Семинары по алгебре 4 модуль.

Андрей Тищенко

2023/2024 гг.

Семинар 4 апреля

Номер 1. $a_1 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\end{pmatrix},\ a_3 = \begin{pmatrix}1 & 3 & 3\end{pmatrix}, L_1 = \langle a_1,\ a_2,\ a_3\rangle$

$b_1 = \begin{pmatrix}2 & 3 & -1\end{pmatrix},\ b_2 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 2\end{pmatrix},\ b_3 = \begin{pmatrix}1 & 1 & -3\end{pmatrix},\ L_2 = \langle b_1,\ b_2,\ b_3\rangle$

Найти размерности и какие-нибудь базисы $L_1 + L_2$ и $L_1 \cap L_2$.

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 3 & 3\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 4\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\ \dim L_1 = 2$$

$$B = \begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & 1 & -3\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}0 & 1 & 5\\ 0 & 1 & 5\\ 1 & 1 & -3\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & -3\\ 0 & 1 & 5\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\ \dim L_2 = 2$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & -3\\ 0 & 1 & 5\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \dim(L_1 + L_2) = 3 \Rightarrow$$

$\dim(L_1 \cap L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 + L_2) = 1$

Так как L_1 базис, через него выражается любой вектор, в том числе $\vec{X} = (x_1,\ x_2,\ x_3)$

Значит $\operatorname{Rg}\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$

Аналогично для L_2:

$\operatorname{Rg}\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ 1 & 1 & -3\\ 0 & 1 & 5\end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ 1 & 1 & -3\\ 0 & 1 & 5\end{vmatrix} = 8x_1 - 5x_2 + x_3 = 0$

$L_1 \cap L_2 : \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 8x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3x_2 \\ x_2 = 5x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ - пример базиса объединения.

Номер 2. Доказать, что $\mathbb{R}^4$ является прямой суммой $L_1 = \langle a_1,\ a_2 \rangle$, $L_2 = \langle b_1,\ b_2 \rangle$ и разложить вектор $x = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 & -3 \end{pmatrix}^T$ в сумму проекций на эти подпространства, где:

$a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$b_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ b_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2)$

$\dim L_1 = \dim L_2 = 2$, так как есть БМ порядка 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\dim(L_1 + L_2) = 4 \Rightarrow \dim(L_1 \cap L_2) = 0 \Rightarrow L_1 + L_2$

$$x = x_1 + x_2 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{c|c} & 1 \\ E & 1 \\ & 0 \\ & -2 \end{array}\right)$$

$$x_1 = a_1 + a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in L_1 \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = -2b_2$$

$x = x_1 + x_2$ - ответ.

Номер 3. Доказать, что $M_n(\mathbb{R})$ есть прямая сумма подпространства всех симметрических матриц и L_2 всех кососимметрических матриц $(A^T = A)$

Утверждение: Сумма $L_1 + L_2$ прямая $\Leftrightarrow \forall x \in L_1 + L_2\ \exists!$ разложение $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in L_1,\ x_2 \in L_2$

Решение: Пусть $A = S+K$, где S - симметрическая матрица, K - кососимметрическая

$A^T = S^T + K^T = S - K \Rightarrow \begin{cases} S = \dfrac{A + A^T}{2} \\ K == \dfrac{A - A^T}{2} \end{cases}$ - единственное разложение

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

Билинейные формы

Определение: в $V \times V \longrightarrow R$ называется билинейной формой, если $\begin{cases} b(\alpha x + \beta y,\ z) = \alpha b(x,\ z) + \beta b(y,\ z) \\ b(x,\ \alpha y + \beta z) = \alpha b(x,\ y) + \beta b(x,\ z) \end{cases}$, то есть линейность по каждому аргументу.

$b(x,\ y) = x_e^T B_e y_e$, переход к другому базису $(e \to e')$

$B' = C^T B C$

Номер 4. Я решал у доски, скиньте пж запись.

Номер 5. Найти $f(x,\ y)$, если $F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ - матрица билинейной формы

f, $x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}^T$, $y = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}^T$

$$f(x,\ y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = -43$$

Номер 6. Найти матрицу билинейной формы в базисе e', если

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 - e_2 \\ e'_2 = e_1 + e_3 \\ e'_3 = e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$$

$$B_e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$B_{e'} = C^T B_e C = \begin{pmatrix} 0 & -6 & -9 \\ -2 & 20 & 30 \\ -3 & 30 & 45 \end{pmatrix}$ - ответ.

Номер 7. $q(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3 - x_3^2$ - квадратичная форма
Построить ассоциированую (или полярную) симметричную билинейную форму

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} = B \Rightarrow$

$\Rightarrow b(x,\ y) = x_1y_1 + x_1y_2 - 3x_1y_3 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + 2x_2y_3 - 3x_3y_1 + 2x_3y_2 -$
$- x_3y_3$ - ответ

$b(x,\ y) = \frac{1}{2}\big[q(x+y) - q(x) - q(y)\big]$

Пример: $q(x) = x_1x_2 + x_1x_3$

$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$q(x) = x^T Ax,\ A' = C^T AC$

Критерий Сильвестра

Исследовать на положительную и отрицательную определённость при различных $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\begin{pmatrix} 2 & \lambda & 3 \\ \lambda & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \Delta_1 = 2 > 0 \\ \Delta_2 = 4 - \lambda^2 = (2-\lambda)(2+\lambda) \\ \Delta_3 = \lambda^2 + 6\lambda - 16 < 0 \end{cases}$ Ответ: не является положительно определённой и не является отрицательно определённой.

Семинар 10 апреля

1. Найти все значения параметра a, при которых квадратичная форма

   а. Положительно определена.

   б. Отрицательно определена.

$q(x,\ y,\ z) = x^2 + 4y^2 + 3z^2 + 2axy + (2+4a)yz$

$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 4 & 1+2a \\ 0 & 1+2a & 3 \end{pmatrix} \Delta_1 = 1 > 0$

$\Delta_2 = 4 - a^2 = (2-a)(2+a)$

$\Delta_3 = \det A = -7(a+1)(a - \frac{11}{7})$

Положительная определённость:

$\left.\begin{matrix} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 > 0 \\ \Delta_3 > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \in (-1,\ \frac{11}{7})$

Отрицательная определённость:

$\left.\begin{matrix} \Delta_1 < 0 \\ \Delta_2 > 0 \\ \Delta_3 < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \in \varnothing$

2. Исследовать квадратичную форму на положительную и отрицательную определённость в зависимости от параметра:

   $q(x) = (\lambda-1)x_1^2 + (2\lambda-2)x_1x_2 - 2\lambda x_1x_3 + 2\lambda x_2^2 - 2\lambda x_2x_3 + (\lambda-2)x_3^2$

   $A = \begin{pmatrix} \lambda-1 & \lambda-1 & -\lambda \\ \lambda-1 & 2\lambda & -\lambda \\ -\lambda & -\lambda & \lambda-2 \end{pmatrix}$

   $\left.\begin{matrix} \Delta_1 = \lambda - 1 \\ \Delta_2 = (\lambda-1)(2\lambda-(\lambda-1)) = \lambda^2 - 1 \\ \Delta_3 = -(\lambda+1)(\lambda - \frac{2}{3}) \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ положительной определённости нет. Отрицательная при $\lambda < -1$. (Может быть неправильно посчитал).

