

Теория вероятности 1 модуль.

Андрей Тищенко БПИ231 @AndrewTGk

2024/2025

Семинар 6 сентября.

Теория

Классическое определение вероятности:

Количество исходов конечно, они взаимоисключающие и равновозможные.

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \in [0, 1].$$

Задача 0

Казино Монте-Карло с 37 слотами. 18 красных, 18 чёрных и 0. Тогда вероятность выиграть при ставке на красное будет $\frac{18}{37}$. Ставка удваивается. Можно играть на дюжины $[1, 12]$, $[13, 24]$, $[25, 36]$, тогда вероятность выигрыша $\frac{12}{37}$. Ставка при этом утраивается.

Задача 1

У взломщика есть связка из 10 ключей. С какой вероятностью он откроет дверь, перебрав ровно половину ключей.

Ключ равновероятно может находиться на любой позиции в его связке.

На пятом месте он будет в единственном случае, тогда $P = \frac{1}{10}$

Задача 2

Студент выучил 20 билетов из тридцати. С какой вероятностью ему достанется выученный билет, если он заходит первым? Вторым? Если

первым: $\frac{20}{30}$

Если вторым: $\frac{19}{29} \cdot \frac{2}{3} + \frac{20}{29} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Задача 3

Есть буквы М, О, С, К, В, А. Какова вероятность получить слово МОСКВА при случайном расположении этих букв.

$$P(A) = \frac{1}{6!} = \frac{1}{720}$$

Условие такое же, но буквы А, Б, Р, А, К, А, Д, А, Б, Р, А и нужно получить АБРАКАДАБРА.

$$P(A) = \frac{5!2!2!}{11!}$$

Задача 4

Есть два брата и 10 мест за круглым столом. Какова вероятность размещения братьев напротив друг-друга.

Одного фиксируем, у второго 9 вариантов $P(A) = \frac{1}{9}$

Рассматриваем положение обоих $P(A) = \frac{10 \cdot 8!}{10!} = \frac{1}{9}$

Задача 5

10 человек, 10 мест, между двумя конкретными должно быть 3 человека.

$$P(A) = \frac{6 \cdot 2 \cdot 8!}{10!}$$

Выбираем m элементов из N , с учётом порядка:

$$A_N^m = N(N-1) \dots (N-m+1) = \frac{N!}{(N-m)!}$$

Без учёта порядка:

$$C_N^m = \frac{A_N^m}{m!} = \frac{N!}{(N-m)!m!}$$

Задача 6

Угадываем номер телефона, знаем все цифры, кроме последних трёх, но известно, что они разные:

$$P(A) = \frac{1}{A_{10}^3} = \frac{1}{720}$$

Задача 7

Какова вероятность выиграть в спортлото (49 видов спорта, 6 выигрышных, нужно собрать все 6).

$$P(A) = \frac{1}{C_{49}^6} \approx \frac{1}{14\,000\,000}.$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Задача 8

Выбираются 3 цифры, хотим, чтобы их произведение было чётным.

Посчитаем вероятность нечётности произведения: $P(\overline{A}) = \frac{C_5^3}{C_{10}^3} = \frac{5!}{2!3!} \frac{7!}{10!} =$

$$= \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{8 \cdot 9 \cdot 10} = \frac{1}{12} \Rightarrow \\ \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$$

Задача 9

Колода 52 карты, какова вероятность достать 4 карты одной масти:

$$P(A) = \frac{4 \cdot C_{13}^4}{C_{52}^4}$$

Задача 10

Достать тройку, семёрку и туза из колоды с 52 картами:

$$P(A) = \frac{4^3}{C_{52}^3}$$

Задача 11

90 хороших и 10 плохих деталей, какова вероятность, что среди пяти вытасненных деталей нет брака:

$$P(A) = \frac{C_{90}^5}{C_{100}^5} = \frac{90! 5! 95!}{5! 85! 100!} = \frac{86 \cdot 87 \cdot \dots \cdot 89 \cdot 90}{96 \cdot 97 \cdot \dots \cdot 99 \cdot 100}$$

Хотим 3 хороших и 2 плохих:

$$P(B) = \frac{C_{90}^3 \cdot C_{10}^2}{C_{100}^5}$$

Задача 12

В спортлото угадать четыре из шести:

$$P(A) = \frac{C_6^4 \cdot C_{43}^2}{C_{49}^6}$$

Задача 13

Из 52 карт достать 2 красные и 2 чёрные карты:

$$P(A) = \frac{C_{26}^2 \cdot C_{26}^2}{C_{52}^4}$$

Задача 14

Вероятность при трёх бросках кубика получить три разных цифры:

$$P(A) = \frac{A_6^3}{6^3}, A_6^3 = 6 \cdot 5 \cdot 4$$

При броске шести кубиков выпали все цифры:

$$P(A) = \frac{6!}{6^6}$$

Задача 15

В лифте десятиэтажного здания на первом этаже оказалось 8 студентов. Никто не выходит на первом этаже, какова вероятность того, что лифт не остановится хотя бы на одном этаже.

$$P(A) = 1 - \frac{8!}{8^8}$$

Задача 16

Какова вероятность, что 10 монет выпадут на одинаковую сторону:

$$P(A) = \frac{2}{2^{10}} = \frac{1}{2^9}$$

Задача 17

Коробка с 100 шариками, каждый имеет номер от 1 до 100. Какова вероятность вытащить все шары и получить возрастающую последовательность, если:

а) Не возвращать шары в коробку:

$$P(A) = \frac{1}{100!}$$

б) Возвращать шары в коробку:

$$P(A) = \frac{1}{100^{100}}$$

Семинар 13 сентября

Задача 1

Бросаем три шестигранных кубика, найти вероятность выпадения суммы 11 и 12.

