位场理论

北巷的猫

2019 年 1 月 8 日

目录

1 场的定义

1.1 场的定义

数学上的定义：

A field may be defined mathematically as the function of a set of variables in a given space。

给定空间内一系列变量的函数

a field is a distribution in space of any quantity: scalar, vector, time dependent, or independent of time

物理上的定义

A field is a physical quantity, represented by a number or tensor, that has a value for each point in space and time!

场是一个用数字或张量表示的，在时间和空间上任意一点都有值的物理量。

1.2 位场的定义

设矢量场在区域D内的场量函数为：$\vec{A}(x,y,z)$,对于区域D内的任一闭合曲线L，都有$\oint_L A\cdot dl=0$,则称矢量场$\vec{A}(x,y,z)$为位场。

根据stokes定理：

$$\oint A\cdot dl=\iint_s \nabla\times A\cdot dS$$

得到：$\oint A\cdot dl=0$,即矢量场A的积分与路径无关，即存在未函数，使得：

$$A=-\nabla\dot{U}$$

即无旋为位场。

1.3 场的刻画

1.3.1 梯度

$$\nabla\varphi=grad\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}$$

1.3.2 散度

$$\nabla \cdot \vec{A} = div\vec{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial A_x} + \frac{\partial \varphi}{\partial A_y} + \frac{\partial \varphi}{\partial A_z}$$

1.3.3 旋度

$$\nabla \times \vec{A} = rat\vec{A} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial x} \\ A_x & A_y & A_z \end{bmatrix}$$

2 场的基本特征

2.1 源

2.2 位满足的方程

2.3 位的分类

2.4 磁偶极子产生的位

3 几个重要的场

3.1 引力场

1.万有引力定律

$$\overrightarrow{\mathbf{F_{12}}} = -\mathbf{f}\frac{\mathbf{m_1 m_2}}{\mathbf{r_{12}^3}}\overrightarrow{\mathbf{r_{12}}}$$

2.引力场的涡旋特征

$$\oint_L \overrightarrow{\mathbf{G}} \cdot \mathbf{d}\overrightarrow{l} = 0$$

根据斯托克斯公式

$$\oint_L \overrightarrow{G} \cdot d\overrightarrow{l} = \iint_S rot\overrightarrow{G} \cdot d\overrightarrow{s}$$

$$\nabla \times \overrightarrow{G} \cdot d\overrightarrow{s}$$

它说明引力场$\overrightarrow{G}$是处处无旋的。

因此，引入标位

$$\mathbf{U} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \int_{(\mathbf{x_0}, \mathbf{y_0}, \mathbf{z_0})}^{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})} \overrightarrow{G} \cdot \mathbf{d}\overrightarrow{l}$$

3.2 恒定电流场

4 位场变换

4.1 δ 函数的定义

狄拉克函数(Dirac Delta Function)

定义

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$$

性质

$$\int_{+\infty}^{-\infty} \delta(x) \mathrm{d}x = 1$$

4.2 格林公式

1.格林第一公式[1]

$$\oiint\limits_{S} V \frac{\partial U}{\partial n} \mathrm{d}s = \iiint\limits_{V} \left(V \nabla^2 U + \nabla U \nabla U) \right) \mathrm{d}v$$

2.格林第二公式

$$\oiint\limits_{S} \left(V \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial V}{\partial n} \right) \mathrm{d}s = \iiint\limits_{V} \left(V \nabla^2 U - U \nabla^2 V \right) \mathrm{d}v$$

4.3 调和函数

4.4 泊松公式

4.5 延拓

4.6 基本位场变换公式

4.7 傅里叶变换

4.8 磁化极

参考文献

[1] 张秋光. 《场论（上）》, page 342. 地质出版社, 1983.