Лекции по алгебре 4 модуль.

Андрей Тищенко

2023/2024 гг.

Лекция 3 апреля

Квадратичные формы

Определение:

Многочлен второй степени от n переменных, то есть выражение вида

$$q(x_1, \overset{x \in \mathbb{R}^n}{\ldots}, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{i\,i} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{i\,j} x_i x_j$$

Где $a_{i\,j} \in \mathbb{R}$, называют квадратичной формой.

Замечание:

Многочлен $q(x)$ называется однородным степени k, если

$$\forall \alpha \quad q(\alpha x) = \alpha^k q(x)$$

Замечание:

Квадратичная форма - это отображение $q : V \longrightarrow \mathbb{R}$ (вектор в число)

Рассмотрим n-мерное вектороное пространство V над $\mathbb{R}$. Зафиксируем в нём базис $e_1, \ldots, e_n$:
Тогда у любого $x \in V$ есть набор координат в этом базисе $x_1, \ldots, x_n$.
То есть $\forall x \in V : x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$
Пусть $x^e = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow q(x)$ можно представить в виде $q(x) = (x^e)^T A x^e$, где
$A = (a_{i\,j})$ матрица квадратичной формы $q(x)$ в базисе $e_1, \ldots, e_n$,
$a_{i\,j}$ - коэффициенты квадратичной формы.

Пример:

В $\mathbb{R}^3$

$$q(x) = x_1^2 + 8x_1x_3 = x_1^2 + 4x_1x_3 + 4x_3x_1 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Замечание:

Матрица квадратичной формы всегда симметрическая. То есть

$$A^T = A$$

Замечание:

По любой билинейной форме можно построить квадратичную форму, взяв $q(x) = b(x,\ x)$. Тогда $a_{i\,j} = \dfrac{b_{i\,j} + b_{j\,i}}{2}$

Пример:

$b(x,\ y) = x_1y_1 + ex_1y_3 + 5x_3y_1 \Rightarrow q(x) = b(x,\ x) = x_1^2 + 8x_1x_3$

Определение:

Билинейная форма называется <u>симметрической</u>, если

$$b(x,\ y) = b(y,\ x),\ \text{например, скалярное произведение}$$

Называется <u>кососиметрической</u>, если

$$b(x,\ y) = -b(y,\ x)$$

Пример:

Кососиметрическая билинейная форма с матрицей $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow B^T = -B$

Замечание:

По любой квадратичной форме можно построить симметрическую билинейную форму. Это называется <u>поляризацией</u> квадратичной формы.

$$b(x,\ y) = \frac{1}{2}\big[q(x+y) - q(x) - q(y)\big]$$

Полярная билинейная форма к $q(x)$ $\big($имеет ту же матрицу, что и $q(x)$, $b(x,\ x) = q(x)\big)$

Утверждение:

При переходе от базиса e к базису e' в линейном пространстве V матрица квадратичной формы меняется так:

$$A' = C^T \cdot A \cdot C, \text{ "Стас" без рофлов, реально Стасямба конкретная}$$

A' - матрица квадартичной формы в новом базисе e'
C - матрица перехода от базиса e к базису e'

Доказательство:

Связь координат вектора:
$x = Cx'$, так как $x' = C^{-1}x$ - формула изменения координат вектора при замене базиса.
Тогда $\forall x \quad q(x) = x^T A x = (Cx')^T A (Cx') = (x')^T C^T A C x' = (x')^T A' x'$, значит $A' = C^T A C$ $\big($Можно в качестве x брать все векторы канонического базиса $(0, \ldots 0, \underset{i}{1}, 0, \ldots, 0)$ и показать совпадение матричных элементов$\big)$

Определение:

Если квадратичная форма в некотором базисе записана в виде $q(x) = x^T A x$, то есть если A - матрица квадратичной формы в некотором базисе, то $\operatorname{Rg} A$ называется рангом квадратичной формы $q(x)$. Почему это определение корректно? То есть почему $\operatorname{Rg} A$ не зависит от базиса.

Лемма:

Пусть $A,\ U \in M_n(\mathbb{R}),\ \det U \neq 0$. Тогда $\operatorname{Rg} A \cdot U = \text{RgA} = \operatorname{Rg} U \cdot A$, то есть при умножении на невырожденную матрицу ранг не меняется.

Доказательство:

$\operatorname{Rg} A {\cdot} U \leqslant \operatorname{Rg} A$, так как столбцы матрицы AU есть линейные комбинации столбцов матрицы A.
Ранг матрицы по теореме о ранге матрицы равен максимальному числу линейно независимых столбцов не могло вырасти, так как все столбцы AU линейно выражаются через столбцы исходной матрицы.
Покажем $\operatorname{Rg} A \cdot U \geqslant \operatorname{Rg} A$.

$$\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg} A(U \cdot U^{-1}) = \operatorname{Rg}(AU)U^{-1} \leqslant \operatorname{Rg}(AU)$$

$$\operatorname{Rg} U \cdot A = \operatorname{Rg}(UA)^T = \operatorname{Rg} A^T U^T = \operatorname{Rg} A^T = \operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg} AU$$

Утверждение: (об инвариантности ранга квадратичной формы)

Пусть $q(x)$ - квадратичная форам на линейном пространстве V.
Пусть $a = (a_1, \ldots,\ a_n)$ и $b = (b_1, \ldots,\ b_n)$ - базисы в V.
Пусть A - матрица квадратичной формы в базисе a
Пусть B - матрицы квадратичной формы в базисе b
Тогда $\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg} B$ и ранг квадратичной формы корректно определен.

Доказательство:

Было доказано, что $B = C^T AC \Rightarrow$ по лемме, так как мы умножаем матрицу A на матрицы C^T слева и на C справа, то $\operatorname{Rg} B = \operatorname{Rg} A$, ч.т.д.

Определение:

квадратичную форму $q(x)$ будем назвать <u>положительно определённой</u>, если

$$\forall x \neq 0 \quad q(x) > 0$$

<u>отрицательно определённой</u>, если

$$\forall x \neq 0 \quad q(x) < 0$$

<u>знакопеременной</u>, если

$$\exists x,\ y \in V : q(x) < 0 < q(y)$$

Пример:

$q_1(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2$ на $\mathbb{R}^3$ - положительно определена

$q_2(x) = x_1^2 - x_3^2$ - знакопеременна $\left(y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow q(x) < 0 < q(y)\right)$.
$q_3(x) = -x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2$ - отрицательно определена на $\mathbb{R}^3$,
но $q_3'(x) = -x_1^2 - 3x_3^2$ - не является отрицательно определённой, так как $q_3' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ - это неположительно определённая квадратная форма.

Теорема: (Критерий Сильвестра положительной определённости)

Пусть A - матрица квадратичной формы $q(x)$ в некотором базисе. Тогда

$q(x)$ положительно определена $\Leftrightarrow$ последовательность главных угловых миноров в А строго положительна

То есть $\begin{cases} \Delta_1 = a_{1\,1} > 0 \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} \end{vmatrix} > 0 \\ \dots \\ \Delta_n = \det A > 0 \end{cases}$

Следствие:

$$\text{Квадратичная форма отрицательно определена} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_1 < 0 \\ \Delta_2 > 0 \\ \dots \\ (-1)^n \Delta_n > 0 \end{cases}$$

То есть знаки главных угловых миноров чередуются, начиная с минуса.

Доказательство:

Так как A - отрицательно определена $\Leftrightarrow -A$ положительно определена
$\det(-A) = (-1)^n \det A$, ч.т.д.

Пример:

$q(x) = -x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2$ - отрицательно определённая

$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}$

Определение:

Квадратичную форму $q(x) = \alpha_1 x_1^2 + \dots + \alpha_n x_n^2$, где $\alpha_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{1,\ n}$, то есть в квадратичной форме нет попарных произведений вида $Cx_i x_j$, называют квадратичной формой каноничесмкого вида.
Если $\alpha_i \in \{-1,\ 0,\ 1\}$, то канонический вид называют нормальным.

Замечание:

Матрица квадратичной формы в каноническом виде является диагональной.

Лекция 10 апреля

$x \in V \quad q(x) = \alpha_1 x_1^2 + \dots + \alpha_n x_n^2$ $(\alpha_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{1,\ n})$ - канонический вид.
Если все коэффициенты α_i являются элементами множества $\{-1,\ 0,\ 1\}$, то это называется нормальным видом.

Утверждение. Любую квадратичную форму можно привести к каноническому и к нормальному виду.

<u>Методы приведения</u>

1. Метод Лагранжа.
   Главная идея состоит в последовательном выделении полных квадратов. При этом на каждом шаге под квадрат <u>полностью уходит одна переменная</u> (невыполнение этого условия является частой ошибкой при решении задач). Получается, что не более чем за n шагов алгоритм даст канонический вид.
   Если на некотором этапе переменных в квадрате не осталось, но есть выражение вида $c \cdot x_i \cdot x_j$ $(i \neq j)$, то делают замену переменных:

$$\begin{cases} x_i = x'_i - x'_j \\ x_j = x'_i + x'_j \end{cases} \Rightarrow c x_i x_j = c\left((x'_i)^2 - (x'_j)^2\right)$$

   Получили новые квадраты, продолжаем выполнение метода (то есть выделяем полный квадрат при необходимости).

$$\alpha_i x_i^2 + 2x_i \underbrace{(\beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n)}_{\text{нет } x_i} = \alpha_i \left(x_i^2 + 2x_i \frac{\beta_i x_1 + \dots + \beta_n x_n}{\alpha_i} + \left(\frac{\beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n}{\alpha_i}\right)^2 \right)$$

$$- \frac{\beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n}{\alpha_i} = \alpha_i \underbrace{\left(x_i + \frac{\beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n}{\alpha_i} \right)}_{\text{заменяем на } y_i} - \underbrace{\frac{(\beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n)^2}{\alpha_i}}_{\text{уже без } x_i}$$

   То есть x_i полностью ушла под квадрат.

2. Метод Якоби. (может быть пройдём на семинаре)

3. Симметичный Гаусс. (может быть пройдём на семинаре)

4. Метод приведения к главным осям (только для канонического). (может быть пройдём на семинаре)

Теорема. Закон инерции квадратичной формы

Для любых двух канонических видов одной квадратичной формы. $q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_k x_k^2,\ \lambda_i \neq 0,\ i = \overline{1,\ k}$
$q(y) = \mu_1 y_1^2 + \dots + \mu_m y_m^2,\ \mu_j \neq 0,\ j = \overline{1,\ m}$
где $x,\ y \in V$
То есть это запись одной и той же квадратичной формы в разных базисах.

1. $k = m = \operatorname{Rg} A \leftarrow$ равно рангу квадратичной формы. При этом $k = m$ может быть меньше размерности V, то есть $k = m \leqslant n = \dim V$

2. Количество положительных λ_i совпадает с количество положительных μ_j. Это называется положительный индекс инерции квадратичной формы.

Обозначение: i_+

3. Количество отрицательных λ_i совпадает с количеством отрицательрных μ_i и называется отрицательным индексом инерции.

Обозначение: i_-

Определение: Сигнатурой квадратичной формы называют два числа $(i_+,\ i_-)$.