Метод Лагранжа

3. Найти нормальный вид и невырожденное линейное преобразование, приводящее к этому виду. Также опредеелить ранг и индексы инерции.

$$q(x) = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$$

Вынесем x_1:

$$q(x) = \underline{x_1}^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + \underline{2x_1x_2} - \underline{4x_1x_3} =$$

$x_1^2 + 2x_1(x_2-2x_3) - x_2^2 + 4x_2x_3 - 4x_3^2 + (x_2-2x_3)^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + (x_2-2x_3)^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 =$

$= (x_1+(x_2-2x_3))^2 + 4x_2^2 - 8x_3^2 + 4x_2x_3 = (x_1+(x_2-2x_3))^2 + (2x_2+x_3)^2 - 9x_3^3 =$

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$$

Ранг равен 3, $i_+ = 2,\ i_- = 1$

$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - 2x_3 \\ y_2 = 2x_2 + x_3 \\ y_3 = 3x \end{cases}$ $\quad C_{y\to x} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ - матрица перехода.

4. Привести квадратичную форму к нормальному виду. Найти Rg, сигнатуру и матрицу перехода от старого базиса к новому.

$$q(x) = -2x_1x_3 - 2x_2x_3 + x_3^2$$

$$x_3^2 - 2x_3(x_1 + x_2) + (x_1 + x_2)^2 - (x_1 + x_2)^2$$

$$(x_3 - (x_1 + x_2))^2$$

$$X = C_{y\to x}Y$$

$$C_{y\to x} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{x\to x} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5. $q(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$

$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$

$$y_1^2 - y_2^2 + y_1y_3 - y_2y_3 + y_1y_3 + y_2y_3$$

$$(y_1 + y_3)^2 - y_2^2 - y_3^2$$

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + y_3 \\ z_2 = y_2 \\ z_3 = y_3 \end{cases} \Rightarrow z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$i_- = 2,\ i_+ = 1,\ \mathrm{Rg} = 3$$

$$\begin{cases} x = C_1y \\ z = C_2y \end{cases},\ y = C_2^{-1}z \Rightarrow x = C_1y = C_1C_2^{-1}z = C_3z$$

$$C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Существует ли невырожденное линейное преобразование, переводящее квадратичную форму f в квадратичную форму g? Если да, то найти бы одно.

$$f(x) = -2x_1x_3 - 2x_2x_3 + x_3^2,\ g(y) = 4y_1^2 - 2y_1y_3$$

$f(x) = f(z) = z_1^2 - z_2^2$

$$\begin{cases} z_1 = -x_1 - x_2 + x_3 \\ z_2 = x_1 + x_2 \\ z_3 = x_1 \end{cases}, \ z = C_1x, \quad C_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$g(y) = 4y_1^2 - 2y_1y_3 = \left((2y_1)^2 + 2 \cdot 2y_1\frac{1}{2}y_3 + \frac{1}{4}y_3^2\right) - \frac{1}{4}y_3^2 =$
$= (2y_1 + \frac{1}{2}y_3)^2 - (\frac{1}{2}y_3)^2$

$$\begin{cases} z_1 = 2y_1 + \frac{1}{2}y_3 \\ z_2 = \frac{1}{2}y_3 \\ z_3 = y_2 \end{cases}, \ z = C_2y \Rightarrow C_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

надо $x = C_3y$. Имеем $\begin{cases} z = C_1x \\ z = C_2y \end{cases} \Rightarrow x = C_1^{-1}z \Rightarrow$

$\Rightarrow (*)$ есть $x = C_1^{-1}C_2 \cdot y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} y \leftarrow$ матрица перехода.

Семинар 17 апреля.

$$T_{e\to e} = \{t_{ij}\} = \begin{cases} e'_1 = t_{11}e_1 + \dots + t_{n1}e_n \\ \dots \\ e'_n = t_{1n}e_1 + \dots + t_{nn}e_n \end{cases}$$

Симметричный Гаусс

Задача 1. Привести $q(x)$ к нормальному виду, найти Rg, $(i_+,\ i_-)$, матричный переход от старого базиса к новому.

$q(x) = -2x_1x_3 - 2x_2x_3 + x_3^2$

1 способ. Метод Лагранжа (был на прошлом семинаре).

$q(x) = y_1^2 - y_2^2$

$$\begin{cases} y_1 = -x_1 - x_2 + x_3 \\ y_2 = x_1 + x_2 \\ y_3 = x_1 \end{cases} \Leftrightarrow y = Cx$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Третью строчку мы выбрали так, чтобы матрица C была невырождена.

$x^f = T_{f\to e}x^e$

Немного фактов с семинара: 1. $f = e \cdot T_{e\to f}$ - для матриц

2. $\begin{cases} x = e \cdot x^e \\ x = f \cdot x^f \end{cases}$

$C_{x\to y} = C^{-1}$ 2 способ. Симметричный Гаусс.

Матрица квадратичной формы $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Цель: привести A к диагональному виду

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) = q(y) = y_1^2 - y_2^2.$$ Правая матрица будет

$C_{x\to y}$ - матрица перехода.

Важное замечание: мы можем применять операции к столбцам левой матрицы, не затрагивая правую.

Линейные операторы

Фиксируем базис $e = (e_1, \ldots,\ e_n)$ в V

$\varphi:\ V \to V$

1. $\forall x \in V$:

$$\big(\varphi(x)\big)^e = A_e x^e$$

2. Пусть $T_{e\to f}$ - матрица перехода к f
$A_f = T^{-1}A_eT = T_{f\to e}A_eT_{e\to f}$
3. $\dim\ker\varphi + \dim\operatorname{Im}\varphi = \dim V$

Задача 2. Найти размерности и базисы ker и Im линейного оператора, задаваемого матрицей A в некотором базисе $\mathbb{R}^4$.

