Inhaltsverzeichnis

0 Quantenmechanik

12.10.2015

0.1 Mechanik

Der einfachste Lagrange lautet

$$L(x, \dot{x}) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - V(x)$$

Um jetzt die Hamiltonfunktion zu konstruieren, schreiben wir:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} (= m\dot{x})$$

Sodass

$$H(x, p) = p\dot{x} - L(x, \dot{x}) = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

Poisson-Klammern:

$$\{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial B}{\partial p} - \frac{\partial B}{\partial x}\frac{\partial A}{\partial p}$$

Beispiele mit Spezialfällen:

$\frac{\mathrm{d}F}{dt} = \dot{F} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}$	Phasenraumfunktion $F(x, p, t)$
$\frac{\mathrm{d}H}{dt} = \{H, H\} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$	Falls H nicht explizit zeitabhängig, dann ist Energie in H erhalten.
$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \{x, H\} = \frac{\partial H}{\partial p}$	$= \frac{p}{m} \rightarrow$ Geschwindigkeit ist Impuls durch Masse.
$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \{p, H\} = -\frac{\partial H}{\partial x}$	Newton: $F = ma = \dot{p} =$ "$-\nabla V$"

Fundamentale Poissonklammern:

$$\begin{aligned}\{x, x\} &= \{p, p\} = 0 \\ \{x, p\} &= 1\end{aligned}$$

0.2 Quantenmechanik

Â ist Operator. Und e hoch eine Matrix ist definiert als:

$$e^{\hat{A}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{A}^n}{n!}$$

Der Operator $\hat{p}$ erzeugt Translationen

$$\begin{aligned} e^{\frac{i}{\hbar}a\hat{p}}\psi(x) &= \psi(x + a) \\ &= e^{a\frac{\partial}{\partial x}}\psi(x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} a^n \frac{\partial^n}{\partial x^n}\psi(x) \\ &\overset{Taylorreihe}{=} \sum_n \frac{a^n}{n!}\psi^{(n)}(x) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \hat{p} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$

$$\begin{aligned}(\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x})\psi(x) = & \\ &= [\hat{x},\hat{p}]\psi(x) \\ &= \frac{\hbar}{i}\left(x\frac{\partial}{\partial x}\psi - \frac{\partial}{\partial x}x\psi\right) \\ &= \frac{\hbar}{i}\left(x\psi' - \psi - x\psi'\right) \\ &= i\hbar\psi(x) \text{ für alle } \psi(x)\end{aligned}$$

$\Rightarrow \boxed{[\hat{x},\hat{p}] = i\hbar}$ Born-Jordan Relation

Beschränkte Operatoren wirken auf Zustände im Hilbertraum $L_2(\mathbb{C}) = H$:

$$\hat{A}\left|n\right\rangle = a_n\left|n\right\rangle$$

Wobei a_n Eigenwerte sind und $|n\rangle$ Eigenzustände[1] $\in H$. Da $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$ selbstadjungiert ist, $\Rightarrow a_n \in \mathbb{R}$ und es gilt $\langle m|n\rangle = \delta_{mn}$ (normiert) "Strahl in H".

Es gilt die Vollständigkeitsrelation:

$$\sum_n \left|n\right\rangle\left\langle n\right| = \mathbb{1}$$

bzw. $\{|a_n\rangle\}$ ist Basis von H, falls $\hat{A}$ ein rein diskretes Spektrum $\{a_n\}$ hat.

Allgemeiner: Das Gelfand Tripel:

$$\{\Phi, H, \Phi'\} \text{ mit } \Phi \subset H \subset \Phi'$$

Dann ist $|a_n\rangle \in \Phi \Rightarrow \langle a_n|a_n\rangle = 1$ normierbar.