Замечание: Если у двух квадратичных форм совпадают сигнатуры, то существует невырожденная линейное преобразование (=замена координат, =замена базиса), которое одну квадратичную форму переводит в другую. Сначала обе в нормальный вид, он совпадает, так как одинаковое количество $+1$ и -1, и для одной преобразование в обратную сторону.

Замечание: Если у двух квадратичных форм разные сигнатуры $(i_+,\ i_-)$, то одну нельзя перевести в другую невырожденным линейным преобразованием. То есть квадратичные формы разные.

Замечание: $\operatorname{Rg} A = i_+ + i_-$. Иногда вводят величину $S = i_+ - i_-$. Знание $\operatorname{Rg} A$ и S эквивалентно знанию i_+ и i_-, и поэтому число S иногда называют сигнатурой.

Линейные отображения и линейные операторы

Пусть V_1 и V_2 - два линейных пространства над полем F

Определение: Отображение $\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$ называется <u>линейным</u>, если

1. $\forall x,\ y \in V_1,\ \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$
2. $\forall x \in V_1,\ \forall \alpha \in F\ \varphi(\alpha x) = \alpha \varphi(x)$

Замечание: эти два условия равносильны $\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y)$

Замечание: Линейное отображение это гомоморфизм линейных пространств, и есть обозначение $\varphi \in \mathrm{Hom}(V_1,\ V_2)$

Определение: Если $V_1 = V_2 = V$ (пространства совпадают), то линейное отображение φ называется <u>линейным оператором</u> (л. о.)

Пусть $e_1, \dots,\ e_n$ - базис в V_1, $\dim V_1 = n$
$f_1, \dots,\ f_m$ - базис в V_2, $\dim V_2 = m$
Рассмотрим векторы $\varphi(e_1), \dots,\ \varphi(e_n) \in V_2$ (образы базисных векторов первого пространства под действием φ), и разложим их по базису второго пространства $f_1, \dots,\ f_m$:

$$\begin{cases} \varphi(e_1) = a_{1\,1} f_1 + a_{2\,1} f_2 + \dots + a_{m\,1} f_m \\ \vdots \\ \varphi(e_n) = a_{1\,n} f_1 + a_{2\,n} f_2 + \dots + a_{m\,n} f_m \end{cases}$$

Определение: <u>Матрица линейного отображения</u> в паре базисов $(e_1, \dots,\ e_n)$ и $(f_1, \dots,\ f_m)$ это матрица:

$$[\varphi]_{e\,f} = A_{e\,f} = \left.\underbrace{\begin{pmatrix} a_{1\,1} & \dots & a_{1\,n} \\ a_{2\,1} & \dots & a_{2\,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m\,1} & \dots & a_{m\,n} \end{pmatrix}_{m \times n}}_{\dim V_1}\right\} \dim V_2$$

По столбцам стоят координаты образов векторов первого базиса при разложении по второму базису.

Определение: Пусть $\varphi : V_1 \longrightarrow V$ - линейный оператор и $e_1, \dots,\ e_n$ - базис.

Пусть $\begin{cases} \varphi(e_1) = a_{1\,1}e_1 + a_{2\,1}e_2 + \dots + a_{n\,1}e_n \\ \vdots \\ \varphi(e_n) = a_{1\,n}e_1 + a_{2\,n}e_2 + \dots + a_{n\,n}e_n \end{cases}$

То есть образы базисных векторов под дейсвтием φ разложим по тому же базису.

Тогда:

$$A_e = \begin{pmatrix} a_{1\,1} & \dots & a_{1\,n} \\ a_{2\,1} & \dots & a_{2\,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n\,1} & \dots & a_{n\,n} \end{pmatrix}$$

Называется <u>матрицей линейного оператора</u>

Пример: $\varphi(x) = \text{Пр}_L\, x$, где $L = \mathcal{L}(\bar{i})$ в V_3, где $\bar{i}$ - ось абсцисс.
Рассмотрим стандартный базис $\{\bar{i},\ \bar{j},\ \bar{k}\}$ в V_3.

$$\begin{cases} \varphi(i) = i = 1 \cdot i + 0 \cdot j + 0 \cdot k \\ \varphi(j) = 0 \\ \varphi(k) = 0 \end{cases} \Rightarrow A_{\{i,\ j,\ k\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Теорема: (о том, что действие линейного оператора полностью определяется его матрицей)
Пусть φ - линейный оператор в пространстве V
$e = (e_1, \dots,\ e_n)$ - базис в $V,\ x \in V$ - вектор.
$x^e = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ - столбец координат вектора x в базисе e, то есть $x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$
Пусть A_e - матрица линейного оператора φ в базисе e, тогда:

$$\big(\varphi(x)\big)^e = A_e \cdot x^e,\ \text{(матричное произведение)}$$

Доказательство: $\varphi(x) = \varphi(x_1e_1 + \dots + x_1e_1) \overset{\text{по линейности}}{=} x_1\varphi(e_1) + \dots + x_n\varphi(e_n) \overset{\text{определение}}{\underset{\text{матрицы л.о.}}{=}} x_1(a_{1\,1}e_1 + a_{2\,1}e_2 + \dots + a_{n\,1}e_n) + \dots + x_1(a_{1\,n}e_1 + a_{2\,1}e_2 + \dots + a_{n\,n}e_n) = (a_{1\,1}x_1 + a_{1\,2}x_2 + \dots + a_{1\,n}x_n)e_1 + \dots + (a_{n\,1}x_1 + a_{n\,2}x_2 + \dots + a_{n\,n}x_n)e_n$ - получили разложение $\varphi(x)$ по базису e

$$\Rightarrow \big(\varphi(x)\big)^e = \begin{pmatrix} a_{1\,1}x_1 + a_{1\,2}x_2 + \dots a_{1\,n}x_n \\ \vdots \ \vdots \ \vdots \\ a_{n\,1}x_1 + a_{n\,2}x_2 + \dots + a_{n\,n}x_n \end{pmatrix}$$

Но это результат умножения A_e на $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x^e$, то есть $\big(\varphi(x)\big)^e = A_e \cdot x^e$, ч.т.д.

Замечание: Для линейных отображений аналогично

$$\big(\varphi(x)\big)^f = A_{e\,f}x^e$$

Замечание: При фиксированном базисе есть биекция между линейными операторами (линейными отображениями) и матрицами $n \times n$, $(m \times n)$.

Лекция 17 апреля.

Линейные операторы

(Напоминание) Пусть $\varphi : V \longrightarrow V$ - линейный оператор в пространстве V, фиксируем базис $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ в V.
Тогда $\exists!$ матрица линейного оператора A_e в базисе e, что

$$\forall x \in V \ \big(\varphi(x)\big)^e_{n\times 1} = \underset{n\times n}{A_e} \cdot x^e_{n\times 1}$$

Для линейного отображения $\phi : V_1 \longrightarrow V_2$ в фиксированной паре базисов $e, \ f$

$$\big(\phi(x)\big)^f_{m\times 1} = \underset{m\times n}{A_{e\,f}} \cdot x^e_{n\times 1}$$

Утверждение: Пусть A - матрица линейного оператора φ в базисе e.
A' - матрица линейного оператора φ в базисе e'
Пусть T - матрица перехода в V от базисе e к базису e'.
Тогда $A' = T^{-1} \cdot A \cdot T$

Доказательство: По доказанному:

$$y = A \cdot x, \ y = \big(\varphi(x)\big)^e \tag{1}$$

$$y' = A' \cdot x', \ y' = \big(\varphi(x)\big)^{e'} \tag{2}$$

$y = T \cdot y'$ (так как $y' = T^{-1}y$) и $x = Tx'$ - формула зименения координат вектора при замене базиса.
Подставляем в (1): $T \cdot y' = A \cdot T \cdot x'$, но T - невырожденная матрица (так как она является матрицей перехода), домножим слева на $T^{-1} \Rightarrow$
$\Rightarrow y' = \underbrace{T^{-1} \cdot A \cdot T}_{A'} \cdot x'$, сравним с (2) $\Rightarrow A' = T^{-1} \cdot A \cdot T$, так как матрица линейного оператора в заданном базисе единственная.

Утверждение: Пусть φ - линейное отображение линейного пространства V_1 ($\dim V_1 = n$) в линейное пространство V_2, ($\dim V_2 = m$).
Пусть $A_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}$ - матрица линейного отображения в паре базисов ε_1 в пространстве V_1 и ε_2 в пространстве V_2.
Тогда, если T_1 - Это матрица перехода в V_1 от базиса ε_1 к базису ε_1'.
T_2 - матрица перехода в V_2 от ε_2 к ε_2'.
Тогда имеет место следующее равенство:

$$\underset{m \times n}{A_{\varepsilon_1' \varepsilon_2'}} = \underset{m \times m}{T_2^{-1}} \cdot \underset{m \times n}{A_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}} \cdot \underset{n \times n}{T_1}$$

Доказательство: Пусть y - образ x под действием φ $\big($то есть $y = \varphi(x)\big)$, тогда:
(1) $\quad y^{\varepsilon_2} = A_{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \cdot x^{\varepsilon_1} \leftarrow$ в старом базисе
(2) $\quad y_{\varepsilon_2'} = A_{\varepsilon_1' \varepsilon_2'} \cdot x^{\varepsilon_1'} \leftarrow$ в новом базисе
$\left.\begin{array}{l} x^{\varepsilon_1} = T_1 \cdot x^{\varepsilon_1'} \\ y^{\varepsilon_2} = T_2 \cdot y^{\varepsilon_2'} \end{array}\right. \leftarrow$ формула изменения координат вектора
Подставим в (1), получим:
$T_2 y^{\varepsilon_2'} = A_{\varepsilon_1 \varepsilon_2} T_1 x^{\varepsilon_1'}$. Домножим на T_2^{-1} слева, так как T_2 - невырожденная$\Rightarrow$

$\Rightarrow y^{\varepsilon_2'} = \underbrace{T_2^{-1} A_{\varepsilon_1 \varepsilon_2} T_1}_{A_{\varepsilon_1'} A_{\varepsilon_2'}} x^{\varepsilon_1'}$, сравнивая с (2) $\Rightarrow$
$\Rightarrow A_{\varepsilon_1' \varepsilon_2'} = T_2^{-1} \cdot A_{\varepsilon_1 \varepsilon_2} T_1$

Определение: Квадратные матрицы A и B называются <u>подобными</u>, если существует невырожденная матрица C:

$$B = C^{-1}AC \quad (\det C \neq 0)$$

Замечание: Матрицы линейных операторов в разных базисах подобнымежду собой.

Утверждение: Определители подобных матриц равны.

Доказательство: Пусть A и B подобны, то есть $B = C^{-1}AC \Rightarrow$

$$\det B = \det\left(C^{-1}AC\right) = \det C^{-1} \det A \det C = \frac{\det C}{\det C} \det A = \det A$$

Замечание: Это означает, что $\det A$ - определитель матрицы линейного оператора не зависит от выбора базиса, то есть является инвариантом замены координат (и $\operatorname{Rg} A$ - тоже инвариант)

Определение: Ядром линейного отображения $\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$ назыается множество:

$$\ker\varphi = \left\{x \in V_1 \middle|\ \varphi(x) = 0\right\} = \varphi^{-1}(0) \subseteq V_1$$

Образом линейного отображения φ называется множество

$$\operatorname{Im}\varphi = \left\{x \in V_2 \;\middle|\; \exists y \in V_1 :\ \varphi(y) = x\right\} = \varphi(V_1) \subseteq V_2$$

Замечание: $\ker\varphi$ и $\operatorname{Im}\varphi$ являются линейными подпространствами в V_1 и V_2 соответственно (проверить замкнутость по оперицаям).

