

Algorytmy i metody optymalizacji

**Temat: Optymalizacja bez ograniczeń - Projekt nr 1;
Zestaw nr 13**

Bartosz Zaborowski 319996

1. Dane

Przyjmujemy:

- promień Ziemi (poziom morza): 6378137 m,
- prędkość sygnału z satelitów: 299792458 m/s.

Dane przedstawiają informacje o położeniu (liczba satelitów wynosi N = 13) satelitów systemu pozycjonowania (w systemie współrzędnych sferycznych) oraz czasy nadejścia sygnału od nich.

Z treści zadania mamy podane dwie tabele z danymi:

Położenie satelitów

Nr	Szerokość (dzies.)	Długość (dzies.)	Szerokość kątowa	Długość kątowa	Wysokość [m n.p.m.]
1	6.1559355081676	52.5457318089284	6° 9' 21.37" N	52° 32' 44.63" E	19 513 264.0
2	47.1886635984881	147.8037666254030	47° 11' 19.19" N	147° 48' 13.56" E	14 002 215.3
3	-12.8232765555657	-9.4526305456900	12° 49' 23.80" S	9° 27' 9.47" W	13 862 417.9
4	54.7951930601781	-127.2512659390310	54° 47' 42.70" N	127° 15' 4.56" W	14 061 989.2
5	34.2437389209835	25.3517357204992	34° 14' 37.46" N	25° 21' 6.25" E	13 761 866.5

Nr	Szerokość (dzies.)	Długość (dzies.)	Szerokość kątowa	Długość kątowa	Wysokość [m n.p.m.]
6	53.6353221185862	64.8608900078692	53° 38' 7.16" N	64° 51' 39.20" E	13 893 736.4
7	43.0785026706136	-8.0886091756957	43° 4' 42.61" N	8° 5' 18.99" W	13 460 953.4
8	20.1512104981551	62.5555486255998	20° 9' 4.36" N	62° 33' 19.98" E	13 819 354.8
9	49.2901079265804	44.1040081414650	49° 17' 24.39" N	44° 6' 14.43" E	14 015 671.6
10	49.4552880799264	-67.4173769536602	49° 27' 19.04" N	67° 25' 2.56" W	13 800 039.6
11	38.2248532902654	-46.1640423241860	38° 13' 29.47" N	46° 9' 50.55" W	13 357 759.5
12	25.2062832986468	83.7474569414005	25° 12' 22.62" N	83° 44' 50.84" E	13 759 876.0
13	43.4788434173197	-7.4150994801044	43° 28' 43.84" N	7° 24' 54.36" W	12 778 112.9

Czasy dotarcia sygnału w sekundach

Nr satelity	Czas [s]
1	0.09642964511743930
2	0.08511665086736160
3	0.08389667794635720
4	0.08487585963182320
5	0.06871295254797900
6	0.07072441166066990
7	0.06821871552527680

Nr satelity	Czas [s]
8	0.07546001104207520
9	0.06920176917880840
10	0.07764842100743740
11	0.07453795513145620
12	0.07812844723686560
13	0.06584869085813090

2. Rozwiązanie

Przy opracowywaniu rozwiązania, zdefiniowane zostały pomocnicze zmienne oraz parametry.

Zbiory:

- $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$ - zbiór satelitów.

Parametry:

Wspomnianej wcześniej w treści zadania parametry jakie przyjmuję to:

- $R = 6378137[m]$ - poziom morza względem środka kuli ziemskiej (promień Ziemi),
- $v_{syg} = 299792458[m/s]$ - prędkość sygnału pochodzącego z satelitów,
- h_i - Wysokość satelity względem powierzchni Ziemi
- $\forall_{i \in S} r_i = h_i + R = 26378137[m]$ - wysokość satelity względem środka kuli ziemskiej,
- θ_i - Szerokość geograficzna satelity i w stopniach
- ϕ_i - Długość geograficzna satelity i w stopniach
- b - nieznany bias czasowy zegara odbiornika, w sekundach, który przesuwa wszystkie zmierzone czasy sygnałów t_i .

Poniżej tabela z wartościami odpowiadającymi każdemu z satelitów:

i	θ_i	ϕ_i	$h_i [m]$	$r_i = R + h_i [m]$
1	6.1559355081676	52.5457318089284	19 513 264.0	25891401.0
2	47.1886635984881	147.8037666254030	14 002 215.3	20380352.3
3	-12.8232765555657	-9.4526305456900	13 862 417.9	20240554.9
4	54.7951930601781	-127.2512659390310	14 061 989.2	20440126.2

i	θ_i	ϕ_i	h_i [m]	$r_i = R + h_i$ [m]
5	34.2437389209835	25.3517357204992	13 761 866.5	20140003.5
6	53.6353221185862	64.8608900078692	13 893 736.4	20271873.4
7	43.0785026706136	-8.0886091756957	13 460 953.4	19839090.4
8	20.1512104981551	62.5555486255998	13 819 354.8	20197491.8
9	49.2901079265804	44.1040081414650	14 015 671.6	20393808.6
10	49.4552880799264	-67.4173769536602	13 800 039.6	20178176.6
11	38.2248532902654	-46.1640423241860	13 357 759.5	19735896.5
12	25.2062832986468	83.7474569414005	13 759 876.0	20138013.0
13	43.4788434173197	-7.4150994801044	12 778 112.9	19156249.9