Sind alle $|a_n\rangle \in \Phi$ dann gilt $\Phi = H = \Phi'$ und $\hat{A}$ hat ein rein diskretes Spektrum. Aber es gibt auch <u>uneigentliche</u> Eigenvektoren

$$\left|x\right\rangle, \left|p\right\rangle \in \Phi'$$

dies ist eine uneigentliche Basis von H, aber $|x\rangle \notin H$

$$\begin{aligned}&\hat{x}\left|x\right\rangle = x\left|x\right\rangle\ , &&\langle x|x'\rangle = \delta(x-x')\ , &&\int dx\left|x\right\rangle\left\langle x\right| = \mathbb{1} \\ &\hat{p}\left|p\right\rangle = p\left|p\right\rangle\ , &&\langle p|p'\rangle = 2\pi\delta(x-x')\ , &&\int \frac{dp}{2\pi}\left|p\right\rangle\left\langle p\right| = \mathbb{1}\end{aligned}$$

Wenn wir eine Fourier Transformation machen, fügt man im Endeffekt einfach eine $\mathbb{1}$ ein:

$$\psi(x) = \langle x|\psi\rangle = \langle x|\int\frac{\mathrm{d}p}{2\pi}|p\rangle\left\langle p||\psi\right\rangle = \int\frac{\mathrm{d}p}{2\pi}\left\langle x|p\right\rangle\left\langle p|\psi\right\rangle = \int\frac{\mathrm{d}p}{2\pi}e^{-ipx}\tilde{\psi}(p)$$

[1] In der Vorlesung wurde $|a_n\rangle$. benutzt.

Der Hamiltonoperator erzeugt zeitliche Translationen:

$$\hat{H}\left|\psi(t)\right\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi(t)\right\rangle \Rightarrow \left|\psi(t)\right\rangle = \hat{\mathcal{U}}_t\left|\psi(0)\right\rangle$$
$$\text{mit } \mathcal{U}_{\hat{t}} = \mathrm{T}\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\right)$$

Wobei T ein Zeitoperator[2] ist und $\hat{H} = H(\hat{x}, \hat{p})$ aber $[\hat{x}, \hat{p}] \neq 0$. Allgemein gilt $e^A e^B \neq e^{A+B}$ wenn $[A, B] \neq 0$.

$\hat{\mathcal{U}}_t$ ist unitär:

$$\hat{\mathcal{U}}_t + \hat{\mathcal{U}}_t = \hat{\mathcal{U}}_{-t}\hat{\mathcal{U}}_t = \mathbb{1}.$$

Mögliche Messergebnisse von A zur Zeit t: a_n Erwartungswert:

$$\langle A\rangle_\psi(t) = \langle\psi(t)|\hat{A}|\psi(t)\rangle = \sum_n \langle\psi(t)|\hat{A}|n\rangle\,\langle n|\psi(t)\rangle = \sum_n a_n \underbrace{|\langle\psi(t)|n\rangle|^2}_{|c_n(t)|^2}$$

Dabei ist $|c_n(x)|^2$ die Wahrscheinlichkeit den Zustand $|n\rangle$ anzutreffen.

$$\begin{aligned} c_n(t) = & \\ &= \langle\psi(t)|n\rangle \\ &= \langle\psi(0)|\hat{\mathcal{U}}_t^\dagger|n\rangle \\ &= \langle\psi(0)|\mathrm{T}e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|n\rangle \\ &\overset{\hat{H}|m\rangle = E_m|m\rangle}{=} \sum_m \langle\psi(0)|\mathrm{T}e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|m\rangle\,\langle m|n\rangle \\ &= \sum_m \langle\psi(0)|m\rangle\,\langle m|n\rangle\, e^{\frac{i}{\hbar}E_m t} \end{aligned}$$

So kann man auch schreiben:

$$\langle A\rangle_\psi(t) = \sum_{n,m,k} a_n e^{\frac{i}{\hbar}(E_m - E_k)t}\,\langle\psi(0)|m\rangle\,\langle k|\psi(0)\rangle\,\langle m|n\rangle\,\langle n|k\rangle$$

Falls $[\hat{H}, \hat{A}] = 0$, dann existiert simultanes System von Eigenzuständen $\rightsquigarrow \langle m|n\rangle = \delta_{mn}$ (für nicht-entarteten Fall).

