Семинары по математическому анализу 4 модуль.

Андрей Тищенко

2023/2024

Семинар 4 апреля

Сходимость функциональных последовательностей.

$\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}} \quad x \in E$
$\forall x \in E \quad f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$

Номер 1. a. $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{x+3n+2} = \dfrac{x^2}{\frac{x}{n}+3+\frac{2}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{x^2}{3}$

c. $f_n(x) = n(x^{\frac{1}{n}} - 1),\ E = [1;\ 3]$
$x = 1 \Rightarrow f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
$\dfrac{e^y - 1}{y} \xrightarrow[y\to 0]{} 1$
$f_n(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{n}\ln x} - 1}{\frac{1}{n}\ln x}\ln x \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln x$
Итак, $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln x$

Определение: $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x)$ на $E \Leftrightarrow \sup_E |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon\ \forall n > N_2\ \forall x \in E\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \Rightarrow$
$\Rightarrow \sup_E |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$

Номер 2. a. $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{arctg}(nx)}{\sqrt{n+x}},\ E = [0,\ +\infty)$
$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ поточечно.
$\left|\dfrac{\operatorname{arctg}(nx)}{\sqrt{n+x}}\right| < \left|\dfrac{\pi}{\sqrt{n}}\right| < \varepsilon$

b. $f_n(x) = n\sin\frac{1}{nx},\ E = [1,\ +\infty)$

$f_n(x) \sim n \cdot \dfrac{1}{nx} = \dfrac{1}{x} \Rightarrow f_n(x) \longrightarrow \dfrac{1}{x} = f(x)$

$\left|n\left(\sin\dfrac{1}{nx} - \dfrac{1}{nx}\right)\right| = \dots$

$\sin y = y - \dfrac{y^3}{6} + \dfrac{\sin c}{24}y^4$

$\dots = \left|n\left(\dfrac{1}{nx} - \dfrac{1}{nx} - \dfrac{1}{(nx)^3 6} + \dfrac{\sin c}{24}\dfrac{1}{(nx)^4}\right)\right| \leqslant \dfrac{1}{6n^2} + \dfrac{1}{24n^3} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (тут подставили $x = 1$, получив максимальное значение)

Номер 3. a. $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2},\ E = [0;\ 1]$

$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Рассмотрим последовательность $x_n = \dfrac{1}{n} \Rightarrow$

$\Rightarrow f_n(x_n) = \dfrac{n\frac{1}{n}}{1+n^2\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$

Как дополнительный пример рассмотрели:

x^n на $(0;\ 1) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$x_n = 1 - \frac{1}{n}$

$f_n(x_n) = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{1}{e}$ не сходится абсолютно.

b. $f_n(x) = \ln\left(3 + \dfrac{n^2e^x}{n^4+e^{2x}}\right),\ E = [0;\ +\infty)$

$f(x) = \ln 3$

$f_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = \left|\ln\left(1 + \dfrac{n^2e^x}{3(n^4+e^{2x})}\right)\right|$

Рассмотрим последовательность $x_n = \ln n^2$. Тогда

$g_n(x_n) = \ln\left(1 + \dfrac{n^2n^2}{3(n^4+n^4)}\right) = \ln\dfrac{7}{6}$

Семинар 12 апреля

$f_n(x),\ x \in E$

1. $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ на E.
2. Можно ли переставлять операторы $\lim\limits_{n\to\infty},\ \lim\limits_{x\to x_0},\ \dfrac{d}{dx},\ \displaystyle\int dx$?

То есть выполняется ли:

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x) \stackrel{?}{=} \lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{d}{dx}f_n(x) \stackrel{?}{=} \frac{d}{dx}\underbrace{\lim_{n\to\infty} f_n(x)}_{f(x)}$$

$E = [0;\ 1],\ f_n(x) = x^n \longrightarrow g(x) \begin{cases} 0, & x \in [0;\ 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{x\to 1^-} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$

$\lim\limits_{x\to 1^-}\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = 0$

$0 \neq 1 \Rightarrow$ это неверно.

