Einführung in die Computergrafik

Aufgabenblatt 1

Aufgabe 1. Matrizen. **(4 Punkte)**

Zeigen Sie, dass für alle Matrizen $A \in M^{n\times m}$, alle Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^m$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

(a) $A(v + w) = Av + Aw$.

(b) $A(\lambda v) = \lambda Av$.

Aufgabe 2. Basisdarstellung und Basiswechsel. **(4 Punkte)**

Gegeben seien die Basen

$$B_1 := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},\ B_2 := \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

des $\mathbb{R}^3$ und $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(a) Zeigen Sie, dass B_2 eine Orthonormalbasis ist.

(b) Berechnen Sie $\theta_{B_1}(v)$ und $\theta_{B_2}(v)$.

(c) Bestimmen Sie die Basiswechselmatrix $M_{B_1}^{B_2}$.

Aufgabe 3. Affine Basis und affiner Basiswechsel. **(4 Punkte)**

Gegeben seien die affine Basen (p_1, B_1) und (p_2, B_2) des $\mathbb{A}^3$ mit B_1, B_2 aus Aufgabe 2, $p_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie $\theta_{(p_1,B_1)}(v)$ und $\theta_{(p_2,B_2)}(v)$.

(b) Es sei $\theta_{(p_1,B_1)}(w) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\theta_{(p_2,B_2)}(w)$.

Aufgabe 4. Kreuzprodukt. **(4 Punkte)**

Gegeben seien die Vektoren $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie:

(a) $x \times y = -y \times x$.

(b) x und y sind genau dann linear abhängig, wenn $x \times y = 0$ ist.

(a) $\langle x, x \times y\rangle = \langle y, x \times y\rangle = 0$.