$$|\Omega| = 6^3$$

Комбинаций	$\sum 11$	$\sum 12$	Комбинаций
6	5 - 4 - 2	5 - 5 - 2	3
3	5 - 3 - 3	6 - 5 - 1	6
3	4 - 4 - 3	6 - 4 - 2	6
3	5 - 5 - 1	6 - 3 - 3	3
6	6 - 3 - 2	5 - 4 - 3	6
6	6 - 4 - 1	4 - 4 - 4	1

$$P(A_{11}) = \frac{27}{6^3}, P(A_{12}) = \frac{25}{6^3}$$

Задача со * из ДЗ

Какова вероятность, что если взять 4 башмака из 10 пар, получишь пару.

$$P(\overline{A}) = \frac{20 \cdot 18 \cdot 16 \cdot 14}{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}$$

Задача 2

В девятиэтажном доме три человека садятся в лифт. Какова вероятность, что лифт остановится для высадки два раза?

$$P(A) = 1 - \frac{8+8 \cdot 7 \cdot 6}{8^3} = \frac{21}{64}$$

$$\frac{A_8^2 \cdot 3}{8^3} = \frac{21}{64}$$

Задача 3

Имеется 100 чисел. Из них вытаскивают 15 чисел и упорядочивают по возрастанию.

Какова вероятность, что 13 число в полученной последовательности равно

$$\frac{87 \cdot C_{86}^{12} \cdot C_{13}^2}{C_{100}^{15}}$$

Задача 4

Есть 10 вагонов. Какова вероятность, что два человека окажутся в одном вагоне/ в соседних?

В одном: $\frac{1}{10}$ (оба в один и тот же вагон, выбрать вагон можно 10 способами)

В соседних: $\frac{18}{100}$ (9 различных пар (1, 2), (2, 3), (3, 4) и т.д. и наоборот).

Геометрические вероятности

Задача 5

В квадрат со стороной R вписан круг, какова вероятность, что брошенная в квадрат точка попадёт в круг.

$$P(A) = \frac{\frac{\pi R^2}{4}}{R^2} = \frac{\pi}{4}$$

Задача 6

На интервале $[0, 1]$ выбираются точки x, y , найти вероятность события:

$$x^2 \leq y \leq \sin \frac{\pi x}{2}$$

$$P(A) = \frac{\int_0^1 \sin \frac{\pi x}{2} - x^2 dx}{1} = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \sin \frac{\pi x}{2} d\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{3} = \frac{2}{\pi} \left(-\cos \frac{\pi x}{2} \right) \Big|_0^1 - \frac{1}{3} =$$

$$= \frac{2}{\pi} - \frac{1}{3}$$

Условные вероятности

Задача 7

В коробке есть n белых и m чёрных шаров. A = первый шар белый, B = последний шар чёрный

$$P(A) = \frac{n}{m+n}, \quad P(B) = \frac{m}{m+n}$$

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{n}{m+n} \cdot \frac{m}{m+n-1}}{\frac{m}{n+m}} = \frac{n}{n+m-1}$$

Задача 8

Два игрока подбрасывают кость по одному разу, побеждает тот, кто выбил больше. A = победил первый, B = победитель определён.

1. $P(A) = \frac{15}{36}$
2. $P(B) = \frac{30}{36}$
3. $P(A/B) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$
4. $P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{15}{36}}{\frac{30}{36}} = \frac{1}{2}$, так как $A \subseteq B$

События A , B зависимы, так как $P(A/B) \neq P(A)$.

Задача 9

2 партии по 100 деталей, в каждой партии 10 бракованных деталей.

A = {деталь из первой партии}.

B = {деталь бракованная}.

$$P(A) = \frac{100}{200} = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{20}{200} = \frac{1}{10}$$

$$P(AB) = \frac{10}{200} = \frac{1}{20} \Rightarrow P(AB) = P(A) \cdot P(B), \text{ события независимы}$$

Задача 10

Почти как задача 9, но во второй 20 бракованных:

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{3}{20}$$

$$P(AB) = \frac{1}{20} \Rightarrow P(A)P(B) \neq P(AB), \text{ события зависимы.}$$

Формула сложения вероятностей

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i \leq j} P(A_i A_j) + \sum_{i \leq j \leq k} P(A_i A_j A_k) + \dots$$

$$\dots + (-1)^{n+1} (A_1 \dots A_n)$$

$$P(A_1 A_2) = P(A_1) P(A_2/A_1)$$

Задача 11

В урне 10 белых, 8 синих, 2 красных шара. Одновременно извлекают 3 шара, какова вероятность, что вытащенные шары одного цвета.

$$A = \{\text{вытащили (вовремя) 3 белых шара}\} \quad B = \{\text{вытащили 3 синих шара}\}$$

$$A_i = \{\text{i-й шар белый}\} \quad B_i = \{\text{i-й шар синий}\}$$

Так как A, B несовместны:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) = P(A_1 A_2 A_3) + P(B_1 B_2 B_3) =$$

$$= P(A_1) P(A_2/A_1) P(A_3/A_1 A_2) + P(B_1) P(B_2/B_1) P(B_3/B_1 B_2) =$$

$$= \left(\frac{10}{20} \cdot \frac{9}{19} \cdot \frac{8}{18}\right) + \left(\frac{8}{20} \cdot \frac{7}{19} \cdot \frac{6}{18}\right)$$

Семинар 20 сентября.

