Семинары по алгебре 4 модуль.

Андрей Тищенко

2023/2024 гг.

Семинар 4 апреля

Номер 1. $a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},\ a_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}, L_1 = \langle a_1,\ a_2,\ a_3 \rangle$

$b_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \end{pmatrix},\ b_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \end{pmatrix},\ b_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \end{pmatrix},\ L_2 = \langle b_1,\ b_2,\ b_3 \rangle$

Найти размерности и какие-нибудь базисы $L_1 + L_2$ и $L_1 \cap L_2$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \dim L_1 = 2$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \dim L_2 = 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim(L_1 + L_2) = 3 \Rightarrow$$

$\dim(L_1 \cap L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 + L_2) = 1$

Так как L_1 базис, через него выражается любой вектор, в том числе $\vec{X} = (x_1,\ x_2,\ x_3)$

Значит $\mathrm{Rg} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$

Аналогично для L_2:

$\mathrm{Rg} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 8x_1 - 5x_2 + x_3 = 0$

$L_1 \cap L_2 : \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 8x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3x_2 \\ x_2 = 5x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ - пример базиса объединения.

Номер 2. Доказать, что $\mathbb{R}^4$ является прямой суммой $L_1 = \langle a_1,\ a_2 \rangle$, $L_2 = \langle b_1,\ b_2 \rangle$ и разложить вектор $x = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 & -3 \end{pmatrix}^T$ в сумму проекций на эти подпространства, где:

$a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$b_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2)$

$\dim L_1 = \dim L_2 = 2$, так как есть БМ порядка 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\dim(L_1 + L_2) = 4 \Rightarrow \dim(L_1 \cap L_2) = 0 \Rightarrow L_1 + L_2$

$$x = x_1 + x_2 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{c|c} & 1 \\ E & 1 \\ & 0 \\ & -2 \end{array}\right)$$

$$x_1 = a_1 + a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in L_1 \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = -2b_2$$

$x = x_1 + x_2$ - ответ.

Номер 3. Доказать, что $M_n(\mathbb{R})$ есть прямая сумма подпространства всех симметрических матриц и L_2 всех кососимметрических матриц $(A^T = A)$

Утверждение: Сумма $L_1 + L_2$ прямая $\Leftrightarrow \forall x \in L_1 + L_2\ \exists!$ разложение $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in L_1,\ x_2 \in L_2$

Решение: Пусть $A = S+K$, где S - симметрическая матрица, K - кососимметрическая

$A^T = S^T + K^T = S - K \Rightarrow \begin{cases} S = \dfrac{A + A^T}{2} \\ K == \dfrac{A - A^T}{2} \end{cases}$ - единственное разложение

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Билинейные формы

Определение: в $V \times V \longrightarrow R$ называется билинейной формой, если $\begin{cases} b(\alpha x + \beta y,\ z) = \alpha b(x,\ z) + \beta b(y,\ z) \\ b(x,\ \alpha y + \beta z) = \alpha b(x,\ y) + \beta b(x,\ z) \end{cases}$, то есть линейность по каждому аргументу.

$b(x,\ y) = x_e^T B_e y_e$, переход к другому базису $(e \to e')$

$B' = C^T B C$

Номер 4. Я решал у доски, скиньте пж запись.

Номер 5. Найти $f(x,\ y)$, если $F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ - матрица билинейной формы f, $x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}^T,\ y = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}^T$

$$f(x,\ y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = -43$$

Номер 6. Найти матрицу билинейной формы в базисе e', если

$$\begin{cases} e_1' = e_1 - e_2 \\ e_2' = e_1 + e_3 \\ e_3' = e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$$

$$B_e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_{e'} = C^T B_e C = \begin{pmatrix} 0 & -6 & -9 \\ -2 & 20 & 30 \\ -3 & 30 & 45 \end{pmatrix} \text{ - ответ.}$$

Номер 7. $q(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3 - x_3^2$ - квадратичная форма
Построить ассоциированую (или полярную) симметричную билинейную форму