- t_i - Czasy nadania sygnału i w sekundach:

i	t_i [s]
1	0.09642964511743930
2	0.08511665086736160
3	0.08389667794635720
4	0.08487585963182320
5	0.06871295254797900
6	0.07072441166066990
7	0.06821871552527680
8	0.07546001104207520
9	0.06920176917880840
10	0.07764842100743740
11	0.07453795513145620
12	0.07812844723686560

i	t_i [s]
13	0.06584869085813090

Aby przejść do układu kartezjańskiego (x, y, z) mając podane współrzędne sferyczne (r, θ, ϕ) , należy zastosować wzory rozpisane przeze mnie poniżej:

- $x = x(r, \theta, \phi) = r \cos \theta \cos \phi$
- $y = y(r, \theta, \phi) = r \cos \theta \sin \phi$
- $z = z(r, \theta, \phi) = r \sin \theta$

Kiedy wykonamy podstawienie danych do powyższych wzorów, uzyskamy współrzędne satelitów w układzie kartezjańskim wyrażone w metrach. Poniżej tabela z przeliczonymi wartościami:

i	x_i	y_i	z_i
1	15654494.42	20435085.79	2776457.96
2	-11720439.55	7379678.68	14950933.06
3	19467763.22	-3241242.83	-4492282.59
4	-7132840.60	-9379731.43	16701556.28
5	15045421.80	7128566.36	11333073.96
6	5106157.74	10881138.20	16324118.22
7	14346680.47	-2038925.08	13550094.17
8	8738968.74	16827214.33	6958013.95
9	9551465.72	9257309.96	15458950.29
10	5036993.30	-12110950.83	15333374.69
11	10738212.51	-11183646.42	12211570.56
12	1984410.46	18112094.11	8576347.10
13	13784075.04	-1793932.77	13181160.45

Aby odtworzyć ze współrzędnych kartezjańskich (x, y, z) współrzędne sferyczne (r, θ, ϕ) należy zastosować wzory odwrotne.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = \arcsin\left(\frac{z}{r}\right) = \arcsin\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)$$

$$\phi = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Zmienne:

Przy rozwiązywaniu zadania wprowadziłem następujące zmienne:

- $d_i = v_{syg} \cdot t_i$ - odległość od satelity i , obliczona na podstawie czasu nadania sygnału t_i oraz prędkości rozchodzenia się sygnału v_{syg} (nie uwzględniająca biasu).
- $\Delta d_i = v_{syg} \cdot b$ – odległość uwzględniająca bias czasowy jako opóźnienie.
- $X_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix}$ - poszukiwane współrzędne własne (układ kartezjański),
- $X_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}$ - współrzędne satelity i (układ kartezjański),

Następnie przystąpiłem do rozwiązywania zadań z polecenia.

1. Sformułować układ równań określających nasze położenie w układzie współrzędnych kartezjańskich

Istnieją dwa sposoby określenia odległości pomiędzy naszą pozycją a każdym z satelitów:

Pierwszy z nich wykorzystuje czas dotarcia sygnału oraz znaną prędkość jego propagacji. Wówczas dystans można wyrazić zależnością:

$$d_i = v_{syg} \cdot t_i$$

Drugi sposób opiera się na geometrycznym obliczeniu odległości w przestrzeni kartezjańskiej, z użyciem wzoru na metrykę euklidesową.

Porównując wartości uzyskane obiema metodami dla każdego satelity, otrzymujemy pojedyncze równanie odpowiadające danemu satelicie. Musimy pamiętać również o uwzględnieniu opóźnienia (bias).

$$\forall_{i \in S} d_i + \Delta d_i = |X_n - X_i| = \sqrt{(x_n - x_i)^2 + (y_n - y_i)^2 + (z_n - z_i)^2}$$

a po rozwinięciu:

$$\forall_{i \in S} d_i + v_{\text{syg}} \cdot b = |X_n - X_i| = \sqrt{(x_n - x_i)^2 + (y_n - y_i)^2 + (z_n - z_i)^2}$$

gdzie:

- $d_i = v_{\text{syg}} \cdot t_i$ – odległość obliczona z czasu nadejścia sygnału,
- b – bias czasowy zegara odbiornika,
- v_{syg} – prędkość sygnału,
- $X_n = [x_n, y_n, z_n]^T$ – współrzędne odbiornika,
- $X_i = [x_i, y_i, z_i]^T$ – współrzędne satelity i .

