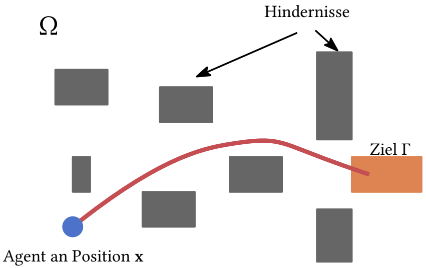
Algorithmen der Navigation

Benedikt Zönnchen

2. Juni 2021

Problemstellung



Problemstellung

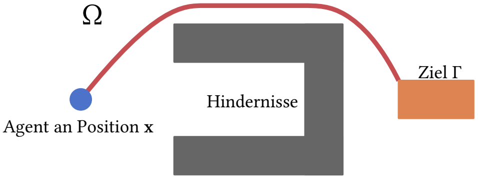
Sei

$$d_\Gamma(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{y}\in\Gamma} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

der Euklidische Abstand zwischen $\mathbf{x}$ und dem Ziel Γ.

Falls es keine Hindernisse in dem Gebiet gibt können wir einfach entlang von $-\nabla d_\Gamma$ laufen:

(a) Folge $-\nabla d_\Gamma$



(b) Folge ?

Inhalt

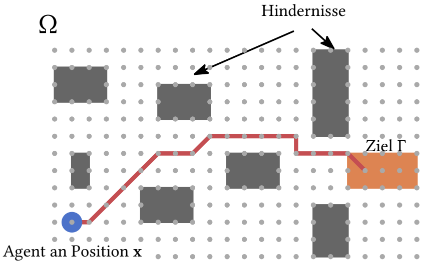
(1) Dijkstra's Algorithmus
(2) A^*
(3) Die Fast Marching Method

Navigation auf dem Gitter (Graphen)

Navigation auf dem Gitter

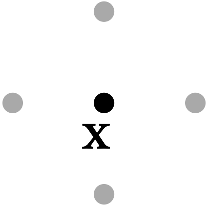
Sei $\Omega \subset \mathbb{Z}^2$ ein zusammenhängende räumlicher Bereich, $\Gamma \subset \mathbb{Z}^2$ ein Zielgebiet und $\mathbf{u} \in \Omega$ eine bestimmte Position, dann suchen wir nach einer Sequenz von Positionen $\mathbf{u}_0, \ldots, \mathbf{u}_m \in \Omega$, sodass

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{u} \text{ und } \mathbf{u}_m \in \Gamma.$$

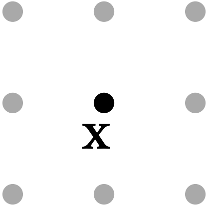


Zudem muss für alle $i > 0$, $\mathbf{u}_i$ zu einer Nachbarschaft von $\mathbf{u}_{i-1}$ gehört (Nebenbedingung).

Navigation auf dem Gitter: Nachbarschaft



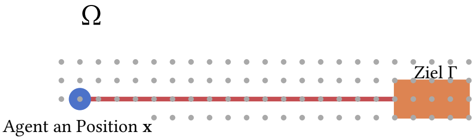
(a) Von Neumann



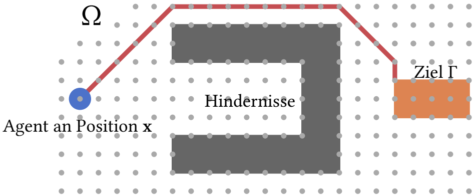
(b) Moore

Navigation auf dem Gitter

Sei $d_\Gamma(\mathbf{u})$ die Länge des kürzesten Wegs von $\mathbf{u}$ zum Ziel Γ auf dem Gitter.



(a) Folge dem kürzesten Weg



(b) Folge dem kürzesten Weg

Navigation auf dem Gitter (Graphen):
Dijkstra’s Algorithmus

Navigation auf dem Gitter: Dijkstra's Algorithmus

Strategie: Berechne kürzeste Wege von Γ zu jedem Gitterpunkt $\mathbf{u} \in \Omega$ durch den DIJKSTRA [3].

Beobachtung: Ist $\mathbf{u}_0, \ldots, \mathbf{u}_k$ der kürzeste Weg von $\mathbf{u}_0$ nach $\mathbf{u}_k$ und $\mathbf{u}_k, \ldots, \mathbf{u}_m$ der kürzeste Weg von $\mathbf{u}_k$ nach $\mathbf{u}_m$, dann ist

$$\mathbf{u}_0, \ldots, \mathbf{u}_m$$

der kürzeste Weg von $\mathbf{u}_0$ nach $\mathbf{u}_m$.

