Консультация перед контрольной номер 3

Андрей Тищенко

2023/2024 гг.

Номер 1 Будет ли подгурппой

а. Объединение подгрупп?

б. Пересечение подгрупп?

Критерий подгруппы:

$$ab^{-1} \in H, \text{ при } a,\ b \in H$$

Проверим $\underset{\in a}{H_1} \cup \underset{\in b}{H_2}$:
Рассмотрим группу D_4, выделим две подгруппы:
H_1 - повороты (их 4)
$H_2 = \{p_0,\ S_1\}$ - одна симметриия + единичный элемент. $H_1 \cup H_2 = \{p_0,\ p_{\frac{\pi}{2}},\ p_\pi,\ p_{\frac{3\pi}{2}},\ S_1\}$ не является подгруппой, так как нет замкнутости по умножению. Например взяли симметрию (24), тогда: $S_1 \cdot p_\pi = (24)(13)(24) = (13)$ - вторая симметрия, которой нет в объединении.
Проверим $H_1 \cap H_2$
$\left.\begin{matrix} ab^{-1} \in H_1 \\ ab^{-1} \in H_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow ab^{-1} \in H_1 \cap H_2 \Rightarrow$ подгруппа

Идеал группы

$\mathbb{Z}_{20}$, подгруппы:
$20 = 2^2 \cdot 5^1 \Rightarrow (2+1)(1+1) = 6$ подгрупп
$|H_1| = 1,\ H_1 = \langle \overline{0} \rangle$
$|H_2| = 2,\ H_2 = \left\langle \overline{\frac{20}{2}} \right\rangle = \langle \overline{10} \rangle$

$|H_3| = 4,\ H_3 = \left\langle\overline{5}\right\rangle$
$|H_4| = 5,\ H_4 = \left\langle\overline{4}\right\rangle$
$|H_5| = 10,\ H_5 = \left\langle\overline{2}\right\rangle$
$|H_6| = 20,\ H_6 = \left\langle\overline{1}\right\rangle$
Мощности идут по делителям 20.
Какой порядок будет у $\left\langle\overline{18}\right\rangle$ в $\mathbb{Z}_{20}$
$\operatorname{ord} g^k = \dfrac{\operatorname{ord} g}{\gcd(\operatorname{ord} g),\ k},$
Для циклической группы $\langle g\rangle$, $\operatorname{ord} g = |\langle g\rangle|$
$\operatorname{ord} \overline{18} = \dfrac{20}{(18,\ 20)} = 10$

Номер 2. В циклической группе $\langle a\rangle$ порядка 1000, рассмотрим следующие элементы: $a^{-250},\ a^{-251}, \dots,\ a^{-400} = a^{600}, \dots,\ a^{750}$. Указать среди них те, порядок которых равен 50

$$\operatorname{ord} g^k = \frac{1000}{(k,\ 1000)} = 50 \Rightarrow (k,\ 1000) = 20,\ k \in [600,\ 750]$$

$$\text{Пусть } l = \frac{k}{20} \Rightarrow (l,\ 50) = 1,\ l \in [30,\ 37] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} l = 31 \\ l = 33 \\ l = 37 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k_1 = 620 = -380 \\ k_2 = 660 = -340 \\ k_3 = 740 = -260 \end{array}\right.$$

Ответ: $a^{-260},\ a^{-340},\ a^{-380}$

Группы: $D_n,\ S_n,\ A_n,\ Q_8,\ V_4,\ Z_n$
$V_4 = \{1,\ a,\ b,\ ab\}$, $\operatorname{ord} a = \operatorname{ord} b = 2$ - группа Клейна.

Номер 3. Изоморфны ли группы:

а. $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{36}$ и $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{18}$?
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9 \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9$. Можно заменять на Декартвое произведение циклических групп, порядки которых в произведении дают порядок исходной группы и взаимнопросты между собой.

б. $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{36}$ и $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{24}$?
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9$ и $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_8$
Группа $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \ncong \mathbb{Z}_8$, так как слева максимальный порядок - 4, а справа - 8.

Номер 4. Сколько элементов порядка 2, 4, 6 в группе:

а. $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3$

б. $D_2(\mathbb{C})^* = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_1 & 0 \\ 0 & \mathbb{Z}_2 \end{pmatrix} \middle| \text{ где } \mathbb{Z}_i \text{ - корни 6 степени из } 1 \right\} \sim \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6$

Номер 5. $R = \mathbb{Z}_5[x]/\langle x^2+4x+1\rangle$ является ли полем? Сколько элементов? Представить в виде $\overline{f}$, где $\deg \overline{f} \leqslant 1$

$\overline{\dfrac{x}{x^3+x^2+2x+1}} = \overline{x} \cdot \overline{(x^3+x^2+2x+1)^{-1}}$

1. R - поле $\Leftrightarrow g(x) = x^2+4x+1$ - неприводимы в $\mathbb{Z}_5$

	g(x)
0	1
1	1
2	3
3	2
4	3

Значит $g(x)$ неприводим (нет нулей), значит R - поле $|R| = p^n = 5^2 = 25$

Элементы $R : \left\{\overline{ax+b} \middle| a,\ b \in \mathbb{Z}_5\right\}$

2. $\overline{x^2+4x+1+x} = \overline{x}$. Осуществим деление в столбик

$x^3+x^2+2x+1 = \underbrace{(x^2+4x+1)}_{g(x)}\underbrace{(x+2)}_{q_1(x)} + \underbrace{(3x+4)}_{r_1(x)}$

