



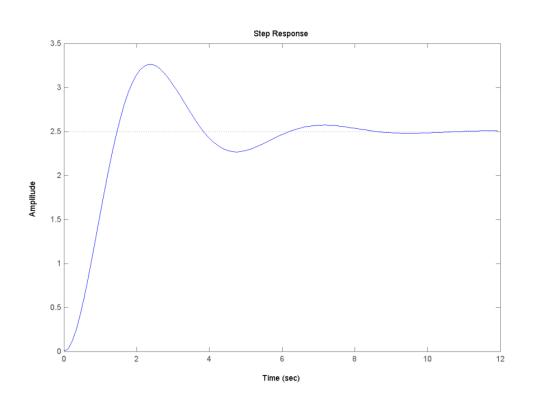
# CHAPITRE 6:

# Stabilité des SA



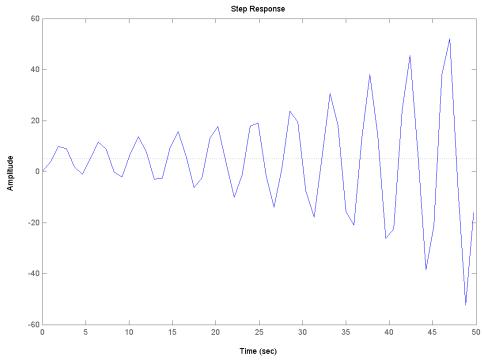
- La stabilité est la première propriété exigée pour les systèmes asservis (boucle fermée)!
  - Un système instable est inutilisable...
- Définition 1 : un système asservi est stable si on lui applique une entrée limitée, sa sortie est limitée.
- Définition 2 : un système asservi est stable s'il revient à un état permanent après une perturbation.
- <u>Définition 3</u>: un système asservi est stable si sa réponse impulsionnelle tend vers une constante pour t = infini.





Système stable

### Système instable





• Conditions générales de stabilité :

# METHODE DES PÔLES

LA STABILITE D'UN SYSTEME DEPEND DE LA NATURE DES POLES DE LA FONCTION DE TRANSFERT EN **BOUCLE FERMEE** 

Un système linéaire G(p) est de la forme :

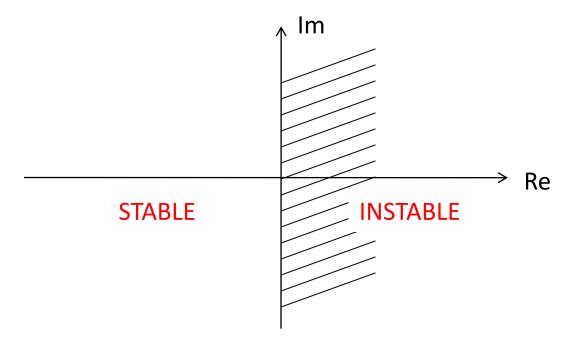
$$G(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p^1 + a_0} = \frac{N(p)}{D(p)} = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{(p + p_i)}$$



# • Conditions générales de stabilité :

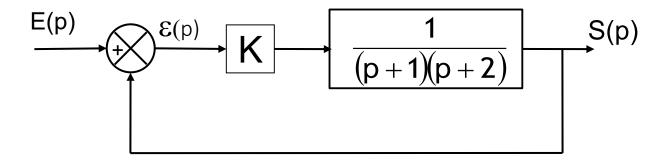
Un système en **boucle fermée** est stable si

tous les pôles de G(p) (Fonction de transfert en boucle fermée) sont à partie réelle strictement négative





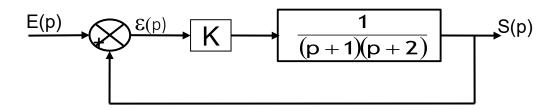
• Exercice C-11 : Soit le système suivant (K>0)



Etudier la stabilité de ce système en fonction de K par la méthode des pôles



• Exercice C-11 : Soit le système suivant (K>0)