To rozwiązanie pozwala na uwzględnienie biasu czasowego zegara odbiornika, który jest kluczowym czynnikiem przy precyzyjnym wyznaczaniu położenia na podstawie sygnałów pochodzących z wielu satelitów o różnorodnych parametrach. Uwzględnienie tego przesunięcia czasowego zapewnia poprawność i spójność obliczeń dystansów oraz minimalizuje błędy wynikające z różnic w czasie pomiaru między odbiornikiem a satelitami.

2. Sformułować zadanie optymalizacji bez ograniczeń stosując metodę najmniejszych kwadratów

Możemy wprowadzić funkcję f_i , opisującą różnicę pomiędzy odlegością geometryczną w układzie kartezjańskim a odlegością wyznaczoną na podstawie czasu dotarcia sygnału oraz uwzględniającą nieznany bias czasowy odbiornika:

$$f_i(x_n, y_n, z_n, b) = \sqrt{(x_n - x_i)^2 + (y_n - y_i)^2 + (z_n - z_i)^2} - (d_i + v_{\text{syg}} \cdot b)$$

gdzie:

- $d_i = v_{\text{syg}} \cdot t_i$ – odległość obliczona z czasu nadejścia sygnału,
- b – bias czasowy zegara odbiornika,
- v_{syg} – prędkość sygnału,
- $X_n = [x_n, y_n, z_n]^T$ – współrzędne odbiornika,
- $X_i = [x_i, y_i, z_i]^T$ – współrzędne satelity i .

Na podstawie tej funkcji można wyznaczyć macierz Jacobiego, zbudowaną z pochodnych cząstkowych względem współrzędnych (x_n, y_n, z_n) . Macierz ta może być następnie wykorzystana w iteracyjnym algorytmie Levenberga–Marquardta:

$$\bullet \frac{\partial f_i}{\partial x_n} = \frac{x_n - x_i}{\sqrt{(x_n - x_i)^2 + (y_n - y_i)^2 + (z_n - z_i)^2}}$$

- $\frac{\partial f_i}{\partial y_n} = \frac{y_n - x_i}{\sqrt{(x_n - x_i)^2 + (y_n - y_i)^2 + (z_n - z_i)^2}}$
- $\frac{\partial f_i}{\partial z_n} = \frac{z_n - x_i}{\sqrt{(x_n - x_i)^2 + (y_n - y_i)^2 + (z_n - z_i)^2}}$
- $\frac{\partial f_i}{\partial b} = -v_{\text{syg}}$

W efekcie, całe zadanie można sformułować jako problem optymalizacji nieliniowej bez ograniczeń, polegający na minimalizacji sumy kwadratów funkcji f_i dla wszystkich satelitów i należących do zbioru S :

$$\min_{X_n} \sum_{i \in S} \left(\sqrt{(x_n - x_i)^2 + (y_n - y_i)^2 + (z_n - z_i)^2} - (d_i + v_{\text{syg}} \cdot b) \right)^2$$

3. Wyznaczyć swoje położenie rozwiązuając: sformułowane powyżej zadanie optymalizacji za pomocą metody optymalizacji realizującej metodę Levenberga-Marquardta do rozwiązywania zadań regresji nieliniowej z toolbox-u Optimization programu MATLAB (lsqnonlin) lub bibliotek scipy i numpy w Python

Przy rozwiązywaniu zadania posłużyłem się programem MATLAB, a konkretniej toolboxem Optimization. Do obliczenia położenia odbiornika wykorzystano metodę nieliniowej regresji najmniejszych kwadratów, zrealizowaną funkcją lsqnonlin z algorytmem Levenberga-Marquardta.

a) Konwersja współrzędnych satelitów

Współrzędne satelitów podane w układzie sferycznym (kąty theta, phi i wysokość nad Ziemią) zostały przekształcone na układ kartezjański (x, y, z) za pomocą wzorów:

$$x = x(r, \theta, \phi) = r \cos \theta \cos \phi$$

$$y = y(r, \theta, \phi) = r \cos \theta \sin \phi$$

$$z = z(r, \theta, \phi) = r \sin \theta$$

gdzie:

$r_i = R + h_i$ jest całkowitą odległością od środka Ziemi, a $R = 6378137m$ to promień Ziemi.