Задача 46 из дз

Дано: $P(A/B) = 0.05$, $P(A\bar{B}) = 0.079$, $P(\bar{A}B) = 0.0089$, $P(\bar{A}\bar{B}) = 0.782$

Хотим: $P(B/A)$

$$P(B/A) = \frac{P(BA)}{P(A)}$$

$$P(A) = P(AB + A\bar{B}) = P(AB) + P(A\bar{B}) - \underbrace{P(AB \cap A\bar{B})}_{=0} =$$

$$= 0.05 + 0.079 = 0.129 \Rightarrow P(B/A) = \frac{0.05}{0.129} \approx 0.3875$$

Ответ: 39%

Задача

5 мальчиков и 10 девочек, какова вероятность, что при разбиении их на 5 равных групп получим только группы вида ЖМЖ.

A_i — {в i группе 2 девочки и 1 мальчик.}

$$P(A_1 A_2 A_3 A_4 A_5) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 A_2) \cdot P(A_4/A_1 A_2 A_3) \cdot P(A_5/A_1 A_2 A_3 A_4) =$$

$$= \frac{C_{10}^2 C_5^1}{C_{15}^3} \cdot \frac{C_8^2 C_4^1}{C_{12}^3} \cdot \frac{C_6^2 C_3^1}{C_9^3} \cdot \frac{C_4^2 C_2^1}{C_6^3} \cdot \frac{C_2^2 C_1^1}{C_3^3} \cdot 1$$

Задача

Система состоит из последовательно соединённых резисторов.

$A_i = \{\text{i-й элемент системы работает}\}, i = \overline{1, n}$

$A = \{\text{Система работает}\}$

$A = A_1 \cdots A_n$

$$P(A) = P\left(\prod_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n p_i$$

Если система состоит из параллельно соединённых резисторов, тогда:

$$P(A) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2) = p_1 + p_2 - p_1 p_2$$

Задача

Обращается русалочка к трём ведьмам, каждая даёт ей сосуд с зельем.

Вероятность отсутствия эффекта:

1. 0.5

2. 0.4

3. 0.3

Она пьёт их по очереди и останавливается, если какое-то сработало.

Какова вероятность успеха (хотя бы одно зелье сработало).

$A_i = \{\text{подействует i-е зелье}\}$

$$\text{Пусть ни одно не сработало: } P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) = \\ = 1 - 0.5 \cdot 0.6 \cdot 0.7 = 0.79$$

$$\text{Другой способ решения: } P(A) = P(A_1) + P(\bar{A}_1)P(A_2) + P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(A_3) = \\ 0.5 + 0.5 \cdot 0.4 + 0.5 \cdot 0.6 \cdot 0.3 = 0.79$$

$$\text{Ещё один: } P(A) = P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 A_2) - \\ - P(A_1 A_3) - P(A_2 A_3) + P(A_1 A_2 A_3) = 0.79$$

Задача

Теннисист участвует в турнире, у него есть соперник А и соперник В, известно, что соперник А играет лучше соперника В. Теннисист хочет выиграть два матча подряд, какой порядок ему лучше выбрать?

$A - B - A$ или $B - A - B$?

$P(A) < P(B)$ — вероятность победы.

У него есть варианты: выиграть первые две, проиграть первую и выиграть оставшиеся.

В первом случае: $(1) = P(A)P(B) + (1 - P(A))P(B)P(A)$

Во втором: $(2) = P(B)P(A) + (1 - P(B))P(A)P(B)$

$$(1) - (2) = P(A)P(B)(1 - P(A) - 1 + P(B)) = P(A)P(B)(P(B) - P(A)) > 0 \Rightarrow (1) > (2)$$

В первом случае вероятность победы больше.

Задача

Два равносильных шахматиста играют между собой матчи, ничьих быть не может. Какое событие более вероятно:

$$C_4^3 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{4!}{3!1} \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$$

$$C_8^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{7}{32}$$

Вероятность выиграть 3 из 4 больше.

Задача

В круг радиуса r вписан квадрат. В круг кидают 4 точки, какова вероятность попадания ровно 3 точек в квадрат.

$$p = \frac{2r^2}{\pi r^2} = \frac{2}{\pi} - \text{вероятность попасть в квадрат.}$$

$$q = 1 - p = \frac{1}{\pi}$$

$$C_4^3 \cdot \left(\frac{2}{\pi}\right)^3 \cdot \frac{1}{\pi} = \frac{32(\pi-2)}{\pi^4}$$

Задача

Стрелок попадает в 10 с вероятностью 0.7, а в 9 с вероятностью 0.3. Какова вероятность получения за 3 выстрела не менее 29 очков.

Нас устраивают события:

$$A_{29} = \{\text{Набрал 29 очков}\}, A_{30} = \{\text{Набрал 30 очков}\}$$

$$P(A_{29} + A_{30}) = P(A_{29}) + P(A_{30}) = C_3^2(0.7)^2 \cdot 0.3 + (0.7)^3 = 0,784$$

Задача

7 писем. 0.6 - письмо отправлено Онегину, 0.4 - письмо отправлено Ленскому.

$$A_i = \{\text{Ровно } i \text{ писем отправлено Онегину}\}. \quad p(A) = P(A_7) + P(A_6) + P(A_5) = (0.6)^7 + 7(0.6)^6 \cdot 0.4 + \frac{7}{2}0.6^5 \cdot 0.4^2$$

Задача

Стрелок попадает в мишень с вероятностью 0,7. Ему позволяют стрелять до трёх промахов. Какова вероятность того, что он сделает ровно 8

выстрелов.

$C_7^2(0, 7)^5 \cdot 0, 3^2 \cdot 0, 3$ (Два промаха можно как-то расположить в первых 7 выстрелах, последний всегда восьмой).