0.3 Schrödinger- und Heisenbergbild

Schrödinger Bild:	Heisenberg Bild:
zeitunabhängige Operatoren $\hat{A}$	zeitabhängige Operatoren $\hat{A}_H(t)$
zeitabhängige Zustände $\lvert\psi(t)\rangle$	zeitunabhängige Zustände $\lvert\psi\rangle_H$

Damit

$$\begin{aligned} &\langle\psi'(t)|\hat{A}|\psi(t)\rangle \equiv\ {}_H\langle\psi'|\hat{A}_H(t)|\psi\rangle_H \\ &\Rightarrow \hat{A}_H(t) = \hat{\mathcal{U}}_t^\dagger\hat{A}\hat{\mathcal{U}}_t\ ,\ |\psi\rangle_H = |\psi(0)\rangle \end{aligned}$$

[2] Hier hat Prof. Bali kurz erklärt, wie T auf die Exponentialfunktion wirkt, aber ich konnte es bis jetzt nicht verstehen.

Energie Eigenzustände:

$$\hat{H}\,|n\rangle = E_n\,|n\rangle \Rightarrow H\,|n(t)\rangle = E_n\,|n(t)\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,|n(t)\rangle$$
$$|n(t)\rangle = |n(0)\rangle\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t} = |n\rangle\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t} = |n\rangle\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}$$

$\Rightarrow |n\rangle = |n\rangle_H$ für "stationäre "Zustände.

Ehrenfesttheorem:

$$\begin{aligned}
i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\hat{A}\rangle_\psi &= i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\langle\psi(t)\,\middle|\,\hat{A}\,\middle|\,\psi(t)\right\rangle \\
&= i\hbar\left(\left\langle\dot{\psi}\,\middle|\,\hat{A}\,\middle|\,\psi\right\rangle + \left\langle\psi\,\middle|\,\hat{A}\,\middle|\,\dot{\psi}\right\rangle + \left\langle\psi\,\middle|\,\dot{\hat{A}}\,\middle|\,\psi\right\rangle\right) \\
&= \left(\left\langle\psi\,\middle|\,-\hat{H}\hat{A}\,\middle|\,\psi\right\rangle + \left\langle\psi\,\middle|\,\hat{H}\hat{A}\,\middle|\,\psi\right\rangle + i\hbar\frac{\partial\langle\hat{A}\rangle}{\partial t}\right) \\
&= \left\langle\left[\hat{A},\hat{H}\right]\right\rangle_\psi + i\hbar\frac{\partial\langle\hat{A}\rangle}{\partial t} \\
&\Rightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\hat{A}\rangle_\psi = -\frac{i}{\hbar}\left\langle\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right\rangle + \frac{\partial}{\partial t}\langle\hat{A}\rangle}
\end{aligned}$$

Beispiel:

$$\hat{A} = \hat{p},\ \text{mit } \hat{p} = \frac{i}{\hbar}\frac{\partial}{\partial x} \text{ und } \hat{V} = V(x)$$
$$\frac{\mathrm{d}\langle\hat{p}\rangle}{\mathrm{d}t} = -\frac{i}{\hbar}\left\langle\left[\hat{p},\hat{V}\right]\right\rangle = -\left\langle\frac{\partial\hat{V}}{\partial x}\right\rangle$$

Heisenberggleichung:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\hat{A}_H(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{i}{\hbar}\left[\hat{A}_H,\hat{H}\right] + \frac{\partial\hat{A}_H}{\partial t}}$$

ist äquivalent zur Schrödingergleichung:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\,|\psi(t)\rangle}{\mathrm{d}t} = -\frac{i}{\hbar}\hat{H}\,|\psi(t)\rangle}$$

