

# Теория вероятности 1 модуль.

Андрей Тищенко БПИ231 @AndrewTGk

2024/2025

Семинар 6 сентября.

## Теория

Классическое определение вероятности:

Количество исходов конечно, они взаимоисключающие и равновозможные.

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \in [0, 1].$$

## Задача 0

Казино Монте-Карло с 37 слотами. 18 красных, 18 чёрных и 0. Тогда вероятность выиграть при ставке на красное будет  $\frac{18}{37}$ . Ставка удваивается. Можно играть на дюжины  $[1, 12]$ ,  $[13, 24]$ ,  $[25, 36]$ , тогда вероятность выигрыша  $\frac{12}{37}$ . Ставка при этом утраивается.

## Задача 1

У взломщика есть связка из 10 ключей. С какой вероятностью он откроет дверь, перебрав ровно половину ключей.

Ключ равновероятно может находиться на любой позиции в его связке.

На пятом месте он будет в единственном случае, тогда  $P = \frac{1}{10}$

## Задача 2

Студент выучил 20 билетов из тридцати. С какой вероятностью ему достанется выученный билет, если он заходит первым? Вторым? Если

первым:  $\frac{20}{30}$

Если вторым:  $\frac{19}{29} \cdot \frac{2}{3} + \frac{20}{29} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

### Задача 3

Есть буквы М, О, С, К, В, А. Какова вероятность получить слово МОСКВА при случайном расположении этих букв.

$$P(A) = \frac{1}{6!} = \frac{1}{720}$$

Условие такое же, но буквы А, Б, Р, А, К, А, Д, А, Б, Р, А и нужно получить АБРАКАДАБРА.

$$P(A) = \frac{5!2!2!}{11!}$$

### Задача 4

Есть два брата и 10 мест за круглым столом. Какова вероятность размещения братьев напротив друг-друга.

Одного фиксируем, у второго 9 вариантов  $P(A) = \frac{1}{9}$

Рассматриваем положение обоих  $P(A) = \frac{10 \cdot 8!}{10!} = \frac{1}{9}$

### Задача 5

10 человек, 10 мест, между двумя конкретными должно быть 3 человека.

$$P(A) = \frac{6 \cdot 2 \cdot 8!}{10!}$$

Выбираем  $m$  элементов из  $N$ , с учётом порядка:

$$A_N^m = N(N-1) \dots (N-m+1) = \frac{N!}{(N-m)!}$$

Без учёта порядка:

$$C_N^m = \frac{A_N^m}{m!} = \frac{N!}{(N-m)!m!}$$

### Задача 6

Угадываем номер телефона, знаем все цифры, кроме последних трёх, но известно, что они разные:

$$P(A) = \frac{1}{A_{10}^3} = \frac{1}{720}$$

### Задача 7

Какова вероятность выиграть в спортлото (49 видов спорта, 6 выигрышных, нужно собрать все 6).

$$P(A) = \frac{1}{C_{49}^6} \approx \frac{1}{14\,000\,000}$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

### Задача 8

Выбираются 3 цифры, хотим, чтобы их произведение было чётным.

Посчитаем вероятность нечётности произведения:  $P(\overline{A}) = \frac{C_5^3}{C_{10}^3} = \frac{5!}{2!3!} \cdot \frac{7!}{10!} =$

$$= \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{8 \cdot 9 \cdot 10} = \frac{1}{12} \Rightarrow \\ \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$$

### Задача 9

Колода 52 карты, какова вероятность достать 4 карты одной масти:

$$P(A) = \frac{4 \cdot C_{13}^4}{C_{52}^4}$$

### Задача 10

Достать тройку, семёрку и туза из колоды с 52 картами:

$$P(A) = \frac{4^3}{C_{52}^3}$$

### Задача 11

90 хороших и 10 плохих деталей, какова вероятность, что среди пяти вытащенных деталей нет брака:

$$P(A) = \frac{C_{90}^5}{C_{100}^5} = \frac{90! 5! 95!}{5! 85! 100!} = \frac{86 \cdot 87 \cdot \dots \cdot 89 \cdot 90}{96 \cdot 97 \cdot \dots \cdot 99 \cdot 100}$$