Navigation auf dem Gitter: Dijkstra's Algorithmus

Definitionen:

(i) $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, Knoten des Gitters

(ii) $d_\Gamma(\mathbf{u})$, gesuchte Länge des kürzesten Wegs von $\mathbf{u}$ nach Γ

(iii) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, Länge/Gewicht der Kante $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$

(iv) Q, eine PriorityQueue (z.B. FibonacciHeap)

Navigation auf dem Gitter: Dijkstra's Algorithmus

Navigation auf dem Gitter: Dijkstra's Algorithmus

Input : $\mathbf{u}^*$ start position

$d_\Gamma(\mathbf{u}) \leftarrow 0$ for all $\mathbf{u} \in \Gamma$;
$d_\Gamma(\mathbf{u}) \leftarrow \infty$ for all $\mathbf{u} \notin \Gamma$;
$Q \leftarrow \{(\mathbf{u}, d_\Gamma(\mathbf{u})) \in \Gamma\}$;
while $Q \neq \emptyset$ **do**
 $(\mathbf{u}, d_\Gamma(\mathbf{u})) \leftarrow Q.\textsc{pop}()$;
 if $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*$ **then**
  return d_Γ;
 foreach *neighbour* $\mathbf{v}$ *of* $\mathbf{u}$ **do**
  $uv \leftarrow d_\Gamma(\mathbf{u}) + d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$;
  if $uv < d_\Gamma(\mathbf{v}))$ **then**
   $d_\Gamma(\mathbf{v}) \leftarrow uv$;
   if $(\mathbf{v}, d_\Gamma(\mathbf{v})) \in Q$ **then**
    $Q.\textsc{decrease}(\mathbf{v}, d_\Gamma(\mathbf{v}))$;
   else
    $Q.\textsc{push}(\mathbf{v}, d_\Gamma(\mathbf{v}))$;
return d_Γ;

Q ist eine nach $d_\Gamma(\mathbf{v})$ sortierte PriorityQueue:

- $Q.\textsc{pop}()$, wirft das kleinste Element heraus,
- $Q.\textsc{decrease}(\mathbf{v}, d_\Gamma(\mathbf{v}))$ ändert ein Element ab,
- und $Q.\textsc{push}(\mathbf{v}, d_\Gamma(\mathbf{v}))$ fügt ein Element ein.

Komplexität: (einfacher Graph mit positiven Kosten und n Knoten)

- Zeit: $\mathcal{O}(n \log(n))$
- Speicher: $\mathcal{O}(n)$

Navigation auf dem Gitter: Dijkstra's Algorithmus

Strategie: Berechne kürzeste Wege von Γ zu jedem Gitterpunkt $\mathbf{u} \in \Omega$ durch den DIJKSTRA [3].

Beobachtung: Ist $\mathbf{u}_0, \ldots, \mathbf{u}_k, \ldots, \mathbf{u}_m$ der kürzeste Weg von $\mathbf{u}_0$ nach $\mathbf{u}_m$, dann ist

$$\mathbf{u}_0, \ldots, \mathbf{u}_k$$

der kürzeste Weg von $\mathbf{u}_0$ nach $\mathbf{u}_k$.

Invarianz: Für alle $\mathbf{u} \in \Omega$, die aus Q gelöscht werden, ist $d_\Gamma(\mathbf{u})$ die Länge des kürzesten Wegs von $\mathbf{u}$ nach Γ. (Beweis über Induktion)

Navigation auf dem Gitter (Graphen):
Der A^* Algorithmus

Navigation auf dem Gitter: A* Algorithmus

Navigation auf dem Gitter: A* Algorithmus

Strategie: Berechne gerichtet/informiert die kürzesten Wege von Γ zu Gitterpunkten $\mathbf{u} \in \Omega$. Spare dir unnötige Berechnungen (A* [5])

Beobachtung (1): Kein Weg $\mathbf{u}_0, \ldots, \mathbf{u}_m$ ist nicht kürzer als der euklidische Abstand zwischen $\mathbf{u}_0$ und $\mathbf{u}_m$, d.h.

$$\|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_m\| \le \sum_{i=0}^{m-1} d(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_{i+1}),$$

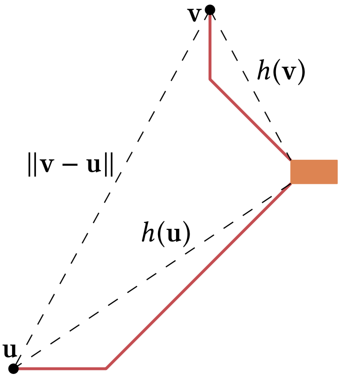
Beobachtung (2): Aus

$$d_\Gamma(\mathbf{v}) + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| > d_\Gamma(\mathbf{u})$$

folgt, dass der kürzeste Weg vom Ziel zu $\mathbf{u}$ nicht über $\mathbf{v}$ geht (selbst wenn $d_\Gamma(\mathbf{v}) \le d_\Gamma(\mathbf{u})$).

Navigation auf dem Gitter: A* Algorithmus

Navigation auf dem Gitter: A* Algorithmus



Sei

$$h(\mathbf{u}) = \min_{\mathbf{v}\in\Gamma} \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|,$$

dann gilt

$$h(\mathbf{u}) - h(\mathbf{v}) \le \|\mathbf{v}-\mathbf{u}\|.$$

Beobachtung (2*): Aus

$$d_\Gamma(\mathbf{v}) + h(\mathbf{u}) - h(\mathbf{v}) > d_\Gamma(\mathbf{u})$$

folgt, dass der kürzeste Weg vom Ziel zu **u** nicht über **v** geht (selbst wenn $d_\Gamma(\mathbf{v}) \le d_\Gamma(\mathbf{u})$).