On calcule 
$$H_{BF}(p)$$
, on obtient:  $H_{BF}(p) = \frac{K}{(p+1)(p+2)+K} = \frac{K}{p^2+3p+2+K}$ 

Pour trouver les pôles, soit les racines du dénominateur, il faut calculer le discriminant du dénominateur :  $\Delta = 1 - 4K$ 

- Si 
$$\Delta > 0 \Leftrightarrow K < \frac{1}{4}$$
, les racines réelles sont  $p_1 = \frac{-3 + \sqrt{1 - 4K}}{2}$  et  $p_2 = \frac{-3 - \sqrt{1 - 4K}}{2}$ 

Les racines sont à parties réelles négatives ssi K>-2 donc OK car K>0

- Si 
$$\Delta = 0 \Leftrightarrow K = \frac{1}{4}$$
, une racine double Si  $p_{1,2} = -3/2 < 0$  donc OK

- Si 
$$\Delta$$
< 0  $\Leftrightarrow$  K >  $\frac{1}{4}$ , deux racines complexes  $p_1 = \frac{-3+j\sqrt{4K-1}}{2}$  et  $p_2 = \frac{-3-j\sqrt{4K-1}}{2}$  (parties réelles négatives donc OK)



#### Critère de ROUTH-HURWITZ

Il n'est pas toujours facile de déterminer explicitement ces racines, surtout lorsque l'ordre est élevé. Le critère de Routh permet de connaître les conditions de la stabilité (ou non) d'un système sans connaître les valeurs des pôles.

#### **≻**Énoncé du critère :

◆ D(p) est le dénominateur de la fonction de transfert en BF.

Nous avons : D(p) = 
$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + ... + a_1 p + a_0$$

- ◆ Les conditions **nécessaires** pour Routh sont :
  - Tous les a<sub>i</sub> existent
  - Tous les a<sub>i</sub> sont de même signe



- ➤ Si les conditions nécessaires ne sont pas réunies le **système est instable**
- ➤ Si les conditions nécessaires sont réunies,

Nous pouvons alors écrire le tableau de Routh pour déterminer les conditions nécessaires et suffisantes à la stabilité du système.

> Cette méthode comprend 3 étapes :

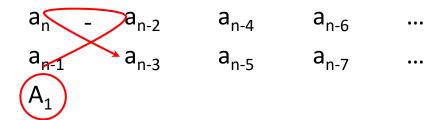
A partir de l'écriture de D(p) =  $a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + ... + a_1 p + a_0$ ,

Nous écrivons le tableau à deux lignes suivants :

$$a_n \qquad a_{n-2} \qquad a_{n-4} \qquad a_{n-6} \qquad ...$$
  $a_{n-1} \qquad a_{n-3} \qquad a_{n-5} \qquad a_{n-7} \qquad ...$ 



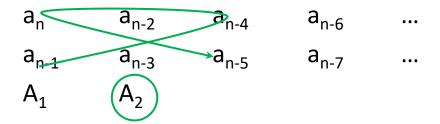
A partir du tableau, nous déduisons le nouveau tableau de Routh de la manière suivante :



$$A_1 = \frac{a_{n-1}.a_{n-2} - a_n.a_{n-3}}{a_{n-1}}$$



■ A partir du tableau, nous déduisons le nouveau tableau de Routh de la manière suivante :



$$A_2 = \frac{a_{n-1}.a_{n-4} - a_n.a_{n-5}}{a_{n-1}}$$



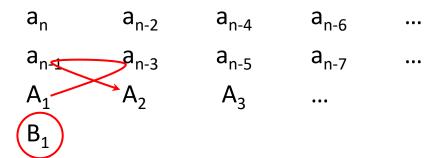
■ A partir du tableau, nous déduisons le nouveau tableau de Routh de la manière suivante :

$$a_{n-2}$$
  $a_{n-4}$   $a_{n-6}$  ...  $a_{n-1}$   $a_{n-3}$   $a_{n-5}$   $a_{n-7}$  ...  $A_{1}$   $A_{2}$   $A_{3}$ 