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} = B \Rightarrow$$

$\Rightarrow b(x,\ y) = x_1y_1 + x_1y_2 - 3x_1y_3 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + 2x_2y_3 - 3x_3y_1 + 2x_3y_2 -$
$- x_3y_3$ - ответ

$b(x,\ y) = \frac{1}{2}\big[q(x+y) - q(x) - q(y)\big]$

Пример: $q(x) = x_1x_2 + x_1x_3$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$q(x) = x^TAx,\ A' = C^TAC$

Критерий Сильвестра

Исследовать на положительную и отрицательную определённость при различных $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda & 3 \\ \lambda & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \Delta_1 = 2 > 0 \\ \Delta_2 = 4 - \lambda^2 = (2-\lambda)(2+\lambda) \\ \Delta_3 = \lambda^2 + 6\lambda - 16 < 0 \end{cases}$$

Ответ: не является положительно определённой и не является отрицательно определённой.

Семинар 10 апреля

1. Найти все значения параметра a, при которых квадратичная форма

   а. Положительно определена.

   б. Отрицательно определена.

$q(x,\ y,\ z) = x^2 + 4y^2 + 3z^2 + 2axy + (2+4a)yz$

$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 4 & 1+2a \\ 0 & 1+2a & 3 \end{pmatrix} \Delta_1 = 1 > 0$

$\Delta_2 = 4 - a^2 = (2-a)(2+a)$

$\Delta_3 = \det A = -7(a+1)(a - \frac{11}{7})$

Положительная определённость:

$\left.\begin{matrix} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 > 0 \\ \Delta_3 > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \in (-1,\ \frac{11}{7})$

Отрицательная определённость:

$\left.\begin{matrix} \Delta_1 < 0 \\ \Delta_2 > 0 \\ \Delta_3 < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \in \varnothing$

2. Исследовать квадратичную форму на положительную и отрицательную определённость в зависимости от параметра:
   $q(x) = (\lambda-1)x_1^2 + (2\lambda-2)x_1x_2 - 2\lambda x_1x_3 + 2\lambda x_2^2 - 2\lambda x_2x_3 + (\lambda-2)x_3^2$
   $A = \begin{pmatrix} \lambda-1 & \lambda-1 & -\lambda \\ \lambda-1 & 2\lambda & -\lambda \\ -\lambda & -\lambda & \lambda-2 \end{pmatrix}$
   $\left.\begin{matrix} \Delta_1 = \lambda - 1 \\ \Delta_2 = (\lambda-1)(2\lambda-(\lambda-1)) = \lambda^2 - 1 \\ \Delta_3 = -(\lambda+1)(\lambda - \frac{2}{3}) \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ положительной определённости нет. Отрицательная при $\lambda < -1$. (Может быть неправильно посчитал).

Метод Лагранжа

3. Найти нормальный вид и невырожденное линейное преобразование, приводящее к этому виду. Также опредеелить ранг и индексы инерции.
   $$q(x) = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$$
   Вынесем x_1:
   $$q(x) = \underline{x_1}^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + \underline{2x_1x_2} - \underline{4x_1x_3} =$$
   $x_1^2 + 2x_1(x_2-2x_3) - x_2^2 + 4x_2x_3 - 4x_3^2 + (x_2-2x_3)^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + (x_2-2x_3)^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 =$
   $= (x_1 + (x_2-2x_3))^2 + 4x_2^2 - 8x_3^2 + 4x_2x_3 = (x_1 + (x_2-2x_3))^2 + (2x_2+x_3)^2 - 9x_3^3 =$

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$$

Ранг равен 3, $i_+ = 2,\ i_- = 1$

$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - 2x_3 \\ y_2 = 2x_2 + x_3 \\ y_3 = 3x \end{cases} \qquad C_{y\to x} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ - матрица перехода.