W MATLAB-ie implementacja wygląda następująco:

```

function [positions] = sphericalToCartesian(sphericalPositions)
[length, ~] = size(sphericalPositions);
positions = zeros(length, 3);

positions(:, 1) = sphericalPositions(:, 3) .* cos(deg2rad(sphericalPositions(:, 1))) .* cos(deg2rad(sphericalPositions(:, 2)));
positions(:, 2) = sphericalPositions(:, 3) .* cos(deg2rad(sphericalPositions(:, 1))) .* sin(deg2rad(sphericalPositions(:, 2)));
positions(:, 3) = sphericalPositions(:, 3) .* sin(deg2rad(sphericalPositions(:, 1)));
end

```

Dzięki temu otrzymano współrzędne kartezjańskie wszystkich 13 satelitów w metrach.

b) Wyznaczenie pozycji odbiornika

Pozycję odbiornika określono poprzez minimalizację błędu pomiędzy odległościami geometrycznymi do satelitów a zmierzonymi pseudodystansami.

$$d_i = v_{syg} * t_i$$

gdzie:

- v_{syg} = 299 792 458 m/s - prędkość nadania sygnału
- t_i - czas nadania sygnału

Funkcja celu dla algorytmu *lsqnonlin* uwzględnia zarówno współrzędne odbiornika, jak i nieznany bias zegara. Dla każdego satelity obliczamy różnicę pomiędzy odlegością geometryczną a zmierzonym pseudodystansem powiększoną o przesunięcie czasowe:

$$f_i(x_n, y_n, z_n, b) = \sqrt{(x_n - x_i)^2 + (y_n - y_i)^2 + (z_n - z_i)^2} - (d_i + v_{syg} \cdot b)$$

gdzie:

- $d_i = v_{syg} \cdot t_i$ – odległość obliczona z czasu nadania sygnału,
- b – bias czasowy zegara odbiornika,
- v_{syg} – prędkość sygnału,
- $X_n = [x_n, y_n, z_n]^T$ – współrzędne odbiornika,
- $X_i = [x_i, y_i, z_i]^T$ – współrzędne satelity i .

Implementacja funkcji fi w matlabie wraz z wyliczaniem jakobianu wyglądała następująco:

```

function [error, jacobian] = distanceError(currentState, positions, expectedDistances)
% currentState = [x; y; z; clockBias]
x = currentState(1);
y = currentState(2);
z = currentState(3);
b = currentState(4); % bias zegara w sekundach

c = 299792458; % prędkość światła

% Liczba satelitów
m = size(positions, 1);

% Odległość geometryczna
geometricDistance = sqrt((x - positions(:, 1)).^2 + (y - positions(:, 2)).^2 + (z - positions(:, 3)).^2);

% Pseudoodległość modelowana
modeledDistance = geometricDistance + c * b;

% Błąd
error = modeledDistance - expectedDistances;

% Jacobian
if nargout > 1
jacobian = zeros(m, 4);
jacobian(:, 1) = (x - positions(:, 1)) ./ geometricDistance;
jacobian(:, 2) = (y - positions(:, 2)) ./ geometricDistance;
jacobian(:, 3) = (z - positions(:, 3)) ./ geometricDistance;
jacobian(:, 4) = c * ones(m, 1); % pochodna po biasie
end

```

Po wywołaniu funkcji bazującej na metodzie Levenberga-Marquardta uzyskałem wyniki, wskazujące na konkretnie położenie na mapie.

Implementacja funkcji w MATLAB:

```

function [coordinates, squaredResidualNorm] = calculateCoordinates(positions, expectedDistances)

distanceErrorFunction = @(x)(distanceError(x, positions, expectedDistances));

[coordinates, squaredResidualNorm] = lsqnonlin(distanceErrorFunction, startingState, [], [], op1
end

```

Funkcja calculateCoordinates iteracyjnie dopasowuje współrzędne odbiornika (x_n, y_n, z_n) oraz bias zegara odbiornika b , minimalizując różnicę pomiędzy odległościami geometrycznymi a zmierzonymi pseudodystansami. W wyniku działania solvera otrzymano:

- współrzędne ECEF odbiornika (x, y, z),
- bias czasowy zegara b w sekundach,
- współczynnik reszt kwadratowych squaredResidualNorm,
- współrzędne sferyczne (θ, ϕ, r) odbiornika, które pozwoliły na uzyskanie szerokości i długości geograficznej

Bias zegara okazał się być bardzo istotnym parametrem, ponieważ pozwala skorygować przesunięcia czasowe w pomiarach sygnałów od satelitów, dzięki czemu dopiero po jego uwzględnieniu, uzyskane współrzędne odbiornika są poprawne i spójne z rzeczywistym położeniem.

W wyniku działania algorytmu, wyniki prezentowane są zarówno w układzie kartezjańskim, jak i geograficznym. Niezwykle przydatną funkcjonalnością przygotowaną przeze mnie podczas wykonywania zadania, okazało się dodatkowe zwracanie przez algorytm, linka do Google Maps (zwierającego przeliczone współrzędne wynikowe), gotowego do przeklejenia w przeglądarkę. Link przenosił mnie od razu do lokalizacji odpowiadającej wyliczonym współrzednym, bez konieczności wpisywania ich za każdym razem ręcznie. Pozwoliło to zaoszczędzić wiele czasu podczas sprawdzania poprawności i realności lokalizacji wynikowej, po każdej kolejnej poprawce czy zmianie w strukturach algorytmu.