$$A_3 = \frac{a_{n-1}.a_{n-6} - a_n.a_{n-7}}{a_{n-1}}$$



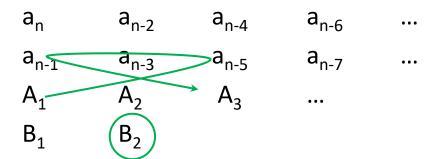
■ A partir du tableau, nous déduisons le nouveau tableau de Routh de la manière suivante :



$$B_1 = \frac{A_1 \cdot a_{n-3} - a_{n-1} \cdot A_2}{A_1}$$



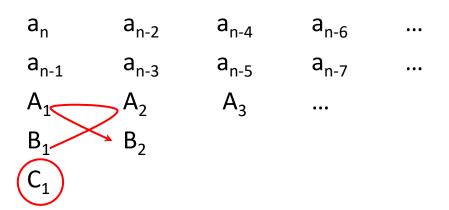
A partir du tableau, nous déduisons le nouveau tableau de Routh de la manière suivante :



$$B_2 = \frac{A_1.a_{n-5} - a_{n-1}.A_3}{A_1}$$



A partir du tableau, nous déduisons le nouveau tableau de Routh de la manière suivante :



$$C_1 = \frac{B_1.A_2 - A_1.B_2}{B_1}$$



■ A partir du tableau, nous déduisons le nouveau tableau de Routh de la manière suivante :

Jusqu'à l'obtention d'un 0 sur la première colonne!



Nous examinons dans un dernier temps la première colonne qui va nous permettre de conclure sur la stabilité du système.

a <sub>n</sub>	a <sub>n-2</sub>	a <sub>n-4</sub>	a <sub>n-6</sub>	•••
a <sub>n-1</sub>	a <sub>n-3</sub>	a <sub>n-5</sub>	a <sub>n-7</sub>	•••
$A_1$	$A_2$	$A_3$	•••	
$B_1$	$B_2$			
$C_{\mathtt{1}}$				
0				

Les racines (ou pôles) sont à partie réelle strictement négative si les termes de la première colonne du tableau sont tous de même signe!

#### => Système stable

Le nombre de changement de signe dans cette première colonne donne le nombre de pôles à partie réelle positive.



#### **■** *Exercice C-12* :

Soit G(p) la fonction de transfert d'un système en boucle fermée.

Etudiez la stabilité de ce système :

$$G(p) = \frac{p+1}{p^5 + 4 \cdot p^4 + 3 \cdot p^3 + 2 \cdot p^2 + p + 2}$$

$$G(p) = \frac{p+1}{p^5 + 4 \cdot p^4 + 3 \cdot p^3 + 2 \cdot p^2 + p + 2}$$



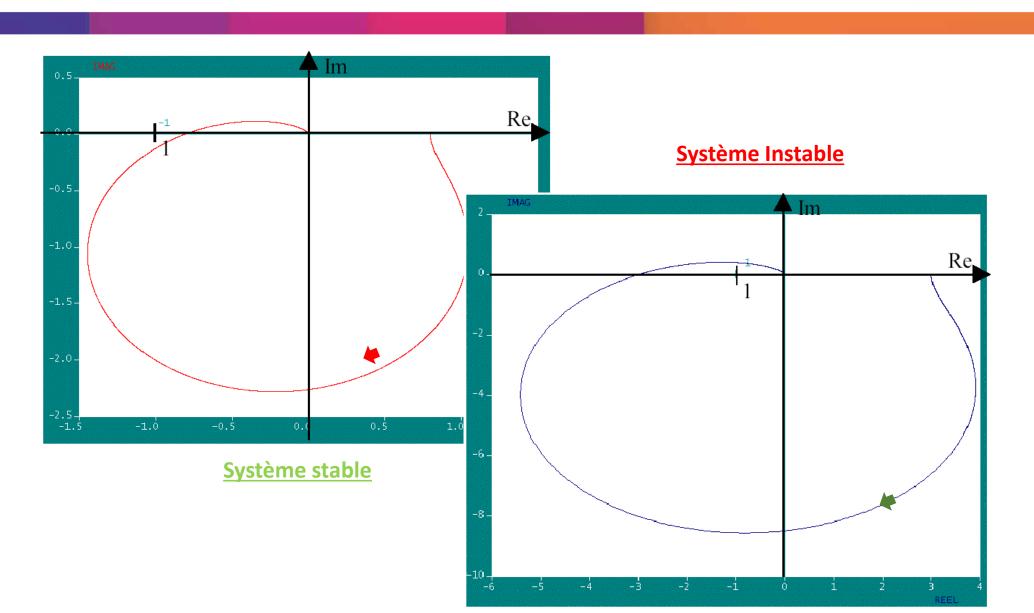
# Critère de Nyquist ou critère du revers

Ce critère est une méthode graphique pour l'analyse de la stabilité d'un système asservi. Il ne s'applique que pour les SA à <u>retour unitaire</u>.

Le critère conclut à la stabilité du système en boucle fermée par examen du lieu de Nyquist en boucle ouverte.

Un système asservi linéaire est stable si, en décrivant le lieu de transfert de Nyquist en BO dans le sens des fréquences croissantes, nous laissons le point dit « critique » (-1,0) à gauche.







Etudier la stabilité par analyse fréquentielle (d'un système asservi à retour unitaire)

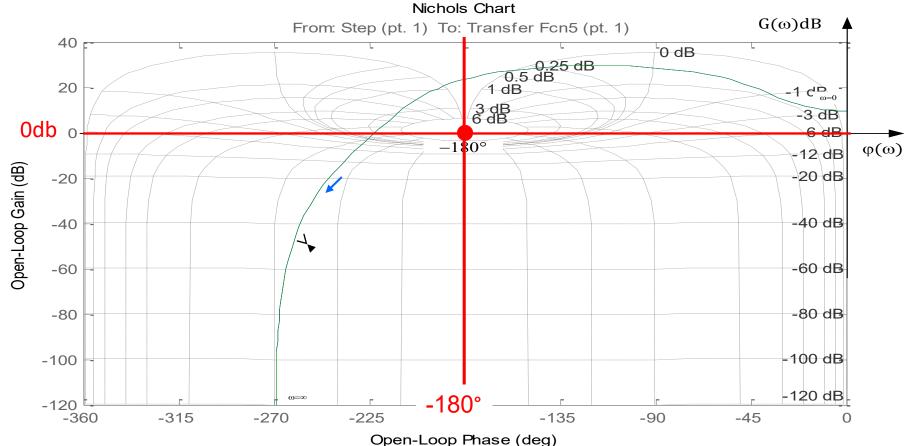


Etudier le module de la fonction de transfert en boucle ouverte à la pulsation  $\omega_{\pi}$ 

Système stable ssi 
$$H_{BO}(\omega_\pi) \leq 1$$
 avec  $\omega_\pi$  tel que  $\varphi_{H_{BO}}(\omega_\pi) = -\pi$ 



• <u>Application au diagramme de Black</u>: un système sera stable si, en décrivant le lieu de transfert de Black <u>en BO dans le sens des fréquences croissantes</u>, nous laissons le point critique (0 dB, –180°) à **DROITE**.





# Marges de stabilité

La stabilité mathématique n'est pas synonyme de bon comportement

Il faut que la stabilité soit «suffisante»

Un système sera d'autant plus stable que son lieu en boucle ouverte sera éloigné du point critique

Si des perturbations ou une déviance (vieillissement par exemple) du comportement apparaissent, une augmentation de la phase ou du gain peut entraîner le système en instabilité



- Marges de stabilité et robustesse :
  - ➤ LA MARGE DE GAIN : c'est le gain minimum qu'il faut ajouter pour rendre le système instable
  - ➤ LA MARGE DE PHASE : c'est la phase minimale que nous pouvons ajouter pour passer au point critique

#### **Système ROBUSTE**

SI

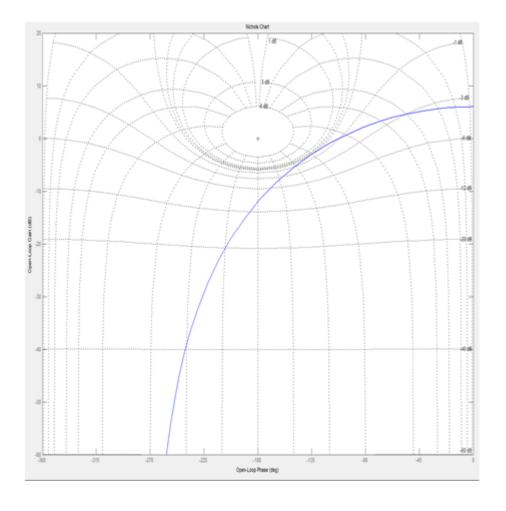
La marge de gain ≥ 10db

ET

La marge de phase ≥ 45°

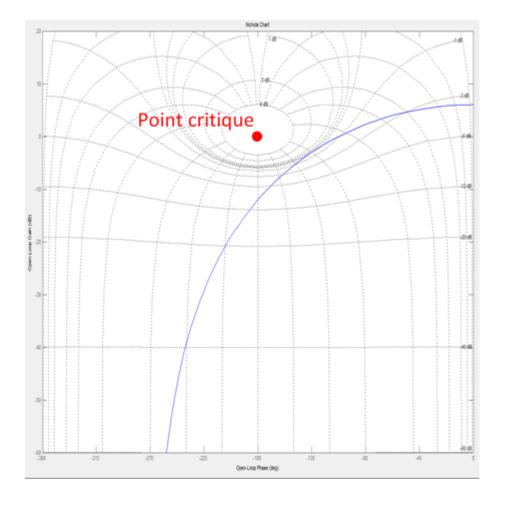






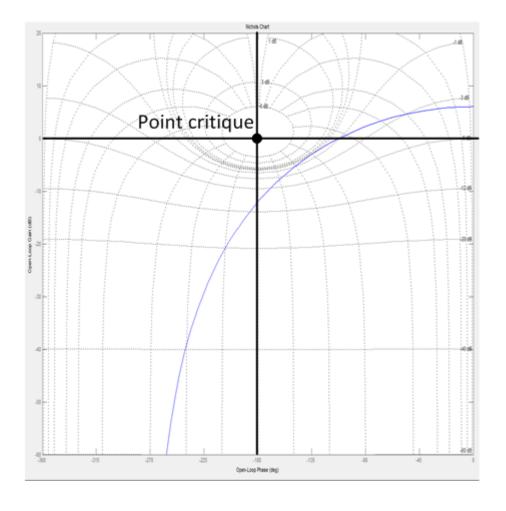














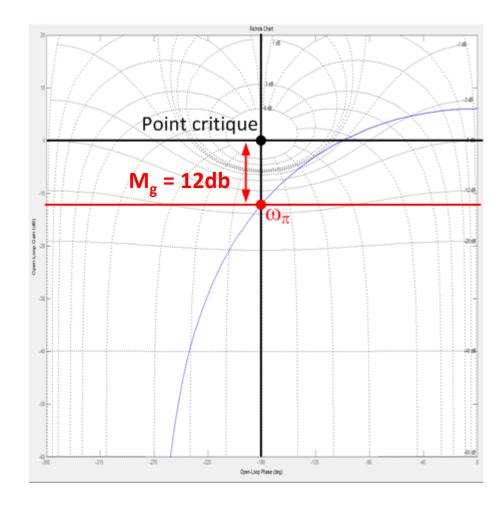


#### - Marge de gain :

Elle se calcule quand la phase de la fonction de transfert en BO vaut  $-\pi$  (-180°)

$$M_g = -20 \log H_{bo}(\omega_{\pi})$$

$$\varphi(\omega_{\pi}) = -\pi => \omega_{\pi}$$





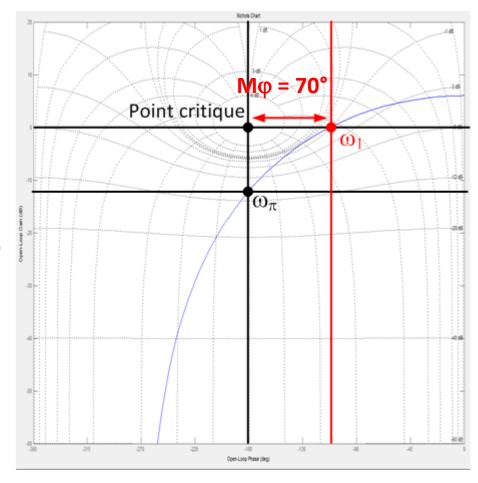
# • Mesures de ces marges : <u>LIEU DE BLACK</u>

#### - Marge de phase :

Elle se calcule quand le module de la fonction de transfert en BO vaut 1 ou 0db.

$$M_{\varphi} = 180^{\circ} + \varphi_{H_{BO}}(\omega_1)$$

$$H_{bo}(\omega_1) = 1 \Rightarrow \omega_1$$

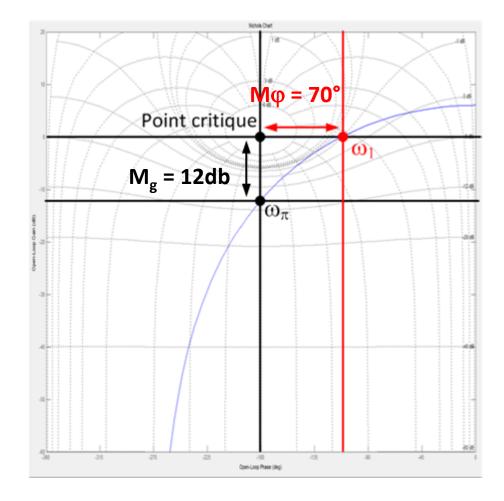






 $M_g$ = 12db **ET**  $M_{\phi}$ =70°

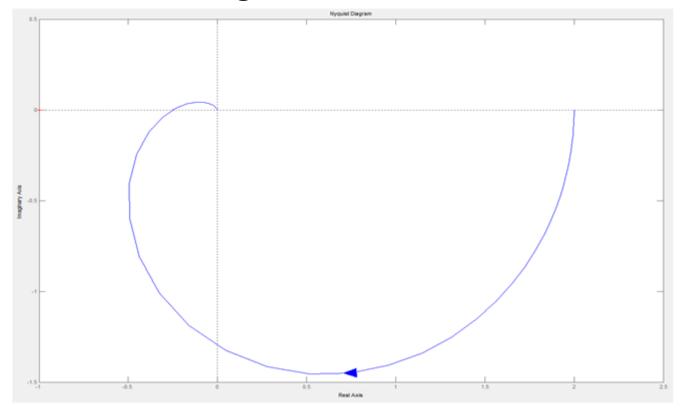
⇒ Système robuste







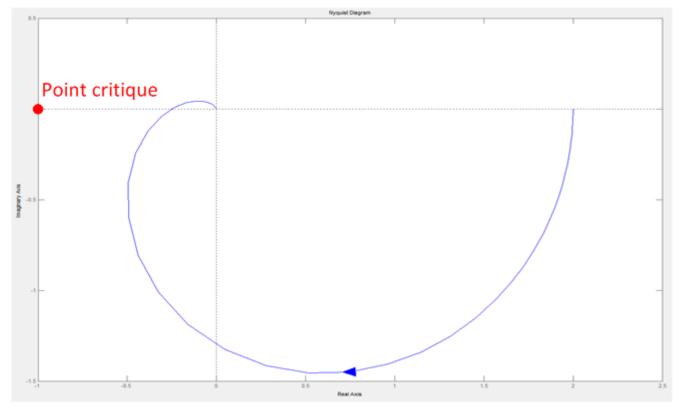
• Mesures de ces marges : <u>LIEU DE NYQUIST</u>





