

Einführung in die Computergrafik

Johannes Riesterer

23. Oktober 2015

©Johannes Riesterer
Vervielfältigung nur mit ausdrücklicher Erlaubnis des Autors

Vorwort

Inhaltsverzeichnis

1	Mathematische Werkzeuge	4
1.1	Lineare Algebra	4
1.1.1	Vektoren und Matrizen	4
1.2	Affiner Raum und affine Abbildungen	12
1.2.1	Homogene Koordinaten und Projektionen	14
2	Kurven, Flächen und Netze	15
2.1	Polygone, Netze und Elemente der diskreten Geometrie	15
2.2	Datenstrukturen	22
2.3	Modellierung	22
2.3.1	Parameterdarstellungen	22
2.3.2	Bezier Kurven	23
2.3.3	Subdivision	28
2.4	Labor	28
3	Echtzeitvisualisierung und OpenGL	28
3.1	Geschichte	28
3.2	GL-Pipeline	28
3.3	Lokale Beleuchtungsmodelle	28
3.3.1	Ideale Reflexionen und Lichtbrechungen	28
3.3.2	Lambert Modell	28
3.3.3	Phong Modell	28
3.4	Texturen und UV-Mapping	28
3.5	Shaderprogrammierung und standard Algorithmen	28
3.5.1	Syntax und Funktionsumfang	28
3.5.2	Flat shading	28
3.5.3	Phong shading	28
3.5.4	Bumpmapping	28
3.5.5	Displacementmapping	28
3.5.6	Shadowmap	28
3.6	Labor	28
3.6.1	WebGL	28
4	Raytracing	28
4.1	Farbwahrnehmung und Farbmodelle	28
4.2	Globale Beleuchtungsmodelle und Rendergleichung	28
4.3	Raycasting	28
4.3.1	”Klassisches” Raytracing	28
4.3.2	Monte Carlo Integration und Pathtracing	28
4.3.3	Datenstrukturen für Bereichsabfragen	28
4.4	Raymarching	28
4.5	Labor	28

4.5.1	Blender	28
4.5.2	Echtzeitfähiges Raymarching in WebGL	28
5	Animation und Simulation	28
5.1	Keyframe Animation	28
5.2	Partikelsysteme	28
5.3	Elemente der Kollisionserkennung	28
5.4	Labor	28

1 Mathematische Werkzeuge

1.1 Lineare Algebra

1.1.1 Vektoren und Matrizen

Wir wollen zunächst den Vektorraum \mathbb{R}^n einführen. Hierbei ist n eigentlich immer 2, 3 oder 4. Zunächst ist der \mathbb{R}^n eine Menge, nämlich die Menge der n -dimensionalen Vektoren

$$\mathbb{R}^n := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

Auf dieser Menge der Vektoren definiert man die Addition

$$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

und die sogenannte Skalarmultiplikation

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$
$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \lambda \cdot x_2 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}.$$

Das Element $\lambda \in \mathbb{R}$ nennt man auch Skalar.

Definition 1. Der Vektorraum \mathbb{R}^n ist das Tripel $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$.

Beispiel 1.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$-1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\pi \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ 2\pi \\ 3\pi \\ 4\pi \end{pmatrix}$$

Bemerkung 1. Für alle Skalare $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^n$ gelten die Rechenregeln

$$\begin{aligned} \lambda \cdot (u + v) &= \lambda \cdot u + \lambda \cdot v \\ (\lambda + \mu) \cdot u &= \lambda \cdot u + \mu \cdot u . \end{aligned}$$

Definition 2. Für ein $u, v \in \mathbb{R}^n$ sind die folgenden Kurz-Notationen üblich

$$\begin{aligned} -u &:= -1 \cdot u \\ u - v &:= u + (-v) := u + (-1 \cdot u) \end{aligned}$$

Definition 3. Eine $n \times m$ Matrix ist ein Objekt der Form

$$(a_{ij})_{ij} := \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & a_{i,3} & \cdots & a_{i,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix}$$

mit $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ für alle $i = 1, \dots, n$ und $j = 1, \dots, m$.

Bemerkung 2. Ein Vektor der dimension n ist eine $n \times 1$ -Matrix.

Definition 4. Ist $A = (a_{ij})_{ij}$ eine $n \times m$ und $B = (b_{kl})_{kl}$ eine $m \times p$ Matrix so ist das Matrizenprodukt definiert als die $n \times p$ Matrix

$$A \cdot B := \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} \cdot b_{jl} \right)_{il} .$$

Sind A und B zwei $n \times m$ -Matrizen so ist ihre Summer definiert durch

$$A + B := \left(a_{ij} + b_{ij} \right)_{ij} .$$

Für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ definieren wir die Skalarmultiplikation

$$\lambda \cdot A := \left(\lambda \cdot a_{ij} \right)_{ij} .$$

Definition 5. Die n -dimensionale Einheitsmatrix ist definiert durch

$$I_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung 3. Sind A und B beides $n \times n$ -Matrizen, so ist im Allgemeinen

$$A \cdot B \neq B \cdot A.$$

Für die n -te Einheitsmatrix I_n gilt jedoch immer

$$A \cdot I_n = I_n \cdot A = A.$$

Definition 6. Für eine 2×2 -Matrix definieren wir die Determinante

$$\det : M^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\det \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) := ad - bc$$

Satz 1. Für eine $n \times n$ Matrix $A = (a_{ij})_{ij}$ definieren wir die Determinante durch die Rekursionsformel

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

und $\det(a) = a$ für eine 1×1 -Matrix a , wobei A_{ij} die Matrix ist, die aus A durch Streichen der i -ten Zeile und der j -ten Spalte entsteht. Diese Definition ist unabhängig von der Wahl von i . (Entwickeln nach der i -ten Zeile).

Satz 2. Für alle $n \times n$ -Matrizen A, B gilt

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Satz 3. Sei A eine $n \times n$ Matrix. Dann existiert genau dann eine Matrix A^{-1} mit

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n,$$

wenn $\det(A) \neq 0$. A^{-1} ist eindeutig bestimmt.

Bemerkung 4. Ist v ein n -dimensionaler Vektor und A eine $m \times n$ -Matrix, so ist $A \cdot v$ ein m -dimensionaler Vektor.

Definition 7. Ist $A := (a_{ij})_{ij}$ eine $n \times m$ -Matrix, so heißt die $m \times n$ -Matrix $A^t := (a_{ji})_{ij}$ die transponierte Matrix.

Definition 8. Ist insbesondere $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$ ein k -dimensionaler Vektor, so heisst

$v^t = (x_1 \ \cdots \ x_n)$ der transponierte Vektor, welcher auch eine $1 \times n$ -Matrix ist.