4. Привести квадратичную форму к нормальному виду. Найти Rg, сигнатуру и матрицу перехода от старого базиса к новому.

$$q(x) = -2x_1x_3 - 2x_2x_3 + x_3^2$$

$$x_3^2 - 2x_3(x_1 + x_2) + (x_1 + x_2)^2 - (x_1 + x_2)^2$$

$$(x_3 - (x_1 + x_2))^2$$

$$X = C_{y\to x}Y$$

$$C_{y\to x} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{x\to x} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5. $q(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$

$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$

$$y_1^2 - y_2^2 + y_1y_3 - y_2y_3 + y_1y_3 + y_2y_3$$

$$(y_1 + y_3)^2 - y_2^2 - y_3^2$$

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + y_3 \\ z_2 = y_2 \\ z_3 = y_3 \end{cases} \Rightarrow z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$i_- = 2,\ i_+ = 1,\ \mathrm{Rg} = 3$$

$$\begin{cases} x = C_1 y \\ z = C_2 y \end{cases},\ y = C_2^{-1} z \Rightarrow x = C_1 y = C_1 C_2^{-1} z = C_3 z$$

$$C_3 = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}^{T} = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

6. Существует ли невырожденное линейное преобразование, переводящее квадратичную форму f в квадратичную форму g? Если да, то найти бы одно.

$$f(x) = -2x_1x_3 - 2x_2x_3 + x_3^2,\ g(y) = 4y_1^2 - 2y_1y_3$$

$f(x) = f(z) = z_1^2 - z_2^2$

$$\begin{cases} z_1 = -x_1 - x_2 + x_3 \\ z_2 = x_1 + x_2 \\ z_3 = x_1 \end{cases},\ z = C_1x, \quad C_1 = \begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$g(y) = 4y_1^2 - 2y_1y_3 = \left((2y_1)^2 + 2\cdot 2y_1\frac{1}{2}y_3 + \frac{1}{4}y_3^2\right) - \frac{1}{4}y_3^2 =$
$= (2y_1 + \frac{1}{2}y_3)^2 - (\frac{1}{2}y_3)^2$

$$\begin{cases} z_1 = 2y_1 + \frac{1}{2}y_3 \\ z_2 = \frac{1}{2}y_3 \\ z_3 = y_2 \end{cases},\ z = C_2y \Rightarrow C_2 = \begin{pmatrix}2 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

надо $x = C_3y$. Имеем $\begin{cases} z = C_1x \\ z = C_2y \end{cases} \Rightarrow x = C_1^{-1}z \Rightarrow$

$\Rightarrow (*)$ есть $x = C_1^{-1}C_2 \cdot y = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & \frac{1}{2}\\ 2 & 0 & 0\end{pmatrix} y \leftarrow$ матрица перехода.

Семинар 17 апреля.

$$T_{e\to e} = \{t_{i\,j}\} = \begin{cases} e_1' = t_{1\,1}e_1 + \cdots + t_{n\,1}e_n \\ \ldots \\ e_n' = t_{1\,n}e_1 + \cdots + t_{n\,n}e_n \end{cases}$$

Симметричный Гаусс

Задача 1. Привести $q(x)$ к нормальному виду, найти Rg, $(i_+,\ i_-)$, матричный переход от старого базиса к новому.

$q(x) = -2x_1x_3 - 2x_2x_3 + x_3^2$

1 способ. Метод Лагранжа (был на прошлом семинаре).

$q(x) = y_1^2 - y_2^2$

$$\begin{cases} y_1 = -x_1 - x_2 + x_3 \\ y_2 = x_1 + x_2 \\ y_3 = x_1 \end{cases} \Leftrightarrow y = Cx$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Третью строчку мы выбрали так, чтобы матрица C была невырождена.

$x^f = T_{f\to e}x^e$

Немного фактов с семинара: 1. $f = e \cdot T_{e\to f}$ - для матриц

2. $\begin{cases} x = e \cdot x^e \\ x = f \cdot x^f \end{cases}$

$C_{x\to y} = C^{-1}$ 2 способ. Симметричный Гаусс.