0.4 Harmonischer Oszillator

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 x^2 \qquad\qquad y := \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$$
$$\Rightarrow H = \hbar\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{2}y^2\right) = \hbar\omega\tilde{H} \qquad \text{mit } \tilde{H} = \frac{1}{2}\left(\tilde{p}^2 + y^2\right)$$
$$\Rightarrow [y,\tilde{p}] = i \qquad\qquad \text{wobei } \tilde{p} = -i\frac{\partial}{\partial y}$$

wobei

$$\text{Vernichtnungsoperator: } a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(y + i\tilde{p}\right)$$
$$\text{Erzeugungsoperator: } a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(y - i\tilde{p}\right)$$

Und da dann

$$[a, a^\dagger] = 1 \qquad \text{oder } aa^\dagger = a^\dagger a + 1$$
$$\Rightarrow \tilde{H} = \left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)$$
$$\text{und somit } y = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a + a^\dagger\right), \qquad \tilde{p} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a - a^\dagger\right)$$

Sei nun:

$$\tilde{H}\left|n\right\rangle = \epsilon_n \left|n\right\rangle \qquad \left(H\left|n\right\rangle = E_n\left|n\right\rangle \Rightarrow E_n = \hbar\omega\epsilon_n\right) a^\dagger a\left|n\right\rangle = \left(\epsilon_n - \frac{1}{2}\right)\left|n\right\rangle$$

(n ist Anzahl der Knoten (Nullstellen) der Wellenfunktionen.) Aus QM 1:

$$a\left|n\right\rangle = \sqrt{n}\left|n-1\right\rangle$$
$$a^\dagger\left|n\right\rangle = \sqrt{n+1}\left|n+1\right\rangle$$
$$\Rightarrow \epsilon_{n+1} = \epsilon_n + 1$$

mit $n = 0, 1, 2\ldots$:

$$\epsilon_n = n + \frac{1}{2} \rightsquigarrow E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$$
$$\text{und } \underbrace{a^\dagger a}_{N\text{: Nummernoperator(Teilchenzahloperator)}}\left|n\right\rangle = n\left|n\right\rangle$$

Somit ist $\tilde{H} = N + \frac{1}{2}$-

1 Zeitabhängige Störung

1.1 Zeitabhängige Störungstheorie und das Wechselwirkungsbild

Betrachte

$$H(t) = H^0 + H^1(t)$$

H^0 ist zeitunabhängig: $H^1(t) = 0$ für $t < t_i$ oder $t > t_f$ Ungestörtes System:

$$H^0\left|n\right\rangle = E_n\left|n\right\rangle = \hbar\omega_n\left|n\right\rangle$$
$$\left|\psi(t)\right\rangle = \sum_n \left\langle n|\psi(t_0)\right\rangle e^{-i\omega_n(t-t_0)}\left|n\right\rangle \text{ für } t, t_0 < t_i (\text{oder } t, t_0 > t_f)$$

Von nun an: $|\psi(t_0)\rangle = |n\rangle$ für $t_0 < t_i$

$$\Rightarrow \boxed{|\psi(t)\rangle = e^{-i\omega_n(t-t_0)}\,|n\rangle} \text{ für } t_0, t < t_i$$

Formale Lösung von

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\psi(t)\rangle = H^0\,|\psi(t)\rangle$$

Ist

$$\Rightarrow |\psi(t)\rangle = \mathrm{T}e^{-\frac{i}{\hbar}H^0(t-t_0)}\,|\psi(t_0)\rangle = \mathcal{U}^0(t-t_0)\,|\psi(t_0)\rangle$$

Achntung: T ist Zeit**ordnungs**operator und $\mathcal{U}^0(t-t_0)$ ist Zeit**entwicklungs**operator.
Eigenschaften:

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{U}^0(t_1)\mathcal{U}^0(t_2) &= \mathcal{U}^0(t_1+t_2)\\ \mathcal{U}^0(-t) &= \mathcal{U}^{0\dagger}(t)\end{aligned}\right\}\mathcal{U}^{0\dagger}(t)\mathcal{U}^0(t) = \mathbb{1}$$

$$\begin{aligned}1 &= \langle\psi(t)|\psi(t)\rangle\\ &= \langle\psi(t_0)|\mathcal{U}^{0\dagger}(t-t_0)\mathcal{U}^0(t-t_0)|\psi(t_0)\rangle\\ &= \langle\psi(t_0)|\psi(t_0)\rangle\end{aligned}$$

