Теория вероятности 1 модуль.

Андрей Тищенко БПИ231 @AndrewTGk

2024/2025

Лекция 6 сентября.

Формула оценки

$random()\%11$
Накоп = 0.1ИДЗ + 0.15РС + 0.25КР + 0.5Экзамен
ИДЗ = индивидуальное домашнее задание (выдаётся через вики курса).
РС = работа на семинарах.
КР = контрольные работы.

Учебник:

Кибзун А. К., Горяинова Е. Р., Наумов А. В. “Теория вероятности и математическая статистика. Базовый курс с примерами и задачами” 2013 или 2014 года.

История

Наука появилась из-за азартных игр. Кавалер Демире захотел составить математическую базу для расчётов в азартных играх. Перечесление многих известных математиков, работавших в этой области. Колмогоров легенда теорвера, придумал определение вероятности, основал СУНЦ, ездил на лыжах.

Основные понятия

Определения

Теория вероятности — раздел математики, изучающий математические модели массовых случайных явлений.
Массовость — за n повторений эксперимента, вероятность каждого исхода стабилизируется возле какого-то значения p_i.
Всякое случайное событие обладает массовостью.

Обозначения

$\omega_1, \dots, \omega_n$ — элементарные случайные события.
$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ — пространство элементарных событий.
$\forall\Omega\ \forall A \quad A \subset \Omega \Leftrightarrow A$ — случайное событие.
$\forall A\ \forall\Omega \quad \Omega \subseteq A \Leftrightarrow A$ — достоверное событие.
$\forall A\ \forall\Omega \quad \Omega \cap A = \varnothing \Leftrightarrow A$ — невозможное событие.

Операции с событиями

$$A,\ B \subset \Omega$$

Произведение

Произведением случайных событий $A,\ B$ называется событие $A \cdot B = A \cap B$

Сумма

Сумма $A + B$ есть событие $A \cup B$.

Разность

Разность множеств $A \backslash B$.

Дополнение

$\overline{A} = \Omega \backslash A$.

Свойства операций

1. $A + A = A$
2. $A \cdot A = A$
3. $A \cdot \Omega = A$
4. $A + \Omega = \Omega$
5. $A + B = B + A$
6. $A \cdot B = B \cdot A$
7. $A + (B + C) = (A + B) + C$
8. $\overline{\overline{A}} = A$
9. $\overline{\overline{\overline{A}}} = \overline{A}$
10. $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

Определение

Класс подмножнеств $\mathcal{A}$ на пространстве событий Ω называется σ-алгеброй событий, если:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. $\forall A \subset \Omega \quad A \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$
3. $\forall A_i \ A_1, \ldots, \ A_n, \dots \in \mathcal{A} \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A} \wedge \prod\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

Классическое определение вероятности

Исход = элементарное случайное событие.

1. Конечное число исходов эксперимента.
2. Исходы взаимно исключающие.
3. Исходы равновозможны.

Тогда $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$
$|A|$ - мощность множества исходов, принадлежащих A.

1. $P(A) \geqslant 0$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $A \cdot B = \varnothing \Rightarrow P(A + B) = P(A) + P(B)$

Задача

В коробке 10 красных и 20 чёрных шаров.
Событие $A = \{\text{вытащить красный шар}\} \Rightarrow P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$

Лекция 13 сентября.

Геометрическое определение вероятности

Ω является подмножеством конечной меры в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{R}^2$, или ... или $\mathbb{R}^n$.
$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$, μ - мера (длина, площадь, n-мерный объём).
Свойства:

1. $P(A) \geqslant 0 \quad \forall A \subseteq \Omega$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $A \cdot B = \varnothing \Rightarrow P(A + B) = P(A) + P(B)$

Задача

Ромео и Джульетта хотят встретиться между полуночью и часом ночи, но не могут договориться о времени, поэтому они приходят в произвольный момент времени на этом отрезке и ждут 15 минут, после чего уходят. С какой вероятностью они не встретятся? x - время прихода Дж.
y - время прихода Ромео.
Тут должен быть балдёжный график, но писать это долго.
$x,\ y \in [0,\ 1]$, в часах.
$|x - y| \leqslant \frac{1}{4}$
$P(\overline{A}) = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}}{1} = \frac{9}{16} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$.
В этом определении мы избавились от конечности множества исходов.

