Математическая статистика.

Андрей Тищенко @AndrewTGk

2024/2025

Лекция 10 января

Преамбула

Статистика. Мнения о появлении этого слова:

1. Статистиками в Германии назывались люди, собирающие данные о населении и передающие их государству.

2. В определённый день в Венеции народ выстраивался для выплаты налогов (строго фиксированных, в зависимости от рода действий). Государство собирало данные обо всём населении. Это происходило до появления статистиков в Германии, поэтому мы будем считать, что статистика пошла из Венеции.

Задача статистики — по результатам наблюдений построить вероятностную модель наблюдаемой случайной величины.

Основные определения

Определение

Однородной выборкой объёма n называется случайный вектор $X = (X_1, \ldots,\ X_n)$, компоненты которого являются независимыми и одинаково распределёнными. Элементы вектора X называются элементами выборки.

Определение

Если элементы выборки имеют распределение $F_\xi(x)$, то говорят, что выборка соответствует распределению $F_\xi(x)$ или порождена случайной величиной ξ с распределением $F_\xi(x)$.

Определение

Детерминированный вектор $x = (x_1, \ldots,\ x_n)$, компоненты которого x_i являются реализациями соответствующих случайных величин X_i $(i = \overline{1,\ n})$, называется реализацией выборки.

Уточнение

Если X — однородная выборка объёма n, то его реализацией будет вектор x, каждый элемент x_i которого является значением соответствующей ему случайной величины (элемента выборки) X_i.

Определение

Выборочным пространством называется множество всех возможных реализаций выборки

$$X = (X_1, \ldots,\ X_n)$$

Пример

У вектора $X = (X_1, \ldots, X_{10})$ каждый элемент X_i которой порождён случайной величиной $\xi \sim U(0, 1)$, выборочным пространством является $\mathbb{R}^{10}$ (так как X_i может принять любое значение на $\mathbb{R}$)

Определение

Обозначим $x_{(i)}$ — i-ый по возрастанию элемент, тогда будет справедливо:

$$x_{(1)} \leqslant x_{(2)} \leqslant \cdots \leqslant x_{(n)}$$

Обозначим $X_{(k)}$ случайную величину, реализация которой при каждой реализации x выборки X принимает значение $x_{(k)}$. Тогда последовательность $X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}$ называется вариационным рядом выборки.

Определение

Случайная величина $X_{(k)}$ называется k-ой порядковой статистикой выборки.

Определение

Случайные величины $X_{(1)}, X_{(n)}$ называются эстремальными порядковыми статистиками.

Определение

Порядковая статистика $X_{(\lceil n \cdot p \rceil)}$ называется выборочной квантилью уровня p, где $p \in [0, 1]$

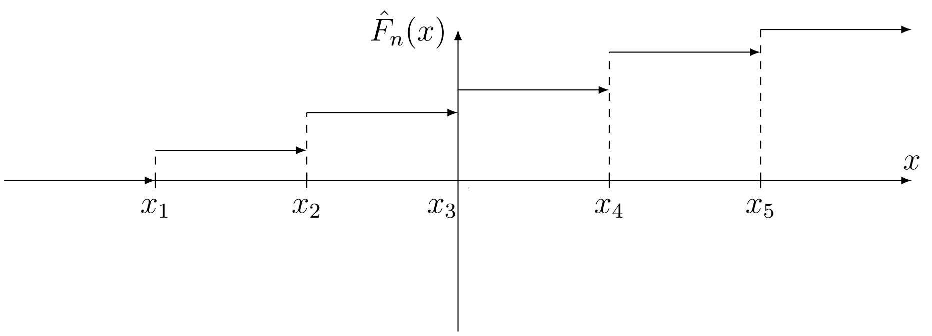
Определение

Пусть каждый элемент выборки X объёма n имеет распределение $F_\xi(x)$. Эмпирической функцией распределения такой выборки называется

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} I(X_k \leqslant x)$$

I — индикаторная функция. $I = \begin{cases} 1, & \text{если аргумент верен} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — реализация выборки $X_1, \ldots, X_n$



Свойства $\hat{F}_n(x)$

1. $\forall x \in \mathbb{R} \quad E\hat{F}_n(x) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} I(X_k \leqslant x)\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} EI(X_k \leqslant x) = P(X_1 \leqslant x) = F_\xi(x)$

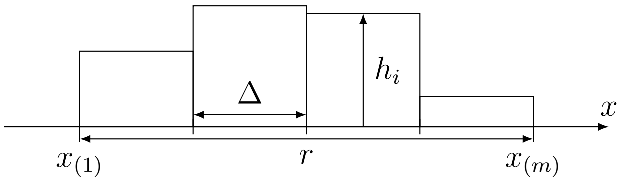
2. По усиленному закону больших чисел (УЗБЧ)

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} I(X_k \leqslant x) \xrightarrow[n \to \infty]{\text{п. н.}} EI(X_k \leqslant x) = F_\xi(x)$$

Гистограмма

Разбить $\mathbb{R}$ на $(m+2)$ непересекающихся интервала. Рассматриваются $x_{(1)}, \ldots, x_{(m)}$

Название	Обозначение	Формула
Количество интервалов	m	—
Размах выборки	r	$r = x_{(m)} - x_{(1)}$
Ширина интервала	Δ	$\Delta = \frac{r}{m}$
Количество попаданий на i-ый интервал	ν_i	—
Частота попаданий на i-ый интервал	h_i	$h_i = \frac{\nu_i}{\Delta}$



Лекция 17 января

Определение

Пусть $X_1, \ldots, X_n \sim F(x, \theta)$. k-ым начальным выборочным моментом называется

$$\hat{\mu}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k,\ k \in \mathbb{N}$$

Выборочным средним называется:

$$\hat{\mu}_1 = \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Определение

k-ым центральным выборочным моментом называется

$$\hat{\nu}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^k,\ k = 2,\ 3, \ldots$$

$$\hat{\nu}_2 = S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \text{ называется выборочной дисперсией}$$

Пусть $(x_1,\ y_1), \ldots, (x_n,\ y_n)$ соответствует распределению $F(x,\ y,\ \theta)$

Определение

Выборочной ковариацией называется

$$\hat{K}_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$$

Определение

Выборочным коэффициентом корреляции называется

$$\hat{\rho}_{xy} = \frac{\hat{K}_{xy}}{\sqrt{S_x^2 S_y^2}}$$

Свойства выборочных моментов

1. $E\hat{\mu}_k = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^k\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n EX_i^k = EX_1^k = \mu_k$
2. $E\overline{X} = m_x$
3. $\mathcal{D}\hat{\mu}_k = \mathcal{D}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^k\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \mathcal{D}X_i^k = \frac{1}{n}\mathcal{D}X_i^k = \frac{1}{n}\left(EX_1^{2k} - (EX_1^K)^2\right) = \frac{1}{n}(\mu_{2k} - \mu_k^2)$
4. $\mathcal{D}\overline{x} = \frac{\sigma_{x_1}^2}{n}$
5. По УЗБЧ
$$\hat{\mu}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^k \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п. н.}} E\hat{\mu}_k = \mu_k$$
$$\hat{\nu}_k \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п. н.}} \nu_k$$
6. По ЦПТ
$$\frac{\hat{\mu}_k - \mu_k}{\sqrt{\frac{\mu_{2k}-\mu_k^2}{n}}} \xrightarrow[d]{n\to\infty} U,\ U \sim N(0,\ 1)$$
$$\frac{\sqrt{n}(\overline{x} - m_{x_1})}{\sigma} \xrightarrow[n\to\infty]{d} U$$
7. $ES^2 = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2\right) = \frac{1}{n}E\left(\sum\limits_{i=1}^n\left(x_i^2 - 2x_i\overline{X} + \overline{X}^2\right)\right) = E(x^2) - \frac{2}{n}\sum\limits_{i=1}^n E(x_i\overline{X}) + \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n E\overline{X}^2 =$
$= E(x^2) - \frac{2}{n}\sum\limits_{i=1}^n Ex_i\sum\limits_{j=1}^n x_j + \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n E\left(\sum\limits_{j=1}^n x_j\right)^2 = E(x^2) - \frac{2}{n}E\sum\limits_{i=1}^n x_i\sum_{j=1}^n x_j + = \frac{n-1}{n}\sigma^2$
8. $E\hat{K}_{xy} = \frac{n-1}{n}\,\text{cov}(x,\ y)$

Определение

Оценкой $\hat{\theta}$ параметра θ, называется функция:

$$\hat{\theta} = T(x_1, \ldots,\ x_n),\ \text{не зависящая от } \theta$$

Например, отвратительная оценка среднего роста людей в аудитории.

$$\hat{m} = \frac{2x_2 + 5x_5 + 10x_{10}}{3}$$

Определение

Оценка $\hat{\theta}$ называется несмещённой, если $E\hat{\theta} = \theta$ для любых возможных значений этого параметра.

Определение

Оценка $\hat{\theta}(x_1, \ldots,\ x_n)$ называется асимптотически несмещённой оценкой θ, если

$$\lim_{n\to\infty} E\hat{\theta}(x_1, \ldots,\ x_n) = \theta$$

$$\lim_{n\to\infty} ES^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}\sigma^2 = \sigma^2$$

Определение

Несмещённой выборочной (или исправленной) выборочной дисперсией называется

$$\tilde{S}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

Оценки

$$\hat{m}_1 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$
$$\hat{m}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{10}$$
$$\hat{m}_3 = \overline{x} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Являются несмещёнными.

Определение

Оценка $\hat{\theta}(x_1, \ldots, x_n)$ называется:
Состоятельной оценкой θ, если

$$\hat{\theta}(x_1, \ldots, x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{p} \theta$$

Сильно состоятельной оценкой, если

$$\hat{\theta}(x_1, \ldots, x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п. н.}} \theta$$

Определение

Пусть $\hat{\theta}$ — несмещённая оценка параметра θ. Если $\mathcal{D}\hat{\theta} \leqslant \mathcal{D}\theta^*$, где θ^* — любая несмещённая оценка параметра θ. Тогда $\hat{\theta}$ называется эффективной оценкой параметра θ.

R-эффективные оценки

Рассматриваем выборку $X_1, \ldots, X_n \sim f(x, \theta),\ \theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^1$. Назовём модель $(S,\ f(x, \theta))$ регулярной, если она удовлетворяет следующим условиям:

1. $\forall x \in S$ функция $f(x, \theta) = f(x_1, \ldots, x_n, \theta) > 0$ и дифференцируема по θ.
2. $$\begin{cases} \dfrac{\delta}{\delta\theta}\displaystyle\int\limits_S f(x, \theta)\,dx = \displaystyle\int\limits_S \dfrac{\delta}{\delta\theta} f(x, \theta)\,dx \\ \dfrac{\delta}{\delta\theta}\displaystyle\int\limits_S T(x) f(x, \theta)\,dx = \displaystyle\int\limits_S \dfrac{\delta}{\delta\theta} T(x) f(x, \theta)\,dx \end{cases}$$

Пусть $\hat{\theta} = T(x) = T(x_1, \ldots, x_n)$ — несмещённая оценка параметра θ:

$$\int\limits_S \frac{\delta}{\delta\theta} f(x, \theta)\,dx = \frac{\delta}{\delta\theta}\int\limits_S f(x, \theta)\,dx = \frac{\delta}{\delta\theta} 1 = 0$$

$$\int\limits_S \frac{\delta}{\delta\theta} T(x) f(x, \theta)\,dx = \frac{\delta}{\delta\theta}\int\limits_S T(x) f(x, \theta)\,dx = \frac{\delta}{\delta\theta} ET(x) = \frac{\delta}{\delta\theta}\theta = 1$$

Определение

Информацией Фишера о параметре θ, содержащейся в выборке $X_1, \ldots, X_n$ называется величина

$$I_n(\theta) = E\left(\frac{\delta \ln\left(f(x, \theta)\right)}{\delta\theta}\right)^2 = \int\limits_S \left(\frac{\delta \ln\left(f(x, \theta)\right)}{\delta\theta}\right)^2 f(x, \theta)\,dx$$