Satz 4. Für alle $n \times m$ -Matrizen A und m -dimensionale Vektoren u, v gilt

$$A \cdot (\lambda \cdot u + \mu \cdot v) = \lambda \cdot A \cdot u + \mu \cdot A \cdot v .$$

Definition 9. Vektoren $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ heißen linear unabhängig, falls für $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, k$ mit

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot v_i = 0$$

stets $\lambda_i = 0$ folgt für alle $i = 1, \dots, k$.

Satz 5. Die Vektoren $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ sind genau dann linear abhängig, wenn man mit Hilfe des Gaußalgorithmus in der Matrix

$$\begin{pmatrix} v_1^t \\ \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \\ v_k^t \end{pmatrix}$$

eine Nullzeile erzeugen kann.

Bemerkung 5. Für $k > n$ sind $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ stets linear abhängig.

Definition 10. Für Vektoren $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ heißt die Menge

$$\text{span}(v_1, \dots, v_k) := \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot v_i \mid \lambda_i \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

der von ihnen aufgespannte lineare Unterraum. Diese Definition ist offensichtlich unabhängig von der Reihenfolge. Eine Menge von Vektoren $\{w_1, \dots, w_l\}$ heißt Basis von $\text{span}(v_1, \dots, v_k)$, falls w_1, \dots, w_l linear unabhängig sind und $\text{span}(w_1, \dots, w_l) = \text{span}(v_1, \dots, v_k)$ gilt. l heißt dann auch die Dimension von $\text{span}(v_1, \dots, v_k)$.

Satz 6. Ist $B := \{b_1, \dots, b_n\}$ eine Menge linear unabhängiger n -dimensionaler Vektoren, so ist

$$\text{span}(b_1, \dots, b_n) = \mathbb{R}^n .$$

Wir nennen dann die geordnete Menge B eine Basis des \mathbb{R}^n .

Definition 11. Wir bezeichnen die Basis $E := \{e_1, \dots, e_n\}$ des \mathbb{R}^n mit

$$e_i := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-te Stelle}$$

als Standardbasis des \mathbb{R}^n .

Definition 12. Sei $B := \{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis des \mathbb{R}^n und $v \in \mathbb{R}^n$. Dann gibt es nach dem letzten Satz Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, so dass sich v als Linearkombination

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot b_i$$

ausdrücken lässt. Schreibt man diese λ_i wieder in einen Vektor, so erhalten wir eine Abbildung

$$\theta_B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Man nennt $\theta_B(v)$ die Darstellung von v zur Basis B .

Bemerkung 6. Für die Standardbasis E des \mathbb{R}^n ist $\theta_E(v) = v$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$, also $\theta_S = id$.

Definition 13. Sei $B := \{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis des \mathbb{R}^n und $v \in \mathbb{R}^n$. Dann definieren wir

$$M_B = \left(b_1 \mid b_2 \mid \dots \mid b_n \right)^{-1}.$$

Satz 7. Sei $B := \{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis des \mathbb{R}^n und $v \in \mathbb{R}^n$. Dann ist

$$\theta_B(v) = M_B \cdot v$$

Definition 14. Seien $B := \{b_1, \dots, b_n\}$ und $B' := \{b'_1, \dots, b'_n\}$ zwei Basen des \mathbb{R}^n . Dann heißt $M_B^{B'} := M_{B'} \cdot M_B^{-1}$ die Basiswechselmatrix von B nach B' . Wir haben also folgende Situation:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xleftarrow{M_B^{-1}} & \mathbb{R}^n \\ \downarrow I_n & & \downarrow M_B^{B'} \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{M_{B'}} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

Definition 15. Die Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (x_1 \quad \cdots \quad x_n) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i$$

heißt Skalarprodukt.

Satz 8. Für alle $u, v, w, l \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda, \mu, \tau, \nu \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \langle \lambda u + \mu v, \tau w \rangle &= \lambda \tau \langle u, w \rangle + \mu \tau \langle v, w \rangle \\ \langle \lambda u, \tau w + \nu l \rangle &= \lambda \tau \langle u, w \rangle + \lambda \nu \langle u, l \rangle \end{aligned}$$

Definition 16. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \|\cdot\|: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ \|v\| &:= \sqrt{\langle v, v \rangle} \end{aligned}$$

heißt Norm.

Definition 17. Zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^n$ heißen orthogonal, falls $\langle u, v \rangle = 0$ ist. Man sagt auch sie stehen senkrecht aufeinander und benutzt auch die Bezeichnung $u \perp v$.

Definition 18. Sind u und v zwei 3-dimensionale Vektoren, dann heißt der Vektor

$$u \times v :=$$

das Kreuzprodukt von u und v .

Bemerkung 7. Für $u, v \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\langle u \times v, u \rangle = \langle u \times v, v \rangle = 0.$$

Das Kreuzprodukt steht also senkrecht auf u und auf v .

Definition 19. Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt normal, falls $\|v\| = 1$ ist. Ist $w \in \mathbb{R}^n$ ein beliebiger Vektor, so heißt $\frac{1}{\|w\|}w$ die Normalisierung von w .

Definition 20. Eine Basis $B := \{b_1, \dots, b_n\}$ heißt Orthonormalbasis (kurz ONB), falls

$$\langle b_i, b_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gilt. Insbesondere sind alle b_i normal.

Algorithmus 1. Seien v_1, \dots, v_n linear unabhängige Vektoren. Dann lässt sich daraus durch folgenden Algorithmus eine ONB generieren:

$$b'_i := v_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle v_i, b_j \rangle b_j$$

$$b_i := \frac{1}{\|b'_i\|} b'_i$$

und Rekursionsanfang $b'_1 = v_1$.

Im \mathbb{R}^3 gibt es eine besonders einfache Methode aus zwei Vektoren einen Vektor zu generieren, der auf den Ausgangs-Vektoren senkrecht steht.

Definition 21. Für $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ heißt

$$u \times v := \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

das Kreuzprodukt von u und v .

Bemerkung 8. Es gilt

- $\langle u \times v, u \rangle = \langle u \times v, v \rangle = 0$
- $u \times v = -(v \times u)$
- $u \times v = 0$ genau dann, wenn u und v linear abhängig sind.

Bemerkung 9. Ist $B := \{b_1, \dots, b_n\}$ eine ONB, so gilt

$$M_B^{-1} = M_B^t$$

Definition 22. Eine Matrix $O \in \mathbb{M}^{n \times n}$ heißt orthogonal, falls $O^{-1} = O^t$ ist.

Satz 9. Eine Matrix $O \in \mathbb{M}^{n \times n}$ ist genau dann orthogonal, falls

$$\det(O) \in \{-1, 1\}.$$

Ist $\det(O) = 1$, so nennen wir O eine Drehung und $SO(n) := \{ \}$ die Drehgruppe (oder auch spezielle orthogonale Gruppe).

