陕西科技大学

SHAANXI UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

数学建模论文

题目： A题自来水管道铺设问题

队伍成员：张舒航

陈乐乐

魏江涛

自来水管道铺设问题

摘 要

现代日常生活中需要通过自来水管道将自来水运输至各个用户处，本文主要分析讨论自来水自来水管道连接规划问题，以构建出最节约成本的全局最优方案。

对于问题一，要求铺设总里程数最少，即是分层的最小生成树问题。我们采用 Prim 算法来构建模型，将整个问题看成一个拥有部分限定条件的最小生成树问题。我们先分析一级水站到二级水站的情况，并在它们之间构筑最小生成树去构造最小生成树。最后我们再将中心水站加入树中，形成一个最小生成树。

对于问题二，要求替换两个二型供水站，使 II 型管道里程数最少。我们先运用了两个最小生成树进行拼接，再对生成的带环图进行分析，并证明了需要用断边操作将环断开使得管道消耗最少。对于出现断环的情况，运用深度优先的路径回溯算法对断环操作进行了时间上的优化。最后升级水站将最长的 II 型管道被包括在环中，并断开它。

对于问题三，我们对提出并定义了流速的概念，并解释了其性质。随后将问题 1 方案的无向图转化为以中心水站为起点的有向图，并从中心水站开始进行深度优先搜索并染色，同时我们利用流速的性质，对染色过程进行剪枝，提高运算效率。最后我们利用贪心算法对升级水站数进行最小化，并计算方案的里程数。

关键词：图论，最小生成树，路径回溯，染色，Prim 算法，深度优先搜索，剪枝

目 录

一 、问题重述

1.1 问题背景

现代日常生活中，需要通过自来水管道将自来水运输至各个用户处，本文主要分析讨论自来水管道连接规划问题，即在自来水管道铺设过程使管道的里程数最少。

1.2 问题信息与基本条件

在村村通自来水工程实施过程中，从保证供水质量以及设备维护方便角度出发，某地区需要建设一个中心供水站，12 个一级供水站和 168 个二级供水站，各级供水站的位置坐标如附录 2 所示，其中类型 A 表示中心供水站，类型 V 代表一级供水站，类型 P 为二级供水站。

现在要将中心供水站 A 处的自来水通过管道输送到一级供水站和二级供水站。按照设计要求，从中心站 A 铺设到一级供水站的管道为 I 型管道，从一级供水站出发铺设到二级供水站的管道为 II 型管道。

自来水管道铺设技术要求如下：

1. 中心供水站只能和一级供水站连接（铺设 I 型管道），不能和二级供水站直接相连，但一级供水站之间可以连接（铺设 I 型管道）。
2. 一级供水站可以与二级供水站相连（铺设 II 型管道），且二级供水站之间也可以连接（铺设 II 型管道）。
3. 各级供水站之间的连接管道必须从上一级供水站或同一级供水站的位置坐标出发，不能从任意管道中间的一点进行连接。
4. 相邻两个供水站之间（如果有管道相连）所需管道长度可简化为欧氏距离。

1.3 问题重述

问题 1：从中心供水站 A 出发，自来水管道应该如何铺设才能使管道的总里程最少？以图形给出铺设方案，并给出 I 型管道和 II 型管道总里程数。

问题 2：由于 II 型管道市场供应不足，急需减少从一级供水站出发铺设的 II 型管道总里程，初步方案是将其中两个二级供水站升级为一级供水站。问选取哪两个二级供水站，自来水管道应该如何铺设才能使铺设的 II 型管道总里程最少？相对问题 1 的方案，II 型管道的总里程减少了多少公里？

问题 3：在问题 1 基础上，假如现实中由于功率的影响，从一级供水站出发铺设的管道最多只能供水 40 公里（按从该一级供水站管道输送的总里程计算），但从中心供水站 A 出发铺设的管道供水不受此距离限制。为实现对所有供水站供

水，需要将若干个二级供水站升级为一级供水站，但升级后从该供水站出发铺设的管道也最多只能供水 40 公里。问最少升级几个二级供水站，可实现对所有的供水站供水？在这种配置下铺设管道的总里程数最少是多少公里？

二、 符号说明

符号	定义
G	无向图$G=(V,E)$
v_i	无向图的第i个结点, $v_i \in V$
e_{ij}	无向图的结点i与结点j相连的边, $e_{ij} \in E$
A	中心水站集合
K	一级水站集合(为了避免歧义没有使用V)
P	二级水站集合
n	无向图结点总数，$\|V\|=n$
m	无向图边的总数，$\|E\|=m$
x_i	结点i的x坐标
y_i	结点i的y坐标
V'	V的某个子集
E'	E的某个子集
T	树， $T=(V,E')$
T_{AK}、 T_{KP}	包含结点集合AK、KP的树
C	图中的环，$C=(V',E')$

三、数据预处理

3.1 数据标识

题目给出的数据存在“序号”的“类型”两个唯一的字段来作为识别数据的方法。但因为题目中出现升级水站的操作，为了避免歧义，我们用序号来对水站进行唯一的标识：$v_i(0 < i \leq n)$表示序号为$i+1$的水站。

3.2 数据表示与存储

通过分析我们很容易可以明确，应该使用无向图来表示数据，而对于本题构造的无向图G应满足：

$$G = (V, E)$$

$$V = \{v_1, v_2, v_3, \dots v_n\}$$

$$E = \left\{ e_{ij} : e_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \right\} \ (i, j = 1, 2, 3, \dots, n)$$

$$e_{ij} = e_{ji}$$

显然，对于本题我们理应用邻接矩阵$(Adjacency\ Matrix)$来储存无向图的数据：因为这是一个全连通图，使用邻接矩阵来储存可以占有更少的空间；并且由于内存分布连续，对缓存也更加友好。无论时间与空间性能都较优。

但在这里，我们仍然选用邻接表$(Adjacency\ List)$来表示图。

原因是邻接表可以在$O(1)$的时间复杂度内获取任意结点的所有邻居，而邻接矩阵则需要$O(n)$。考虑到之后需要的遍历操作，以及对无用边的删除，所以我们选用邻接表进行数据的储存。图 3-1[2]给出了邻接表的通常示意图。

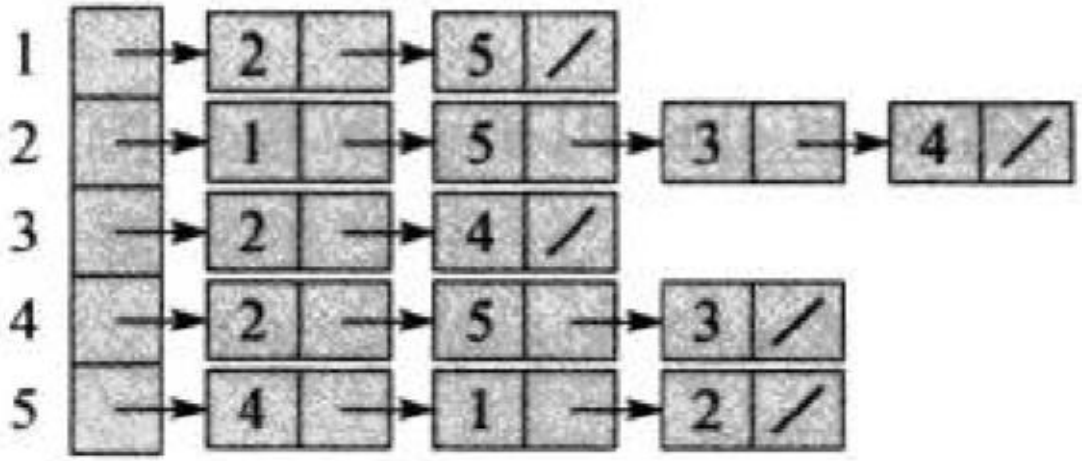


图 3-1

四、问题一的分析建模与求解

4.1 问题分析

根据题意，我们需要构建一个包含所有结点并且权重和最小的连通图，即寻找满足以下条件的ω和E_i。

$$\omega = \min\left(\sum_{e_{ij}\in E_1} e_{ij}, \sum_{e_{ij}\in E_2} e_{ij}, \sum_{e_{ij}\in E_3} e_{ij}, \dots\right) \quad E_1, E_2, \dots E_i \subseteq E;$$