Задача

Всего 5 испытаний, вероятность искажения результата - 0,1. А = ни одного искажённого. Б = не менее двух искажённых. В = Искажённых больше, чем неискажённых.

$$P(A) = 0,9^5, \quad P(B) = 1 - 0,9^5 - (C_5^1 \cdot 0,1 \cdot 0,9^4),$$

$$P(B) = P(B) - C_5^2 \cdot 0,1^2 \cdot 0,9^3$$

Задача

Гипотезы при подбрасывании двух кубиков:

$$\begin{cases} H_1 = \{\text{На 1-м кубике выпала "1"}\} \\ \dots \\ H_6 = \{\text{На 1-м кубике выпала "6"}\} \\ H_1 = \{1 - 1\} \\ \dots \\ H_{36} = \{6 - 6\} \\ H_1 = \{\text{На 1-м} - \text{чётное}\} \\ H_2 = \{\text{На 1-м} - \text{нечётное}\} \end{cases}$$

Семинар 27 сентября

Формула полной вероятности

H_1, \dots, H_n — полная группа событий. $i \neq j \Rightarrow H_i \cdot H_j = \emptyset$, $H_1 + \dots + H_n = \Omega$

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i)$$

$$P(H_k/A) = \frac{P(H_k)P(A/H_k)}{\sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i)}$$

Задача

Какова вероятность успешного переливания крови от одного человека к другому? Произошло успешное переливание, какова вероятность, что кровь переливали человеку с 1 группой? С 4 группой?

Медицинская справка:

Первой группе крови можно переливать только первую

Второй — вторую и первую

Третьей — первую и третью

Четвёртой — любую.

$A = \{\text{Успешное переливание}\}$

$H_i = \{\text{У больного } i \text{ группа}\}, i = \overline{1, 4}, \text{ по условию: } P(H_1) = 0.33,$

$P(H_2) = 0.36, P(H_3) = 0.23, P(H_4) = 0.08$

$P(A/H_1) = 0.33, P(A/H_2) = 0.69, P(A/H_3) = 0.56, P(A/H_4) = 1$

$$P(A) = \sum_{i=1}^4 P(A/H_i)P(H_i) = 0.33^2 + 0.36 \cdot 0.69 + 0.23 \cdot 0.56 + 0.08 = 0.5661$$

$$P(H_1/A) = \frac{P(A/H_1)P(H_1)}{P(A)} = \frac{0.33^2}{0.5661} \approx 0.19237$$

$$P(H_4/A) = \frac{P(A/H_4)P(H_4)}{P(A)} = \frac{0.08}{0.5661} \approx 0.14$$

Задача

Две корзинки, в каждой по 10 бутылок, в первой корзине 2 отравленные, во второй — 3, по пути одна бутылка из первой корзины разбилась. Какова вероятность не отравиться при распитии одной бутылки?

$A = \{\text{распитие благополучно}\}$

$H_1 = \{\text{бутылка из 1 корзины}\}, P(H_1) = \frac{1}{2}$

$H_2 = \{\text{бутылка из 2 корзины}\}, P(H_2) = \frac{1}{2}$

Так как выбираем корзину, а не бутылку из неё.

$P(A/H_1) = 0.8, P(A/H_2) = 0.7$. Вспоминаем задачу про выученные билеты (поэтмоу вероятность отравиться бутылкой из первой корзины не поменяется).

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) = \frac{8}{20} + \frac{7}{20} = \frac{3}{4}$$

Задача

По каналу передаётся два вида сигналов x, y , при этом y передаётся в три раза чаще x . x искажается в 10% случаев, а y — в 20%. По каналу передан какой-то сигнал, какова вероятность, что будет получен сигнал x ? Какова вероятность, что при получении сигнала x он и был передан?

$H_1 = \{\text{Передавали } x\}, P(H_1) = \frac{1}{4}$

$H_2 = \{\text{Передавали } y\}, P(H_2) = \frac{3}{4}$

$$A = \{\text{Зафиксирован } x\},$$

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) = \frac{1}{4}0.9 + \frac{3}{4}0.2 = \frac{3}{8}$$

$$B = H_1/A \Rightarrow P(B) = P(H_1/A) = \frac{P(A/H_1)P(H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{9}{40}}{\frac{3}{8}} = \frac{3}{5} = 0.6$$

Задача

Три стрелка стреляют по мишени. Они соответственно попадают в мишень с вероятностью:

$$1 \text{ стрелок } \frac{4}{5}$$

$$2 \text{ стрелок } \frac{3}{4}$$

$$3 \text{ стрелок } \frac{2}{3}$$

Все трое выстрелили одновременно, в мишень попали два раза. Какое событие более вероятно: промах третьего стрелка или его попадание?

$$A = \{\text{попали ровно 2 раза}\}$$

$$H_1 = \{\text{третий попал}\}, P(H_1) = \frac{2}{3}$$

$$H_2 = \{\text{третий промахнулся}\}, P(H_2) = \frac{1}{3}$$

$$P(A/H_1) = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{7}{20}$$

$$P(A/H_2) = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

$$P(A) = P(A/H_1)P(H_1) + P(A/H_2)P(H_2) = \frac{7}{20} \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{30} + \frac{1}{5} = \frac{13}{30}$$

$$P(H_1/A) = \frac{P(A/H_1)P(H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{7}{20} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{13}{30}} = \frac{7}{30} \cdot \frac{30}{13} = \frac{7}{13}$$

Задача

Было две урны. В первой 5 белых шаров и 1 чёрный, во второй — 3 белых и 3 чёрных.