Satz 10. Sei $O \in \mathbb{M}^{n \times n}$ eine orthogonale Matrix, dann gilt für alles $v, w \in \mathbb{R}^n$

$$\langle O \cdot v, O \cdot w \rangle = \langle v, w \rangle$$

und somit insbesondere

$$\|O \cdot v\| = \|v\|.$$

Definition 23. Eine 2×2 -Drehmatrix ist eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \pm \sin(\varphi) \\ \mp \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

für ein $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Bemerkung 10. Eine 2×2 -Drehmatrix ist eine orthogonale Matrix.

Definition 24. Eine elementare 3×3 -Drehmatrix ist eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & \pm \sin(\varphi) \\ 0 & \mp \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & \pm \sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \mp \sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \pm \sin(\varphi) & 0 \\ \mp \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

für ein $\varphi \in [0, 2\pi]$.

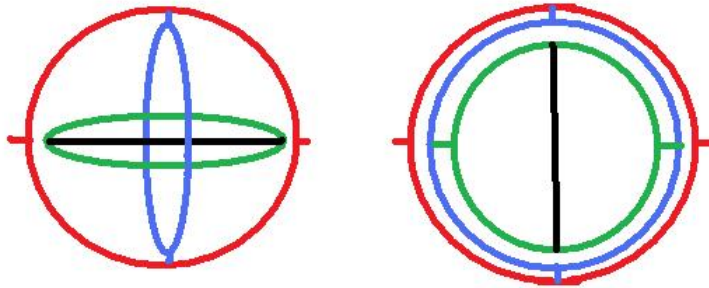
Satz 11. Jede Drehung $O \in SO(3)$ lässt sich zerlegen in ein Produkt

$$O = \begin{pmatrix} \cos(\xi) & \sin(\xi) & 0 \\ -\sin(\xi) & \cos(\xi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\psi) & 0 & \sin(\psi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\psi) & 0 & \cos(\psi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Winkel ϕ, ψ, ξ heißen Eulerwinkel.

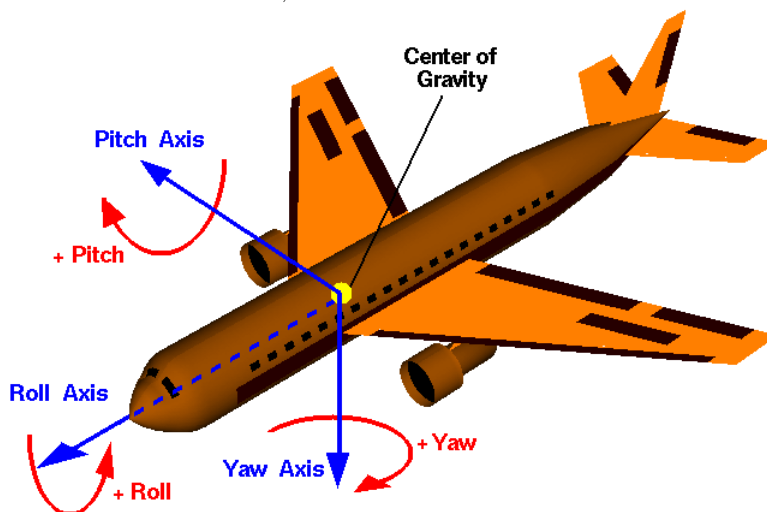
Bemerkung 11. Die Zerlegung $O \in SO(3)$ einer Drehung in obiges Produkt ist nicht eindeutig. Ein anschauliches Beispiel dafür liefert der sogenannte "Gimbal lock".

Kardansche Aufhängung und Gimbal lock



Bemerkung 12. Man kann bei der Produktzerlegung auch andere elementare Drehmatrizen (elementare Drehachsen) wählen, wobei eine spezielle Wahl zu den in der Luft und Raumfahrt verwendeten "Roll, Nick, Gier" Winkeln führen.

Roll, Nick und Gier Winkel



1.2 Affiner Raum und affine Abbildungen

Der Affine Raum \mathbb{A}^n ist ein Tupel

$$(\mathbb{R}^n, (\mathbb{R}^n, +, \cdot))$$

zusammen mit den Abbildung

$$\begin{aligned} - : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow (\mathbb{R}^n, +, \cdot) \\ \overline{PQ} &:= Q - P \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} + : \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n, +, \cdot) &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ \begin{pmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} &:= \begin{pmatrix} P_1 + v_1 \\ \vdots \\ P_n + v_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Elemente (Vektoren) aus \mathbb{R}^n nennt man auch Punkte in Abgrenzung zu den Vektoren aus $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$. Für Punkte $P, Q \in \mathbb{R}^n$ ist also \overline{PQ} ein Vektor, auch Verbindungsvektor genannt.

Definition 25. Ist $B := \{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis des Vektorraums $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ und $P \in \mathbb{A}$ ein Punkt, so nennen wir das Tupel (P, B) eine affine Basis. Für jeden Punkt Q gibt es dann also Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ mit

$$Q = P + \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot b_i .$$

Der Punkt $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ heißt die Darstellung von Q bezüglich der affinen Basis (P, B) .

Definition 26. Abbildungen der Form

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{A} &\rightarrow \mathbb{A} \\ \phi(P) &:= A \cdot P + t \end{aligned}$$

mit $A \in M^{n \times n}$ und $t \in (\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ heißen affine Abbildungen. Insbesondere heißt eine affine Abbildung mit $A = I_n$ und $t \neq 0$ Translation.

Bemerkung 13. Eine Affine Abbildung

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{A}^n &\rightarrow \mathbb{A}^n \\ \phi(P) &:= A \cdot P + t \end{aligned}$$

ist genau dann invertierbar, falls $\det(A) \neq 0$ ist und die Inverse Abbildung ist dann

$$\begin{aligned} \phi^{-1} : \mathbb{A} &\rightarrow \mathbb{A} \\ \phi^{-1}(P) &:= A^{-1} \cdot P - A^{-1} \cdot t . \end{aligned}$$

Definition 27. Sind $(P, B := \{b_1, \dots, b_n\})$ und $(P', B' := \{b'_1, \dots, b'_n\})$ zwei affine Basen und definieren wir die Abbildung

$$\begin{aligned} \theta_{(P,B)} : \mathbb{A}^n &\rightarrow \mathbb{A}^n \\ \theta_{(P,B)}(Q) &:= M_B \cdot Q - M_B \cdot P , \end{aligned}$$

so erhalten wir analog zu der Situation in Vektorräumen

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^n & \xleftarrow{\theta_{(P,B)}^{-1}} & \mathbb{A}^n \\ \downarrow id & & \downarrow \theta_{(P',B')} \\ \mathbb{A}^n & \xrightarrow{\theta_{(P',B')}} & \mathbb{A}^n \end{array}$$

mit $\theta_{(P',B')}^{(P',B')}(Q) := \theta_{(P',B')} \left(\theta_{(P,B)}^{-1}(Q) \right)$.

