (X, ρ) – метрическое пространство. (Z, d) – полное метрическое пространство. (Z, d) – пополнение (X, ρ), если существует $T : X \to Z$

1. T – изометрическое вложение
2. $\overline{T(X)} = Z$

Замечание 4.1. Не обязательно искать пространство, удовлетворяющее и второму свойству. Достаточно найти такое, которое удовлетворяет первому. (X, ρ) – метрическое пространство, (U, d) – полное метрическое пространство. Пусть $\exists\, T : X \to U$ – изометрическое вложение. Если 2 свойство не выполняется, то легко такое Z построить. Возьмём замыкание образа. $Z = \overline{T(X)} \Rightarrow (Z, d)$ – пополнение X.

Теперь обещанная теорема. Возьмём любое метрическое пространство и покажем, что у него есть пополнение.

Теорема 4.3 (О пополнении метрического пространства)**.** (X, ρ) – метрическое $\Rightarrow \exists$ пополнение (Z, d)

Доказательство. Есть классическое доказательство с рассмотрением всех фундаметнальных последовательностей, рассмотрением фактор-пространства, муторным разбором случаев. Мы пойдем другим путём. Будет короткое, но **фантастически** непонятное доказательство в том смысле, что непонятно, как его придумать.
Мы собираемся использовать $m(X) = \{f : X \to \mathbb{R}, \sup_{x \in X} |f(x)| < +\infty\}$

$$||f||_{m(X)} = ||f||_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

$m(X)$ – полное пространство.
Каждой точке мы сопоставим функцию. Вот такая идея! $\varphi : X \to m(X)$. Оно же будет изометрическим вложением, то есть будет сохранять расстояния.
Сначала будет маленькое облегчающее предположение про X, от которого мы потом откажемся. Пусть X – ограниченное, то есть $\exists\, M > 0$ т.ч. $\forall\, x, y \in X\ \rho(x, y) \le M$. Единственная цель предположения – формула для φ будет чуть проще. Вообще, можно было бы обойтись и без него.
$t \in X, t$ – фиксирован, $f_t(x) = \rho(x, t)$. При фиксированном t – это

функция на X. Именно сюда наше отображение будет отображать t. Одной точке – целая функция, понятно?

$$\varphi(t) := f_t(x) \text{ т.е. } \varphi : t \to f_t(x)$$
$$|f_t(x)| \leq M \Rightarrow f_t \in m(X)$$

Самое главное. Проверим, что отображение сохраняет расстояния. Это очень легко. Возьмём 2 точки.

$$\text{Пусть } t, s \in X, \quad ||f_t - f_s||_\infty = \sup_{x \in X} |\rho(x, y) - \rho(x, s)|$$
$$|\rho(x, t) - \rho(x, s)| \leq \rho(t, s), \text{ Пусть } x = t \Rightarrow |\rho(t, t) - \rho(t, s)| = \rho(t, s)$$
$$\Rightarrow ||\varphi(t) - \varphi(s)||_\infty = \rho(t, s) \Rightarrow \varphi \text{ – изометрическое вложение}$$

Посмотрим, что будет, если откажемся от этого облегчающего предположения. Надо будет чуть исправить отображение φ. X – любое метрическое пространство. $a \in X$ – фиксированная точка.
$t \in X, f_t(x) = \rho(x, t) - \rho(x, a) \Rightarrow |f_t(x)| \leq \rho(a, t) \Rightarrow f_t \in m(X)$

Раньше мы могли так брать и не вылетать из пространства из-за ограниченности. Вычтем эту штуку, чтоыб попасть, куда надо.

$$t, s \in X \Rightarrow f_t(x) - f_s(x) = \rho(x, t) - \rho(x, s) \overset{(1)}{\Rightarrow} ||f_t - f_s||_\infty = \rho(s, t)$$

Пополнение X: $\overline{\varphi(X)}^{||\cdot||_\infty} = Z, (Z, ||\cdot||_\infty)$ □

Таким образом, изучение метрических пространств можно свести к изучению подмножества пространства непрерывных функций.

Замечание 4.2. Забегая далеко вперёд. $(X, ||\cdot||)$ – нормированное, X^* – множество непрерывных линейных функционалов на X, X^* – полное (ВСЕГДА).

Мы построим каноническое вложение $\pi : X \to \underbrace{(X^*)^*}_{\text{полное}}$, $\overline{\varphi(x)}^{X^{**}}$ – пополнение X.

4.2. Теорема о вложенных шарах

Когда-то в анализе была теорема Кантора о том, что если есть последовательность вложенных друг в друга отрезков, то их пересечение не пусто. Мы докажем похожее утверждение для метрических пространств. Оказывается, то утверждение было связано с полнотой вещественной прямой $\mathbb{R}$. (X, ρ) – метрическое пространство, $r > 0, x \in X$ Введём стандартное обозначение замкнутого шара.

$$D_r(x) = \{y \in X : \rho(x, y) \le r\}$$

Теорема 4.4 (О вложенных шарах)**.** (X, ρ) – метрическое пространство. X – полное ($| \Leftrightarrow (\forall \{D_n\}_{n=1}^{\infty}, D_n = D_{r_n}(x_n)),\ D_{n+1} \subset D_n,\ \lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0 \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{+\infty} D_n \ne \varnothing$). По сранению с теоремой Кантора у нас есть дополнительное предположение о стремлении к нулю, которое здесь важно, а на прямой было как данность.

Доказательство. $\Rightarrow$ X – полное

$$\{D_n\}_{n=1}^{\infty}, D_n = D_{r_n}(x_n), D_{n+1} \subset D_n, \lim_{n\to\infty} r_n = 0$$

Надо проверить, что центры шаров образуют фундаментальную последовательность, то есть что $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – фундаментальная.
Пусть $\varepsilon > 0 \quad \exists\ N \in \mathbb{N} \quad r_n < \varepsilon$ при $n \ge N$.

$$(n > N \wedge m > N) \Rightarrow (x_n \in D_n \wedge x_m \in D_n) \Rightarrow \rho(x_n, x_m) \le$$
$$\le \rho(x_n, x_N) + \rho(x_m, x_N) \le 2\varepsilon$$

$$X \text{ – полное } \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} x_n = x$$

$$\text{любое фиксированное } m \in \mathbb{N} \quad x_n \in D_m \,\forall\, n \ge m, D_m \text{ – замкнутое}$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty, n\ge m} x_n = x \in D_m$$
$$\Rightarrow x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} D_m$$

$\Leftarrow$
Ничего кроме определения для доказательства полноты у нас нет. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – фундаментальная. Возьмём достаточно быстро убывающую последовательность $\varepsilon_k = \frac{1}{2^k}$. Существует $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}, \rho(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < \frac{1}{2^{k+1}}$.
$D_k = D_{\varepsilon_k}(x_{n_k})$

$$\begin{cases} y \in D_{k+1} \Rightarrow \rho(y, x_{n_{k+1}}) \le \frac{1}{2^{k+1}} \\ \rho(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < \frac{1}{2^{k+1}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\rho(y, x_{n_k}) \le \rho(y, x_{n_{k+1}}) + \rho(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) < \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^k}$$
$$\Rightarrow y \in D_k \Rightarrow D_{k+1} \subset D_k$$

Мы взяли произвольный элемент из D_{k+1} и показали, что он принадлежит D_k, то есть показали вложенность элементов последовательности.

$$\Rightarrow \exists\, x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} D_k \quad \rho(x, x_{n_k}) \leq \frac{1}{2^k} \Rightarrow \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$$

По свойству фундаметнальных последовательностей из первой лекции $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ □

Замечание 4.3. В условиях теоремы пересечение вложенных шаров $\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$ состоит из одной точки.