Хотим 3 хороших и 2 плохих:

$$P(B) = \frac{C_{90}^3 \cdot C_{10}^2}{C_{100}^5}$$

### Задача 12

В спортлото угадать четыре из шести:

$$P(A) = \frac{C_6^4 \cdot C_{43}^2}{C_{49}^6}$$

### Задача 13

Из 52 карт достать 2 красные и 2 чёрные карты:

$$P(A) = \frac{C_{26}^2 \cdot C_{26}^2}{C_{52}^4}$$

### Задача 14

Вероятность при трёх бросках кубика получить три разных цифры:

$$P(A) = \frac{A_6^3}{6^3}, A_6^3 = 6 \cdot 5 \cdot 4$$

При броске шести кубиков выпали все цифры:

$$P(A) = \frac{6!}{6^6}$$

### Задача 15

В лифте десятиэтажного здания на первом этаже оказалось 8 студентов. Никто не выходит на первом этаже, какова вероятность того, что лифт не остановится хотя бы на одном этаже.

$$P(A) = 1 - \frac{8!}{8^8}$$

### Задача 16

Какова вероятность, что 10 монет выпадут на одинаковую сторону:

$$P(A) = \frac{2}{2^{10}} = \frac{1}{2^9}$$

### Задача 17

Коробка с 100 шариками, каждый имеет номер от 1 до 100. Какова вероятность вытащить все шары и получить возрастающую последовательность, если:

а) Не возвращать шары в коробку:

$$P(A) = \frac{1}{100!}$$

б) Возвращать шары в коробку:

$$P(A) = \frac{1}{100^{100}}$$

Семинар 13 сентября

### Задача 1

Бросаем три шестигранных кубика, найти вероятность выпадения суммы 11 и 12.

$$|\Omega| = 6^3$$

Комбинаций	$\sum 11$	$\sum 12$	Комбинаций
6	5 - 4 - 2	5 - 5 - 2	3
3	5 - 3 - 3	6 - 5 - 1	6
3	4 - 4 - 3	6 - 4 - 2	6
3	5 - 5 - 1	6 - 3 - 3	3
6	6 - 3 - 2	5 - 4 - 3	6
6	6 - 4 - 1	4 - 4 - 4	1

$$P(A_{11}) = \frac{27}{6^3}, P(A_{12}) = \frac{25}{6^3}$$

### Задача со \* из ДЗ

Какова вероятность, что если взять 4 башмака из 10 пар, получишь пару.

$$P(\overline{A}) = \frac{20 \cdot 18 \cdot 16 \cdot 14}{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}$$

### Задача 2

В девятиэтажном доме три человека садятся в лифт. Какова вероятность, что лифт остановится для высадки два раза?

$$P(A) = 1 - \frac{8+8 \cdot 7 \cdot 6}{8^3} = \frac{21}{64}$$

$$\frac{A_8^2 \cdot 3}{8^3} = \frac{21}{64}$$

### Задача 3

Имеется 100 чисел. Из них вытаскивают 15 чисел и упорядочивают по возрастанию.

Какова вероятность, что 13 число в полученной последовательности равно

$$\frac{87 \cdot C_{86}^{12} \cdot C_{13}^2}{C_{100}^{15}}$$

### Задача 4

Есть 10 вагонов. Какова вероятность, что два человека окажутся в одном вагоне/ в соседних?

В одном:  $\frac{1}{10}$  (оба в один и тот же вагон, выбрать вагон можно 10 способами)

В соседних:  $\frac{18}{100}$  (9 различных пар (1, 2), (2, 3), (3, 4) и т.д. и наоборот).