那么便很容易想到通过构建最小生成树(MST)来达成这个目的。但是值得注意的是，每个结点的相接条件并不一致，一级供水站与二级供水站之间可以两两任意连接，而中心供水站却只能与一级供水站相接。由此我们可以先构筑出一棵包含所有K结点与P结点的最小生成树，最后再加入A结点，并将其与最邻近的K结点相连。

4.2 算法描述

我们选用 Prim 算法来构造最小生成树。Prim 算法是一种基于贪心策略构建最小生成树的算法，图 4-1[2]描述了 Prim 算法的最基本通用流程，以下给出其文字描述：

1). 输入：一个带权连通图，其中顶点集合为V，边集合为E；

2). 初始化：$V' = \{v_i\}$, $E' = \emptyset$，其中$v_i \in V$, 称为起始结点；

3). 重复下列操作，直到$V' = V$：

a. 在E中选取权值最小的边e_{jk}，其中j, k满足：

$$v_j \in V' \quad v_k \notin V' \quad v_j, v_k \in V$$

b. 将v_k加入V'，将e_{jk}加入E'中；

4). 输出：最小生成树 $T = (V', E')$，V'满足$V' = V$。

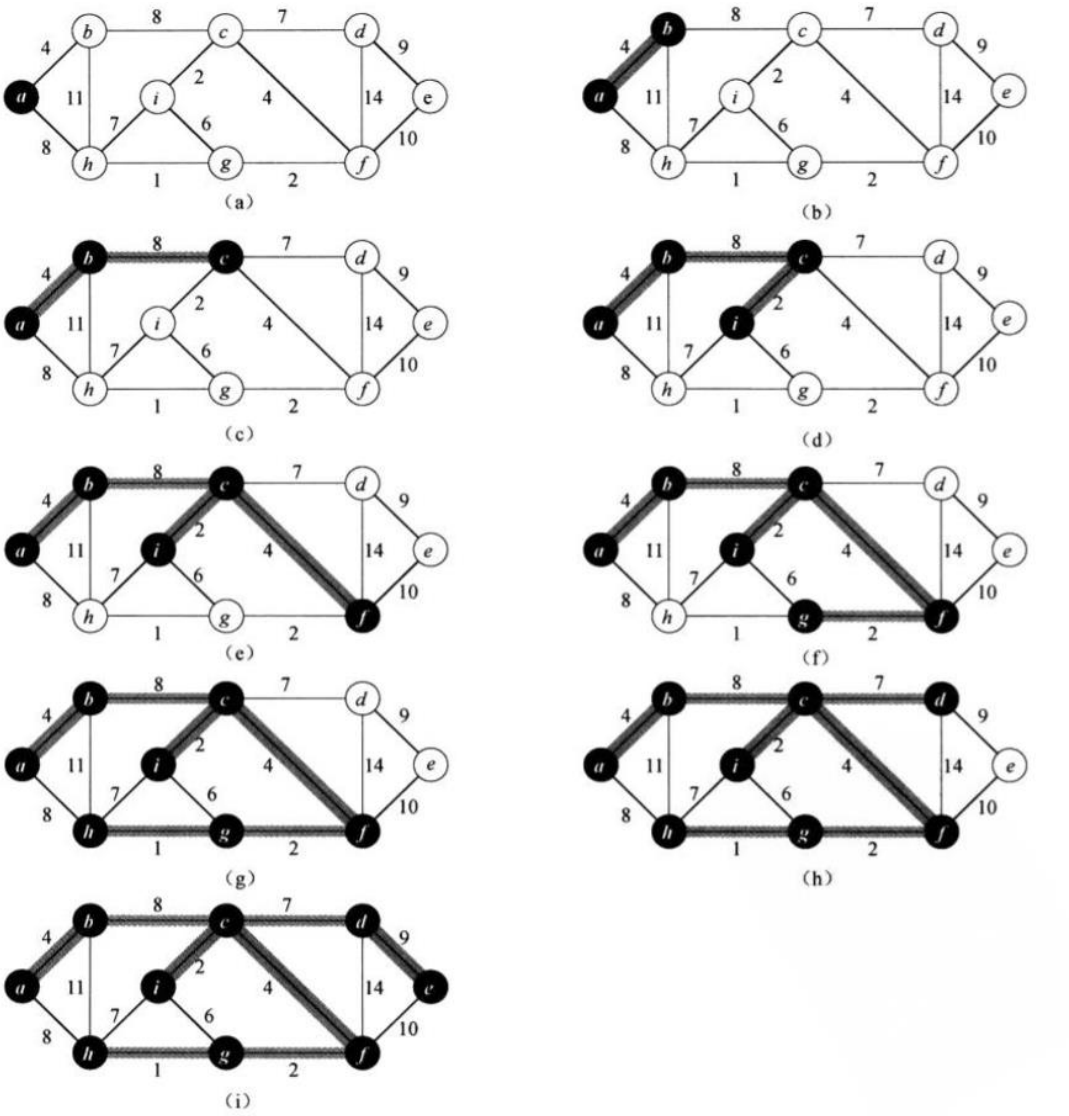


图 4-1

4.3 模型优势

构建最小生成树的算法有很多，除了本文给出的 Prim 算法之外，还有 Kruskal 算法和 Boruvka 算法等等，但本文依旧选用了 Prim 算法，原因如下：

1). 实现简单，同时有扩展优化的空间，可以利用优先队列($Priority\ Queue$)进行改进并将时间复杂度优化到$O(m + n\log n)$；

2). 在使用邻接表存储的情况下可以在遍历时在$O(1)$的时间复杂度下删除已存的边，对后续的遍历更为友好。

4.4 问题解答

管道总长为 $451.68km$，其中 I 型管道总长 $11.66km$，II 型管道总长 $440.02km$。（结果保留两位小数），图 4-2 为仿真结果。