$f_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows} f(x) \Leftrightarrow \sup\limits_{x\in E}|f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Ряды $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = S(x)$

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\cdot x^{n-1} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(x^n)' \stackrel{?}{=} \left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x^n\right)'$

$S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x) \overset{E}{\rightrightarrows} S(x) \Leftrightarrow$

$\sup\limits_{x\in E} \Leftrightarrow |S_n(x) - S(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\sup\limits_{x\in E} |\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)| \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

изнак Вейерштрассе: Если $u_n(x)$ мажорируется последовательностью a_n: $\forall n\ |u_n(x)| \leqslant a_n$, тогда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится, тогда $S_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows} S(x)$

Задача 1. a. $u_n(x) = \frac{\operatorname{arctg}(n^2x)\cdot\cos(\pi n x)}{n\sqrt{n}},\ E = \mathbb{R}$

$|u_n(x)| \leqslant \frac{\pi}{2n^{\frac{3}{2}}}$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится.

b. $u_n(x) = e^{-n(x^2+\sin x)}$, $E = [1;\ +\infty)$
$e^{-n(x^2+\sin x)} < e^{-n}$, так как

$$\begin{cases} x \geqslant \sqrt{2}: \ x^2 + \sin x \geqslant 2 + \sin x \geqslant 1 \\ 1 \leqslant x < \sqrt{2}: \ \sin x > 0 \Rightarrow x^2 + \sin x > 1 \end{cases}$$

Функциональные ряды

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} C_n \cdot (\underbrace{x-a}_{t})^n \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{+\infty} C_n \cdot t^n$. Множество сходимости такого ряда имеет вид $(-R;\ R)$, $R \in \overline{\mathbb{R}}$, R называется радиусом сходимости.

$R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{C_n}{C_{n+1}}\right|$

$\dfrac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|C_n|}$

2. a. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^2}$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)^2}{n^2}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n^2+2n+1}{n^2}\right| = 1$$

b. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)!}{n!}\right| = \lim_{n\to\infty} |n| = +\infty$$

c. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 5^n x^{3n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 5^n t^n$

$$\frac{1}{R_t} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|5^n|} \Rightarrow \forall t: |t| < \frac{1}{5} \Rightarrow \left|x^3\right| < \frac{1}{5} \Rightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt[3]{5}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow R_x = \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$$

3. a. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n+1}{3n^2+2}(x-1)^n$

$$R = \lim_{m\to\infty} \frac{\frac{2n+1}{3n^2+2}}{\frac{2n+3}{3n^2+6n+5}} = 1 \Rightarrow (0;\ 2)$$

Рассмотрим граничные точки:

$x = 2 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n^2+2} \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3n}$ расходится.

$x = 0 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{3n^2+2}$

$\left(\frac{2n+1}{3n^2+2}\right)' = \frac{2(3n^2+2)-6n(2n+1)}{(3n^2+2)^2} = \frac{-6n^2-6n+4}{(3n^2+2)^2} \Rightarrow$ с какого-то момента она монотонно убывает. Тогда по признаку Лейбница ряд сходится.

4. a. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^n = x \cdot \sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = x \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (x^n)' = x \left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x^n\right) = x \cdot \left(\frac{x}{1-x}\right)' =$
$= x\frac{(1-x)+x}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2}$

Очевидно, что радиус сходимости такой функции равен 1. Положим $x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^2} = 2.$

b. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^{2n+1}} 2n+1 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^{2n}\, dt = \int_0^x \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}\, dt =$
$= \int_0^x \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-t^2)^n\, dt = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \operatorname{arctg} t|_0^x = \operatorname{arctg} x$

5. a. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

Семинар 26 апреля.

Теория:

$$f(\vec{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = A \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{Коши: } \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall\vec{x} \in \overset{\circ}{U}_\delta(\vec{x}_0) \quad |f(\vec{x}) - A| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \text{Гейне: } \forall\vec{x}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \vec{x}_0,\ \vec{x}_n \neq \vec{x}_0 \Rightarrow f(\vec{x}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} A$$

Задача 1. a.