Definition 28. Der Abstand von $P, Q \in \mathbb{A}$ ist definiert durch

$$\begin{aligned} d : \mathbb{A} \times \mathbb{A} &\rightarrow \mathbb{R} \\ d(P, Q) &:= \|\overline{PQ}\| . \end{aligned}$$

1.2.1 Homogene Koordinaten und Projektionen

Definition 29. Der projektive Raum ist definiert als

$$\mathbb{P}^n := \mathbb{R}^{n+1} / \sim$$

$$v \sim w \Leftrightarrow v = \lambda w \text{ für ein } \lambda \neq 0 \in \mathbb{R}.$$

Wir haben die Abbildung

$$\mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$$

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \\ 1 \end{pmatrix}$$

und nennen das Bild eines Punktes unter dieser Abbildung die homogenen Koordinaten. Auf der Menge der homogenen Koordinaten haben wir die Umkehrabbildung

$$\mathbb{P}^n - \left\{ \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \\ p_{n+1} \end{pmatrix} \mid p_{n+1} \neq 0 \right\} \rightarrow \mathbb{A}^n$$

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \\ p_{n+1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{p_1}{p_{n+1}} \\ \frac{p_2}{p_{n+1}} \\ \vdots \\ \frac{p_n}{p_{n+1}} \end{pmatrix}.$$

Die Matrizenmultiplikation

$$\mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

$$v \mapsto A \cdot v$$

setzt sich wegen der Eigenschaft $A \cdot (\lambda v) = \lambda A \cdot v$ zu einer Abbildung

$$\mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$$

$$p \mapsto A \cdot p$$

fort. Wir können damit und mit der Definition der Matrix-Vektor-Multiplikation eine affine Abbildung

$$\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\phi(v) := A \cdot v + t$$

in homogenen Koordinate ausdrücken durch eine Matrizenmultiplikation

$$\begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} A & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Definition 30. *Die Abbildung*

$$\text{persp}_{xy} : \mathbb{A}^3 \rightarrow \mathbb{A}^2$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} X \\ \frac{X}{\frac{Z}{d}+1} \\ \frac{X}{\frac{Z}{d}+1} \end{pmatrix}$$

die Zentralprojektion auf die $X - Y$ -Ebene mit Augendistanz d .

Bemerkung 14. *Die Zentralprojektion auf die $X - Y$ -Ebene mit Augendistanz d lässt sich nicht durch Multiplikation mit einer 2×3 -Matrix realisieren.*

$$K_{\text{persp}_{xy}} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{d} & 1 \end{pmatrix}$$

2 Kurven, Flächen und Netze

Die rechnergestützte Beschreibung von Kurven und Flächen ist ein wichtiges Gebiet der Computergrafik. Es ermöglicht die Berechnung geometrischer und physikalischer Eigenschaften von Körpern so wie deren graphische Darstellung. Eine zentrale Rolle spielen hierbei geometrische Objekte, die durch Punkte, Kanten und einfache Flächen, wie zum Beispiel Dreiecke oder Vierecke, beschrieben werden können. Man spricht dann auch entsprechend von Dreiecks- bzw. Vierecksnetzen. Häufig sind dabei nicht alle möglichen Konstruktionen zulässig und es hat sich ein Struktur herausgebildet, die für die Computergrafik besonders geeignet ist. Zum einen, weil seine grafische Darstellung besonders schnell und einfach möglich ist und zum anderen, weil viele Berechnungen bestimmte Voraussetzungen benötigen, man denke da zum Beispiel an die Oberfläche oder das Volumen eines Körpers. Von Bedeutung sind in diesem Kontext auch geeignete Datenstrukturen, mit deren Hilfe sich diese Strukturen und gängige Berechnungen effizient verarbeiten lassen. Ein weiterer wichtiger Aspekt ist das generieren und modellieren solcher Strukturen. Hierbei treten häufig sogenannte Interpolationsprobleme auf. Sie entstehen aus dem Wunsch heraus, Kurven und Flächen nur durch die Angabe von Punkten zu generieren.

2.1 Polygone, Netze und Elemente der diskreten Geometrie

Definition 31. *Ein geschlossenes Polygon ist ein Paar $P := (V_P, E_P)$, wobei*

$$E_P := \{e_0, \dots, e_k\} \subset \mathbb{A}^3,$$

eine geordnete Menge von paarweise verschiedenen Punkten, die auch Ecken genannt werden, und

$$K_P := \left\{ (e_0, e_1) \dots, (e_{k-1}, e_k), (e_k, e_0) \right\} \subset \mathbb{A}^3 \times \mathbb{A}^3$$

die zugehörige Menge der gerichteten Kanten ist. Ist $(e_{l-1}, e_l) \in K_P$ eine gerichtete Kante, so bezeichnen wir mit

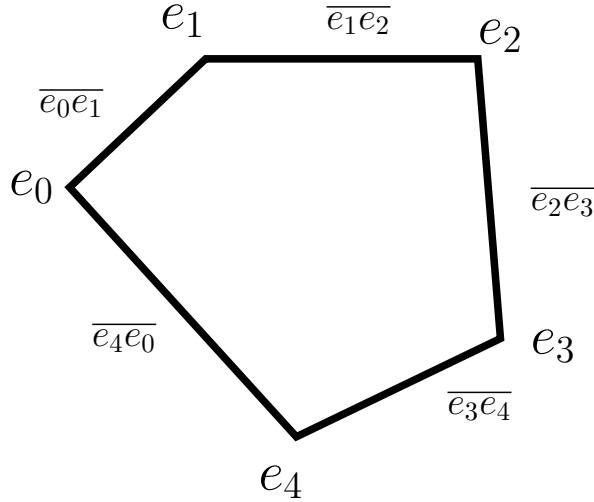
$$|(e_{l-1}, e_l)| := \overline{e_{l-1}e_l}$$

ihre geometrische Realisierung oder einfach Kante und mit

$$|P| := \bigcup_{(e_{l-1}, e_l) \in K_P} |(e_{l-1}, e_l)|$$

die geometrische Realisierung des Polygons oder geometrisches Polygon.

Ein (geschlossenes) Polygon heißt **einfach**, falls der Schnitt zweier geometrischer Kanten entweder leer oder genau ein Punkt aus V ist. Es heißt **planar**, falls alle Punkte $e \in V_P$ in einer Ebene liegen.



Definition 32. Wir nennen ein geschlossenes Polygon P' eine **Nummerierung** von P , falls $E_{P'} = E_P$ (als Mengen) und $|P'| = |P|$ ist.

Wie wir gleich sehen werden, definiert die Reihenfolge der Punkte eines einfachen, geschlossenen, planaren Polygons eine Orientierung. Um diesen Sachverhalt präzise definieren zu können, benötigen wir einen Satz, der auf den ersten Blick als selbstverständlich erscheint aber rein mathematisch betrachtet tatsächlich schwer zu beweisen ist. Es handelt sich um den Jordanschen Kurvensatz:

Satz 12. Sei P ein einfaches, geschlossenes, planares Polygon und U die Ebene, in der alle seine Punkte liegen. Dann unterteilt die geometrische Realisierung $|P|$ die Ebene U in genau zwei Gebiete, ein beschränktes, das das Innere des Polygons genannt wird, und ein unbeschränktes, das das Äußere des Polygons genannt wird.

