Лекции по математическому анализу 4 модуль.

Андрей Тищенко

2023/2024

Лекция 12 апреля.

Деревья

$\forall T$ T - $(m,\ n)$ граф тогда:
T дерево $\Leftrightarrow$ T связный ациклический
$\Leftrightarrow$ T минимально связен
$\Leftrightarrow$ T связен $m = n - 1$
$\Leftrightarrow$ в T любые 2 вершины соединены ровно 1 простым путём.

Определение: граф называется <u>минимально связным</u> если из него нельзя удалить ребро без потери связности.

Определение: Пусть $G = (V,\ E)$ - связный граф. Любое дерево $T = (V,\ E')$, такое что $E' \subseteq E$, (то есть T - подграф) называется остовным.

Теорема: В любом связном $(n,\ m)$ графе $G = (V,\ E)$ есть остовное дерево T

Доказательство: Индукция по m

$m = 0$: $n = 1,\ T = G$.

$m > 0$: 1. G - дерево, тогда $T = G$

2. G не деревоо $\Rightarrow$ не минимально связный $\Rightarrow \exists x,\ y \quad xEy \wedge$ ребро xy можно удалить без потери связности.
G' - результат удаления ребра xy
G' - $(n,\ m-1)$ связный граф $\underset{\text{пи}}{\Rightarrow}$ в G' есть остовное дерево T'
$G = (V,\ E),\ G' = (V,\ E \setminus \{xy,\ yx\})$. То есть T' подграф G', а G' подграф $G \Rightarrow T := T'$

Двудольные графы

Определение: граф $G = (V,\ E)$ двудольный $\Leftrightarrow \exists V_1,\ V_2$:

$$\begin{cases} V_1 \cap V_2 = \varnothing \\ V_1 \cup V_2 = V \\ V_1,\ V_2 \neq \varnothing \\ x,\ y \in V_i \Rightarrow xy \notin E \end{cases}$$

Определение: граф $G = (V,\ E)$ раскрашиваем в k цветов $\Leftrightarrow \exists c : V \to \underline{k}$
$\forall x,\ y\ \big(c(x) = c(y) \Rightarrow xy \in E\big)$

Утверждение: G k-дольный $\Rightarrow \forall l \geqslant k,\ G$ можно раскрасить в l цветов.

Теорема 2: (Кёнинга).
$\forall$ графа $G = (V,\ E),\ |V| \geqslant 2$ следующие условия равносильны:

(a) G двудольныйв

(b) в G нет циклов нечётной длины

(c) в G нет простого цикла нечётной длины

Доказательство: $a \Rightarrow b$ допустим есть цикл нечётной длины:
$x_1 x_2 x_3 x_4 \ldots x_{2n} x_{2n+1} x_1$
Без ограничения общности:
$x_1 \in V_1 \Rightarrow x_2 \in V_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow x_{2n} \in V_2 \Rightarrow x_{2n+1} \in V_1 \Rightarrow x_1 \in V_2 \perp$
$b \Rightarrow c$. Если нет никакого цикла нечётной длины, то простого также не будет. $c \Rightarrow a$.

Лемма* если граф G связен и $|V| \geqslant 2$ и в G нет простых циклов нечётной длины, то G двудольный.

$G = G_1 \sqcup G_2 \sqcup \dots \sqcup G_n$
Ещё не может быть компонент порядка 1.
$G' = (V',\ E)$ связен, $|V'| \geqslant 2$, в G' нет простого цикла нечётной длины.
Рассмотрим произвольную $z \in V$, тогда $\exists y\ zEy$
$d(u,\ w) :=$ длина кратчайшего пути между $u,\ w$ в G'
$d(z,\ z) = 0,\ d(z,\ y) = 1$
$V_1 = \{x \in V' \mid d(z,\ x) \equiv 1(2)\}$
$V_2 = \{x \in V' \mid d(z,\ x) \equiv 0(2)\} \Rightarrow$
$$\Rightarrow \begin{cases} V_1 \cap V_2 = \varnothing \\ V_1 \cup V_2 = V' \\ y \in V_1 \neq \varnothing \wedge z \in V_2 \neq \varnothing \end{cases}$$
Предположим $\exists u,\ w \in V_i \quad uEw \Rightarrow u \neq w$
$d(z,\ u) \equiv d(z,\ w)(2)$
Рассмотрим кратчайшие ($\to$ простые) пути $z \xrightarrow{p} u \wedge z \xrightarrow{q} w$
Пусть $t :=$ самая правая общая точка $z \xrightarrow{p} u,\ z \xrightarrow{q} w$ (самая правая - такая, что путь до u и w минимален).
$z \xrightarrow{p} w = z \xrightarrow{p_1} t \xrightarrow{p_2} w$
$z \xrightarrow{q} u = z \xrightarrow{q_1} t \xrightarrow{q_2} u$

Утверждение: $\left|z \xrightarrow{p_1} t\right| = \left|z \xrightarrow{q_1}\right| t$

Доказательство: Иначе без ограничения общности:
$\left|z \xrightarrow{p_1} t\right| > \left|z \xrightarrow{q_1} t\right|$
$\left|z \xrightarrow{q_1} t \xrightarrow{p_2}\right| < \left|z \xrightarrow{p} w\right| \perp \left|z \xrightarrow{p} w\right| = d(z,\ w) = d(z,\ u)$
$\left|z \xrightarrow{p_1} t\right| + \left|t \xrightarrow{p_2} w\right| \equiv \left|z \xrightarrow{q_1} t\right| + \left|t \xrightarrow{q_2} u\right|$
$\left|t \xrightarrow{p_2} w\right| \equiv \left|t \xrightarrow{q_2} u\right|$
Рассмотрим цикл twu, он является простым, его длина будет равна:
$$\left|t \xrightarrow{p_2} w\right| + \left|t \xrightarrow{q_2} y\right| + 1 \equiv 1(2)$$
Но простых циклов длины 2 тут быть не может $\perp$.

Лемма 4. Если $(n,\ m)$ граф $G = (V,\ E)$ двудольный с долями V_1 и V_2, то
$$\sum_{x \in V_1} d(x) = m = \sum_{x \in V_2} d(x)$$

Доказательство: Индуция по количеству рёбер.

$m = 0$: $\forall x \ d(x) = 0$

$m > 0$: есть ребро uw, удалим его и получим G'
Без ограничения общности:
$uw \in E \Rightarrow u \in V_1, \ w \in V_2$
G' - двудольный $(n, \ m-1)$ граф с долями $V-1, \ V_2$

$$\sum_{x \in V_1} d(x) = \sum_{x \in V_1 \setminus \{u\}} + \big(d_{G'} + 1\big) = \sum_{x \in V_1} d_{G'}(x) + 1 = (m-1) + 1 = m$$

Задача о свадьбах

Определение: граф G называется <u>паросочетанием</u>
$\Leftrightarrow \forall x \ d(x) = 1$
Условие для выдачи женщин замуж $\forall S \subseteq V_1 \ \ |E[S]| \geqslant |S|$

$T = \{t_1, \ t_2, \ldots, \ t_n\}$. Хотим построить инъекцию $T \overset{f}{\lesssim} \bigcup T = t_1 \cup \cdots \cup t_n$,
также хотим $\forall t \in T \ f(t) \in t$.
Тогда нужно $\forall S \subseteq T \ \ |\bigcup S| \geqslant |S|$