Неравенство Рао-Крамера

Если $S,\ f(x,\ \theta)$ — регулярная модель и $\hat{\theta}$ — несмещённая оценка θ, то

$$\mathcal{D}(\hat{\theta}) \geqslant \frac{1}{I_n(\theta)}$$

Доказательство

Выпишем некоторые равенства (пригодятся в доказательстве):

$$\int\limits_S \frac{\delta}{\delta\theta} f(x,\ \theta)\,dx = \int\limits_S \frac{\delta f(x,\ \theta)}{\delta\theta}\frac{f(x,\ \theta)}{f(x,\ \theta)}\,dx \overset{*}{=} \int\limits_S \frac{\delta \ln f(x,\ \theta)}{\delta\theta} f(x,\ \theta)\,dx = 0$$

Пояснение $\overset{*}{=}$. Логарифм — сложная функция. По правилу дифференцирования сложной функции:

$$\frac{\delta \ln f(x,\ \theta)}{\delta\theta} = \frac{1}{f(x,\ \theta)} \cdot \frac{\delta f(x,\ \theta)}{\delta\theta}$$

$$\int\limits_S \frac{\delta}{\delta\theta} T(x) f(x,\ \theta)\,dx = \int\limits_S T(x)\frac{\delta}{\delta\theta} f(x,\ \theta)\frac{f(x,\ \theta)}{f(x,\ \theta)}\,dx = \int\limits_S T(x)\frac{\delta \ln f(x,\ \theta)}{\delta\theta} f(x,\ \theta)\,dx = 1$$

Чуть преобразуем последнее полученное равенство:

$$\int\limits_S T(x)\frac{\delta \ln f(x,\ \theta)}{\delta\theta} f(x,\ \theta)\,dx = \int\limits_S T(x)\frac{\delta \ln f(x,\ \theta)}{\delta\theta} f(x,\ \theta)\,dx - \theta\underbrace{\int\limits_S \frac{\delta \ln f(x,\ \theta)}{\delta\theta} f(x,\ \theta)\,dx}_{=0} =$$

$$= \int\limits_S \big(T(x) - \theta\big)\frac{\delta \ln f(x,\ \theta)}{\delta\theta} f(x,\ \theta)\,dx = 1 \Rightarrow 1 = 1^2 = \left(\int\limits_S \big(T(x) - \theta\big)\frac{\delta \ln f(x,\ \theta)}{\delta\theta} f(x,\ \theta)\,dx\right)^2$$

Далее нам понадобится неравенство Коши-Буняковского, которое выглядит так:

$$\left(\int \varphi_1(x)\varphi_2(x)\,dx\right)^2 \leqslant \int \varphi_1^2(x)\,dx \int \varphi_2^2(x)\,dx$$

Подгоним полученное равенство $\left(f(x,\ \theta) > 0 \Rightarrow f(x,\ \theta) = \sqrt{f(x,\ \theta)}^2\right)$:

$$\left(\int\limits_S \big(T(x) - \theta\big)\frac{\delta \ln f(x,\ \theta)}{\delta\theta} f(x,\ \theta)\,dx\right)^2 = \left(\int\limits_S \underbrace{\big(T(x) - \theta\big)\sqrt{f(x,\ \theta)}}_{\varphi_1(x)} \cdot \underbrace{\frac{\delta \ln f(x,\ \theta)}{\delta\theta}\sqrt{f(x,\ \theta)}}_{\varphi_2(x)}\,dx\right)^2 = 1$$

И применим неравенство Коши-Буняковского:

$$1 = \left(\int\limits_S \underbrace{\big(T(x) - \theta\big)\sqrt{f(x,\ \theta)}}_{\varphi_1(x)} \cdot \underbrace{\frac{\delta \ln f(x,\ \theta)}{\delta\theta}\sqrt{f(x,\ \theta)}}_{\varphi_2(x)}\,dx\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_S \left(\big(T(x) - \theta\big)\sqrt{f(x,\ \theta)}\right)^2\,dx \cdot \int\limits_S \left(\frac{\delta \ln f(x,\ \theta)}{\delta\theta}\sqrt{f(x,\ \theta)}\right)^2\,dx =$$

$$= \underbrace{\int\limits_S \big(T(x) - \theta\big)^2 f(x,\ \theta)\,dx}_{=\mathcal{D}\hat{\theta}} \cdot \underbrace{\int\limits_S \left(\frac{\delta \ln \big(f(x,\ \theta)\big)}{\delta\theta}\right)^2 f(x,\ \theta)\,dx}_{=I_n(\theta)}$$

Получаем:

$$1 \leqslant \mathcal{D}(\theta) \cdot I_n(\theta) \Rightarrow \mathcal{D}(\theta) \geqslant \frac{1}{I_n(\theta)}$$

Определение

Оценка $\hat{\theta}$ называется $\underline{R\text{-эффективной}}$, если $E\hat{\theta} = \theta$ и $\mathcal{D}\hat{\theta} = \frac{1}{I_n(\theta)}$

Лекция 24 января

Замечание 1

$I_n(\theta) = \mathcal{D}\left(\frac{\delta \ln f(x,\, \theta)}{\delta\theta}\right)$

Замечание 2

$I_n(\theta) = nI_1(\theta)$

$f(x,\, \theta) = f(x_1, \ldots,\, x_n,\, \theta) = \prod\limits_{i=1}^{n} f(x_i,\, \theta)$

$$E\left(\frac{\delta \ln f(x,\, \theta)}{\delta\theta}\right)^2 = E\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\delta \ln f(x_i,\, \theta)}{\delta\theta}\right)^2 = \sum_{i\neq j} E\left(\frac{\delta \ln f(x_i,\, \theta)}{\delta\theta} \cdot \frac{\delta \ln f(x_j,\, \theta)}{\delta\theta}\right) + nE\left(\frac{\delta \ln f(x_1, \theta)}{\delta\theta}\right)^2 =$$

$$= \sum_{i\neq j}\left(\underbrace{E\left(\frac{\delta \ln f(x_i,\, \theta)}{\delta\theta}\right)}_{=0} \cdot \underbrace{E\left(\frac{\delta \ln f(x_j,\, \theta)}{\delta\theta}\right)}_{=0}\right) + nE\left(\frac{\delta \ln f(x_1, \theta)}{\delta\theta}\right)^2 = nE\left(\frac{\delta \ln f(x_1, \theta)}{\delta\theta}\right)^2 = nI_1(\theta)$$

Замечание 3

Пример: $X_1, \ldots,\, X_n \sim N(\theta,\, \sigma^2)$

Рассмотрим оценку $\hat{\theta} = \overline{X}$, её дисперсия $\mathcal{D}\overline{X} = \frac{\sigma^2}{n}$. Посчитаем информацию Фишера:

$I_1(\theta) = E\left(\frac{\delta \ln f(x,\, \theta)}{\delta\theta}\right)^2 = E\left(\frac{\delta}{\delta\theta} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}}\right)\right)^2 = E\left(\frac{\delta}{\delta\theta} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} - \frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}\right)\right)^2 = E\left(\frac{x-\theta}{\sigma^2}\right)^2 =$

$= \frac{1}{\sigma^4} E(x-\theta)^2 = \frac{\sigma^2}{\sigma^4} = \frac{1}{\sigma^2} \Rightarrow I_n(\theta) = \frac{n}{\sigma^2}$

Знаем, что $\mathcal{D}\hat{\theta} \geqslant \frac{1}{nI_1(\theta)} = \frac{\sigma^2}{n} = \mathcal{D}(\overline{X}) \Rightarrow$ оценка $\hat{\theta} = \overline{X}$ является R-эффективной.

Критерий эффективности $X_1, \ldots,\, X_n \sim F_\xi(x,\, \theta),\ \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^1$ выполнены условия регулярности, то есть

$$\int T(x) \frac{\delta f(x,\, \theta)}{\delta\theta}\, dx = \frac{\delta}{\delta\theta} \int T(x) f(x,\, \theta)\, dx = E\hat{\theta}$$

Определение

Функцией вклада выборки $X_1, \ldots,\, X_n$ называется

$$U(x,\, \theta) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta \ln f(x_i,\, \theta)}{\delta\theta}$$

Пусть $0 < U(x,\theta) < \infty$.

$\hat{\theta} = T(x_1, \ldots,\, x_n)$ — R-эффективная оценка $\theta \Leftrightarrow \hat{\theta} - \theta = a(\theta) U(x,\, \theta)$, где $a(\theta) = \mathcal{D}\hat{\theta}$

Доказательство $\Rightarrow$:

Пусть $\hat{\theta} - \theta = a(\theta)U(x,\, \theta) \Rightarrow \hat{\theta}$ — R-эффективная оценка θ.

Посчитаем математическое ожидание частей равенства:

$$E(\hat{\theta} - \theta) = a(\theta) EU(x,\, \theta) = a(\theta) \int \frac{\delta \ln f(x,\, \theta)}{\delta\theta} f(x,\, \theta) dx = 0$$

Посчитаем дисперсию частей:

$$\mathcal{D}(\hat{\theta} - \theta) = a^2(\theta) \mathcal{D}U(x,\, \theta) = \underbrace{a^2(\theta)}_{=(\mathcal{D}(\hat{\theta}))^2} I_n(\theta) \Rightarrow \mathcal{D}(\hat{\theta}) = (\mathcal{D}(\hat{\theta}))^2 I_n(\theta) \Rightarrow 1 = \mathcal{D}(\theta) I_n(\theta)$$

Значит оценка является R-эффективной.
Доказательство $\Leftarrow$:
Пусть $\hat{\theta}$ — R-эффективная оценка $\Rightarrow \hat{\theta}-\theta = a(\theta)U(x,\ \theta)$. Хотим доказать, что $\rho(\hat{\theta},\ U(x,\ \theta)) = 1$.
Для подсчёта корреляции нужно посчитать ковариацию:

$$\text{cov}(\hat{\theta},\ U(x,\ \theta)) = E(\hat{\theta}-\theta)U(x,\ \theta) = E\hat{\theta}U(x,\ \theta) - \theta\underbrace{EU(x,\ \theta)}_{=0} =$$

$$= \int\limits_S T(x)U(x,\ \theta)f(x,\ \theta)\,dx = \int\limits_S T(x)\frac{\delta \ln f(x,\ \theta)}{\delta\theta}f(x,\ \theta)\,dx = 1$$

Так как $\hat{\theta}$ — R-эффективная оценка, то $\mathcal{D}\hat{\theta} = \frac{1}{I_n(\theta)}$. Знаем, что $\mathcal{D}U(x,\ \theta) = I_n(\theta)$, тогда:

$$\rho(\hat{\theta},\ U(x,\ \theta)) = \frac{\text{cov}(\hat{\theta},\ U(,\ \theta))}{\sqrt{\mathcal{D}\hat{\theta}\mathcal{D}U(x,\ \theta)}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{I_n(\theta)}{I_n(\theta)}}} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{\theta} = c_1 + c_2U(x,\ \theta)$$

$E\hat{\theta} = c_1 + Ec_2U(x,\ \theta) = c_1 + 0 = \theta$, так как оценка эффективная
$\mathcal{D}\hat{\theta} = c_2^2I_n(\theta) = \frac{1}{I_n(\theta)} \Rightarrow c_2^2 = \frac{1}{I_n^2} \Rightarrow c_2 = \frac{1}{I_n} = \mathcal{D}\hat{\theta} = a(\theta)$.
Итак, $\hat{\theta} = \theta + a(\theta)U(x,\ \theta) \Rightarrow \hat{\theta}-\theta = U(x,\ \theta)$.