Norm bleibt erhalten $\Rightarrow U^0$ ist unitär!
Betrachte nun

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\psi(t)\rangle = H(t)\,|\psi(t)\rangle$$

Endzustand ($t > t_f$):

$$\boxed{|\psi(t)\rangle = \sum_m c_m(t)e^{-i\omega_m(t-t_0)}\,|m\rangle}$$

Übergangswahrscheinlichkeit von $|n\rangle$ in den Zustand $|m\rangle$:

$$\boxed{P_{mn}(t) = |c_m(t)|^2} = |\langle m|\psi_W(t)\rangle|^2$$

Das gestörte System

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\psi(t)\rangle = \Big(H^0 + H^1(t)\Big)\,|\psi(t)\rangle$$

wird im Allgemeinen nicht durch

$$|\psi(t)\rangle = \mathrm{T}e^{-\frac{i}{\hbar}H(t)(t-t_0)}\,|\psi(t_0\rangle$$

gestört! $H(t)$ ist zeitabhängig. Aber

$$\begin{aligned}\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle &= \langle\psi(t_0)|\psi(t_0)\rangle\\ \Rightarrow |\psi(t)\rangle &= \mathcal{U}(t-t_0)\,|\psi(t_0)\rangle\end{aligned}$$

$\mathcal{U}(t, t_0)$ ist ein noch unbekannter unitärer Zeitentwicklungsoperator.
$|\psi(t)\rangle$ ist Wellenfunktion im Schrödingerbild.

Betrachte:

$$|\psi_W(t)\rangle = (\mathcal{U}^0)^{-1}(t - t_0)\,|\psi(t)\rangle = \mathrm{T}e^{\frac{i}{\hbar}H^0(t-t_0)}\,|\psi(t)\rangle$$

Für $H^1 = 0$ gilt:[3]

$$|\psi_W(t)\rangle = |\psi(t_0)\rangle = |\psi_W\rangle = |\psi\rangle_H$$

Nun ist aber $H^1(t) \neq 0$

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\psi_W(t)\rangle &= i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathrm{T}e^{\frac{i}{\hbar}H^0(t-t_0)}\,|\psi(t)\rangle\right] \\ &= \mathrm{T}e^{\frac{i}{\hbar}H^0(t-t_0)}[-H^0 + \underbrace{i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}]\,|\psi(t)\rangle}_{H|\psi(t)\rangle=(H^0+H^1(t))|\psi(t)\rangle} \\ &= \mathrm{T}\left\{e^{\frac{i}{\hbar}H^0(t-t_0)}H^1(t)e^{-\frac{i}{\hbar}H^0(t-t_0)}\,|\psi_W(t)\rangle\right\} \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\psi_W(t)\rangle &= H^1_W(t)\,|\psi_W(t)\rangle \\ H^1_W(t) &= \mathcal{U}^{0\dagger}(t - t_0)H^1(t)\mathcal{U}^0(t - t_0) \end{aligned}} \tag{1}$$

Bild	Zustand	Operator
Heisenberg	zeitunabhängig	Entwicklung durch H
Schrödinger	Zeitentwicklung durch H	Zeitunabhängig (hier aber $H(t)$)
Wechselwirkungs-	Entwicklung durch $H^1(t)$	Entwicklung durch H^0

Berechnung der $c_m(t)$:

Aus dem Schrödingerbild:

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \sum_m c_m(t)\,|m\rangle\, e^{-i\omega_m(t-t_0)}, && t > t_f \\ |\psi_W(t)\rangle &= \sum_m c_m(t)\,|m\rangle && \Rightarrow c_m(t) = \langle m|\psi_W(t)\rangle \\ i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}c_m(t) &= \left\langle m \left| i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \right| \psi(t) \right\rangle \\ &\overset{(1)}{=} \langle m|H^1_W(t)|\psi_W(t)\rangle \\ &= \sum_k \langle m|H^1(t)|k\rangle\,\underbrace{\langle k|\psi_W(t)\rangle}_{c_k(t)} \\ &= \sum_k \langle m|H^1(t)|k\rangle\, e^{-i(\omega_k-\omega_m)(t-t_0)}c_k(t) \end{aligned} \tag{2}$$