Definition 33. Wir bezeichnen das Innere eines Polygons P mit $|\overset{\circ}{P}|$.

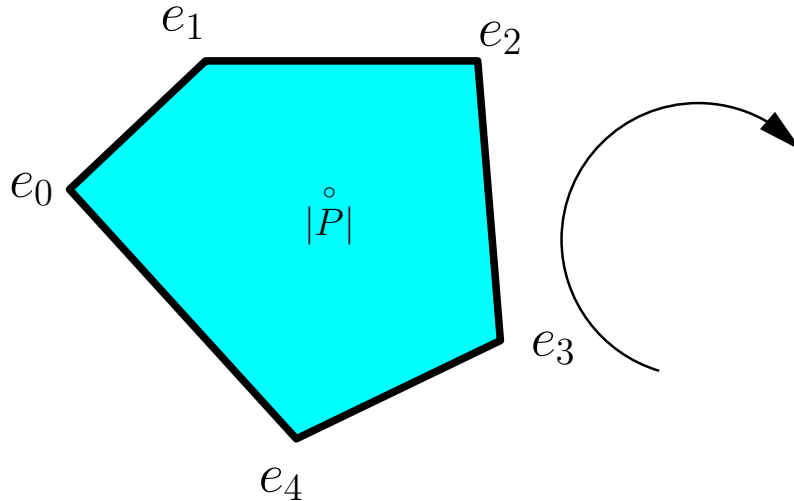
Mit Hilfe des Jordanschen Kurvensatzes können wir nun sagen, was die Durchlaufrichtung einer Kante ist und schließlich ob ein Polygon mit oder gegen den Uhrzeigersinn orientiert ist.

Definition 34. Sei P ein einfaches, geschlossenes, planares Polygon. Eine gerichtete Kante $(e_{l-1}, e_l) \in E_P$ hat **positive Durchlaufrichtung**, falls beim Durchlaufen der Kante $|(e_{l-1}, e_l)|$ von e_{l-1} nach e_l das Innere des Polygons stets rechts von der Kante liegt und **negative Durchlaufrichtung**, falls es stets links von ihr liegt.

Definition 35. Ein einfaches, geschlossenes, planares Polygon P heißt im Uhrzeigersinn orientiert, falls eine und damit alle gerichteten Kanten positive Durchlaufrichtung haben und entsprechend gegen den Uhrzeigersinn orientiert bei negativer Durchlaufrichtung.

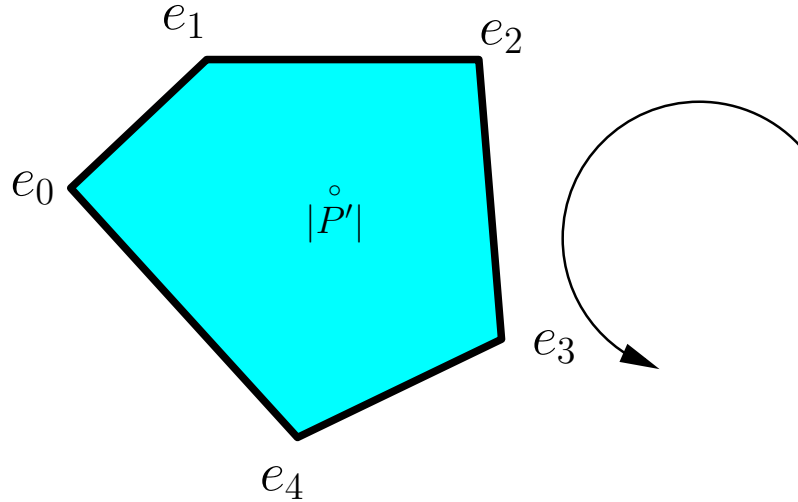
$$P = \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4\}$$

$$K_P = \{(e_0, e_1), (e_1, e_2), (e_2, e_3), (e_3, e_4), (e_4, e_0)\}$$



$$P' = \{e_0, e_4, e_3, e_2, e_1\}$$

$$K_{P'} = \{(e_0, e_4), (e_4, e_3), (e_3, e_2), (e_2, e_1), (e_1, e_0)\}$$

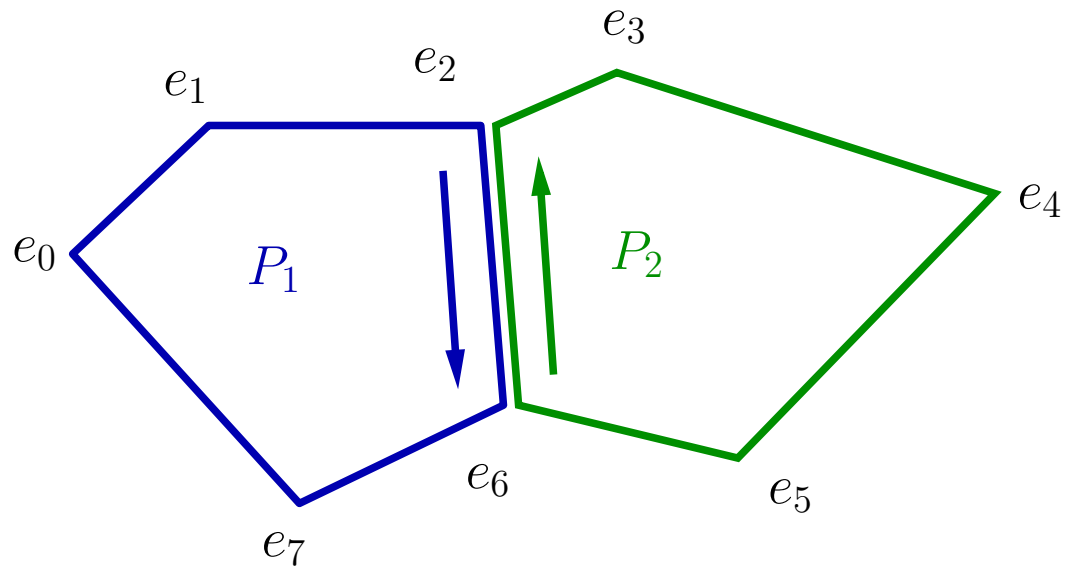


Netze bestehen nun im wesentlichen aus an den Kanten zusammengeklebten, einfachen, geschlossenen, planaren Polygonen.