## Геометрические вероятности

### Задача 5

В квадрат со стороной  $R$  вписан круг, какова вероятность, что брошенная в квадрат точка попадёт в круг.

$$P(A) = \frac{\frac{\pi R^2}{4}}{R^2} = \frac{\pi}{4}$$

### Задача 6

На интервале  $[0, 1]$  выбираются точки  $x, y$ , найти вероятность события:

$$x^2 \leq y \leq \sin \frac{\pi x}{2}$$

$$P(A) = \frac{\int_0^1 \sin \frac{\pi x}{2} - x^2 dx}{1} = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \sin \frac{\pi x}{2} d\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{3} = \frac{2}{\pi} \left( -\cos \frac{\pi x}{2} \right) \Big|_0^1 - \frac{1}{3} =$$

$$= \frac{2}{\pi} - \frac{1}{3}$$

## Условные вероятности

### Задача 7

В коробке есть  $n$  белых и  $m$  чёрных шаров.  $A$  = первый шар белый,  $B$  = последний шар чёрный

$$P(A) = \frac{n}{m+n}, \quad P(B) = \frac{m}{m+n}$$

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{n}{m+n} \cdot \frac{m}{m+n-1}}{\frac{m}{n+m}} = \frac{n}{n+m-1}$$

### Задача 8

Два игрока подбрасывают кость по одному разу, побеждает тот, кто выбил больше.  $A$  = победил первый,  $B$  = победитель определён.

1.  $P(A) = \frac{15}{36}$
2.  $P(B) = \frac{30}{36}$
3.  $P(A/B) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$
4.  $P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{15}{36}}{\frac{30}{36}} = \frac{1}{2}$ , так как  $A \subseteq B$

События  $A$ ,  $B$  зависимы, так как  $P(A/B) \neq P(A)$ .

### Задача 9

2 партии по 100 деталей, в каждой партии 10 бракованных деталей.

$A$  = {деталь из первой партии}.

$B$  = {деталь бракованная}.

$$P(A) = \frac{100}{200} = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{20}{200} = \frac{1}{10}$$

$$P(AB) = \frac{10}{200} = \frac{1}{20} \Rightarrow P(AB) = P(A) \cdot P(B), \text{ события независимы}$$

### Задача 10

Почти как задача 9, но во второй 20 бракованных:

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{3}{20}$$

$$P(AB) = \frac{1}{20} \Rightarrow P(A)P(B) \neq P(AB), \text{ события зависимы.}$$

## Формула сложения вероятностей

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i \leq j} P(A_i A_j) + \sum_{i \leq j \leq k} P(A_i A_j A_k) + \dots$$

$$\dots + (-1)^{n+1} (A_1 \dots A_n)$$

$$P(A_1 A_2) = P(A_1) P(A_2/A_1)$$

### Задача 11

В урне 10 белых, 8 синих, 2 красных шара. Одновременно извлекают 3 шара, какова вероятность, что вытащенные шары одного цвета.

$$A = \{\text{вытащили (вовремя) 3 белых шара}\} \quad B = \{\text{вытащили 3 синих шара}\}$$

$$A_i = \{i\text{-й шар белый}\} \quad B_i = \{i\text{-й шар синий}\}$$

Так как  $A, B$  несовместны:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) = P(A_1 A_2 A_3) + P(B_1 B_2 B_3) =$$

$$= P(A_1) P(A_2/A_1) P(A_3/A_1 A_2) + P(B_1) P(B_2/B_1) P(B_3/B_1 B_2) =$$

$$= \left(\frac{10}{20} \cdot \frac{9}{19} \cdot \frac{8}{18}\right) + \left(\frac{8}{20} \cdot \frac{7}{19} \cdot \frac{6}{18}\right)$$

Семинар 20 сентября.

### Задача 46 из дз

Дано:  $P(A/B) = 0.05$ ,  $P(A\bar{B}) = 0.079$ ,  $P(\bar{A}B) = 0.0089$ ,  $P(\bar{A}\bar{B}) = 0.782$

Хотим:  $P(B/A)$

$$P(B/A) = \frac{P(BA)}{P(A)}$$

$$P(A) = P(AB + A\bar{B}) = P(AB) + P(A\bar{B}) - \underbrace{P(AB \cap A\bar{B})}_{=0} =$$

$$= 0.05 + 0.079 = 0.129 \Rightarrow P(B/A) = \frac{0.05}{0.129} \approx 0.3875$$

Ответ: 39%

### Задача

5 мальчиков и 10 девочек, какова вероятность, что при разбиении их на 5 равных групп получим только группы вида ЖМЖ.