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & -1 & 4\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1 & -3\\ 0 & 1 & -1 & 3\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$\operatorname{Rg} A = \dim\operatorname{Im}\varphi$
$\dim\ker\varphi = n - r = 2$

Задача 3. Доказать, что поворот плоскости на угол α - линейный оператор в $V_2 \cong \mathbb{R}^2$ найти его матрицу в базисе $\{i,\ j\}$
1. $\forall\lambda \in \mathbb{R}\ \varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$
2. $\varphi(x_1+x_2) = \varphi(x_1)+\varphi(x_2)$ поворачивается на угол α параллелограмм на векторах $x_1,\ x_2 \Rightarrow$ их сумма (диагональ этого параллелограмма) также поворачивается на угол α. Значит это линейный оператор.

Рассмотрим $\varphi(i) = \varphi\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \cos\alpha i + \sin\alpha j$

$\varphi(j) = \varphi\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = -\sin\alpha i + \cos\alpha j \Rightarrow$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$ - матрица поворота

4. Является ли преобразование линейным оператором. Если да, то найти его матрицу.

a. $\varphi(x) = (x_2 + x_3,\ 2x_1 + x_3,\ 3x_1 - x_2 + x_3)$

$$\begin{pmatrix}\varphi(x_1)\\ \varphi(x_2)\\ \varphi(x_3)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_2 + x_3\\ 2x_1 + x_3\\ 3x_1 - x_2 + x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

То есть $\varphi(x)^T = A\cdot x^T \Rightarrow$
$\Rightarrow \varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay \Rightarrow$ линейный оператор.

b. $\varphi(x) = (x_1,\ x_2 + 1,\ x_3 + 2)$. Не уважает сложение векторов, значит не является линейным оператором.

5. Доказать, что существует единственный линейный оператор, переводящий векторы $a_1,\ a_2,\ a_3$ в векторы $b_1,\ b_2,\ b_3$. Найти его матрицу.
$a_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \end{pmatrix},\quad b_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
$a_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},\quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
$a_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad b_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
Утверждение: существует единственный линейный оператор в $\mathbb{R}^n$, переводящий линейно независимые векторы $a_1, \dots,\ a_n$ в любые заданные векторы $b_1, \dots,\ b_n$
$\varphi(a_1) = b_1$
$\dots,$ дано
$\varphi(a_n) = b_n$
$\forall x \in V \quad a_1, \dots,\ a_n$ - базис $\Rightarrow$
$\Rightarrow x = x_1 a_1 + \dots + x_n a_n,$ единственное разложение
$\varphi(x) = x_1 \underbrace{\varphi(a_1)}_{b_1} + \dots + x_n \underbrace{\varphi(a_n)}_{b_n} = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i$
Пусть $A = (a_1, \dots,\ a_n),\ B = (b_1, \dots,\ b_n) \Rightarrow$
$\Rightarrow \Phi_a = BA^{-1}$, где Φ - матрица линейного оператора φ базиса a
$b_1 = \varphi(a_1) = \Phi_a \cdot a_1$
$\dots$
$b_n = \varphi(a_n) = \Phi_n \cdot a_n \Rightarrow B = \Phi_a A \Rightarrow \Phi_a = B \cdot A^{-1}$

Семинар 24 апреля

Задача 1:

Показать, что умножение квадратной матрицы 2-го порядка на данную матрицу $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ является линейным оператором и найти его матрицу в базисе

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_2d_2 \end{pmatrix}$
$\varphi(x) = x \cdot A$
$\varphi(\alpha x + \beta y) = (\alpha x + \beta y)A = \alpha x A + \beta y A = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y)$
$\varphi(e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = ae_1 + be_2$

$$\varphi(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = ce_1 + ae_2$$
$$\varphi(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ae_3 + be_4$$
$$\varphi(e_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ce_3 + ae_4$$
$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & c & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix}$$

Задача 2:

Показать, что дифференцирование является линейным оператором в пространстве всех многочленов $\deg \leqslant n$ $\big(R_n[x]\big)$
Найти матрицу:

а) $1,\ x,\ x^2, \ldots,\ x^n$

$$\varphi\big(\alpha f_n(x) + \beta g_n(x)\big) = \big(\alpha f_n(x) + \beta g_n(x)\big)' = \alpha f_n'(x) + \beta g_n'(x) =$$
$$= \alpha\varphi\big(f_n(x)\big) + \beta\varphi\big(g_n(x)\big)$$
$$e_1 = 1,$$
$$\varphi(1) = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + \dots + 0 \cdot x^n$$
$$\varphi(x) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + \ldots 0 \cdot x^n$$
$$\vdots$$
$$\varphi(x^n) = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + \dots + nx^{n-1} + 0 \cdot x^n$$
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & n \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

б) $1,\ x-a,\ (x-a)^2, \ldots,\ (x-a)^n$

Раскладываем в ряд Тейлора (на семинаре не решали).

Задача 3:

В базисе $e_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Линейный оператор φ имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

В какое множество под действием φ перейдёт прямая l:

$x_1 - 2x_2 = 1$?

Запишем точки, принадлежащие этой прямой:

$(1,\ 0) + (2,\ 1)\,k,\ (1 + 2k,\ k)$

$(1,\ 0) - \left(0,\ -\dfrac{1}{2}\right) = \overline{a}$

Потребуется $https://hentaihaven.net/$ матрица перехода от изначального базиса к стандартному.

$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = T_{S\to N},\ T_{N\to S} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

$A'_S = T_{S\to N} A T_{N\to S} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\varphi \begin{pmatrix} 1 + 2k \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 + 2k \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 6k \\ k \end{pmatrix}$

Задача 4:

Линейный оператор φ в базисе $a_1 = (1,\ 2)^T,\ a_2 = (2,\ 3)^T$

Имеет матрицу $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

Линейный оператор ψ в базисе $b_1 = (3,\ 1),\ b_2 = (4,\ 2)$

Найти матрицу линейного оператора $\varphi + \psi$ в базисе $\{b_1,\ b_2\}$

$\Phi_b = T_{b\to a} \Phi_a \cdot T_{a\to b} = \begin{pmatrix} 40 & 38 \\ -\frac{71}{2} & -34 \end{pmatrix}$

Ψ_b - дано $\Phi_b + \Psi_b = \begin{pmatrix} 44 & 44 \\ -\frac{59}{2} & -25 \end{pmatrix}$

Алгоритм диагонализации

Задача 1:

Диагонализируем ли линейный оператор с матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