Navigation auf dem Gitter: A* Algorithmus

Input : $\mathbf{u}^*$ start position, h heuristik

$d_\Gamma(\mathbf{u}) \leftarrow 0, \forall \mathbf{u} \in \Gamma$;
$d_\Gamma(\mathbf{u}) \leftarrow \infty, \forall \mathbf{u} \notin \Gamma$;
/* sortiert nach $d_\Gamma(\mathbf{u}) + h(\mathbf{u})$ */
$Q \leftarrow \{(\mathbf{u}, d_\Gamma(\mathbf{u})) \in \Gamma\}$;
while $Q \neq \emptyset$ **do**
  $(\mathbf{u}, d_\Gamma(\mathbf{u})) \leftarrow Q.\text{POP}()$;
  if $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*$ **then**
    return d_Γ;
  foreach *neighbour* $\mathbf{v}$ *of* $\mathbf{u}$ **do**
    $uv \leftarrow d_\Gamma(\mathbf{u}) + d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$;
    if $uv < d_\Gamma(\mathbf{v}))$ **then**
      $d_\Gamma(\mathbf{v}) \leftarrow uv$;
      if $(\mathbf{v}, d_\Gamma(\mathbf{v})) \in Q$ **then**
        $Q.\text{DECREASE}(\mathbf{v}, d_\Gamma(\mathbf{v}))$;
      else
        $Q.\text{PUSH}(\mathbf{v}, d_\Gamma(\mathbf{v}))$;
return d_Γ;

Q ist eine nach $d_\Gamma(\mathbf{v}) + h(\mathbf{v})$ sortierte PRIORITYQUEUE:

- $Q.\text{POP}()$, wirft das kleinste Element heraus,
- $Q.\text{DECREASE}(\mathbf{v}, d_\Gamma(\mathbf{v}))$ ändert ein Element ab,
- und $Q.\text{PUSH}(\mathbf{v}, d_\Gamma(\mathbf{v}))$ fügt ein Element ein.

Komplexität: (einfacher Graph mit positiven Kosten und n Knoten)

- Zeit: $\mathcal{O}(n \log(n))$
- Speicher: $\mathcal{O}(n)$

Navigation auf dem Gitter: A* Algorithmus

Heuristik: Es muss nicht der euklidische Abstand als Heuristik genommen werden. Doch falls

$$
\begin{aligned}
h(\mathbf{u}) &\leq d_\Gamma(\mathbf{u}) && \text{(zulässig)} \\
h(\mathbf{u}) &\leq d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + h(\mathbf{v}) && \text{(monoton)}
\end{aligned}
$$

für jede Konten **u**, bzw. jede Kante (**u**, **v**) gilt (**Konsistenz**), so findet der A* Algorithmus garantiert den optimalen Pfad ohne Knoten mehrfach zu besuchen.

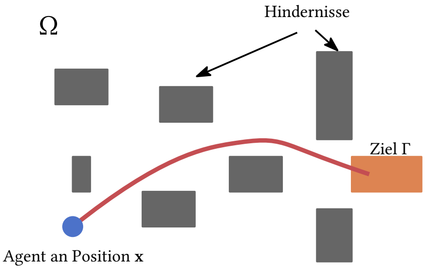
Verlorener Vorteil: Müssen Sie ohnehin für jeden Knoten den kürzesten Pfad zum Ziel berechnen, bringt der A* keinen Vorteil gegenüber dem Dijkstra.

Navigation im $\mathbb{R}^2$

Navigation im $\mathbb{R}^2$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein zusammenhängender räumlicher Bereich, $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ ein Zielgebiet und $\mathbf{x} \in \Omega$ eine bestimmte Position, dann suchen wir nach einer Sequenz von Positionen $\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_m \in \Omega$, sodass

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x} \text{ und } \mathbf{x}_m \in \Gamma.$$

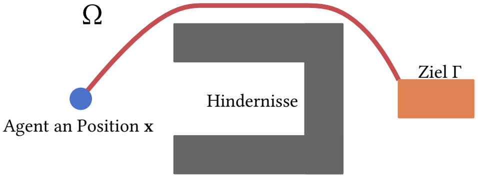


Navigation im $\mathbb{R}^2$

Sei $d_\Gamma(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{y}\in\Gamma} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ die Euklidische Distanz zwischen $\mathbf{x}$ und dem Ziel Γ.

Falls es keine Hindernisse in dem Gebiet gibt können wir einfach entlang von $-\nabla d_\Gamma$ laufen:

(a) Folge $-\nabla d_\Gamma$



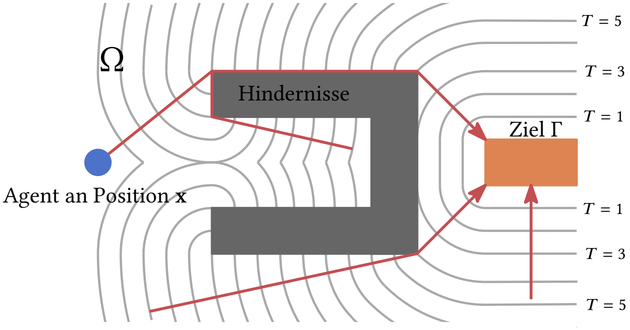
(b) Folge ?