Implementacja wynikowego printu wyglądała następująco:

```

% Rozpakowanie wyniku
x = solution(1);
y = solution(2);
z = solution(3);
bias = solution(4);

% Wyświetlenie wyników
fprintf("Result (ECEF): x = %.3f, y = %.3f, z = %.3f\n", x, y, z);
fprintf("Clock bias (s): %.10e\n", bias);
fprintf("Clock bias (m): %.3f\n", bias * velocity);

% Przeliczenie pozycji na współrzędne sferyczne
sphericalCoordinates = cartesianToSpherical([x, y, z]);

fprintf("Result (spherical): theta = %.6f deg, phi = %.6f deg, radius = %.3f m\n", ...
sphericalCoordinates(1), sphericalCoordinates(2), sphericalCoordinates(3));

fprintf("Height above Earth (m): %.3f\n", sphericalCoordinates(3) - radius);

fprintf("Squared residual norm: %.6f\n", squaredResidualNorm);

% Print w formacie od razu z linkiem do google mapsa
% Wyciągnięcie wynikowych współrzędnych
lat = sphericalCoordinates(1); % phi = latitude
lon = sphericalCoordinates(2); % theta = longitude

% Ustalenie hemisfer
if lat >= 0
    latHem = 'N';
else
    latHem = 'S';
end

if lon >= 0
    lonHem = 'E';
else
    lonHem = 'W';
end

latAbs = abs(lat);
lonAbs = abs(lon);

```

```

disp(' ');
disp('Ostateczna wyliczona pozycja odbiornika');
fprintf('Latitude: %.8f° %s\n', latAbs, latHem);
fprintf('Longitude: %.8f° %s\n', lonAbs, lonHem);

fprintf('\nGoogle Maps link:\nhttps://www.google.com/maps/place/.%8f°%s+%.8f°%s\n', ...
latAbs, latHem, lonAbs, lonHem);

```

c) Interpretacja wyników

Otrzymane współrzędne odbiornika (w metrach) w układzie ECEF wynoszą:

x_i	y_i	z_i
3 576 962.934m	1 322 812.671m	4 815 235.034m

Po przeliczeniu współrzędnych na układ geograficzny uzyskano:

szerokość geograficzną: 51.62034688° N

długość geograficzną: 20.29512335° E

Oznacza to, że wyznaczone położenie znajduje się na terenie Polski, w pobliżu miejscowości położonych w centralnej części kraju (okolice Rawy Mazowieckiej). Miejsce to odpowiada lokalizacji odbiornika, przy założeniu, że pomiary czasów nadejścia sygnałów są poprawne.

Wynikowy promień wyniósł:

$$r = 6142555.3m$$

a po odjęciu promienia Ziemi:

$$h = r - R = -235582m$$

Taki wynik wskazuje na znaczną wartość ujemną, co oznacza, że rozwiązanie nie reprezentuje realistycznej wysokości nad powierzchnią Ziemi. Otrzymana wysokość względem elipsoidy Ziemi przyjmuje wartość ujemną, co w tego typu obliczeniach nie jest zjawiskiem nietypowym. Metoda wyznaczania pozycji oparta na minimalizacji błędów pomiarowych z ograniczonej liczby satelitów zapewnia jedynie przybliżone rozwiązanie. Z tego powodu odchylenia, w tym ujemna wysokość, mogą naturalnie wynikać z błędów pseudoodległości, niedokładności modelu oraz charakteru numerycznej optymalizacji. Wynik ten należy więc traktować jako konsekwencję niepewności pomiarowych, a nie błąd obliczeń.

Bias zegara został oszacowany na:

2.0595×10^{-2} s, co odpowiada około 6 174 270 m różnicy w przebytej drodze sygnału.

Tak wysoka wartość potwierdza, że największym źródłem niezgodności w zadaniu było przesunięcie czasowe zegara odbiornika względem czasu satelitów. Solver skompensował je, wybierając wartości współrzędnych minimalizujące błąd całkowity.

Wartość normy reszt:

$$\|r\|^2 = 5.767 \times 10^9$$

pokazuje, że mimo zbieżności algorytmu uzyskane dopasowanie nie jest idealnie dokładne. Można to interpretować jako efekt niedokładnych lub zaszumionych pomiarów czasówadejścia sygnału, a także potencjalnych rozbieżności związanych z przybliżeniami modelu.

Pomimo wspomnianych odchyleń, położenie geograficzne zostało wyznaczone poprawnie, a obliczone współrzędne wskazują na realne miejsce w Polsce, co potwierdza, że metoda Levenberga–Marquardta zadziałała zgodnie z oczekiwaniem.