$A_i$  — {в  $i$  группе 2 девочки и 1 мальчик.}

$$P(A_1 A_2 A_3 A_4 A_5) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 A_2) \cdot P(A_4/A_1 A_2 A_3) \cdot P(A_5/A_1 A_2 A_3 A_4) =$$

$$= \frac{C_{10}^2 C_5^1}{C_{15}^3} \cdot \frac{C_8^2 C_4^1}{C_{12}^3} \cdot \frac{C_6^2 C_3^1}{C_9^3} \cdot \frac{C_4^2 C_2^1}{C_6^3} \cdot \frac{C_2^2 C_1^1}{C_3^3} \cdot 1$$

## Задача

Система состоит из последовательно соединённых резисторов.

$A_i = \{\text{i-й элемент системы работает}\}, i = \overline{1, n}$

$A = \{\text{Система работает}\}$

$A = A_1 \cdots A_n$

$$P(A) = P\left(\prod_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n p_i$$

Если система состоит из параллельно соединённых резисторов, тогда:

$$P(A) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2) = p_1 + p_2 - p_1 p_2$$

## Задача

Обращается русалочка к трём ведьмам, каждая даёт ей сосуд с зельем.

Вероятность отсутствия эффекта:

1. 0.5

2. 0.4

3. 0.3

Она пьёт их по очереди и останавливается, если какое-то сработало.

Какова вероятность успеха (хотя бы одно зелье сработало).

$A_i = \{\text{подействует i-е зелье}\}$

$$\text{Пусть ни одно не сработало: } P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) = \\ = 1 - 0.5 \cdot 0.6 \cdot 0.7 = 0.79$$

$$\text{Другой способ решения: } P(A) = P(A_1) + P(\bar{A}_1)P(A_2) + P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(A_3) = \\ 0.5 + 0.5 \cdot 0.4 + 0.5 \cdot 0.6 \cdot 0.3 = 0.79$$

$$\text{Ещё один: } P(A) = P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 A_2) - \\ - P(A_1 A_3) - P(A_2 A_3) + P(A_1 A_2 A_3) = 0.79$$

## Задача

Теннисист участвует в турнире, у него есть соперник А и соперник В, известно, что соперник А играет лучше соперника В. Теннисист хочет выиграть два матча подряд, какой порядок ему лучше выбрать?

$A - B - A$  или  $B - A - B$ ?

$P(A) < P(B)$  — вероятность победы.

У него есть варианты: выиграть первые две, проиграть первую и выиграть оставшиеся.

В первом случае:  $(1) = P(A)P(B) + (1 - P(A))P(B)P(A)$

Во втором:  $(2) = P(B)P(A) + (1 - P(B))P(A)P(B)$



$$(1) - (2) = P(A)P(B)(1 - P(A) - 1 + P(B)) = P(A)P(B)(P(B) - P(A)) > 0 \Rightarrow (1) > (2)$$

В первом случае вероятность победы больше.

### Задача

Два равносильных шахматиста играют между собой матчи, ничьих быть не может. Какое событие более вероятно:

$$C_4^3 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{4!}{3!1} \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$$

$$C_8^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{7}{32}$$

Вероятность выиграть 3 из 4 больше.

### Задача

В круг радиуса  $r$  вписан квадрат. В круг кидают 4 точки, какова вероятность попадания ровно 3 точек в квадрат.

$$p = \frac{2r^2}{\pi r^2} = \frac{2}{\pi} - \text{вероятность попасть в квадрат.}$$

$$q = 1 - p = \frac{1}{\pi}$$

$$C_4^3 \cdot \left(\frac{2}{\pi}\right)^3 \cdot \frac{1}{\pi} = \frac{32(\pi-2)}{\pi^4}$$

### Задача

Стрелок попадает в 10 с вероятностью 0.7, а в 9 с вероятностью 0.3.