Navigation im $\mathbb{R}^2$:
Die Eikonalgleichung

Navigation im $\mathbb{R}^2$

Wir stellen uns eine **Wellenfront** vor, die sich mit der **Reisegeschwindigkeit** $f(\mathbf{x}) = 1$ vom Ziel Γ über das Gebiet Ω ausbreitet.

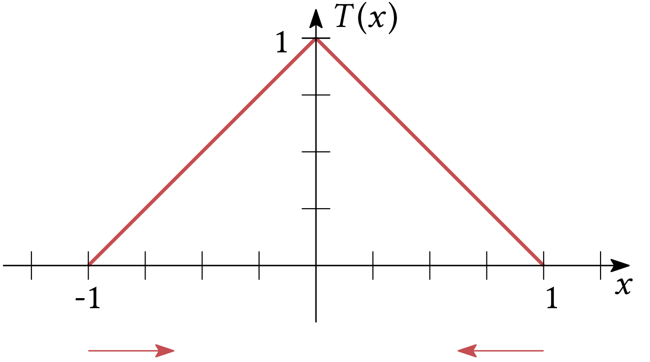
$T(\mathbf{x})$ ist die **Reisezeit** oder Ankunftszeit der **Wellenfront** am Ort $\mathbf{x}$.



Die Änderung der **Reisezeit** T (über den Ort) ist gleich $1/f$.

Navigation im $\mathbb{R}^2$

Ein eindimensionaler Fall: Sei $\Omega = [-1; 1], \Gamma = \{-1, 1\}$.

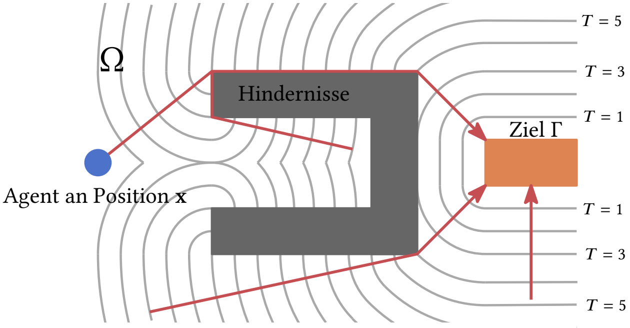


$\Rightarrow$ $T(x) = 1 - |x|$, ist die Viskositätslösung der sog. **Eikonalgleichung**!

Navigation im $\mathbb{R}^2$

Wir stellen uns eine **Wellenfront** vor, die sich mit der **Reisegeschwindigkeit** $f(\mathbf{x}) = 1$ vom Ziel Γ über das Gebiet Ω ausbreitet.

$T(\mathbf{x})$ ist die **Reisezeit** oder Ankunftszeit der **Wellenfront** am Ort $\mathbf{x}$.



Die Änderung der **Reisezeit** T (über den Ort) ist gleich $1/f$.

Die **Wellenfront**, die sich mit der **Reisegeschwindigkeit** $f(\mathbf{x}) = 1$ vom Ziel Γ über das Gebiet Ω ausbreitet, wird von der **Eikonalgleichung** beschrieben:

$$\begin{aligned} \|\nabla T(\mathbf{x})\| \cdot f(\mathbf{x}) &= 1, \;\; \mathbf{x} \in \Omega \\ T(\mathbf{x}) &= 0, \;\; \mathbf{x} \in \Gamma \\ f(\mathbf{x}) &\geq 0, \;\; \mathbf{x} \in \Omega. \end{aligned} \tag{1}$$

Bemerkungen:

(i) Hyperbolische partzielle Differenzialgleichung

(ii) Randwertproblem ($T = 0$ auf Γ)

(iii) Für die Viskositätslösung muss T nicht überall differenzierbar sein

(iv) Gilt $f = 1$, so ist T die **geodätische Distanz**.

Navigation im $\mathbb{R}^2$:
Die Fast Marching Method (FMM)

Navigation im $\mathbb{R}^2$: FMM

Die FastMarchingMethod [9, 10] berechnet T auf einer Diskretisierung (hier Gitter) wobei der Algorithmus die **Wellenfront** 'nachahmt'.

Die Methode arbeitet die Punkte in der gleichen Reihenfolge wie der Dijkstra ab, jedoch sind die Kosten/Distanz die **Reisezeit** $T(\mathbf{u})$.

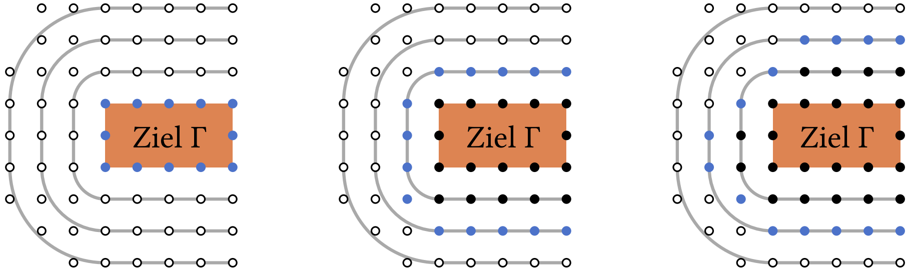
Navigation im $\mathbb{R}^2$: FMM

Jeder Gitterpunkt gehört zu genau einer der folgenden Mengen:

(i) *unerreicht*: 'Die Wellenfront ist noch nicht angekommen'

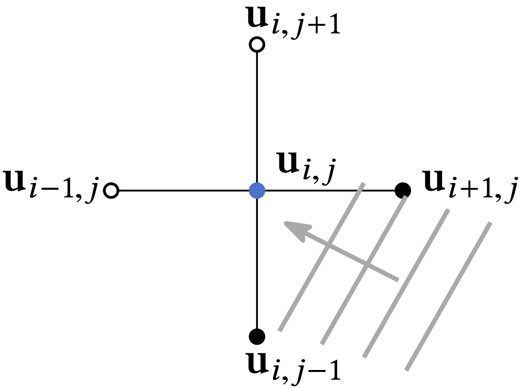
(ii) *erreicht*: 'Die Wellenfront ist gerade hier'

(iii) *verlassen*: 'Die Wellenfront hat den Punkt verlassen'



Navigation im $\mathbb{R}^2$: Lokale Lösung

Die **Wellenfront** erreicht jeden Gitterpunkt $\mathbf{u}_{i,j}$ von einer bestimmten Richtung:

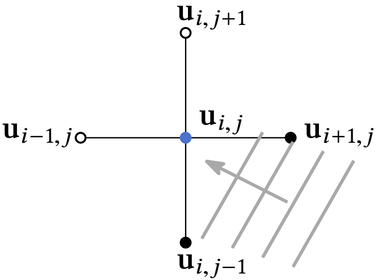


Auf einem Gitter berechnen wir die **Reisezeit** $T(\mathbf{u}_{i,j})$ anhand des Stencils.

Navigation im $\mathbb{R}^2$: Lokale Lösung

Wir approximieren ∇T durch finite Differenzen (Taylor-Expansion):

$$\frac{\partial T(\mathbf{u}_{i,j})}{\partial x} \approx D^{\pm x}_{i,j}\mathbf{u} = \frac{T(\mathbf{u}_{i\pm 1,j}) - T(\mathbf{u}_{i,j})}{\pm\Delta x}$$
$$\frac{\partial T(\mathbf{u}_{i,j})}{\partial y} \approx D^{\pm y}_{i,j}\mathbf{u} = \frac{T(\mathbf{u}_{i,j\pm 1}) - T(\mathbf{u}_{i,j})}{\pm\Delta y}.$$



Wüssten wir, dass die Welle von unten rechts kommt bräuchten wir nur

$$D^{+x}_{i,j}\mathbf{u} = \frac{T(\mathbf{u}_{i+1,j}) - T(\mathbf{u}_{i,j})}{+\Delta x} \text{ und } D^{-y}_{i,j}\mathbf{u} = \frac{T(\mathbf{u}_{i,j-1}) - T(\mathbf{u}_{i,j})}{-\Delta y}.$$

Navigation im $\mathbb{R}^2$: Lokale Lösung

Wie bestimmen wir nun $T(\mathbf{u}_{i,j})$?

$$\|\nabla T(\mathbf{x})\| \cdot f(\mathbf{x}) = 1 \tag{2}$$

wird zu

$$\|\nabla T(\mathbf{x})\|^2 = \frac{1}{f(\mathbf{x})^2}, \tag{3}$$

wird in unserem Beispiel approximiert durch

$$(D_{i,j}^{+x}\mathbf{u})^2 + (D_{i,j}^{-y}\mathbf{u})^2 = f(\mathbf{x}_{i,j})^{-2}. \tag{4}$$

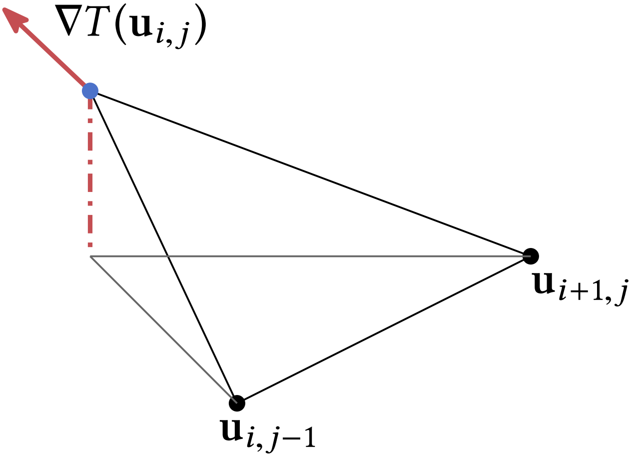
Das heißt wir lösen die quadratische Gleichung

$$\left(\frac{T(\mathbf{u}_{i+1,j}) - T(\mathbf{u}_{i,j})}{+\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{T(\mathbf{u}_{i,j-1}) - T(\mathbf{u}_{i,j})}{-\Delta y}\right)^2 = f(\mathbf{x}_{i,j})^{-2} \tag{5}$$

nach $T(\mathbf{u}_{i,j})$.

Navigation im $\mathbb{R}^2$: Lokale Lösung

Der wesentliche Unterschied zum DIJKSTRA ist die Berechnung der **Reisezeit** $T(\mathbf{u})$.



