Задача 4 “Хитрая функция”

Решение

В условии объявлена функция $f(n)$, которая записывает число n в обратном порядке, после чего удаляет ведущие нули. Поскольку поведение функции $f(n)$ на рациональных числах необъявлено, будем считать, что мы работаем только с целыми числами.
На основе f создана другая функция:

$$g(n) = \frac{f\big(f(n)\big)}{n}$$

Для того, чтобы разобраться с этой функцией я предлагаю ввести следующие обозначения:

- $\overline{a}$ – набор цифр, на обоих концах которого стоит не 0
- $\tilde{a}$ – набор цифр, полученный записыванием $\overline{a}$ в обратном порядке

Теперь любое натуральное число $n \in (1,\ 10^{30})$ можно записать в виде:

$$n = \overline{a} \cdot 10^k, \quad k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$$

Применим к этому числу функцию f:

$$f(n) = f(\overline{a} \cdot 10^k) = \underbrace{\overline{0 \ldots 0}}_{k}\tilde{a} = \tilde{a}$$

По определению $\tilde{a}$ для неё выполняется следующее равенство:

$$f\left(\tilde{a}\right) = \overline{a}$$

Теперь применим к произвольному числу n функцию g:

$$g(n) = \frac{f\big(f(n)\big)}{n} = \frac{f\big(f(\overline{a} \cdot 10^k)\big)}{\overline{a} \cdot 10^k} = \frac{f\left(\tilde{a}\right)}{\overline{a} \cdot 10^k} = \frac{\overline{a}}{\overline{a} \cdot 10^k} = 10^{-k}$$

Получается, что количество различных значений функции g равно количеству различных целых значений k.
Очевидно $k \geq 0$, так как мы работаем с целыми числами.
Также отметим $k < 30$, потому что для $k = m \geq 30$ справедливо неравенство:

$$\overline{a} \cdot 10^m \geq 10^{30}$$

А мы рассматриваем только $n \in (1,\ 10^{30})$.
Итак, $0 \leq k < 30 \Rightarrow k$ принимает 30 различных целых значений.
Ответ: 30