Доказательство. Пусть $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n, \Rightarrow \rho(x, x_n) \in r_n, \lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. А мы знаем, что предел в метрическом пространстве единственный. □

Замечание 4.4. Условие, что $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$ в теореме существенно.

Пример 4.1 (Замкнутые множества)**.** $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}, F_n$ – замкнутое, $F_{n+1} \subset F_n, F_n \subset \mathbb{R}, \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \varnothing, F_n = [n, +\infty)$

Пример 4.2 (По теореме)**.**

$$X[1. + \infty) \quad \rho(x, y) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{x+y}, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

Проверим, что ρ – метрика. x, y, z

$$\rho(x, y) + \rho(y, z) = 1 + \frac{1}{x+y} + 1 + \frac{1}{y+z} > 1 + 1 > 1 + \frac{1}{x+z} = \rho(x, z)$$

Проверяем полноту. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальная, $\varepsilon = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$$\exists\ N \in \mathbb{N} : (n \geq N\ \wedge\ m \geq N)\rho(x_n, x_m) < \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\rho(x_n, x_N) < \frac{1}{2}\ \wedge\ \rho(x_m, x_N) < \frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$x_N = x_{N+1} = x_{N+2} = \ldots$$
$$\Rightarrow \exists\ \lim_{n\to\infty} x_n = X_N \Rightarrow (X, \rho) \text{ – полное}$$

Полноту проверили.
$r_n = 1 + \frac{1}{2n}, x_n = n; D_n = D_{r_n}(n), h \in D_n$. Пусть $x \neq n, x \in D_n \Rightarrow \rho(x, x_n) = 1 + \frac{1}{x+n} \leq 1 + \frac{1}{2n}$

Замечание 4.5 (Домашнее задание)**.** Если $(X, ||\cdot||)$ – банахово, то $D_{n+1} \subset D_n \{D_n\}_{n=1}^{\infty} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n \neq \varnothing$ (требование $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$ лишнее)

4.3. Сепарабельные пространства

(X, ρ) – метрическое пространство,

Определение 4.6 (A плотно в C). $A \subset X, C \subset X$. A плотно в C, если $C \subset \overline{A} \Leftrightarrow$

$$\forall\, x \in C\, \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, a \in A\, \rho(x, A) < \varepsilon \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\, C \subset \bigcup_{a \in A} B_\varepsilon(a)$$

Любой элемент C можно сколь угодно хорошо приблизить элементами из A.

Определение 4.7 (A всюду плотно в C). A – всюду плотно в X, если $\overline{A} = X$

Чем же полезно это свойство? Если хотят доказать свойство для X, то часто доказывают сначала для всюду плотного подмножества.

Определение 4.8 (Сепарабельное пространство). (X, ρ) – **сепарабельное**, если $\exists\, E \subset X, E = \{x_n\}_{n=1}^\infty, \overline{E} = X$

Теорема 4.5. $n \in \mathbb{N}, q \leq p \leq +\infty$,

$$l_n^p \text{ – сепарабельное}$$

Доказательство.

$$l_n^p = (\mathbb{R}^n, ||\cdot||_p) = \{x = (x_1, \dots, x_n), x_j \in \mathbb{R}, ||x||_p\}$$
$$E = \mathbb{Q}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n), x_j \in \mathbb{Q}\}$$

Если $(\mathbb{C}^n, ||\cdot||_p), \tilde{\mathbb{Q}} = \{x + iy,\, x, y \in \mathbb{Q}\}, E = \tilde{\mathbb{Q}}^n$ □

Теорема 4.6. F – финитные последовательности, $1 \leq p \leq +\infty$

$$(F, ||\cdot||_p) \text{ – сепарабельно}$$

Доказательство. $E = \bigcup_{n=1}^\infty,\ \mathbb{Q}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_{N(x)}, 0, 0, \dots,), x_j \in \mathbb{Q}\}$. Попросту говоря, все финитные последовательности, координаты которых рациональны. □

Теорема 4.7. $l^p, 1 \leq p < +\infty, C_0$ – сепарабельные

Доказательство. На прошлой лекции мы доказали, что

$$(F, ||\cdot||_p), \overline{F}^{||\cdot||_p} = l^p \text{ при } 1 \leq p < +\infty$$
$$\begin{cases} E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}^n \text{ – всюду плотно в } F \\ F \text{ – всюду плотное в } l^p \end{cases} \Rightarrow$$
$$E \text{ всюду плотно в } l^p, 1 \leq p < +\infty$$

Почему любой элемент из l^p может быть приближен финитной последовательностью? Мы ее просто отрезаем. □

Ответ на упражнение для читателя, которое было на прошлой лекции: F – подпространство в алгебраическом смысле, $F \subset l^\infty$, $\overline{F}^{||\cdot||_\infty} = C_0$

$$x_0 \in C_0 \Leftrightarrow x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \lim_{n\to\infty} x_n = 0$$
берем первые m координат и дополняем их нулями
$$x^{(m)} = (x_1, \ldots, x_m, 0, 0, \ldots, 0, \ldots) \Rightarrow x^{(m)} \in F$$
$$||x - x^{(m)}||_\infty = \sup_{k>m} |x_k| \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Остаётся вопрос, почему C_0 – замкнутое множество. Можно в лоб, а можно по-учёному рассудить.

$$\text{пусть } \{y^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}, y^{(m)} \in C_0,\ y^{(m)} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} y \text{ в } C_0$$
$$\Rightarrow \lim_{m\to\infty} ||y - y^{(m)}||_\infty = 0 \qquad y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}, \lim_{n\to\infty} y_n = 0 \text{ ???}$$

А это равномерная сходимость на множестве натуральных чисел, то есть это тот случай, когда можно менять местами пределы.

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{m\to\infty} \underbrace{\lim_{n\to\infty} y_n^{(m)}}_{=0} = 0$$

Упражнение: C – сепарабельное, $C \subset l^\infty$

Теорема 4.8. l^∞ – не сепарабельное

Какой бы шарик из X мы бы не предъявили, там всегда будет элемент всюду плотного множества.