$x^2+4x+1 = (2x+2)(3x+4)+3$. Тогда $3 = \gcd(g,\ f) = (1+q_1q_2)g - fq_2$

$\overline{3} = \overline{f}(-\overline{q_2}) = \overline{f}(\overline{3x+3})| \cdot 2$

$\overline{1} = \overline{f}(\overline{x+1}) \Rightarrow \overline{f^{-1}} = \overline{x+1}$

$x \cdot f^{-1} = \overline{x}(\overline{x+1}) = \overline{x^2+x} = \overline{x^2+x} - g = \overline{x^2+x-x^2+4x-1} =$

$= \overline{2x+4} \leftarrow$ ответ.

Номер 6. $\langle 2x+6,\ x^2-9,\ x\rangle$

Консультация 24 апреля

$q(x) = (x_1+x_3)^2 - (x_2-x_3)^2$

$\operatorname{Rg} q(x) = 2,\ (1,\ 1) = (i_+,\ i_-)$ - сигнатура

$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_3 \\ 2_2 = x_2 - x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\det C \neq 0 \Rightarrow C$ невырожденное линейное преобразование

Матрица перехода от исходного базиса к базису, в котором квадратичная форма имеет канонический вид:

$$C^{-1} = C_{x \to y}$$

<u>Линейное отображение</u>

$A : V_1 \to V_2,\ e$ - базис в $V_1,\ f$ - базис в V_2
$e = \{e_1, \dots,\ e_n\},\ \dim V_1 = n$
$f = \{f_1, \dots,\ f_m\},\ \dim V_2 = m$
$A_{e\,f} = \begin{pmatrix} a_{1\,1} & \dots & a_{1\,n} \\ a_{2\,1} & \dots & a_{2\,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m\,1} & \dots & a_{m\,n} \end{pmatrix}_{m \times n}$
$A(e_1) = a_{1\,1}f_1 + a_{2\,1}f_2 + \dots + a_{m\,1}f_m$

Линейный оператор

Раскладываем по тому же базису:

$A_e = \begin{pmatrix} \\ -//- \\ \\ \end{pmatrix}_{n \times n} \qquad \begin{cases} A(e_1) = a_{1\,1}e_1 + \dots + a_{n\,1}e_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A(e_n) = a_{1\,n}e_1 + \dots + a_{n\,n}e_n \end{cases}$

Матрица перехода:

Линейное пространство V, есть 2 базиса $(e_1, \dots,\ e_n) = e,\ (e'_1, \dots,\ e'_n) = e'$

$$\begin{cases} e'_1 = t_{1\,1}e_1 + \dots + t_{n\,1}e_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e'_n = t_{1\,n}e_1 + \dots + t_{n\,n}e_n \end{cases}$$

Получается, что $e' = e \cdot T_{e \to e'}$. Пусть $x \in V$, x^e - его коордианты в e, $x^{e'}$ - его координаты в e'

$T_{e \to e'} = \begin{pmatrix} t_{1\,1} & \dots & t_{1\,n} \\ t_{2\,1} & \dots & t_{2\,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n\,1} & \dots & t_{n\,n} \end{pmatrix}_{n \times n},\ x^e = T_{e \to e'}x^{e'}$

$x_{n\times 1} = x_1e_1 + \dots + x_ne_n = e_{n\times n}x^e_{n\times 1}$
$x = e'x^{e'} = e \cdot T_{e\to e'}x^{e'} = e'x^{e'}$
Разложение по базису единственно:

$$ex^e = e'x^{e'} = eT_{e\to e'}x^{e'} \Rightarrow x^e = T_{e\to e'}x^{e'}$$

Задача: (из домашки)

$e_1 = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\end{pmatrix}^T,\ e_2 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\end{pmatrix}^T,\ e_3 = \begin{pmatrix}0 & 2 & 1\end{pmatrix}^T$
$A_e = \begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$
Найти значение линейного оператора A на векторе $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ в каноническом базисе.
$A(x)$, где известно x^S и A_e. $T_{S\to e} = \begin{pmatrix}e_1 & e_2 & e_3\end{pmatrix}$.
$A_S = T_{S\to e}A_eT_{e\to S} = TA_eT^{-1}$
Ответ: $A(x) = A_Sx^S$

Повторение:

$\ker\varphi = \{x \in V_1 \mid \varphi(x) = 0\} \subseteq V_1$
$\operatorname{Im}\varphi = \{y \in V_2 \mid \exists x \in V_1 : \varphi(x) = y\} \subseteq V_2$
Как искать?
$\varphi(x) = A \cdot x$ в некотором базисе.
$A_{m\times n} = (A_1, \dots,\ A_n)$ - как набор столбцов.
$\ker\varphi$ - множество решений ОСЛАУ $Ax = 0$
$\operatorname{Im}\varphi$ - такие $y:\ \exists x\ Ax = y$ - НСЛАУ
y - линейная комбинация столбцов $A_1, \dots,\ A_n \Rightarrow \operatorname{Im} = \mathcal{L}(A_1, \dots,\ A_n)$