Матрица квадратичной формы $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Цель: привести A к диагональному виду

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) = q(y) = y_1^2 - y_2^2.$$ Правая матрица будет $C_{x\to y}$ - матрица перехода.

Важное замечание: мы можем применять операции к столбцам левой матрицы, не затрагивая правую.

Линейные операторы

Фиксируем базис $e = (e_1, \ldots,\ e_n)$ в V

$\varphi:\ V \to V$

1. $\forall x \in V$:

$$\big(\varphi(x)\big)^e = A_e x^e$$

2. Пусть $T_{e\to f}$ - матрица перехода к f
$A_f = T^{-1}A_eT = T_{f\to e}A_eT_{e\to f}$
3. $\dim\ker\varphi + \dim\operatorname{Im}\varphi = \dim V$

Задача 2. Найти размерности и базисы ker и Im линейного оператора, задаваемого матрицей A в некотором базисе $\mathbb{R}^4$.
$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\operatorname{Rg} A = \dim\operatorname{Im}\varphi$
$\dim\ker\varphi = n - r = 2$

Задача 3. Доказать, что поворот плоскости на угол α - линейный оператор в $V_2 \cong \mathbb{R}^2$ найти его матрицу в базисе $\{i,\ j\}$
1. $\forall\lambda \in \mathbb{R}\ \varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$
2. $\varphi(x_1+x_2) = \varphi(x_1)+\varphi(x_2)$ поворачивается на угол α параллелограмм на векторах $x_1,\ x_2 \Rightarrow$ их сумма (диагональ этого параллелограмма) также поворачивается на угол α. Значит это линейный оператор.
Рассмотрим $\varphi(i) = \varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \cos\alpha i + \sin\alpha j$
$\varphi(j) = \varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\sin\alpha i + \cos\alpha j \Rightarrow$
$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ - матрица поворота

4. Является ли преобразование линейным оператором. Если да, то найти его матрицу.
a. $\varphi(x) = (x_2 + x_3,\ 2x_1 + x_3,\ 3x_1 - x_2 + x_3)$
$\begin{pmatrix} \varphi(x_1) \\ \varphi(x_2) \\ \varphi(x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ 2x_1 + x_3 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$
То есть $\varphi(x)^T = A \cdot x^T \Rightarrow$
$\Rightarrow \varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay \Rightarrow$ линейный оператор.
b. $\varphi(x) = (x_1,\ x_2 + 1,\ x_3 + 2)$. Не уважает сложение векторов, значит не является линейным оператором.

5. Доказать, что существует единственный линейный оператор, переводящий векторы $a_1,\ a_2,\ a_3$ в векторы $b_1,\ b_2,\ b_3$. Найти его матрицу.
$a_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
$a_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
$a_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
Утверждение: существует единственный линейный оператор в $\mathbb{R}^n$, переводящий линейно независимые векторы $a_1, \dots,\ a_n$ в любые заданные векторы $b_1, \dots,\ b_n$
$\varphi(a_1) = b_1$
$\dots,$ дано
$\varphi(a_n) = b_n$
$\forall x \in V \quad a_1, \dots,\ a_n$ - базис $\Rightarrow$
$\Rightarrow x = x_1 a_1 + \dots + x_n a_n,$ единственное разложение
$$\varphi(x) = x_1 \underbrace{\varphi(a_1)}_{b_1} + \dots + x_n \underbrace{\varphi(a_n)}_{b_n} = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i$$
Пусть $A = (a_1, \dots,\ a_n),\ B = (b_1, \dots,\ b_n) \Rightarrow$
$\Rightarrow \Phi_a = BA^{-1}$, где Φ - матрица линейного оператора φ базиса a
$b_1 = \varphi(a_1) = \Phi_a \cdot a_1$
$\dots$
$b_n = \varphi(a_n) = \Phi_n \cdot a_n \Rightarrow B = \Phi_a A \Rightarrow \Phi_a = B \cdot A^{-1}$