Navigation im $\mathbb{R}^2$: Lokale Lösung

Im allgemeinen kennen wir die Richtung aus der die **Wellenfront** kommt nicht! Sie kommt **entweder** von oben oder unter UND von **entweder** links oder rechts.

Unten, rechts:

$$\left(\frac{T(\mathbf{u}_{i+1,j}) - T(\mathbf{u}_{i,j})}{+\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{T(\mathbf{u}_{i,j-1}) - T(\mathbf{u}_{i,j})}{-\Delta y}\right)^2 = f(\mathbf{x}_{i,j})^{-2}$$

Oben, links:

$$\left(\frac{T(\mathbf{u}_{i-1,j}) - T(\mathbf{u}_{i,j})}{-\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{T(\mathbf{u}_{i,j+1}) - T(\mathbf{u}_{i,j})}{+\Delta y}\right)^2 = f(\mathbf{x}_{i,j})^{-2}$$

Wir gehen davon aus, dass die **Wellenfront** von der Richtung kommt von der sie auch früher bei $\mathbf{u}_{i,j}$ eintrifft.

Navigation im $\mathbb{R}^2$: Lokale Lösung

Wir gehen davon aus, dass die **Wellenfront** von der Richtung kommt von der sie auch früher bei $\mathbf{u}_{i,j}$ eintrifft.

Das heißt aus

$$(D_{i,j}^{+x}\mathbf{u})^2 + (D_{i,j}^{-y}\mathbf{u})^2 = f(\mathbf{x}_{i,j})^{-2}$$

wird im Allgemeinen

$$\max\left\{D_{i,j}^{-x}\mathbf{u}, -D_{i,j}^{+x}\mathbf{u}\right\}^2 + \max\left\{D_{i,j}^{-y}\mathbf{u}, -D_{i,j}^{+y}\mathbf{u}\right\}^2 = f(\mathbf{u}_{i,j})^{-2}. \tag{6}$$

Wir lösen die Gleichung lokal durch Godunov's Schemata [9, 11].

Navigation im $\mathbb{R}^2$: Lokale Lösung

Wir können ∇T durch weitere Taylor-Terme besser approximieren. Zur Erinnerung:

$$f(x+h) \approx f(x) + hf'(x) + h^2\frac{f''(x)}{2} \Rightarrow f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \frac{h}{2}f''(x) \tag{7}$$

Für die Approximation der Ableitung von

$$D^{\pm x}_{i,j}\mathbf{u} = \frac{T(\mathbf{u}_{i\pm 1,j}) - T(\mathbf{u}_{i,j})}{\pm\Delta x} \tag{8}$$

ergibt sich

$$(D^{\pm x}_{i,j})'\mathbf{u} \approx \frac{T(\mathbf{u}_{i\pm 2,j}) - 2T(\mathbf{u}_{i\pm 2,j}) + T(\mathbf{u}_{i,j})}{\pm(\Delta x)^2}. \tag{9}$$

Somit ist

$$\frac{\partial T(\mathbf{u}_{i,j})}{\partial x} \approx D^{\pm 2x}_{i,j}\mathbf{u} = \frac{T(\mathbf{u}_{i\pm 1,j}) - T(\mathbf{u}_{i,j})}{\pm\Delta x} - \frac{\Delta x}{2}\frac{T(\mathbf{u}_{i\pm 2,j}) - 2T(\mathbf{u}_{i\pm 1,j}) + T(\mathbf{u}_{i,j})}{\pm(\Delta x)^2}$$

Navigation im $\mathbb{R}^2$: Lokale Lösung

Somit ist

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T(\mathbf{u}_{i,j})}{\partial x} \approx D_{i,j}^{\pm 2x}\mathbf{u} &= \frac{T(\mathbf{u}_{i\pm 1,j}) - T(\mathbf{u}_{i,j})}{\pm \Delta x} - \frac{\Delta x}{2}\frac{T(\mathbf{u}_{i\pm 2,j}) - 2T(\mathbf{u}_{i\pm 1,j}) + T(\mathbf{u}_{i,j})}{\pm(\Delta x)^2} \\
&= \frac{2T(\mathbf{u}_{i\pm 1,j}) - 2T(\mathbf{u}_{i,j})}{\pm 2\Delta x} - \frac{T(\mathbf{u}_{i\pm 2,j}) - 2T(\mathbf{u}_{i\pm 1,j}) + T(\mathbf{u}_{i,j})}{\pm 2\Delta x} \\
&= \frac{-T(\mathbf{u}_{i\pm 2,j}) + 4T(\mathbf{u}_{i\pm 1,j}) - 3T(\mathbf{u}_{i,j})}{\pm 2\Delta x}.
\end{aligned}$$

Und in y-Richtung ebenso:

$$\frac{\partial T(\mathbf{u}_{i,j})}{\partial y} \approx D_{i,j}^{\pm 2y}\mathbf{u} = \frac{-T(\mathbf{u}_{i,j\pm 2}) + 4T(\mathbf{u}_{i,j\pm 1}) - 3T(\mathbf{u}_{i,j})}{\pm 2\Delta y}.$$

Navigation im $\mathbb{R}^2$: Lokale Lösung

Wir lösen noch immer eine quadratische Gleichung:

$$\max\left\{D_{i,j}^{-2x}\mathbf{u}, -D_{i,j}^{+2x}\mathbf{u}\right\}^2 + \max\left\{D_{i,j}^{-2y}\mathbf{u}, -D_{i,j}^{+2y}\mathbf{u}\right\}^2 = f(\mathbf{u}_{i,j})^{-2}. \tag{10}$$

Vorteil: Bessere Konvergenzrate für feiner werdendes Gitter $(\Delta x, \Delta y \to 0)$, denn

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \mathcal{O}(h^2) = f(x) + hf'(x) + h^2\frac{f''(x)}{2} + \mathcal{O}(h^3)$$

Nachteil: Möglicherweise ungewollte Glättung der Singularitäten.