Частотное (статистическое) определение вероятности

Определение

Пусть опыт проведён N раз, а событие A произошло n_A раз. Тогда $\frac{n_A}{N}$ называется частотой события А.
Тогда вероятность $P(A) = \lim\limits_{N\to\infty} \frac{n_A}{N}$

Аксиоматическое определение А. Н. Колмогорова (легенды, миллионера, плейбоя и филантропа)

Определение

Пусть $\mathcal{A} - \sigma$ алгебра событий на пространстве Ω. Назовём вероятностью числовую функцию $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^1$, удовлетворяющую следующим аксиомам:

1. $\forall A \in \mathcal{A} \quad P(A) \geqslant 0$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $\forall A_1, \ldots,\ A_n \in \mathcal{A} \quad (\forall i,\ j \in \mathbb{N}\ A_i \cap A_j \neq \varnothing \Rightarrow i = j) \Rightarrow P\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) =$
   $= \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Определение

Число $P(A),\ A \in \mathcal{A}$ называется вероятностью события A.

Определение

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ называется вероятностным пространством.

Свойства P(A)

1. $P(A) = 1 - P(\overline{A})$.
   $\Omega = A + \overline{A} \wedge A \cap \overline{A} = \varnothing$
   $P(\Omega) = P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) \Rightarrow P(A) = 1 - P(\overline{A})$
2. $P(\varnothing) = 0$
   $\overline{\Omega} = \varnothing \Rightarrow P(\Omega) + P(\varnothing) = 1 \Rightarrow P(\varnothing) = 1 - 1 = 0$

3. $A \subseteq \Omega \wedge B \subseteq \Omega \wedge A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leqslant P(B)$
   $B = A + (B \backslash A) \Rightarrow P(B) = P\big(A + (B \backslash A)\big) = P(A) + \underbrace{P(B \backslash A)}_{\geqslant 0} \Rightarrow$
   $\Rightarrow P(A) \leqslant P(B)$
4. $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$
   По первой аксиоме $P(A) \geqslant 0$
   Из третьего $A \subseteq \Omega \wedge \Omega \subseteq \Omega \wedge A \subseteq \Omega \Rightarrow P(A) \leqslant P(\Omega) = 1$
5. Формула (теорема) сложения вероятностей:
   $$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$$
   $$\begin{cases} A = A \cdot \Omega = A \cdot (B + \overline{B}) = AB + A\overline{B} \Rightarrow P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB) \\ B = B \cdot \Omega = B \cdot (A + \overline{A}) = BA + B\overline{A} \Rightarrow P(B\overline{A}) = P(B) - P(AB) \end{cases} \Rightarrow$$
   $\Rightarrow A + B = AB + A\overline{B} + B\overline{A} \Rightarrow P(A + B) =$
   $= P(AB) + P(A) - P(AB) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(AB)$
   Замечание: тут не было $2(AB)$, потому что сложение по определению есть объединение, поэтому одного экземпляра достаточно.
   Для трёх слагаемых:
   $P((A + B) + C) = P(A + B) + P(C) - P\big((A + B) \cdot C\big) =$
   $= P(A) + P(B) - P(AB) + P(C) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$
   $P(A_1 + \dots + A_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum\limits_{i \leqslant j} P(A_i A_j) + \sum\limits_{i \leqslant j \leqslant k} P(A_i A_j A_k) + \dots$
   $\dots + (-1)^{n-1} P(A_1, \dots,\ A_n)$

Задача

$A_1 = \{$Решка при 1-ом броске$\},\ A_2 = \{$Решка при 2-ом броске$\}$
$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Определение

Пусть $P(B) \neq 0$, тогда условная вероятность события A при условии B

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Определение

События $A,\ B$ называются независимыми, если $P(A/B) = P(A)$
Отсюда следует: $\frac{P(AB)}{P(B)} = P(A) \Rightarrow P(AB) = P(A)P(B)$

Определение

События $A_1,\ A_2, \dots,\ A_n$ называются независимыми в совокупности, если:

$\forall k = 2, \dots,\ n\, \forall i_1, \dots,\ i_k \quad (1 \leqslant i_1 \leqslant \dots \leqslant i_k \leqslant n) \Rightarrow P(A_{i_1}, \dots,\ A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot_{\dots} \cdot P(A_{i_k})$

Лекция 20 сентября.

Воспоминания

$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \quad P(AB) = P(B)P(A/B) = P(A)P(B/A)$

Теорема об умножении вероятностей

Пусть $(P(A_1, \dots,\ A_n)) > 0$, тогда:

$$P(A_1, \dots,\ A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)\dots P(A_n/A_1\dots A_{n-1})$$

Доказательство

$$\begin{cases} B_{n-1} = A_1 \dots A_{n-1} \\ B_{n-2} = A_1 \dots A_{n-2} \\ \dots \\ B_1 = A_1 \end{cases} \Rightarrow P(\underbrace{A_1 \dots A_{n-1}}_{B_{n-1}} A_n) = P(\underbrace{\ B_{n-1}\ }_{B_{n-2}A_{n-1}})P(A_n/B_{n-1}) =$$

$= P(B_{n-2}A_{n-1})P(A_n/A_1 \dots A_{n-1}) = P(B_{n-2})P(A_{n-1}/B_{n-2})P(A_n/A_1 \dots A_{n-1}) =$

$= P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)\dots P(A_n/A_1 \dots A_{n-1})$

Схема Бернулли (Биномиальная схема)

Последовательность испытаний, такая что:

1. Исход любого испытания двоичен $\forall A\ A \vee \overline{A} \equiv 1$
2. Испытания независимы в совокупности.
3. $P(A) = p$ не изменяется от опыта к опыту.