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} \frac{x^2-4y^2}{x^2+2x-2xy-4y} = \lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} \frac{(x-2y)(x+2y)}{(x+2)(x-2y)} = \lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} \frac{x+2y}{x+2} = 1$$

Задача 1. b.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\frac{\sin xy}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\underbrace{\frac{\sin xy}{xy}}_{1}y = 1\cdot 2 = 2$$

Задача 1. c.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}(1+x)^{\frac{1}{x+x^2y}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}(1+x)^{\frac{1}{x}\frac{1}{x+y}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)^{\frac{1}{x+y}} = e^{\frac{1}{0+1}} = e$$

Задача 2.

$$f(x,\ y) = \begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2},\ x^2+y^2\neq 0\\ a,\ \text{иначе}\end{cases}$$

a. Является непрерывной по x.

$$f(x,\ 0) = \begin{cases}\frac{x^2}{x^2},\ x^2\neq 0\\ a,\ x^2=0\end{cases}\quad ,\ \lim_{x\to 0}f(x,\ 0) = 1 \Rightarrow a = 1$$

b. Является непрерывной по y.

$$f(0,\ y) = \begin{cases}-\frac{y^2}{y^2},\ y^2\neq 0\\ a,\ y^2=0\end{cases}\quad ,\ \lim_{y\to 0}f(0,\ y) = -1 \Rightarrow a = -1$$

c. Является непрерывной по кривой $y = \alpha\sqrt{x},\ \alpha\neq 0$

$$f(x,\ \alpha\sqrt{x}) = \begin{cases}\frac{x^2-\alpha x}{x^2+\alpha^2 x},\ x^2+\alpha x\neq 0\\ a,\ x^2+\alpha^2 x = 0\end{cases}\quad ,\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\alpha^2 x}{x^2+\alpha^2 x} = \frac{x-\alpha^2}{x+\alpha^2}\xrightarrow[x\to 0]{} -1 = a$$

d. Является $https://de.pornhub.com/$ непрерывной.

Ни при каких, так как уже при приближении по x и по y значения параметра a для достижения непрерывности должны различаться.

Задача 3. Вычислить пределы:

a.

$$f(x,\ y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,\ y) = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,\ y) = 0,\ \text{аналогично}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y}{x^2+y^2}$$

Знаем $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall \underbrace{(x,\ y) \in \overset{\circ}{U}_\delta(0,\ 0)}_{\sqrt{x^2+y^2}<\delta\Rightarrow|x|<\delta}\ \underbrace{|f(x,\ y) - 0| < \varepsilon}_{\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|<\varepsilon}$

Также знаем $\frac{x^2+y^2}{2} \geqslant xy \Rightarrow \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| \leqslant \left|\frac{x}{2}\right| < \left|\frac{\delta}{2}\right| \leqslant \varepsilon$. Верно при $\delta = 2\varepsilon$

b.

$$f(x,\ y) = x + y\sin\frac{1}{y}$$

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} x + y\sin\frac{1}{y} = \lim_{x\to 0} x = 0$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} x + y\sin\frac{1}{y} = \lim_{y\to 0} y\sin\frac{1}{y} = 0$$

Скорее всего ошибка в задании, так как слагаемые сходятся внезависимости друг от друга, дальше не решали.

c.

$$f(x,\ y) = \log_{1+x}(1 + x + y)$$

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\log_{1+x}(1 + x + y) = \lim_{x\to 0}\log_{1+x}(1 + x) = 1$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\log_{1+x}(1 + x + y) = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1 + x + y)}{\ln(1 + x)} = \infty$$

Дробь стремится к бесконечности, значит переходить к пределу по y переходить нельзя. Пределы не совпадают, значит к многомерному пределу переходить нельзя

Вставка:

Открытость множества $A \longleftrightarrow$ метрика $\longrightarrow$ шары или окрестность.
$\Updownarrow$
$\forall x \in A\ \exists \delta\ U_\delta(x) \subset A$
Замкнут $\Leftrightarrow$ дополнение к открытости.

1. Свойства непрерывных на компакте

Компакт $\overset{\mathbb{R}^n}{\Longleftrightarrow}$ ограниченность, замкнутость.

