Stanislav Sokol

AB 1, Aufgabe 1

Lösung:

(a) Zu zeigen ist $A(v+w) = Av + Aw$ - Distributivgesetz für Matrizen:
Nutze Bemerkung 2: $v, w \in \mathbb{R}^m \hat{=} V, W \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ da Vektoren $m \times 1$ Matrizen sind.

Summe der Matrizen:

$$V + W = (v_{m1} + w_{m1})_{m1}$$
$$= (b_{m1})_{m1} = B$$

Die Ausgangsgleichung kann so umgeformt werden:

$$A(v+w) \hat{=} AB$$

mit Defintion 4 angewandt:

$$AB \hat{=} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{j1} \right)_{i1}$$
$$= \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} (v_{j1} + w_{j1}) \right)_{i1}$$

mit Bemerkung 1 angewandt - a_{ij} ist ein Skalar

$$= \left(\sum_{j=1}^{m} (a_{ij} v_{j1} + a_{ij} w_{j1}) \right)_{i1}$$
$$= \left(\sum_{j=1}^{m} (a_{ij} v_{j1}) \right)_{i1} + \left(\sum_{j=1}^{m} (a_{ij} v_{j1}) \right)_{i1}$$
$$= AV + AW = Av + Aw$$

(b) Zu zeigen ist $A(\lambda v) = \lambda A v$
Beweis:

$$A(\lambda v) \hat{=} A \left((\lambda v_{j1})_{j1} \right)$$
$$= \left(\sum_{j=1}^{m} (a_{ij} (\lambda v_{j1})) \right)_{i1}$$
$$= \left(\sum_{j=1}^{m} (\lambda a_{ij} v_{j1}) \right)_{i1}$$
$$= \left(\lambda \sum_{j=1}^{m} (a_{ij} v_{j1}) \right)_{i1}$$
$$= \lambda \left(\sum_{j=1}^{m} (a_{ij} v_{j1}) \right)_{i1}$$
$$= \lambda AV \hat{=} \lambda Av$$

Aufgabe 2

Lösung:

(a) Zu zeigen ist für $B_2 := \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ dass gilt $||b_i|| = 1$ für $\forall i \in \{1, 2, 3\}$ und $\langle b_i, b_j \rangle = 0$ für $\forall i, j \in \{1, 2, 3\}$ mit $i \neq j$.

Beweis:

Normalität der Basisvektoren:

$$\begin{aligned}
||b_1|| &= \sqrt{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + 0^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2} = 1 \\
||b_2|| &= \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} = 1 \\
||b_3|| &= \sqrt{(-\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + 0^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2} = 1
\end{aligned}$$

Paarweise Orthogonalität:

$$\begin{aligned}
\langle b_1, b_2 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0 + 0 \cdot 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0 = 0 \\
\langle b_1, b_3 \rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \\
\langle b_2, b_3 \rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0 + 0 \cdot 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

(b) **Berechnung 1**

$\theta_{B_1}(v)$ für $B_1 := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ und $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned}
&\text{Satz 7 :} \\
&\theta_{B_1}(v) = M_B v \\
&\text{Definition 13 für } M_B \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\text{Bemerkung 8 - Inverse einer ONB-Matrix ist ihre transponierte} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{T} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Berechnung 2

$\theta_{B_2}(v)$ für $B_2 := \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ und $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$
\begin{aligned}
\theta_{B_1}(v) &= M_B v \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

(c) Basiswechselmatrix $M_{B_1}^{B_2}$ mit Definition 14: $M_{B_1}^{B_2} = M_{B_2} \cdot M_{B_1}^{-1}$

$$
\begin{aligned}
M_{B_2} \cdot M_{B_1}^{-1} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3

Lösung:

(a) mit Definition 26: $\theta_{(p_1,B_1)}(v) = M_{B_1}v - M_{B_1}p_1$

$$\theta_{(p_1,B_1)}(v) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{p_1}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

mit Definition 26: $\theta_{(p_2,B_2)}(v) = M_{B_2}v - M_{B_2}p_2$

$$\theta_{(p_2,B_2)}(v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v} - \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{p_2}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(b) Es sei $\theta_{(p_1,B_1)}(w) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Bestimmung von w:

$$\theta_{(p_1,B_1)}(v) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot w - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$w = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mit w lässt sich $\theta_{(p_2,B_2)}(w)$ berechnen:

$$\theta_{(p_2,B_2)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 2 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4

Lösung:

(a) Zu zeigen: $x \times y = -y \times x$

Beweis:

per Definition gilt:

$$x \times y = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}$$

Umordnen der Gleichung und skalar (-1) rausziehen

$$= - \begin{pmatrix} x_3y_2 - x_2y_3 \\ x_1y_3 - x_3y_1 \\ x_2y_1 - x_1y_2 \end{pmatrix}$$

Kommutativgesetz:

$$= - \begin{pmatrix} y_2x_3 - y_3x_2 \\ y_3x_1 - y_1x_3 \\ y_1x_2 - y_2x_1 \end{pmatrix}$$

$$= -y \times x$$

(b) Zu zeigen $\forall x, y \in \mathbb{R}^3$ mit $x \times y = 0 \Leftrightarrow$ linear abhängig.

Beweis:

Ist einer der beiden Vektoren $x, y =$Nullverktor so ist der Beweis trivial, da per Definition die lineare Abhängigkeit besteht und beide Richtungen des Beweises sind erfüllt.

Im folgenden seien $x, y \neq$ Nullvektor:

$\Rightarrow$

Seien $x, y \in \mathbb{R}^3$ linear abhängig, dann gilt per deifintion, dass

$$y = \lambda x$$

$$x \times y = x \times (\lambda x)$$

$$= \lambda \begin{pmatrix} x_2x_3 - x_3x_2 \\ x_3x_1 - x_1x_3 \\ x_1x_2 - x_2x_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Leftarrow$

Sei $x \times y = 0$, dann gilt per Definition des Kreuzproduktes

$$\begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow LGS$

$$\begin{aligned} x_2y_3 - x_3y_2 &= 0 \\ x_3y_1 - x_1y_3 &= 0 \\ x_1y_2 - x_2y_1 &= 0 \end{aligned}$$

Da $x, y \neq 0$ sind, kann folgendermaßen umformen:

$$
\begin{aligned}
x_2 &= \frac{x_3}{y_3} \cdot y_2 \\
x_3 &= \frac{x_1}{y_1} \cdot y_3 \\
x_1 &= \frac{x_2}{y_2} \cdot y_1
\end{aligned}
$$

Es bedeutet aber auch, dass $\frac{x_i}{y_i} \neq 0$ ist. Mit $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3} = \lambda$ ergibt sich $(x_1, x_2, x_3) = \lambda(y_1, y_2, y_3)$, also $x = \lambda y$. Dies ist per Definition linear abhängig.

(c) Zu zeigen ist $\langle x, x \times y\rangle = \langle y, x \times y\rangle = 0$

$$
\begin{aligned}
\langle x, x \times y\rangle = &\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix} \\
&= x_1(x_2y_3 - x_3y_2) + x_2(x_3y_1 - x_1y_3) + x_3(x_1y_2 - x_2y_1) \\
&= x_1x_2y_3 - x_2x_1y_3 + x_2x_3y_1 - x_3x_2y_1 + x_2x_1y_2 - x_1x_2y_2 \\
= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle y, x \times y\rangle = &\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix} \\
&= y_1(x_2y_3 - x_3y_2) + y_2(x_3y_1 - x_1y_3) + y_3(x_1y_2 - x_2y_1) \\
&= y_1x_2y_3 - y_1x_3y_2 + y_2x_3y_1 - y_2x_1y_3 + y_3x_1y_2 - y_3x_2y_1 \\
&= 0
\end{aligned}
$$