Какова вероятность получения за 3 выстрела не менее 29 очков.

Нас устраивают события:

$$A_{29} = \{\text{Набрал 29 очков}\}, A_{30} = \{\text{Набрал 30 очков}\}$$

$$P(A_{29} + A_{30}) = P(A_{29}) + P(A_{30}) = C_3^2(0.7)^2 \cdot 0.3 + (0.7)^3 = 0,784$$

### Задача

7 писем. 0.6 - письмо отправлено Онегину, 0.4 - письмо отправлено Ленскому.

$$A_i = \{\text{Ровно } i \text{ писем отправлено Онегину}\}. \quad p(A) = P(A_7) + P(A_6) + P(A_5) = (0.6)^7 + 7(0.6)^6 \cdot 0.4 + \frac{7}{2}0.6^5 \cdot 0.4^2$$

### Задача

Стрелок попадает в мишень с вероятностью 0,7. Ему позволяют стрелять до трёх промахов. Какова вероятность того, что он сделает ровно 8

выстрелов.

$C_7^2(0, 7)^5 \cdot 0, 3^2 \cdot 0, 3$  (Два промаха можно как-то расположить в первых 7 выстрелах, последний всегда восьмой).

## Задача

Всего 5 испытаний, вероятность искажения результата - 0,1. А = ни одного искажённого. Б = не менее двух искажённых. В = Искажённых больше, чем неискажённых.

$$P(A) = 0,9^5, \quad P(B) = 1 - 0,9^5 - (C_5^1 \cdot 0,1 \cdot 0,9^4),$$

$$P(B) = P(B) - C_5^2 \cdot 0,1^2 \cdot 0,9^3$$

## Задача

Гипотезы при подбрасывании двух кубиков:

$$\begin{cases} H_1 = \{\text{На 1-м кубике выпала "1"}\} \\ \dots \\ H_6 = \{\text{На 1-м кубике выпала "6"}\} \\ H_1 = \{1 - 1\} \\ \dots \\ H_{36} = \{6 - 6\} \\ H_1 = \{\text{На 1-м} - \text{чётное}\} \\ H_2 = \{\text{На 1-м} - \text{нечётное}\} \end{cases}$$

Семинар 27 сентября

## Формула полной вероятности

$H_1, \dots, H_n$  — полная группа событий.  $i \neq j \Rightarrow H_i \cdot H_j = \emptyset$ ,  $H_1 + \dots + H_n = \Omega$

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i)$$

$$P(H_k/A) = \frac{P(H_k)P(A/H_k)}{\sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i)}$$

## Задача

Какова вероятность успешного переливания крови от одного человека к другому? Произошло успешное переливание, какова вероятность, что кровь переливали человеку с 1 группой? С 4 группой?

Медицинская справка:

Первой группе крови можно переливать только первую

Второй — вторую и первую

Третьей — первую и третью

Четвёртой — любую.

$A = \{\text{Успешное переливание}\}$

$H_i = \{\text{У больного } i \text{ группа}\}, i = \overline{1, 4}, \text{ по условию: } P(H_1) = 0.33,$

$P(H_2) = 0.36, P(H_3) = 0.23, P(H_4) = 0.08$

$P(A/H_1) = 0.33, P(A/H_2) = 0.69, P(A/H_3) = 0.56, P(A/H_4) = 1$

$$P(A) = \sum_{i=1}^4 P(A/H_i)P(H_i) = 0.33^2 + 0.36 \cdot 0.69 + 0.23 \cdot 0.56 + 0.08 = 0.5661$$

$$P(H_1/A) = \frac{P(A/H_1)P(H_1)}{P(A)} = \frac{0.33^2}{0.5661} \approx 0.19237$$

$$P(H_4/A) = \frac{P(A/H_4)P(H_4)}{P(A)} = \frac{0.08}{0.5661} \approx 0.14$$

## Задача

Две корзинки, в каждой по 10 бутылок, в первой корзине 2 отравленные, во второй — 3, по пути одна бутылка из первой корзины разбилась. Какова вероятность не отравиться при распитии одной бутылки?