Метод моментов

$X_1, \ldots,\ X_n \sim F_\xi(x,\ \theta),\ \theta \in \Theta \subset R^k$

$$\exists \mu_j < \infty,\ j = \overline{1,\ k} \quad \underbrace{\mu_j}_{=\mu_j(\theta)} = E\xi^j = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^jf(x,\ \theta)\,dx = 1$$

Тогда можно получить систему уравнений:

$$\begin{cases} \hat{\mu}_1 = \mu_1(\theta) \\ \vdots \\ \hat{\mu}_k = \mu_k(\theta) \end{cases} \tag{1}$$

Если система уравнений (1) однозначно разрешима относительно $\theta_1, \ldots,\ \theta_k$, то решения $\hat{\theta}_1, \ldots,\ \hat{\theta}_k$ называется равной $\theta_1, \ldots,\ \theta_k$ по методу моментов.

Пример

$X_1, \ldots,\ X_n \sim N(\theta_1,\ \theta_2^2),\ \theta = (\theta_1,\ \theta_2^2)$, тогда:

$$\begin{cases} \hat{\mu}_1 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n x_i = \theta_1 \Rightarrow \hat{\theta}_1 = \overline{X} \\ \hat{\mu}_2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n x_i^2 = \theta_2^2 + \theta_1^2,\ \left(E\xi^2 = \mathcal{D}\xi + (E\xi)^2\right) \Rightarrow \hat{\theta}_2^2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n x_i^2 = \overline{X}^2 \end{cases}$$

Метод максимального правдоподобия (ММП)

Определение

Функцией правдоподобия для $X_1, \ldots,\ X_n$, порождённых случайной величиной ξ, называется функция

$$L(x_1, \ldots,\ x_n,\ \theta) = \begin{cases} \prod\limits_{i=1}^n f(x_i,\ \theta),\ \text{если } \xi \text{ — непрерывная случайная величина} \\ \prod\limits_{i=1}^n P(\xi = x_i,\ \theta),\ \text{если } \xi \text{ — дискретная случайная величина} \end{cases}$$

Определение

Реализацией оценки максимального правдоподобия (ОМП) называется значение $\hat{\theta} \in \Theta$, такое что:

$$\hat{\theta} = \text{argmax}\, L(x_1, \ldots,\ x_n,\ \theta),\ \text{где}\ \theta \in \Theta$$

Для нахождения точки максимума нужно взять частные производные по всем составляющим θ от функции правдоподобия. Однако считать производную произведения нам впадлу, поэтому мы введём следующую вещь:

Определение

Функция $\ln L(x_1, \ldots,\ x_n,\ \theta)$ называется логарифмической функцией правдоподобия.
Итак, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\delta \ln L(x_1, \ldots,\ x_n,\ \theta)}{\delta \theta_1} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\delta \ln L(x_1, \ldots,\ x_n,\ \theta)}{\delta \theta_k} = 0 \end{cases}$$

Логарифм монотонный, поэтому его argmax совпадёт с argmax функции $L(x_1, \ldots,\ x_n,\ \theta)$ (НАУКА!).

Пример

Для Гауссовской величины $N(\theta_1,\ \theta_2^2)$:

$$L(x_1, \ldots,\ x_n,\ \theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\theta_1)^2}{2\theta_2^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \left(\frac{1}{\theta_2}\right)^n e^{-\frac{(x-\theta_1)^2}{2\theta_2^2}}$$

Логарифмируем:

$$\ln L(x_1, \ldots,\ x_n,\ \theta) = \ln \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n - n \ln \theta_2 - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \theta_1)^2}{2\theta_2^2}$$

Возьмём частные производные:

$$\begin{cases} \frac{\delta \ln L(x_1, \ldots,\ x_n,\ \theta)}{\delta \theta_1} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \hat{\theta}_1)}{\hat{\theta}_2^2} \\ \frac{\delta \ln L(x_1, \ldots,\ x_n,\ \theta)}{\delta \theta_2} = -\frac{n}{\hat{\theta}_2} + \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \hat{\theta}_1)^2}{\hat{\theta_2}^3} \end{cases}$$

Посчитаем $\theta_1,\ \theta_2$:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \hat{\theta}_1) = 0 \Rightarrow \hat{\theta}_1 = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \overline{X} \\ -n\hat{\theta}_2^2 + \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 = 0 \Rightarrow \hat{\theta}_2^2 = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 \end{cases}$$

Лекция 31 января.

Робастные оценки

От слова robust.

Определение

Пусть оценка $\hat{\theta}_n$ построена по выборке $X_1, \ldots,\ X_n$. Затем добавлено наблюдение x и построена оценка $\hat{\theta}_{n+1}$, тогда кривой чувствительности, изучающей влияние наблюдения x на оценку $\hat{\theta}$ называется функция:

$$SC_n(x) = \frac{\hat{\theta}_{n+1} - \hat{\theta}_n}{\frac{1}{n+1}} = (n+1)\left(\hat{\theta}_{n+1} - \hat{\theta}_n\right)$$

Определение

Оценка $\hat{\theta}$ называется B-робастной, если $SC_n(x)$ ограничена.

Пример

Пусть $\hat{\theta} = \overline{X}$

$$SC_n(x) = (n+1)\left(\frac{1}{n+1}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i) + x\right) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i + x - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = x - \overline{X}$$

Это линейная функция от x, то есть кривая чувствительности неограничена.
Пусть $\hat{\theta} = \hat{\mu}$ (выборочная медиана)

$$\hat{\mu} = \begin{cases} X_{(k+1)},\ n = 2k+1 \\ \frac{X_{(k)} + X_{(k+1)}}{2},\ n = 2k \end{cases}$$

Определение

Пороговой точкой (BP) ε_n^* оценки $\hat{\theta}$, построенной на выборке $X_1, \ldots,\ X_n$ называется:

$$\varepsilon_n^* = \frac{1}{n}\max\left\{m : \max_{i_1, \ldots,\ i_m} \sup_{y_1, \ldots,\ y_m} |\hat{\theta}(z_1, \ldots,\ z_m)| < \infty\right\}$$

Где выборка $z_1, \ldots,\ z_m$ получена заменой значений $X_{i_1}, \ldots,\ X_{i_m}$ на произвольные значения $y_1, \ldots,\ y_m$

Доверительные интервалы

Определение

Пусть для $X_1, \ldots,\ X_n \sim F(x,\ \theta),\ \theta \subset \Theta \subset \mathbb{R}^1$ построены статистики $T_1(x_1, \ldots,\ x_n)$ и $T_2(x_1, \ldots,\ x_n)$, такие что

$$\begin{cases} T_1(x) < T_2(x) \\ P\big(T_1(x) < \theta < T_2(x)\big) = 1 - \alpha,\ 0 < \alpha < 1 \end{cases}$$

Тогда интервал $\big(T_1(x),\ T_2(x)\big)$ называется доверительным интервалом уровня надёжности (доверия) $1 - \alpha$ параметра θ.

Определение

Случайная функция $G(x_1, \ldots,\ x_n,\ \theta) = G(x,\ \theta)$ называется центральной (опорной) статистикой, если

1. $G(x,\ \theta)$ непрерывна и монотонна по θ
2. $F_G(x)$ не зависит от θ

Односторонние доверительные интервалы:

$$P\big(G(x,\ \theta) < Z_{1-\alpha}\big) = 1 - \alpha$$

$$P\big(Z_\alpha < G(x,\ \theta)\big) = 1 - \alpha$$

Квантили не зависят от θ, с их помощью можно выразить односторонние доверительные интервалы.
Центральным доверительным интервалом будет:

$$P\big(Z_{\frac{\alpha}{2}} < G(x,\ \theta) < Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\big) = 1 - \alpha$$

Определение

Пусть случайные величины $\xi_1, \ldots,\ \xi_m \sim N(0,\ 1)$ и независимы.
Тогда случайная величина $\eta = \sum\limits_{i=1}^{m} \xi_i^2 \sim \chi^2(m)$ (удовлетворяет распределению хи-квадрат (χ^2) с m степенями свободы).

Определение

Пусть $\xi_0,\ \xi_1, \ldots,\ \xi_m \sim N(0,\ 1)$ и независимы.
Тогда случайная величина $\zeta = \frac{\xi_0}{\sqrt{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\xi_i^2}} \sim t(m)$ (распределение Стьюдента с m степенями свободы)

Определение

Пусть случайная величина $\xi_1 \sim \chi^2(m),\ \xi_2 \sim \chi^2(n)$ и ξ_1 и ξ_2 — независимы. Тогда случайная величина $F = \frac{\frac{1}{m}\xi_1}{\frac{1}{n}\xi_2} \sim F(m,\ n)$ (распредление Фишера со степенями свободы $n,\ m$)

Теорема Фишера

Пусть $X_1, \ldots,\ X_n$ порождены случайной величиной $X \sim N(m,\ \sigma^2)$, тогда:

1. $\frac{nS^2}{\sigma^2} = \sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \overline{x}}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n-1)$ (так как мы знаем $\overline{X}$, и все наблюдения, а по $n-1$ наблюдению и $\overline{X}$ можно восстановить последнее наблюдение)
2. $\overline{X}$ и S^2 — независимые случайные величины.

Пример 1

$X_1, \ldots,\ X_n \sim N(\theta,\ \sigma^2),\ \sigma^2$ — известно. Построить доверительный инртервал для θ

$$\hat{\theta} = \overline{X} \sim N(\theta,\ \frac{\sigma^2}{n})$$

$$\frac{\sqrt{n}(\overline{X} - \theta)}{\sigma} \sim N(0,\ 1)$$

$$P\left(Z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\sqrt{n}(\overline{X} - \theta)}{\sigma} < Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

Поскольку по середине стоит стандартное гауссовское распределение: $Z_{\frac{\alpha}{2}} = -Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

$$P\left(-\frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma}{\sqrt{n}} - \overline{X} < -\theta < \frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma}{\sqrt{n}} - \overline{X}\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\overline{X} - \frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma}{\sqrt{n}} < \theta < \overline{X} + \frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

Итак, доверительный интервал: $\left(\overline{X} - \frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{X} + \frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

Пример 2

$X_1, \ldots,\ X_n \sim N(m,\ \theta_2^2)$. Построить доверительный интервал для θ_2^2

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - m}{\theta_2}\right)^2 \sim \chi^2(n)$$

$$P\left(\chi^2_{n,\ \frac{\alpha}{2}} < \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - m)^2}{\theta_2^2} < \chi^2_{n,\ 1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - m)^2}{\chi^2_{n,\ 1-\frac{\alpha}{2}}} < \theta_2^2 < \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - m)^2}{\chi^2_{n,\ \frac{\alpha}{2}}}\right) = 1 - \alpha$$

Здесь $\chi^2_{n,\ \alpha}$ — квантиль уровня α распределения $\chi^2(n)$

Пример 3

Если нам неизвестны оба параметра $N(\theta_1,\ \theta_2^2)$. Заменяем m на $\overline{X}$: Доверительный интервал для θ_2:

$$P\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})^2}{\chi^2_{n,\ 1-\frac{\alpha}{2}}} < \theta_2^2 < \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})^2}{\chi^2_{n,\ \frac{\alpha}{2}}}\right) = 1-\alpha$$

Доверительный интервал для θ_1:

$$\frac{\sqrt{n}\left(\frac{\overline{X}-\theta}{\sigma}\right)}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum\left(\frac{(x_i-\overline{X})}{\sigma}\right)^2}} = \frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\theta_1)}{\tilde{S}} \sim t(n-1)$$

Обозначим $t_{n,\ \alpha}$ квантиль уровня α распределения $t(n)$, заметим, что $t_{n,\ 1-\alpha} = t_{n,\ 1-\frac{\alpha}{2}}$

$$P(t_{n,\ 1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\theta_1)}{\tilde{S}} < t_{n,\ \frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha$$

$$P(\overline{X} - \frac{\tilde{S}\cdot t_{n,\ 1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} < \theta_1 < \overline{X} + \frac{\tilde{S}\cdot t_{n,\ 1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}) = 1-\alpha$$

Лекция 7 февраля

Задача

$X_1, \ldots,\ X_{n_1} \sim N(m_1,\ \sigma_1^2)$ и $Y_1, \ldots,\ Y_{n_2} \sim N(m_2,\ \sigma_2^2)$. σ известны, m — неизвестны.
$X_1, \ldots,\ X_n$ и $Y_1, \ldots,\ Y_n$ независимы. Доверительнный интервал для $\theta = m_1 - m_2$

$$T(x,\ y) = \frac{\overline{X}-\overline{Y}-\theta}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

Задача

Пусть $X_1, \ldots,\ X_{n_1} \sim N(m_1,\ \sigma^2),\ Y_1, \ldots,\ Y_{n_2} \sim N(m_2,\ \sigma^2)$. σ неизвестна. Выборки независимы.

