Математическая статистика.

Андрей Тищенко @AndrewTGk

2024/2025

Лекция 10 января

Преамбула

Статистика. Мнения о появлении этого слова:

1. Статистиками в Германии назывались люди, собирающие данные о населении и передающие их государству.

2. В определённый день в Венеции народ выстраивался для выплаты налогов (строго фиксированных, в зависимости от рода действий). Государство собирало данные обо всём населении. Это происходило до появления статистиков в Германии, поэтому мы будем считать, что статистика пошла из Венеции.

Задача статистики — по результатам наблюдений построить вероятностную модель наблюдаемой случайной величины.

Основные определения

Определение

Однородной выборкой объёма n называется случайный вектор $X = (X_1, \dots, X_n)$, компоненты которого являются независимыми и одинаково распределёнными. Элементы вектора X называются элементами выборки.

Определение

Если элементы выборки имеют распределение $F_\xi(x)$, то говорят, что выборка соответствует распределению $F_\xi(x)$ или порождена случайной величиной ξ с распределением $F_\xi(x)$.

Определение

Детерминированный вектор $x = (x_1, \dots, x_n)$, компоненты которого x_i являются реализациями соответствующих случайных величин X_i $(i = \overline{1,\ n})$, называется реализацией выборки.

Уточнение

Если X — однородная выборка объёма n, то его реализацией будет вектор x, каждый элемент x_i которого является значением соответствующей ему случайной величины (элемента выборки) X_i.

Определение

Выборочным пространством называется множество всех возможных реализаций выборки
$X = (X_1, \dots, X_n)$.

Пример

У вектора $X = (X_1, \dots,\ X_{10})$ каждый элемент X_i которой порождён случайной величиной $\xi \sim U(0,\ 1)$, выборочным пространством является $\mathbb{R}^{10}$ (так как X_i может принять любое значение на $\mathbb{R}$)

Определение

Пусть реализация выборки упорядочена по возрастанию:

$$x_{(1)} \leqslant x_{(2)} \leqslant \dots \leqslant x_{(n)}$$

Где $x_{(i)}$ — i-ый по возрастанию элемент.
Обозначим $X_{(k)}$ случайную величину, реализация которой при каждой реализации x выборки X принимает значение $x_{(k)}$. Тогда последовательность $X_{(1)}, \dots,\ X_{(n)}$ называется вариационным рядом выборки.

Определение

Случайная величина $X_{(k)}$ называется k-ой порядковой статистикой выборки.

Определение

Случайные величины $X_{(1)},\ X_{(n)}$ называются эстремальными порядковыми статистиками.

Определение

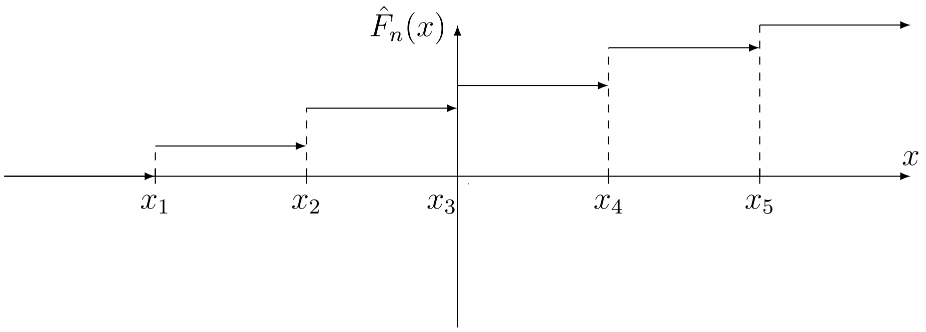
Порядковая статистика $X_{([n \cdot p])}$ называется выборочной квантилью уровня p, где $p \in [0,\ 1]$

Определение

Пусть каждый элемент выборки X объёма n имеет распределение $F_\xi(x)$. Эмпирической функцией распределения такой выборки называется

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} I(X_k \leqslant x)$$

I — индикаторная функция. $I = \begin{cases} 1, & \text{если аргумент верен} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$
Пусть $x_1, \dots,\ x_n$ — реализация выборки $X_1, \dots,\ X_n$



Свойства $\hat{F}_n(x)$

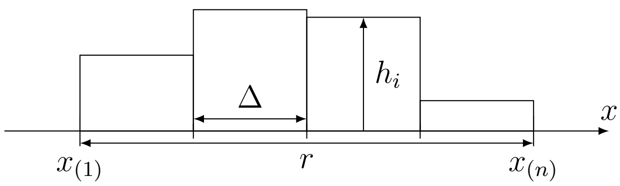
1. $\forall x \in \mathbb{R} \quad E\hat{F}_n(x) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} I(X_k \leqslant x)\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} EI(X_k \leqslant x) = P(X_1 \leqslant x) = F_\xi(x)$

2. По усиленному закону больших чисел (УЗБЧ)

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} I(X_k \leqslant x) \xrightarrow[n \to \infty]{\text{п. н.}} EI(X_k \leqslant x) = F_\xi(x)$$

Гистограмма

Разбить $\mathbb{R}$ на $(m+2)$ непересекающихся интервала. Рассматриваются $x_{(1)}, \ldots,\ x_{(n)}$



Размах выборки $r = x_{(n)} - x_{(1)}$
$\Delta = \frac{r}{m}$ — ширина интервала.
$h_k = \frac{\nu_k}{\Delta},\ k = \overline{1,\ k}$, где ν_k — количество попаданий на интервал.