

Теория вероятности 1 модуль.

Андрей Тищенко БПИ231 @AndrewTGk

2024/2025

Лекция 6 сентября.

Формула оценки

$random() \% 11$

Накоп = $0.1 \text{ИДЗ} + 0.15 \text{РС} + 0.25 \text{КР} + 0.5 \text{Экзамен}$

ИДЗ = индивидуальное домашнее задание (выдаётся через вики курса).

РС = работа на семинарах.

КР = контрольные работы.

Учебник:

Кибзун А. К., Горяинова Е. Р., Наумов А. В. “Теория вероятности и математическая статистика. Базовый курс с примерами и задачами” 2013 или 2014 года.

История

Наука появилась из-за азартных игр. Кавалер Демире захотел составить математическую базу для расчётов в азартных играх. Перечисление многих известных математиков, работавших в этой области. Колмогоров легенда теорвера, придумал определение вероятности, основал СУНЦ, ездил на лыжах.

Основные понятия

Определения

Теория вероятности - раздел математики, изучающий математические модели массовых случайных явлений.

Массовость - за n повторений эксперимента, вероятность каждого исхода стабилизируется возле какого-то значения p_i .

Всякое случайное событие обладает массовостью.

Обозначения

$\omega_1, \dots, \omega_n$ - элементарные случайные события.

$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ - пространство элементарных событий.

$\forall \Omega \forall A \quad A \subset \Omega \Leftrightarrow A$ - случайное событие.

$\forall A \forall \Omega \quad \Omega \subseteq A \Leftrightarrow A$ - достоверное событие.

$\forall A \forall \Omega \quad \Omega \cap A = \emptyset \Leftrightarrow A$ - невозможное событие.

Операции с событиями

$$A, B \subset \Omega$$

Произведение

Произведением случайных событий A, B называется событие $A \cdot B = A \cap B$

Сумма

Сумма $A + B$ есть событие $A \cup B$.

Разность

Разность множеств $A \setminus B$.

Дополнение

$$\overline{A} = \Omega \setminus A.$$

Свойства операций

1. $A + A = A$
2. $A \cdot A = A$
3. $A \cdot \Omega = A$
4. $A + \Omega = \Omega$
5. $A + B = B + A$
6. $A \cdot B = B \cdot A$
7. $A + (B + C) = (A + B) + C$
8. $\overline{\overline{A}} = A$
9. $\overline{\overline{\overline{A}}} = \overline{A}$
10. $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

Определение

Класс подмножеств \mathcal{A} на пространстве событий Ω называется σ -алгеброй событий, если:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. $\forall A \subset \Omega \quad A \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$
3. $\forall A_i \quad A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{A} \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A} \wedge \prod_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

Классическое определение вероятности

Исход = элементарное случайное событие.

1. Конечное число исходов эксперимента.
2. Исходы взаимно исключающие.
3. Исходы равновозможны.

Тогда $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

$|A|$ - мощность множества исходов, принадлежащих A .

1. $P(A) \geq 0$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $A \cdot B = \emptyset \Rightarrow P(A + B) = P(A) + P(B)$

Задача

В коробке 10 красных и 20 чёрных шаров.

Событие $A = \{\text{вытащить красный шар}\} \Rightarrow P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$

Лекция 13 сентября.

Геометрическое определение вероятности

Ω является подмножеством конечной меры в \mathbb{R} или \mathbb{R}^2 , или ... или \mathbb{R}^n .

$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$, μ - мера (длина, площадь, n-мерный объём).

Свойства:

1. $P(A) \geq 0 \quad \forall A \subseteq \Omega$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $A \cdot B = \emptyset \Rightarrow P(A + B) = P(A) + P(B)$

Задача

Ромео и Джульетта хотят встретиться между полуночью и часом ночи, но не могут договориться о времени, поэтому они приходят в произвольный момент времени на этом отрезке и ждут 15 минут, после чего уходят. С какой вероятностью они не встретятся? x - время прихода Дж.

y - время прихода Ромео.

Тут должен быть балдёжный график, но писать это долго.

$x, y \in [0, 1]$, в часах.

$$|x - y| \leq \frac{1}{4}$$

$$P(\bar{A}) = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}}{1} = \frac{9}{16} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}.$$

В этом определении мы избавились от конечности множества исходов.