Утверждение

$$\frac{\sum_{i=1}^{n_1}\left(x_i-\overline{X}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n_2}\left(y_i-\overline{Y}\right)^2} \sim F(n_1-1,\ n_2-1)$$

$$\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(m_1-m_2)}{\sqrt{\hat{\mathcal{D}}(\overline{X}-\overline{Y})}}$$

Посчитаем дисперсию в знаменателе:

$$\mathcal{D}(\overline{X}-\overline{Y}) = \mathcal{D}\overline{X}+\mathcal{D}\overline{Y} = \frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2} = \sigma^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1}\left(x_i-\overline{X}\right)^2+\sum_{i=1}^{n_2}\left(y_i-\overline{Y}\right)^2}{n_1+n_2-2}$$

Тогда

$$\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(m_1-m_2)}{\sqrt{\hat{\mathcal{D}}(\overline{X}-\overline{Y})}} = \frac{\overline{X}-\overline{Y}-(m_1-m_2)}{S\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2)$$

Теперь можно построить доверительный интервал:

$$P\left(-t_{1-\alpha/2,\, n_1+n_2-2} < \frac{\overline{X}-\overline{Y}-\theta}{S\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} < t_{1-\alpha/2,\, n_1+n_2-2}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(-t_{1-\alpha/2,\, n_1+n_2-2}\cdot S\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}} - (\overline{X}-\overline{Y}) < -\theta < t_{1-\alpha/2,\, n_1+n_2-2}\cdot S\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}} - (\overline{X}-\overline{Y})\right) = 1-\alpha$$

$$P\left((\overline{X}-\overline{Y}) - t_{1-\alpha/2,\, n_1+n_2-2}\cdot S\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}} < \theta < t_{1-\alpha/2,\, n_1+n_2-2}\cdot S\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}} + (\overline{X}-\overline{Y})\right) = 1-\alpha$$

Асимптотические доверительные интервалы

Пусть $X_1,\ldots,\, X_n \sim F(x,\, \theta),\ \theta\in\Theta\subset\mathbb{R}^1$
$\hat{\theta}$ — состоятельная оценка θ.

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n-\theta) \xrightarrow[n\to\infty]{d} U,\ U\sim N\big(0,\, \sigma^2(\theta)\big)$$

И $\sigma^2(\theta)$ непрерывна по θ.

$$P\left(Z_{\alpha/2} < \frac{\sqrt{n}(\hat{\theta}_n-\theta)}{\sigma(\hat{\theta}_n)} < Z_{1-\alpha/2}\right) \to 1-\alpha$$

$$P\left(\hat{\theta}_n - \frac{\sigma(\hat{\theta}_n)Z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} < \theta < \frac{\sigma(\hat{\theta}_n)Z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} + \hat{\theta}_n\right)$$

Если $\exists$ R-эффективная оценка $\hat{\theta}_n$, то выбирая её $\mathcal{D}\hat{\theta}_n = \frac{1}{I_n(\theta)}$, тогда $\frac{\sigma(\hat{\theta}_n)}{\sqrt{n}} = \sqrt{\mathcal{D}\hat{\theta}_n} = \frac{1}{\sqrt{nI_1(\hat{\theta}_n)}}$

$$P\left(\hat{\theta}_n - \frac{Z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{nI_1(\hat{\theta}_n)}} < \theta < \hat{\theta}_n + \frac{Z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{nI_1(\hat{\theta}_n)}}\right) \to 1-\alpha$$

Пример

$X_1,\ldots,\, X_n \sim Bi(1,\, \theta)$
АДИ для θ:

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \text{ – несмещённая, состоятельная, R-эффективная}$$

$\mathcal{D}x_i = \theta(1-\theta)$.

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}-\theta) \xrightarrow[n\to\infty]{d} U,\ U\sim N\big(0,\, \theta(1-\theta)\big)$$

$$P\left(\hat{\theta} - Z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{\theta}(1-\hat{\theta})}{n}} < \theta < \hat{\theta} + Z_{1-\alpha/2}\frac{\sqrt{\hat{\theta}(1-\hat{\theta})}}{\sqrt{n}}\right) \to 1-\alpha$$

Определение

Основная (или нулевая) гипотеза H_0, с ней конкурируют $H_1,\ H_2,\ldots,\ H_A$ (альтернативные гипотезы).

Определение

Сложной гипотезой называют гипотезу, которая не определяет параметры распределения или само распределение однозначно.
Например

$$H_1 : \xi \sim N(m,\, \sigma^2)$$

$$H_2 : \xi \sim N(5,\, \sigma^2)$$

Простая гипотеза определяет распределение однозначно, например:

$$H_3 : \xi \sim N(5,\ 36)$$

Односторонние гипотезы выглядят так:

$$H_4 : \xi m < 5$$

$$H_5 : \xi m > 5$$

Двусторонние:

$$H_6 : n \neq 5$$

$$H_7 : m \in [1,\ 3]$$

А гипотеза H_8 : {"Сегодня хорошая погода"} не является статистической, ведь не относится к распределению и параметрам.

Определение

Статистическим критерием называют правило, руководствуясь которым, на основании реализации $x_1, \ldots,\ x_n$ выборки $X_1, \ldots,\ X_n$ принимается решение о справедливости/несправедливости гипотезы H_0.
Делим множество реализаций выборки S на два множества $S_0,\ S_1$, такие что

$$S_0 \cdot S_1 = \varnothing$$

$$S_0 + S_1 = S$$

Назовём S_0 доверительной областью, а S_1 — критической областью. Если реализация попала в S_0, то мы принимаем H_0, иначе принимает альтернативную гипотезу.
Тогда ошибкой первого рода (уровнем значимости критерия) называется

$$P(X \in S_1 \mid \text{верна } H_0) = \alpha$$

Ошибкой второго рода называется

$$P(X \in S_0 \wedge \text{верна } H_1) = 1 - \beta$$

Определение

Пусть критерий предназначен для проверки $H_0 : \theta = \theta_0$ против альтернативы $H_1 : \theta \neq \theta_0$, тогда функцией мощности критерия называется

$$\beta(\theta) = P(X \in S_1,\ \theta)$$

Критерий называется состоятельным, если при отдалении от θ_0 его функция мощности стремится к 1.

Лекция 13 февраля

Проверка статистических гипотез

Если β — функция мощности критерия проверки гипотезы $H_0 : \theta = \theta_0$, тогда $\beta(\theta) = P(X \in S_1,\ \theta)$ и $\beta(\theta_0) = \alpha$, где α — вероятность ошибки первого рода.

Задача

$H_0 : \theta = \theta_0$ и $H_1 : \theta \in \Theta_1$, $\theta_0 \notin \Theta_1$. Пусть зафиксировано $\alpha > 0$, тогда критерий называется несмещённым, если:

$$\beta(\theta) \leqslant \alpha, \text{ если } \theta = \theta_0$$

$$\beta(\theta) > \alpha, \text{ если } \theta \in \Theta_1$$

Определение

Критерий, предназначенный для проверки $H_0 : \theta = \theta_0$ против $H_1 : \theta \in \Theta_1$ называется состоятельным, если

$$\forall \theta \in \Theta_1 \quad \beta(\theta) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1, \text{ где } n \text{ — количество испытаний}$$

Определение

Критерий β_0 называется равномерно наиболее мощным, если среди всех критериев β:

$$\forall \theta \in \Theta \quad \beta_0(\theta) \geqslant \beta(\theta)$$

Локально наиболее мощным, если

$$\forall \theta \in \Theta_1 \subseteq \Theta \quad \beta_0(\theta) \geqslant \beta(\theta)$$

Алгоритм проверки параметрических гипотез

1. Сформулировать проверяемую гипотезу H_0 и альтернативную к ней H_1.
2. Выбрать уровень значимости α
3. Выбрать статистику T для проверки гипотезы H_0
4. Найти распределение $F(z \mid H_0)$ статистики T, при условии $\{$“H_0 верна”$\}$
5. Построить, в зависимости от формулировки гипотезы H_1 и уровня значимости α, критическую область $\overline{G}$
6. Получить реализацию выборки наблюдений $x_1, \ldots, x_n$ и вычислить реализацию $t = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ статистики T критерия
7. Принять статистическое решение на уровне доверия $1 - \alpha$: если $t \in \overline{G}$, то отклонить гипотезу H_0 как не согласующуюся с результатами наблюдений, а если $t \in G$, то принять гипотезу H_0 как не противоречащую результатам наблюдений.

Задача

Дамы оценивают чай. Могут ли из двух чашек выбрать чашку с хорошим чаем?
Проводятся наблюдения $X_1, \ldots, X_n \sim Bi(1, p)$

1. $H_0 : p = p_0 = 0.5, \ H_1 : p > 0.5$. То есть H_0 — дамы не могут выбрать (просто пытаются угадать).
2. $\alpha = 0.05$. Так как специально указано не было, берём стандартное значение.
3. $T(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$
4. $T(x \mid H_0) \sim Bi(n, \frac{1}{2})$. Если n велико:
$$\frac{T(x) - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} = \tilde{T}(x) \sim N(0, 1)$$
5. Доверительная область: $[0, Z_{0{,}95}] = [0, 1.65]$. Критическая область: $(1.65, +\infty)$
6. Пусть у нас есть данные $n = 30, \sum_{i=1}^{30} x_i = 20 = T(x)$
$$\tilde{T}(x) = \frac{20 - 30 \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{30 \cdot 0.5 \cdot 0.5}} \approx 1.82574$$
7. Попали в критическую область, значит принимаем H_1 на уровне доверия $1 - \alpha = 0.95$

Задача

А если у нас есть две серии различных испытаний Бернулли?
Пусть $\xi_1 \sim Bi(n_1,\ p_1)$ и $\xi_2 \sim Bi(n_2,\ p_2)$. Хотим проверить $H_0 : p_1 = p_2$ против альтернатив $H_1 : p_1 < p_2,\ H_2 : p_1 > p_2,\ H_3 : p_1 \neq p_2$.
Введём обозначение $\hat{p}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} x_{i\,1}}{n_1},\ \hat{p}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_2} x_{i\,2}}{n_2}$, тогда:

$$\frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\mathcal{D}(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)}} \sim N(0,\ 1)$$

Посчитаем $\mathcal{D}(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) = \mathcal{D}(\hat{p}_1) + \mathcal{D}(\hat{p}_2) - 2\underbrace{\text{cov}(\hat{p}_1,\ \hat{p}_2)}_{=0} = \frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2} = pq\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)$.

Оценим p:

$$\hat{p} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n_1} x_{i\,1} + \sum\limits_{i=1}^{n_2} x_{i\,2}}{n_1 + n_2}$$

Тогда $\tilde{T}(x) = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$. По этой статистике уже можем принимать решения.