Definition 36. Sei $N := \bigcup P_i$ die Vereinigung endlich vieler, einfacher, geschlossener, planarer Polygone, $E_N := \bigcup E_{P_i}$ und $K_N := \bigcup E_{P_i}$ die Vereinigung der Ecken beziehungsweise der Kantenmengen. Analog zu der Definition eines Polygons definieren wir die geometrischen Realisierungen $|K_N| := \bigcup |P_i|$ und $|N| := \bigcup |P_i| \cup |K_N|$. Dann heißt N **Netz**, falls Der Schnitt zweier Polygone entweder leer, ein Punkt in E_N oder eine Kante in K_N ist. Die Menge aller Kanten, die nur zu einem Polygon gehören, heißt Rand von N und wird mit ∂N bezeichnet. Ein Netz heißt **geschlossen**, falls es keinen Rand gibt, in Zeichen $\partial N = \emptyset$.

Durch die Orientierung von Polygonen können wir nun den Begriff der Orientierung und der Orientierbarkeit eines Netzes einführen.

Definition 37. Ein Netz N heißt orientierbar, falls man alle seine Polygone so nummerieren kann, dass jede gemeinsame Kante zweier Polygone jeweils entgegengesetzt gerichtet ist.

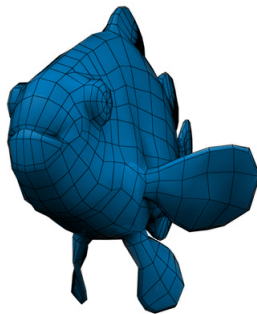


$$P_1 = \{e_0, e_1, e_2, e_6, e_7\}$$

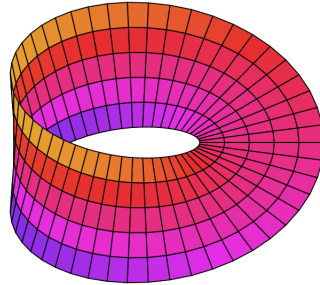
$$P_2 = \{e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$$

Bemerkung 15. Ist eine Fläche orientierbar und nummeriert man die Polygone so, dass benachbarte Kanten entsprechend der Definition immer entgegengesetzt gerichtet sind, so sind entweder alle seine Polygone im oder alle seine Polygone gegen den Uhrzeigersinn orientiert.

Ein geschlossenes, orientierbares Netz. Quelle:CGAL



Das sogenannte Möbiusband ist hingegen nicht orientierbar. Es ist nicht geschlossen, sondern hat einen zusammenhängenden Rand Quelle:Wikipedia

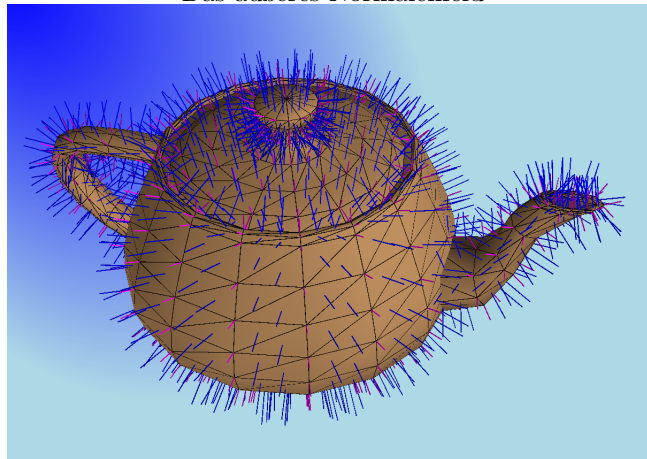


Definition 38. Eine Orientierung ist die Wahl einer Klasse von Nummerierungen, so dass alle Polygone entweder im oder gegen den Uhrzeigersinn orientiert sind.

Bemerkung 16. Ein Netz hat entweder genau zwei oder keine Orientierung.

Definition 39. Sei N ein orientierbares Netz mit einer Orientierung so gewählt, dass alle Polygone gegen den Uhrzeigersinn orientiert sind. Wählt man für jedes Polygon $P_i \in N$ drei benachbarte Ecken $e_{j-1}^{P_i}, e_j^{P_i}$ und $e_{j+1}^{P_i}$, so erhalten wir mit $n_{P_i} = e_j^{P_i} e_{j+1}^{P_i} \times e_j^{P_i} e_{j-1}^{P_i}$ einen Vektor, der Senkrecht auf der Ebene steht in der das Polygon liegt. Wir nennen die Menge $\{P_0, \dots, P_n\}$ das äußere Normalenfeld des Netzes.

Das äußere Normalenfeld



Eine wichtige Größe für ein Netz ist die sogenannte Eulercharakteristik, welche in direkter Beziehung zum sogenannten Geschlecht eines Netzes steht.

Definition 40. $N := \bigcup P_i$ ein Netz. Dann ist die Eulercharacteristik definiert als

$$\chi(N) := \#(E_N) - \#(|K_N|) + \#(N)$$

Sie ist also die Anzahl der Punkte, minus die Anzahl der geometrischen Kanten, plus die Anzahl der Facetten.

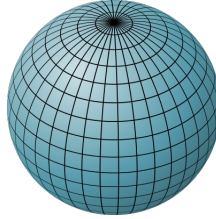
Das Geschlecht eines geschlossenen Netzes ist anschaulich gesprochen die Anzahl an Löchern, die durch das geometrische Netz hindurch gehen. Dies lässt sich mit einigem Aufwand mathematisch präzise definieren, jedoch für unsere Zwecke reicht eine Definition durch Beispiele.

Definition 41. Sei N ein geschlossenes Netz. Dann bezeichnen wir mit

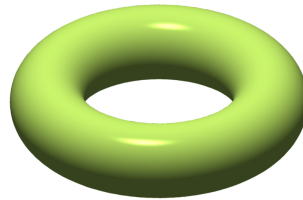
$$g(N) := \text{Anzahl der Löcher in } |N|$$

Beispiele:

Geschlossenes Netz vom Geschlecht 0. Quelle:Wikipedia



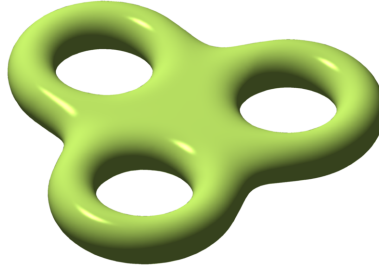
Geschlossenes Netz vom Geschlecht 1. Quelle:Wikipedia



Geschlossenes Netz vom Geschlecht 2. Quelle:Wikipedia



Geschlossenes Netz vom Geschlecht 3. Quelle: Wikipedia



Der Zusammenhang zwischen der Eulercharacteristik und dem Geschlecht wurde im allgemeinen Fall von dem Mathematiker Henri Poincare und vorher in einem Spezialfall von Leonard Euler bewiesen.

Satz 13. Für ein geschlossenes Netz N gilt $\chi(N) = 2 - 2g(N)$.

Bemerkung 17. Nach dem Satz lässt sich das Geschlecht und somit die Anzahl der Löcher via $g(N) = \frac{2-\chi(N)}{2}$ berechnen.