Например, подбрасывание монеты.
Положим У - успех, Н - неудача.
В таком случае k успехов можно получить $P_n(k)C_n^k p^k(\underbrace{1-p}_{=q})^{n-k}$ способами

Доказательство

$P(\underbrace{\text{У}\ldots\text{У}}_{k}\underbrace{\text{Н}\ldots\text{Н}}_{n-k}) = p^k q^{n-k}$

$P(\{\underbrace{\text{У}\ldots\text{У}}_{k}\text{Н}\ldots\text{Н}\}) + P(\text{Н}\underbrace{\text{У}\ldots\text{У}}_{k}\text{Н}\ldots\text{Н}) + \cdots + P(\text{Н}\ldots\text{Н}\underbrace{\text{У}\ldots\text{У}}_{k}) =$

$= C_n^k p^k q^{n-k}$

$\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = 1$

Следствие

При $k_1 \leqslant k \leqslant k_2 : \quad P_n(k) = \sum\limits_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k q^{n-k}$

Обозначение

Если максимальная вероятность достигается при $k = m$, то есть

$$C_n^m p^m q^{n-m} = \max_{0\leqslant k\leqslant n} C_n^k p^k q^{n-k}$$

Тогда можно сказать $m = \underset{0\leqslant k\leqslant n}{\operatorname{argmax}} P_n(k)$

Можно посчитать без вычисления всех значений:

$m = \begin{cases} [(n+1)p], \text{ если } (n+1)p \text{ - нецелое число} \\ (n+1)p \wedge (n+1)p - 1, \text{ иначе} \end{cases}$

Полиномиальная схема испытаний

1. Проводится n независимых опытов
2. В каждом опыте m взаимноисключающих исходов $(n_1, \ldots,\ n_m)$
3. $P(n_1) = p_1,\ P(n_2) = p_2, \ldots,\ P(n_m) = p_m, \quad p_1 + p_2 + \cdots + p_m = 1$

$\sum\limits_{i=1}^{m} n_i = n$

$P_n(n_1,\ n_2, \ldots,\ n_m) = \dfrac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_m!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_m^{n_m}$

Определение

Пусть $H_1, \ldots, H_n \subset \Omega$, события $H_1, \ldots, H_n$ называются полной группой событий (гипотезами), если

1. $\forall i,\ j \quad i \neq j \Rightarrow H_i \cdot H_j = \varnothing$
2. $H_1 + \cdots + H_n = \Omega$

Формула полной вероятности

Пусть $H_1, \ldots, H_n$ — полный граф событий, $A \subset \Omega$
$P(A) = P(A \cdot \Omega) = P\big(A \cdot (H_1 + \cdots + H_n)\big) = P(AH_1 + \cdots + AH_n)$, так как события $H_1, \ldots, H_n$ независимы, можно сделать переход:
$P(AH_1 + \cdots + AH_n) = P(AH_1) + \cdots + P(AH_n) = P(H_1)P(A/H_1) + \cdots + P(H_n)P(A/H_n)$
Получаем $P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + \cdots + P(H_n)P(A/H_n)$

Задача

Студент выучил m билетов из n. Посчитать вероятность вытянуть выученный билет при заходе первым, вторым.
$A = \{$студент вытащит выученный билет$\}$
$H_1 = \{$Другой студент вытащит выученный нашим студентом билетом$\}$
$H_2 = \{$Наш студен вытащит невыученный билет$\}$
$P(H_1) = \frac{m}{n}, \quad P(H_2) = \frac{n-m}{n}$
$P(A/H_1) = \frac{m-1}{n-1}, \quad P(A/H_2) = \frac{m}{n-1}$
$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) = \frac{m}{n}\frac{m-1}{n-1} + \frac{n-m}{n}\frac{m}{n-1} = \frac{m}{n}$

Формула Байеса

$H_1, \ldots H_n$ — гипотезы
$P(H_1), \ldots, P(H_n)$ — априорные вероятности.
Произошло событие A
$P(H_1/A), \ldots, P(H_n/A)$ — апосториорные вероятности.

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_iA)}{P(A)} = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n} P(H_k)P(A/H_k)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} P(H_i/A) = 1$$