Утверждение: Пусть $\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$ - линейное отображение.
Тогда $\dim\ker\varphi + \dim\operatorname{Im}\varphi = n = \dim V_1$

Доказательство: Зафиксируем базис $e = \{e_1, \ldots,\ e_n\}$ в V_1
$\forall x \in V_1$ можно представить в виде $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$
$\varphi(x) = x_1\varphi(e_1)+\cdots+x_n\varphi(e_n)$, но $\varphi(e_1), \ldots,\ \varphi(e_n)$ - столбцы матрицы линейного отображения (если фиксировать базис и в V_2).
$\operatorname{Im}\varphi = \mathcal{L}\big(\varphi(e_1), \ldots,\ \varphi(e_2)\big)$ (линейная оболочка). $\Rightarrow$
$\Rightarrow \dim\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Rg} A$ - ранг матрицы линейного отображения.
Ядро φ описывается однородной СЛАУ $Ax = 0$, размерность пространства её решений (то есть число векторов ФСР) равна $k = n - \operatorname{Rg} A$, где
k - размерность ядра,
n - размерность образа.
Итак, $\dim\ker\varphi + \dim\operatorname{Im}\varphi = n$, где $n = \dim V_1$.

Замечание: Если $\varphi :\ V \longrightarrow V$ - линейный оператор (то есть $\ker\varphi,\ \operatorname{Im}\varphi \subseteq V$), то вообще говоря,
$V \neq \ker\varphi + \operatorname{Im}\varphi$, хотя и $\dim\ker\varphi + \dim\operatorname{Im}\varphi = \dim V$

Пример: Рассмотрим линейное пространство $\mathbb{R}_n[x]$ - пространство многочленов от x, $\deg f \leqslant n$ с вещественными коэффициентами и оператор $\mathcal{D} : f \mapsto f' \leftarrow$ производная, $\mathcal{D} :\ \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$
$\dim \mathbb{R}_n[x] = n+1$, так как $\mathbb{R}_n[x] = \mathcal{L}\{1,\ x,\ x^2, \ldots,\ x^n\}$
$\operatorname{Im} \mathcal{D} = \mathbb{R}_{n-1}[x],\ \dim \operatorname{Im} \mathcal{D} = n$
$\ker \mathcal{D} = \mathcal{L}(1)$ - константы, $\dim \ker \mathcal{D} = 1$,
но $\ker \mathcal{D} \subseteq \operatorname{Im} \mathcal{D}$, но
$\dim \ker \mathcal{D} + \dim \operatorname{Im} \mathcal{D} = n+1 = \dim \mathbb{R}_n[x]$

Действия с линейными операторами и их матрицами

Пусть A и B - линейные операторы на линейном пространстве V над полем F, тогда

Определение: $(A+B)(x) = A(x) + B(x)$
$(\lambda A)(x) = \lambda A(x)$ - умножение на число $\lambda \in F$
$(A \cdot B)(x) = A\big(B(x)\big)$ - умножение линейного оператора (композиция)

Замечание: $A{+}B,\ \lambda{\cdot}A,\ A{\cdot}B$ - снова линейные операторы (провека по определению)

Утверждение: Пусть фиксирован базис $e = \{e_1, \ldots,\ e_n\}$. Тогда:

$$\begin{cases} (1)\ \big(A+B\big)_e = A_e + B_e \\ (2)\ \big(\lambda A\big)_e = \lambda A_e \\ (3)\ \left(A \cdot B\right)_e = A_e \cdot B_e \end{cases}$$

Доказательство (3): $\Big(\big(A \cdot B\big)(x)\Big)^e = A_e \cdot \big(B(x)\big)^e = A_e \cdot B_e x^e = (AB)_e x^e \Rightarrow$
$\Rightarrow (AB)_e = A_e B_e$, так как матрица линейных операторов в фиксированном базисе единственна.

Собственные векторы и собственные числа

Определение: Число λ называется <u>собственным числом</u> (или <u>собственным значением</u>, то есть <u>с. з.</u>) линейного оператора $\varphi : V \longrightarrow V$, где V - линейное простраснтво, если $\exists$ вектор $x \in V,\ x \neq 0$, такой что $\varphi(x) = \lambda \cdot x$. При этом x называется <u>собственным вектором</u> (<u>с. в.</u>), отвечающим собственному значению λ.

Замечание: Если x - собственный вектор, отвечающих собственному значению λ, то $\forall \alpha \in F,\ \alpha \neq 0$, αx - тоже собственный вектор, отвечающий собственному значению λ $\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x) = \alpha\lambda x = \lambda(\alpha x) \Rightarrow \alpha x$ - собственный вектор.

Замечание: Дригими словами, собственный вектор - ненулевой вектор, остающийся коллинеарным (либо равным 0) самому себе под действием линейного оператора φ

Пример 1: Пусть $\text{Пр}_{Ox} : V_2 \longrightarrow V_1$ ($V_2 \cong \mathbb{R}^2$) - линейный оператор проекции на Ox в плоскости V_2. Все векторы $\in Ox$, отличные от 0 - собственные векторы.
Например, $\vec{i} = (1,\ 0)$
$\varphi(\vec{i}) = i$ - собтсвенный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda_1 = 1$
$\varphi(\vec{j}) = 0 \Rightarrow j$ - собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda_2 = 0$
В базисе $\{i,\ j\}$ - базис из собственных векторов. Матрица линейного оператора $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ - диагональная матрица.
$V_2 = Ox \oplus Oy$
Бывает, что нет собственных значений и собственных векторов для линейного оператора

Лекция 24 апреля

Задача:

Есть 10000 человек.
Каждый день 15% здоровых заболевают и 10% больных выздоравливают (можно болеть повторно).
В первый день заболело 100 человек.
A - линейный оператор ежедневной динамики.
$\lim\limits_{n\to\infty} = A^n(x_0),\ x_0 = \begin{pmatrix} 9900 \\ 100 \end{pmatrix}$
$A^n-?$

Определение:

Для произвольной квадратной матрицы A определитель

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$$

Называется характеристическим многочленом матрицы A, а уравнение $\chi_A(\lambda)$ - многочлен степени n

Пример:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ \chi_A(\lambda) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2)$

Утверждение:

Характеристические уравнения подобных матриц совпадают.

Доказательство:

A и A' подобны, если существует $T,\ \det T \neq 0:\ A' = A' = T^{-1}AT$

$$\chi_{A'}(\lambda) = \det(A' - \lambda' E) = \det(T^{-1}AT - \lambda T^{-1}ET) = \det\big(T^{-1}(A - \lambda E)T\big) =$$

$$= \det T^{-1} \det(A - \lambda E) \det T = \det(A - \lambda E) = \chi_A$$

Следствие:

Характеристические многочлены для матриц линейных операторов в разных базисах совпадают (сами матрицы могут различаться).

То есть корректно говорить о характеристическом многочлене для линейного оператора (то есть он инвариантен при замене базиса).

Определение:

Множество всех собственных значений линейного оператора называют спектром линейного оператора.

Теорема:

λ - собственное значение линейного оператора $\Leftrightarrow$ λ - корень характеристического уравнения линейного оператора (над алгебраически замкнутым полем (например $\mathbb{C}$) или в случае, когда корни характеристического уравнения лежат в том же поле, над которым рассматривается линейный оператор).

Доказательство:

Необходимость :

Дано: λ - собственное значение линейного оператора A

Доказать: λ - корень $\chi_A(\lambda) = 0$

По определению $\exists x \neq 0$ $A(x) = \lambda \cdot x$, то есть $A(x) = \lambda \cdot I(x)$, где $I(x)$ - тождественный линейный оператор.

$$(A - \lambda I)(x) = 0 \quad (*)$$

Запишем равенство $(*)$ в некотором базисе e:

$$(A_e - \lambda E) \cdot x^e = 0$$

Это однородное СЛАУ с ненулевым решением, то есть по критерию существования ненулевых решений $\det(A_e - \lambda E) = 0$, а это и есть $\chi_A(\lambda) = 0$

Достаточность :

Дано: λ - корень $\chi_A(\lambda) = 0$

Доказать: λ - собственное значение линейного оператора A

Если λ - корень, то в заданном базисе e выполнено равенство

$$\det(A_e - \lambda E) = 0$$

То есть однородное СЛАУ $(A_e - \lambda E)x^e = 0$ имеет ненулевое решение (по тому же критерию) и соответственно выполняется $(*)$

$$(A - \lambda I)(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = \lambda x \quad (x \neq 0)$$

То есть x - собственный вектор, отвечающий собственному значению λ, ч.т.д.

Пример:

$$\chi_A = (\lambda) = \lambda(\lambda - 2) \Rightarrow \left[\begin{aligned}\lambda_1 = 0\\ \lambda_2 = 2\end{aligned}\right. \text{ - спектр линейного оператора } A$$

Определение:

Алгебраической кратностью собственного значения λ называется его кратность как корня характеристического уравнения.

Обозначение:

m_i - алгебраическая кратность собственного значения λ_i

Пример:

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - 5)^3(\lambda - 2)^2$$

Тогда будет верно:

$$\begin{cases}\lambda_1 = 5 \leftarrow m_1 = 3\\ \lambda_2 = 2 \leftarrow m_2 = 2\end{cases}$$

Определение:

Пусть $A : V \to V$ - линейный оператор λ - собственное значение линейного оператора A. Тогда множество

$$V_\lambda = \{x \in V \mid Ax = \lambda x\}$$

называется собственным подпространством отвечающим собственному значению λ.

Замечание:

V_λ является линейным подпространством в V (состоящим из собственных векторов, отвечающих собственным значениям λ, и нулевого вектора).

Доказательство:

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow (A - \lambda E) \cdot x = 0$$

То есть $V_\lambda = \ker(A - \lambda I)$ линейный оператор с матрицей $(A - \lambda E)$

$\ker B$ любого линейного оператора B является подпространством в V (проверить замкнутость).

Определение:

Размерность собственного подпространства V_λ называется <u>геометрической кратностью</u> собственного значения λ

Обозначение:

s_i - геометрическая кратность собственного значения λ

Замечание:

Геометрическая кратность собственного значения λ всегда $\geqslant 1$ ($s_i \geqslant 1$).

Теорема: без доказательства

Геометрическая кратность собственного значения λ всегда $\leqslant$ его алгебраической кратности ($s_i \leqslant m_i$)

Определение:

<u>Следом матрицы</u> $A \in M_n(F)$ называется сумма е диагональных элементов

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{i\,i}$$

Утверждение:

$\forall A,\ B \in M_n(F) \quad \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$

Утверждение:

Пусть A - линейный оператор в базисе e. Тогда $\operatorname{tr} A_e$ не зависит от выбора базиса.