2. f непрерывна на $E \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \underbrace{f^{-1}(A)}_{\{x \mid f(x) \in A\}}$ - открытый для любого открытого A

Задача 4.

f - непрерывна. $A = \{x \mid f(x) > y_0\}$
Пусть $x_1 \in A$ $f(x_1) > y_0$. Возьмём $\varepsilon_0 = \dfrac{f(x_1) - y_0}{2}$, тогда из определения непрерывности:
$\exists \delta > 0\ \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_1)\ \ |f(x) - f(x_1)| < \varepsilon_0 \Rightarrow f(x) > y_0$, ч.т.д.
Вторую часть задачи решили устно (несложное упражнение).

Задача 5.

Определение:

Точка x называется граничной точкой множества A, если:

$$\forall \delta > 0\ \exists x_0 \in U_\delta(x)\ x_0 \in A \wedge \exists x_1 \in U_\delta(x)\ x_1 \in \overline{A}$$

Семинар 10 мая

Рассматриваем такие штуки: $f(\vec{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

0. Определение, множество значений, линии уровня.

1. $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f(\vec{x}) = A$.

Гейне:
$$\forall \vec{x}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \vec{x}_0 \quad \vec{x}_n \neq \vec{x}: \ f(\vec{x}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} A$$

$\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)$

$$\forall i \ x_n^i \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0^i \Leftrightarrow \rho(\vec{x}_n;\ \vec{x}_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \left|x_n^i - x_0^i\right|^2 \to 0$$

2. Дифференцируемость

В одномерном случае:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Leftrightarrow f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \overline{o}(x - x_0)$$

В многомерном:
Определение: $f(x)$ называется дифференцируемой в точке $\vec{x}_0$:

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} A_i(x^i - x_0^i) + \overline{o}\big(\rho(\vec{x};\ \vec{x}_0)\big)$$

Определение: $\dfrac{\vartheta f}{\vartheta x_i} = \lim\limits_{x^i\to x_0^i} \dfrac{f(x_0^i), \ldots,\ x^i, \ldots,\ x_0^i - f(\vec{x}_0)}{x^i - x_0^i}$
Пример:
$f(x,\ y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$
$f(x,\ 0) = \frac{0}{x^2}$
$\dfrac{\vartheta f(x,\ 0)}{\vartheta x} = 0 \quad \dfrac{\vartheta f(0,\ y)}{\vartheta y} = 0$

Достаточное условие дифференцируемости

1. $\dfrac{\vartheta f}{\vartheta x_i}$ $\exists$ окрестность точки $\vec{x}_0$
2. Частные производные в точке $\vec{x}_0$ непрерывны
$\Rightarrow$ функция дифференцируема в точке $\vec{x}_0$

Задача 1.

$f(x,\ y) = x + y^2 + \ln(x + y^2)$
$\frac{\vartheta f(x,\ y)}{\vartheta x} = 1 + \frac{1}{x+y^2} \quad \frac{\vartheta f(x,\ y)}{\vartheta y} = 2y + \frac{2y}{x+y^2}$
В окрестности точки $(0,\ 1)$ существуют частные производные (так как точка лежит в области определения).
$(x_n,\ y_n) \to (0,\ 1)$, непрерывность есть, так как частные производные непрерывны на области определения, значит функция дифференцируема.
$df(x,\ y)\Big|_{\substack{x=0\\y=0}} = 2dx + 4dy$

Задача 2. a.

$f(x,\ y) = \sqrt[3]{xy}$
$\frac{\vartheta f}{\vartheta x} = \sqrt[3]{y}\frac{1}{3\sqrt[3]{x}}, \quad \frac{\vartheta f}{\vartheta y} = \sqrt[3]{x}\frac{1}{3\sqrt[3]{y}}$
$\frac{\vartheta f}{\vartheta x}\frac{\vartheta f}{\vartheta y}\Big|_{\substack{x=0\\y=0}} = 0.$
Очевидно:
$f(x,\ 0) \equiv 0\ \forall x$
$f(0,\ y) \equiv 0\ \forall y$
$\sqrt[3]{xy} = 0 + Ax + By + \overline{o}(\sqrt{x^2 + y^2})$
При этом $A,\ B$ являются частными производными, то есть $\sqrt[3]{xy} = \overline{o}(\sqrt{x^2 + y^2})$
$$\frac{\sqrt[3]{xy}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \xrightarrow[(x,\ y)\to(0,\ 0)]{} 0$$
Положим $x = y \Rightarrow \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \xrightarrow[x\to 0]{} \infty$, то есть дифференцируемости нет.

