

# 位场理论

北巷的猫

2018 年 12 月 15 日

# 目录

<b>1</b>	<b>场的定义</b>	<b>3</b>
1.1	场的定义 . . . . .	3
1.2	位场的定义 . . . . .	3
1.3	场的刻画 . . . . .	4
1.3.1	梯度 . . . . .	4
1.3.2	散度 . . . . .	4
1.3.3	旋度 . . . . .	4
<b>2</b>	<b>场的基本特征</b>	<b>4</b>
2.1	源 . . . . .	4
2.2	位满足的方程 . . . . .	4
2.3	位的分类 . . . . .	4
2.4	磁偶极子产生的位 . . . . .	4
<b>3</b>	<b>几个重要的场</b>	<b>4</b>
3.1	引力场 . . . . .	4
3.2	恒定电流场 . . . . .	5
<b>4</b>	<b>位场变换</b>	<b>5</b>
4.1	$\delta$ 函数的定义 . . . . .	5
4.2	格林公式 . . . . .	5
4.3	调和函数 . . . . .	6
4.4	泊松公式 . . . . .	6
4.5	延拓 . . . . .	6
4.6	基本位场变换公式 . . . . .	6
4.7	傅里叶变换 . . . . .	6
4.8	磁化极 . . . . .	6

# 1 场的定义

## 1.1 场的定义

数学上的定义:

A field may be defined mathematically as the function of a set of variables in a given space.

给定空间内一系列变量的函数

a field is a distribution in space of any quantity: scalar, vector, time dependent, or independent of time

物理上的定义

A field is a physical quantity, represented by a number or tensor, that has a value for each point in space and time!

场是一个用数字或张量表示的, 在时间和空间上任意一点都有值的物理量。

## 1.2 位场的定义

设矢量场在区域D内的场量函数为:  $\vec{A}(x, y, z)$ , 对于区域D内的任一闭合曲线L, 都有  $\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l} = 0$ , 则称矢量场  $\vec{A}(x, y, z)$  为位场。

根据stokes定理:

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_s \nabla \times \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

得到:  $\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = 0$ , 即矢量场A的积分与路径无关, 即存在标函数, 使得:

$$\vec{A} = -\nabla U$$

即无旋为位场。

## 1.3 场的刻画

### 1.3.1 梯度

$$\nabla \varphi = \text{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k}$$

## 1.3.2 散度

$$\nabla \cdot \vec{A} = \text{div} \vec{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial A_x} + \frac{\partial \varphi}{\partial A_y} + \frac{\partial \varphi}{\partial A_z}$$

## 1.3.3 旋度

$$\nabla \times \vec{A} = \text{rot} \vec{A} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{bmatrix}$$

## 2 场的基本特征

## 2.1 源

## 2.2 位满足的方程

## 2.3 位的分类

## 2.4 磁偶极子产生的位

## 3 几个重要的场

## 3.1 引力场

## 1. 万有引力定律

$$\vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \vec{r}_{12}$$

## 2. 引力场的涡旋特征

$$\oint_L \vec{G} \cdot d\vec{l} = 0$$

根据斯托克斯公式

$$\oint_L \vec{G} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{rot} \vec{G} \cdot d\vec{s}$$

$$\nabla \times \vec{G} \cdot d\vec{s}$$

它说明引力场 $\vec{G}$ 是处处无旋的。

因此，引入标位

$$\mathbf{U} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \int_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0)}^{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})} \vec{G} \cdot \mathbf{d}\vec{l}$$

### 3.2 恒定电流场

## 4 位场变换

### 4.1 $\delta$ 函数的定义

狄拉克函数(Dirac Delta Function)

定义

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$$

性质

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$$

### 4.2 格林公式

1. 格林第一公式[1]

$$\oint_S V \frac{\partial U}{\partial n} ds = \iiint_V (V \nabla^2 U + \nabla U \cdot \nabla V) dv$$

2. 格林第二公式

$$\oint_S \left( V \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial V}{\partial n} \right) ds = \iiint_V (V \nabla^2 U - U \nabla^2 V) dv$$

4.3 调和函数

4.4 泊松公式

4.5 延拓

4.6 基本位场变换公式

4.7 傅里叶变换

4.8 磁化极

## 参考文献

[1] 张秋光. 《场论 (上)》, page 342. 地质出版社, 1983.