Из первой урны взяли два шара, из второй один и поместили их в третью урну. Какова вероятность того, что наугад вытасченный из третьей урны шар окажется белым?

$$A = \{\text{Вытащили белый шар из третьей урны}\}$$

$$H_1 = \{\text{Вытащенный шар был в первой урне}\}$$

$$H_2 = \{\text{Вытащенный шар был во второй урне}\}$$

$$P(A/H_1) = \frac{5}{6}$$

$$P(A/H_2) = \frac{1}{2}$$

$$P(H_1) = \frac{2}{3}$$

$$P(H_2) = \frac{1}{3}$$

$$P(A) = P(A/H_1)P(H_1) + P(A/H_2)P(H_2) = \frac{10}{18} + \frac{1}{6} = \frac{13}{18}$$

Семинар 4 октября

Решаем какие-то задачки из учебника.

Задача

$$\frac{\xi}{p} \begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & 0 & 1 \\ \hline p_1 & p_2 & p_3 \\ \hline \end{array}, E\xi = 0, D\xi = 0.5. \text{ Найти } p_1, p_2, p_3.$$

$$\frac{\xi}{p} \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 1 \\ \hline p_2 & p_1 + p_3 \\ \hline \end{array}, D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = E\xi^2 = p_1 + p_3$$

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\ p_1 = p_3 \\ p_1 + p_3 = 0.5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 = 0.25 \\ p_2 = 0.5 \\ p_3 = 0.25 \end{cases}$$

Задача

a.

$$\frac{\xi}{p} \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline -0,5 & 0 & 0,5 & 1 & 1,5 \\ \hline 0,1 & 0,4 & 0,1 & 0,3 & 0,1 \\ \hline \end{array}$$

$$Y = 10x - 1 \Rightarrow \frac{Y}{p} \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline -6 & -1 & 4 & 9 & 14 \\ \hline 0,1 & 0,4 & 0,1 & 0,3 & 0,1 \\ \hline \end{array}$$

$$EY = \sum_{i=1}^n y_i p_i = 3,5$$

$$DY = 3,5^2$$

b.

$$\frac{\xi}{p} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline -0,25 & 0 & -1 & -2,25 \\ \hline 0,2 & 0,4 & 0,3 & 0,1 \\ \hline \end{array}$$

$$Y = -x^2 \Rightarrow EY = -0,53$$

$$DY = 0,25^2 \cdot 0,2 + 0,3 + 2,25^2 \cdot 0,1 - (0,53)^2$$

Задача

$$\frac{\xi}{p} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 0 \\ \hline \frac{28}{45} & \frac{16}{45} & \frac{1}{45} \\ \hline \end{array}$$

$$P(\xi = 2) = \frac{C_8^2}{C_{10}^2} = \frac{7 \cdot 8}{9 \cdot 10} = \frac{28}{45}$$

$$P(\xi = 1) = \frac{2 \cdot 8}{10 \cdot 9} \cdot 2 = \frac{16}{45}$$

$$P(\xi = 0) = \frac{1}{C_{10}^2} = \frac{1}{45}$$

$$E\xi = \frac{2 \cdot 28 + 16}{45} = \frac{72}{45} = \frac{8}{5}$$

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{128}{45} - \frac{64}{25}$$

Задача

В связке есть ключи, человек пробует все ключи, пока не подберёт нужный. Сколько в среднем ключей он переберёт?

ξ — количество попыток. Показана вероятность успеха.

ξ	1	2	...	10
p	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$...	$\frac{1}{10}$

$$E\xi = \frac{55}{10} = 5,5$$

Задача

Есть 4 стула, в одном из них драгоценности. Человек ломает стулья, пока не найдёт драгоценности. Сколько стульев в среднем будет сломано?

ξ — количество сломанных стульев.

ξ	1	2	3	4
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4} \frac{1}{3}$	$\frac{3}{4} \frac{2}{3} \frac{1}{2}$	$\frac{3}{4} \frac{2}{3} \frac{1}{2} 1$

 \Rightarrow

ξ	1	2	3	4
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$$E\xi = \frac{1}{4}(1 + 2 + 3 + 4) = \frac{10}{4}$$

$$D\xi = E(xi^2) - 2,5^2 = \frac{30}{4} - 6,25 = \frac{20}{16} = \frac{5}{4}$$

Задача

$$P(\xi = k) = \frac{c}{k(k+1)}$$

$$c-?, P(\xi \leq 10)-?, P(10 \leq \xi \leq 20)-?$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c}{k(k+1)} = 1 \Rightarrow c \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1$$

$$c \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{k} \right) = 1 \Rightarrow c \cdot 1 = 1 \Rightarrow c = 1$$

$$P(\xi = k) = \frac{1}{k(k+1)}$$

$$P(\xi \leq 10) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{11} = \frac{10}{11}$$

$$P(10 \leq \xi \leq 20) = P(\xi \leq 20) - p(\xi \leq 9) = \left(1 - \frac{1}{21} \right) - \left(1 - \frac{1}{10} \right) = \frac{11}{210}$$

$$E\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} - \text{расходится.}$$

$$E\xi = +\infty$$

11 октября

Разбор задач из домашнего задания. $F_{\xi}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x}, & x \geq 1 \\ 0, & x < 1 \end{cases}$

Найти а: $P(\xi > a) = \frac{1}{3}$

$$\begin{aligned}
P(\xi > a) &= 1 - F_\xi(a) = \frac{1}{3} \\
F_\xi(x) &= \frac{2}{3} \\
\begin{cases} 1 - \frac{1}{x} = \frac{2}{3} \\ x \geq 1 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} = \frac{1}{x} \\ x \geq 1 \end{cases} \\
x = 3 &\Rightarrow a = 3
\end{aligned}$$

Распределения

Распределение Бернулли: $\xi \sim \text{Ber}(p)$

$$\begin{array}{c|c|c}
\xi & 0 & 1 \\
\hline
p & 1-p & p
\end{array}, \quad E\xi = p, \quad \mathcal{D}\xi = pq$$

Биномиальное распределение.

Распределение Пуассона.

Геометрическое распределение.