Доказательство:

$A_{e'} = T^{-1} A_e T$, где $A_{e'}$ - матрица линейного оператора A в базисе e'. Тогда $\operatorname{tr} A_{e'} = \operatorname{tr}\big((T^{-1}A_e)T\big) = \operatorname{tr}\big(T(T^{-1}A_e)\big) = \operatorname{tr} A_e$.

Итого:

$\operatorname{Rg} A,\ \det A,\ \operatorname{tr} A,\ \chi_A(\lambda)$ - инварианты линейного оператора при замене базиса.

Замечание:

$A \in M_n(\mathbb{R}),\ \chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = (-1)^n \lambda^n \neq (-1)^{n-1} \operatorname{tr} A \lambda^{n-1} + \dots$
$\dots + \det A$

Критерий диагональности линейного оператора

Утверждение:

Пусть $\lambda_1, \dots,\ \lambda_k$ - собственные значения линейного оператора и пусть $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$.
Пусть $v_1, \dots,\ v_k$ - соответствующие собственные векторы
Тогда $v_1, \dots,\ v_k$ - линейно независимы.
То есть собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям являются линейно независимыми.

Доказательство:

Применим принцип математической индукции.
При $k = 1$ - утверждение верно, так как собственный вектор по определению $\neq 0$ и соответсвенно образует линейно независимую систему.
Пусть утверждение верно при $k = m$.
Добавим ещё 1 собтвенный вектор v_{m+1}, отвечающий собственному значению λ_{m+1}. Докажем, что система собственных векторов $v_1, \dots,\ v_{m+1}$ останется линейно независимой.
Рассмотрим равенство:

$$1.\ \alpha_1 v_1 + \dots \alpha_m v_m + \alpha_{m+1} v_{m+1} = 0$$

Применим к 1. линейный оператор A, тогда по линейности:

$$\alpha_1 A(v_1) + \dots + \alpha_m A(v_m) + \alpha_{m+1} A(v_{m+1}) = 0$$

Вспомним, что v_i - собственный вектор для собственного значения λ_i

$$2.\ \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_m \lambda_m v_m + \alpha_{m+1} \lambda_{m+1} v_{m+1}$$

Умножим 1. на λ_{m+1} и вычтем из 2.

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{m+1})v_1 + \dots + \alpha_m(\lambda_m - \lambda_{m+1})v_m = 0$$

По предположению индукции $v_1, \dots,\ v_m$ - линейно независимы:

$$\begin{cases} \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{m+1}) = 0 \\ \dots \\ \alpha_m(\lambda_m - \lambda_{m+1}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \dots \\ \alpha_m = 0 \end{cases}$$

Теперь 1. можно записать в виде:

$$0 + \alpha_{m+1}v_{m+1} = 0$$

Но $v_{m+1} \neq 0$ (собственный вектор), значит $\alpha_{m+1} = 0 \Rightarrow$ по определению система $v_1, \dots,\ v_{m+1}$ является линейно независимой.

Утверждение: Критерий диагональности матрицы линейного оператора A

Матрица линейного оператора A является диагональной в данном базисе $\Leftrightarrow$ все векторы этого базиса являются собственными векторами для линейного оператора A.

Доказательство:

Необходимость :

Дано: A_e - диагональная матрица

Доказать: e состоит из собственных векторов по A

По определению матрицы линейного оператора в j-м столбце стоят координаты вектора $A(e_j)$ в базисе $e_1, \dots,\ e_n$
Если A_e - диагональна, то j-й столбей имеет вид $(0, \dots,\ 0,\ \lambda_j,\ 0, \dots,\ 0) \Rightarrow$

$\Rightarrow A(e_j) = 0 + \dots + 0 + \lambda_j e_j + 0 + \dots + 0$, то есть $A(e_j) = \lambda_j e_j,\ e_j \neq 0 \Rightarrow$ по определению e_j - собственный вектор, отвечающий собственному значению λ_j (на диагонали матрицы A_e - собственное значение).

Достаточность :

Дано: e состоит из собственных векторов по A

Доказать: A_e - диагональная матрица

$A(e_j) = \lambda_j e_j$,
$\forall j = \overline{1,\ n} \Rightarrow$ по определению матрицы линейного оператора, все элементы кроме диагональных равны нулю в каждом столбце (на диагонали собственные значения λ_i), ч.т.д.

Определение:

Линейный оператор, для которого в линейном пространстве V существует базис из собственных векторов, называется диагонализируемым.

Теорема: Критерий диагонализируемости линейного оператора.

(Без доказательства) Линейный оператор диагонализируем $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ для любых его собственных значений λ_i алгебраическая кратность равна геометрической кратности $(m_i = s_i)$

Теорема:

Если характеристическое уравнение линейного оператора, действующего в пространстве V, где $\dim V = n$ имеет ровно n попарно различных корней, то оператор диагонилизируеем (корни лежат в поле, над которым рассматривается линейное пространство V)

Доказательство:

Если собственное значение $\lambda_i \in F$, то ему можно сопоставить хотя бы один собственный вектор v_i. Система $v_1, \ldots,\ v_n$ - линейно независимы, так как по условию $\lambda_i \neq \lambda_j$, при $i \neq j$ (доказали ранее), их число равно $\dim V \Rightarrow$ они образуют базис в V из собственных векторов $\Rightarrow$ линейный оператор диагонализируем

Лекция 15 мая

Евклидовы пространства

В этом разделе всякое поле будет полем вещественных чисел:

$$\forall F \text{ F - поле} \Rightarrow F = \mathbb{R}$$

Определение:

Евклидово пространство $\mathcal{E}$ - это пара $(V,\ g(x,\ y))$, где
V - линейное пространство,
$g(x,\ y)$ - скалярное произведение, то есть симметрическая, положительно определённая билинейная форма.
То есть для $g : V \times V \to \mathbb{R}$ выполняются свойства (аксиомы скалярного произведения):

1. $\forall x,\ y \in \mathcal{E}\ g(x,\ y) = g(y,\ x)$ - симметричность
2. $\forall x,\ y,\ z \in \mathcal{E}\ \forall \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$
$$g(\alpha x + \beta y, z) = \alpha g(x,\ z) + \beta g(y,\ z),\ \underline{\text{линейность}}$$
3. $\forall x, \in \mathcal{E}\ g(x,\ x) \geqslant 0 \wedge g(x,\ x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ нулевой вектор

Пример:

1. $\mathcal{E} = \Big(V_3,\ g(x,\ y) = |x| \cdot |y| \cos \widehat{(x,\ y)}\Big)$ - евклидово пространство
2. $V = C[a,\ b]$ - функции, непрерывные на отрезке $[a,\ b]$
$$g\big(f_1(x),\ f_2(x)\big) = \int_a^b f_1(x) f_2(x)\, dx - \text{скалярное произведение} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mathcal{E} = \Big(C[a,\ b],\ g(x,\ y)\Big) - \text{евклидово пространство}$$

Определение:

Пусть $\mathcal{E}$ - евклидово пространство. Тогда величина $||v|| = \sqrt{g(v,\ v)}$ (может обозначаться как $|v|$) называется нормой (длиной) вектора v.

Определение:

$\forall v_1,\ v_2 \in \mathcal{E},\ v_1,\ v_2 \neq 0$:

$$\cos\varphi = \frac{g(v_1,\ v_2)}{||v_1|| \cdot ||v_2||} = \frac{g(v_1,\ v_2)}{\sqrt{g(v_1,\ v_1)}\sqrt{g(v_2,\ v_2)}}$$

Где φ - угол между $v_1,\ v_2$.
Это определение угла между векторами (берём $\varphi \in [0,\ \pi]$)

Определение:

$\forall x,\ y \in \mathcal{E}$:

$$\rho(x,\ y) = ||x - y|| - \text{расстояние между векторами } x,\ y$$

Утверждение (Неравенство Коши-Буняковского)

$\forall x,\ y \in \mathcal{E}$:

$$|g(x,\ y)| \leqslant ||x|| \cdot ||y||$$

Доказательство:

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$:

$$0 \leqslant g(\lambda x - y,\ \lambda x - y) = \lambda g(x,\ \lambda x - y) - g(y,\ \lambda x - y) =$$

$$= \lambda^2 g(x,\ x) - \lambda g(x,\ y) - \lambda g(y,\ x) + g(y,\ y) = ||x||^2\lambda^2 - 2g(x,\ y)\lambda + ||y||^2$$

Квадратное уравнение относительно λ, которое $\geqslant 0\ \forall \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow$
$\Rightarrow D \leqslant 0,\ D = 4\big(g(x,\ y)\big)^2 - 4||x||^2 \cdot ||y||^2 \leqslant 0 \Rightarrow |g(x,\ y)| \leqslant ||x|| \cdot ||y||$,
ч.т.д.

Утверждение (неравенство треугольника):

$\forall x,\ y \in \mathcal{E}$:

$$||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y||$$

Доказательство:

$||x+y||^2 = g(x+y,\ x+y) = ||x||^2+2g(x,\ y)+||y||^2 \leqslant ||x||^2+2||x||\cdot||y||+||y||^2 =$

$= \big(||x+y||\big)^2$. Тут было применено неравенство Коши-Буняковского. Так как норма вектора всегда $\geqslant 0$, То

$$||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y||$$

Определение:

Два вектора $x,\ y \in \mathcal{E}$ называются ортогональными, если $g(x,\ y) = 0$.

Определение:

Система векторов $a_1, \dots,\ a_k$ называется:

a. Ортогональной, если $g(a_i,\ a_j) = 0,\ \forall i,\ j = \overline{1,\ k},\ i \neq j$

b. Ортонормированной, если она ортогональна и $g(a_i,\ a_i) = 1,\ \forall i = \overline{1,\ k}$

Лемма 1.

Пусть $a_1, \dots,\ a_k$ - ортогональная система векторов, и $a_i \neq 0,\ i = \overline{1,\ k}$. Тогда эта система линейно независима.

Доказательство:

Приравняем к нулю линейную комбинацию

$$\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k = 0$$

Домножим скларяно на a_i для каждого $i = \overline{1,\ k}$

$$(\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k,\ a_i) = (0,\ a_i) = 0$$

$$\alpha_1(a_1,\ a_i) + \dots + \alpha_i(a_i,\ a_i) + \dots + \alpha_k(a_k,\ a_i) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \alpha_i(a_i,\ a_i) = 0$, но $a_i \neq 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \Rightarrow$ по определению система $a_1, \dots,\ a_k$ линейно независима.

Замечание:

Если $\dim \mathcal{E} = n$ и $k = n$, то $a_1, \dots, a_n$, $(a_i \neq 0, \forall i)$ образует ортогональный базис. Если рассмотреть $e_i = \frac{a_i}{||a_i||}$, $i = \overline{1, n}$ (то есть <u>нормировать</u>), то получим ортонормированный базис.

Лемма 2.