$A = \{\text{распитие благополучно}\}$

$H_1 = \{\text{бутылка из 1 корзины}\}, P(H_1) = \frac{1}{2}$

$H_2 = \{\text{бутылка из 2 корзины}\}, P(H_2) = \frac{1}{2}$

Так как выбираем корзину, а не бутылку из неё.

$P(A/H_1) = 0.8, P(A/H_2) = 0.7$ . Вспоминаем задачу про выученные билеты (поэтмоу вероятность отравиться бутылкой из первой корзины не поменяется).

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) = \frac{8}{20} + \frac{7}{20} = \frac{3}{4}$$

## Задача

По каналу передаётся два вида сигналов  $x, y$ , при этом  $y$  передаётся в три раза чаще  $x$ .  $x$  искажается в 10% случаев, а  $y$  — в 20%. По каналу передан какой-то сигнал, какова вероятность, что будет получен сигнал  $x$ ? Какова вероятность, что при получении сигнала  $x$  он и был передан?

$H_1 = \{\text{Передавали } x\}, P(H_1) = \frac{1}{4}$

$H_2 = \{\text{Передавали } y\}, P(H_2) = \frac{3}{4}$

$$A = \{\text{Зафиксирован } x\},$$

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) = \frac{1}{4}0.9 + \frac{3}{4}0.2 = \frac{3}{8}$$

$$B = H_1/A \Rightarrow P(B) = P(H_1/A) = \frac{P(A/H_1)P(H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{9}{40}}{\frac{3}{8}} = \frac{3}{5} = 0.6$$

## Задача

Три стрелка стреляют по мишени. Они соответственно попадают в мишень с вероятностью:

$$1 \text{ стрелок } \frac{4}{5}$$

$$2 \text{ стрелок } \frac{3}{4}$$

$$3 \text{ стрелок } \frac{2}{3}$$

Все трое выстрелили одновременно, в мишень попали два раза. Какое событие более вероятно: промах третьего стрелка или его попадание?

$$A = \{\text{попали ровно 2 раза}\}$$

$$H_1 = \{\text{третий попал}\}, P(H_1) = \frac{2}{3}$$

$$H_2 = \{\text{третий промахнулся}\}, P(H_2) = \frac{1}{3}$$

$$P(A/H_1) = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{7}{20}$$

$$P(A/H_2) = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

$$P(A) = P(A/H_1)P(H_1) + P(A/H_2)P(H_2) = \frac{7}{20} \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{30} + \frac{1}{5} = \frac{13}{30}$$

$$P(H_1/A) = \frac{P(A/H_1)P(H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{7}{20} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{13}{30}} = \frac{7}{30} \cdot \frac{30}{13} = \frac{7}{13}$$

## Задача

Было две урны. В первой 5 белых шаров и 1 чёрный, во второй — 3 белых и 3 чёрных.

Из первой урны взяли два шара, из второй один и поместили их в третью урну. Какова вероятность того, что наугад вытасченный из третьей урны шар окажется белым?

$$A = \{\text{Вытащили белый шар из третьей урны}\}$$

$$H_1 = \{\text{Вытащенный шар был в первой урне}\}$$

$$H_2 = \{\text{Вытащенный шар был во второй урне}\}$$

$$P(A/H_1) = \frac{5}{6}$$

$$P(A/H_2) = \frac{1}{2}$$

$$P(H_1) = \frac{2}{3}$$

$$P(H_2) = \frac{1}{3}$$

$$P(A) = P(A/H_1)P(H_1) + P(A/H_2)P(H_2) = \frac{10}{18} + \frac{1}{6} = \frac{13}{18}$$

Семинар 4 октября

Решаем какие-то задачки из учебника.