Anfangsbedingung: $(t_0 < t_i \Rightarrow H^1(t_0) = 0)$:

$$c_k(t_0) = \langle k|\psi_n(t_0)\rangle = \langle k|\psi(t_0)\rangle = \langle k|n\rangle = \delta_{kn}$$

[3] hier ist wieder das Runtergeschriebene W für Wechselwirkung und H für Heisenberg.

Das gekoppelte nicht-lineare System von Differentialgleichungen (2) ist nicht leicht lösbar. $\Rightarrow$ Betrachte „kleine" Störungen $H^1(t)$: $\left(\text{linearisierung von } i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left|\psi_W(t)\right\rangle = H^1(t)\left|\psi_W(t)\right\rangle\right)$

$$\left|\psi_W(t)\right\rangle = \underbrace{\left|\psi(t_0)\right\rangle}_{=\left|\psi_W(t_0)\right\rangle} \frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^t \mathrm{d}t' H_W^1(t')\left|\psi(t_0)\right\rangle + \dots \left(\text{linearisierung von } i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left|\psi_W(t)\right\rangle = H^1(t)\left|\psi_W(t)\right\rangle\right)$$

$$c_m(t) = \left\langle m|\psi_W(t)\right\rangle = \delta_{mn} - \frac{i}{\hbar}\sum_k \int_{t_0}^t \mathrm{d}t' \left\langle m\right|H^1(t')\left|k\right\rangle e^{-i(\omega_n-\omega_m)(t'-t_0)} \underbrace{c_k(t_0)}_{\delta_{kn}} + \dots$$

Setze $t_0 = 0$ ($t_i > 0$)

$$\Rightarrow \boxed{c_m(t) = \delta_{mn} - \frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^t \mathrm{d}t' \left\langle m\right|H^1(t')\left|n\right\rangle e^{-i(\omega_n-\omega_m)t'} + \dots}$$

Formale Lösung zu allen Ordnungen in H^1:

$$\left|\psi_W(t)\right\rangle = \mathcal{U}^{0\dagger}(t-t_0)\left|\psi(t)\right\rangle = \mathcal{U}^{0\dagger}(t-t_0)\underbrace{\mathcal{U}(t,t_0)}_{t>t_f}\left|\psi_W(t)\right\rangle$$

$$\boxed{\left|\psi_W(t)\right\rangle = W(t,t_0)\left|\psi(t_0)\right\rangle \quad \text{mit } W(t,t_0) = \mathcal{U}^{0\dagger}(t-t_0)\mathcal{U}(t,t_0)}$$

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left|\psi_W(t)\right\rangle = H_W^1(t)\left|\psi_(t)\right\rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}W(t,t_0) = H_W^1(t)W(t,t_0) \quad \text{für } t > t_0 \text{ mit } W(t_0,t_0) = \mathbb{1}}$$

$$\boxed{W(t,t_0) = \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^t \mathrm{d}t' H_W^1(t')W(t',t_0)}$$

Integralgleichung: Lösung durch Iteration (Dyson-Reihe)

$$W^0(t,t_0) = \mathbb{1}$$
$$W^n(t,t_0) = \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^t \mathrm{d}t' H_W^1(t')W^{n-1}(t',t_0)$$