Пусть $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, то есть x_i - коэффициенты вектора x в ортонормированном базисе. $e_1, \dots, e_n$, тогда $x_i = (x_1, e_i)$, $\forall i = \overline{1, n}$
Если базис не является ортонормированным, но ортогонален, то $x_i = \frac{(x, e_i)}{(e_i, e_i)}$, $i = \overline{1, n}$

Доказательство:

$= x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \leftarrow$ умножим скалярно на e_i, $e = \overline{1, n}$

$(x, e_i) = x_1 \cdot g(e_1, e_i) + \dots + x_i \cdot g(e_i, e_i) + \dots + x_n \cdot g(e_n, e_i) = x_i \cdot g(e_i, e_i) = x_i$

Замечание:

Пусть $a_1, \dots, a_n$ - базис в $\mathcal{E}$. Тогда $g(x, y) = x^T \Gamma Y$, где x, Y - столбцы координат векторов x, y в базисе $a_1, \dots, a_n$,

$$\Gamma = \begin{pmatrix} g(a_1, a_1) & \dots & g(a_1, a_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g(a_1, a_n) & \dots & a(a_n, a_n) \end{pmatrix}$$

<u>Матрица Грамма</u> (она же матрица билинейной формы).

Свойства Грамма

1. Γ - симметрическая, то есть $\Gamma^T = \Gamma$ (из симметричности скалярного произведения). Более того $\forall x \neq 0$ $\underbrace{x^T \Gamma x}_{=g(x, x)} > 0$ (из положительной определённости)

2. Матрицы Грамма двух базисов e, e' связаны соотношением
$$\Gamma' = U^T \Gamma U$$
Где U - матрица перехода $e \to e'$ (так как это верно для всмех билинейных форм).

3. $\det \Gamma = \mathrm{Gr}(a_1, \ldots, a_n) > 0$ если $a_1, \ldots,\ a_n$ - базис ($\det \Gamma$ называется граммианом и обозначается Gr)

Доказательство пункта 3.

По свойству 2 $\det \Gamma' = \det(U^T \Gamma U) = \det U^T \det \Gamma \det U = (\det U)^2 \det \Gamma$
Перейдём к ортонормированному базису (далее докажем, что это всегда возможно). В ортонормированном базисе

$$\Gamma' = E,\ \det \Gamma' = \det E = 1 \Rightarrow \det \Gamma = \frac{1}{(\det U)^2} > 0$$

Утверждение (Метод ортогонализации Грамма-Шмидта):

Если $\mathcal{E}$ - евклидово пространство, то в нём существует ортонормированный базис.

Доказательство:

Предъявим алгоритм, который по произвольному базису $a_1, \ldots,\ a_n$ строит ортогональный $b_1, \ldots b_n$ (из него можно получить ортонормированный $e_i = \frac{b_i}{||b_i||}$).

1. Так как $a_1 \neq 0$ (вектор базиса), можно взять $b_1 = a_1$.

2. Будем считать b_2 в виде:

$$b_2 = a_2 - \alpha b_1,\ \alpha \in \mathbb{R}$$

Ищем α из условия $(b_1,\ b_2) = 0$. То есть:

$$(a_2 - \alpha b_1,\ b_1) = 0 \Rightarrow (a_2,\ b_1) - \alpha(b_1,\ b_1) = 0 \Rightarrow$$

Так как $(b_1,\ b_1) \neq 0$ может на него поделить

$$\Rightarrow \alpha = \frac{(a_2,\ b_1)}{(b_1,\ b_1)}$$

То есть α - проекция вектора a_2 на a_1, $b_2 = a_2 - \dfrac{(a_2,\ b_1)}{(b_1,\ b_1)} b_1$
Векторы $b_1,\ b_2$ линейно выражаются через $a_1,\ a_2 \Rightarrow$ они принадлежат $\mathcal{E}$ (это может быть подпространство). При этом $a_1,\ a_2$ могут быть выражены через $b_1,\ b_2 \Rightarrow b_1,\ b_2$ - линейно независимы.

3. Пусть $b_1, \dots,\ b_k,\ k \geqslant 2$, уже построены. Будем искать b_{k+1} в виде:

$$b_{k+1} = a_{k+1} - c_{k+1,\ 1}b_1 - c_{k+1,\ 2}b_2 - \dots - c_{k+1,\ k}b_k$$

Коэффициент $c_{k+1,\ i},\ i = \overline{1,\ k}$, найдём из условия ортогональности с b_i, домножим выражение скалярно на b_i.

$$0 = (b_{k+1},\ b_i) = (a_{k+1},\ b_i) - 0 - \dots - c_{k+1,\ i}(b_i,\ b_i) - \dots - 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_{k+1,\ i} = \frac{(a_{k+1},\ b_i)}{(b_i,\ b_i)} \Rightarrow b_{k+1} = a_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{a_{k+1},\ b_i}{(b_i,\ b_i)} b_i$$

Продолжаем так делать, пока не получим ортогональную линейно независимую систему векторов $b_1, \dots,\ b_n$, где $n = \dim \mathcal{E} \Rightarrow$ ортонормальный базис.

Утверждение (четвёртое свойство матрицы Грамма):

Определитель матрицы Грамма не меняется в процессе ортогонализации Грамма-Шмидта.

$$\mathrm{Gr}(a_1, \dots,\ a_n) = \det \Gamma = \det \Gamma' = \mathrm{Gr}(b_1, \dots,\ b_n) = ||b_1||^2 \cdot \dots \cdot ||b_n||^2$$

Так как матрица Грамма ортогонального базиса является диагональной.

Доказательство:

Рассмотрим матрицу перехода от a к b:

$$U_{a \to b} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \dots & * & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & * \\ \vdots & 0 & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Получилась верхнетреугольная матрица, определитель которой равен 1. И участвуют только векторы b_i с $i \leqslant k$, которые выражаются через a_j, где $a_j \leqslant a_i$
$\Rightarrow \det U_{a \to b} = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathrm{Gr}(b_1, \dots,\ b_n) = \det \Gamma' = (\det U)^2 \det \Gamma = 1 \det \Gamma = \mathrm{Gr}(a_1, \dots,\ a_n)$$

Лекция 22 мая

Свойства матрицы Грамма

1. F - симметрическаяи положительно определённая.

2. $\Gamma' = U^T \Gamma U$

3. Если $a_1, \ldots,\ a_n$ - базис, то

$$\det \Gamma(a_1, \ldots,\ a_n) = \mathrm{Gr}(a_1, \ldots,\ a_n) > 0$$

4. Метод ортогонализации Грамма-Шмидта не меняет $\det \Gamma$

$$\mathrm{Gr}(a_1, \ldots,\ a_n) = \mathrm{Gr}(b_1, \ldots,\ b_n) = ||b_1||^2 \ldots ||b_n||^2$$

Утверждение (5 свойство матрицы Грамма).

Пусть $a_1, \ldots,\ a_n$ - некоторые векторы (необязательно базис). Тогда:

$$\underset{\text{л.н.з.}}{a_1, \ldots,\ a_k} \Leftrightarrow \mathrm{Gr}(a_1, \ldots,\ a_k) = \det \Gamma \neq 0$$

Доказательство:

Составим линейную комбинацию $a_1, \ldots,\ a_k$ и приравняем к нулю:

$$\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_k a_k = 0 \qquad (1)$$

Умножим (1) скалярно последовательно на $a_1, \ldots,\ a_k$

$$\begin{cases} \alpha_1(a_1,\ a_1) + \alpha_2(a_1,\ a_2) + \cdots + \alpha_k(a_1,\ a_k) = 0 \\ \vdots \\ \alpha_1(a_k,\ a_1) + \alpha_2(a_k,\ a_2) + \cdots + \alpha_k(a_k,\ a_k) = 0 \end{cases}$$

Это СЛАУ относительно неизвестных $\alpha_1, \ldots,\ \alpha_k$ вида

$$\Gamma(a_1, \ldots,\ a_k)\alpha = 0, \text{ где } \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix}$$

Однородная СЛАУ с квадратной матрицей $\Rightarrow$ по критерию существования ненулевого решения, существуют нетривиальные коэффициенты α, такие что:

$$\alpha_1, \ldots \alpha_k \Leftrightarrow \det \Gamma(a_1, \ldots,\ a_k) = 0$$

то есть векторы $a_1, \ldots a_k$ линейно независимы из (1).

Замечание:

В V_3 если $a_1,\ a_2,\ a_3$ - линейно независимые столбцы координат в некотором ортонормированном базисе, тогда

$\Gamma(a_1,\ a_2,\ a_3) = A^T E A^T = A^T A,$ где $A = [a_1,\ a_2,\ a_3]$, матрица по столбцам

Равенство верно, так как матрица A является матрицей перехода от ортонормированного базиса к базису a (а в ОНБ $\Gamma = E$).
Получается $\mathrm{Gr}(a_1,\ a_2,\ a_3) = (\det A)^2$.
При этом $\det A = \langle a_1,\ a_2,\ a_3\rangle = V(a_1,\ a_2,\ a_3)$ - ориентированный объём параллелипипеда, построенного на векторах $a_1,\ a_2,\ a_3$.
То есть $|V(a_1,\ a_2,\ a_3)| = \sqrt{\mathrm{Gr}(a_1,\ a_2,\ a_3)}$

Замечание:

В n-мерном случае положим

$$V(a_1, \ldots,\ a_n) = \sqrt{\mathrm{Gr}(a_1, \ldots,\ a_n)}$$

Объём n-мерного параллелипипеда, построенного на векторах $a_1, \ldots,\ a_n$.

Ортогональные дополнения

Определение:

Пусть H - подпространство в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$, тогда множество:

$$H^\perp = \left\{x \in \mathcal{E} \middle| \forall h \in H\ (x,\ h) = 0\right\}$$

называется ортогональным дополнением к пространству H.

Утверждение:

$H^\perp$ является линейным подпространством в $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E} = H \oplus H^\perp$
Следствие:
$\dim \mathcal{E} = \dim H + \dim H^\perp$

Доказательство:

Проверим замкнутость операции сложения:

$\forall h \in H \; \forall x_1,\ x_2 \in H^\perp \; (x_1{+}x_2,\ h) = (x_1,\ h){+}(x_2,\ h) = 0{+}0 = 0 \Rightarrow x_1{+}x_2 \in H^\perp$

Умножения на скаляр:

$$\forall h \in H,\ \forall x \in H^\perp,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}\ (\alpha x,\ h) = \alpha(x,\ h) = \alpha 0 = 0$$

То есть $H^\perp$ - подпространство в $\mathcal{E} \Rightarrow$
$\Rightarrow$ можно рассмотреть сумму подпространств $H + H^\perp$
Докажем, что сумма $H + H^\perp$ прямая.

$$\forall x \in H \cap H^\perp\ (x,\ x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow H \cap H^\perp = \{0\} \Rightarrow \text{сумма прямая}$$

Покажем, что $H \oplus H^\perp = \mathcal{E}$
Пусть $f_1, \ldots,\ f_m$ - ортонормированный базис в H (существует по теореме о методе Грамма-Шмидта)ю
Дополним его до базиса в $\mathcal{E}$ векторами $f_{m+1}, \ldots,\ f_n$
Применим процесс ортогонализации Грамма-Шмидта, получим векторы

$$\underbrace{f_1, \ldots,\ f_m}_{\text{уже ОНБ}},\ e_{m+1}, \ldots,\ e_n$$

Тогда $e_{m+1}, \ldots,\ e_n$ по построению ортогональны каждому вектору $f_1, \ldots,\ f_m$, то есть ортогональны всему H, так как $H = \mathcal{L}(f_1, \ldots,\ f_m) \leftarrow$ линейная оболочка, тогда $e_{m+1}, \ldots,\ e_n \in H^\perp$ по определению.
То есть $\forall x \in \mathcal{E}$:

$$x = \underbrace{x_1 h_1 + \ldots x_m h_m}_{h \in H} + \underbrace{x_{m+1} e_{m+1} + \cdots + e_n}_{h^\perp \in H^\perp}$$