а) над $\mathbb{R}$

б) над $\mathbb{C}$

1. Ищем характеристический многочлен:
$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = (\lambda-1)^2 + 1$ значит вещественных корней нет, значит над $\mathbb{R}$ не диагонализируемая.
$\lambda_1,\ \lambda_2 = \dfrac{2 \pm 2i}{2} = \left[\begin{matrix} 1-i \\ 1+i \end{matrix}\right.$ $\Rightarrow$ диагонализируем над $\mathbb{C}$. Так как $n = 2 = \dim V$ различных собственных значений.
$\Lambda = \begin{pmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & 1+i \end{pmatrix}$ - диагональный вид.
2. Ищем собственные векторы.
$\lambda_1 = 1 - i$
$B = A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 1-(1-i) & -1 \\ 1 & 1-(1+i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$x_1 = -ix_2$

	y_1
x_1	$-i$
x_2	1

$\lambda_2 = 1 + i$
$B \sim \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ T = (y_1,\ y_2) = \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

	y_2
x_1	i
x_2	1

$A = T\Lambda T^{-1},\ T_{A\to\Lambda} = \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
б) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ - диагонализируем ли линейный оператор? $\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 \Rightarrow \lambda_1 = 1,\ m_1 = 2$
Критерий диагонализируемости:

1. $n = \dim V$ собственных значений
2. $\forall \lambda_i\ m_i = s_i$ (алгебраическая кратность = геометрической)

$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $n - r = 2 - 1 = 1 = s \neq m \Rightarrow$ недиагонализируема.

Семинар 15 мая

Задача 1

Можно ли привести матрицу линейного оператора к диагональному виду. Если да, то найти разложение $A = T\Lambda T^{-1}$.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

T - матрица перехода от исходного базиса к базису из собственных векторов.
$\Lambda = T^{-1}AT$
Решал у доски, коспекта не будет.

Задача 2.

Всего 10000 жителей. Каждый день 15% здоровых заболевают, а 10% больных выздоравливают (можно болеть повторно). В первый день заболело 100 человек. Как будет вести себя количество больных с ростом времени.
Пусть $\begin{pmatrix} x - \text{здоровые} \\ y - \text{больные} \end{pmatrix} \Rightarrow v_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9900 \\ 100 \end{pmatrix}$
$\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 0,15x + 0,1y \\ y - 0,1y + 0,15x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,85x + 0,1y \\ 0,15x + 0,9y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,1 \\ 0,15 & 0,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow$
$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} \frac{17}{20} & \frac{1}{10} \\ \frac{3}{20} & \frac{9}{10} \end{pmatrix}$, $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - \frac{3}{4}) \Rightarrow \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$
$\lim\limits_{n\to\infty} \varphi^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \lim\limits_{n\to\infty} A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, $A = T\Lambda T^{-1}$
$A^n = (T\Lambda T^{-1})^n = T\Lambda T^{-1} T\Lambda T^{-1} \dots T\Lambda T^{-1} = T\Lambda^n T^{-1} = T \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & (\frac{3}{4})^n \end{pmatrix} T^{-1}$
$\lambda_1 = 1$
$B = A - E = \begin{pmatrix} -\frac{3}{20} & \frac{1}{10} \\ \frac{3}{20} & -\frac{1}{10} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
$\lambda_2 = \frac{3}{4}$
$B = A - \frac{3}{4}E = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{3}{20} & \frac{3}{20} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \ T^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

$A^* = \lim\limits_{n\to\infty} A^n = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 \\ 0,6 & 0,6 \end{pmatrix}$

$A^* \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 \\ 0,6 & 0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9900 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4000 \\ 6000 \end{pmatrix} \Rightarrow$ число заболевших стабилизируется на 6000.

Второй способ

Найти базис из собственных векторов $\{v_1,\ v_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$v_0 = x_1 v_1 + x_2 v_2$ - разложим $\left(v_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right)$

$\lim\limits_{n\to\infty} \varphi^n = x_1 \lim\limits_{n\to\infty} \varphi^n(v_1) + x_2 \lim\limits_{n\to\infty} \varphi^n(v_2) = \lim\limits_{n\to\infty} (x_1 \lambda_1^n v_1 + x_2 \lambda_2^n v_2) =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \left(x_1 1^n v_1 + x_2 \left(\frac{3}{4}\right)^n v_2 \right) = x_1 v_1$

Найдём x_1:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} 9900 \\ 100 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9900 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2000 \\ -5900 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = 2000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \varphi^n(v_0) = x_1 v_1 = 2000 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4000 \\ 6000 \end{pmatrix}$$

Задача 3.

$A^{64} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 14 & -8 \end{pmatrix}^{64}$

$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -4 \\ 14 & -8-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+1)$

$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$A_0 = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 14 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$

$A_{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 14 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow T = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$

Евклидовы пространства

$\mathcal{E} = (V,\ g(x,\ y)),\ g$ - скалярное произведение.
Аксиомы скалярного произвдения:

1. Симметричность $g(x,\ y) = g(y,\ x)$

2. Линейность $g(\alpha x + \beta y,\ z) = \alpha g(x,\ z) + \beta g(y,\ z)$

3. $\forall x \in \mathcal{E}\ g(x,\ x) \geqslant 0 \wedge g(x,\ x) = 0 \Rightarrow x = 0$

Неравенство Коши-Буняковского

$|g(x,\ y)| \leqslant ||x|| \cdot ||y||$

Неравенство треугольника

$||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y||$

Задача 4.

$\mathcal{E} = C[a,\ b],\ \langle f,\ g\rangle = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx$
Проверить, что это скалярное произведение и выписать неравенство Коши-Буняковского и треугольника.
1. $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^b g(x)f(x)\,dx$
2. $\displaystyle\int_a^b (\alpha f_1 + \beta f_2)(x)g(x)\,dx = \alpha \int_a^b f_1\,dx + \beta \int_a^b f_2\,dx$ 3. $\displaystyle\int_a^b f^2\,dx \geqslant 0 \wedge \int_a^b f^2\,dx = 0 \Rightarrow f_1 \equiv 0$

$$\left|\int_a^b f \cdot g\,dx\right|^2 \leqslant \int_a^b f^2\,dx \int_a^b g^2\ dx$$

$$\sqrt{\int_a^b (f+g)^2\,dx} \leqslant \underbrace{\sqrt{\int_a^b f^2\,dx}}_{||f||} + \underbrace{\sqrt{\int_a^b g^2\,dx}}_{||g||}$$

Задача 5.

