Übung 3

April 3, 2019 6:03 PM

1. Aufgabe

Aufgabe 1:
Sei $f(n)$ die n.te Fibonacci-Zahl, die wie folgt definiert ist:

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ mit } f(1) = 1, f(2) = 1 \text{ und } f(n) = f(n-1) + f(n-2) \text{ für } n \geq 3$$

Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass gilt:

$$f(n) = \frac{\phi^n - \hat{\phi}^n}{\sqrt{5}} \text{ mit } \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \hat{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Folgern Sie, dass eine rekursive Implementierung zur Berechnung der Fibonacci-Zahlen die Laufzeit $T(n) = \Theta(\phi^n)$ hat.

IA:

$n = 1$

$$f(1) = \frac{\left(\frac{(1+\sqrt{5})}{2}\right)^1 - \left(\frac{(1-\sqrt{5})}{2}\right)^1}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{-1+\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$$

IB:

$$\exists n \in \mathbb{N}: f(n) = \frac{(\phi^n - \hat{\phi}^n)}{\sqrt{5}} \quad mit\ \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad und\ \hat{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \wedge f(n+1) = f(n) + f(n-1) \to Fibonacci$$

IS:

$n = n + 1$

$$\frac{\phi^{n+1} - \hat{\phi}^{n+1}}{\sqrt{5}} = \frac{\phi^n - \hat{\phi}^n}{\sqrt{5}} + \frac{\phi^{n-1} - \hat{\phi}^{n-1}}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{\phi^{n+1} - \hat{\phi}^{n-1}}{\sqrt{5}} = \frac{\phi^n + \phi^{n-1} - (\hat{\phi}^n + \hat{\phi}^{n-1})}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{\phi^{n+1} - \hat{\phi}^{n+1}}{\sqrt{5}} = \frac{\phi^{n-1} * \left(\phi + \frac{2}{2}\right) - \hat{\phi}^{n-1} * \left(\hat{\phi} + \frac{2}{2}\right)}{\sqrt{5}} \quad | * \sqrt{5}$$

$$\phi^{n-1} * \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{2}{2}\right) = \phi^{n-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}+2}{2}\right) = \phi^{n-1}\left(\frac{(3+\sqrt{5})}{2}\right) \quad | \ letzter\ teil\ ist\ \phi^2$$

$$= \frac{\phi^{n-1} * \phi^2 - \hat{\phi}^{n-1} * \hat{\phi}^2}{\sqrt{5}} = \frac{\phi^{n+1} - \hat{\phi}^{n+1}}{\sqrt{5}}$$

Laufzeit

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{5}} (\phi^k - \hat{\phi}^k)$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^{n} (\phi^k - \hat{\phi}^k) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\sum_{k=0}^{n} \phi^k - \sum_{k=0}^{n} \hat{\phi}^k\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{\phi^{n+1} - 1}{\phi - 1} - \frac{\hat{\phi}^{n+1} - 1}{\hat{\phi} - 1}\right)$$

$$= c\left(\frac{\overbrace{\phi^{n+1}-1}}{\phi-1} - \frac{\overbrace{\hat{\phi}^{n+1}-1}}{\hat{\phi}-1}\right)$$

Für große n geht gegen 0

Für große n geht gegen $\phi^n \Rightarrow \Theta(\phi^n)$

2. Aufgabe

3. Aufgabe

   1. $T(1) = 1; T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + 1$

      $a = 1, b = 2, f = 1;$

      $1 = O(n^{\log_2 1}) \Rightarrow 2. Fall$

      $\Rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_2 1} * \log n) = \Theta(n^0 \log n)$

      $= \Theta(\log n)$

   2. $T(1) = 1, T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + n * \log n$

      $a = 3, b = 4, f(n) = n * \log n$

      $(n^{\log_4 3}) > n \log n \Rightarrow 3. Fall$

      $Nebenbedingung:$

      $3 * \frac{n}{4} * \log\left(\frac{n}{4}\right) \leq c * n * \log n$

      $\frac{3}{4} n \log n - 0.6 \leq c\, n \log n$

      $\Rightarrow T(n) = \Theta(n \log n)$

   1. $T(1) = 1, T(n) = 7T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$

      $a = 7, b = 2, f(n) = n^2$

      $n^{\log_2 7 - \epsilon} = n^2 \Rightarrow 1. Fall$

      $\Rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_2 7}) \approx \Theta(n^{2.81})$