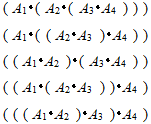
# 矩阵链乘法

定一个n个矩阵的矩阵链https://img-blog.csdnimg.cn/20181112233325810.png，要计算它们的乘积https://img-blog.csdnimg.cn/20181112233342441.png。矩阵乘法满足结合律，所以通过加括号，一个矩阵链的乘法可以按照不同的顺序进行。例如，4个矩阵的矩阵链https://img-blog.csdnimg.cn/20181112233404567.png，共有5种加括号的方式：

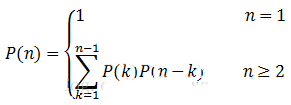


两个矩阵A和B只有相容，即A的列数等于B的行数时，才能相乘。如果A是 p×q 矩阵，B是 q×r 矩阵，那么乘积C是 p×r 矩阵。分析上面的代码，矩阵乘法的时间代价主要由最内层循环的标量乘法的次数决定，一共需要做 pqr 次标量乘法。

矩阵链乘法问题：给定一个n个矩阵的矩阵链，矩阵的维度为 (1 ≤ i ≤ n)，求一个最优的加括号方案，使得计算矩阵乘积所需要的标量乘法次数最少。

矩阵的维度为，的维度为，... ...。以此类推，矩阵的维度为。矩阵的维度可以构成一个n+1元的数组。以这个数组作为算法输入。

令P(n)表示n个矩阵的矩阵链的所有加括号的方案的数量。当n =1时，由于只有一个矩阵，所以P(1) = 1。当n ≥ 2时，可以先将矩阵链划分为两个子链和，其中k = 1,2,…, n-1，对两个子链加括号又是规模更小的子问题，因此矩阵链乘法问题满足最优子结构。由此得到：



可以证明，。显然，遍历所有加括号的方案，并不是一个明智的选择，这样的算法至少有一个指数增长的时间复杂度。现在我们用动态规划方法来求解这个问题。

用m[i, j]示计算矩阵链所需标量乘法次数的最小值。如果i = j，矩阵链中只有一个矩阵，显然m[i, j] = 0。对于i < j 的情况，上文提到，可以先将矩阵链划分为两个子链和。左子链的乘积是一个矩阵，右子链的乘积是一个矩阵。假设两个子链的最优解已知，它们分别为m[i, k]和m[k+1, j ]，并且可以知道两个子链的结果相乘需要次标量乘法。于是，可以得到。

矩阵链的划分点k可以取值i, i+1,…, j-1，我们需要检查k的所有可能的取值情况，并从中找到最优解。