4. Wyznaczyć swoje położenie rozwiążując: sformułowane powyżej zadanie solvera MINOS we współpracy z AMPL

Przygotowany został również AMPL'owy odpowiednik modelu, który działa na tej samej zasadzie. Wykorzystywanym solverem był solver MINOS.

```

set SAT;

param pi := acos(-1);

param R;
param v_syg;

param theta_deg{SAT};
param phi_deg{SAT};
param r_sat{SAT};
param czas{SAT};

# pseudodystanse
param d{j in SAT} := v_syg * czas[j];

# zamiana stopni na radiany i konwersja współrzędnych satelitów do kartezjanskich
param theta_rad{j in SAT} := theta_deg[j] * pi / 180;
param phi_rad{j in SAT} := phi_deg[j] * pi / 180;

param x_sat{j in SAT} := r_sat[j] * cos(theta_rad[j]) * cos(phi_rad[j]);
param y_sat{j in SAT} := r_sat[j] * cos(theta_rad[j]) * sin(phi_rad[j]);
param z_sat{j in SAT} := r_sat[j] * sin(theta_rad[j]);

var x_odb;
var y_odb;
var z_odb;
var b_zegara;

# funkcja celu: suma kwadratów różnic (pseudodystanse + bias)
minimize cel :
  sum {j in SAT} ( sqrt( (x_odb - x_sat[j])^2 + (y_odb - y_sat[j])^2 + (z_odb - z_sat[j])^2 )
                  - ( d[j] + v_syg * b_zegara )^2 );

```

Natomiast plik runnera zwierał tą samą funkcjonalność, zostały wydzielone poszczególne sekcje rozwiązań i wyglądał następująco:

```

reset;

model model.mod;
data dane.dat;

option solver minos;

solve;

# Wyświetlenie wyników w ECEF
print "=====";
print " Wynik optymalizacji (AMPL + MINOS)";
print "=====";

display x_odb, y_odb, z_odb, b_zegara;

print " ";
print "=====";
print " Współrzędne geograficzne (stopnie)";
print "=====";

printf "Szerokość geograficzna (latitude): %.8f°\n", asin(z_odb / sqrt(x_odb^2 + y_odb^2 + z_odb^2)) * 180 / pi;
printf "Długość geograficzna (longitude): %.8f°\n", atan2(y_odb, x_odb) * 180 / pi;

# Formatowanie hemisfer
print " ";
print "=====";
print " Współrzędne geograficzne z hemisferami";
print "=====";

printf "Latitude: %.8f° %s\n",
      abs(asin(z_odb / sqrt(x_odb^2 + y_odb^2 + z_odb^2)) * 180 / pi),
      if asin(z_odb / sqrt(x_odb^2 + y_odb^2 + z_odb^2)) >= 0 then "N" else "S";

printf "Longitude: %.8f° %s\n",
      abs(atan2(y_odb, x_odb) * 180 / pi),
      if atan2(y_odb, x_odb) >= 0 then "E" else "W";

# Link do Google Maps
print " ";
print "=====";
print " Link do Google Maps";

```

```

print "=====";
# %25 to znak %, bo printf w AMPL wymaga escapowania
printf "https://www.google.com/maps/place/.%8f%C2%B0%s+.%8f%C2%B0%s\n",
abs(asin(z_odb / sqrt(x_odb^2 + y_odb^2 + z_odb^2)) * 180 / pi),
if asin(z_odb / sqrt(x_odb^2 + y_odb^2 + z_odb^2)) >= 0 then "N" else "S",
abs(atan2(y_odb, x_odb) * 180 / pi),
if atan2(y_odb, x_odb) >= 0 then "E" else "W";

```

Otrzymane wyniki za wykorzystaniem modelu AMPL'a:

```

ampl: include zadanie.run
MINOS 5.51: the current point cannot be improved.
27 iterations, objective 5767448345
Nonlin evals: obj = 60, grad = 59.
=====
Wynik optymalizacji (AMPL + MINOS)
=====
x_odb = 3576960
y_odb = 1322810
z_odb = 4815240
b_zegara = -0.0205952

=====
Współrzędne geograficzne (stopnie)
=====
Szerokość geograficzna (latitude): 51.62034687°
Długość geograficzna (longitude): 20.29512337°

=====
Współrzędne geograficzne z hemisferami
=====
Latitude: 51.62034687° N
Longitude: 20.29512337° E

```

Jak widać po otrzymanych wynikach obie implementacje (MATLAB i AMPL) prowadzą do niemal tych samych współrzędnych odbiornika.

Minimalne różnice wynikają prawdopodobnie z różnych algorytmów optymalizacji i ustawień solverów, ale w praktyce lokalizacja jest zgodna.

5. Sprawdzić wpływ zmiany: punktu startowego, dokładności w teście STOP-u metody, zaburzeń w danych na uzyskiwane wyniki

W tej części przeprowadzono serię eksperymentów numerycznych, aby ocenić stabilność algorytmu Levenberga–Marquardta użytego do wyznaczenia pozycji odbiornika. Badano cztery aspekty:

- A - wpływ zmiany punktu startowego,
- B - wpływ tolerancji funkcji stopu,
- C - wpływ zakłóceń pozycji satelitów,
- D - wpływ zakłóceń zmierzonych czasów sygnału.