Задача

С вероятностью $\frac{5}{6}$ яблоко падает недалеко от яблони, всего 10 яблок.

Случайная величина ξ — количество яблок, которые упали недалеко от яблони.

$$\xi \sim \text{Bi}(10, \frac{5}{6})$$

$$E\xi = \frac{25}{3}, \quad \mathcal{D}\xi = \frac{25}{18}.$$

Задача

$$\xi \sim \text{Bi}(4, 0.7)$$

$$E\xi = 2,8$$

$$\mathcal{D}\xi = 0,24$$

$$Z_{\frac{8}{1000}} = \min(x, F(x) \geq \frac{8}{1000})$$

$$F(0) = \frac{81}{10000} > \frac{8}{1000} \Rightarrow Z_{\frac{8}{1000}} = 0$$

Задача

Три стрелка, вероятность попадания:

1. 0,7

2. 0,6

3. 0,5

Каждый выстрелил по одному разу, какое среднее количество попаданий?

$$\xi_1 \sim \text{Bi}(1, 0.7), \xi_2 \sim \text{Bi}(1, 0.6), \xi_3 \sim \text{Bi}(1, 0.5)$$

$$E\xi = E(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) = E\xi_1 + E\xi_2 + E\xi_3 = 1.8$$

Так как события независимы, их ковариация равна 0, поэтому:

$$\mathcal{D}\xi = \mathcal{D}\xi_1 + \mathcal{D}\xi_2 + \mathcal{D}\xi_3 = 0,7 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,4 + 0,5 \cdot 0,5 = 0,7$$

Задача

Известно, что бутерброд падает маслом вниз с вероятностью 0,999. Некий экспериментатор уронил бутерброд 1000 раз. Какова вероятность, что бутерброд упадёт маслом вверх более 2 раз? ξ — маслом вверх.

$$\xi \sim \text{Bi}(1000, 0.001)$$

Хотелось бы аппроксимировать (аппроксимировать распределением Пуассона) это распределение.

$$\text{После аппроксимации: } \Delta = \left| C_n^k p^k q^{n-k} - \frac{e^{-np} (np)^k}{k!} \right| \leq np^2$$

$$\Delta = 0.001. \text{ Можем аппроксимировать: } \xi \sim \Pi(1), \lambda = np = 1$$

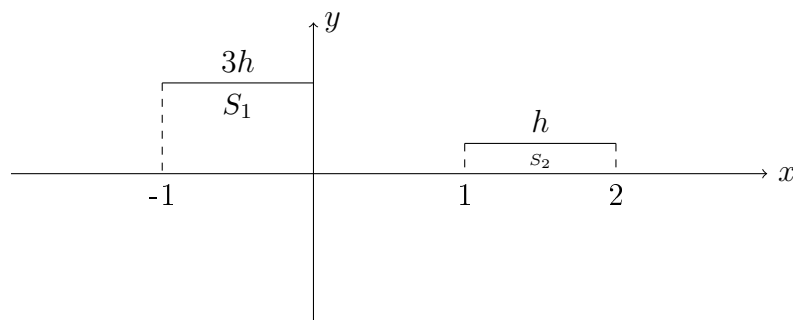
$$P(\xi > 2) = 1 - P(\xi \leq 2) = 1 - P(\xi = 0) - P(\xi = 1) - P(\xi = 2) = \\ = 1 - \frac{e^{-1}1^0}{0!} - \frac{e^{-1}1^1}{1!} - \frac{e^{-1}1^2}{2!} = 1 - \frac{5}{2e}$$

Задача

$\xi \sim G(0, 2) \Rightarrow E\xi = 5$. Наиболее вероятное значение: $P(\xi = k) = q^{k-1}p \leq p = 0,2 \Rightarrow k = 1$

Семинар 1 ноября

Задача 34 страница 93.



$$S = S_1 + S_2 = 3h + h = 4h = 1 \Rightarrow h = \frac{1}{4}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -1) \\ \int_{-\infty}^{-1} 0 dt + \int_{-1}^x \frac{3}{4} dt = \frac{3}{4}(x+1), & x \in [-1, 0] \\ \int_{-\infty}^{-1} 0 dt + \int_{-1}^1 \frac{3}{4} dt + \int_0^x 0 dt = \frac{3}{4}, & x \in (0, 1) \\ \int_{-\infty}^{-1} 0 dt + \int_{-1}^1 \frac{3}{4} dt + \int_0^1 0 dt + \int_1^x \frac{1}{4} dt = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}(x-1), & x \in [1, 2] \\ 1, & x \in (2, +\infty) \end{cases}$$

$M[\square]$ — матожидание.

$$M[(2-x)(3-x)] = M[6-5x+x^2] = M[6] - M[5x] + M[x^2] =$$

$$= 6 - 5 \left(\int_{-1}^0 x \frac{3}{4} dx + \int_1^2 x \cdot \frac{1}{4} dx \right) + \left(\int_{-1}^0 x^2 \cdot \frac{3}{4} dx + \int_1^2 x^2 \cdot \frac{1}{4} dx \right)$$

$$\mathcal{D}[2-3x] = 9\mathcal{D}[x] = 3(M[x^2] - M^2[x])$$

Распределение Гаусса

$$\xi \sim N(m, \sigma^2)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\Phi_0(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$P(\alpha < \xi < \beta) = \Phi_0\left(\frac{\beta-m}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{\alpha-m}{\sigma}\right)$$

Находим значения Φ_0 через таблицу функции Лапласа.