Доказательство.

$$A \subset \mathbb{N} \quad X_n^A = \begin{cases} 1, n \in A \\ 0, n \notin A \end{cases}$$

Мощность $\{A, A \subset \mathbb{N}\}$ – континуум ($>$ счётное). Это и будет центр пересекающихся шариков. Посмотрим, каким будет расстояние между двумя разными точками.

$$A \subset \mathbb{N}, C \subset \mathbb{N}, A \notin \mathbb{C}$$

$$X_n^A - X_n^c = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases} \Rightarrow ||x^A - x^C||_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |X_n^A -_n^C| = 1$$

То есть если 2 множества не равны, то расстояние между ними – единица.

$$B_{\frac{1}{2}}(x^A) \cap B_{\frac{1}{2}}(x^C) = \varnothing$$

Мы предъявили несчётный набор дизъюнктных шариков. E – всюду плотно в $l^\infty \Rightarrow \forall\, A \subset \mathbb{N} \,\exists\, e_A \in B_{\frac{1}{2}}(x^A)$

$$A \neq C \Rightarrow e_A \neq e_C, \qquad \underbrace{\{e_A\}_{a\subset\mathbb{N}}}_{\text{несчётно}} \subset E \Rightarrow E \text{ несчётно}$$

То, что у всех шариков одинаковый радиус – это просто приятный бонус. □

Теорема 4.9. (X, ρ) – сепарабельное, $Y \subset X \Rightarrow (Y, \rho)$ – сепарабельное.

Доказательство. $\exists\ E = \{x_n\}_{n=1}^\infty$ – всюду плотно в X, $x_0 \in X$

$$\rho(x_n, Y) = \inf_{y\in Y} \rho(x_n, y) \Rightarrow$$

$$\exists\ \{y_{n,k}\}_{k=1}^\infty \quad \lim_{k\to\infty} \rho(x_n, y_{n,k}) = \rho(x_n, Y)$$

$$y_{n,k} \in Y,\ F = \{y_{n_k}\}_{n,k} \text{ – счётное }, F \subset Y$$

Проверим, что F – всюду плотно в Y. Пусть $y \in Y, \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\, x_n :$ $\rho(y, x_n) < \varepsilon$. Из этого неравенства мы делаем вывод, что $\rho(x_n, Y) < \varepsilon$. Значит, $\exists\, k : \rho(x_n, y_{n,k}) < \varepsilon \Rightarrow$

$$\rho(y, y_{n,k}) \leq \rho(y, x_n) + \rho(x_n, y_{n,k}) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

□

Следствие 4.1. X – бесконечное множество $\Rightarrow m(X)$ – не сепарабельное.

Доказательство. Можно слово в слово повторить доказательство для l^∞, но мы воспользуемся последними доказанными теоремами.

$$\exists\,\{a_j\}_{j=1}^\infty, a_j \in X, a_j \neq a_i \text{ при } i \neq j$$
$$Y = \{f \in m(X), f(x) = 0 \text{ если } x \neq a_j\} \sup_{j\in\mathbb{N}} |f(a_j)| < +\infty$$
$$Y \text{ изометрично } l^\infty, f \in Y, T(f) = \{f(a_j)\}_{j=1}^\infty \in l^\infty$$
$$Y \text{ – не сепарабельно } \Rightarrow \text{ и по последней теореме}$$
$$m(X) \text{ – не сепарабельно}$$

□

Теорема 4.10.
$$C[a,b] \text{ – сепарабельно}$$

1 часть.

$$L = \{\text{ ломаные }\} \quad a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b \quad \{y_k\}_{k=0}^n, y_k \in \mathbb{R}$$
$$L(x) \text{ – ломаные}$$
$$L(x_k) = y_k,\ k = 0, 1, \ldots, n \quad l(x) \text{ линейная на } [x_k, x_{k+1}]$$

Отметим, что L – всюду плотное множество в пространстве непрерывных функций. Это связано с равномерной непрерывностью. Никаких надежд на то, что оно будёт счётным нет.

$$\text{пусть } f \in C[a,b],\ \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\,\delta > 0 : |x - y| < \delta$$
$$\Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$
$$\exists\,\{x_k\}_{k=0}^n \text{ – разбиение} \quad x_{k+1} - x_k < \delta$$
$$y_k := f(x_k) \quad L(x) \text{ – ломаная}$$
$$\Rightarrow |f(x) - L(x)| < \varepsilon \Rightarrow ||f - L||_\infty \leq \varepsilon \Rightarrow \overline{\mathcal{L}} = C[a,b]$$

как сделать так, чтобы множество ломаных было счётным? возьмём в качестве вершин элементы $\mathbb{Q}$

$$E = \{L \in \mathcal{L},\ x_k, y_k \in \mathbb{Q}\} \text{ – счетное множество}$$
$$\begin{cases} \mathcal{L} \subset \overline{E} \\ \overline{\mathcal{L}} = C[a,b] \end{cases} \Rightarrow E \text{ – всюду плотно, т.е. } \overline{E} = C[a,b]$$

$\square$

2 часть. по т. Вейерштрасса замыкание многочленов – тоже пространство непрерывных функций.

$$\mathrm{P} = \{p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k\} \quad \overline{\mathrm{P}} - C[a,b]$$

$$E = \{p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,\, a_k \in \mathbb{Q}\}$$

$$\begin{cases} \mathrm{P} \subset \overline{E} \\ \overline{\mathrm{P}} = C[a,b] \end{cases} \Rightarrow \overline{E} = C[a,b]$$

$\square$

4.4. Нигде не плотные множества

Определение 4.9. (X,ρ) – метрическое пространство. $A \subset X, A$ – **нигде не плотно** в X, если

$$\forall\, B_r(x) \text{ при } r > 0, x \in X \quad B_r(x) \not\subset \overline{A} \Leftrightarrow \mathrm{Int}(\overline{A}) = \varnothing \Leftrightarrow$$

Если мы рассмотрим замыкание, никакого шарика там не будет. Иначе: если мы рассмотрим внутренность замыкания, она будет пустой.

$$\forall\, r > 0, x \in X \quad B_r(x)\,\exists\, B_{r_1}(x_1) \subset B_r(x), B_{r_1}(x_1) \cap A = \varnothing$$
$$\Leftrightarrow \forall\, r > 0, x \in X\, D_r(x)\,\exists\, D_{r_1}(x_1) \subset D_r(X), D_{r_1}(x_1) \cap A = \varnothing$$

Скоро докажем связь между нигде не плотными множествами и полными пространствами. Но сперва определение, которое не будет часто встречаться, но сам факт – полезный.

Определение 4.10 (множество первой категории)**.** $M \subset X, (X,\rho)$. M – **множество первой категории**, если

$$M = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j, E_j \text{ нигде не плотно в } X$$

M – **множество второй категории**, если M нельзя представить в виде объединения счетного числа нигде не плотных множеств.

Теорема 4.11 (Бэр, о категориях)**.** (X, ρ) – полное $\Rightarrow X$ – множество второй категории.