Navigation im $\mathbb{R}^2$: FMM

$T(\mathbf{u}) \leftarrow 0$ for all $\mathbf{u} \in \Gamma$;

$T(\mathbf{u}) \leftarrow \infty$ for all $\mathbf{u} \notin \Gamma$;

$\mathcal{B} \leftarrow \emptyset$ `// von Welle bereits verlassene Punkte`

$\mathcal{Q} \leftarrow \{(\mathbf{u}, T(\mathbf{u})) \mid \mathbf{u} \in \Gamma\}$ `// von der Welle erreichte Punkte`

while $\mathcal{Q} \neq \emptyset$ **do**

  $(\mathbf{u}, T(\mathbf{u})) \leftarrow \mathcal{Q}.\textsc{pop}()$;

  foreach *neighbor* $\mathbf{v}$ *of* $\mathbf{u}$ *with* $\mathbf{v} \notin \mathcal{B}$ **do**

    $T(\mathbf{v}) \leftarrow \textsc{SolveEikonal}(\mathbf{v})$;

    if $(\mathbf{v}, T(\mathbf{v})) \in \mathcal{Q}$ **then**

      $\mathcal{Q}.\textsc{decrease}(\mathbf{v}, T(\mathbf{v}))$;

    else

      $\mathcal{Q}.\textsc{push}(\mathbf{v}, T(\mathbf{v}))$;

  $\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B} \cup \{\mathbf{u}\}$;

return T;

Navigation im $\mathbb{R}^2$: FMM

$\mathcal{Q}$ ist eine nach $T(\mathbf{u})$ sortierte PriorityQueue:

- $\mathcal{Q}$.pop(), wirft das kleinste Element heraus,
- $\mathcal{Q}$.decrease$(\mathbf{u}, T(\mathbf{u}))$ ändert ein Element ab,
- und $\mathcal{Q}$.push$(\mathbf{u}, T(\mathbf{u}))$ fügt ein Element ein.
- SolveEikonal$(\mathbf{u})$ berechnet die lokale Lösung aus Gleichung (10) oder Gleichung (6).

Komplexität: (für n Knoten)

- Zeit: $\mathcal{O}(n \log(n))$
- Speicher: $\mathcal{O}(n)$

Implementierungstipps:

- Sie finden eine sehr gute Beschreibung in [1].
- Um schnell zu prüfen ob ein Gitterpunkt *unerreicht*, *erreicht*, oder *verlassen* ist verwenden Sie ein **flag** (keine Mengen).
- Sie können auch Punkte um Γ herum mit z.B. dem Wert der Euklidischen Distanz initialisieren und in Q einfügen.
- Sie können etwas Performance rausholen, wenn Sie auf DECREASE verzichten und nur PUSH verwenden (d.h. Sie lassen doppelte Einträge zu $\Rightarrow$ Sie müssen den Algorithmus etwas anpassen, siehe [8])

Navigation im $\mathbb{R}^2$: FMM

Eigenschaften:

+ Für alle arten von Wellen ein sehr schneller sequenzieller Algorithmus
+ Besonders schnell für 'schmale' Wellen
- Schwer zu parallelisieren, Versuche [6, 12]
- Benötigt komplizierte/unstrukturierte PriorityQueue
- Nutzt die Parallelität der Wellenfrontausbreitung nicht aus

Alternative Methoden:

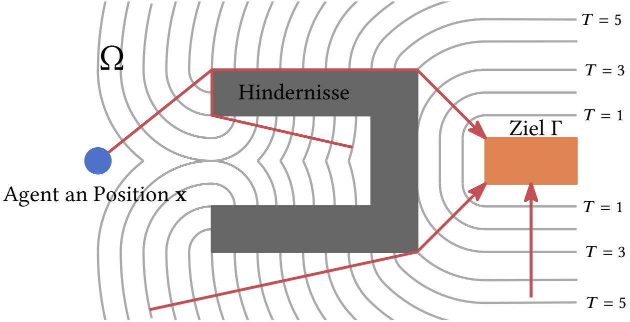
- FastSweepingMethod [13], nur für sehr 'einfache' Wellen geeignet
- FastIterativeMethod [7], besonders für 'breite' Wellen geeignet
- InformedFastIterativeMethod (meine Dissertation), für wiederholte Berechnungen sich leicht ändernder Wellen geeignet.

In [2, 4] finden Sie Vergleiche verschiedener Methoden.