Применяя процесс ортогонализации Гаусса-Шмидта построить ортонормированный базис подпространства $\mathcal{L}(a_1,\ a_2,\ a_3)$.

$$a_1 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & -1\end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix}1 & 1 & -5 & 3\end{pmatrix},\ a_3 = \begin{pmatrix}3 & 2 & 8 & -7\end{pmatrix}$$

$$b_1 = a_1$$

$$b_2 = a_2 - c_{2,\ 1}b_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\-5\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\-3\\2\end{pmatrix},\ c_{2,\ 1} = \frac{(a_2,\ b_1)}{(b_1,\ b_1)} = -1$$

$$b_3 = a_3 - c_{3,\ 1}b_1 - c_{3,\ 2}b_2 = \begin{pmatrix}3\\2\\8\\-7\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}1\\2\\2\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\3\\-3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\-2\end{pmatrix},\ c_{3,\ 1} = \frac{(a_3,\ b_1)}{(b_1,\ b_1)} = -1$$

$$c_{3,\ 2} = \frac{(a_3,\ b_2)}{(b_2,\ b_2)} = -1$$

Ортогональный базис:

$$\{b_1,\ b_2,\ b_3\} = \left\{\begin{pmatrix}1\\2\\2\\-1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}2\\3\\-3\\2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\-2\end{pmatrix}\right\}$$

Ортонормированный базис:

$$\{b_1,\ b_2,\ b_3\} = \left\{\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\2\\2\\-1\end{pmatrix},\ \frac{1}{26}\begin{pmatrix}2\\3\\-3\\2\end{pmatrix},\ \frac{1}{6}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\-2\end{pmatrix}\right\}$$

Семинар 22 мая

Напоминание с лекции:
Ортогональное дополнение

$$L^{\perp} = \left\{x \in \mathcal{E}\ \middle|\ \forall h \in L\ (x,\ h) = 0\right\}$$

$$\mathcal{E} = L \oplus L^{\perp} \Rightarrow \forall x \in \mathcal{E} \exists! h \in L\ \exists! h^{\perp} \in L^{\perp}\ x = h + h^{\perp}$$

Факт: $\left(L^{\perp}\right)^{\perp}$

Задача 1.

Проверить, что векторы образуют ортогональную систему и дополнить их до ортогонального базиса пространства.

$$a_1 = \begin{pmatrix}1 & -2 & 2 & -3\end{pmatrix}^T, \ a_2 = \begin{pmatrix}2 & -3 & 2 & 4\end{pmatrix}^T - \text{базис } L$$

Тогда $L^{\perp} := \begin{pmatrix}1 & -2 & 2 & -3\\ 2 & -3 & 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix} = 0$, то есть $L^{\perp}$ - множество решений ОСЛАУ $A^T x = 0$, где $A = [a_1, \ a_2]$

Проверим ортогональность: $(a_1, \ a_2) = 2 + 6 + 4 - 12 = 0$ ортогональны.

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 2 & -3\\ 2 & -3 & 2 & 4\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -2 & 2 & -3\\ 0 & 1 & -2 & 10\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & -2 & 17\\ 0 & 1 & -2 & 10\end{pmatrix},$$

	y_1	y_2
x_1	2	-17
x_2	2	-10
x_3	1	0
x_4	0	1

Используем метод ортогонализации Грамма-Шмидта:

$b_1 = y_1 = \begin{pmatrix}2\\ 2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$,

$b_2 = y_2 - \dfrac{(y_2, \ b_1)}{(b_1, \ b_1)} b_1$;

$b_2 = \begin{pmatrix}-17\\ -10\\ 0\\ 1\end{pmatrix} + \dfrac{54}{9}\begin{pmatrix}2\\ 2\\ 1\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\ 2\\ 6\\ 1\end{pmatrix}$

Искомый базис будет выглядеть как $[a_1, \ a_2, \ b_1, \ b_2]$

Задача 2.

$$L:\begin{cases}2x_1+x_2+3x_3-x_4=0\\ 3x_1+2x_2-2x_4=0\\ 3x_1+x_2+9x_3-x_4=0\end{cases}\qquad \text{Найти уравнения, задающие } L^{\perp}$$

$$L^{\perp}=\mathcal{L}(a_1,\ a_2,\ a_3),\ \begin{cases}a_1=\begin{pmatrix}2&1&3&-1\end{pmatrix}^T\\ a_2=\begin{pmatrix}3&2&0&-2\end{pmatrix}^T\\ a_3=\begin{pmatrix}3&1&9&-1\end{pmatrix}^T\end{cases}$$

1 способ:

$\begin{pmatrix}2&1&3&-1\\3&2&0&-2\\3&1&9&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&6&0\\0&1&-9&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ - базис $L^{\perp}$, так как решение $L^{\perp}x=0$ есть решение L

$$A^Tx=0,\ M=\begin{array}{r}\\ a_1'\\ a_2'\end{array}\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3&x_4\\1&0&6&0\\0&1&-9&-1\end{pmatrix},\ M_{123}^{123}=\begin{vmatrix}x_1&x_2&x_3\\1&0&6\\0&1&-9\end{vmatrix}=-6x_1+9x_2+x_3=0$$

$$M_{123}^{124}=\begin{vmatrix}x_1&x_2&x_4\\1&0&0\\0&1&-1\end{vmatrix}=x_2+x_4=0$$

2 способ.

Ищем ФСР:

$$A^T\sim\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}x_1&x_2&x_3&x_4\end{array}\\ \begin{pmatrix}1&0&6&0\\0&1&-9&1\end{pmatrix}\end{array},\Rightarrow\begin{cases}x_1=-6x_3\\ x_2=9x_3+x_4\end{cases}\quad ,$$

	y_1	y_2
x_1	-6	0
x_2	9	1
x_3	1	0
x_4	0	1

$Y^Tx=0$ - искомая СЛАУ, заданная $L^{\perp}$.

$$\begin{pmatrix}-6&9&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=0\Leftrightarrow\begin{cases}-6x_1+9x_2+x_3=0\\ x_2+x_4=0\end{cases}$$

<u>Проекция на подпространство:</u>

3 способа искать:

1. Дан базис $L: a_1,\ldots,\ a_k,$ тогда $x=h+h^{\perp}=\alpha_1a_1+\cdots+\alpha_ka_k+h^{\perp}=(*)$

Умножаем скалярно $(*)$ на $a_1, \dots, a_k$:

$$\begin{cases} \alpha_1(a_1,\ a_1) + \alpha_2(a_1,\ a_2) + \dots + \alpha_k(a_1,\ a_k) = (a_1,\ x) \\ \vdots \\ \alpha_1(a_k,\ a_1) + \alpha_2(a_k,\ a_2) + \dots + \alpha_k(a_k,\ a_k) = (a_k,\ x) \end{cases}$$

Получаем $\Gamma(a_1, \dots, a_k) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} = A^T x$. Отсюда находим решение $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, далее ищем проекцию:

$$\text{Пр}_L\, x = A\alpha = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k$$

2. Ортогонализируем по Грамму-Шмидту: $a_1, \dots, a_k \to b_1, \dots, b_k$ - ортогональный базис L
$\text{Пр}_L\, x = \sum \dfrac{(x,\ b_i)}{(b_i,\ b_i)} b_i$
3. По формуле $\text{Пр}_L\, x = A(A^T A)^{-1} A^T x$, где $A = [a_1, \dots, a_k]$

Задача 3.