Если $x > 5$, то $\Phi_0(x) = 0.5$

Задача

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{72\pi}} e^{-\frac{(x+3)^2}{72}} \Rightarrow \xi \sim N(-3, 36)$$

$$P(0 < \xi < 12) = \Phi_0\left(\frac{12-12}{3}\right) - \Phi_0\left(\frac{0-12}{3}\right) = \Phi_0(0) - \Phi_0(-4) = 0 + \Phi_0(4) =$$

$$= 0.4999683$$

$$\text{Второй начальный момент } \mu_2 = E\xi^2 = \mathcal{D}\xi + (E\xi)^2 = 9 + 12^2 = 153$$

$$\mathcal{D}(5-3\xi) = 9\mathcal{D}(\xi) = 9 \cdot 9$$

Задача 51 стр 94

По условию $\xi \sim N(0, 0.4^2)$. Нужно посчитать $P(-0.7 < \xi < 0.7) = \Phi_0\left(\frac{0.7}{0.4}\right) - \Phi_0\left(\frac{-0.7}{0.4}\right) = 2\Phi_0\left(\frac{7}{4}\right) \approx 2 \cdot 0.46 = 0.92$

В общем случае: $P(|\xi - E\xi| < \delta) = 2\Phi_0\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$

Пусть η — количество годных шариков из 50 изготовленных. Заметим, что $\eta \sim Bi(50, 0.92) \Rightarrow E\eta = n \cdot p = 50 \cdot 0.92 = 46$

Задача

$\xi \sim N(0, 1)$

$Z_{0.9} - ? \Rightarrow \Phi_0(Z_{0.9}) = 0.9 - 0.5 = 0.4$ (так как интегрировать надо от $-\infty$,

а не от 0, а $\int_{-\infty}^0 \dots = \frac{1}{2}$), тогда $Z_{0.9} \approx 1.29$.

Отсюда можно посчитать $Z_{0.1} = -Z_{0.9} = -1.29$

Интересный факт $P(-1.65 < \xi < 1.65) = 0.9$. И ещё один:

$$P(|\xi| < 1.96) = 0.95$$

1.96 является знаменитой точкой, использующейся в подсчёте доверительных интервалов (случайная величина попадает в него с вероятностью 95 процентов, немало).

Теория

$\xi \sim f_\xi(x)$, $\eta = \phi(\xi)$, $f_\eta(y) - ?$

Пусть $\varphi(x)$ — монотонная функция. $y = \varphi(x)$, $x = \varphi^{-1}(y)$

$$f_\eta(y) = f_\xi(\varphi^{-1}(y)) \left| (\varphi^{-1}(y))' \right|$$

Разобьём φ на отрезки монотонности (пусть их k штук):

$$f_\eta(y) = \sum_{i=1}^k f_\xi(\varphi_i^{-1}(y)) \left| (\varphi_i^{-1}(y))' \right|$$

Задача

$\xi \sim N(0, \sigma^2)$

a. $\eta = \xi^3$, $f_\eta(y) - ?$, $f_\eta(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\left(y^{\frac{1}{3}}\right)^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{3} \cdot y^{-\frac{2}{3}}$

b. $\eta = \xi^2$. Разбиваем на интервалы монотонности:

$$\varphi_1^{-1}(y) = -\sqrt{y}, \varphi_2^{-1}(y) = \sqrt{y} \Rightarrow (\varphi_1^{-1})' = -\frac{1}{2}\sqrt{y} = -(\varphi_2^{-1})'$$

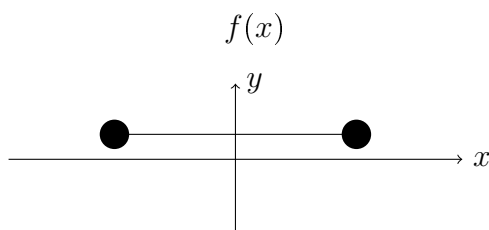
$$f_{\eta}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y}{2\sigma^2}} \cdot \left| \frac{1}{2\sqrt{y}} \right| \cdot 2, \quad x > 0$$

При $x \leq 0 : f_{\eta}(y) = 0$

Семинар 8 ноября

Разбор домашнего задания.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$



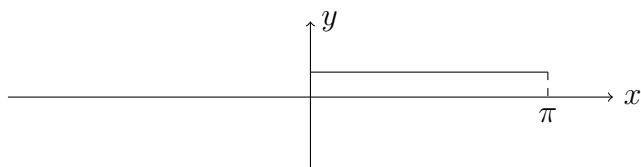
$$\eta = \sin \xi = \varphi(\xi)$$

$$\varphi^{-1}(y) = \arcsin y$$

$$(\varphi^{-1}(y))' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$f_{\eta}(y) = f_{\xi}(\varphi^{-1}(y)) (\varphi^{-1}(y))' = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, & y \in (-1, 1) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$f(x)$$



$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & x \in [0, \pi] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\eta = \sin \xi$$

$$\varphi_1^{-1}(y) = \arcsin(y)$$

$$\varphi_2^{-1}(y) = \pi - \arcsin(y)$$

$$(\varphi_1^{-1}(y))' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$(\varphi_2^{-1}(y))' = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$f_{\eta}(y) = \sum_{i=1}^2 f_{\xi} \varphi_i^{-1}(y) \left| (\varphi_i^{-1}(y))' \right| = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, & y \in (0, 1) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Многомерные случайные величины

ξ_1, ξ_2	y_1, \dots	y_j	\dots, y_k
x_1	\vdots	\vdots	
\vdots	\vdots	\vdots	
x_i	\dots	p_{ij}	
\vdots			
x_m			

$$p_{ij} = p(\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j)$$

$$\sum_i \sum_j p_{ij} = 1$$

$$p_{i\bullet} = \sum_{j=1}^m p_{ij}, \quad p_{\bullet j} = \sum_{i=1}^k p_{ij}$$

$$\text{cov}(\xi_1, \xi_2) = E(\overset{\circ}{\xi_1} \overset{\circ}{\xi_2}) = E\xi_1\xi_2 - E\xi_1 E\xi_2$$

$$E\xi_1\xi_2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k x_i \cdot y_j \cdot p_{ij}$$

Задача

Построить одномерное распределение, определить матожидание и дисперсию двумерной случайной величины.