Лекция 21 февраля

Лемма Неймана-Пирсона

Пусть $X_1, \ldots,\ X_n \sim f(x,\ \theta)$, параметр θ неизвестен. Проверяется простая гипотеза $H_0 : \theta = \theta_0$ против простой альтернативной гипотезы $H_1 : \theta = \theta_1$ (БОО $\theta_1 > \theta_0$).
Существует наиболее мощный критерий для проверки H_0 против H_1 с критической областью $S^*_{1\,\alpha} = \{(x_1, \ldots,\ x_n) \mid T(x_1, \ldots,\ x_n) \geqslant c_\alpha\}$, где $T(x_1, \ldots,\ x_n) = \frac{L(x_1, \ldots,\ x_n,\ \theta_1)}{L(x_1, \ldots,\ x_n,\ \theta_0)} = \frac{\prod_{i=1}^n f(x_i,\ \theta_1)}{\prod_{i=1}^n f(x_i,\ \theta_0)}$, а c_α такое что $P_{\theta_0}(T(x) \geqslant c_\alpha) = \alpha$

Доказательство

Пусть есть критерий с критической областью $S_{1\,\alpha}$ лучше (более мощный) предложенного нашей леммой.
Тогда (под x далее понимается вектор $(x_1, \ldots,\ x_n)$):

$$\beta(\theta_1,\ S_{1\,\alpha}) = \int\limits_{S_{1\,\alpha}} \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\ \theta_1)\, dx_1 \ldots dx_n = \int\limits_{S_{1\,\alpha}} L(x,\ \theta_1)\, dx = \int\limits_{S_{1\,\alpha} S^*_{1\,\alpha}} L(x,\ \theta_1)\, dx + \int\limits_{S_{1\,\alpha} \overline{S}^*_{1\,\alpha}} L(x,\ \theta_1)\, dx =$$

По определению функции $T(x)$:

$$T(x) = \frac{L(x,\ \theta_1)}{L(x,\ \theta_0)} \Rightarrow T(x) L(x,\ \theta_0) = L(x,\ \theta_1)$$

Подставим это в сумму:

$$= \int\limits_{S_{1\,\alpha} S^*_{1\,\alpha}} T(x) L(x,\ \theta_0)\, dx + \int\limits_{S_{1\,\alpha} \overline{S}^*_{1\,\alpha}} T(x) L(x,\ \theta_0)\, dx$$

По определению $\beta(\theta, S_1) = P\left(X \in S_1,\ \theta\right)$ то есть правдоподобие попадания случайной величины в критическую область при заданном параметре.

$$\beta(\theta_1,\ S^*_{1\,\alpha}) = \int\limits_{S^*_{1\,\alpha}} L(x,\ \theta_1)\, dx = \int\limits_{S_{1\,\alpha} S^*_{1\,\alpha}} L(x,\ \theta_1)\, dx + \int\limits_{\overline{S}_{1\,\alpha} S^*_{1\,\alpha}} L(x,\ \theta_1)\, dx =$$

$$= \int\limits_{S_{1\,\alpha} S^*_{1\,\alpha}} T(x) L(x,\ \theta_0)\, dx + \int\limits_{\overline{S}_{1\,\alpha} S^*_{1\,\alpha}} T(x) L(x,\ \theta_0)\, dx$$

Чуток пошаманим с выведенными формулами:

$$\beta\left(\theta_1,\, S_{1\,\alpha}\right) - \beta\left(\theta_1,\, S^*_{1\,\alpha}\right) = \left(\int\limits_{S_{1\,\alpha} S^*_{1\,\alpha}} T(x) L(x,\, \theta_0)\, dx + \int\limits_{S_{1\,\alpha} \overline{S}^*_{1\,\alpha}} T(x) L(x,\, \theta_0)\, dx \right) -$$

$$- \left(\int\limits_{S_{1\,\alpha} S^*_{1\,\alpha}} T(x) L(x,\, \theta_0)\, dx + \int\limits_{\overline{S}_{1\,\alpha} S^*_{1\,\alpha}} T(x) L(x,\, \theta_0)\, dx \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta\left(\theta_1,\, S_{1\,\alpha}\right) - \beta\left(\theta_1,\, S^*_{1\,\alpha}\right) = \int\limits_{S_{1\,\alpha} \overline{S}^*_{1\,\alpha}} \underbrace{T(x)}_{<c_\alpha} L(x,\, \theta_0)\, dx - \int\limits_{S^*_{1\,\alpha} \overline{S}_{1\,\alpha}} \underbrace{T(x)}_{\geqslant c_\alpha} L(x,\, \theta_0)\, dx$$

Теперь можно составить равенство:

$$\beta(\theta_1,\, S_{1\,\alpha}) = \beta(\theta_1,\, S^*_{1\,\alpha}) + \int\limits_{S_{1\,\alpha} \overline{S}^*_{1\,\alpha}} \underbrace{T(x)}_{<c_\alpha} L(x,\, \theta_0)\, dx - \int\limits_{S^*_{1\,\alpha} \overline{S}_{1\,\alpha}} \underbrace{T(x)}_{\geqslant c_\alpha} L(x,\, \theta_0)\, dx$$

Правый интеграл содержит область $S^*_{1\,\alpha}$, по заданию это множество таких точек, в которых $T(x) \geqslant c_\alpha$.
Левый интеграл, наоборот, содержит $\overline{S}^*_{1\,\alpha}$, то есть все точки, в которых $T(x) < c_\alpha$.
Значит будет справедливо неравенство:

$$\beta(\theta_1,\, S_{1\,\alpha}) < \beta(\theta_1,\, S^*_{1\,\alpha}) + c_\alpha \left(\int\limits_{S_{1\,\alpha} \overline{S}^*_{1\,\alpha}} L(x,\, \theta_0)\, dx - \int\limits_{S^*_{1\,\alpha} \overline{S}_{1\,\alpha}} L(x,\, \theta_0)\, dx \right)$$

Вероятность попадания в критическую область должна быть равна α, тогда верно:

$$\alpha = \int\limits_{S_{1\,\alpha}} L(x,\, \theta_0)\, dx = \int\limits_{S^*_{1\,\alpha}} L(x,\, \theta_0)\, dx$$

При этом

$$\int\limits_{S_{1\,\alpha}} L(x,\, \theta_0)\, dx = \int\limits_{S_{1\,\alpha} S^*_{1\,\alpha}} L(x,\, \theta_0)\, dx + \int\limits_{S_{1\,\alpha} \overline{S}^*_{1\,\alpha}} L(x,\, \theta_0)\, dx$$

$$\int\limits_{S^*_{1\,\alpha}} L(x,\, \theta_0)\, dx = \int\limits_{S^*_{1\,\alpha} S_{1\,\alpha}} L(x,\, \theta_0)\, dx + \int\limits_{S^*_{1\,\alpha} \overline{S}_{1\,\alpha}} L(x,\, \theta_0)\, dx$$

$$\int\limits_{S_{1\,\alpha}} L(x,\, \theta_0)\, dx - \int\limits_{S^*_{1\,\alpha}} L(x,\, \theta_0)\, dx = \int\limits_{S_{1\,\alpha} \overline{S}^*_{1\,\alpha}} L(x,\, \theta_0)\, dx - \int\limits_{S^*_{1\,\alpha} \overline{S}_{1\,\alpha}} L(x,\, \theta_0)\, dx = \alpha - \alpha = 0$$

Тогда в ранее записанном неравенстве:

$$c_\alpha \left(\int\limits_{S_{1\,\alpha} \overline{S}^*_{1\,\alpha}} L(x,\, \theta_0)\, dx - \int\limits_{S^*_{1\,\alpha} \overline{S}_{1\,\alpha}} L(x,\, \theta_0)\, dx \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta(\theta_1,\, S_{1\,\alpha}) < \beta(\theta_1,\, S^*_{1\,\alpha}) + 0 \Rightarrow \beta(\theta_1,\, S_{1\,\alpha}) < \beta(\theta_1,\, S^*_{1\,\alpha})$$

То есть всякая критическая область, отличная от $S^*_{1\,\alpha}$, будет менее мощной.

Задача

$X_1, \ldots,\, X_n \sim N(m, \sigma^2)$, дисперсия известна. Построить наиболее мощный критерий для проверки $H_0 : m = m_0$ против $H_1 : m = m_1 > m_0$

Решение (моё)

По лемме Неймана-Пирсона критическая область необходимого нам критерия должна выглядеть так:

$$S^*_{1\alpha} = \{(x_1, \ldots,\ x_n) \mid T(x) \geqslant c_\alpha\},\ T(x) = \frac{L(x,\ m_1)}{L(x,\ m_0)} \geqslant c_\alpha,\ P_{m_0}\left(T(x) \geqslant c_\alpha\right) = \alpha$$

$$L(x,\ m_1) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\ m_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n e^{-\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - m_1)^2}{2\sigma^2}}$$

$$L(x,\ m_0) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\ m_0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n e^{-\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - m_0)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\frac{L(x,\ m_1)}{L(x,\ m_0)} = e^{\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - m_0)^2 - (x_i - m_1)^2}{2\sigma^2}} = e^{\sum_{i=1}^n \frac{(m_0 - m_1)(2x_i - m_1 - m_2)}{2\sigma^2}}$$

Хотим найти такое c_α, что $P\left(T(x) \geqslant c_\alpha\right) = \alpha$, то есть хотим найти:

$$F_{T(x)}(c_\alpha) = \alpha \Rightarrow \int\limits_{-\infty}^{c_\alpha} e^{\sum_{i=1}^n \frac{(m_0 - m_1)(2x_i - m_1 - m_2)}{2\sigma^2}}\, dx = \alpha$$

Ответ с лекции

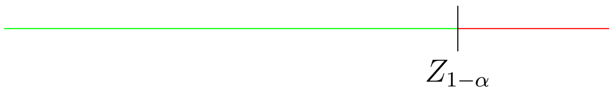
$S^*_{1\alpha}\{(x_1, \ldots,\ x_n) \mid \overline{X} \geqslant m_0 + \frac{Z_{1-\alpha}\sqrt{n}}{\sigma}\} = \{(x_1, \ldots,\ x_n) \mid \frac{(\overline{X} - m_0)\sqrt{n}}{\sigma} \geqslant Z_{1-\alpha}\}$

Задача

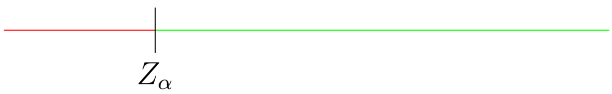
Для проверки гипотезы $H_0 : m = m_0$

$$T(x) = \frac{(\overline{X} - m_0)\sqrt{n}}{\sigma} \Rightarrow T(x)\big|_{H_0 : m = m_0} \sim N(0,\ 1)$$

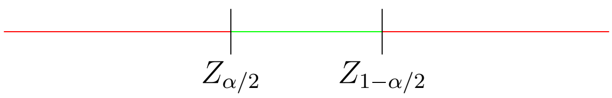
Против гипотезы $H_1 : m > m_0$



Против гипотезы $H_2 : m < m_0$



Против гипотезы $H_3 : m \neq m_0$



Пояснение: на рисунках зелёным обозначена доверительная область, красным обозначена критическая область.

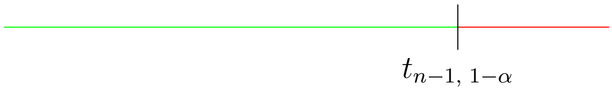
Задача

Снова гауссовская выборка, но дисперсия неизвестна. Хотим проверить гипотезу $H_0 : m = m_0$. Тогда нужно поменять статистику на:

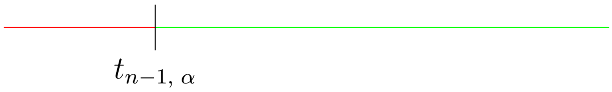
$$T(x) = \frac{(\overline{X} - m_0)\sqrt{n}}{\tilde{S}} = \frac{(\overline{X} - m_0)\sqrt{n-1}}{S}$$

$$T(x)\big|_{H_0} \sim t(n-1)$$

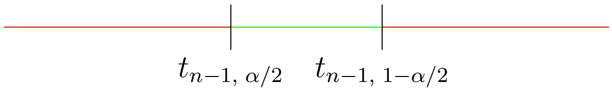
Против гипотезы $H_1 : m > m_0$



Против гипотезы $H_2 : m < m_0$



Против гипотезы $H_3 : m \neq m_0$



Та же самая идея, только разделение идёт по квантилям распределения Стьюдента.