Найти отогональную проекцию h и ортогональную составляющую вектора x на ЛПП L

$$x = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 & 4 \end{pmatrix},\ L = \mathcal{L}(a_1,\ a_2,\ a_3)$$

Решал у доски + хотел спать, можете скинуть запись.

Задача 4.

Найти $\text{Пр}_L\, x,\ x_L^{\perp}$

$$x = \begin{pmatrix} 7 & -4 & -1 & 2 \end{pmatrix},\ L : \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 9x_4 = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим матрицу коэффициентов системы:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -9 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & -6 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},\ \text{Rg} = 2$$

Ненулевые строки образуют базис $L^{\perp}$.

$\Gamma(a_1,\ a_2) = \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ -9 & 26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 17 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$x_L^{\perp} = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},\ \text{Пр}_L\, x = x - x_L^{\perp} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Семинар 30 мая

1. Расстояние до многообразия

$$P = x_0 + L$$

1 Способ.

M с радиус вектором x

$$\rho(M,\ P) = \rho(x,\ P) = \|(x - x_0)^{\perp}\|$$

2 Способ.

$$\rho(M,\ P) = \sqrt{\frac{\mathrm{Gr}(a_1, \ldots,\ a_k,\ x - x_0)}{\mathrm{Gr}(a_1, \ldots,\ a_k)}}$$

Задача 1.

Найти расстояние $\rho(x,\ P)$, где $x = (2,\ 4,\ -4,\ 2)$

$$P: \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 = 2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Воспользуемся вторым способом нахождения расстояния:

$$\begin{vmatrix} 14 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & -7 \\ -1 & -7 & 38 \end{vmatrix} = 76, \ \begin{vmatrix} 14 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 19, \ x - x_0 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Утверждение:

$$P_1 = x_1 + L_1, \ P_2 = x_2 + L_2$$
$$\rho(P_1, \ P_2) = \|(x_1 - x_2)^{\perp}_{L_1+L_2}\|$$

Задача 2.

Найти расстояние между двумя плоскостями:

$$x = a_1 t_1 + a_2 t_2 + x_1, \ \text{и} x = a_3 t_1 + a_4 t_2 + x_2$$
$$x_1 = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \ x_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$
$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \ a_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 21 \end{pmatrix}$$
$$a_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ a_4 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -6 & -3 & -2 \\ 0 & -4 & -2 & -3 \\ 0 & -4 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c} \varphi_1 \\ \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$(\overset{=u}{x - x_0})^{\perp} = \alpha_1 \varphi_1 = \frac{(x - x_0, \ \varphi_1)}{(\varphi_1, \ \varphi_1)} \varphi_1$$
$$u - \text{Пр}_L u = \alpha_1 \varphi_1$$
$$u = \alpha_1 \varphi - 1 + \text{Пр}_L u$$
$$(u, \ \varphi_1) = \alpha_1 (\varphi_1, \ \varphi_1) \Rightarrow \alpha_1 = \frac{(x - x_0, \ \varphi_1)}{(\varphi_1, \ \varphi_1)}$$
$$(x - x_0, \ \varphi_1) = \Big(\begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Big) = -6 - 7 + 4 + 0 = -9$$
$$(\varphi_1, \ \varphi_2) = 4 + 1 + 4 = 9$$
$$\rho(P_1, \ P_2) = \left\| \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{9} = 3$$

Задача 3.

В пространстве $\mathbb{R}[x]_n$ со скалярным произведением $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$. Найти объём параллелепипеда.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Gr}(\overline{1},\ \overline{x},\ \overline{x}^2) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{vmatrix} = \frac{32}{135} \Rightarrow V = \sqrt{\frac{32}{135}}$

Определение:

$\mathcal{A}^* : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ является сопряжённым к $\mathcal{A} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$, если

$$\forall x,\ y \in \mathcal{E} \quad (\mathcal{A}x,\ y) = (x,\ \mathcal{A}^* y)$$

Свойства:

$\mathcal{A}^*_e = \Gamma^{-1}\mathcal{A}^T_e\Gamma$, где Γ - матрица Грамма базиса e
Если базис e ортонормированный базис, то $\mathcal{A}^*_e = \mathcal{A}^T_e$

Определение:

линейный оператор называется самосопряжённым (симметрическим), если

$$\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$$

Свойства:

1. $(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$
2. $(\mathcal{A} + \mathcal{B})^* = \mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*$
3. $(\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^*\mathcal{A}^*$
4. $(\alpha\mathcal{A})^* = \alpha\mathcal{A}^*,\ \alpha \in \mathbb{R}$

Доказательство 1.

$\begin{cases} (\mathcal{A}^* x,\ y) = (x,\ (\mathcal{A}^*)^* y) \\ (y,\ \mathcal{A}^* x) = (\mathcal{A}y,\ x) = (x,\ \mathcal{A}y) \end{cases}$, $(\mathcal{A}^* x,\ y) = (y,\ \mathcal{A}^* x) \Rightarrow \forall x,\ y\ \mathcal{A} = (\mathcal{A}^*)^*$

Задача 4.

Пусть $e_1,\ e_2$ ортонормированный базис плоскости и линейный оператор $\mathcal{A}$ в базисе

$$f_1 = e_1,\ f_2 = e_1 + e_2$$

имеет матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $\mathcal{A}^*$ в том же базисе $f_1,\ f_2$

$$\Gamma = C^T E C,\ C_{e\to f} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Gamma^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}_f^* = \Gamma^{-1}\mathcal{A}_f^T\Gamma = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Задача 5.