То есть все $x \in \mathcal{E}$ представимы в виде $x = h + h^\perp$, где $h \in H,\ h^\perp \in H^\perp$, что и означает, что $\mathcal{E} = H \oplus H^\perp$

Определение:

Пусть $x = h + h^\perp$, где $h \in H,\ h^\perp \in H^\perp$, тогда - ортогональная проекция на H, а $h^\perp$ - ортогональная составляющая x относительно H

Обозначение:

$h = \text{Пр}_H\, x$

Замечание:

$\forall x \in \mathcal{E}\ \forall H\ \exists! h,\ h^\perp\ x = h + h^\perp$, так как $\mathcal{E} = H \oplus H^\perp$

Утверждение:

$\left(H^\perp\right)^\perp = H$

Доказательство:

$\forall h^\perp \in H^\perp\ \forall \in H\ x,\ h^\perp$ ортогональны$\Rightarrow H \subseteq \left(H^\perp\right)^\perp$
По предыдущему утверждению $\mathcal{E} = H \oplus H^\perp$ и $\mathcal{E} = H^\perp \oplus \left(H^\perp\right)^\perp \Rightarrow$
$\Rightarrow$ размерности H и $\left(H^\perp\right)^\perp$ одинаковы $\Rightarrow H = \left(H^\perp\right)^\perp$

Утверждение:

Пусть $H = \mathcal{L}(a_1, \dots,\ a_k)$ и $a_1, \dots,\ a_k$ - линейно незивисимы (то есть базис в H), тогда $\forall x \in \mathcal{E}$:

$$\text{Пр}_H\, x = \underset{n\times k}{A} \cdot \underset{k\times k}{\left(A^T \cdot A\right)^{-1}} \cdot \underset{k\times n}{A^T} \cdot \underset{n\times 1}{x}$$

где $A = [a_1, \dots,\ a_k]$ - матрица $n \times k$, составленная из столбцов $a_1, \dots,\ a_k$, (координаты в некотором ортонормированном базисе).

Замечание:

$h^\perp = x - h = (E - A(A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T)x$

Доказательство:

По утверждению, доказанному выше:

$$\forall x \in \mathcal{E}\ x = h + h^\perp,\ h \in H,\ h^\perp \in H^\perp$$

При этом $a_1, \dots,\ a_k$ - базис в $H \Rightarrow x = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k + h^\perp \qquad (2)$
То есть если мы знаем коэффициенты $\alpha_1, \dots,\ \alpha_k$, то мы знаем

$h = \text{Пр}_H\, x = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k$
Равенство (2) последовательно скалярно умножим на $a_1, \dots,\ a_k$

$$\begin{cases} \alpha_1(a_1,\ a_1) + \alpha_2(a_1,\ a_2) + \dots + \alpha_k(a_1,\ a_k) = (a_1,\ x) \\ \vdots \\ \alpha_2(a_k,\ a_1) + \alpha_2(a_k,\ a_2) + \dots + \alpha_k(a_k,\ a_k) = (a_k,\ x) \end{cases} \qquad (3)$$

В i-м уравнении слагаемые $(a_i,\ h^{\perp}) = 0$, так как $h^{\perp} \in H^{\perp}$. Перепишем (3) в матричном виде (все координаты векторов даны в ортонормированном базисе).

$$(3) \Leftrightarrow A^T \cdot A \cdot \alpha = A^T x,\ \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix},\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ A = [a_1, \dots,\ a_k]$$

То есть $\Gamma(a_1, \dots,\ a_k) = A^T A$, поскольку $(a_i,\ a_j) = a_i^T E a_j = a_i^T a_j$. E - матрица Грамма в ортонормированном базисе.
Таким образом $\Gamma(a_1, \dots,\ a_k) = A^T A$ невырождена по свойству 5 матрицы Грамма (векторы $a_1, \dots,\ a_k$ линейно независимы), значит существует $\Gamma^{-1} = (A^T A)^{-1}$.
Тогда $(3) \Rightarrow \alpha = (A^T A)^{-1} A^T x$
$\text{Пр}_H\, x = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k = [a_1, \dots,\ a_k] = A\alpha = A(A^T A)^{-1} A^T x$.

Определение:

Множество решений неоднородной СЛАУ $Ax = b$ называется <u>линейным алгебраическим многообразием</u>

Замечание:

По теореме о структуре общего решения неоднородной СЛАУ: общее решение НСЛАУ (то есть произвольный элемент многообразия) равен частному решению НСЛАУ + общее решение ОСЛАУ. Это означает, что линейное многообразие $P = x_0 + L$, где $x_0 \in P$ (частное решение НСЛАУ $Ax = b$), а L - множетсво решений ОСЛАУ $Ax = 0$, то есть подпространство, являющееся линейной оболочкой ФСР ОСЛАУ.
Таким образом L всегда содержит $\{0\}$ (начало координат), а $x_0 \in P$ - вектор сдвига. Любое линейное многообразие можно получить (параллельным) сдвигом некоторого подпространства L на вектор $x_0 \in P$

Определение:

Расстоянием от точки M, заданной радиус-вектором x до линейного многообразия P называется

$$\rho(M,\ P) = \inf_{u \in P} \rho(x,\ u) = \inf_{u \in P} ||x - u||$$

Заметим, что в конечномерном евклидовом пространстве inf всегда достигается (это min), то есть

$$\rho(M,\ P) = \rho(x,\ P) = \min_{u \in P} ||x - u||$$

Замечание:

$\rho(x,\ P) =$ длине ортогональной составляющей вектора $x - x_0$ относительно пространства L, где $P = x_0 + L$, то есть

$$\rho(x,\ P) = ||(x - x_0)^{\perp}||$$

Доказательство:

$$\forall u \in P\ x - u = x - (x_0 + \underset{\in L}{l}) = \text{Пр}_L(x - x_0 - l) + (x - x_0 - l)^{\perp}$$

Где $l \in L \Rightarrow l^{\perp} = 0 \Rightarrow x - u = \underbrace{\text{Пр}_L(x - x_0) - l}_{\in L} + \underbrace{(x - x_0)}_{\in L^{\perp}}{}^{\perp}$. Проекцию можем уменьшать, варьируя L. Тогда из геометрии получим:

$$\forall u \in P\ ||(x - x_0)^{\perp}|| \leqslant ||(x - u)||,\ \text{(катет не больше гипотенузы)}$$

При $l = \text{Пр}_L(x - x_0)$, то есть $u = x_0 + \text{Пр}_L(x - x_0)$ достигается равенство$\Rightarrow$

$$\rho(x,\ P) = \min_{u \in P} ||x - u|| = ||(x - x_0)^{\perp}||$$

Лекция 29 мая

Утверждение:

Расстояние $\rho(M,\ P)$ между точкой M с радиус вектором X и линейным многообразием $P = x_0 + L$, где $L = \mathcal{L}(a_1, \dots,\ a_k)$ и $a_1, \dots,\ a_k$ - линейно независимые (то есть базис $\mathcal{L}$), вычисляется по формуле:

$$\rho(M,\ P) = \sqrt{\frac{\operatorname{Gr}(a_1, \dots,\ a_k,\ x - x_0)}{\operatorname{Gr}(a_1, \dots,\ a_k)}}$$

1 способ: $\rho(M,\ P) = \left\|(x - x_0)_L^{\perp}\right\|$

Доказательство:

Применим к $a_1, \dots,\ a_k,\ x - x_0$ процесс ортогонализации Грамма-Шмидта.

$$\underbrace{a_1, \dots,\ a_k}_{\text{базис } L},\ x - x_0 \longmapsto \underbrace{b_1, \dots,\ b_k}_{\text{базис } L},\ (x - x_0)^{\perp}$$

$(x - x_0)^{\perp}$, так как он ортогонален $L = h(b_1, \dots,\ b_k)$ и при ортогонализации мы вычитаем из $x - x_0$ его проекцию на L

По свойству 4 матрицы Грамма определитель не меняется в процессе ортогонализации, тогда:

$$\operatorname{Gr}(a_1, \dots,\ a_k,\ x - x_0) = \operatorname{Gr}(b_1, \dots,\ b_k,\ (x - x_0)^{\perp}) = \underbrace{\|b_1\|^2 \dots \|b_k\|^2}_{\operatorname{Gr}(a_1, \dots,\ a_k)} \cdot \|(x - x_0)^{\perp}\|^2$$

И так как $\rho(M,\ P) = \|(x - x_0)^{\perp}\|$, то

$$\rho(M,\ P)^2 = \frac{\operatorname{Gr}(a_1, \dots,\ a_k,\ x - x_0)}{\operatorname{Gr}(a_1, \dots,\ a_k)},\ \text{ч.т.д.}$$

Линейные операторы в евклидовых пространствах

Определение:

Линейный оператор $\mathcal{A}^* : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ называется <u>сопряжённым</u> к линейному оператору $\mathcal{A} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$, если:

$$\forall x,\ y \in \mathcal{E}\ (\mathcal{A}x,\ y) = (x,\ \mathcal{A}^* y)$$

Определение:

Линейный оператор $\mathcal{A} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ называется <u>самосопряжённым</u>, если:

$$\forall x,\ y \in \mathcal{E}\ (\mathcal{A}x,\ y) = (x,\ \mathcal{A}y) \Rightarrow \mathcal{A} = \mathcal{A}^*$$

Лемма:

Пусть $M,\ N \in M_n(\mathbb{R})$, тогда:

$$\forall x,\ y \in \mathbb{R}^n\ x^T M y = x^T N y \Rightarrow M = N$$

Доказательство:

$x,\ y$ - любые, возьмём элементы канонического базиса: $e_i \begin{pmatrix} 0_1 \\ 0_2 \\ \vdots \\ 1_i \\ \vdots \\ 0_n \end{pmatrix}, \ldots,\ e_j = \begin{pmatrix} 0_1 \\ 0_2 \\ \vdots \\ 1_j \\ \vdots \\ 0_n \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow e_i M e_j = [M]_{ij} = [N]_{ij} = e_i N e_j \Rightarrow \forall i,\ j = \overline{1,\ n}\ M = N$, ч.т.д.