<u>Beispiele:</u>

$$W^1(t,t_0) = \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^t \mathrm{d}t' H_W^1(t')\underbrace{W^0(t',t_0)}_{\mathbb{1}}$$

$$W^2(t,t_0) = \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^t \mathrm{d}t' H_W^1(t') + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^t \mathrm{d}t' \int_{t_0}^{t'} \mathrm{d}t'' H_W^1(t')H_W^1(t'')$$

$$W^k(t,t_0) = \mathbb{1} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{i}{\hbar}\right)^k \int_{t_0}^t \mathrm{d}t_k \int_{t_0}^{t_k} \mathrm{d}t_{k-1} \cdots \int_{t_0}^{t_2} \mathrm{d}t_1 H_W^1(t_k)H_W^1(t_{k-1})\cdots H_W^1(t_1)$$

Zeitordnungsoperator T : 19.10.2015

$$\mathrm{T}A(t_1)A(t_2) = \begin{cases} A(t_1)A(t_2), t_1 \geq t_2 \\ A(t_2)A(t_1), t_1 \leq t_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathrm{T}A(t_1)A(t_2)\cdots A(t_k) = A(t_{\pi(1)})A(t_{\pi(2)})\cdots A(t_{\pi(k)})$$

mit $\pi \in S_k$ (Gruppe der Permutationen von k Elementen (mit Mächtigkeit $k!$)) sodass wenn $t_{\pi(1)} \geq t_{\pi(2)} \geq \ldots \geq t_{\pi(k)}$

$$\begin{aligned} W(t) &= \mathrm{T}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-i}{\hbar}\right)^k \frac{1}{k!}\int_0^t \mathrm{d}t_k \int_0^t \mathrm{d}t_{k-1}\cdots\int_0^t \mathrm{d}t_1 H_W^1(t_k)H_W^1(t_{k-1})\cdots H_W^1(t_1)\mathbb{1}\right\} \\ &= \mathrm{T}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-i}{\hbar}\right)^k \frac{1}{k!}\underbrace{\int_0^t \mathrm{d}t_k H_W^1(t_k)\int_0^t \mathrm{d}t_{k-1}H_W^1(t_{k-1})\cdots\int_0^t \mathrm{d}t_1 H_W^1(t_1)}_{\left(\int_0^t \mathrm{d}t' H_W^1(t')\right)^k}\right\} \\ &= \mathrm{T}\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\int_0^t \mathrm{d}t' H_W^1(t')\right\} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left|\psi_W(t)\right\rangle &= H_W^1(t)\left|\psi_W(0)\right\rangle \\ \Rightarrow \left|\psi_W(t)\right\rangle &= \mathrm{T}e^{-\frac{i}{\hbar}\int_0^t \mathrm{d}t' H_W^1(t')}\left|\psi(0)\right\rangle \end{aligned}$$

Hier kommt ein mathematischer Einschub oder sowas (what so ever):

$$\int_0^t \mathrm{d}t' \int_0^{t'} \mathrm{d}t'' f(t')f(t'') = \int_0^t \mathrm{d}t' \left(\int_0^{t'} \mathrm{d}t'' \underbrace{f(t')}_{t'>t''} f(t'') + \int_{t'}^t \mathrm{d}t'' \underbrace{f(t'')}_{t''>t'} f(t')\right)\frac{1}{2}$$

$$\int_0^t \mathrm{d}t' \int_{t'}^t \mathrm{d}t'' f(t'')f(t') = \int_0^t \mathrm{d}t'' \int_0^{t'} \mathrm{d}t' f(t'')f(t') = \int_0^t \mathrm{d}t' \int_0^{t'} \mathrm{d}t'' f(t')f(t'')$$

Die Übergangswahrscheinlichkeit vom Zustand $|n\rangle$ zur Zeit t_0 in den Zustand $|m\rangle$ zur Zeit $t > t_0$ lautet:

$$\begin{aligned} P_{mn} &= |c_m(t)|^2 \\ &= |\langle m|\psi_W(t)\rangle|^2 \\ &= |\langle m|W(t,t_0)|\psi_W(t_0)\rangle|^2 \\ &= |\langle m|W(t,t_0)|n\rangle|^2 \end{aligned}$$

Hier ist wieder $|n\rangle = |\psi(t_0)\rangle$.

1.2 Fermis Goldene Regel