Пусть $\mathcal{A}$ - оператор взятия проекции плоскости на ось Ox параллельно бессектрисе 1 и 3 четверти. Найти $\mathcal{A}^*$
Возьмём единичные векторы $\vec{i},\ \vec{j}$:
Тогда $\mathcal{A}(i) = i,\ \mathcal{A}(j) = -i \Rightarrow \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. В ОНБ $\{i,\ j\}$

$\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{A}^*(i) = i - j,\ \mathcal{A}^*(j) = 0$

$\mathcal{A}^* \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}$

Семинар 5 июня

Задача 1.

Пусть V - пространство бесконечно дифференцируемых периодических функций с периодом $T = h$. Со скалярным произведением $\displaystyle\int_0^h f(x)g(x)\,dx$.
Найти линейный оператор, сопряжённый к оператору дифференцирования $\mathcal{D}$.

$\big(f(x),\ \mathcal{D}^* g(x)\big) = \big(\mathcal{D} f(x),\ g(x)\big) \Rightarrow$
$\Rightarrow \int_0^h g(x) df(x) = \underbrace{f(x)g(x)\big|_0^h}_{=0} - \int_0^h f(x)dg(x) = -\int_0^h f(x)dg(x) \Rightarrow$
$\Rightarrow (\mathcal{D} f(x),\ g(x)) = -(f(x),\ \mathcal{D} g(x)) = (f(x),\ \mathcal{D}^* g(x)) \Rightarrow \mathcal{D}^* = -\mathcal{D}$

1. Спектральное разложение:

A - симметрическая матрица $\Rightarrow$ существует ортогональная матрица U (матрица перехода), такая что

$$A = U \Lambda U^T$$

Если A - диагонализируема, то существует базис из собственных векторов, такой что

$$A = C \Lambda C^{-1}$$

Где C - матрица перехода к базису из собственных векторов.

Алгоритм:

1. $\chi_A(\lambda)$, ищем все собственные значения (корни).
2. Ищем собственные векторы для каждого собственного значения

$$(A - \lambda_i E) = 0 - \text{находим ФСР}$$

3. Ортогонализируем, если $s \geqslant 2$.
4. Ортонормируем ортогональный базис $\Rightarrow U$

Задача 2.

$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \chi_A(\lambda) = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$
Для λ_1:
$\begin{vmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow n - r = 2$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=x_2\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\Rightarrow b_1=v_1,\ b_2=v_2-\frac{(v_2,\ b_1)}{(b_1,\ b_1)}b_1=$$
$$=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{-2}{5}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{5}\\\frac{2}{5}\\1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1\\2\\5\end{pmatrix}.\text{ Итак } b_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\ b_2=\begin{pmatrix}-1\\2\\5\end{pmatrix}$$
$x_1=2x_2-x_3$. Второй способ ортогонализировать ФСР:

	y_1
x_1	2
x_2	1
x_3	0

Ищем y_2 из условия: $\begin{cases}x_1=2x_2-x_3\\(y_1,\ y_2)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=2x_2-x_3\\2x_1+x_2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=-4x_1-x_3\\x_2-2x_1\end{cases}\Leftrightarrow$
$\begin{cases}x_3=-5x_1\\x_2=-2x_1\end{cases}$
3 способ. Зануляем главную переменную.

	y_1	y_2
x_1	0	-5
x_2	1	-2
x_3	2	1

Нормируем:

	y_1	y_2	e_1	e_2
x_1	2	-1	$\frac{2}{\sqrt{5}}$	$-\frac{1}{\sqrt{30}}$
x_2	1	2	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\frac{2}{\sqrt{30}}$
x_3	0	5	0	$\frac{5}{\sqrt{30}}$

$\|y_1\|=\sqrt{5},\ \|y_2\|=\sqrt{30}$
В ОНБ $V_1(\lambda_1)$
$\lambda_2=-1.\ B=A+E\sim\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\end{pmatrix}$.
Продолжаем нормировать:

y_3	e_3
1	$\frac{1}{\sqrt{6}}$
-2	$-\frac{2}{\sqrt{6}}$
1	$\frac{1}{\sqrt{6}}$

$\|y^3\| = \sqrt{6}$.

Ответ: $A = U\Lambda U^T$ - спектральное разложение, где $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

Приведение квадратичных форм к главным осям (к каноническому виду ортогональным преобразованием).

$$q(x) = x^T A x$$

Строим спектральное разложение для A:

$$A = U\Lambda U^T \Rightarrow \Lambda = U^T A U$$

новая матрица квадратичной формы в ОНБ из собственных векторов оператора с матрицей A.

$\tilde{q}(y) = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$ - канонический вид, λ_i - собственное значение оператора с матрицей A.

Замена координат:

$$x = Uy \Leftrightarrow y = U^T x$$

Получили новые координаты через старые.

Если рассматривать ответ на предыдущую задачу, получим:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{2}{\sqrt{5}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{5}} x_2 \\ y_2 = \dots \\ y_3 = \dots \end{cases}$$

Задача 3.

$q(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2$

Привести ортогональным преобразованием к каноническому виду, выразить новые координаты через старые.

Матрица квадратичной формы: $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$\chi_Q(\lambda) = -(\lambda-2)^2(\lambda+1) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$

Для $\lambda_1 = 2$:

$$A = Q - 2E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = x_2 - x_3$$

	y_1	y_2	e_1	e_2
x_1	0	-2	0	$-\frac{2}{\sqrt{6}}$
x_2	1	-1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}$
x_3	1	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases} \Rightarrow y_3 = (1,\ -1,\ 1)^T \Rightarrow e_3 = (\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}})^T,$

$q(y) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2,\ Q'(y) = 2y_1^2 + 2y_2^2 - y_3^2$

Выразим новые координаты через старые: $\begin{cases} y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_3 \\ y_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2x_1 - x_2 + x_3) \\ y_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(x_1 - x_2 + x_3) \end{cases}$

2. Сингулярное разложение (SVD)

Для любой прямоугольной матрицы $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.
Существует разложение $A = V\Sigma U^T$.
Где U - ортогональная матрица $n \times n$
V - ортогональная матрица $m \times m$

$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \sigma_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$ - сингулярная матрица.

Построить сингулярное разложение.

$A = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 0 & 0 \\ 12 & 24 \end{pmatrix}_{3\times 2}$

Алгоритм SVD

1. Ищем $A^T A_{2\times 2}$ $\big($или $AA^T_{3\times 3}$, если её порядок меньше $(m < n)\big)$.
2. Ищем $\chi_{A^TA}(\lambda)$ - собственные значения A^TA и сингулярные числа $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ - сортируем по невозрастанию $(\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \dots \geqslant 0)$.
3. Строим Σ.
4. Строим ОНБ из собственных векторов для $A^TA \Rightarrow$ получаем матрицу U (для AA^T получим V).
5. Для A^TA находим матрицу V по формулам (для AA^T)
$$v_i = \frac{Au_i}{\sigma_i} \quad (u_i) = \frac{Av_i}{\sigma_i},\ i = \overline{1,\ r}$$
6. достраиваем произвольно до ОНБ для $i = \overline{r+1,\ m}$.