Теорема (о существовании сопряжённого):

Пусть $\mathcal{A} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$. Тогда существует единственный сопряжённнйы линейный оператор $\mathcal{A}^* : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$, причём его матрица в любом базисе e имеет вид:

$$(\mathcal{A}^*)_e = \Gamma^{-1}(\mathcal{A}_e)^T \Gamma$$

Замечание:

Если базис e - ортонормированный, то $\mathcal{A}_e^* = \mathcal{A}_e^T$

Доказательство:

Запишем равенство (1) : $(\mathcal{A}x,\ y) = (x,\ \mathcal{A}^*y)$ в базисе e.
Пусть $x^e,\ y^e$ - столбцы координат векторов $x,\ y$ в базисе e

$$(\mathcal{A}x)^e = \mathcal{A}_e x^e, \qquad (x,\ y) = (x^e)^T \Gamma y^e$$

Тогда в матричной записи равенство (1) имеет вид:

$$((\mathcal{A}x)^e)^T\, \Gamma y^e = (x^e)^T \Gamma\, (\mathcal{A}^* y)^e \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^e)^T\, \underbrace{\mathcal{A}_e^T \Gamma}_{M}\, y^e = (x^e)^T\, \underbrace{\Gamma \mathcal{A}_e^*}_{N}\, y^e \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ так как верно для всех $x,\ y$, то по лемме $M = N$, то есть $\Gamma \mathcal{A}_e^* = \mathcal{A}_e^T = \Gamma \Rightarrow$ так как e базис, то по свойству 5 матрицы Грамма, существует Γ^{-1}, то есть:

$$\mathcal{A}_e^* = \Gamma^{-1} \mathcal{A}_e^T \mathcal{A}$$

То есть в любом базисе сопряжённый линейный оператор задаётся матрицей $\mathcal{A}_e^*$ и действие линейного оператора полностью определяется его матрицей $\Rightarrow$ существует единственный сопряжённый линейный оператор.

Следствие (критерий самосопряжённости):

Линейный оператор самосопряжён $\Leftrightarrow$ матрица линейного оператора $\mathcal{A}$ в ортонормированном базисе симметрическая.

Доказательство:

$\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$. В ортонормированном базисе e выглядит так:

$$\mathcal{A}_e^* = A_e^T \wedge \forall \text{ базиса } \mathcal{A}_e^* = \mathcal{A}_e \Leftrightarrow \text{в ОНБ} \mathcal{A}_e = \mathcal{A}_e^T$$

Теорема:

Все корни характеристического многочлена самосопряжённого линейного оператора является вещественными числами.

Доказательство:

Пусть $\lambda_i \in \mathbb{C}$ - корень характеристичекого уравнения $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = 0$ и $\mathcal{A}$ - самосопряжённый линейный оператор, значит в некотором ортонормированном базисе $\det(\mathcal{A} - \lambda_i E) = 0 \Rightarrow$ СЛАУ $(\mathcal{A} - \lambda_i E)x = 0$ (2) имеет ненулевое решение (это координаты собственного вектора, соответствующего собственному значению λ_i)

Пусть $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq 0$ - решение. Вообще говоря $\forall k = \overline{1,\ n}\ x_k \in \mathbb{C}$.

Рассмотрим $\overline{x} = \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \vdots \\ \overline{x}_n \end{pmatrix} \neq 0$ (комплексные сопряжённые чисел).

Умножим (2) слева на $(\overline{x})^T$: $(\overline{x})^T(A - \lambda_i E)x = 0 \Leftrightarrow \overline{x}^T A x - \lambda_i \overline{x}^T x = 0$, где $\overline{x}^T x = \overline{x}_1 x_1 + \cdots + \overline{x}_n x_n = \underbrace{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}_{\in\mathbb{R}} > 0$.

Тогда $\lambda_i = \dfrac{\overline{x}^T A x}{\overline{x}^T x}$ - отношение Рэлея (Rayleigh).
Покажем, что $\omega = \overline{x}^T A x$ - вещественное число, то есть $\overline{\omega} = \omega$:

$$\omega = \omega^T,\ (\text{так как это число}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega = (\overline{x}^T A x)^T = x^T A^T (\overline{x}^T)^T = x^T A \overline{x}$$

Так как $A = A^T$ в ортонормированном базисе. $\overline{A} = A$, так как $A \in M_n(\mathbb{R})$
Но $\overline{\omega} = \overline{(\overline{x}^T A x)} = \overline{\left(\overline{x}^T\right)}\,\overline{A}\overline{x} = x^T A \cdot \overline{x} \Rightarrow \overline{\omega} = \omega \Rightarrow$ собственное значение λ_i - тоже является вещественным, ч.т.д.

Теорема (без доказательства):

Пусть λ_i - собственное значение самосопряжённого линейного оператора $\mathcal{A}$. Тогда алгебраическая кратность λ_i всегда равна геометрической кратности λ_i $\big(m(\lambda_i) = s(\lambda_i)\big)$

Следствие:

Самосопряжённый линейный оператор всегда является диагонилизируемым.

Утверждение:

Собственные векторы самосопряжённого линейного оператора, отвечающие различным собственным значениям, являются ортогональными.

Доказательство:

Пусть $\lambda_1,\ \lambda_2$ такие собственные значения, что:

$$\begin{cases} \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ \exists x_1 \neq 0 : \mathcal{A}x_1 = \lambda_1 x_1 \\ \exists x_2 \neq 0 : \mathcal{A}x_2 = \lambda_2 x_2 \end{cases}$$

$(\mathcal{A}x_1,\ x_2) = (\lambda_1 x_1,\ x_2) = \lambda_1(x_1,\ x_2)$. Из самосопряжённости получим:

$$(\mathcal{A}x_1,\ x_2) = (x_1,\ \mathcal{A}x_2) = (x_1,\ \lambda_2 x_2) = \lambda_2(x_1,\ x_2)$$

То есть $\underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0}(x_1,\ x_2) = 0 \Rightarrow (x_1,\ x_2) = 0$, то есть $x_1,\ x_2$ - ортогональны.

Теорема (без доказательства):

Для всех самосопряжённым линейных операторов $\mathcal{A}$ существует ортонормированный базисиз собственных векторов, его матрица $\mathcal{A}_e$ в этом базисе диагональна, на диагонали стоят собственные значения, повторяющиейся столько раз, какова их кратность.

Теорема (частный случай):

Если собственные значения $\lambda_1, \ldots,\ \lambda_k$ - самосопряжённого линейного оператора $\mathcal{A} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E},\ \dim \mathcal{E} = n$, попарно различны $(i \neq j \Rightarrow \lambda_i \neq \lambda_j)$, то в $\mathcal{E}$ сущетсвует ортонормированный базис (из собственных векторов), в котором матрица линейного оператора $\mathcal{A}$ имеет диагональный вид.

Доказательство:

Если собственные значения $\lambda_i, \ldots,\ \lambda_k$ - попарно различны, то, выбрав для каждого λ_i соответсвующий ему собственный вектор b_i, мы получим n ненулевых векторов, они будут линейно независимы по доказанному ранее и, так как $\mathcal{A}$ - самосопряжённый линейный оператор, то система

$b_1, \ldots,\ b_n$ будет ортогональна $\Rightarrow$ ортогональный базис. Нормируя его, получим ортонормированный базис из собственных векторов $e_i = \dfrac{b_i}{\|b_i\|}$, в нём матрица линейного оператора диагональна.

Ортогональные матрицы и ортогональные линейные операторы

Определение:

Квадратную матрицу $U = M_n(\mathbb{R})$ называют ортогональной, если

$$U^T \cdot U = E$$

Пример:

$A_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ - матрица поворота

Свойства ортогональных матриц

1. $|\det U| = 1$

$\det(U^T \cdot U) = \det E = 1 \Rightarrow (\det U)^2 = 1 \Rightarrow |\det U| = 1$

Замечание:

Ортогональная матрица всегда невырождена.

2. $U^{-1} = U^T$

По замечанию U^{-1} всегда существует, равенство $U^T U = E$ умножим справа на U^{-1}:

$$(U^T U) \cdot U^{-1} = E U^{-1}$$

$$U^T (U \cdot U^{-1}) = U^{-1} \Rightarrow U^T = U^{-1}$$

3. U^T **тоже ортогональная матрица**

$(U^T)^T U^T = U \cdot U^{-1} = E$

4. Произведение ортогональный матриц одинакового размера - ортогональная матрица

Доказательсто:

$(U_1U_2)^T(U_1U_2) = U_2^T \underbrace{U_1^T U_1}_{E} U_2 = \underbrace{U_2^T U_2}_{E} = E$

Замечание:

Все ортогональные матрицы $n \times n$ над $\mathbb{R}$ с операцией умножения матриц образуют группу $O_n(\mathbb{R})$

Определение:

Линейный оператор $\mathcal{A} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ называется <u>ортогональным</u>, если

$$\forall x,\ y \in \mathcal{E}\ (\mathcal{A}x,\ \mathcal{A}y) = (x,\ y)$$

То есть говорят, что $\mathcal{A}$ "сохраняет склаярное произведение".

Замечание:

Ортогональный оператор сохраняет норму вектора и угол между векторами.

Доказательство:

$\|\mathcal{A}x\|^2 = (\mathcal{A}x,\ \mathcal{A}x) = (x,\ x) = \|x\|^2$

$\cos(\widehat{\mathcal{A}x,\ \mathcal{A}y}) = \dfrac{(\mathcal{A}x,\ \mathcal{A}y)}{\|\mathcal{A}x\| \cdot \|\mathcal{A}y\|} = \dfrac{(x,\ y)}{\|x\| \cdot \|y\|} = \cos(\widehat{x,\ y})$

Теорема (критерий ортогональности линейного оператора с помощью матрицы):

$\mathcal{A}$ - ортогональный линейный оператор $\Leftrightarrow$ его матрица в ортонормированном базисе ортогональна.

Доказательство:

Необходимость

Дано: $\mathcal{A}_e$ - ортогональный линейный оператор.
Доказать: $\mathcal{A}_e$ - ортогональная матрица в ортонормированном базисе e.

$$(\mathcal{A}x,\ \mathcal{A}y) = (x,\ y) \Rightarrow (\mathcal{A}_e x)^T \Gamma(\mathcal{A}_e y) = x^T E y \Leftrightarrow$$

E - матрица грамма в ортонормированном базисе

$$\Leftrightarrow \forall x,\ y \in \mathcal{E}\ x^T \underbrace{\mathcal{A}_e^T \mathcal{A}_e}_{M} y = x^T E y$$

Тогда по лемме $\mathcal{A}_e^T \mathcal{A}_e = E$, то есть по определению A_e - ортогональная матрица.

Достаточность

Дано: $\mathcal{A}_e$ - ортогональная матрица в ортонормированном базисе
Доказать: $\mathcal{A}$ - ортогональный линейный оператор.

$$\mathcal{A}_e^T \mathcal{A}_e = E \Rightarrow \forall x,\ y \in \mathcal{E}\ x^T (A_e^T A_e) y = x^T E y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (A_e x)^T \Gamma(A_e y) = x^T E y$$

А это матричная запись скалярного произдведения в ортонормированном базисе. То есть

$$\forall x,\ y \in \mathcal{E}\ (\mathcal{A}x,\ \mathcal{A}y) = (x,\ y) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \mathcal{A}$ ортогональный линейный оператор, ч.т.д.

Теорема (критерий ортогональности линейного оператора):

Пусть линейный оператор $\mathcal{A} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$, тогда:
$\mathcal{A}$ - ортогональный линейный оператор $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}$ переводит любой ортонормированный базис $e_1, \ldots,\ e_n$ в ортонормированный $\mathcal{A}e_1, \ldots,\ \mathcal{A}e_n$

Лекция 5 июня

ОНБ = ортонормированный базис.