### Задача

$$\frac{\xi}{p} \begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & 0 & 1 \\ \hline p_1 & p_2 & p_3 \\ \hline \end{array}, E\xi = 0, \mathcal{D}\xi = 0.5. \text{ Найти } p_1, p_2, p_3.$$

$$\frac{\xi}{p} \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 1 \\ \hline p_2 & p_1 + p_3 \\ \hline \end{array}, \mathcal{D}\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = E\xi^2 = p_1 + p_3$$

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\ p_1 = p_3 \\ p_1 + p_3 = 0.5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 = 0.25 \\ p_2 = 0.5 \\ p_3 = 0.25 \end{cases}$$

### Задача

a.

$$\frac{\xi}{p} \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline -0,5 & 0 & 0,5 & 1 & 1,5 \\ \hline 0,1 & 0,4 & 0,1 & 0,3 & 0,1 \\ \hline \end{array}$$

$$Y = 10x - 1 \Rightarrow \frac{Y}{p} \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline -6 & -1 & 4 & 9 & 14 \\ \hline 0,1 & 0,4 & 0,1 & 0,3 & 0,1 \\ \hline \end{array}$$

$$EY = \sum_{i=1}^n y_i p_i = 3,5$$

$$\mathcal{D}Y = 3,5^2$$

b.

$$\frac{\xi}{p} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline -0,25 & 0 & -1 & -2,25 \\ \hline 0,2 & 0,4 & 0,3 & 0,1 \\ \hline \end{array}$$

$$Y = -x^2 \Rightarrow EY = -0,53$$

$$\mathcal{D}Y = 0,25^2 \cdot 0,2 + 0,3 + 2,25^2 \cdot 0,1 - (0,53)^2$$

### Задача

$$\frac{\xi}{p} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 0 \\ \hline \frac{28}{45} & \frac{16}{45} & \frac{1}{45} \\ \hline \end{array}$$

$$P(\xi = 2) = \frac{C_8^2}{C_{10}^2} = \frac{7 \cdot 8}{9 \cdot 10} = \frac{28}{45}$$

$$P(\xi = 1) = \frac{2 \cdot 8}{10 \cdot 9} \cdot 2 = \frac{16}{45}$$

$$P(\xi = 0) = \frac{1}{C_{10}^2} = \frac{1}{45}$$

$$E\xi = \frac{2 \cdot 28 + 16}{45} = \frac{72}{45} = \frac{8}{5}$$

$$\mathcal{D}\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{128}{45} - \frac{64}{25}$$

### Задача

В связке есть ключи, человек пробует все ключи, пока не подберёт нужный. Сколько в среднем ключей он переберёт?

$\xi$  — количество попыток. Показана вероятность успеха.

$\xi$	1	2	...	10
$p$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	...	$\frac{1}{10}$

$$E\xi = \frac{55}{10} = 5,5$$

## Задача

Есть 4 стула, в одном из них драгоценности. Человек ломает стулья, пока не найдёт драгоценности. Сколько стульев в среднем будет сломано?

$\xi$  — количество сломанных стульев.

$\xi$	1	2	3	4
$p$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4} \frac{1}{3}$	$\frac{3}{4} \frac{2}{3} \frac{1}{2}$	$\frac{3}{4} \frac{2}{3} \frac{1}{2} 1$

 $\Rightarrow$ 

$\xi$	1	2	3	4
$p$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$$E\xi = \frac{1}{4}(1 + 2 + 3 + 4) = \frac{10}{4}$$

$$D\xi = E(xi^2) - 2,5^2 = \frac{30}{4} - 6,25 = \frac{20}{16} = \frac{5}{4}$$

## Задача

$$P(\xi = k) = \frac{c}{k(k+1)}$$

$$c-?, P(\xi \leq 10)-?, P(10 \leq \xi \leq 20)-?$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c}{k(k+1)} = 1 \Rightarrow c \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1$$

$$c \lim_{k \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{k} \right) = 1 \Rightarrow c \cdot 1 = 1 \Rightarrow c = 1$$

$$P(\xi = k) = \frac{1}{k(k+1)}$$

$$P(\xi \leq 10) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{11} = \frac{10}{11}$$

$$P(10 \leq \xi \leq 20) = P(\xi \leq 20) - p(\xi \leq 9) = \left( 1 - \frac{1}{21} \right) - \left( 1 - \frac{1}{10} \right) = \frac{11}{210}$$

$$E\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} - \text{расходится.}$$

$$E\xi = +\infty$$

11 октября

Разбор задач из домашнего задания.  $F_{\xi}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x}, & x \geq 1 \\ 0, & x < 1 \end{cases}$