Доказательство. Можно было бы даже от противного. Но мы возьмём семейство $\{M_j\}_{j=1}^{\infty}$, M_j – нигде не плотно в X, $E - \bigcup_{j=1}^{\infty} M_j$. Мы докажем, что найдётся хоть одна точка, которая принадлежит X и не принадлежит E. Это и будет обозначать, что X невозможно представить в виде такого объединения.

$$x_0 \in X \quad D_0 = \{y : \rho(x_0, y) \leq 1\}$$
$$M_1 \text{ – нигде не плотно } \Rightarrow \exists\, D_1 = D_{r_1}(x_1) \subset D_0, D_1 \cap M_1 = \varnothing$$
$$r_1 < 1$$

Теперь мы то же соображение применим к множеству M_2, которое тоже нигде не плотно

$$\exists\, D_2 = D_{r_2}(x_2) \subset D_1, D_2 \cap M_2 = \varnothing$$
$$r_2 < \frac{1}{2}$$

и так далее $\begin{cases} \{D_n\}_{n=1}^{\infty}, D_n = D_{r_n}(x_n), D_{n+1} \subset D_n \\ D_n \cap M_n = \varnothing, r_n < \frac{1}{n} \end{cases}$ по теореме о вложенных шарах $\Rightarrow\ \exists\, x \in \cap_{n=1}^{\infty} D_n, (x \in D_n \,\wedge\, x \in X \setminus E) \Rightarrow x \notin M_n \,\forall\, n \Rightarrow$ $x \notin E$ □

4.5. Полные семейства элементов

Теперь мы будем понимать полноту в совершенно другом смысле. Сначала вспомним, что такое линейная оболочка пространства.

Определение 4.11 (Линейная оболочка)**.** X – линейное пространство над $\mathbb{R}(\mathbb{C})$. Рассмотрим семейство $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ – семейство элементов, $x_\alpha \in X$.

$$\mathcal{L}\{x_\alpha\}_{\alpha \in A} = \left\{ \sum_{k=1}^{n} c_k x_{\alpha_k}, c_k \in \mathbb{R}(\mathbb{C}), n \in \mathbb{N} \right\}$$

Определение 4.12 (Полное семейство). $(X, ||\cdot||)$, $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ – **полное семейство**, если $\overline{\mathcal{L}\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}} = X$. То есть линейная оболочка всюду плотна в X.

Пример 4.3. $C[a,b]$, $\{x^n\}_{n=0}^{+\infty}$ – полное семейство в $C[a,b]$, так как $\mathrm{P} = \mathcal{L}\{x^n\}_{n=0}^{+\infty}$, $\overline{\mathrm{P}} = C[a,b]$

Пример 4.4. l^p, $1 \le p < +\infty$, C_0

$$e_n = (1, 0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_{n}, 0, \dots), \{e_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ – полное семейство}$$

$$\mathcal{L}\{e_n\}_{n=1}^{\infty} = F \text{ – финитная последовательность}$$

Упражнение: C – что полное семейство? 03.10.23

Утверждение 4.1. $(X, ||\cdot||)$ - нормированное пространство. В нём существует $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – полное семейство

$$X \text{ – сепарабельное}$$

Доказательство. Рассмотрим линейную оболочку $L = \mathcal{L}\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{x = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, c_j \in \mathbb{R}(\mathbb{C})\}$. $\overline{L} = X$.

$$E = \{x = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, c_j \in \mathbb{Q}\} \text{ – счётное всюду плотное}$$

$$(L \subset \overline{E} \wedge \overline{L} = X) \Rightarrow \overline{E} = X$$

□

Замечание 4.6. $l^\infty, E = \{x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in \mathbb{Q}, \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < +\infty\}$. $\overline{E} = l^\infty$, E – не счётное.

4.6. Полные и плотные множества в L^p

Сначала небольшое замечание. (X, U, μ) – пространство с мерой $e \in U$ – измеримые множества, $\chi_e(x) = \begin{cases} 1, x \in E \\ 0, x \notin E \end{cases}$ – характеристическая функция. $\chi \in L^\infty(X, \mu)$, $\forall\, e \in U$

$$\chi_e \in L^p(X, \mu) \text{ при } 1 \le p < +\infty \Leftrightarrow \int_X (\chi_e(x))^p d\mu < +\infty \Leftrightarrow \mu e < +\infty$$

Теорема 4.12. (X, U, μ) – пространство с мерой $\Rightarrow$

$$\{\chi_e\}_{e \in U} \text{ – полное семейство в } L^\infty(X, \mu)$$
$$\{\chi_e\}_{e \in U, \mu E < +\infty} \text{ – полное семейство в } L^p(X, \mu), 1 \leq p < +\infty$$

Для доказательства этой теоремы нужно будет вспомнить теорему Лебега из анализа (она у нас уже была).

Теорема 4.13 (Лебег)**.** $\{h_n(x)\}_{n=1}^\infty$ – измеримые, $\varphi(x)$. $\int_X \varphi(x) d\mu < +\infty, |h_n(x)| \leq \varphi(x)$ п.в. на X

$$h_n(x) \underset{n\to\infty \text{ п.в. по } \mu}{\longrightarrow} h(x) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_X h_n(x) d\mu = \int_X h(x) d\mu$$

Доказательство. Вспомним конструкцию, которая была в математическом анализе. f – измеримая, $f(x) \geq 0, x \in X$. Рассмотрим разбиение множества X, а по нему построим соотвествующую простую функцию

$$n \in \mathbb{N} \quad e_k = \{x \in X : \frac{k}{n} \leq f(x) < \frac{k+1}{n}\}, k = 0, 1, \ldots, n^2 - 1$$

$$e_{n^2} - \{x : f(x) \geq n\} \Rightarrow X = \bigcup_{k=0}^{n^2} e_k, e_k \cap e_j = \varnothing (k \neq j)$$

Теперь построим измеримые функции, потом они будут простыми.

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{k}{n} \chi_{e_k} \quad 0 \leq g_n(x) \leq f(x), x \in X$$

$f(x) \leq g_n(x) + \frac{1}{n}, x \in \bigcup_{k=0}^{n^2-1} e_k$

Теперь все готово, чтобы обсудить случай L^∞. Пусть $f \in L^\infty(X, \mu) \Rightarrow$
$n \geq ||f||_\infty \Rightarrow \mu(e_{n^2}) = 0. \Rightarrow |f(x) - g_n(x)| \leq \frac{1}{n}$ для п.в. $x \in X$
$\Rightarrow ||f - g_n||_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, g_n \in \mathcal{L}\{\chi_e\}_{e \in U}$

$\Rightarrow f \in \overline{\mathcal{L}\{\chi_e\}_{e \in U}}$

Посмотрим теперь, что происходит с конечными p. Тут вспоминаем теорему Лебега, она была верна для интеграла Лебега, но верна и для произвольной меры.

$$\begin{cases} f(x) \in L^p(X,\mu), 1 \le p < +\infty & |f(x) - g_n(x)|^p \le |f(x)|^p \\ g_n(x) \underset{\text{п.в.}}{f(x)} & \Rightarrow |f(x) - g_n(x)|^p \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{cases} \overset{\text{Лебег}}{\Rightarrow}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_X |f - g_n|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = 0$$

$$f \in L^p \Rightarrow \mu e_k < +\infty \quad f(x) \ge \frac{k}{n}, x \in e_k \Rightarrow \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \ge \left(\int_{e_k} \left(\frac{k}{n}\right)^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$\frac{k}{n}(\mu e_k)^{\frac{1}{p}} \Rightarrow \mu e_k < +\infty$$

$$\Rightarrow f \in \overline{\mathcal{L}\{\chi_e\}_{e\in U, \mu e < +\infty}}$$

Все, что надо – убедиться, что мера конечная. Рассмотрим замыкание линейное оболчоки

$$\begin{cases} f: X \to \mathbb{R}, \Rightarrow f = f_+ - f_-, f_+(x) \ge 0, f_-(x) \ge 0 \\ f: X \to \mathbb{C} \Rightarrow f = u + iv; u, v: X \to \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\forall\, f \in L^p, f \in \overline{\mathcal{L}\{\chi_e\}_{e\in U}}$$

$$(p = \infty\, \forall\, e, p < +\infty, \mu e < +\infty)$$

□

Теперь, зная эту теорему, посмотрим, какое множество будет полным в пространстве l^∞