Теорема ($2^{\text{ой}}$ Критерий ортогональности линейного оператора)

Пусть линейный оператор $\mathcal{A}: \ \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$, тогда $\mathcal{A}$ - ортогональный линейный оператор $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}$ переводит ОНБ $e_1, \dots, \ e_n$ в ОНБ $\mathcal{A}e_1, \dots, \ \mathcal{A}e_n$.

Доказательство

Необходимость:

$$(\mathcal{A}e_1, \ \mathcal{A}e_j) = (e_i, \ e_j) = \begin{cases} 1, \ i = j \\ 0, \ i \neq j \end{cases} = \delta_j^i$$

Достаточность:

Дано: $e_1, \dots, \ e_n$ - ОНБ, $\mathcal{A}e_1, \dots, \ \mathcal{A}e_n$ - тоже ОНБ
Доказать: $\mathcal{A}$ - ортогональный линейный оператор.
$\forall x \in \mathcal{E} \ x \longmapsto (x_1, \dots, \ x_n)^T$ - координаты в базисе e, то есть $x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$.
Тогда $\mathcal{A}x = \mathcal{A}(x_1e_1 + \dots + x_ne_n) = x_1\mathcal{A}e_1 + \dots + x_n\mathcal{A}e_n$, то есть

$$\mathcal{A}x \longmapsto (x_1, \dots, \ x_n)^T - \text{координаты вектора в базисе } \mathcal{A}e$$

$\forall x, \ y \in \mathcal{E}$

$$(\mathcal{A}x, \ \mathcal{A}y) = \underbrace{(\mathcal{A}x)^T_{\mathcal{A}e}}_{=x_e^T} \underbrace{\Gamma_{\mathcal{A}e}}_{=E} \underbrace{(\mathcal{A}y)_{\mathcal{A}e}}_{=y_e} = x_e^T y_e = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$$

$$(x, \ y) = x_e^T \underbrace{\Gamma_e}_{=E} y_e = x_e^T y_e = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$$

Значит $\mathcal{A}$ - ортогональный линейный оператор.

Утверждение:

Матрица перехода от одного ОНБ к другому ОНБ в евклидовом пространстве всегда ортогональна.

Доказательство:

Пусть U - матрица перехода от ОНБ $e = (e_1, \ldots, e_n)$ к ОНБ $b = (b_1, \ldots, b_n)$ тогда

$\Gamma_e = U^T \Gamma_e U = U^T U = E \Rightarrow U -$ ортогональная матрица по определению

5 разложений матриц

1 разложение.

Теорема (о каноническом виде ортогонального оператора)

Для любого ортогонального линейного оператора существует ОНБ, в котором его матрица имеет блочно-диагональный вид.

$$A = \begin{pmatrix} A_{\varphi_1} & \ldots & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & A_{\varphi_n} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & \ldots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \ldots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \ldots & -1 \end{pmatrix}$$

A_{φ_i} - матрица (блок) 2×2 вида $A_{\varphi_i} = \begin{pmatrix} \cos\varphi_i & -\sin\varphi_i \\ \sin\varphi_i & \cos\varphi_i \end{pmatrix}$

То есть существует ОНБ, в котором ортогональный линейный оператор является либо набором вращений, либо набором вращений и отражений. (без доказательства)

Теорема Эйлера

Любое ортогональное преобразование в $\mathbb{R}^3$ обладает ОНБ, в котором его матрица имеет вид

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \hline 0 & 0 & \pm 1 \end{array}\right)_{3\times 3}$$

То есть любое ортогональне преобразование в $\mathbb{R}^3$ является или поворотом на некоторый угол φ (вокруг заданной оси - прямой, проходящей через 0) либо композицией такого поворота и отражения (относительно заданной плоскости)

2 разложение:

Теорема (о спектральном разложении)

Для любой симметрической матрицы A существует такая ортогональная матрица U_1, что $A = U\Lambda U^T$, где

$$\Lambda \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

С собственными значениями оператора с матрицей A на диагонали, повторяющимися соответственно их кратности.
То есть любая симметрическа яматрица ортогональными преобразованиями приводится к диагональному виду.

Доказательство:

Рассмотрим матрицу A как матрицу самосопряжённую линейному оператору в ОНБ $e = \{e_1, \dots,\ e_n\}$
Для самосопряжённого линейного оператора существует ОНБ (из собственных векторов) $f = (f_1, \dots,\ f_n)$, котором его матрица диагональна

$$\Lambda = C_{e\to f}^{-1} A_e C_{e\to f}$$

где $C_{e\to f}$ - матрица перехода от ОНБ e к ОНБ $f \Rightarrow$ она ортогональна
То есть $C_{e\to f}^{-1} = C_{e\to f}^{T}$ возьмём $U = C_{e\to f}$, тогда $\Lambda = U^T A U \Rightarrow A = U\Lambda U^T$

3 разложение:

Теорема (о сингулярном разложении)

(Может встречаться как $SVD = singularvaluedecomposition$).
Для любой (прямоугольной) матрицы $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ имеет место разложение $A_{m\times n} = V_{m\times m}\Sigma_{m\times n}U_{n\times n}^T$, где $U \in O_n(\mathbb{R}),\ V \in O_m(\mathbb{R})$

Σ - диагональна с неотрицательный числами $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \dots \geqslant \sigma_r \geqslant \sigma_{r+1} = \dots = \sigma_{\min(m\times n)} = 0$
на главной диагонали (они называются сингулярными числами и расположены по невозрастанию).

То есть $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \sigma_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$ - того же ранга, что и A

Доказательство:

Рассмотрим матрицу $A^T A_{n\times n}$
Это матрица линейного оператора A^*A в некотором ОНБ. Он самосопряжён, так как матрица $A^T A$ является симметрической:

$$(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$$

При этом все его собственные значения λ_i неотрицательны, так как если $A^*Au = \lambda u$, то $\lambda(u,\ u) = (u,\ \lambda u) = (u,\ A^*Au) = (Au,\ Au) = \|Au\|^2 \geqslant 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \lambda \geqslant 0$
Тогда эти собственные значения λ_i можно записать в виде σ_i^2, то есть $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$, где $i = \overline{1,\ \min(m,\ n)}$.
Числа σ_i принято называть сингулярными числами и сортировать по невозрастанию

$$\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \dots \geqslant \sigma_r \geqslant \sigma_{r+1} = \dots = \sigma_{\min(m\times n)} = 0$$

Где $r = \operatorname{Rg}\Sigma = \operatorname{Rg}A^T A$. Покажем, что $r = \operatorname{Rg}A$. Заметим, что $A^T A = \Gamma(a_1, \dots,\ a_n)$
Зафиксируем базисный минор в матрице A. В матрице $\Gamma(a_1, \dots,\ a_n)$ базисный минор будет в тех же столбцах (и строках) по свойству 5 матрицы Грамма. Тогда $\operatorname{Rg}A = \operatorname{Rg}\Gamma(a_1, \dots,\ a_n) = \operatorname{Rg}A^T A = \operatorname{Rg}AA^T$
Пусть $U_1, \dots,\ U_n$ - ОНБ из собственных векторов $A^T A$, то есть

$$A^T A u_i = \begin{cases} \sigma_i^2 u_i,\ 1 \leqslant i \leqslant r \\ 0,\ r+1 \leqslant i \leqslant n \end{cases}$$

Положим $v_i = \dfrac{Au_i}{\sigma_i}$, $i \leqslant i \leqslant r$

Тогда $(v_i,\ v_j) = \dfrac{(Au_i)^T}{\sigma_i} E \dfrac{Au_j}{\sigma_j} = \dfrac{u_i^T(A^T Au_j)}{\sigma_i\sigma_j} = \dfrac{u_i^T\sigma_j^2 u_j}{\sigma_i\sigma_j} = \dfrac{\sigma_j}{\sigma_i}u_i^T u_j =$

$= \dfrac{\sigma_j}{\sigma_i}(u_i,\ u_j) = \begin{cases} 0,\ i \neq j \\ 1,\ i = j \end{cases} = \delta_i^j$, где $1 \leqslant i,\ j \leqslant r$, где $r = \operatorname{Rg} A \leqslant \min(m,\ n)$

Дополним систему $v_1, \ldots,\ v_r$ векторами $v_{r+1}, \ldots,\ v_m$ до ОНБ в $\mathbb{R}^m$ произвольным образом. Заметим, что при $j = \overline{r+1,\ n}$, $Au_j = 0$, так как $A^T Au_j = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (A^* Au_j,\ u_j) = (0,\ u_j) = 0$ Также это равно $(Au_j,\ Au_j) = \|Au_j\|^2 = 0$

$\Leftrightarrow Au_j = 0$ при $j = \overline{r+1,\ n}$

$A_{m\times n}[u_1, \ldots,\ u_n]_{n\times n} = [\sigma_1 v_1, \ldots,\ \sigma_r v_r,\ 0, \ldots,\ 0] =$

$= \underbrace{[v_1, \ldots,\ v_n]}_{=V}{}_{m\times m} \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \sigma_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 0 \end{bmatrix}$

векторы $v_{r+1}, \ldots,\ v_m$ не влияют на разложение, умножаясь на 0 на даигонали.

А матрицы $U,\ V$ являются ортогональными, так как столбцы U - ОНБ из собственных векторов в $A^T A \Rightarrow U,\ V$ - матрицы перехода от ОНБ к ОНБ, то есть по утверждению ортогональной матрицы

$$AU = U\Sigma \Big| \cdot U^T \text{ справа}$$

Получаем $A = V\Sigma U^T$ - сингулярное разложение

4 разложение:

Утверждедние (о полярном разложении)

Любой линейный оператор в евклидовом пространстве представляется в виде композиции самосопряжённых линейных операторов с неотрицательными собственными значениями и ортогонального линейного оператора.

То есть для любой квадратной матрицы A существует разложение

$$A = S \cdot O$$

Где S - симметрическая матрица (неотрицательно определённая), O - ортогональная матрица. (это матрицы соответствующих линейных операторов в ОНБ).

Замечание:

Это аналог формулы для комплексных чисел $z = re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Доказательство:

Возьмём сингулярное разложение матрицы A

$$A_{n\times n} = V_{n\times n}\Sigma_{n\times n}U_{n\times n}^T$$

Где U, V - ортогональные, Σ - диагональная матрица с неотрицательными числами на диагонали.

$$A = V\Sigma U^T = \underbrace{(V\Sigma V^T)}_{=S}\underbrace{(VU^T)}_{=O} = S\cdot O$$

Где O - ортогональная матрца, как произведение двух ортогональных матриц
S - симметрическая $(S^T = (V\Sigma V^T))^T = (V^T)^T\Sigma^T V^T = V\Sigma V^T$
и у неё неотрицательные собственные значения - сингулярные числа, так как Σ - её диагональный вид в спектральном разложении

Замечание:

Можно и в обратном порядке представить (в виде композиции ортогонального линейного оператора и самосопряжённого линейного оператора):

$$A = V\Sigma U^T = (VU^T)\cdot(U\Sigma U^T) = \hat{O}\hat{S}$$