Найти а:  $P(\xi > a) = \frac{1}{3}$

$$\begin{aligned}
P(\xi > a) &= 1 - F_\xi(a) = \frac{1}{3} \\
F_\xi(x) &= \frac{2}{3} \\
\begin{cases} 1 - \frac{1}{x} = \frac{2}{3} \\ x \geq 1 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} = \frac{1}{x} \\ x \geq 1 \end{cases} \\
x = 3 &\Rightarrow a = 3
\end{aligned}$$

## Распределения

Распределение Бернулли:  $\xi \sim \text{Ber}(p)$

$$\begin{array}{c|c|c}
\xi & 0 & 1 \\
\hline
p & 1-p & p
\end{array}, \quad E\xi = p, \quad \mathcal{D}\xi = pq$$

Биномиальное распределение.

Распределение Пуассона.

Геометрическое распределение.

## Задача

С вероятностью  $\frac{5}{6}$  яблоко падает недалеко от яблони, всего 10 яблок.

Случайная величина  $\xi$  — количество яблок, которые упали недалеко от яблони.

$$\xi \sim \text{Bi}(10, \frac{5}{6})$$

$$E\xi = \frac{25}{3}, \quad \mathcal{D}\xi = \frac{25}{18}.$$

## Задача

$$\xi \sim \text{Bi}(4, 0.7)$$

$$E\xi = 2,8$$

$$\mathcal{D}\xi = 0,24$$

$$Z_{\frac{8}{1000}} = \min(x, F(x) \geq \frac{8}{1000})$$

$$F(0) = \frac{81}{10000} > \frac{8}{1000} \Rightarrow Z_{\frac{8}{1000}} = 0$$

## Задача

Три стрелка, вероятность попадания:

$$1. 0,7$$

$$2. 0,6$$

$$3. 0,5$$

Каждый выстрелил по одному разу, какое среднее количество попаданий?

$$\xi_1 \sim \text{Bi}(1, 0.7), \xi_2 \sim \text{Bi}(1, 0.6), \xi_3 \sim \text{Bi}(1, 0.5)$$

$$E\xi = E(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) = E\xi_1 + E\xi_2 + E\xi_3 = 1.8$$

Так как события независимы, их ковариация равна 0, поэтому:

$$\mathcal{D}\xi = \mathcal{D}\xi_1 + \mathcal{D}\xi_2 + \mathcal{D}\xi_3 = 0,7 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,4 + 0,5 \cdot 0,5 = 0,7$$

## Задача

Известно, что бутерброд падает маслом вниз с вероятностью 0,999. Некий экспериментатор уронил бутерброд 1000 раз. Какова вероятность, что бутерброд упадёт маслом вверх более 2 раз?  $\xi$  — маслом вверх.

$$\xi \sim \text{Bi}(1000, 0.001)$$

Хотелось бы аппроксимировать (аппроксимировать распределением Пуассона) это распределение.

$$\text{После аппроксимации: } \Delta = \left| C_n^k p^k q^{n-k} - \frac{e^{-np} (np)^k}{k!} \right| \leq np^2$$

$$\Delta = 0.001. \text{ Можем аппроксимировать: } \xi \sim \Pi(1), \lambda = np = 1$$

$$\begin{aligned} P(\xi > 2) &= 1 - P(\xi \leq 2) = 1 - P(\xi = 0) - P(\xi = 1) - P(\xi = 2) = \\ &= 1 - \frac{e^{-1} 1^0}{0!} - \frac{e^{-1} 1^1}{1!} - \frac{e^{-1} 1^2}{2!} = 1 - \frac{5}{2e} \end{aligned}$$

## Задача

$\xi \sim G(0, 2) \Rightarrow E\xi = 5$ . Наиболее вероятное значение:  $P(\xi = k) = q^{k-1}p \leq p = 0,2 \Rightarrow k = 1$