Следствие 4.2. $l^\infty, A \subset \mathbb{N}, \quad X^A = \{x_n^A\}_{n=1}^\infty, X_n^A = \begin{cases} 1, n \in A \\ 0, n \notin A \end{cases} \Rightarrow$

$$\{X^A\}_{A\subset\mathbb{N}} \text{ – полное семейство в } l^\infty$$

Доказательство. $l^\infty = L^\infty(\mathbb{N}, \mu), \mu(n) = 1\,\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \forall\, A \subset \mathbb{N}, A$ – измеримо

$$\chi_A = X^A \Rightarrow \{X^A\}_{A\subset\mathbb{N}} \text{ – полное семейство}$$

□

Теорема 4.14. $(\mathbb{R}^n, U, \lambda)$, λ – классическая мера Лебега. U – измеримые по Лебегу множества.

$$\mathcal{R} = \left\{ \Delta = \prod_{j=1}^{n} [a_j, b_j), a_j < b_j; a_j, b_j \in \mathbb{R} \right\} \text{ – множество ячеек}$$

$$\Rightarrow \{\chi_\Delta\}_{\Delta \in \mathcal{R}} \text{ – полное семейство в } L^p(\mathbb{R}^n, \lambda), 1 \le p < +\infty$$

Достаточно рассмотреть характеристические множества ячеек.

Доказательство. Собираемся приблизить множество линейной комбинацеий характеристических функций ячеек. Вспомним определение внешней меры.

$$e \in U, \lambda(e) < +\infty$$

$$\lambda(e) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(\Delta_k), e \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k, \Delta_k \in \mathcal{R}, \Delta_k \cap \Delta_j = \varnothing \right\}$$

Сначала просто по определению нижней грани. $\forall\, \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\, \{\Delta_k\}_{k=1}^{n}$.
$\lambda(e) \le \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(\Delta_k) < \lambda(e) + \varepsilon$.
$e \subset \cup_{k=1}^{\infty} \Delta_k, \Delta_k \in \mathcal{R}, \Delta_k \cap \Delta_j = \varnothing$ при $k \ne j$.

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k, e \subset A, \lambda(A \setminus e) < \varepsilon$$

$$\exists\, N \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=N+1}^{\infty} \lambda(\Delta_k) < \varepsilon, B = \bigcup_{k=1}^{n} \Delta_k$$

$$\Rightarrow \lambda(A \setminus B) < \varepsilon$$

$$||\chi_e - \chi_b||_p \le ||\chi_e - \chi||_p - ||\chi_A - \chi_B||_p \le$$

$$\left(\int_{A \setminus e} \mathbb{1} dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{A \setminus B} \mathbb{1} dx \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon^{\frac{1}{p}} + \varepsilon^{\frac{1}{p}} = 2\varepsilon^{\frac{1}{p}}$$

$$\chi_b = \sum_{k=1}^{N} \chi_{\Delta_k} \in \mathcal{L}\{\chi_\Delta\}_{\Delta \in \mathcal{R}}$$

$$\begin{cases} \overline{\mathcal{L}\{\chi_e\}_{e \in U}} = L^p \\ \chi_e \in \overline{\mathcal{L}\{\chi_\Delta\}_{\Delta \in \mathcal{R}}} \end{cases} \Rightarrow \overline{\mathcal{L}\{\chi_\Delta\}_{\Delta \in \mathcal{R}}} = L^p, 1 \le p < +\infty$$

$\square$

Следствие 4.3. $E \subset \mathbb{R}^n$, E – измеримые по Лебегу, $1 \leq p < +\infty$

$$\Rightarrow L^p(E, \lambda) \text{ – сепарабельные}$$

(λ – мера лебега)

Доказательство. Докажем, что $L^p(\mathbb{R}^n, \lambda)$ – сепарабельное.

$$\mathcal{R} = \left\{ \Delta = \prod_{j=1}^{n} [a_j, b_j), a_j < b_j,\ a_j, b_j \in \mathbb{R} \right\} \text{ – полные семейства в } L^p$$

Теперь мы возьмём только такие ячейки, полуинтервалы которых мы перемножаем, имеют рациональные концы. Пока что можем сказать, что это счётное множество.

$$R_0 = \left\{ \Delta = \prod_{j=1}^{n} [a_j, b_j), a_j < b_j,\ a_j, b_j \in \mathbb{Q} \right\} \text{ – счётное множество}$$

$$\Delta \in \mathcal{R} \quad 0$$
$$\Rightarrow \exists\, \Delta_0 \in R_0, \Delta \subset \Delta_0, \lambda(\Delta_0 \setminus \Delta) < \varepsilon$$
$$\Rightarrow ||\chi_{\Delta_0} - \chi_\Delta||_p = ||\chi_{\Delta_0 \setminus \Delta}||_p = \left(\int_{\Delta_0 \setminus \Delta} \mathbb{1} dx \right)^{\frac{1}{p}} = (\lambda(\Delta_0 \setminus \Delta))^{\frac{1}{p}} < \varepsilon^{\frac{1}{p}}$$
$$\Rightarrow \forall\, \Delta \in \mathcal{R}\, \chi_\Delta \in \overline{\mathcal{L}\{\chi_\Delta\}_{\Delta \in R_0}}$$

R_0 – полное счётное семейство $\overset{\text{утверждение}}{\Rightarrow}$ $L^p(\mathbb{R}^n, \lambda)$ – сепарабельное.

$$E \subset \mathbb{R}^n, E \text{ – измеримое }, f \in L^p(E, \lambda)$$
$$\text{пусть } f(x) = 0, x \in \mathbb{R}^n \setminus E \Rightarrow f \in L^p(\mathbb{R}^n, \lambda)$$
$$\Rightarrow L^p(E, \lambda) \text{ – подпространство } L^p(\mathbb{R}^n, \lambda) \Rightarrow L^p(E, \lambda) \text{ – сепарабельно}$$

□

Определение 4.13. (X, U, μ) – пространство с мерой. (X, ρ) – метрическое пространство. μ **– борелевская мера**, если (G – открытое $\Rightarrow G \in U$)

β – минимальная σ-алгебра, содержащая все открытые множества. β – **борелевские множества**, то есть $\beta \subset U$.

Чем же хороши борелевские меры? Оказывается, они безумно связаны с непрерывными функциями

Замечание 4.7. Пусть $f : X \to \mathbb{R}, f$ – непрерывная $\Rightarrow f^{-1}((c, +\infty)), c \in \mathbb{R}, (c, _\infty)$ – открытое в $\mathbb{R}$. Определение непрерывной функции из топологии: прообраз любого открытого множества открыт. Так как прообраз f открыт в $X \Rightarrow f$ – измеримая по μ, если μ – борелевская.