Частотное (статистическое) определение вероятности

Определение

Пусть опыт проведён N раз, а событие A произошло n_A раз. Тогда $\frac{n_A}{N}$ называется частотой события A .

Тогда вероятность $P(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_A}{N}$

Аксиоматическое определение А. Н. Колмогорова (легенды, миллионера, плебоя и филантропа)

Определение

Пусть \mathcal{A} – σ алгебра событий на пространстве Ω . Назовём вероятностью числовую функцию $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^1$, удовлетворяющую следующим аксиомам:

1. $\forall A \in \mathcal{A} \quad P(A) \geq 0$

2. $P(\Omega) = 1$

3. $\forall A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \quad (\forall i, j \in \mathbb{N} \quad A_i \cap A_j = \emptyset \Rightarrow i = j) \Rightarrow P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) =$
 $= \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Определение

Число $P(A)$, $A \in \mathcal{A}$ называется вероятностью события A .

Определение

(Ω, \mathcal{A}, P) называется вероятностным пространством.

Свойства $P(A)$

1. $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.

$$\Omega = A + \bar{A} \wedge A \cap \bar{A} = \emptyset$$

$$P(\Omega) = P(A + \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) \Rightarrow P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

2. $P(\emptyset) = 0$

$$\bar{\Omega} = \emptyset \Rightarrow P(\Omega) + P(\emptyset) = 1 \Rightarrow P(\emptyset) = 1 - 1 = 0$$

$$\begin{aligned}
3. \quad & A \subseteq \Omega \wedge B \subseteq \Omega \wedge A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B) \\
& B = A + (B \setminus A) \Rightarrow P(B) = P(A + (B \setminus A)) = P(A) + \underbrace{P(B \setminus A)}_{\geq 0} \Rightarrow \\
& \Rightarrow P(A) \leq P(B)
\end{aligned}$$

$$4. \quad 0 \leq P(A) \leq 1$$

По первой аксиоме $P(A) \geq 0$

Из третьего $A \subseteq \Omega \wedge \Omega \subseteq \Omega \wedge A \subseteq \Omega \Rightarrow P(A) \leq P(\Omega) = 1$

5. Формула (теорема) сложения вероятностей:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$$

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} A = A \cdot \Omega = A \cdot (B + \overline{B}) = AB + A\overline{B} \Rightarrow P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB) \\ B = B \cdot \Omega = B \cdot (A + \overline{A}) = BA + B\overline{A} \Rightarrow P(B\overline{A}) = P(B) - P(AB) \end{cases} \Rightarrow \\
& \Rightarrow A + B = AB + A\overline{B} + B\overline{A} \Rightarrow P(A + B) = \\
& = P(AB) + P(A) - P(AB) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(AB)
\end{aligned}$$

Замечание: тут не было $2(AB)$, потому что сложение по определению есть объединение, поэтому одного экземпляра достаточно.

Для трёх слагаемых:

$$\begin{aligned}
P((A + B) + C) &= P(A + B) + P(C) - P((A + B) \cdot C) = \\
&= P(A) + P(B) - P(AB) + P(C) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(A_1 + \dots + A_n) &= \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i \leq j} P(A_i A_j) + \sum_{i \leq j \leq k} P(A_i A_j A_k) + \dots \\
&\dots + (-1)^{n-1} P(A_1, \dots, A_n)
\end{aligned}$$

Задача

$A_1 = \{\text{Решка при 1-ом броске}\}$, $A_2 = \{\text{Решка при 2-ом броске}\}$

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Определение

Пусть $P(B) \neq 0$, тогда условная вероятность события A при условии B

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Определение

События A , B называются независимыми, если $P(A/B) = P(A)$

Отсюда следует: $\frac{P(AB)}{P(B)} = P(A) \Rightarrow P(AB) = P(A)P(B)$

Определение

События A_1, A_2, \dots, A_n называются независимыми в совокупности, если:

$$\forall k = 2, \dots, n \quad \forall i_1, \dots, i_k \quad (1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n) \Rightarrow P(A_{i_1}, \dots, A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})$$