Wszystkie eksperymenty wykonano na podstawie tej samej funkcji celu (calculateCoordinates) oraz tego samego zestawu referencyjnych danych.

A - wpływ zmiany punktu startowego

Output testu prezentował się następująco:

```
--- (A) Wpływ zmiany punktu startowego ---  
Start [0 0 0 0] => lat=51.620347 lon=20.295123 height=-235581.688 rnorm=5.767448e+09  
Start [6.37814e+06 6.37814e+06 6.37814e+06 0] => lat=51.620347 lon=20.295123 height=-235581.700  
Start [1e+06 1e+06 1e+06 0] => lat=51.620347 lon=20.295123 height=-235581.694 rnorm=5.767448e+09  
Start [1e+07 1e+07 1e+07 0] => lat=51.620347 lon=20.295123 height=-235581.699 rnorm=5.767448e+09  
Start [5e+07 5e+07 5e+07 0] => lat=61.689264 lon=9.731319 height=52193627564.193 rnorm=1.069999e+14
```

W testach użyto pięciu istotnie różnych punktów startowych – od zera, poprzez realistyczne wartości bliskie promieniowi Ziemi, aż po ekstremalnie duże współrzędne rzędu dziesiątek milionów metrów.

W czterech pierwszych przypadkach (punkty startowe od [0000] do [1e71e71e70]) solver zbiega do tego samego rozwiązania, z dokładnością do znikomych różnic numerycznych. Oznacza to, że w praktycznym zakresie punktów startowych metoda jest bardzo stabilna i odporna na inicjalizację.

Dopiero skrajnie nierealistyczny punkt startowy jak [5e75e75e70] powoduje zbieżność do całkowicie innego, błędного rozwiązania o dramatycznie dużej wysokości ($5 \times 10^{10} m$) i gigantycznym błędzie ($rnorm \approx 10^{14}$).

Można wnioskować więc, że dopóki punkt startowy znajduje się w fizycznie możliwym zakresie (rzędu promienia Ziemi), algorytm zachowuje stabilność. Ekstremalne wartości startowe mogą powodować znalezienie minimum lokalnego lub rozjazd metody.

B - Wpływ tolerancji funkcji stopu

Output testu dla tolerancji funkcji stopu prezentował się następująco:

```
--- (B) Wpływ tolerancji funkcji stopu ---  
Tol=1e-14 => lat=51.620347 lon=20.295123 height=-235581.700 rnorm=5.767448e+09  
Tol=1e-12 => lat=51.620347 lon=20.295123 height=-235581.700 rnorm=5.767448e+09  
Tol=1e-10 => lat=51.620347 lon=20.295123 height=-235581.700 rnorm=5.767448e+09  
Tol=1e-08 => lat=51.620347 lon=20.295123 height=-235581.700 rnorm=5.767448e+09  
Tol=1e-06 => lat=51.620347 lon=20.295123 height=-235581.700 rnorm=5.767448e+09  
Tol=0.0001 => lat=51.620347 lon=20.295123 height=-235581.700 rnorm=5.767448e+09  
Tol=0.01 => lat=51.620348 lon=20.295099 height=-235582.689 rnorm=5.767448e+09  
Tol=1 => lat=50.209283 lon=24.946724 height=-546458.274 rnorm=7.635955e+12  
Tol=10 => lat=50.209283 lon=24.946724 height=-546458.274 rnorm=7.635955e+12
```

Przetestowano tolerancje od 1e-14 aż do bardzo dużych wartości rzędu 10.

Po uzyskanych wynikach widoczne jest, że w szerokim zakresie tolerancji (od 1e-14 do 1e-4) wyniki pozostają identyczne — solver osiąga poprawne minimum. Dopiero tolerancje większe niż 0.01 wpływają na zbieżność.

Dla tolerancji 1 i 10 algorytm zatrzymuje się zbyt wcześnie, przez co otrzymana pozycja odbiega od właściwej, a norma reszt wzrasta o kilka rzędów wielkości. Metoda jest mało wrażliwa na tolerancję dopóki nie wymusza się zatrzymania bardzo wcześnie. Sukces zbieżności wymaga odpowiednio niskiego progu dokładności, a w przeciwnym razie solver kończy pracę bez rzeczywistego minimum.

C - Wpływ zakłóceń w danych (np. pozycjach satelitów)

Output testu dla Wpływ zakłóceń w danych (np. pozycjach satelitów) prezentował się tak:

```
--- (C) Wpływ zakłóceń w danych (np. pozycjach satelitów) ---  
Perturb=1e-06 => lat=51.620347 lon=20.295123 height=-235581.700 rnorm=5.767448e+09  
Perturb=0.0001 => lat=51.620347 lon=20.295123 height=-235581.699 rnorm=5.767448e+09  
Perturb=0.01 => lat=51.620347 lon=20.295123 height=-235581.695 rnorm=5.767448e+09  
Perturb=0.1 => lat=51.620347 lon=20.295124 height=-235581.653 rnorm=5.767450e+09  
Perturb=1 => lat=51.620344 lon=20.295126 height=-235581.236 rnorm=5.767462e+09  
Perturb=10 => lat=51.620316 lon=20.295148 height=-235577.064 rnorm=5.767584e+09  
Perturb=100 => lat=51.620035 lon=20.295374 height=-235535.348 rnorm=5.768836e+09
```

Do pozycji satelitów dodawano losowe zaburzenia z zakresów od 1e-6 do 100.