Замечание 4.8. λ – мера Лебега в $\mathbb{R}^n$, тогда λ – борелевская.

Еще более специальное определение. Этим свойством мера Лебега тоже обладает.

Определение 4.14 (регулярная мера)**.** (X, U, μ), (X, ρ), μ – борелевская. μ – **регулярная мера**, если $\forall\, e \in U$

$$\sup_{\{F \subset e, F \text{ – замкнутое}\}} \{\mu(F)\} = \mu e = \inf_{\{e \subset G, G \text{ – открытое}\}} \mu G$$

Замечание 4.9. λ-мера Лебега – регулярная.

На самом деле эти 2 свойство друг из друга следуют, но мы это доказывать не будем.

Теорема 4.15. (X, U, μ), (X, ρ), μ – регулярная мера $\Rightarrow$ непрерывная функция плотна В $L^p(X, \mu), 1 \le p < +\infty$.

$$\overline{C(X) \cap L^p(X\mu)}^{||\cdot||_p} = L^p(X, \mu)$$

Доказательство. Мы уже знаем, что полное семейство – это семейство характеристических функций всех измеримых функций, и мы будем этим изо всех сил пользоваться. Возьмём какую-то характеристическую функцию из множества и ее будем приближать непрерывными функциями.
$\{\chi_e\}_{e \in U, \mu e < +\infty}$ – полное семейство.
пусть $e \in U, \mu e < +\infty$, $0, \mu$ – регулярная $\Rightarrow\ \exists\, F \subset e \subset G, F$ – замкнутое, G – открытое. $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$

Когда мы попадем в $X \setminus G$ она будет равна нулю.

$$\varphi(x) = \frac{\rho(x, X \setminus G)}{\rho(x, X \setminus G) + \rho(x, F)}$$

Нужно позаботиться о том, чтобы знаменатель не был равен нулю. $\rho(x, A)$ – непрерывная функция $\forall\, A \subset X$. $X \setminus G$ – замкнутое, F – замкнутое. Если $\rho(x, F) = 0 \Rightarrow x \in F \Rightarrow x \notin X \setminus G \Rightarrow \rho(x, X \setminus G) > 0$

$$\Rightarrow \rho(x, X \setminus G) + \rho(x, F) > 0\, \forall\, x \in X \Rightarrow \varphi \in C(X)$$

$\varphi(x) = 0, x \in X \setminus G, \varphi(x) = 1, x \in F \quad \forall\, x \in X 0 \leq \varphi(x) \leq 1$

Понятно, что модуль $\varphi(x)$ совпадает с характеристической функцией множества e.

$$\chi_e(x) - \varphi(x)| \leq 1 \quad \forall\, x \in X$$

$$\chi_e(x) - \varphi(x) = 0 \quad x \in F \text{ или } x \in X \setminus G$$

$$\Rightarrow ||\chi_e - \varphi||_p = \left(\int_X |\chi_e(x) - \varphi(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{G \setminus F} |\chi_e(x) - \varphi(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq (\mu(G \setminus F))^{\frac{1}{p}} < \varepsilon^{\frac{1}{p}}$$

$$\Rightarrow \chi_e \in \overline{C(X)}^{||\cdot||_p}$$

Тем самым мы доказали, что $\varphi(x)$ может быть приближена непрерывными функциями. Может быть, стоить отметить, что $\mu G < \mu E + \varepsilon < p + \infty \quad \int_X |\varphi(x)|^p d\mu - \int_G |\varphi(x)|^p d\mu < \mu(g) \Rightarrow \varphi \in L^p(X, \mu)$

□

Раз утверждение верно для любых регулярных мер, то оно верно и для меры Лебега.

Глава 5

Метрические компакты

Топологический компакт: из любого подпокрытия можно выбрать конечное подпокрытие.

Утверждение 5.1 (из топологии). 1. (X, ρ) – метрическое пространство, $K \subset X$, K – компакт $\Leftrightarrow$ K – счётно-компактен, то есть

$$\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in K \quad \exists \{x_{n_j}\}_{j=1}^{\infty} \text{ т.ч. } \exists \lim_{j\to\infty} x_{n_j} = x_0,\ x_0 \in K$$

2. K – компакт $\Rightarrow$ K – ограниченное замкнутое множество.

Пример 5.1. $\mathbb{R}^n$, K – компакт $\Leftrightarrow$ K – ограниченное, замкнутое

Замечание 5.1. НИ В КОЕМ СЛУЧАЕ!!!
K – ограниченное замкнутое, $\not\Rightarrow$ K – компакт

Замечание 5.2. $l^2 = \{x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, ||x||_2 = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2)^{\frac{1}{2}} < +\infty, x_n \in \mathbb{R}(\mathbb{C})\}$

$$D = \{x \in l^2 : ||x||_2 \leq 1\} \text{ – ограниченное, замкнутое}$$

$e_n = (0, 0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{n}, 0, 0, \ldots)$, $n \neq m$ $\quad ||e_n - e_m||_2 = \sqrt{2} \Rightarrow \forall \{e_{n_j}\}$ – не фундаментальная. Тогда $\nexists \lim\limits_{j\to\infty} e_{n_j} \Rightarrow D$ – не компакт.

Ещё одно *напоминание*, кто такие относительно компактные множества.

Определение 5.1 (относительный компакт)**.** $(X,\rho), A \subset X, A$ – относительно компактно, если $\overline{A}$ – компакт. Или можно сказать

$$\Leftrightarrow \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in A \,\exists\, \{x_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}, \,\exists\, \lim_{j\to\infty} x_{n_j} = x_0, x_0 \in X$$

Предел не обязательно принадлежит A. А в компакте предел обязательно лежит в A.

Мы получим новое описание компактных и относительно компактных множеств. В $\mathbb{R}^n$ мы описывали относительные компакты. Для описания компакта нужно добавить замыкание.

Еще несколько определений:

Определение 5.2 (ε-сеть)**.** (X,ρ) – метрическое пространство. $A \subset X, \varepsilon > 0$
F – ε-сеть для A, если

$$\forall\, a \in A \,\exists\, f \in F : \rho(a,f) < \varepsilon$$
$$(\Leftrightarrow\ \forall\, a \in A B_\varepsilon(a) \cap F \neq \varnothing) \Leftrightarrow (A \subset \bigcup U_{f\in F} B_\varepsilon(f))$$

Определение 5.3. A – **вполне ограниченное множество**, если для $\forall\, \varepsilon > 0 \,\exists\,$ конечная ε-сеть для A.

Описание компактных и относительно-компактных множеств в терминах почти ограниченных – как раз наша главная цель. Мы будем использовать это новое описание так: если мы в полном метрическом пространстве, то там относительная компактность и вполне ограниченность – одно и то же. А проверять вполне ограниченность - гораздо проще, чем проверять относительную компактность. Предъявим ε-сеть и всё!

Замечание 5.3. (X,ρ), A – вполне ограниченное $\Rightarrow A$ – ограничено.

