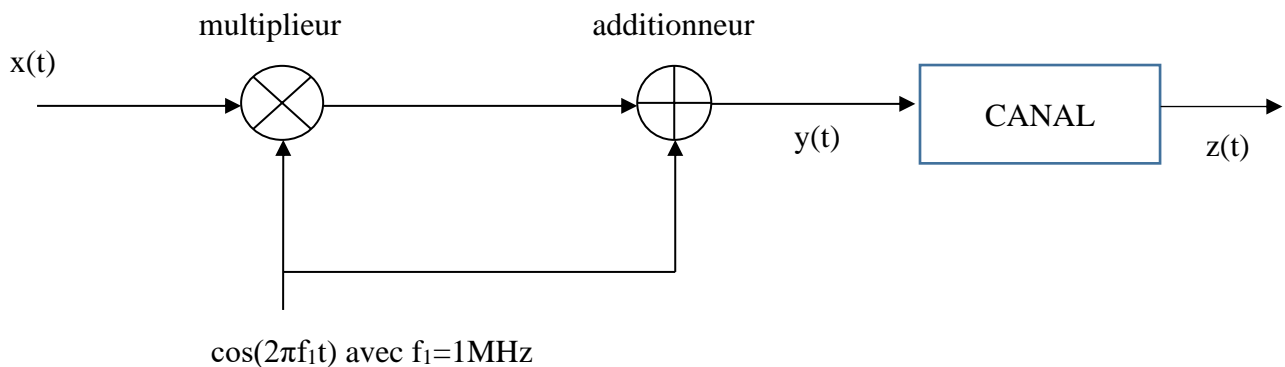


PARTIEL
ANALYSE DES SIGNAUX ET DES IMAGES

**Vos réponses seront clairement rédigées et expliquées.
Une équation mathématique ne constitue pas une explication.
Vos résultats encadrés.**

Exercice 1 :

Un ingénieur souhaite mettre au point un système de transmission, schématisé ci-dessous, s'appuyant sur une modulation d'amplitude :



Le signal contenant l'information à transmettre est le suivant :

$$x(t) = 4 \cdot \text{sinc}(\pi t \cdot 25 \cdot 10^3) \cdot \text{sinc}(\pi t \cdot 25 \cdot 10^3) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$$

Avec $f_0=50\text{kHz}$

Le signal modulé réellement transmis et envoyé sur un canal est $y(t)$.

1. Calculer la transformée de Fourier de $\text{sinc}(\pi t \cdot 25 \cdot 10^3)$. Pour cela vous pouvez notamment vous aider avec la propriété de dualité (voir formulaire).
2. Calculer et représenter la transformée de Fourier de $x(t)$.

On supposera pour la suite de l'exercice que la transformée de Fourier de $x(t)$ (résultat de la question 2.) est en réalité une fonction « triangulaire » d'amplitude A , centrée sur 50 kHz et dont la base fait 50 kHz de largeur.

3. Calculer la transformée de Fourier du signal transmis $y(t)$. Représenter alors le spectre d'amplitude de $y(t)$.

4. Ce signal $y(t)$ est transmis à travers un canal de transmission et jusqu'à atteindre une antenne de réception. On suppose dans un premier temps que ce canal n'a aucun impact sur le signal $y(t)$ qui s'y propage.

Au niveau du récepteur on souhaite **numériser** le signal reçu $y(t)$ à l'aide d'un convertisseur analogique numérique fonctionnant sur 4 bits. On constate pour $y(t)$ une plage d'amplitudes allant de -2Volts à +4Volts.

- a. Déterminer en justifiant tous les paramétrages nécessaires pour ce convertisseur permettant d'obtenir la meilleure précision sur le signal numérisé.
 - b. Représenter alors le spectre d'amplitude de ce signal numérisé
5. En réalité lors de la propagation dans le canal de transmission, on s'aperçoit que le canal a un effet de filtrage sur le signal $y(t)$ qui s'y propage. Plus précisément il se comporte comme un filtre passe bande de fréquences de coupure 980kHz et 1020 kHz.
- a. Représenter la réponse en fréquence du filtre (en amplitude).
 - b. Expliquer mathématiquement temporellement et fréquentiellement comment se traduit cet effet de filtrage.
 - c. Déterminer le signal $z(t)$ réellement reçu au niveau de l'antenne de réception et expliquer clairement le phénomène observé.
 - d. Représenter le spectre d'amplitude de $z(t)$
6. On souhaite malgré tout analyser numériquement le signal $z(t)$ sans changer les spécifications du convertisseur proposé à la question 4.a.
- a. Représenter le spectre du signal après numérisation comme demandé à la question 4.b.
 - b. A partir de N échantillons du signal $z(t)$, on cherche à calculer sa Transformée de Fourier Discrète.
 - i. Déterminer en justifiant une valeur de N qui permet d'obtenir une TFD visuellement similaire à la transformée de Fourier de $z(t)$. On fera attention à la nature du signal $z(t)$ pour répondre à cette question.
 - ii. Représenter cette TFD et donner alors la résolution fréquentielle obtenue.