$\downarrow \xi, \eta \rightarrow$	-1	0	1
-2	0.1	0.2	0.3
2	0.1	0.1	?

За знаком ? стоит вероятность 0.2, так как сумма всех вероятностей в таблице должна равняться 1.

Построим табличку, где $p_{ij} = p_{i\bullet} \cdot p_{\bullet j}$

Строить не будем, так как уже $p_{11} \neq p_{1\bullet} \cdot p_{\bullet 1}$, так как $0.1 \neq 0.2 \cdot 0.6 = 0.12$

$$E\xi = -1.2 + 0.8 = -0.4$$

$$E\eta = -0.2 + 0.5 = 0.3$$

$\xi + \eta$	-3	-2	-1	1	2	3
	0.1	0.2	0.3	0.1	0.1	0.2

$$E(\xi + \eta) = -0.3 - 0.4 - 0.3 + 0.1 + 0.2 + 0.6 = -0.1 = E\xi + E\eta$$

$$\mathcal{D}\xi = 4 - 0.16 - 3.84$$

$$\mathcal{D}\eta = 0.2 + 0.5 - 0.09 = 0.61$$

$$\mathcal{D}(\eta + \xi) = 9 \cdot 0.3 + 4 \cdot 0.3 + 0.4 \cdot 1 - 0.01 = 2.7 + 1.2 + 0.4 - 0.01 = 4.29 =$$

$$E(\eta + \xi)^2 - (E(\eta + \xi))^2$$

$\xi \cdot \eta$	-2	0	2
	0.4	0.3	0.3

$$\text{cov}(\xi, \eta) = E(\xi\eta) - E\xi E\eta = -0.2 + 0.12 = -0.08$$

Проверим корректность

$$\mathcal{D}(\eta + \xi) = \xi + \eta + \text{cov}(\xi, \eta) = 0.61 + 3.84 - 2 \cdot 0.08 = 4.29$$

Верно.

Задача

Изучение таблички (доделать дома).

ξ — материальное положение.

η — уровень образования.

Определить зависимость и коэффициент корреляции.

η, ξ	1	2	3
1	0.083	0.035	0.001
2	0.31	0.375	0.026
3	0.04	0.116	0.014

Семинар 15 ноября

Задача 7 стр 132

Запишем условие в виде таблицы:

B \ A	1	0	sum
1	$\frac{25}{1000}$	$\frac{2}{100}$	$\frac{45}{1000}$
0	$\frac{5}{1000}$	$\frac{95}{100}$	$\frac{955}{1000}$
sum	$\frac{3}{100}$	$\frac{97}{100}$	1

Посчитаем вероятность произведения:

AB	1	0
P	$\frac{25}{1000}$	$\frac{975}{1000}$

$$\text{cov}(A, B) = E(AB) - EA \cdot EB = \frac{25}{1000} - \frac{3}{100} \cdot \frac{45}{1000} = \frac{2365}{10000}$$

Задача 1

я решал, перепису с фотографии.

Задача 2

Дано $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4} \sin x \sin y, & \text{если } 0 \leq x, y \leq \pi \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

$\xi = (\xi_1, \xi_2), P(\xi \in \mathcal{D})$

$$f_{\xi_1}(x) = \int_0^\pi \frac{1}{4} \sin x \sin y dy = \frac{1}{4} \sin x (-\cos y) \Big|_0^\pi = \frac{1}{2} \sin x, \quad x \in [0, \pi]$$

$$f_{\xi_2}(y) = \int_0^\pi \frac{1}{4} \sin x \sin y dx = \frac{1}{4} \sin y (-\cos x) \Big|_0^\pi = \frac{1}{2} \sin y, \quad y \in [0, \pi]$$

Заметим, что $f_\xi(x, y) = f_{\xi_1}(x)f_{\xi_2}(y)$, значит ξ_1, ξ_2 независимы $\Rightarrow \Rightarrow \text{cov}(\xi_1, \xi_2) = 0$

$$P(\xi \in \mathcal{D}) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{4} \sin x \sin y dy dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4} \sin x \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{3}-1}{8} \sin x dx = \frac{\sqrt{3}-1}{8} \left(\right)$$

Посчитаем вектор матожидания:

$$\begin{aligned} E\xi_1 = E\xi_2 &= \int_0^\pi \frac{x}{2} \sin x dx = \int_0^\pi \frac{x}{2} d \cos x = -\frac{x \cos x}{2} \Big|_0^\pi - \int_0^\pi -\frac{\cos x}{2} dx = \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{\sin x}{2} \Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Получается $E\xi = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

$K_\xi = \begin{pmatrix} ? & 0 \\ 0 & ? \end{pmatrix}$. Найдём дисперсии:

$$E\xi_1^2 = E\xi_2^2 = \int_0^\pi \frac{x^2}{2} \sin x dx = -\frac{x^2 \cos x}{2} \Big|_0^\pi + \int_0^\pi x \cos x dx = \frac{\pi^2}{2} - \int_0^\pi \sin x dx = \frac{\pi^2}{2} - 2$$

$$\mathcal{D}\xi_1 = \mathcal{D}\xi_2 = \frac{\pi^2}{2} - 2 - \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{4} - 2$$

$$\text{Итак, } K_\xi = \begin{pmatrix} \frac{\pi^2}{4} - 2 & 0 \\ 0 & \frac{\pi^2}{4} - 2 \end{pmatrix}$$