Пример 5.2. $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_2) = l_n^2 \quad A \subset \mathbb{R}^N$. A – ограниченное $\Leftrightarrow A$ вполне ограниченное

Доказательство. A – ограниченное $\Leftrightarrow \exists\, M > 0, \forall\, x - (x_1,\ldots,x_n) \in A \Rightarrow |x_j| \leq M$
$A \subset \mathbb{Q} = \{|x_j| \leq M, 1 \leq j \leq n\}$ Как же построить ε–сеть?

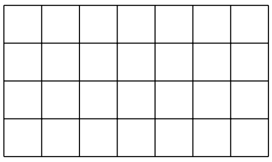


Рис. 5.1: классный поясняющий рисуночек

Пусть $\varepsilon > 0$, $Q = \bigcup Q_j, l$ – сторона Q_j

$$\operatorname{diam} Q_j = \sup_{x,y \in Q_j} \rho(x,y) = \sqrt{n} \cdot l < \varepsilon \Rightarrow l < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$$

$$l = \frac{M}{N}, N \in \mathbb{N}, \exists\, N : \frac{M}{N} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \Rightarrow$$

$$F \text{ – вершины } Q_j \text{ – } \varepsilon\text{-сеть}$$

EC = equicontinuous □

Убедимся в пространстве l^2

Пример 5.3. $D \subset l^2, D = \{x \in l^2 : ||x||_2 \leq 1\}$ Убедимся, что D – не вполне ограниченное.

Доказательство.

$$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}, e_n = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{n}, 0, \ldots), n \neq m, ||e_n - e_m|| = \sqrt{2}$$

$$B_{\frac{1}{2}}(e_n) \cap B_{\frac{1}{2}}(e_m) = \varnothing$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}, F \text{ – } \frac{1}{2}\text{-сеть для } D$$

$$\Rightarrow\ \forall\, n\, \exists\, f_n \in F \cap B_{\frac{1}{2}}(e_n),\ f_n \neq f_m (n \neq m) \text{ так как } B_{\frac{1}{2}}(e_n) \cap B_{\frac{1}{2}}(e_m) = \varnothing$$

$$\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F \Rightarrow F \text{ – не конечное}$$

□

Теперь посмотрим для l^{∞}

Пример 5.4. $\Pi = \{x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, |x_n| < \frac{1}{2^n}\} \subset l^2$. Проверим, что Π – вполне ограничено. 0

$$\exists\, M \in \mathbb{N} \quad \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

$$\Pi^* = \{x = \{x_1, \ldots, x_N, 0, 0, \ldots\}\}, |x_j| \leq \frac{1}{2^j}, 1 \leq j \leq N \quad x_{N+k} = 0, k \in \mathbb{N}$$

Если мы забудим, про нули, то можем думать, что Π^* лежит в $\mathbb{R}^n$, и там оно ограниченное, а значит и вполне ограниченное. $\Pi^* \subset \mathbb{R}^n$, Π^* – ограниченное $\Rightarrow$ вполне ограниченное $\Rightarrow \exists\, F \subset \Pi^*$ – конечная ε-сеть. Докажем, что F – 2ε-сеть для Π.

$$x \in \Pi \quad \Rightarrow x = \underbrace{(x_1, \dots, x_N, 0, \dots)}_{y} + \underbrace{(0, 0, \dots, 0, x_{N+1}, x_{N+2}, \dots)}_{z}$$

$$||z||_2 < \varepsilon \quad y \in \Pi^* \Rightarrow \exists\, f \in F : ||y - f||_2 < \varepsilon \Rightarrow$$
$$||x - f||_2 = ||(y - f) + z||_2 \le ||y - f||_2 + ||z||_2 < 2\varepsilon$$
$$\Rightarrow \Pi \text{ – вполне ограничено}$$

Таким образом, все множества можно описать в пространстве l^∞. Перед тем, как доказывать основную теорему, несколько свойств вполне ограниченных множеств.

Свойство 5.1.

1. A – вполне ограничено $\Rightarrow$ $\overline{A}$ – вполне ограничено

2. $A \subset Y \subset X, A$ – вполне ограничено в X $\Rightarrow$ A – вполне ограниченное в Y.

3. A – вполне ограничено $\Rightarrow (A, \rho)$ – сепарабельно.

1 свойство. $A \subset X, \varepsilon > 0$. F – конечная ε-сеть для A. Проверим, что F – (2ε-сеть) для $\overline{A}$

$$\text{пусть } x \in \overline{A} \Rightarrow \exists\, y \in A : \rho(x, y) < \varepsilon, \exists\, f \in F : \rho(y, f) < \varepsilon$$
$$\Rightarrow \rho(x, f) \le \rho(x, y) + \rho(y, f) < 2\varepsilon$$

□

2 свойство. Проблема в том, что надо двигать точки. Мы уже так делали, когда доказывали сепарабельность. $A \subset Y \subset X, \varepsilon > 0, \{x_k\}_{k=1}^n$ – ε-сеть для A, $x_k \in X$
$A \subset \bigcup_{k=1}^n B_\varepsilon(x_k)$, если $A \cap B_\varepsilon(x_k) \ne \varnothing$, то пусть $y_k \in A \cap B_\varepsilon(x_k)$ (если $= \varnothing$, то не будем выбирать)

Мы найдем ε-сеть из точек множества A, тогда она точно будет обслуживать и Y. Как же и куда сдвигать точки?

$E = \{y_k\}_{k=1}^{n}$

$$x \in A \Rightarrow \exists\, x_k : \rho(x, x_k) < \varepsilon \Rightarrow A \cap B_\varepsilon(x_k) \neq \varnothing \Rightarrow y_k \in B_\varepsilon(x_k) \Rightarrow$$
$$\rho(x_k, y_k) < \varepsilon \Rightarrow \rho(x, y_k) \leq \rho(x, x_k) + \rho(x_k, y_k) < 2\varepsilon \Rightarrow$$
$$E \text{ – } (2\varepsilon)\text{-сеть для } A, E \subset A$$

□

3 свойство. $n \in \mathbb{N}, F_n$ – $\left(\frac{1}{n}\right)$-сеть для A, F_n – конечное.

$$F \text{ (счетное)} = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \text{ – плотно в } A, \text{ то есть } A \subset \overline{F}$$

□

Утверждение 5.2 (о разбиении)**.** $(X, \rho), A \subset X, \varepsilon > 0$. F – конечная ε-сеть для $A \Rightarrow$

$$\exists\, \{C_j\}_{j=1}^{n} \quad A = \bigcup_{j=1}^{n} C_j \quad C_j \cap C_k = \varnothing, j \neq k, \operatorname{diam} C_j \leq 2\varepsilon, C_j \neq \varnothing$$

Доказательство.

$$F = \{x_k\}_{k=1}^{n}, A \subset \bigcup_{k=1}^{n} B_\varepsilon(x_k)$$
$$C_1 = A \cap B_\varepsilon(x_1)$$
$$C_2 = (A \cap B_\varepsilon(x_2)) \setminus C_1$$
$$C_k = A \cap B_\varepsilon(x_k) \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{k-1}\right) \quad k = 2, \ldots, n$$

если $C_k = \varnothing$, то забудем о нём. $C_k \subset B_{\varepsilon(x_k)} \Rightarrow \operatorname{diam} C_k \leq 2\varepsilon$ □

Теперь у нас всё готово для доказательства теоремы о том, как описывать компакты в терминах вполне ограниченных множеств.