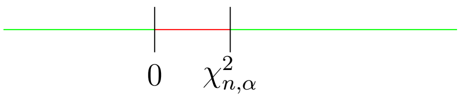
Задача

Теперь строим критерий для оценки дисперсии при известном математическом ожидании. Проверяем гипотезу $H_0 : \sigma = \sigma_0$:

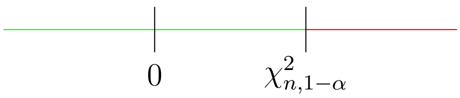
$$T(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2}{\sigma_0^2}$$

$$T(x)\big|_{H_0:\sigma=\sigma_0} \sim \chi^2(n)$$

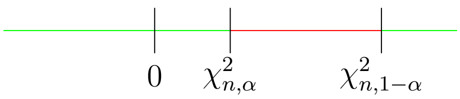
Против гипотезы $H_1 : \sigma < \sigma_0$



Против гипотезы $H_2 : \sigma > \sigma_0$



Против гипотезы $H_3 : \sigma \neq \sigma_0$



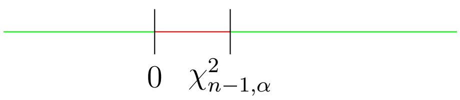
Задача

Если математическое ожидание неизвестно:

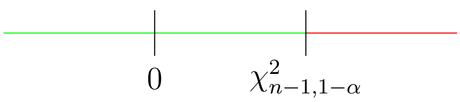
$$T(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2}{\sigma_0^2}$$

$$T(x)\big|_{H_0:\sigma=\sigma_0} \sim \chi^2(n-1)$$

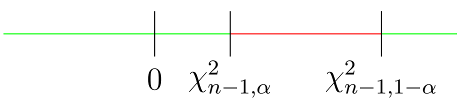
Против гипотезы $H_1 : \sigma < \sigma_0$



Против гипотезы $H_2 : \sigma > \sigma_0$



Против гипотезы $H_3 : \sigma \neq \sigma_0$



Проверка гипотез о распределении случайных величин

Критерий Колмогорова (КАКОЙ ЖЕ ОН КРУТОЙ)

$X_1, \ldots, X_n \sim F_\xi(x, \theta_0) = F_0(x),\ \theta_0$ известна. Проверяем гипотезу $H_0 : \xi \sim F_0(x)$
Колмогоров предложил считать $D_n = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \left|\hat{F}_n(x_i) - F_0(x_i)\right|$.
Если $n \to \infty$ (начиная с 20 уже хорошая апроксимация) и при условии верности H_0 получаем

$$\sqrt{n} D_n \sim K(t)$$

Функция распределения Колмогорова

$$K(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (-1)^j \exp\{-j^2 t^2\}$$

Критерий хи-квадрат

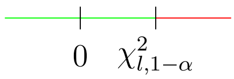
$X_1, \ldots, X_n \sim F_\xi(x, \theta_0) = F_0(x)$, θ_0 знаем. Проверяем гипотезу $H_0 : \xi \sim F_0(x)$.
Делим $\mathbb{R}^1$ на $l+2$ интервала, где $S_0 = -\infty,\ S_{l+1} = +\infty$ тогда $\hat{p}_k = \frac{n_k}{n},\ p_k^{(0)} = F_0(S_k) - F_0(S_{k-1})$, где $k = \overline{1,\ l+1}$.
Здесь возникает $\hat{\chi}^2 = \sum_{k=1}^{l+1} \frac{n}{p_k^{(0)}} \left(\hat{p}_k - p_k^{(0)}\right)^2$

Утверждение

Если $0 < p_k^{(0)} < 1$ для $\forall k = \overline{1,\ l+1},\ n \to \infty$ и справедлива H_0, то

$$\hat{\chi}^2 \sim \chi^2(l)$$

Тогда график будет выглядеть так



Задача

Проверяем теории из биологии

	$p_k^{(0)}$	n_k	$\hat{p}_k = \frac{n_k}{n}$
AB	$\frac{9}{16}$	315	0.556
Ab	$\frac{3}{16}$	108	0.194
aB	$\frac{3}{16}$	101	0.182
ab	$\frac{1}{16}$	32	0.058

Теперь проверим $H_0 : \vec{p}^{(0)} = \left(\frac{9}{16},\ \frac{3}{16},\ \frac{3}{16},\ \frac{1}{16}\right)$
Применяя критерий хи-квадрат:

$$\hat{\chi}^2 = 0.49,\ \text{посчитали за кадром}$$

$$\hat{\chi}^2\big|_{H_0} \sim \chi^2(3)$$

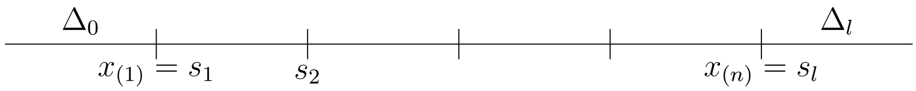
Тогда при параметрах $\alpha = 0.05,\ \chi^2_{3,\ 0.95} = 7.81 \Rightarrow$ наш результат лежит в доверительной области.

Лекция 28 февраля

Критерий хи-квадрат Пирсона

Имеется выборка $X_1, \ldots, X_n \sim F_\xi(x, \theta),\ \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^n$.
Проверяем гипотезу $H_0 : \xi \sim F_\xi^0(x, \theta)$ (здесь использован верхний индекс для указания на какое-то конкретное распределение).

1. Оценим вектор параметров $\theta = (\theta_1, \ldots,\ \theta_m)$ по методу максимального правдоподобия.
2. Разбиваем $\mathbb{R}^1$ на $(l+1)$ непересекающийся интервал.



3. Введём следующие обозначения:
$\forall k \in [1,\ l-1] \cap \mathbb{Z} \quad \hat{p}_k = \frac{n_k}{n}$
$\forall k \in [0,\ l] \cap \mathbb{Z} \quad p_k^{(0)}(\hat{\theta}) = P_{H_0}(\xi \in \Delta_k)\,,$ (вероятность ξ попасть в k-ый интервал при условии H_0)
$p_k^{(0)}(\hat{\theta}) = F\left(s_{k+1},\ \hat{\theta}\right) - F\left(s_k,\ \hat{\theta}\right)$

Тогда справедливо

$$\hat{\chi}^2 = \sum_{k=0}^{l} \frac{n}{p_k^{(0)}(\hat{\theta})} \left(\hat{p}_k - \hat{p}_k^{(0)}(\hat{\theta})\right)^2 = np_0^{(0)}(\hat{\theta}) + \sum_{k=1}^{l-1} \frac{n}{p_k^{(0)}(\hat{\theta})} \left(\hat{p}_k - \hat{p}_k^{(0)}(\hat{\theta})\right)^2 + np_l^{(0)}(\hat{\theta})$$

Утверждение

При $n \to \infty$, $p_k^{(0)} > 0, \sum\limits_{k=0}^{l} p_k^{(0)} = 1$ и соблюдении некоторых условий регулярности (про дифференцируемость и существование вторых производных) выполняется

$$\hat{\chi}^2\big|_{H_0} \sim \chi^2(l + 1 - 1 - m)$$

Здесь $l+1$ — количество интервалов, а m — количество оцененных параметров. Доверительным интервалом будет $(0,\ \chi^2_{1-\alpha,\, l-m})$

Определение

Выборки $X_1, \ldots,\ X_m \sim F_x(t)$ и $Y_1, \ldots,\ Y_m \sim F_y(t)$ называются однородными, если

$$\forall t \in \mathbb{R}^1 \quad F_x(t) \sim F_y(t)$$

Для доказательства однородности выборок следует проверять гипотезу $H_0 : \forall t \in \mathbb{R}^1 \quad F_x(t) = F_y(t)$

Пример

Имеется две выборки $X_1, \ldots,\ X_m \sim F(t)$ и $Y_1, \ldots,\ Y_n \sim F(t-\theta)$. Пусть $|EX| < \infty$, тогда

$$EY_1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} tf_y(t)\,dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} tf_x(t-\theta)\,dt = \left\langle \begin{matrix} t - \theta = z \\ t = z + \theta \end{matrix} \right\rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (z+\theta) f_x(z),\ dz =$$

$$= \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} zf_x(z)\,dz}_{EX} + \theta \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_x(z)\,dz}_{1} = EX + \theta$$

Тогда для проверки однородности могут быть использованы гипотезы:

$$H_0 : \theta = m_y - m_x = 0,\ \text{против} \ \left[\begin{matrix} H_1 : \theta < 0\ (m_y < m_x) \\ H_2 : \theta > 0\ (m_y > m_x) \\ H_3 : \theta \neq 0\ (m_y \neq m_x) \end{matrix}\right.$$

Критерий Стьюдента

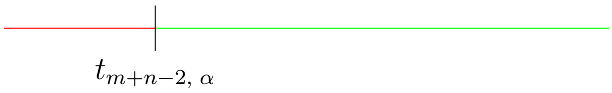
Есть две выборки $X_1, \ldots, X_m \sim N(m_x, \sigma^2)$ и $Y_1, \ldots, Y_n \sim N(m_y, \sigma^2)$. Выборки независимы и имеют одинаковые (но неизвестные нам) дисперсии.
Тогда для проверки гипотезы $H_0 : m_y - m_x = 0$ подойдёт статистика:

$$T(x,\ y) = \frac{\overline{Y} - \overline{X}}{S\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}}$$

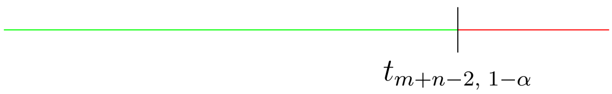
Здесь $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \overline{X})^2 + \sum_{i=1}^n (y_i - \overline{Y})^2}{m+n-2}$. При верности гипотезы H_0 получаем

$$T(x,\ y)\big|_{H_0} \sim t(n+m-2)$$

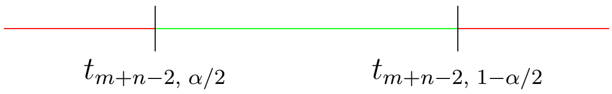
Против гипотезы $H_1 : \theta < 0$



Против гипотезы $H_2 : \theta > 0$



Против гипотезы $H_3 : \theta \neq 0$



Ранговые критерии

Определение

Рангом элемента выборки называется его номер в вариационном ряду:

$$R(x_{(k)}) = k$$

Процедура определения рангов элементов выборки называется ранжированием.

Определение

Связкой размера n называют n совпадающих элементов выборки.
Если связке размера m предшествует k элементов, то все элементы связки получают один ранг, равный

$$\frac{1}{m}\sum_{i=k+1}^{m+k} i$$

Ранговый критерий Вилкоксона (1945)

Предполагается $X_1, \ldots, X_m \sim F(t)$ и $Y_1, \ldots, Y_n \sim F(t-\theta)$. Выборки независимы, $F(t)$ — непрерывное распределение. Проверяем гипотезу $H_0 : \theta = 0$.
Интуитивно понятно, что в случае $\theta \ll 0$ (математическое ожидание Y сильно меньше, чем у X) элементы в вариационном ряду располагаются так:

$$y_{(1)}, \ldots,\ y_{(n)} x_{(1)}, \ldots,\ x_{(m)}$$

И в случае $\theta \gg 0$:

$$x_{(1)}, \ldots,\ x_{(m)} y_{(1)}, \ldots,\ y_{(n)}$$

Для проверки критерия введём следующую статистику:

$$W_{m,\,n} = \sum_{i=1}^{n} R_i, \text{ где } R_i - \text{ранг } Y_i \text{ в объединённой выборке}$$

Тогда для случая $\theta \ll 0$

$$\min W_{m,\,n} = \sum_{i=1}^{n} R_i = (n+1)\frac{n}{2}$$

Для случая $\theta \gg 0$

$$\max W_{m,\,n} = \sum_{i=1}^{n} R_i = (n+2m+1)\frac{n}{2}$$

Если $\theta = 0$, то выборка должна быть перемешана, тогда для статистики справедливо.

$$EW_{m,\,n}\big|_{H_0} = (n+m+1)\frac{n}{2},\ \mathcal{D}W_{m,\,n} = \frac{mn}{12}(m+n+1)$$

Лекция 7 марта

Разбираем пример на применение критерия Вилкоксона.
$X_1, \ldots,\ X_m \sim F_x(t)$ и $Y_1, \ldots,\ Y_n \sim F_y(t-\theta)$. Проверяем гипотезу $H_0 : \theta = 0$.

$$W_{m,\,n} = \sum_{i=1}^{n} R_i$$

Пусть $m = 4,\ n = 2$, тогда есть $C_6^2 = 15$ способов расставить y. Пусть $(R_1,\ R_2) = (r_1,\ r_2)$, тогда:

$(r_1,\ r_2)$	$W_{4,\,2}$	$P_{H_0}\big((R_1,\ R_2) = (r_1,\ r_2)\big)$
$(1,\ 2)$	3	$\frac{1}{15}$
$(1,\ 3)$	4	$\frac{1}{15}$
$(1,\ 4)$	5	$\frac{1}{15}$
$(1,\ 5)$	6	$\frac{1}{15}$
$(1,\ 6)$	7	$\frac{1}{15}$
$(2,\ 3)$	5	$\frac{1}{15}$
$(2,\ 4)$	6	$\frac{1}{15}$
$(2,\ 5)$	7	$\frac{1}{15}$
$(2,\ 6)$	8	$\frac{1}{15}$
$(3,\ 4)$	7	$\frac{1}{15}$
$(3,\ 5)$	8	$\frac{1}{15}$
$(3,\ 6)$	9	$\frac{1}{15}$
$(4,\ 5)$	9	$\frac{1}{15}$
$(4,\ 6)$	10	$\frac{1}{15}$
$(5,\ 6)$	11	$\frac{1}{15}$

Теперь можем составить таблицу

$W_{4,\,2}$	3	4	5	6	7	8	9	10	11
P	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$

Получается симметричное распределение, его функция распределения в некоторых точках:

$$F_W(3) = \frac{1}{15},\ F_W(4) = \frac{2}{15}$$

$EW_{m,\,n} = (m+n+1)\frac{n}{2} \Rightarrow EW_{4,\,2} = 7$
Распределение дискретное, поэтому квантиль считается так

$$Z_\beta = \min\{x \mid F(x) \geqslant \beta\}$$

Если $\min(m,\ n) \to \infty$, то

$$W^* = \left.\frac{W - EW_{m,\ n}}{\sqrt{\mathcal{D}W_{m,\ n}}}\right|_{H_0} \to N(0,\ 1)$$

Поправка на наличие связок. Имеется l связок и t_k — размер k-ой связки ($k = \overline{1,\ l}$). Тогда

$$\tilde{\mathcal{D}}W_{m,\ n} = \mathcal{D}W_{m,\ n} - \frac{mn\sum_{i=1}^{l} t_k(t_k^2 - 1)}{12N(N-1)},\ \text{где } N = m + n$$

Далее идёт 10 минут обсуждения плюсов данного метода.

Проверка гипотезы об однородности против гипотезы о растяжении (сжатии)

$X_1, \ldots,\ X_m \sim F(t-\mu)$ и $Y_1, \ldots,\ Y_n \sim F\left(\frac{t-\mu}{\Delta}\right),\ \Delta > 0$

Если $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,dt = 0$ и $\exists \mathcal{D}X$, то

$$EX = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} tf(t-\mu)\,dt = \langle z = t - \mu\rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (z+\mu)t(z)\,dz = \mu$$

$$\mathcal{D}X = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (t-\mu)^2 f(t-\mu)\,dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} z^2\,f(z)\,dz$$

$$\mathcal{D}Y = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (t-\mu)^2\frac{1}{\Delta}f\left(\frac{t-\mu}{\Delta}\right)\,dt = \left\langle \begin{aligned} z &= \frac{t-\mu}{\Delta} \\ dz &= \frac{1}{\Delta}dt \end{aligned}\right\rangle \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Delta^2 z^2 f(z)\,dz = \Delta^2\mathcal{D}X \Rightarrow \frac{\mathcal{D}Y}{\mathcal{D}X} = \Delta^2$$

Критерий Фишера

$X_1, \ldots,\ X_m \sim N(m_1,\ \sigma_1^2),\ Y_1, \ldots,\ Y_n \sim N(m_2,\ \sigma_2^2)$

Случайные величины независимы, параметры неизвестны. Проверяем гипотезу $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$$T(x,\ y) = \left.\frac{\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}\left(x_i - \overline{X}\right)^2}{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \overline{Y}\right)^2}\right|_{H_0} \sim F(m-1,\ n-1),\ \text{распределение Фишера}$$

$\xi \sim F(m,\ n) \Rightarrow \frac{1}{\xi} \sim F(n,\ m)$. Тогда для квантилей справедливо:

$$z_\beta - \text{ квантиль уровня } \beta \text{ распределения } F(m,\ n), \frac{1}{z_\beta} - \text{квантиль уровня } (1-\beta) \text{ распределения } F(n,\ m)$$

$$\beta = P\left(\xi \leqslant z_\beta\right) = P\left(\tfrac{1}{\xi} \geqslant \tfrac{1}{z_\beta}\right) = 1 - \underbrace{P\left(\frac{1}{\xi} \leqslant \frac{1}{z_\beta}\right)}_{=1-\beta}$$

$H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$
$\tilde{S}_1^2 > \tilde{S}_2^2 \Rightarrow$ принимаем H_0
$\tilde{S}_1^2 < \tilde{S}_2^2,\ T(x,\ y) = \frac{\tilde{S}_2^2}{\tilde{S}_1^2} \sim F(n-1,\ m-1) \Rightarrow$ на правом хвосте критическая область.
$H_2 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$
$\tilde{S}_1^2 < \tilde{S}_2^2 \Rightarrow$ принимаем H_0
$\tilde{S}_1^2 > \tilde{S}_2^2,\ T(x,\ y) = \frac{\tilde{S}_1^2}{\tilde{S}_2^2} \sim F(m-1,\ n-1) \Rightarrow$ снова на правом хвосте критическая область (поменяли числитель и знаменатель).
$H_3 : \sigma_1 \neq \sigma_2$
$\tilde{S}_1^2 < \tilde{S}_2^2,\ T(x,\ y) = \frac{\tilde{S}_2^2}{\tilde{S}_1^2} \sim F(n-1,\ m-1) \Rightarrow$ критическая область на правом хвосте.
$\tilde{S}_1^2 > \tilde{S}_2^2,\ T(x,\ y) = \frac{\tilde{S}_1^2}{\tilde{S}_2^2} \sim F(m-1,\ n-1) \Rightarrow$ на правом хвосте критическая область.

Лекция 14 марта

Критерий Ансари-Брэйли

$X_1, \ldots,\ X_m \sim F(t-\mu)$
$Y_1, \ldots,\ Y_n \sim F\left(\frac{t-\mu}{\Delta}\right),\ \Delta > 0$

Предположения

Выборки независимы, $F(\mu) = 0.5$
Проверяем гипотезу $H_0 : \Delta = 1$

Замечание 1

Если $\mathcal{D}X < \infty$ и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,dt = 0$, то $\Delta^2 = \frac{\mathcal{D}Y}{\mathcal{D}X}$

Если $\mathcal{D}X = +\infty$, то $\begin{cases} \Delta < 1 \Rightarrow \text{выборка } Y \text{ сжата относительно } X \\ \Delta > 1 \Rightarrow \text{выборка } Y \text{ растянута относительно } X \end{cases}$

Замечание 2

Если $X_1, \ldots,\ X_m \sim F(t-\mu_1)$ и $Y_1, \ldots,\ Y_n \sim F\left(\frac{t-\mu_2}{\Delta}\right)$ (то есть сдвиги $\mu_1,\ \mu_2$ различные), то рекомендуется найти выборочную медиану $\hat{\mu}_x$ и $\hat{\mu}_y$ и рассматривать выборки $x_1 - \hat{\mu}_x, \ldots,\ x_m - \hat{\mu}_x$ и $y_1 - \hat{\mu}_y, \ldots,\ y_n - \hat{\mu}_y$

Реально критерий Ансари-Брейли

Вводим обозначение $m + n = N$, а также статистика:

$$A_{m,\,n} = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{N+1}{2} - \left| R_i - \frac{N+1}{2} \right| \right)$$

Здесь R_i — ранг X_i в объединённой выборке. По своей сути $\left|R_i - \frac{N+1}{2}\right|$ есть расстояние до ближайшего конца выборки (если мы пронумеруем выборку в прямом и в обратном порядке, то каждый элемент получит минимальный из номеров).
Если $n + m \leqslant 20$, то существует таблица точных значений квантилей статистики A
Если $\min(m,\ n) \to \infty$, то

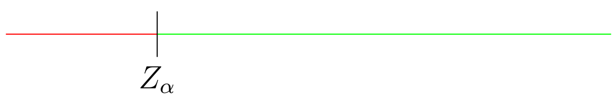
$$A^* = \left. \frac{A - EA_{m,\,n}}{\sqrt{\mathcal{D}A_{m,\,n}}} \right|_{H_0} \sim N(0,\ 1)$$

Свойства данной статистики:

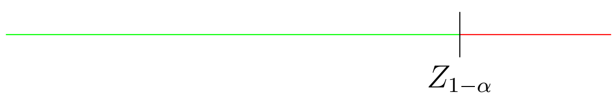
$$EA_{m,\,n} = \begin{cases} \frac{m(N+2)}{4}, & N \underset{2}{\equiv} 0 \\ \frac{m(N+1)^2}{4N}, & N \underset{2}{\equiv} 1 \end{cases}$$

$$\mathcal{D}A_{m,\,n} = \begin{cases} \frac{mn(N+2)(N-2)}{48(N-1)}, & N \underset{2}{\equiv} 0 \\ \frac{mn(N^2+3)(N+1)}{48N^2}, & N \underset{2}{\equiv} 1 \end{cases}$$

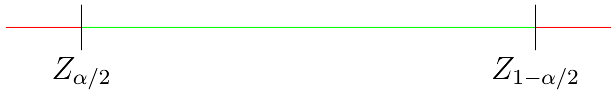
Если проверяем гипотезу $H_0 : \Delta = 1$ (используем значение A^*)
Против гипотезы $H_1 : \Delta < 1$



Против гипотезы $H_2 : \Delta > 1$



Против гипотезы $H_3 : \Delta \neq 1$



MAD оценка (Medium Absolute Deviation)

Оценка среднеквадратичного отклонения выборки с неизвестным распределением:

$$MAD = \underset{1 \leqslant i \leqslant n}{\text{med}} \left| x_i - \underbrace{\text{med}(x_1, \ldots, x_n)}_{\hat{m}u} \right|$$

Это медиана модулей отклонения от выборочной медианы.

Критерий КОЛМОГОРОВА-Смирнова

Даны две выборки $X_1, \ldots, X_m \sim F(t)$ и $Y_1, \ldots, Y_n \sim G(t)$.

Предположения

Выборки независимые, $F(t),\ G(t)$ непрерывные.

Применение

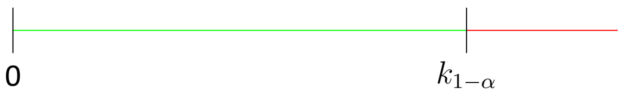
Проверяем гипотезу $H_0 : \forall t \quad F(t) = G(t)$ против альтернативы общего вида: $H_1 : \exists t \quad F(t) \neq G(t)$.
Оцениваем функции распределения с помощью эмпирических функций распределения.
Рассматривается статистика:

$$D_{m,\,n} = \max_{1 \leqslant i \leqslant m+n} \left| \hat{F}_m(z_i) - \hat{G}_n(z_i) \right|$$

Здесь $z = (z_1, \ldots, z_{m+n})$ — объединённая выборка из $x_1, \ldots, x_m,\ y_1, \ldots, y_n$.
Если $m + n \leqslant 20$, то есть таблица с точными квантилями.
Если $m + n > 20$, тогда хорошей апроксимацией будет:

$$D_{m,\,n} \sim K(t),\ \text{(распределение Колмогорова)}$$

Тогда прямая разбивается на следующие области (отрицательные):



k_α — квантиль Колмогорова уровня α. Известная точка $k_{0.95} = 1.36$
Данный критерий наименее мощный среди всех упомянутых ранее, поскольку является более общим. Если понятно, с чем связана неоднородность выборок, то стоит применять более специализированные критерии.

Однофакторный дисперсионный анализ

Определения

Фактор — какая-то переменная, которая по нашему мнению влияет на конечный результат.
Уровень фактора — значение переменной фактора (в задаче их должно быть конечное число).
Отклик:

1	2	...	k
$x_{1\,1}$	$x_{1\,2}$	$\ldots$	$x_{1\,k}$
$x_{2\,1}$	$x_{2\,2}$	$\ldots$	$x_{2\,k}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$x_{n_1\,1}$	$x_{n_2\,2}$	$\ldots$	$x_{n_k\,k}$

Столбцы — выборка, являющаяся результатом испытания с каким-то конкретным уровнем фактора (С ростом номера столбца переменная фактора растёт).

$$x_{i\,j} = \theta + \tau_j + \varepsilon_{i\,j}$$

$\varepsilon_{i\,j}$ — независимое одинаковое распределение случайной величины с $E\varepsilon_{i\,j} = 0,\ \mathcal{D}\varepsilon_{i\,j} = \sigma^2$ (дисперсия неизвестная).
$H_0 : \tau_1 = \dots = \tau_k = 0$ против $H_1 : \exists i : \tau_i \neq 0$.

Критерий Фишера

Обозначения

$N = n_1 + \dots + n_k$
$\overline{X}_N = \dfrac{1}{N} \sum\limits_{j=1}^{k} \sum\limits_{i=1}^{n_j} x_{i\,j}$

Предположения

$\varepsilon_{i\,j} \sim N(0,\ \sigma^2)$.

Формулировка

$$SS_{\text{общ}} = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}\left(x_{i\,j} - \overline{X}_N\right)^2 = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}\left(X_{i\,j} \pm \overline{X}_{\bullet\,j} - \overline{X}_N\right) = \underbrace{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}\left(x_{i\,j} - \overline{X}_{\bullet\,j}\right)^2}_{SS_{\text{случ.}}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(\overline{X}_{\bullet\,j} - \overline{X}_N)^2}_{SS_{\text{ур. ф.}}} +$$
$$+ \underbrace{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}\left(x_{i\,j} - \overline{X}_{\bullet\,j}\right)\left(\overline{X}_{\bullet\,j} - \overline{X}_N\right)}_{=0}$$

Лекция 21 марта

Напоминание

$$SS_{\text{общ}} = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}\left(x_{i\,j} - \overline{X}_{\bullet\,j}\right)^2 + \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}\left(\overline{X}_{\bullet\,j} - \overline{X}_N\right)^2 = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}\left(x_{i\,j} - \overline{X}_{\bullet\,j}\right)^2 + \sum_{j=1}^{k} n_j\left(\overline{X}_{\bullet\,j} - \overline{X}_N\right)^2 =$$
$$= SS_{\text{случ.}} + SS_{\text{ур. ф.}}$$

Из предположения о гауссовости $SS_{\text{случ.}}$:

$$\frac{SS_{\text{случ.}}}{\sigma^2} = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}\left(\frac{x_{i\,j} - \overline{X}_{\bullet\,j}}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(N-k)$$

При справедливости гипотезы H_0:

$$\frac{SS_{\text{ур. ф.}}}{\sigma^2} = \sum_{j=1}^{k} n_j\left(\frac{\overline{X}_{\bullet\,j} - \overline{X}_N}{\sigma}\right)^2\Bigg|_{H_0} \sim \chi^2(k-1)$$

Тогда про следующую статистику известно:

$$\frac{\frac{SS_{\text{ур. ф.}}}{\sigma^2(k-1)}}{\frac{SS_{\text{случ.}}}{\sigma^2(N-k)}} = \frac{\frac{SS_{\text{ур. ф.}}}{(k-1)}}{\frac{SS_{\text{случ.}}}{(N-k)}} \sim F(k-1,\ N-k)$$

Критической областью тогда будет $(F_{1-\alpha,\, k-1,\, N-k},\ +\infty)$.
Если H_0 отвергается, то

$$x_{i\,j} = \theta_j + \varepsilon_{i\,j}, \quad \varepsilon_{i,\,j} \sim N(0,\ \sigma^2)$$

$$\theta_j = \theta + \tau_j, \quad j = \overline{1,\ k}$$

$$\hat{\theta}_j = \overline{X}_{\bullet\,j}$$

$$\hat{\theta}_j \sim N\left(\theta_j,\ \frac{\sigma^2}{n_j}\right),\ \text{т. к. } \frac{(\overline{X}_{\bullet\,j} - \theta_j)\sqrt{n_j}}{\sigma} \sim N(0,\ 1)$$

$$\mathcal{D}\hat{\theta}_j = \mathcal{D}\left(\frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j} X_{i\,j}\right) = \frac{\sigma^2}{n_j}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N-k}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}\left(x_{i\,j} - \overline{X}_{\bullet\,j}\right)^2$$

$$\frac{\left(\overline{X}_{\bullet\,j} - \theta_j\right)\sqrt{n_j}}{\hat{\sigma}} \sim t(N-k) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(t_{\alpha/2,\ N-k} < \frac{\left(\overline{X}_{\bullet\,j} - \theta_j\right)\sqrt{n_j}}{\hat{\sigma}} < t_{1-\alpha/2,\ N-k}\right) = 1 - \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(\overline{X}_{\bullet\,j} - \frac{t_{1-\alpha,\ N-k}\hat{\sigma}}{\sqrt{n_j}} < \theta_j < \overline{X}_{\bullet\,j} + \frac{t_{1-\alpha,\ N-k}\hat{\sigma}}{\sqrt{n_j}}\right) = 1 - \alpha, \quad j = \overline{1,\ k}$$

Определение

Контрастом γ параметров $\theta_j,\ j = \overline{1,\ k}$ в модели (*) называется:

$$\gamma = \sum_{j=1}^{k} c_j\theta_j$$

где константы c_j удовлетворяют $\sum\limits_{j=1}^{k} c_j = 0$. Обычно берут две константы равные -1 и 1, остальные зануляют (в результате получаем, насколько контрастируют параметры конкретных столбов).

Определение

Оценкой контраста считается:

$$\hat{\gamma} = \sum_{j=1}^{k} c_j\hat{\theta}_j = \sum_{j=1}^{k} c_j\overline{X}_{\bullet\,j}$$

Параметры оценки:

$$\hat{\gamma} \sim N\left(\gamma,\ \sigma^2\sum_{j=1}^{k}\frac{c_j^2}{n_j}\right)$$

$$\mathcal{D}\sum_{j=1}^{k} c_j\overline{X}_{\bullet\,j} = \sum_{j=1}^{k} c_j^2\mathcal{D}\overline{X}_{\bullet\,j} = \sigma^2\sum_{j=1}^{k}\frac{c_j^2}{n_j}$$

$$\frac{\hat{\gamma} - \gamma}{\sigma\sqrt{\sum_{j=1}^{k}\frac{c_j^2}{n_j}}} \sim t(N-k)$$

$$P\left(t_{\alpha/2,\ N-k} < \frac{\hat{\gamma} - \gamma}{\hat{\sigma}\sqrt{\sum_{j=1}^{k}\frac{c_j^2}{n_j}}} < t_{1-\alpha/2,\ N-k}\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\hat{\gamma} - t_{1-\alpha/2,\ N-k}\hat{\sigma}\sqrt{\sum_{j=1}^{k}\frac{c_j^2}{n_j}} < \gamma < \hat{\gamma} + t_{1-\alpha/2,\ N-k}\hat{\sigma}\sqrt{\sum_{j=1}^{k}\frac{c_j^2}{n_j}}\right) = 1 - \alpha$$

Ранговый критерий Краскела-Уоллиса

Имееются выборки $z_1 = (x_{1\,1}, \ldots,\, x_{n_1\,1}), \ldots,\, z_k = (x_{1\,k}, \ldots,\, x_{n_k\,k})$

Предположение

$$\begin{cases} \text{Выборки независимы, как и элементы в них.} \\ x_{1\,1} \sim F(t-\theta_1), \ldots,\, x_{i\,k} \sim F(t-\theta_k),\ i = \overline{1,\, n_j} \\ \text{Распределение } F(t) \text{ непрерывное} \end{cases}$$

Гипотезы

$$H_0 : \theta_1 = \cdots = \theta_k = \theta,\ \theta \text{ — какое-то произовольное число для удобства обозначения}$$
$$H_1 : \exists j : \theta_j \neq \theta$$

Обозначения

$r_{i\,j}$ — ранг $x_{i\,j}$ в объединённой выборке объёма $N = n_1 + \cdots + n_k$
$\overline{r}_{\bullet\,j} = \frac{1}{n_j} \sum_{j=1}^{n_j} r_{i\,j}$

Идея критерия

Имеется таблица

1	2	$\ldots$	k
$r_{1\,1}$	$r_{1\,2}$	$\ldots$	$r_{1\,k}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$r_{n_1\,1}$	$r_{n_2\,2}$	$\ldots$	$r_{n_k\,k}$
$\overline{r}_{\bullet\,1}$	$\overline{r}_{\bullet\,2}$	$\ldots$	$\overline{r}_{\bullet\,k}$

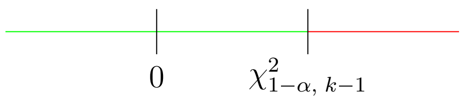
Составим следующую статистику:

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{j=1}^{k} n_j \left(\overline{r}_{\bullet\,j} - \frac{N+1}{2} \right)^2$$

Если min$(n_1, \ldots,\, n_k) \to \infty$:

$$H\Big|_{H_0} \sim \chi^2(k-1)$$

Критерий выглядит вот так:



Замечание

Всё написанное выше работает для выборки без связок. Если связки всё-таки есть, то нужен поправочный коэффициент.

Ранговый критерий Джонкхиера

Условия совпадают с критерией Краскела-Уоллиса, но альтернативная гипотеза другая:

Гипотезы

$H_0 : \theta_1 = \cdots = \theta_k = \theta$ против $H_1 : \theta_1 \leqslant \theta_1 \leqslant \cdots \leqslant \theta_k$, где хотя бы одно неравенство строгое. То есть предполагаем, что увеличение фактора ведёт к увеличению математического ожидания.

Идея критерия

Введём функцию:

$$\varphi(y,\ z) = \begin{cases} 1, & y < z \\ 0.5, & y = z \\ 0, & u < z \end{cases}$$

И функцию:

$$U_{l,\ m} = \sum_{i=1}^{n_l} \sum_{j=1}^{n_m} \varphi(x_{i\,j},\ x_{j\,m})$$

Теперь возьмём статистику:

$$J = \sum_{1 \leqslant l < m \leqslant k} U_{l,\ m}$$

Если min$(n_1, \ldots,\ n_k) \to \infty$:

$$J^* = \frac{J - EJ}{\sqrt{\mathcal{D}J}} \sim N(0,\ 1)$$

Параметры статистики J (запоминать необязательно):

$$EJ = \frac{1}{4}\left(N^2 - \sum_{i=1}^{k} n_i^2\right)$$

$$\mathcal{D}J = \frac{1}{72}\left(N^2\,(2N+3) - \sum_{i=1}^{k} n_i^2(2n_i + 3)\right)$$

Заметим, что при $k = 2$:

$$W = J + \frac{n_2(n_2+1)}{2}$$

Да и вообще статистика J является статистикой Вилкоксона с каким-то смещением, то есть все его свойства наследуются.