2.2 Datenstrukturen

2.3 Modellierung

2.3.1 Parameterdarstellungen

Definition 42. Eine Kurve ist eine Abbildung

$$c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$c(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

bei der die Funktionen $x, y, z : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig sind. Sie heisst differenzierbar, falls x, y, z differenzierbar sind und die Ableitung ist dann definiert als

$$c' : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

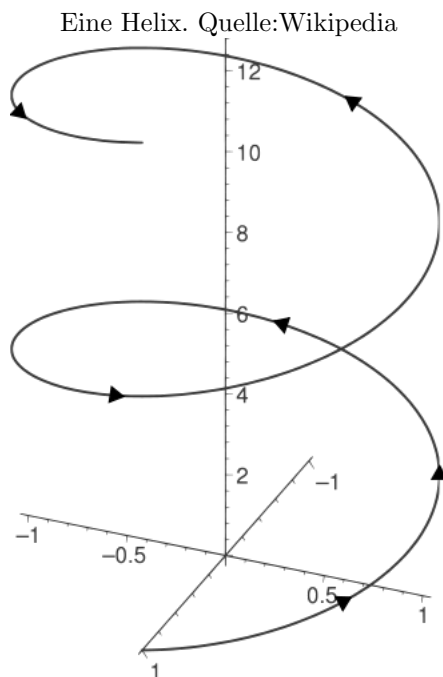
$$c'(t) := \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}.$$

Beispiel 2. Die Kurve $c : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $c(t) := \begin{pmatrix} r \cos(t) \\ r \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}$ beschreibt einen Kreis mit Radius r , der in der XY -Ebene liegt. Die Ableitung ist

$$c'(t) = \begin{pmatrix} (r \cos(t))' \\ (r \sin(t))' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r \sin(t) \\ r \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 3. Die Kurve $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $c(t) := \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}$ beschreibt eine sogenannte *Helix*. Die Ableitung ist

$$c'(t) = \begin{pmatrix} \cos'(t) \\ \sin'(t) \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{pmatrix}.$$



Definition 43. Ist $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine stückweise differenzierbare Kurve, so heißt

$$l(c) := \int_I \|c'(t)\| dt$$

ihre Länge.

2.3.2 Bezier Kurven

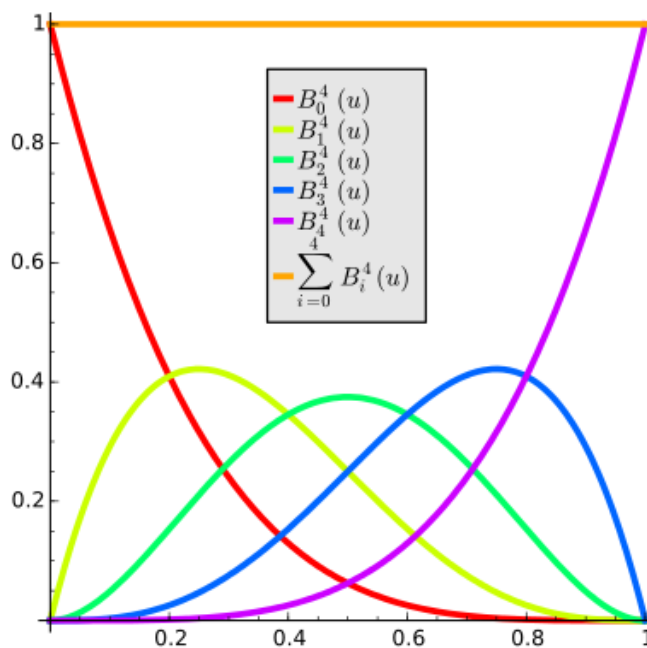
Definition 44. Die Bernsteinpolynome vom Grad n sind definiert als

$$B_i^n(t) := \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i$$

mit $i = 0, \dots, n$, $t \in [0, 1]$ und dem Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{i} := \frac{n!}{i!(n-i)!} = \frac{n(n-1) \cdots 1}{i(i-1) \cdots 1(n-i)(n-i-1) \cdots 1}.$$

Die Bernsteinpolynome B_i^4 und deren Summe Quelle:Wikipedia



Bemerkung 18. Die Bernsteinpolynome vom Grad n bilden eine Basis des Vektorraums der Polynome vom Grad n im Intervall $[0, 1]$.

Satz 14. Es gilt die Rekursionsformel

$$B_i^n(t) = (1-t) \cdot B_i^{n-1}(t) + t \cdot B_{i-1}^{n-1}(t)$$

mit $B_0^0(t) = 1$ und $B_n^i(t) = 0$ für $i < 0$ oder $i > n$.

Beweis. Folgt fast direkt aus der Rekursionsformel des Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{i} = \binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & 1 & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

□

Definition 45. Seien $b_0, \dots, b_n \in \mathbb{R}^3$. Dann heißt die Kurve

$$B^n(t) := \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \cdot b_i, t \in [0, 1]$$

eine Bezierkurve vom Grad n . Die b_i werden auch Kontrollpunkte genannt. Für ein beliebiges Intervall $[a, b]$ definieren wir

$$B_{[a,b]}^n(t) := B^n\left(\frac{t-a}{a-b}\right), t \in [a, b].$$

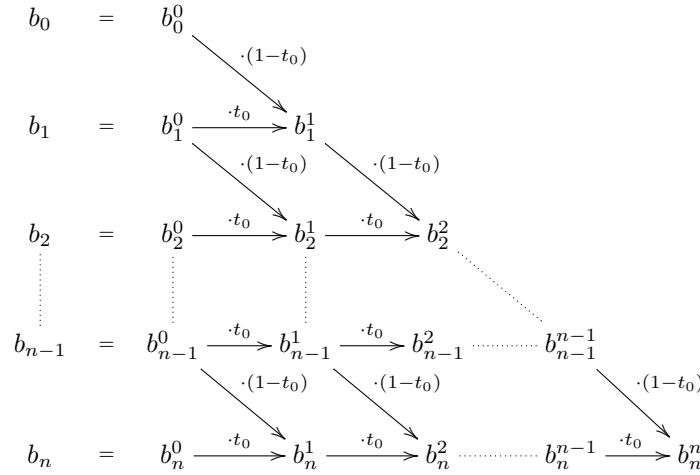
Satz 15. Eine Bezierkurve hat die Ableitung

- $(B^n)'(t) = n \cdot \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1}(t) \cdot (b_{j+1} - b_j)$, und nach der Kettenregel
- $(B_{[a,b]}^n)'(t) = \frac{1}{b-a} (B^n)'(\frac{t-a}{b-a})$ für ein beliebiges Parameterintervall.