Navigation im $\mathbb{R}^2$: Modellierung

Navigation im $\mathbb{R}^2$: Modellierung

Wie erreichen wir, dass Agenten nicht direkt an den Wänden entlang laufen?



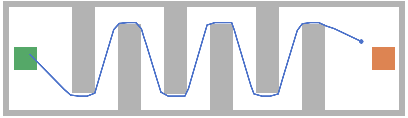
Tipp: Verringern Sie die Reisegeschwindigkeit der Welle f in der Nähe von Hindernissen!

Navigation im $\mathbb{R}^2$: Modellierung

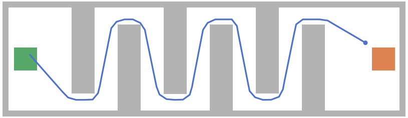
Zum Beispiel, sei $d_W(\mathbf{x})$ die Euklidische Distanz zum nächstliegenden Hindernis/Wand, dann könnte sich

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1/(2 - (d_W(\mathbf{x})/\delta_W)) & \text{falls } d_W(\mathbf{x}) < \delta_W \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

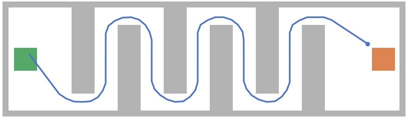
eignen.



(a) $\delta_W = 0.2$ Meter

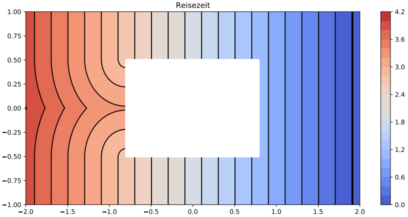


(b) $\delta_W = 0.5$ Meter

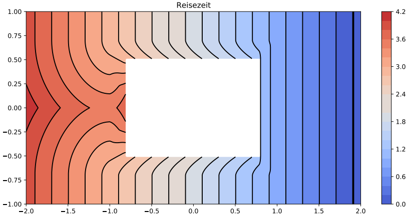


(c) $\delta_W = 1.0$ Meter

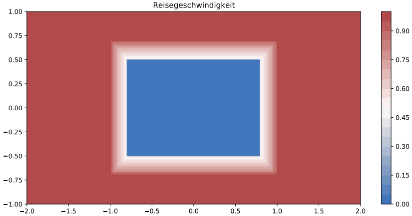
Navigation im $\mathbb{R}^2$: Modellierung



(a) $T(\mathbf{x})$ für $f(\mathbf{x}) = 1$



(b) $T(\mathbf{x})$ für $f(\mathbf{x}) \leq 1$



(c) $f(\mathbf{x}) \leq 1$

References I

[1] J. Andreas Bærentzen. On the implementation of fast marching methods for 3d lattices. Technical report, Technical University of Denmark, 2001.

[2] A. Capozzoli, C. Curcio, A. Liseno, and S. Savarese. A comparison of fast marching, fast sweeping and fast iterative methods for the solution of the eikonal equation. In *2013 21st Telecommunications Forum Telfor (TELFOR)*, pages 685–688, 2013.

[3] E. W. Dijkstra. A note on two problems in connexion with graphs. *Numerische Mathematik*, 1(1):269–271, 1959. doi: 10.1007/BF01386390.

[4] Javier V. Gómez, David Álvarez, Santiago Garrido, and Luis Moreno. Fast methods for eikonal equations: an experimental survey. *CoRR*, abs/1506.03771, 2015.

[5] Peter E. Hart, Nils J. Nilsson, and Bertram Raphael. A formal basis for the heuristic determination of minimum cost paths. *IEEE Transactions on Systems Science and Cybernetics*, 4(2):100–107, 1968. doi: 10.1109/TSSC.1968.300136.

[6] M. Herrmann. A domain decomposition parallelization of the fast marching method. Technical report, Stanford Univ. Center for Turbulence Research; Stanford, CA, United States, 2003.

[7] Won-Ki Jeong and Ross T. Whitaker. A fast iterative method for eikonal equations. *SIAM Journal of Scientific Computing*, 30(5):2512–2534, 2008. doi: 10.1137/060670298.

[8] M. W. Jones, J. A. Baerentzen, and M. Sramek. 3d distance fields: a survey of techniques and applications. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 12(4):581–599, July 2006. ISSN 1077-2626. doi: 10.1109/TVCG.2006.56.

References II

[9] R. Kimmel and J. A. Sethian. Computing geodesic paths on manifolds. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 95(15):8431–8435, 1998. doi: 10.1073/pnas.95.15.8431.

[10] J. A. Sethian. *Level Set Methods and Fast Marching Methods: Evolving Interfaces in Computational Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision, and Materials Science.* Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[11] J. A. Sethian and A. Vladimirsky. Fast methods for the eikonal and related Hamilton-Jacobi equations on unstructured meshes. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 97(11):5699–5703, 2000. doi: 10.1073/pnas.090060097.

[12] J. Yang and F. Stern. A highly scalable massively parallel fast marching method for the eikonal equation. *ArXiv e-prints*, feb 2015.

[13] Hongkai Zhao. A fast sweeping method for eikonal equations. *Math. Comput.*, 74(250):603–627, 2005. doi: 10.1090/S0025-5718-04-01678-3.