В нашем случае:

1. $A^TA = \begin{pmatrix} 169 & 338 \\ 338 & 676 \end{pmatrix}$
2. $\chi_{A^TA} = \lambda(\lambda - 845) \Rightarrow$ сингулярные числа $\begin{cases} \sigma_1 = \sqrt{845} = 13\sqrt{5} \\ \sigma_2 = 0 \end{cases}$
3. Строим $\Sigma = \begin{pmatrix} 13\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
4. Строим $u_1,\ u_2$ - ОНБ из собственных векторов A^TA.
$\lambda_1 = 845,\ B = A^TA - 845E = \begin{pmatrix} -676 & 338 \\ 338 & -169 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$
$\Rightarrow y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 0 \Rightarrow e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$, из условия, что $\{e_1,\ e_2\}$ - ОНБ.

Итак, $U = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & -2\\2 & 1\end{pmatrix}$

5. Находим матрицу $V = (v_1,\ v_2,\ v_3)$:

$$v_i = \frac{Au_i}{\sigma_i} = \frac{\begin{pmatrix}5 & 10\\0 & 0\\12 & 24\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}}{13\sqrt{5}} = \begin{pmatrix}\frac{5}{13}\\0\\\frac{12}{13}\end{pmatrix} = v_1$$

Произвольно достраиваем до ОНБ. $v_2 = \begin{pmatrix}-\frac{12}{13}\\0\\\frac{5}{13}\end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

Итак $A = V\Sigma U^T$, где:

$\Sigma = \begin{pmatrix}13\sqrt{5} & 0\\0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$

$U = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & -2\\2 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow U^T = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & 2\\-2 & 1\end{pmatrix}$

$V = \begin{pmatrix}\frac{5}{13} & -\frac{12}{13} & 0\\0 & 0 & 1\\\frac{12}{13} & \frac{5}{13} & 0\end{pmatrix}$

Семинар 19 июня.

Вспоминаем лекцию про кривые второго порядка:
$\mathcal{E}$ - эксцентриситет.

1. Эллипс:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ \mathcal{E} = \left[\begin{array}{l}\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}},\ b \geqslant a\\ \sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}},\ b < a\end{array}\right. \in [0,\ 1)$$

2. Гипербола:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ обычная}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \text{ сопряжённая}$$

$$\mathcal{E} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}},\ \mathcal{E} > 1$$

3. Парабола:

$$y^2 = 2px,\ \mathcal{E} = 1$$

Задача 1

Привести кривую к каноническому виду, используя ортогональные преобразования и сдвиги, определить тип кривой и эксцентриситет $\mathcal{E}$, построить эскиз.

$$9x^2 - 4xy + 6y^2 + 16x - 8y - 2 = 0$$

Матрица квадратичной формы $Q = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$, применим сингулярное разложение:

$$\chi(\lambda) = (9-\lambda)(6-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 15\lambda + 50 \Rightarrow \left[\begin{aligned} \lambda_1 &= 5 \\ \lambda_2 &= 10 \end{aligned}\right. \Rightarrow \Lambda = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 5 \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$
$U = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ - матрица перехода (поворот на φ, где $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$)
$x_e = U_{e\to f}x_f$, так как U - ортогональная, можно записать:
$x_f = U^T_{e\to f}x_e \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{x'}{\sqrt{5}} - \frac{2y'}{\sqrt{5}} \\ y = \frac{2x'}{\sqrt{5}} + \frac{y'}{\sqrt{5}} \end{cases}$
$5(x')^2 + 10(y')^2 + 16\frac{1}{\sqrt{5}}(x' - 2y') - 8\frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y') - 2 = 0$
$5(x')^2 + 10(y')^2 - 8\sqrt{5}y' - 2 = 0$
Делаем сдвиг.
$5(x')^2 + 10(y' - \frac{2}{\sqrt{5}})^2 - 10 = 0$

$\frac{(x')^2}{2} + (y' - \frac{2}{\sqrt{5}})^2 = 1$

$\begin{cases} x'' = x' \\ y'' = y' - \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$, получается сдвиг на вектор $\vec{v} = (0,\ \frac{2}{\sqrt{5}})$

$$\frac{x''^2}{2} + (y'')^2 = 1 - \text{эллипс}$$

$\mathcal{E} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Задача 2

$$5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0$$

$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix},\ \chi_A(\lambda) = -\lambda(5-\lambda) - 36 = \lambda^2 - 5\lambda - 36 = (\lambda - 9)(\lambda + 4)$

$\Lambda = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

$\lambda = 9 \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_1 = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\lambda = -4,\ e_2 = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow U = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{13}}(3x' - 2y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{13}}(2x' + 3y') \end{cases}$. После преобразований, получаем:

$$-4(x' + \frac{1}{\sqrt{13}})^2 + 9(y' - \frac{5}{\sqrt{13}})^2 = 36$$

Перенос: $\begin{cases} x'' = x' + \frac{1}{\sqrt{13}} \\ y'' = y' - \frac{5}{\sqrt{13}} \end{cases}$:

$$-\frac{1}{9}x''^2 + \frac{1}{4}y'' = 1$$

Получаем сопряжённую гиперболу.

Переходим в 3D

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ - эллиптический цилиндр.
2. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ - гиперболический цилиндр.
3. $y^2 = 2px$ - параболический цилиндр.
4. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ - эллипсоид.
5. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ - конус.
6. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ - однополосный гиперболоид.
7. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ - двуполосный гиперболоид.
8. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pz$ - эллиптический параболлоид.
9. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz$ - гиперболический параболлоид.

Задача 3. a.

Имеем уравнение $4x^2 - z^2 - 40x - 8z + 100 = 0$. Преобразуем:

$4(x-5)^2 - (z+4)^2 = -16 \Rightarrow \begin{cases} x' = x - 5 \\ y' = y \\ z' = z + 4 \end{cases}$ - сдвиг.

$\frac{(x')^2}{4} - \frac{(z')^2}{16} = -1$ - гиперболический цилиндр вдоль Оу.

$\mathcal{E} = \sqrt{1 = \frac{3^2}{2^2}}$

Задача 3. b.

$\frac{(x-5)^2}{4} - \frac{(y+4)^2}{16} = -2(z-2)$ - гиперболический параболлоид.