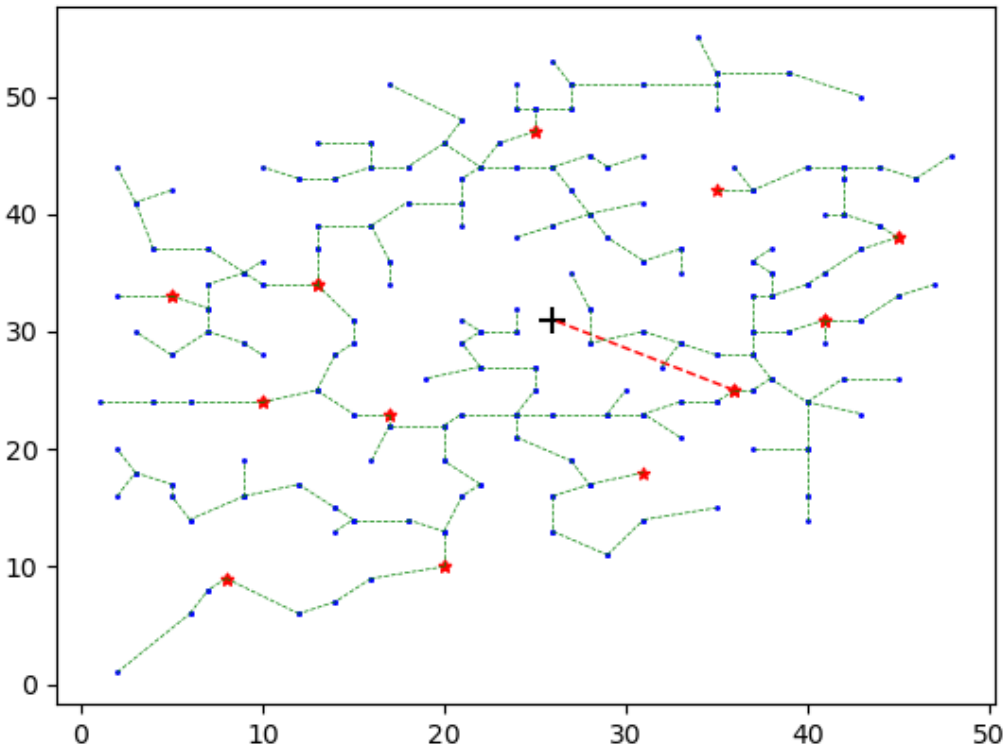


图 4-2 红线为 I 型管道，绿线为 II 型管道.

五、问题二的分析建模与求解

5.1 问题分析

5.1.1 准备工作

推论 1：最优方案总是无环(Cycle)图。

证明：假设最优方案G可能不是无环图。那么对于这个方案总能找到一个环C。那么环中存在一个结点v_i，根据环的定义，存在一条从v_i出发并回归自身的路径，在这个路径上总能找到一个与v_i相连的结点v_j，那么就存在着两条不同的从v_i出发到达v_j的路径，删除边e_{ij}得到的G'依旧是连通图，而$\omega(G') < \omega(G)$，说明G不是最优的，与假设矛盾。

推论 2：要使一个环断开，最多只能删除一条边。

证明：根据环的定义，存在一条从v_i出发并回归自身的路径，那么删除这条路径的一条边，这个路径所构成的环断开。

5.1.2 分析过程

为了尽可能的减少 II 型管道的长度，我们优先使用 I 型管道。

首先对于A、K与K、P分别生成一棵最小生成树T_{AK}与T_{KP}，然后将两棵树接合成一个新的无向图G：

$$G = T \cup (T \cap T_{AK}) \cup (T \cap T_{KP})$$

其中

$$T = T_{AK} \cap T_{KP}$$

G不一定是一个无环图，而根据推论 1，最优方案一定是无向图，那么我们就需要在图中断环。

根据题意，当我们找到了环之后，我们应该优先断开 II 型管道，那么根据推论 2，我们仅能断开一条边，为了 II 型管道消耗最少，我们选择环中最长的一条 II 型管道来断开。

而这时候引入升级水站的操作，我们需要尽可能地借此断开较长的 II 型管道，那么我们可以把最长的 II 型管道包括在环中，进行断环，我们自然就可以把它断开了，重复这样的操作两次即可。

5.2 算法描述

5.2.1 深度优先搜索的概述

我们需要一个算法来寻找图中的环，此处我们使用带访问标记的深度优先搜

索(DFS)算法，它的大致流程为：

1).图中某个顶点出发v_i出发，首先访问v_i，并记录。

2).然后访问该顶点的邻居，此时可能出现两种情况：

a.访问到了某个访问过的结点v_j了，说明找到了环，可以直接退出并返回当前结点与v_j之间的所有结点。

b.访问的是一个全新的结点，那么继续递归，如果它已经没有没访问过的邻居了，便可以返回。

5.2.2 回溯和深度优先搜索的组合使用

想象一个场景，当我们找到了一个环，知道了它的首尾结点，我们如何才能快速获得这个环内的所有结点信息？

如果我们再遍历一次，就花费了多余的时间，因为这个环越大，再次遍历的时间就越多；而如果我们一边搜索一边记录，最后的记录里则会出现很多不在环内的结点，增大处理压力。

因此，我们引入深度优先的路径回溯($Backtrack$)算法，以图 5-1 为例，进行搜索。

考虑维护一个栈($Stack$)来记录路径，并将搜索的记录都压入栈中。

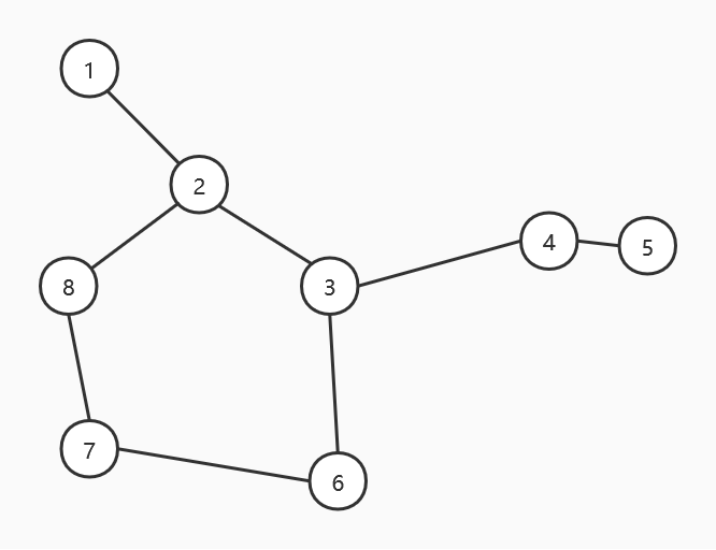
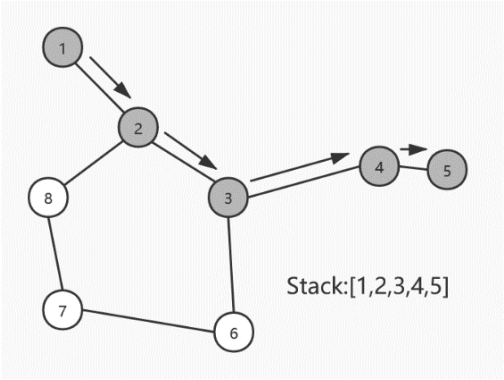
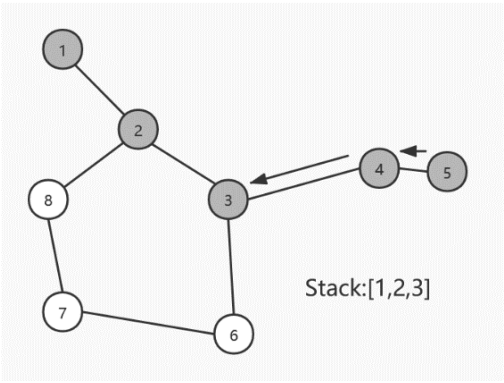


图 5-1

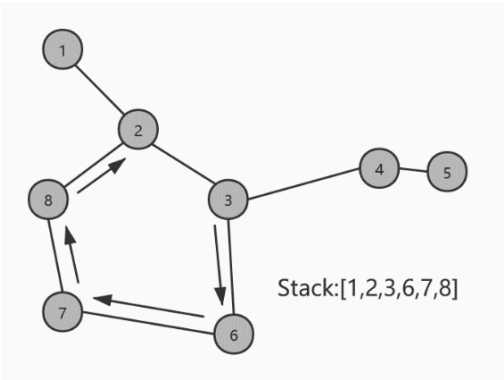
先搜索到终止条件，并没有发现环：



那么开始回溯，同时一边把记录出栈：



继续搜索另一分支，我们访问到了已访问节点 2，说明找到了环，而栈尾的 2 和 8 之间的[2,3,6,7,8]正是我们要找的环。



5.3 模型优势

广度优先搜索(BFS)同样是常用的图搜索算法，本文选用深度优先搜索，原因如下：

1).广度优先搜索需要使用队列$(Queue)$作为辅助数据结构，虽然深度优先搜索同样需要用栈来辅助递归，但这并不需要在程序中写出，而是由操作系统分配，方便程序的编写。

2).深度优先搜索与回溯算法契合度更高，理念上更为接近。

5.4 问题解答

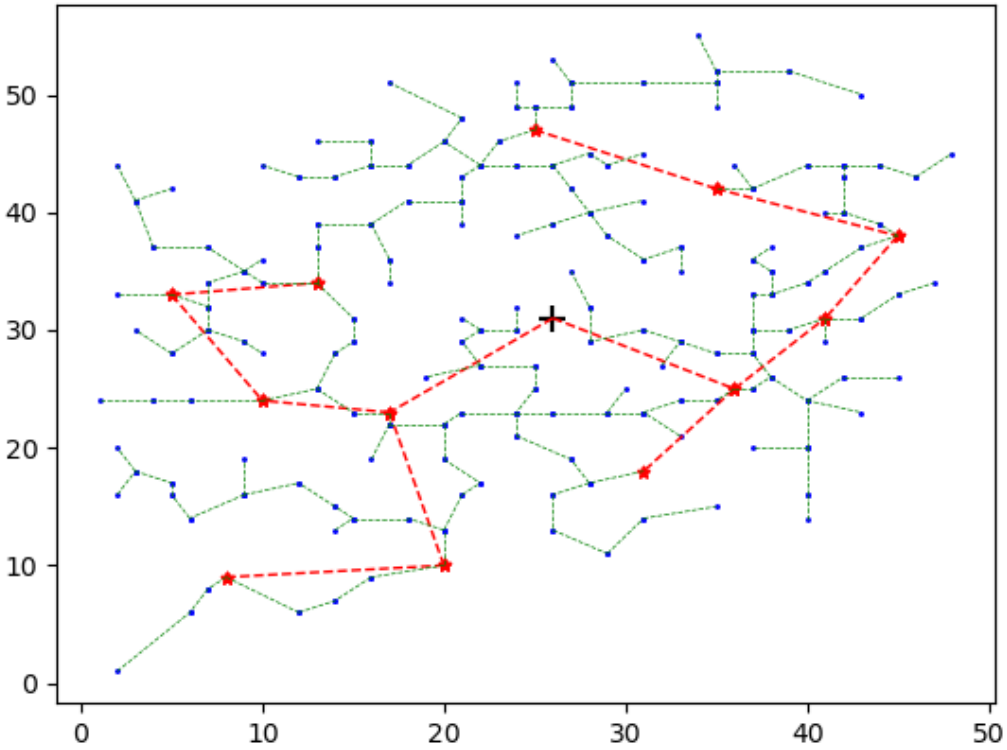


图 5-2 未断环

最终解答如图 5-3 所示，图 5-2 为未断环前的示意图。

需要升级位于（2，1）处的 125 号水站。

需要升级位于（17，51）处的 89 号水站。

管道总长为 532.12km，其中 I 型管道总长 139.89km，II 型管道总长 392.24km。（结果保留两位小数）

与问题 1 的方案进行比较，II 型管道总长大约减少了 47.78km。

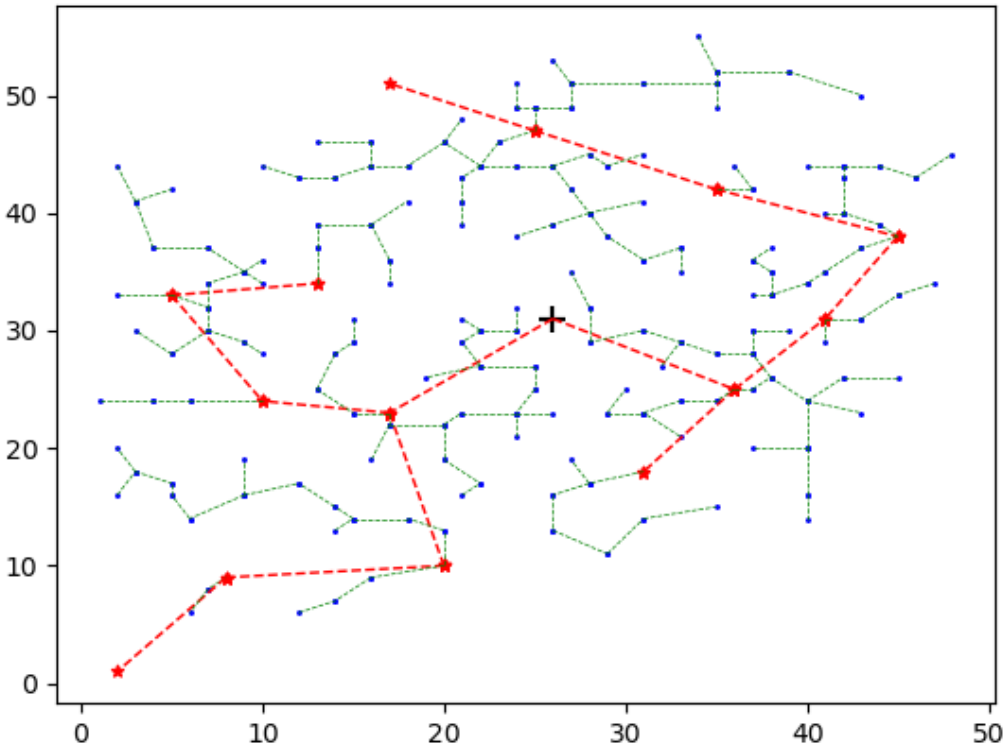


图 5-3 问题 2 结果

六、问题三的分析建模与求解

6.1 问题分析

6.1.1 问题假设

基于题意，我们定义一个概念——流速，用u表示。它具有以下几个性质：

1).每个结点v都有流速，用$u(v)$表示，且有$u(v) \in \mathbb{R}$；但当$u(v) < 0$时，此点的流速无意义，我们称结点v是无水的，否则是有水的。

2).当结点有水时，A结点的流速总是足够大，而K结点的流速固定为 40。

3).结点一开始总是无水的，但水可以在结点之间传播。水的传播是有方向的，水总是从流速高的结点流向流速低的结点，所以一般认为水会从A结点开始传播。

4).一般的，对于P类结点周围存在n个流速大于它的结点时，有：

$$u(v_p) = \max\left(u(v_i) - e_{pi}, u(v_j) - e_{pj}, u(v_k) - e_{pk}, \dots\right)$$

5).特别的，当P类结点周围仅存在 1 个流速大于它的结点时，有：

$$u(v_p) = u(v_i) - e_{pi}$$

至此，关于流速的定义本已完善，但本文还是有必要引入一条假设：

假设 6：当t_0时刻，水从结点v_i流入v_j，那么对于任何的$t > t_0$，水都不可能从v_j流入v_i，哪怕$u(v_j) > u(v_i)$。

如果没有这一条假设，那么如果水从P结点流入K结点后必然会逆流，因为对任何结点来说，$u(K) > u(P)$总是成立的，那么我们就需要将每一个有水的K结点重新当作一个输出端进行计算。而基于本题数据计算后可以发现，每一个结点都可以被供水，那么题目无意义。于是我们引入假设 6，保证了水流一旦在管道内形成，便不可逆。

当然，是否引入此假设造成的结果可能大相径庭，本文尽可能的讨论不包含此假设（基于理论）和包含此假设（基于本题）的两种情况。

6.1.2 分析过程

对题干提出的功率概念进行解读可知：中心水站和一级水站会将收到的水用新的功率泵出，无论上一个水站的功率有多大；而二级水站只是让水流过；水流在没有重新泵出的情况下最多只能经过 40km。

基于此我们在 6.1.1 提出了关于流速的假设，本质是在解释每个水站的最大送水能力。在此题里流量的概念并没有办法很好的契合题目，尤其是在合流的时候，应该选用速度最大的支流作为当前的流速。[1]

而下文将全盘基于以上概念进行分析；且根据题意，将在问题 1 的方案上进

行分析。

问题 1 的方案为一棵最小生成树，即是一个连通无环图。虽然根据假设，我们理应改用有向图来描述本小题的模型，但起码在这个环节里不需要转化，因为图里没有环，也不会存在多个点的水输入某一个结点的情况。

我们先从A开始对图进行染色，计算每一点的流速，我们便可以得到一批无水结点。

得到了无水结点之后，我们便要考虑如何升级结点，值得注意的是，被升级的结点并不一定是无水结点。如果升级的是无水结点，那么需要在升级后需要与A结点（或是距其最近 40km 以内的K结点）相连，需要多花费 I 型管道，这时候图中可能出现平行边（转化为有向图），而我们可以通过断开平行边来减少管道消耗；而如果升级的是有水结点，那么便不需要增设新的管道。

但如果引入假设 6，升级无水结点也不会形成平行边，我们无法通过断平行边来减少管道长度，但我们还是无法确定升级有水结点和无水结点何者更能使升级数最少。

在不确定升级策略的情况下，可以采用贪心算法$(Greedy\ Algorithm)$作为寻找升级结点的策略。

6.2 模型建立

6.2.1 染色与剪枝

首先我们需要对图中的每一点计算出相应的流速值，我们仍旧沿用深度优先搜索的方法，只需要在遍历的时候为结点赋上父结点的流速和边的距离的差即可。

不过在此处我们可以通过定义，且引入假设 6 时可以发现：在遍历的过程中，如果结点v是无水的，那么v的所有子孙结点都是无水的，这就会出现一棵无水子树，v即为无水子树的根结点，那么我们便无需对子树进行搜索了，这就完成了一次剪枝。

具体过程如图 6-1 所示。

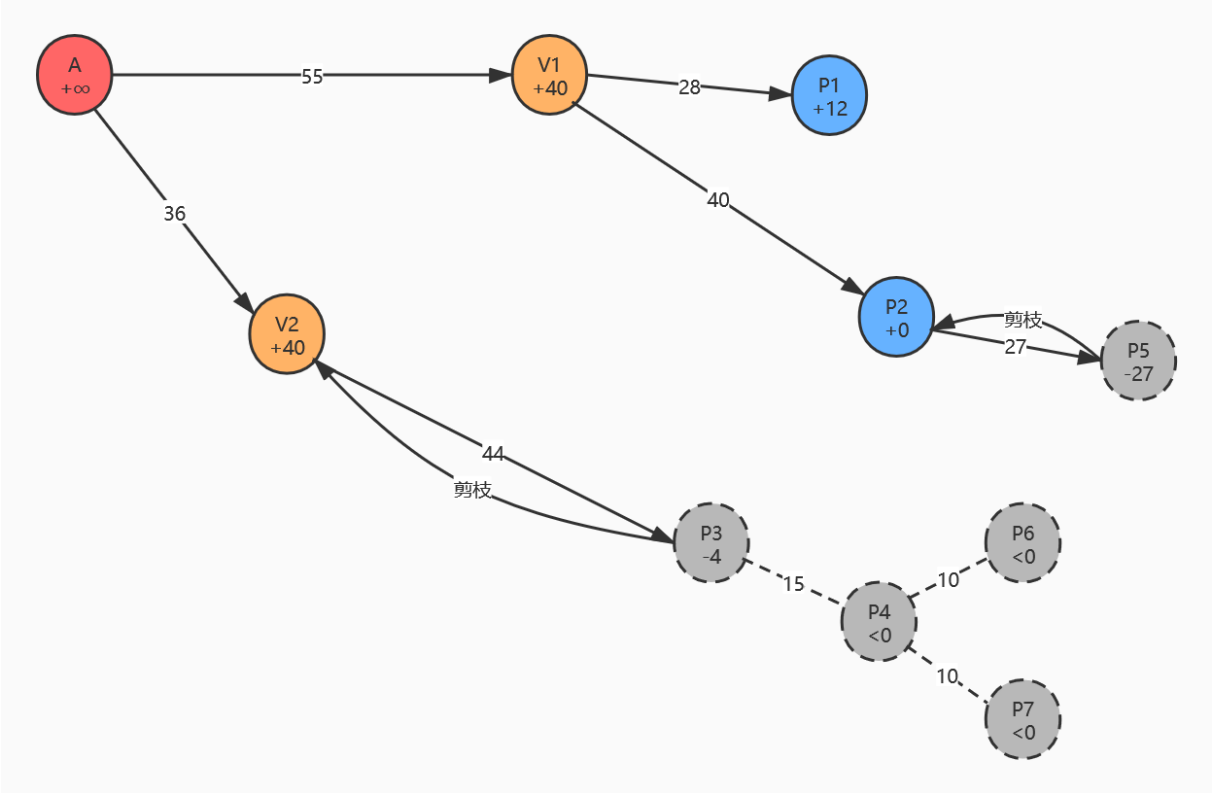


图 6-1 染色与剪枝过程

6.2.2 贪心算法

我们已经找到了r个无水结点，这时如果升级结点$v_i(v_i \in P)$，会减少s个无水结点，那么我们需要找到满足

$$s = max(s_i, s_j, \dots)$$

的s和i，那么此时剩余无水结点数变为

$$r = \begin{cases} 0, & r - s \le 0 \\ r - s, & r - s > 0 \end{cases}$$

当$r > 0$时，继续如上操作，直到$r = 0$为止。

接着计算相应方案的管道里程数。

6.3 模型优势

若能对贪心算法进行严格证明，那么这个算法能拥有较好的鲁棒性，对于各种类型的数据都可以得出正确结论。

另一方面，剪枝操作使得操作负担低，同时效率也高。

6.4 实验结果

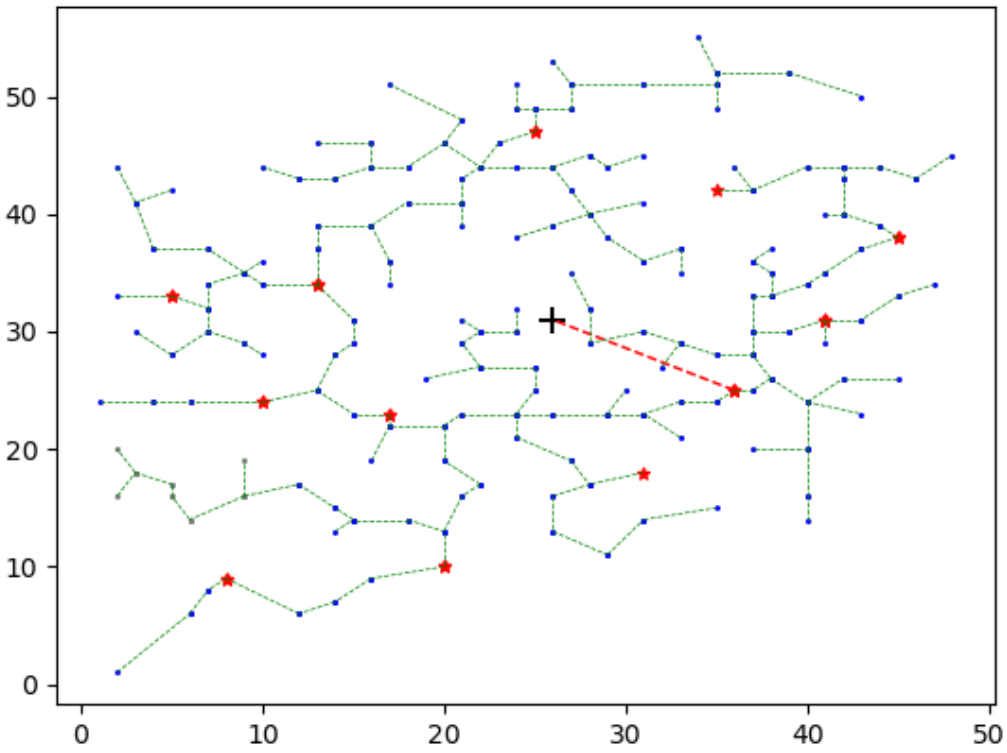


图 6-2 染色结果

因为不引入假设 6 题目数据无意义，那么解答将只考虑引入假设 6 的情况。

图 6-2 为深度优先染色后的结果，右边的灰色结点即为无水结点，既然只有一棵无水子树，那么便可以不使用贪心算法，直接升级距离无水树根结点最近的有水结点即可

解答可得我们需要升级位于（9，16）处的 119 号水站。

由于升级的是有水结点，那么管道长度和问题 1 方案一致，管道总长均为为 451.68km，最终结果如图 6-3 所示。

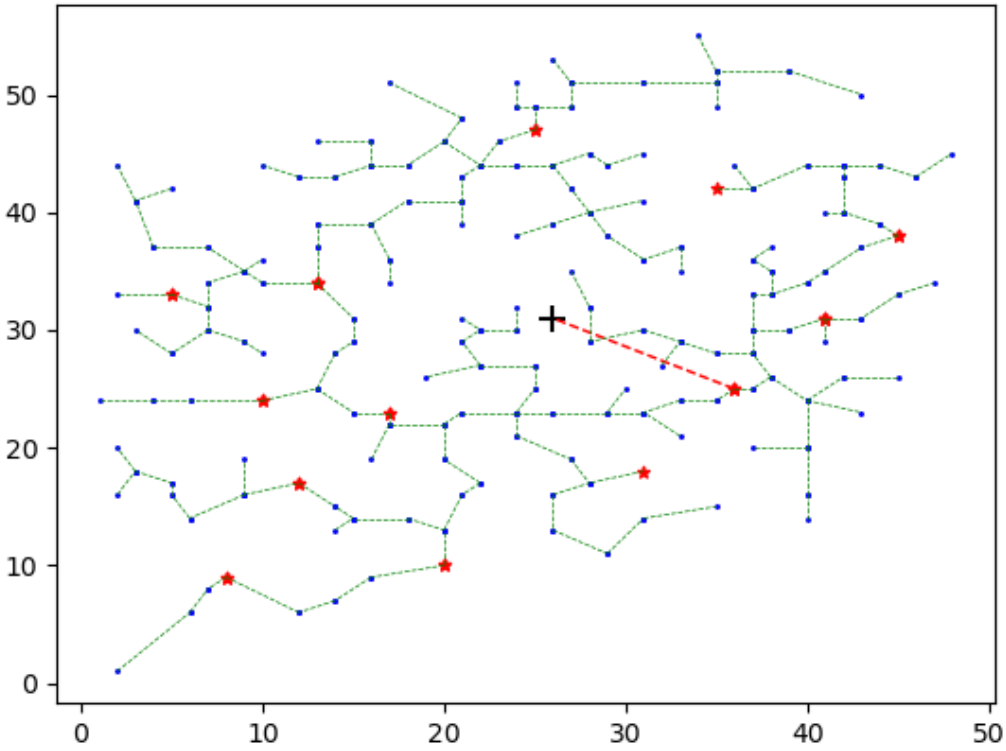


图 6-3 问题 3 仿真结果

七、模型的评价与调优

7.1 对于问题 1 模型的讨论

7.1.1 复杂度

$Prim$算法的时间复杂度取决于最小优先队列的实现方式，若使用二叉堆$(Heap)$时时间复杂度为$O(m\log n)$，使用斐波那契堆实现时时间复杂度将改进到$O(m+n\log n)$。

最小生成树包含n个结点与$n-1$条边，用邻接表存储，空间复杂度为$O(n)$量级。

7.1.2 评价

最小生成树的生成可以一步到位，不需要进行人工的修改，封装容易，复用简单。

7.2 对于问题 2 模型的讨论

7.2.1 复杂度

递归回溯拥有最好情况$O(S)$，最坏情况$O(S \times n)$的时间复杂度，其中S为环的数量。

7.2.2 评价

回溯算法运用空间换时间，拥有较深度优先搜索更好的复杂度。但实际上在搜索环的问题上还有其他效果不错的算法，例如 CACM 491[1]或是其余诸多现代算法[2]，这些算法可以高效的一次性获得图中所有的环，避免深度优先搜索带来的重复遍历。[3]

7.3 对于问题 3 模型的讨论

7.3.1 复杂度

因为剪枝操作的存在，深度优先搜索可以保证在$O(n)$的时间内完成染色。

7.3.2 评价

一方面，对于贪心算法的使用，我们需要加以更为严谨的证明。另一方面，在解题过程中，对于假设 6 的依赖过多，导致模型的可拓展性和实用性的下降。如果要对模型进行拓展，需要对贪心算法加以证明，并考虑不包含假设 6 的情况，使模型更为易用。

[1] Paton, K. An algorithm for finding a fundamental set of cycles of a graph. Comm. ACM 12, 9 (Sept 1969), 514-518.

[2] Finding all the elementary circuits of a directed graph. D. B. Johnson, SIAM Journal on Computing 4, no. 1, 77-84, 1975. https://doi.org/10.1137/0204007

Enumerating the cycles of a digraph: a new preprocessing strategy. G. Loizou and P. Thanish, Information Sciences, v. 27, 163-182, 1982.

A search strategy for the elementary cycles of a directed graph. J.L. Szwarcfiter and P.E. Lauer, BIT NUMERICAL MATHEMATICS, v. 16, no. 2, 192-204, 1976.

参 考 文 献

[1] 司守奎，孙兆亮编著.数学建模算法与应用 [M].国防工业出版社:北京.
[2] Thomas H.Cormen,Charles E.Leiserson,Ronald L.Rivest,Clifford Stein.算法导论（原书第 3 版）[M].机械工业出版社:北京,2012-12:341.
[3] NetworkX.Official NetworkX source code repository.[EB/OL].https://github.com/networkx/networkx,2020-6.

附录

附录 1 解题代码

```
'''
运行环境：Python 3.6.6 [MSC v.1900 64 bit (AMD64)] on win32
第三方依赖：
    matplotlib          3.2.1
    networkx            2.4
    numpy               1.18.4
    pandas              1.0.1
'''
# dataform.py
# 封装文件，封装了 A 题所需要的数据和图论操作
import matplotlib.pyplot as plt
import networkx as nx
import numpy as np
import pandas as pd

def euclidean_distance(p1, p2):
    x1, y1, x2, y2 = *p1[-2:], *p2[-2:]
    return np.sqrt((x1-x2)**2+(y1-y2)**2)

class DataForm:
    ''' 数据表封装类
    封装从 csv 文件中读取的水站数据，并可以对其进行一定的操作。

    @Attributes:
        df{pandas.DataFrame} : 存储的数据表
    '''

    def __init__(self, path: str):
        self.df = pd.read_csv(path, encoding='utf-8')

    def Get(self, i) -> pd.DataFrame:
        return self.df.loc[i]

    def GetByType(self, types: str) -> pd.DataFrame:
        return self.df[self.df['TYPE'].str.contains(types)]

    def GetType(self, i: int) -> str:
        return self.df.loc[i, 'TYPE'][0]

    def CheckRoute(self, i: int, j: int) -> bool:
```

```
        p1_type, p2_type = self.Get(i)['TYPE'], self.Get(j)['TYPE']
        return (('V' in p1_type) or ('A' in p1_type)) and (('V' in p2_type) or ('A'
in p2_type))

    def GetPlotList(self, i: int, j: int) -> tuple:
        p1 = self.Get(i)
        p2 = self.Get(j)
        return (p1['X'], p2['X']), (p1['Y'], p2['Y'])

    def BuildGraph(self, typeSelecter='A|V|P', dis=euclidean_distance) -> nx.Graph:
        graph = nx.Graph()
        form = self.GetByType(typeSelecter).to_numpy()
        for i in form:
            for j in form:
                if i[0] != j[0]:
                    graph.add_edge(i[0], j[0], weight=dis(i, j))
        return graph

    def Draw(self):
        A, V, P = self.GetByType('A'), self.GetByType('V'), self.GetByType('P')
        plt.scatter(A['X'], A['Y'], marker='+', c='black', s=100)
        plt.scatter(V['X'], V['Y'], marker='*', c='red', s=20)
        plt.scatter(P['X'], P['Y'], marker='.', c='blue', s=5)

    def Upgrade(self, i, target='V'):
        self.df.loc[i, 'TYPE'] = target

    def WriteToFile(self, path: str):
        self.df.to_csv(path)

    def BestNeighbor(self, base: int, types='A|V', minimum=True):
        neighbors = self.BuildGraph(types)[base]
        if minimum:
            weight = np.Infinity
        else:
            weight = 0
        for key in neighbors:
            if minimum:
                if neighbors[key]['weight'] < weight:
                    weight = neighbors[key]['weight']
                    target = key
            else:
                if neighbors[key]['weight'] > weight:
                    weight = neighbors[key]['weight']
```

```
                    target = key
        return (base, target, weight)


def graphDraw(dataform: DataForm, graph: nx.Graph):
    def drawPoint(i):
        p = dataform.Get(i)
        ty = dataform.GetType(i)
        if 'A' in ty:
            marker, c, s = '+', 'black', 100
        elif 'V' in ty:
            marker, c, s = '*', 'red', 20
        elif 'P' in ty:
            marker, c, s = '.', 'blue', 5
        try:
            if graph.nodes[i]['power'] < 0:
                c = 'gray'
        except:
            pass
        plt.scatter(p[-2], p[-1], marker=marker, c=c, s=s)
    for i, j, dis in graph.edges.data('weight'):
        if dataform.CheckRoute(i, j):
            color = 'red'
            lw = 1
        else:
            color = 'green'
            lw = 0.5
        plotList = dataform.GetPlotList(i, j)
        plt.plot(*plotList, linewidth=lw, c=color, linestyle='--')
        drawPoint(i)
        drawPoint(j)


def merge(lhs: nx.Graph, rhs: nx.Graph) -> nx.Graph:
    graph = nx.Graph()
    for i, j, dis in lhs.edges.data('weight'):
        graph.add_edge(i, j, weight=dis)
    for i, j, dis in rhs.edges.data('weight'):
        graph.add_edge(i, j, weight=dis)
    return graph


def weightStats(dataform: DataForm, graph: nx.Graph):
    route_1, route_2 = 0, 0
    for i, j, dis in graph.edges.data('weight'):
```

```
        if dataform.CheckRoute(i, j):
            route_1 += dis
        else:
            route_2 += dis
    return route_1+route_2, route_1, route_2


def maxEdge(dataform: DataForm, graph: nx.Graph, grade=False):
    res = (0, 0, 0)
    for i, j, w in graph.edges.data('weight'):
        if dataform.CheckRoute(i, j) is grade:
            if w > res[-1]:
                res = i, j, w
    return res


def disconnectCycle(dataform: DataForm, graph: nx.Graph, cycle: list, grade=False,
minimum=False):
    if len(cycle[0]) is 2:
        cycleList = cycle
    else:
        cycleList = np.array(np.array(cycle)[:, :2], dtype=int)
    if minimum:
        weight = np.Infinity
    else:
        weight = 0
    for i, j in cycleList:
        if grade is None or dataform.CheckRoute(i, j) is grade:
            if minimum:
                if graph.edges[i, j]['weight'] < weight:
                    weight = graph.edges[i, j]['weight']
                    res = (i, j)
            else:
                if graph.edges[i, j]['weight'] > weight:
                    weight = graph.edges[i, j]['weight']
                    res = (i, j)
    graph.remove_edge(*res)
    return res
```

```
# solve1.py
```

```
# 问题 1 的解
import matplotlib.pyplot as plt
import networkx as nx
import numpy as np
import pandas as pd

import dataform as dfm

if __name__ == "__main__":
    center = 0
    df = dfm.DataForm(".\\code\\anotherA\\data.csv")

    # 构筑一级水站和二级水站间的最小生成树。
    G = nx.minimum_spanning_tree(df.BuildGraph('V|P'), algorithm='prim')
    # 筛选出距离中心水站最近的一级水站，并加入图中。
    for_add = df.BestNeighbor(center)
    G.add_edge(*for_add[:2], weight=for_add[2])

    # 输出
    dfm.graphDraw(df, G)
    print("管道总长为%.2fkm，其中 I 型管道总长%.2fkm，II 型管道总长%.2fkm。（结果保留两位小
数）"
          % dfm.weightStats(df, G))
    plt.savefig('.\\code\\anotherA\\result\\solve1.png')
    plt.show()

# solve2.py
# 问题 2 的解
import matplotlib.pyplot as plt
import networkx as nx
import numpy as np
import pandas as pd

import dataform as dfm


def buildUncycleGraph(df, G):
    # 每次深度优先搜索时寻找一个环，并将环中最长的 II 型管道断开，直到图中没有环为止。
    while True:
        try:
            dfm.disconnectCycle(df, G, nx.find_cycle(G))
        except:
            break
    return G
```

```
def dfs(df, G, edge):
    # 以 i 为起点向 j 方向做深度优先搜索，直到尽头或是搜索到一级水站。
    i, j = edge[:2]

    # 终止条件 1：如果搜索结果全部都是图尽头，说明 i 比 j 更接近高级水站，那么就升级 j。
    if len(G[j]) <= 1:
        return True

    # 终止条件 2：如果搜索到了一个高级水站，说明 j 距离高级水站更近，所以应该升级 i。
    type_j = df.GetType(j)
    if type_j is 'A' or type_j is 'V':
        return False

    # 递归 dfs。
    for key in G[j]:
        if key is not i:
            if not dfs(df, G, (j, key)):
                return False
    return True


def smartUpgrade(df, G, count):
    # 需要记录升级的结点作为返回值
    uplist = []
    for _ in range(count):
        i, j = dfm.maxEdge(df, G)[:2]
        # 理论上升级结点构成的环只需要包含最长边似乎就行了，那就直接取最长边的边沿来升级。
        if dfs(df, G, (i, j)):
            df.Upgrade(j)
            upgraded = j
        else:
            df.Upgrade(i)
            upgraded = i
        uplist.append(upgraded)
        # 因为有结点升级了，所以需要添加新的 I 型管道。
        for_add = df.BestNeighbor(upgraded)
        G.add_edge(*for_add[:2], weight=for_add[2])
        # 添加了新管道图中就有环了，那么直接移除最长管道来断环，不需要再搜索了。
        G.remove_edge(i, j)

    return uplist


if __name__ == "__main__":
    upgradeCount = 2
```

```
    df = dfm.DataForm(".\\code\\anotherA\\data.csv")

    # 将两个最小生成树接合成一个连通图。
    G = dfm.merge(nx.minimum_spanning_tree(df.BuildGraph('A|V'), algorithm='prim'),
                  nx.minimum_spanning_tree(df.BuildGraph('V|P'), algorithm='prim'))

    dfm.graphDraw(df, G)
    plt.savefig('.\\code\\anotherA\\result\\solve2_base.png')
    plt.clf()

    # dfs 自动断环。
    buildUncycleGraph(df, G)
    # 升级 2 个处于最长边周围，并可以使图中出现环的结点，并断开这些环。
    uplist = smartUpgrade(df, G, upgradeCount)

    # 输出
    for i in uplist:
        msg = df.Get(i)
        print("需要升级位于 (%d, %d) 处的 %d 号水站。" % (msg['X'], msg['Y'], i))

    print("管道总长为%.2fkm，其中 I 型管道总长%.2fkm，II 型管道总长%.2fkm。（结果保留两位小
数）"
          % dfm.weightStats(df, G))
    dfm.graphDraw(df, G)
    plt.savefig('.\\code\\anotherA\\result\\solve2.png')
    plt.show()

# solve3.py
# 问题 3 的解
import matplotlib.pyplot as plt
import networkx as nx
import numpy as np
import pandas as pd

import dataform as dfm


def fillWater(df, G, driedRoots=[], begin=None, end=0, power=np.Infinity):
    # 深度优先搜索，同时对结点染色，如果水流经一级结点还>=0 的话，就重置为 40，小于 0 时说明到
头了，记录结点后返回。
    if power < 0:
        driedRoots.append(end)
        return
    if 'V' in df.GetType(end):
        power = 40.0
```

```
        G.nodes[end]['power'] = power
        for key in G[end]:
            if key is not begin:
                fillWater(df, G, driedRoots, end, key,
                          power - G[end][key]['weight'])


if __name__ == "__main__":
    center = 0
    df = dfm.DataForm(".\\code\\anotherA\\data.csv")

    G = nx.minimum_spanning_tree(df.BuildGraph('V|P'), algorithm='prim')
    for_add = df.BestNeighbor(center)
    G.add_edge(*for_add[:2], weight=for_add[2])

    # 初始化结点权重。
    for i in G.nodes:
        G.nodes[i]['power'] = -1
    # 染色
    driedRoots = []
    fillWater(df, G, driedRoots)
    dfm.graphDraw(df, G)
    plt.savefig('.\\code\\anotherA\\result\\solve3_distance_compute.png')
    plt.clf()
    # 将无水树的根结点最近的有水结点升级。
    node = driedRoots[0]
    for i in G[node]:
        if G.nodes[i]['power'] >= 0:
            df.Upgrade(i)
            break
    msg = df.Get(node)
    print("需要升级位于 (%d, %d) 处的 %d 号水站。" % (msg['X'], msg['Y'], i))

    # 再染一次色。
    fillWater(df, G)

    dfm.graphDraw(df, G)
    plt.savefig('.\\code\\anotherA\\result\\solve3.png')
    plt.show()
```

附录 2 预处理数据

ID,TYPE,X,Y
0,A,26,31
1,V1,5,33
2,V2,8,9
3,V3,10,24
4,V4,13,34
5,V5,17,23
6,V6,20,10
7,V7,25,47
8,V8,31,18
9,V9,35,42
10,V10,36,25
11,V11,41,31
12,V12,45,38
13,P1,41,35
14,P2,40,34
15,P3,38,35
16,P4,38,37
17,P5,33,37
18,P6,31,36
19,P7,33,35
20,P8,28,32
21,P9,24,30
22,P10,21,31
23,P11,22,27
24,P12,28,29
25,P13,43,37
26,P14,44,39
27,P15,25,27
28,P16,21,29
29,P17,22,30
30,P18,24,32
31,P19,37,33
32,P20,38,33
33,P21,37,36
34,P22,14,13
35,P23,16,9
36,P24,14,7
37,P25,18,14
38,P26,12,6
39,P27,15,14
40,P28,20,13
41,P29,13,46
42,P30,16,39
43,P31,21,39
44,P32,26,44
45,P33,28,40
46,P34,27,42
47,P35,29,38
48,P36,29,44
49,P37,36,44
50,P38,41,40
51,P39,39,52
52,P40,27,49
53,P41,23,46
54,P42,20,46
55,P43,16,46
56,P44,22,44
57,P45,40,44
58,P46,42,40
59,P47,37,42
60,P48,35,49
61,P49,35,51
62,P50,35,52
63,P51,34,55
64,P52,26,53
65,P53,27,51
66,P54,31,51
67,P55,31,45
68,P56,31,41
69,P57,28,45
70,P58,27,35
71,P59,24,38
72,P60,26,39
73,P61,13,37
74,P62,17,36
75,P63,21,41
76,P64,18,41
77,P65,21,43
78,P66,13,39
79,P67,14,43
80,P68,12,43
81,P69,10,44
82,P70,16,44
83,P71,18,44
84,P72,24,44
85,P73,25,49
86,P74,24,49
87,P75,24,51
88,P76,21,48
89,P77,17,51
90,P78,10,34
91,P79,9,35
92,P80,7,37
93,P81,4,37
94,P82,5,42
95,P83,2,44
96,P84,7,32
97,P85,7,30
98,P86,1,24
99,P87,2,16
100,P88,3,18
101,P89,2,20
102,P90,4,24
103,P91,5,28
104,P92,6,24
105,P93,9,29
106,P94,2,33
107,P95,7,34
108,P96,3,30
109,P97,3,41
110,P98,10,36
111,P99,17,34
112,P100,20,22
113,P101,24,21
114,P102,22,17
115,P103,21,16
116,P104,27,19
117,P105,26,16
118,P106,9,16
119,P107,12,17
120,P108,14,15
121,P109,19,26
122,P110,14,28
123,P111,13,25
124,P112,9,19

125,P113,2,1
126,P114,6,6
127,P115,7,8
128,P116,6,14
129,P117,5,17
130,P118,5,16
131,P119,16,19
132,P120,26,13
133,P121,29,11
134,P122,31,14
135,P123,28,17
136,P124,20,19
137,P125,17,22
138,P126,15,23
139,P127,21,23
140,P128,24,23
141,P129,26,23
142,P130,25,25
143,P131,15,31
144,P132,15,29
145,P133,10,28
146,P134,38,26
147,P135,37,25
148,P136,33,21
149,P137,40,24
150,P138,44,44
151,P139,41,31
152,P140,33,24
153,P141,32,27
154,P142,40,14
155,P143,42,26
156,P144,45,33
157,P145,29,23
158,P146,31,30
159,P147,30,25
160,P148,31,23
161,P149,35,15
162,P150,40,16
163,P151,40,20
164,P152,37,20
165,P153,35,24
166,P154,43,23
167,P155,45,26
168,P156,37,28
169,P157,35,28
170,P158,33,29
171,P159,37,30
172,P160,39,30
173,P161,41,29
174,P162,43,31
175,P163,47,34
176,P164,46,43
177,P165,42,43
178,P166,48,45
179,P167,42,44
180,P168,43,50