Satz 16 (Algorithmus von de Casteljau). Sei $B^n(t) := \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \cdot b_i$ eine Bezierkurve. Für ein $t_0 \in [0, 1]$ definieren wir rekursiv

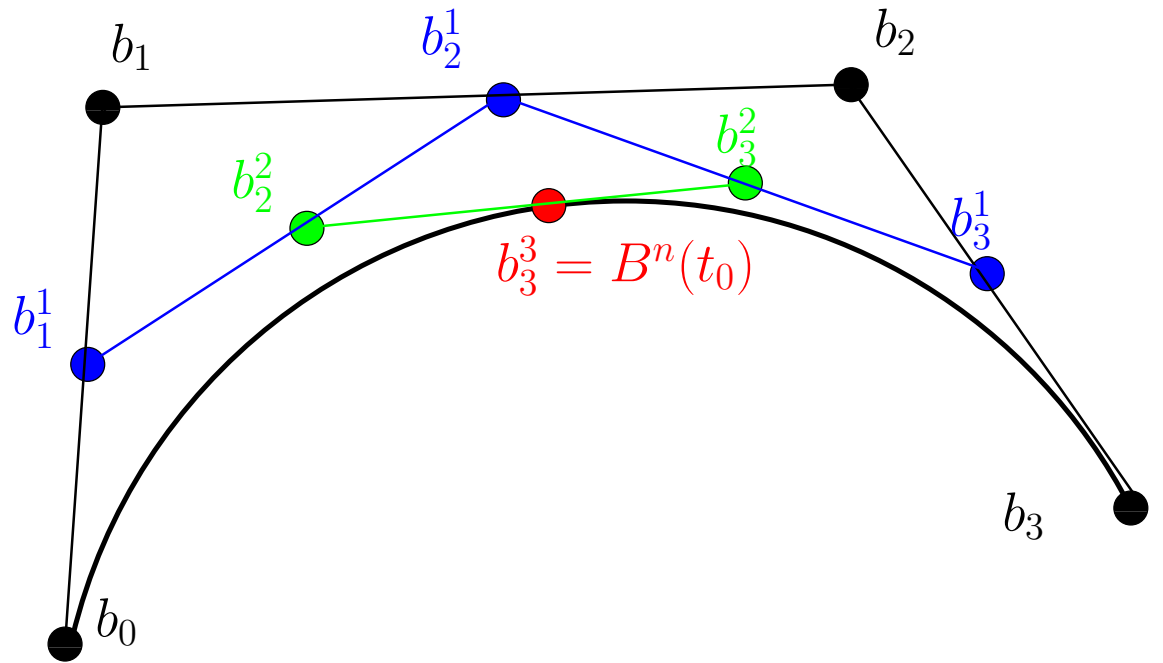
$$b_i^k := \begin{cases} b_i & i = 0, \dots, n \\ (1-t_0) \cdot b_{i-1}^{k-1} + t_0 \cdot b_i^{k-1} & i = 1, \dots, n \quad k = 1, \dots, i \end{cases}$$

was sich schematisch folgendermaßen darstellen lässt:

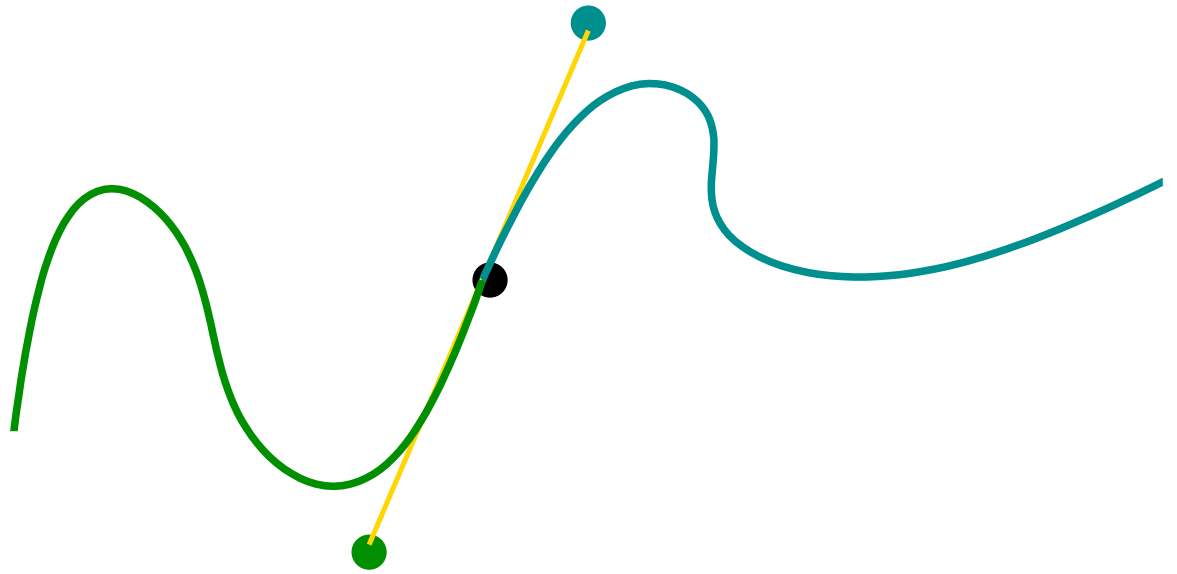


Dann gilt $b_n^n = B^n(t_0)$.

$$t_0 = \frac{1}{2}$$



Definition 46 (Patching). Seien $B^n(t)$ und $B^m(t)$ Bézierkurven. Man spricht von einem C^0 -patching, falls



Ein Rendering der Utah Teekanne, eines der weit verbreitetsten 3D-Modelle in der Computergrafik. Sie wurde mit Bezierflächen modelliert



2.3.3 Subdivision

2.4 Labor

3 Echtzeitvisualisierung und OpenGL

3.1 Geschichte

3.2 GL-Pipeline

3.3 Lokale Beleuchtungsmodelle

3.3.1 Ideale Reflexionen und Lichtbrechungen

3.3.2 Lambert Modell

3.3.3 Phong Modell

3.4 Texturen und UV-Mapping

3.5 Shaderprogrammierung und standard Algorithmen

3.5.1 Syntax und Funktionsumfang

3.5.2 Flat shading

3.5.3 Phong shading

3.5.4 Bumpmapping

3.5.5 Displacementmapping

3.5.6 Shadowmap

3.6 Labor

3.6.1 WebGL

4 Raytracing

4.1 Farbwahrnehmung und Farbmodelle

4.2 Globale Beleuchtungsmodelle und Rendergleichung

4.3 Raycasting

4.3.1 "Klassisches" Raytracing

4.3.2 Monte Carlo Integration und Pathtracing

4.3.3 Datenstrukturen für Bereichsabfragen

4.4 Raymarching

4.5 Labor

4.5.1 Blender

4.5.2 Echtzeitfähiges Raymarching in WebGL

5 Animation und Simulation

5.1 Keyframe Animation

5.2 Partikelsysteme