

Algorytmy i metody optymalizacji

Projekt nr 2

1. Dane jest zadanie programowania kwadratowego z liniowymi ograniczeniami równościowymi

$$\min_{x \in R^2} f(x) = \frac{1}{2}x^\top Gx + t^\top x \quad \text{przy} \quad Ax = b.$$

Proszę rozwiązać to zadanie w dwóch wariantach:

- z jednym ograniczeniem równościowym,
- z dwoma ograniczeniami równościowymi.

W każdym z powyższych wariantów proszę wyznaczyć rozwiązanie:

- (a) analitycznie, z wykorzystaniem mnożników Lagrange’a,
- (b) metodą eliminacji zmiennych,
- (c) metodą eliminacji uogólnionej z wykorzystaniem jądra macierzy A ,
- (d) z wykorzystaniem solvera `quadprog`.

Rozwiązania z podpunktów 1–3 należy zaimplementować samodzielnie. Proszę również przygotować wizualizację:

- (a) funkcji celu $f(x)$,
- (b) ograniczeń,
- (c) jeżeli jest to możliwe – funkcji celu z pomocniczych zadań bez ograniczeń.

Wizualizacje należy przedstawić zarówno w postaci trójwymiarowych wykresów powierzchni, jak i dwuwymiarowych wykresów poziomicy.

2. Dane jest zadanie programowania kwadratowego z liniowymi ograniczeniami nierównościowymi

$$\min_{x \in R^2} f(x) = \frac{1}{2}x^\top Gx + t^\top x \quad \text{przy} \quad Ax \leq b.$$

Proszę rozwiązać powyższe zadanie, przyjmując istnienie kilku ograniczeń nierównościowych:

- (a) za pomocą własnej implementacji metody ograniczeń aktywnych,
- (b) solverem `quadprog`.

Proszę również przygotować wizualizację problemu analogicznie jak w zadaniu 1.

3. Proszę sformułować i rozwiązać zadanie programowania kwadratowego (QP), opisujące prosty, ale realistyczny problem decyzyjny (np. techniczny albo ekonomiczny) z co najmniej trzema zmiennymi decyzyjnymi. Zmienne mogą reprezentować na przykład moce trzech urządzeń, produkcję na trzech liniach, udziały trzech aktywów w portfelu itp. Proszę:

- (a) krótko opisać wybrany problem: co reprezentują zmienne decyzyjne, jaki jest cel optymalizacji (np. minimalizacja kosztu, zużycia energii, ryzyka) oraz skąd wynikają ograniczenia,
- (b) zbudować model QP w postaci

$$\min_x \frac{1}{2}x^\top Gx + t^\top x \quad \text{przy} \quad A_{\text{eq}}x = b_{\text{eq}}, \quad A_{\text{ineq}}x \leq b_{\text{ineq}},$$

gdzie wektor decyzyjny $x \in R^n$ ma co najmniej trzy składowe. Proszę uwzględnić co najmniej jedno ograniczenie równościowe (np. warunek bilansu, suma przepływów, budżet), reprezentowane przez macierze i wektory $A_{\text{eq}}, b_{\text{eq}}$, oraz co najmniej jedno ograniczenie nierównościowe (np. przedziały dopuszczalnych wartości, limity mocy, ograniczenia bezpieczeństwa), reprezentowane przez $A_{\text{ineq}}, b_{\text{ineq}}$,

- (c) wyraźnie zapisać macierze i wektory $G, t, A_{\text{eq}}, b_{\text{eq}}, A_{\text{ineq}}, b_{\text{ineq}}$ oraz krótko zinterpretować ich elementy w kontekście rozważanego problemu (co oznaczają poszczególne współczynniki),
- (d) rozwiązać numerycznie zadanie QP (np. w środowisku MATLAB lub Python, z użyciem wybranego solvera) i podać wektor rozwiązania optymalnego x^* ,
- (e) krótko skomentować wynik: jak wygląda optymalny rozdział / sterowanie, które ograniczenia są aktywne oraz co to oznacza dla analizowanego systemu w praktyce.

Termin wykonania projektu upływa 19 stycznia 2026 r. Sprawozdanie powinno być umieszczone w module Sprawozdania w systemie Studia3 do godz. 23.59.

Uwagi:

- W zadaniu 1 oraz 2 wartości liczbowe w G, t, A, b można wybrać dowolnie (proszę jednak pamiętać o wypukłości zadania, tak by dało się je rozwiązać).
- Przez samodzielną implementację należy rozumieć skorzystanie ze wzorów matematycznych, a nie gotowych funkcji z bibliotek MATLAB-a/Pythona.
- Kod najlepiej napisać w postaci pliku `livescript` (MATLAB) lub `Jupyter notebook` (Python).
- Oprócz kodu należy przygotować sprawozdanie, w którym przedstawione zostaną wyniki eksperymentów numerycznych, ich komentarz oraz płynące z nich wnioski.
- Jeśli zajdzie potrzeba konsultacji, to odbywać się one będą w formie zdalnej na platformie MS Teams. W celu umówienia terminu konsultacji proszę przysyłać wiadomości e-mail na adres `Krzysztof.Zarzycki@pw.edu.pl` lub pisać bezpośrednio na platformie MS Teams.