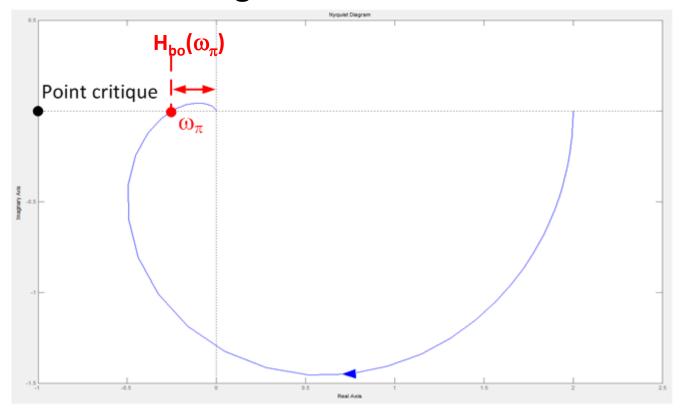


• Mesures de ces marges : <u>LIEU DE NYQUIST</u>





• Mesures de ces marges : LIEU DE NYQUIST



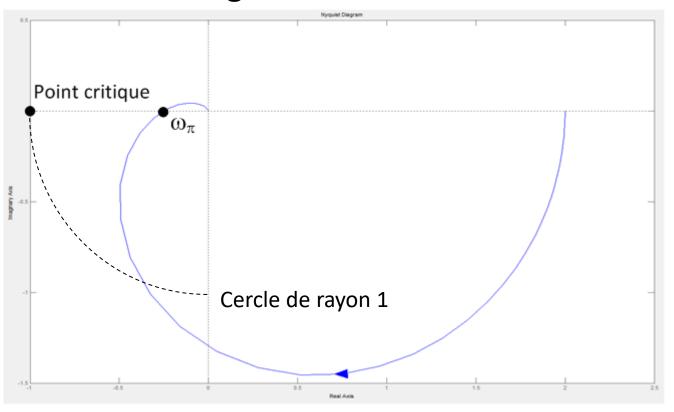
#### Marge de gain :

Elle se calcule quand la phase de la fonction de transfert en BO vaut  $-\pi$  (-180°):

$$M_g = -20 \log (H_{bo}(\omega_{\pi}))$$



• Mesures de ces marges : LIEU DE NYQUIST



#### Marge de phase :

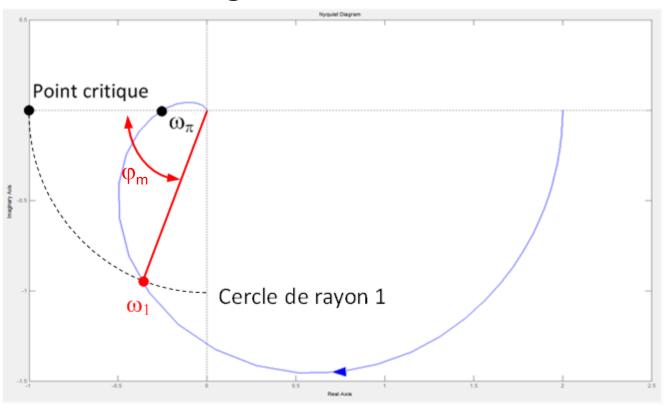
Elle se calcule quand le module de la fct de transfert en BO vaut 1 ou 0db :

$$M_{\varphi} = 180^{\circ} + \varphi_{H_{BO}}(\omega_1)$$





• Mesures de ces marges : LIEU DE NYQUIST



#### Marge de phase :

Elle se calcule quand le module de la fct de transfert en BO vaut 1 ou 0db :



### • Exercice C-13:

Calculer la marge de gain et de phase pour le système suivant s'il est stable :