Теорема 5.1 (Хаусдорф). (X, ρ) – метрическое пространство, $A \subset X$.

A – компакт $\Leftrightarrow$

1. A полное, то есть $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A, \{x_n\}$ – фундаментальная $\exists \lim x_n = x_0 \in A$
2. A – вполне ограничено

Высока вероятность, что спросят на экзамене эту теорему, пытаясь вытянуть.

Доказательство. $\Rightarrow$
A – компакт, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – фундаментальная, $x_n \in A$.
A – компакт $\Rightarrow \exists \{x_{n_j}\}, \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_j} = x_0, x_0 \in A$. Тогда по свойствам фундаментальных последовательностей $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow (A, \rho)$ – полное метрическое пространство. Проверили первое условие. Теперь надо проверить второе: сначала покроем наш компакт безумным количеством шариков, а они ведь открытые множества, а среди них существует конечное подпокрытие.

$$0 \quad A \subset \bigcup_{a\in A} B_{>}(a) \wedge A \text{ – компакт } \Rightarrow, \exists \{a_j\}_{j=1}^{n}, a_j \in A :$$
$$A \subset \bigcup_{j=1}^{n} B_{\varepsilon}(a_j) \Rightarrow F = \{a_j\}_{j=1}^{n} \text{ – } \varepsilon\text{-сеть для } A$$

Это была тривиальная часть теоремы.
$\Leftrightarrow$.

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in A$ Собираемся применять лемму о разбиении. $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$. По лемме $\exists \{C_j^{(1)}\}_{j=1}^{N_1}$. $A = \bigcup_{j=1}^{N_1} C_j^(1), \operatorname{diam} C_j^(1) \leq 1$. Когда-то в детстве мы азнимались бесконечным делением пополам. Тут будем делать то же самое. $\exists\, j : C^(1)_j$ содержит бесконечное число элементов $\{x_n\}$.

$A_1 := C_j^(1)$.

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2^2},\ \text{по лемме о разбиении к } A_1 \Rightarrow \exists\, \{C_j^{(2)}\}_{j=1}^{N_2}$$

$$\operatorname{diam} C_j^{(2)} \leq \frac{1}{2} \quad A_1 = \bigcup_{j=1}^{N_2} C_j^{(2)}$$

$$\exists\, 1 \leq j \leq N_2 \quad C_j^{(2)}\text{содержит бесконечное количетсво элементов в } x_n$$

$$\text{и так далее } \{A_m\}_{m=1}^{\infty}, A_{m+1} \subset A_m, \operatorname{diam}_{A_m} \leq \frac{1}{2^m}$$

$$A_m \text{ содержит бесконечное число элементов } \{x_n\}_{n=1}^{\infty}(*)$$

$$X_{n_1} \in A_1, \quad \exists\, n_2 > n_1 : x_{n_2} \in A_2 \text{ т.к. (*)}$$

$$\text{и так далее } \exists\, n_k \text{ т.ч. } n_k > n_{k-1} \quad x_{n_k} \in A_k$$

$$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}, x_{n_k} \in A_k, \operatorname{diam} A_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad A_{k+1} \subset A_k$$

$$\Rightarrow \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \text{ – фундаментальная } \wedge A \text{ – полное}$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0, x_0 \in A$$

□

Часто описывают компакт, но фактически говорят об относительный компкте. Для описания компакта, опять же, надо просто добавить замкнутость.

Следствие 5.1. (X, ρ) – метрическое, $A \subset X$.

1. A – относительно компактно $\Rightarrow A$ вполне ограничено
2. (X, ρ) – полное, A – относительно компактно $\Leftrightarrow A$ вполне ограничено

Будем изо всех сил пользоваться теоремой Хаусдорфа.

1 утверждение. A – относителько компактно, $\Rightarrow \overline{A}$ – компакт, тогда по теореме Хаусдорфа $\overline{A}$ – вполне ограничено, $A \subset \overline{A} \Rightarrow A$ вполне ограничено. □

2 утверждение. (X, ρ) – полное, A – вполне ограничено, тогда по ранее доказанному свойству ($\overline{A}$ – вполне ограничено $\wedge$ $\overline{A}$ – замкнутое в $X \Rightarrow \overline{A}$ – полное) $\Rightarrow$ по теореме Хаусдорфа $\overline{A}$ компакт $\Rightarrow A$ – относительно компактно. □

Оказывется, можно вместо конечных ε-сетей можно утверждать чуть большее.

Следствие 5.2. (X, ρ) – полное, $A \subset X$. Если для $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists$ относительно компактная ε-сеть, то A – относительно компактно

Доказательство. $0, F$ – ε-сеть для A. F – относителько компактно $\Rightarrow F$ вполне ограничено, $\exists\, E$ – конечная ε-сеть для $F \Rightarrow E$ – (2ε)-сеть для $A \Rightarrow A$ – вполне ограничено $\Rightarrow$ – A – относительно компактно. □

5.1. Относительно компактные множества в $C(K)$

Определение 5.4. (K, ρ) – метрический компакт. $C(K) = \{f : K \to \mathbb{R}(\mathbb{C}), f$ – непрерывная$\}, ||f|| = \max_{x \in K} |f(x)| \Phi \subset C(K)$. Φ – **равностепенно непрерывна**, если

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0\, \forall\, f \in \Phi, \forall\, x, y \in K, \rho(x, y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

EC – equicontinuous.

Раностепенная непрерывность отличается от равномерной непрерывности тем, что δ не зависит от f, но от ε конечно зависит. Некоторый вариант теоремы Арцелла-Асколи, который, возможно, доказывали на дифурах:

Теорема 5.2 (Асколи-Арцелла). K – компакт, (K, ρ), $\Phi \subset C(K)$. Φ – относительно компактно $\Leftrightarrow$

1. Φ – ограниченное в $C(K)$
2. Φ 00 равностепенно непрерывно
3. $\Phi \in EC$ equicontinuous

Доказательство. С самого начала отметим, что $C(K)$ – полное. Вместо проверки относительной компактности Φ будем проверять вполне ограниченность.
$\Rightarrow$

Φ – относительно компактно $\Rightarrow \Phi$ – вполне ограничено $\Rightarrow \Phi$ – ограничено, то есть $\exists\, M \geq 0$ т.ч. $||f|| \leq M\,\forall\, f \in \Phi \Leftrightarrow \forall\, x \in K, \forall\, f \in \Phi\, |f(x)| \leq M$. $\varepsilon > 0\,\exists\,\varepsilon$-сеть $\{\phi_j\}_{j=1}^n, \phi_j \in C(K)$, ϕ_j – равномерно непрерывна $\exists\,\delta_j > 0$
$x, y \in K, \rho(x, y) < \delta_j \Rightarrow |\phi_j(x) - \phi_j(y)| < \varepsilon$
$\delta = \min_{1\leq j\leq n} \delta_j$ (продолжение следует) / (упражнение) $\square$