Exercice 2

Un système émetteur/récepteur en Télécommunications fonctionne de la manière suivante :

Ce système a la possibilité d'envoyer deux types d'information :

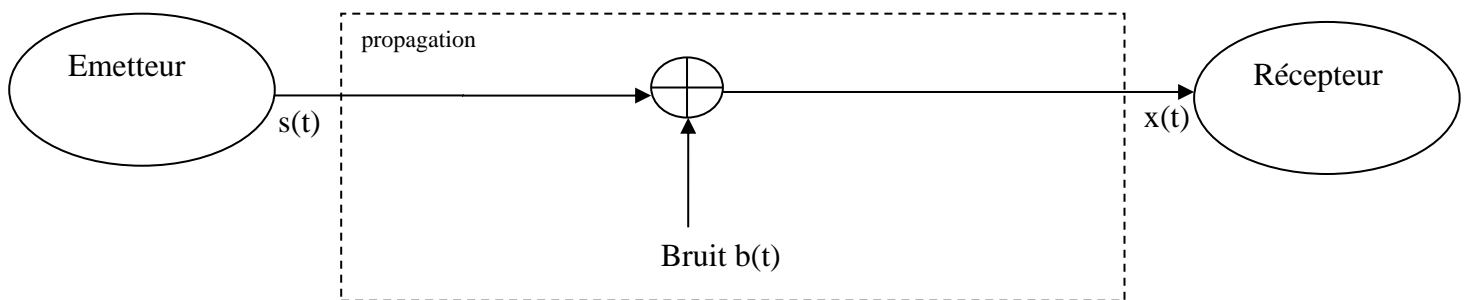
- S'il cherche à envoyer un bit « 1 », le système émet un signal $s(t)$ constant de 8 Volts pendant une durée T secondes.
- S'il cherche à envoyer un bit « 0 », le système émet un signal $s(t)$ constant de 1 Volt pendant une durée T secondes.

On sait que la probabilité que l'émetteur envoie un bit « 1 » est de $3/4$.

Lors de sa propagation, ce signal « télécom » se voit perturbé par du bruit additif. Une analyse montre que ce bruit $b(t)$ est blanc et suit une loi gaussienne de moyenne $2V$ et de variance 4 .

A la réception, l'objectif est de décider quel est le bit qui a été transmis par l'émetteur.

Pour y parvenir le circuit de réception prélève un échantillon au milieu de chaque signal reçu $x(t)$ et compare l'amplitude de cet échantillon $x(n)$ à un seuil fixé à $2V$. La figure ci-dessous résume le fonctionnement global



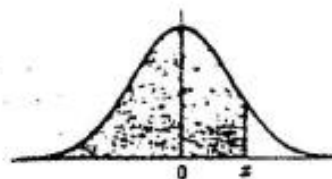
Une des erreurs pouvant être commises à la réception est de détecter un bit « 1 » alors qu'en réalité le bit « 0 » a été envoyé.

Calculer cette probabilité d'erreur (**et uniquement celle-là !**) Vous rédigerez correctement votre raisonnement (avec de réelles phrases explicatives et non pas une succession d'équations !). Une partie de la note tiendra compte de la clarté de vos explications.

INFORMATIONS ET FORMULAIRE

AIRE SOUTENDUE PAR LA COURBE
NORMALE CANONIQUE DE $-\infty$ à x

$$\text{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$$



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5754
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7258	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7518	.7549
0.7	.7580	.7612	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7996	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9163	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
3.5	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998
3.6	.9998	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.7	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.8	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Décomposition en série de Fourier réelle et complexe + Relations entre a_n , b_n et c_n :

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(2\pi n \frac{t}{T}\right) + b_n \sin\left(2\pi n \frac{t}{T}\right)$$

avec

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_T x(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_T x(t) \cos\left(2\pi n \frac{t}{T}\right) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_T x(t) \sin\left(2\pi n \frac{t}{T}\right) dt$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{+2\pi j \frac{n}{T} t}$$

avec

$$c_n = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-2\pi j \frac{n}{T} t} dt$$

$$c_0 = \frac{a_0}{2}$$

$$c_n = \frac{1}{2} (a_n - j b_n)$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2} (a_n + j b_n) = c_n^*$$