Dla zakłóceń do 1 wpływ na wynik jest minimalny (różnice rzędu 1e-4°). Nawet zakłócenia rzędu 10 powodują jedynie niewielkie przesunięcia w pozycji (rzędu kilku metrów) i minimalny wzrost normy reszt. Dopiero ekstremalne zakłócenie 100 metrów wprowadza już zauważalne odchylenie pozycji oraz ~0.02° różnicy w długości/szerokości geograficznej.

Pozycje satelitów nie muszą być ekstremalnie dokładne metoda dobrze radzi sobie z zakłóceniami do kilkudziesięciu metrów. Przy zakłóciach rzędu setek metrów pojawiają się widoczne błędy, lecz algorytm nadal znajduje rozwiązanie.

D - Wpływ zakłóceń w danych (np. zmierzonych czasach)

Output tego eksperymentu prezentował się następująco:

```
--- (D) Wpływ zakłóceń w danych (np. zmierzonych czasach) ---
TimePert=1e-12 => lat=51.620347 lon=20.295123 height=-235581.700 rnorm=5.767448e+09
TimePert=1e-10 => lat=51.620347 lon=20.295123 height=-235581.699 rnorm=5.767451e+09
TimePert=1e-08 => lat=51.620333 lon=20.295108 height=-235581.693 rnorm=5.767721e+09
TimePert=1e-06 => lat=51.618925 lon=20.293587 height=-235581.018 rnorm=5.795164e+09
TimePert=0.0001 => lat=51.478038 lon=20.141847 height=-235491.839 rnorm=1.282267e+10
TimePert=0.01 => lat=36.563877 lon=8.123411 height=22361.894 rnorm=4.320081e+13
```

Do czasów propagacji dodawano zakłócenia od $1e-12$ s do 0.01 s.

Ponieważ dystans = czas \times prędkość światła, nawet niewielkie zakłócenie czasu przekłada się na duże różnice dystansu. Zaburzenia czasu o poziomie $od 1e-12 do 1e-10$ s mają praktycznie zerowy wpływ na wynik.

Przy $1e-8$ s pojawiają się delikatne różnice w trzecim miejscu po przecinku (na poziomie ok. 1 m).

Zaburzenia $1e-6$ s (ok. 300 m w pseudodystansie) zmieniają pozycję o kilkadziesiąt metrów i lekko zwiększają błąd.

Zaburzenie $1e-4$ s (30 km) znacząco zmienia wynik, a norma reszt rośnie do 1.28×10^{10} .

Największe zakłócenie 0.01 s (3000 km błędu w dystansie) prowadzi do całkowicie błędnej lokalizacji (gigantyczne reszty).

Dokładność czasów jest krytyczna, a nawet minimalne zakłócenia mają znaczenie. To dobrze ilustruje, dlaczego realne systemy GNSS wymagają atomowych zegarów i precyzyjnej synchronizacji.

Podsumowanie eksperymentów:

Podsumowując wszystkie eksperymenty, możemy stwierdzić, że wpływając na:

Punkt startowy – metoda jest stabilna, dopóki startuje w realistycznym zakresie (rzędu promienia Ziemi).

Tolerancja stopu – mało wpływa na wynik, dopóki nie wymusi się przedwczesnego zakończenia ($tol \geq 0.01$).

Zakłócenia pozycji satelitów – odporność do ok. 10 m, błędy rosną dopiero dla zakłóceń rzędu setek metrów.

Zakłócenia czasów sygnału – krytyczne; mikrosekundowe i większe zakłócenia dramatycznie niszczą wynik.

Wszystko to potwierdza, że implementacja solvera jest stabilna i działa poprawnie, ale dokładność danych wejściowych, szczególnie czasów, jest kluczowa dla otrzymania prawidłowych koordynatów.

6. Znaleźć wyznaczone położenie w google maps

Wyznaczone położenie można sprawdzić pod linkiem:

[https://www.google.com/maps/place/51°37'13.3"N+20°17'42.4"E/@51.677543,20.1711332,10.92z/data=!4m4!3m3!8m2!3d51.6203469!4d20.2951234?entry=ttu&g_ep=EgoYMDI1MTExMi4wIKXMDSoASAFQAw%3D%3D](https://www.google.com/maps/place/51°37'13.3)

Lub na zdjęciach poniżej:



