

Семинары по алгебре 4 модуль.

Андрей Тищенко

2023/2024 гг.

Семинар 4 апреля

Номер 1. $a_1 = (1 \ 2 \ 1)$, $a_2 = (1 \ 1 \ -1)$, $a_3 = (1 \ 3 \ 3)$, $L_1 = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$
 $b_1 = (2 \ 3 \ -1)$, $b_2 = (1 \ 2 \ 2)$, $b_3 = (1 \ 1 \ -3)$, $L_2 = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$

Найти размерности и какие-нибудь базисы $L_1 + L_2$ и $L_1 \cap L_2$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dim L_1 = 2$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dim L_2 = 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim(L_1 + L_2) = 3 \Rightarrow$$

$$\dim(L_1 \cap L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 + L_2) = 1$$

Так как L_1 базис, через него выражается любой вектор, в том числе

$$\vec{X} = (x_1, x_2, x_3)$$

$$\text{Значит } \text{Rg} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$$

Аналогично для L_2 :

$$\text{Rg} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 8x_1 - 5x_2 + x_3 = 0$$

$$L_1 \cap L_2 : \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 8x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3x_2 \\ x_2 = 5x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \text{пример}$$

базиса объединения.

Номер 2. Доказать, что \mathbb{R}^4 является прямой суммой $L_1 = \langle a_1, a_2 \rangle$, $L_2 = \langle b_1, b_2 \rangle$ и разложить вектор $x = (2 \ -2 \ 3 \ -3)^T$ в сумму проекций на эти подпространства, где:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2)$$

$\dim L_1 = \dim L_2 = 2$, так как есть БМ порядка 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\dim(L_1 + L_2) = 4 \Rightarrow \dim(L_1 \cap L_2) = 0 \Rightarrow L_1 + L_2$$

$$x = x_1 + x_2 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} +$$

$$\alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{c|c} E & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \end{array} \right)$$

$$x_1 = a_1 + a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in L_1 \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = -2b_2$$

$x = x_1 + x_2$ - ответ.

Номер 3. Доказать, что $M_n(\mathbb{R})$ есть прямая сумма подпространства всех симметрических матриц и L_2 всех кососимметрических матриц ($A^T = A$)

Утверждение: Сумма $L_1 + L_2$ прямая $\Leftrightarrow \forall x \in L_1 + L_2 \exists!$ разложение $x = x_1 + x_2$,
где $x_1 \in L_1, x_2 \in L_2$

Решение: Пусть $A = S + K$, где S - симметрическая матрица, K - кососимметрическая

$$A^T = S^T + K^T = S - K \Rightarrow \begin{cases} S = \frac{A + A^T}{2} \\ K = \frac{A - A^T}{2} \end{cases} \quad \text{- единственное}$$

разложение

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Билинейные формы

Определение: в $V \times V \longrightarrow R$ называется билинейной формой, если

$$\begin{cases} b(\alpha x + \beta y, z) = \alpha b(x, z) + \beta b(y, z) \\ b(x, \alpha y + \beta z) = \alpha b(x, y) + \beta b(x, z) \end{cases}, \text{ то есть линейность по каждому} \\ \text{аргументу.}$$

$$b(x, y) = x_e^T B_e y_e, \text{ переход к другому базису } (e \rightarrow e')$$

$$B' = C^T B C$$

Номер 4. Я решал у доски, скиньте пж запись.

Номер 5. Найти $f(x, y)$, если $F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ - матрица билинейной формы

$$f, x = (1 \ 0 \ 3)^T, y = (-1 \ 2 \ -4)^T$$

$$f(x, y) = (1 \ 0 \ 3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = -43$$

Номер 6. Найти матрицу билинейной формы в базисе e' , если

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 - e_2 \\ e'_2 = e_1 + e_3 \\ e'_3 = e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$$

$$B_e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_{e'} = C^T B_e C = \begin{pmatrix} 0 & -6 & -9 \\ -2 & 20 & 30 \\ -3 & 30 & 45 \end{pmatrix} - \text{ответ.}$$

Номер 7. $q(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3 - x_3^2$ - квадратичная форма
Построить ассоциированную (или полярную) симметричную билинейную форму

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} = B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 - 3x_1y_3 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + 2x_2y_3 - 3x_3y_1 + 2x_3y_2 - x_3y_3 - \text{ответ}$$

$$b(x, y) = \frac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)]$$

Пример: $q(x) = x_1x_2 + x_1x_3$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$q(x) = x^T A x, \quad A' = C^T A C$$

Критерий Сильвестра

Исследовать на положительную и отрицательную определённость при различных $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda & 3 \\ \lambda & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \Delta_1 = 2 > 0 \\ \Delta_2 = 4 - \lambda^2 = (2 - \lambda)(2 + \lambda) \\ \Delta_3 = \lambda^2 + 6\lambda - 16 < 0 \end{cases} \quad \text{Ответ: не является}$$

положительно определённой и не является отрицательно определённой.

Семинар 10 апреля

1. Найти все значения параметра a , при которых квадратичная форма

а. Положительно определена.

б. Отрицательно определена.

$$q(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 3z^2 + 2axy + (2 + 4a)yz$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 4 & 1 + 2a \\ 0 & 1 + 2a & 3 \end{pmatrix} \Delta_1 = 1 > 0$$

$$\Delta_2 = 4 - a^2 = (2 - a)(2 + a)$$

$$\Delta_3 = \det A = -7(a + 1)(a - \frac{11}{7})$$

Положительная определённость:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 > 0 \\ \Delta_3 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a \in (-1, \frac{11}{7})$$

Отрицательная определённость:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta_1 < 0 \\ \Delta_2 > 0 \\ \Delta_3 < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a \in \emptyset$$

2. Исследовать квадратичную форму на положительную и отрицательную определённость в зависимости от параметра:

$$q(x) = (\lambda - 1)x_1^2 + (2\lambda - 2)x_1x_2 - 2\lambda x_1x_3 + 2\lambda x_2^2 - 2\lambda x_2x_3 + (\lambda - 2)x_3^2$$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & \lambda - 1 & -\lambda \\ \lambda - 1 & 2\lambda & -\lambda \\ -\lambda & -\lambda & \lambda - 2 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta_1 = \lambda - 1 \\ \Delta_2 = (\lambda - 1)(2\lambda - (\lambda - 1)) = \lambda^2 - 1 \\ \Delta_3 = -(\lambda + 1)(\lambda - \frac{2}{3}) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{положительной определённости}$$

нет. Отрицательная при $\lambda < -1$. (Может быть неправильно посчитал).

Метод Лагранжа

3. Найти нормальный вид и невырожденное линейное преобразование, приводящее к этому виду. Также определить ранг и индексы инерции.

$$q(x) = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$$

Вынесем x_1 :

$$q(x) = \underline{x_1}^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + \underline{2x_1x_2} - \underline{4x_1x_3} =$$

$$\begin{aligned} & x_1^2 + 2x_1(x_2 - 2x_3) - x_2^2 + 4x_2x_3 - 4x_3^2 + (x_2 - 2x_3)^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + (x_2 - 2x_3)^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 = \\ & = (x_1 + (x_2 - 2x_3))^2 + 4x_2^2 - 8x_3^2 + 4x_2x_3 = (x_1 + (x_2 - 2x_3))^2 + (2x_2 + x_3)^2 - 9x_3^2 = \end{aligned}$$

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$$

Ранг равен 3, $i_+ = 2$, $i_- = 1$

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - 2x_3 \\ y_2 = 2x_2 + x_3 \\ y_3 = 3x \end{cases} \quad C_{y \rightarrow x} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \text{матрица перехода.}$$

4. Привести квадратичную форму к нормальному виду. Найти Rg, сигнатуру и матрицу перехода от старого базиса к новому.

$$q(x) = -2x_1x_3 - 2x_2x_3 + x_3^2$$

$$x_3^2 - 2x_3(x_1 + x_2) + (x_1 + x_2)^2 - (x_1 + x_2)^2$$

$$(x_3 - (x_1 + x_2))^2$$

$$X = C_{y \rightarrow x} Y$$

$$C_{y \rightarrow x} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{x \rightarrow x} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5. $q(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

$$y_1^2 - y_2^2 + y_1y_3 - y_2y_3 + y_1y_3 + y_2y_3$$

$$(y_1 + y_3)^2 - y_2^2 - y_3^2$$

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + y_3 \\ z_2 = y_2 \\ z_3 = y_3 \end{cases} \Rightarrow z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$i_- = 2, i_+ = 1, \text{ Rg} = 3$$

$$\begin{cases} x = C_1 y \\ z = C_2 y \end{cases}, \quad y = C_2^{-1} z \Rightarrow x = C_1 y = C_1 C_2^{-1} z = C_3 z$$

$$C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Существует ли невырожденное линейное преобразование, переводящее квадратичную форму f в квадратичную форму g ? Если да, то найти бы одно.

$$f(x) = -2x_1x_3 - 2x_2x_3 + x_3^2, \quad g(y) = 4y_1^2 - 2y_1y_3$$

$$f(x) = f(z) = z_1^2 - z_2^2$$

$$\begin{cases} z_1 = -x_1 - x_2 + x_3 \\ z_2 = x_1 + x_2 \\ z_3 = x_1 \end{cases}, \quad z = C_1x, \quad C_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$g(y) = 4y_1^2 - 2y_1y_3 = ((2y_1)^2 + 2 \cdot 2y_1 \cdot \frac{1}{2}y_3 + \frac{1}{4}y_3^2) - \frac{1}{4}y_3^2 =$$

$$= (2y_1 + \frac{1}{2}y_3)^2 - (\frac{1}{2}y_3)^2$$

$$\begin{cases} z_1 = 2y_1 + \frac{1}{2}y_3 \\ z_2 = \frac{1}{2}y_3 \\ z_3 = y_2 \end{cases}, \quad z = C_2y \Rightarrow C_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

надо $x = C_3y$. Имеем $\begin{cases} z = C_1x \\ z = C_2y \end{cases} \Rightarrow x = C_1^{-1}z \Rightarrow$

$$\Rightarrow (*) \text{ есть } x = C_1^{-1}C_2 \cdot y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} y \leftarrow \text{матрица перехода.}$$

Семинар 17 апреля.

$$T_{e \rightarrow e} = \{t_{ij}\} = \begin{cases} e'_1 = t_{11}e_1 + \dots + t_{n1}e_n \\ \dots \\ e'_n = t_{1n}e_1 + \dots + t_{nn}e_n \end{cases}$$

Симметричный Гаусс

Задача 1. Привести $q(x)$ к нормальному виду, найти Rg , (i_+, i_-) , матричный переход от старого базиса к новому.

$$q(x) = -2x_1x_3 - 2x_2x_3 + x_3^2$$

1 способ. Метод Лагранжа (был на прошлом семинаре).

$$q(x) = y_1^2 - y_2^2$$

$$\begin{cases} y_1 = -x_1 - x_2 + x_3 \\ y_2 = x_1 + x_2 \\ y_3 = x_1 \end{cases} \Leftrightarrow y = Cx$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Третью строчку мы выбрали так, чтобы матрица C была невырождена.

$$x^f = T_{f \rightarrow e} x^e$$

Немного фактов с семинара: 1. $f = e \cdot T_{e \rightarrow f}$ - для матриц

$$2. \begin{cases} x = e \cdot x^e \\ x = f \cdot x^f \end{cases}$$

$C_{x \rightarrow y} = C^{-1}$ 2 способ. Симметричный Гаусс.

$$\text{Матрица квадратичной формы } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Цель: привести A к диагональному виду

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) = q(y) = y_1^2 - y_2^2. \text{ Правая матрица будет} \end{aligned}$$

$C_{x \rightarrow y}$ - матрица перехода.

Важное замечание: мы можем применять операции к столбцам левой матрицы, не затрагивая правую.

Линейные операторы

Фиксируем базис $e = (e_1, \dots, e_n)$ в V

$$\varphi: V \rightarrow V$$

1. $\forall x \in V$:

$$(\varphi(x))^e = A_e x^e$$

2. Пусть $T_{e \rightarrow f}$ - матрица перехода к f

$$A_f = T^{-1} A_e T = T_{f \rightarrow e} A_e T_{e \rightarrow f}$$

3. $\dim \ker \varphi + \dim \operatorname{Im} \varphi = \dim V$

Задача 2. Найти размерности и базисы \ker и Im линейного оператора, задаваемого матрицей A в некотором базисе \mathbb{R}^4 .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Rg} A = \dim \operatorname{Im} \varphi$$

$$\dim \ker \varphi = n - r = 2$$

Задача 3. Доказать, что поворот плоскости на угол α - линейный оператор в $V_2 \cong \mathbb{R}^2$ найти его матрицу в базисе $\{i, j\}$

1. $\forall \lambda \in \mathbb{R} \varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x)$

2. $\varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$ поворачивается на угол α параллелограмм на векторах $x_1, x_2 \Rightarrow$ их сумма (диагональ этого параллелограмма) также поворачивается на угол α . Значит это линейный оператор.

$$\text{Рассмотрим } \varphi(i) = \varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \cos \alpha i + \sin \alpha j$$

$$\varphi(j) = \varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\sin \alpha i + \cos \alpha j \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} - \text{матрица поворота}$$

4. Является ли преобразование линейным оператором. Если да, то найти его матрицу.

а. $\varphi(x) = (x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, 3x_1 - x_2 + x_3)$

$$\begin{pmatrix} \varphi(x_1) \\ \varphi(x_2) \\ \varphi(x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ 2x_1 + x_3 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{То есть } \varphi(x)^T = A \cdot x^T \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha A x + \beta A y \Rightarrow \text{линейный оператор.}$$

б. $\varphi(x) = (x_1, x_2 + 1, x_3 + 2)$. Не уважает сложение векторов, значит не является линейным оператором.

5. Доказать, что существует единственный линейный оператор, переводящий векторы a_1, a_2, a_3 в векторы b_1, b_2, b_3 . Найти его матрицу.

$$\begin{aligned} a_1 &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}, & b_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ a_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, & b_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ a_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & b_3 &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Утверждение: существует единственный линейный оператор в \mathbb{R}^n , переводящий линейно независимые векторы a_1, \dots, a_n в любые заданные векторы b_1, \dots, b_n

$$\varphi(a_1) = b_1$$

\dots , дано

$$\varphi(a_n) = b_n$$

$\forall x \in V \quad a_1, \dots, a_n$ - базис \Rightarrow

$\Rightarrow x = x_1 a_1 + \dots + x_n a_n$, единственное разложение

$$\varphi(x) = x_1 \underbrace{\varphi(a_1)}_{b_1} + \dots + x_n \underbrace{\varphi(a_n)}_{b_n} = \sum_{i=1}^n x_i b_i$$

Пусть $A = (a_1, \dots, a_n)$, $B = (b_1, \dots, b_n) \Rightarrow$

$\Rightarrow \Phi_a = B A^{-1}$, где Φ - матрица линейного оператора φ базиса a

$$b_1 = \varphi(a_1) = \Phi_a \cdot a_1$$

\dots

$$b_n = \varphi(a_n) = \Phi_n \cdot a_n \Rightarrow B = \Phi_a A \Rightarrow \Phi_a = B \cdot A^{-1}$$

Семинар 24 апреля

Задача 1:

Показать, что умножение квадратной матрицы 2-го порядка на данную матрицу $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ является линейным оператором и найти его матрицу в базисе

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 + b_1 c_2 & a_1 b_2 + b_1 d_2 \\ c_1 a_2 + d_1 c_2 & c_1 b_2 + d_1 d_2 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(x) = x \cdot A$$

$$\varphi(\alpha x + \beta y) = (\alpha x + \beta y) A = \alpha x A + \beta y A = \alpha \varphi(x) + \beta \varphi(y)$$

$$\varphi(e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = a e_1 + b e_2$$

$$\begin{aligned}\varphi(e_2) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = ce_1 + ae_2 \\ \varphi(e_3) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ae_3 + be_4 \\ \varphi(e_4) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ce_3 + ae_4 \\ \mathcal{A} &= \begin{pmatrix} a & c & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Задача 2:

Показать, что дифференцирование является линейным оператором в пространстве всех многочленов $\deg \leq n$ ($R_n[x]$)

Найти матрицу:

а) $1, x, x^2, \dots, x^n$

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha f_n(x) + \beta g_n(x)) &= (\alpha f_n(x) + \beta g_n(x))' = \alpha f_n'(x) + \beta g_n'(x) = \\ &= \alpha \varphi(f_n(x)) + \beta \varphi(g_n(x))\end{aligned}$$

$$e_1 = 1,$$

$$\varphi(1) = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + \dots + 0 \cdot x^n$$

$$\varphi(x) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + \dots + 0 \cdot x^n$$

\vdots

$$\varphi(x^n) = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + \dots + nx^{n-1} + 0 \cdot x^n$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

б) $1, x - a, (x - a)^2, \dots, (x - a)^n$

Раскладываем в ряд Тейлора (на семинаре не решали).

Задача 3:

В базисе $e_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Линейный оператор φ имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

В какое множество под действием φ перейдёт прямая l :

$$x_1 - 2x_2 = 1?$$

Запишем точки, принадлежащие этой прямой:

$$(1, 0) + (2, 1)k, (1 + 2k, k)$$

$$(1, 0) - \left(0, -\frac{1}{2}\right) = \bar{a}$$

Потребуется <https://hentaihaven.net/> матрица перехода от изначального базиса к стандартному.

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = T_{S \rightarrow N}, T_{N \rightarrow S} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A'_S = T_{S \rightarrow N} A T_{N \rightarrow S} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi \begin{pmatrix} 1 + 2k \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 + 2k \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 6k \\ k \end{pmatrix}$$

Задача 4:

Линейный оператор φ в базисе $a_1 = (1, 2)^T$, $a_2 = (2, 3)^T$

Имеет матрицу $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

Линейный оператор ψ в базисе $b_1 = (3, 1)$, $b_2 = (4, 2)$

Найти матрицу линейного оператора $\varphi + \psi$ в базисе $\{b_1, b_2\}$

$$\Phi_b = T_{b \rightarrow a} \Phi_a \cdot T_{a \rightarrow b} = \begin{pmatrix} 40 & 38 \\ -\frac{71}{2} & -34 \end{pmatrix}$$

$$\Psi_b - \text{дано } \Phi_b + \Psi_b = \begin{pmatrix} 44 & 44 \\ -\frac{59}{2} & -25 \end{pmatrix}$$

Алгоритм диагонализации

Задача 1:

Диагоналируем ли линейный оператор с матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

а) над \mathbb{R}

б) над \mathbb{C}

1. Ищем характеристический многочлен:

$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = (\lambda - 1)^2 + 1$ значит вещественных корней нет, значит над \mathbb{R} не диагонализируемая.

$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{2 \pm 2i}{2} = \begin{bmatrix} 1-i \\ 1+i \end{bmatrix} \Rightarrow$ диагонализируем над \mathbb{C} . Так как $n = 2 = \dim V$ различных собственных значений.

$\Lambda = \begin{pmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & 1+i \end{pmatrix}$ - диагональный вид.

2. Ищем собственные векторы.

$$\lambda_1 = 1 - i$$

$$B = A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 1 - (1-i) & -1 \\ 1 & 1 - (1+i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = -ix_2$$

$$\begin{array}{c|c} & y_1 \\ \hline x_1 & -i \\ x_2 & 1 \end{array}$$

$$\lambda_2 = 1 + i$$

$$B \sim \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, T = (y_1, y_2) = \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c|c} & y_2 \\ \hline x_1 & i \\ x_2 & 1 \end{array}$$

$$A = T\Lambda T^{-1}, T_{A \rightarrow \Lambda} = \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ - диагонализируем ли линейный оператор? $\chi_A(\lambda) =$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 \Rightarrow \lambda_1 = 1, m_1 = 2$$

Критерий диагонализируемости:

1. $n = \dim V$ собственных значений

2. $\forall \lambda_i m_i = s_i$ (алгебраическая кратность = геометрической)

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad n - r = 2 - 1 = 1 = s \neq m \Rightarrow \text{недиагонализируема.}$$

Семинар 15 мая

Задача 1

Можно ли привести матрицу линейного оператора к диагональному виду.
Если да, то найти разложение $A = T\Lambda T^{-1}$.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

T - матрица перехода от исходного базиса к базису из собственных векторов.

$$\Lambda = T^{-1}AT$$

Решал у доски, коспекта не будет.

Задача 2.

Всего 10000 жителей. Каждый день 15% здоровых заболевают, а 10% больных выздоравливают (можно болеть повторно). В первый день заболело 100 человек. Как будет вести себя количество больных с ростом времени.

$$\text{Пусть } \begin{pmatrix} x - \text{здоровые} \\ y - \text{больные} \end{pmatrix} \Rightarrow v_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9900 \\ 100 \end{pmatrix}$$

$$\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 0,15x + 0,1y \\ y - 0,1y + 0,15x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,85x + 0,1y \\ 0,15x + 0,9y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,1 \\ 0,15 & 0,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} \frac{17}{20} & \frac{1}{10} \\ \frac{3}{20} & \frac{9}{10} \end{pmatrix}, \quad \chi_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - \frac{3}{4}) \Rightarrow \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \lim_{n \rightarrow \infty} A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad A = T\Lambda T^{-1}$$

$$A^n = (T\Lambda T^{-1})^n = T\Lambda T^{-1}T\Lambda T^{-1} \dots T\Lambda T^{-1} = T\Lambda^n T^{-1} = T \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & (\frac{3}{4})^n \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$B = A - E = \begin{pmatrix} -\frac{3}{20} & \frac{1}{10} \\ \frac{3}{20} & -\frac{1}{10} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = \frac{3}{4}$$

$$B = A - \frac{3}{4}E = \begin{pmatrix} \frac{1}{20} & \frac{1}{20} \\ \frac{1}{20} & \frac{3}{20} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^* = \lim_{n \rightarrow \infty} A^n = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 \\ 0,6 & 0,6 \end{pmatrix}$$

$$A^* \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 \\ 0,6 & 0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9900 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4000 \\ 6000 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{число заболевших стабилизируется на } 6000.$$

Второй способ

Найти базис из собственных векторов $\{v_1, v_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$v_0 = x_1 v_1 + x_2 v_2 - \text{разложим } \left(v_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n = x_1 \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(v_1) + x_2 \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(v_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_1 \lambda_1^n v_1 + x_2 \lambda_2^n v_2) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (x_1 1^n v_1 + x_2 \left(\frac{3}{4}\right)^n v_2) = x_1 v_1$$

Найдём x_1 :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} 9900 \\ 100 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9900 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2000 \\ -5900 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = 2000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(v_0) = x_1 v_1 = 2000 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4000 \\ 6000 \end{pmatrix}$$

Задача 3.

$$A^{64} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 14 & -8 \end{pmatrix}^{64}$$

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 7 - \lambda & -4 \\ 14 & -8 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 1)$$

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 14 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$A_{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 14 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$$

Евклидовы пространства

$\mathcal{E} = (V, g(x, y))$, g - скалярное произведение.

Аксиомы скалярного произведения:

1. Симметричность $g(x, y) = g(y, x)$
2. Линейность $g(\alpha x + \beta y, z) = \alpha g(x, z) + \beta g(y, z)$
3. $\forall x \in \mathcal{E} \quad g(x, x) \geq 0 \wedge g(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$

Неравенство Коши-Буняковского

$$|g(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Неравенство треугольника

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Задача 4.

$$\mathcal{E} = C[a, b], \quad \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx$$

Проверить, что это скалярное произведение и выписать неравенство Коши-Буняковского и треугольника.

$$1. \int_a^b f(x)g(x) dx = \int_a^b g(x)f(x) dx$$

$$2. \int_a^b (\alpha f_1 + \beta f_2)(x)g(x) dx = \alpha \int_a^b f_1 dx + \beta \int_a^b f_2 dx \quad 3. \int_a^b f^2 dx \geq 0 \wedge$$

$$\int_a^b f^2 dx = 0 \Rightarrow f_1 \equiv 0$$

$$\left| \int_a^b f \cdot g dx \right|^2 \leq \int_a^b f^2 dx \int_a^b g^2 dx$$

$$\sqrt{\int_a^b (f + g)^2 dx} \leq \sqrt{\int_a^b f^2 dx} + \sqrt{\int_a^b g^2 dx}$$

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$$

Задача 5.

Применяя процесс ортогонализации Гаусса-Шмидта построить ортонормированный базис подпространства $\mathcal{L}(a_1, a_2, a_3)$.

$$a_1 = (1 \ 2 \ 2 \ -1), \ a_2 = (1 \ 1 \ -5 \ 3), \ a_3 = (3 \ 2 \ 8 \ -7)$$

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 \\ b_2 &= a_2 - c_{2,1}b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad c_{2,1} = \frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} = -1 \\ b_3 &= a_3 - c_{3,1}b_1 - c_{3,2}b_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad c_{3,1} = \frac{(a_3, b_1)}{(b_1, b_1)} = -1 \\ c_{3,2} &= \frac{(a_3, b_2)}{(b_2, b_2)} = -1 \end{aligned}$$

Ортогональный базис:

$$\{b_1, b_2, b_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

Ортонормированный базис:

$$\{b_1, b_2, b_3\} = \left\{ \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{26} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

Семинар 22 мая

Напоминание с лекции:

Ортогональное дополнение

$$L^\perp = \{x \in \mathcal{E} \mid \forall h \in L \ (x, h) = 0\}$$

$$\mathcal{E} = L \oplus L^\perp \Rightarrow \forall x \in \mathcal{E} \exists! h \in L \exists! h^\perp \in L^\perp \ x = h + h^\perp$$

Факт: $(L^\perp)^\perp$

Задача 1.

Проверить, что векторы образуют ортогональную систему и дополнить их до ортогонального базиса пространства.

$$a_1 = (1 \ -2 \ 2 \ -3)^T, \ a_2 = (2 \ -3 \ 2 \ 4)^T - \text{базис } L$$

$$\text{Тогда } L^\perp := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0, \text{ то есть } L^\perp - \text{множество решений}$$

$$\text{ОСЛАУ } A^T x = 0, \text{ где } A = [a_1, a_2]$$

Проверим ортогональность: $(a_1, a_2) = 2 + 6 + 4 - 12 = 0$ ортогональны.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 17 \\ 0 & 1 & -2 & 10 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{c|c|c} & y_1 & y_2 \\ \hline x_1 & 2 & -17 \\ x_2 & 2 & -10 \\ x_3 & 1 & 0 \\ x_4 & 0 & 1 \end{array}$$

Используем метод ортогонализации Грамма-Шмидта:

$$b_1 = y_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$b_2 = y_2 - \frac{(y_2, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1;$$

$$b_2 = \begin{pmatrix} -17 \\ -10 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{54}{9} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Искомый базис будет выглядеть как $[a_1, a_2, b_1, b_2]$

Задача 2.

$$L : \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{Найти уравнения, задающие } L^\perp$$

$$L^\perp = \mathcal{L}(a_1, a_2, a_3), \quad \begin{cases} a_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}^T \\ a_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}^T \\ a_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 9 & -1 \end{pmatrix}^T \end{cases}$$

1 способ:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 9 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \text{базис } L^\perp, \text{ так как решение } L^\perp x = 0$$

есть решение L

$$A^T x = 0, \quad M = \begin{matrix} a'_1 \\ a'_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -9 & -1 \end{pmatrix}, \quad M_{123}^{123} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -9 \end{vmatrix} = -6x_1 + 9x_2 + x_3 = 0$$

$$M_{123}^{124} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = x_2 + x_4 = 0$$

2 способ.

Ищем ФСР:

$$A^T \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -9 & 1 \end{pmatrix}, \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -6x_3 \\ x_2 = 9x_3 + x_4 \end{cases}, \quad \begin{array}{c|c|c} & y_1 & y_2 \\ \hline x_1 & -6 & 0 \\ x_2 & 9 & 1 \\ x_3 & 1 & 0 \\ x_4 & 0 & 1 \end{array}$$

$Y^T x = 0$ - искомая СЛАУ, заданная L^\perp .

$$\begin{pmatrix} -6 & 9 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -6x_1 + 9x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \quad \underline{\text{Проекция на подпространство:}}$$

3 способа искать:

1. Дан базис $L : a_1, \dots, a_k$, тогда $x = h + h^\perp = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k + h^\perp = (*)$

Умножаем скалярно (*) на a_1, \dots, a_k :

$$\begin{cases} \alpha_1(a_1, a_1) + \alpha_2(a_1, a_2) + \dots + \alpha_k(a_1, a_k) = (a_1, x) \\ \vdots \\ \alpha_1(a_k, a_1) + \alpha_2(a_k, a_2) + \dots + \alpha_k(a_k, a_k) = (a_k, x) \end{cases}$$

Получаем $\Gamma(a_1, \dots, a_k) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} = A^T x$. Отсюда находим решение $\alpha_1, \dots, \alpha_k$,

далее ищем проекцию:

$$\text{Pr}_L x = A\alpha = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k$$

2. Ортогонализируем по Грамму-Шмидту: $a_1, \dots, a_k \rightarrow b_1, \dots, b_k$ - ортогональный базис L

$$\text{Pr}_L x = \sum \frac{(x, b_i)}{(b_i, b_i)} b_i$$

3. По формуле $\text{Pr}_L x = A(A^T A)^{-1} A^T x$, где $A = [a_1, \dots, a_k]$

Задача 3.

Найти ортогональную проекцию h и ортогональную составляющую вектора x на ЛПП L

$$x = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}, L = \mathcal{L}(a_1, a_2, a_3)$$

Решал у доски + хотел спать, можете скинуть запись.

Задача 4.

Найти $\text{Pr}_L x, x_L^\perp$

$$x = \begin{pmatrix} 7 & -4 & -1 & 2 \end{pmatrix}, L : \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 9x_4 = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим матрицу коэффициентов системы:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -9 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & -6 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \text{Rg} = 2$$

Ненулевые строки образуют базис L^\perp .

$$\Gamma(a_1, a_2) = \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ -9 & 26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 17 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_L^\perp = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \text{Pr}_L x = x - x_L^\perp = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Семинар 30 мая

1. Расстояние до многообразия

$$P = x_0 + L$$

1 Способ.

M с радиус вектором x

$$\rho(M, P) = \rho(x, P) = \|(x - x_0)^\perp\|$$

2 Способ.

$$\rho(M, P) = \sqrt{\frac{\text{Gr}(a_1, \dots, a_k, x - x_0)}{\text{Gr}(a_1, \dots, a_k)}}$$

Задача 1.

Найти расстояние $\rho(x, P)$, где $x = (2, 4, -4, 2)$

$$P : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 = 2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -3 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Воспользуемся вторым способом нахождения расстояния:

$$\begin{vmatrix} 14 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & -7 \\ -1 & -7 & 38 \end{vmatrix} = 76, \quad \begin{vmatrix} 14 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 19, \quad x - x_0 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Утверждение:

$$P_1 = x_1 + L_1, \quad P_2 = x_2 + L_2$$

$$\rho(P_1, P_2) = \|(x_1 - x_2)_{L_1+L_2}^\perp\|$$

Задача 2.

Найти расстояние между двумя плоскостями:

$$x = a_1 t_1 + a_2 t_2 + x_1, \text{ и } x = a_3 t_1 + a_4 t_2 + x_2$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 21 \end{pmatrix}$$

$$a_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad a_4 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -6 & -3 & -2 \\ 0 & -4 & -2 & -3 \\ 0 & -4 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} x_1 \\ \Rightarrow x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(x - x_0)^\perp = \alpha_1 \varphi_1 = \frac{(x - x_0, \varphi_1)}{(\varphi_1, \varphi_1)} \varphi_1$$

$$u - \text{Pr}_L u = \alpha_1 \varphi_1$$

$$u = \alpha_1 \varphi - 1 + \text{Pr}_L u$$

$$(u, \varphi_1) = \alpha_1 (\varphi_1, \varphi_1) \Rightarrow \alpha_1 = \frac{(x - x_0, \varphi_1)}{(\varphi_1, \varphi_1)}$$

$$(x - x_0, \varphi_1) = \left(\begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \right) = -6 - 7 + 4 + 0 = -9$$

$$(\varphi_1, \varphi_2) = 4 + 1 + 4 = 9$$

$$\rho(P_1, P_2) = \|(2 \quad 1 \quad -2 \quad 0)\| = \sqrt{9} = 3$$

Задача 3.

В пространстве $\mathbb{R}[x]_n$ со скалярным произведением $\int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$. Найти объём параллелепипеда.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Gr}(\bar{1}, \bar{x}, \bar{x}^2) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{vmatrix} = \frac{32}{135} \Rightarrow V = \sqrt{\frac{32}{135}}$$

Определение:

$\mathcal{A}^* : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ является сопряжённым к $\mathcal{A} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$, если

$$\forall x, y \in \mathcal{E} \quad (\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^*y)$$

Свойства:

$\mathcal{A}_e^* = \Gamma^{-1} \mathcal{A}_e^T \Gamma$, где Γ - матрица Грамма базиса e

Если базис e ортонормированный базис, то $\mathcal{A}_e^* = \mathcal{A}_e^T$

Определение:

линейный оператор называется самосопряжённым (симметрическим), если

$$\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$$

Свойства:

1. $(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$
2. $(\mathcal{A} + \mathcal{B})^* = \mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*$
3. $(\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^* \mathcal{A}^*$
4. $(\alpha \mathcal{A})^* = \alpha \mathcal{A}^*, \alpha \in \mathbb{R}$

Доказательство 1.

$$\begin{cases} (\mathcal{A}^*x, y) = (x, (\mathcal{A}^*)^*y) \\ (y, \mathcal{A}^*x) = (\mathcal{A}y, x) = (x, \mathcal{A}y) \end{cases}, \quad (\mathcal{A}^*x, y) = (y, \mathcal{A}^*x) \Rightarrow \forall x, y \quad \mathcal{A} = (\mathcal{A}^*)^*$$

Задача 4.

Пусть e_1, e_2 ортонормированный базис плоскости и линейный оператор \mathcal{A} в базисе

$$f_1 = e_1, f_2 = e_1 + e_2$$

имеет матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу \mathcal{A}^* в том же базисе f_1, f_2

$$\Gamma = C^T E C, C_{e \rightarrow f} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Gamma^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_f^* &= \Gamma^{-1} \mathcal{A}_f^T \Gamma = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Задача 5.

Пусть \mathcal{A} - оператор взятия проекции плоскости на ось Ox параллельно биссектрисе 1 и 3 четверти. Найти \mathcal{A}^*

Возьмём единичные векторы \vec{i}, \vec{j} :

Тогда $\mathcal{A}(i) = i, \mathcal{A}(j) = -i \Rightarrow \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. В ОНБ $\{i, j\}$

$$\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{A}^*(i) = i - j, \mathcal{A}^*(j) = 0$$

$$\mathcal{A}^* \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}$$