Définition de la Transformée de Fourier

$$x(t) \xrightarrow{TF} X(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2i\pi \nu t} dt$$

Quelques propriétés de la Transformée de Fourier :

■ Changement d'échelle :

$$\begin{aligned} x(t) &\xrightarrow{TF} X(\nu) \\ x(kt) &\xrightarrow{TF} \frac{1}{|k|} X\left(\frac{\nu}{k}\right) \end{aligned}$$

■ Dualité : $x(t) \leftrightarrow X(\nu)$ alors $X(t) \leftrightarrow x(-\nu)$

■ Dérivation :

■ Par rapport au temps

$$\left\| \begin{aligned} x(t) &\xrightarrow{TF} X(\nu) \\ \frac{d^n x(t)}{dt^n} &\xrightarrow{TF} (2\pi j \nu)^n X(\nu) \end{aligned} \right\|$$

■ Par rapport à la fréquence

$$\left\| \begin{aligned} x(t) &\xrightarrow{TF} X(\nu) \\ t^n x(t) &\xrightarrow{TF} \frac{d^n X(\nu)}{d\nu^n} \frac{1}{(-2\pi j)^n} \end{aligned} \right\|$$

Quelques Transformées de Fourier utiles

$$e^{2\pi j \nu_0 t} \xrightarrow{\text{TF}} \delta(\nu - \nu_0)$$

$$\delta(t - t_0) \xrightarrow{\text{TF}} e^{-2\pi j \nu t_0}$$

Définition de la Transformée de Fourier Discrète (TFD) :

$$X\left(\nu = \frac{k}{NT_e}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-\frac{2j\pi nk}{N}} \equiv X(k) \quad k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$$

Périodique de période N en k donc de période ν_e en ν

Expression matricielle de la TFD :

$$\begin{array}{c} \text{Ligne} \\ \text{numéro} \\ k \end{array} \left[\begin{array}{c} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-2) \\ X(N-1) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & e^{-\frac{2j\pi nk}{N}} & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-2) \\ x(N-1) \end{array} \right]$$

Colonne numéro n

Formules Trigo :

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos(a).\cos(b) - \sin(a).\sin(b) \\ \cos(a-b) &= \cos(a).\cos(b) + \sin(a).\sin(b) \\ \sin(a+b) &= \sin(a).\cos(b) + \sin(b).\cos(a) \\ \sin(a-b) &= \sin(a).\cos(b) - \sin(b).\cos(a) \\ \cos(a).\cos(b) &= \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b)) \\ \sin(a).\sin(b) &= \frac{1}{2} (\cos(a-b) - \cos(a+b)) \\ \cos(a).\sin(b) &= \frac{1}{2} (\sin(a+b) - \sin(a-b)) \\ \sin(a).\cos(b) &= \frac{1}{2} (\sin(a+b) + \sin(a-b))\end{aligned}$$

Expression de la fenêtre de Hanning calculée sur N points :

$$h(n) = 0.5 \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi n}{N} \right) \right) \quad \text{avec } n=0,1,\dots,N-1$$

Expression de la fenêtre de Hamming calculée sur N points :

$$h(n) = 0.54 - 0.46 \cdot \cos \left(\frac{2\pi n}{N} \right) \quad \text{avec } n=0,1,\dots,N-1$$


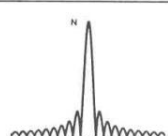
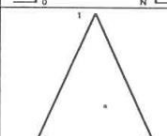
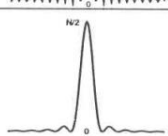
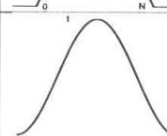
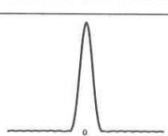
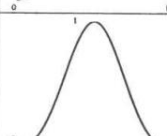
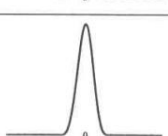
Nom		Représentation temporelle	Représentation fréquentielle	Largeur lob.princ.	Amp. relative $\frac{\text{lob.princ}}{\text{lob.sec.}}$
Rectangulaire				$\frac{2}{N}$	-13 dB
Triangulaire				$\frac{4}{N}$	-25 dB
Hamming				$\frac{4}{N}$	-41 dB
Blackman				$\frac{6}{N}$	-57 dB

Table 3 Différents types de fenêtres et leurs caractéristiques