Задача 2. b.

$f(x,\ y) = \cos\sqrt[3]{xy}$
$\frac{\vartheta f(x,\ y)}{\vartheta x} = -\sin\sqrt[3]{xy} \cdot \frac{\sqrt[3]{y}}{3\sqrt[3]{x^2}}$
$\frac{\vartheta f(x,\ y)}{\vartheta y} = -\sin\sqrt[3]{xy} \cdot \frac{\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{y^2}}$
Частные производные есть, в точках $(x,\ 0)$ и $(0,\ y)$ они равны 0, так как синус обратится в тождественную 1.
$\cos\sqrt[3]{xy} = 1 + Ax + By + \overline{o}(\rho(x,\ y))$
$\cos\sqrt[3]{xy} - 1 = \overline{o}(\sqrt{x^2 + y^2})$
$$\frac{\cos\sqrt[3]{xy} - 1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{-\frac{\sqrt[3]{x^2y^2}}{2} + \overline{o}(1)(\sqrt[3]{x^2y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leqslant \ldots$$

Из неравенства Коши $\sqrt{x^2+y^2} \geqslant \sqrt{2xy}$

$\dots \leqslant \dfrac{-\frac{(xy)^{\frac{2}{3}}}{2} + \overline{o}(1)(\sqrt[3]{xy})^2}{\sqrt{2xy}} \xrightarrow[(x,\ y)]{} 0$

Задача 3.

$f(u,\ v),\ f'_u\ f'_v$

$g(x,\ y) = f(x\cos y,\ x\sin y)$

$\dfrac{\vartheta g}{\vartheta x} = \dfrac{df}{du}\dfrac{du}{dx} + \dfrac{df}{dv}\dfrac{dv}{dx} = f'_u(x\cos y)'_x + f'_v(x\sin y)'_x = f'_u\cos y + f'_v\sin y$

Производная по направлению

$\vec{e}(e_1, \dots,\ e_n),\ |\vec{e}| = 1$

$f(\vec{x}_0 + t\vec{e}) = g(t)$

Семинар 17 мая.

Задача 5.

$\operatorname{arctg}\frac{xy}{z^2},\ M(0;\ 1;\ 2)$

$\overrightarrow{grad\ f} = \overrightarrow{\bigtriangledown\ f} = (\frac{1}{4};\ 0;\ 0)$

1\. $\frac{\vartheta f}{\vartheta x} = \frac{1}{\left(\frac{xy}{z^2}\right)^2+1} \cdot \frac{y}{z^2}\Big|_M = \frac{1}{4}$

2\. $\frac{\vartheta f}{\vartheta y} = \frac{1}{\left(\frac{xy}{z^2}\right)^2+1} \cdot \frac{x}{z^2}\Big|_M = 0$

3\. $\frac{\vartheta f}{\vartheta z} = \frac{1}{\left(\frac{xy}{z^2}\right)^2+1} \cdot \frac{-2}{z^3}xy\Big|_M = 0$

Задача 4.

$f(x,\ y,\ z) = x^3 + 2xy^2 + 3yz^2$

$\vec{l} = (2,\ 2,\ 1),\ M = (3,\ 3,\ 1)$

$\frac{\vartheta f}{\vartheta x} = 3x^2 + 2y^2$

$\frac{\vartheta f}{\vartheta y} = 4xy + 3z^2$

$\frac{\vartheta f}{\vartheta z} = 6yz$

$\overrightarrow{\bigtriangledown\ f} = (45,\ 39,\ 18)$

$\vec{l}_n = \frac{(2,\ 2,\ 1)}{\sqrt{9}} = \left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right)$

$\frac{\vartheta f}{\vartheta l_n} = 30 + 26 + 6 = 62$ (скалярное произведение векторов $\vec{l}_n,\ \overrightarrow{\bigtriangledown\ f}$)

Задача 6.

$f(x,\ y) = x^2 + y^2$. Возьмём произвольную точку $(x_0,\ y_0)$. Тогда возьмём вектор единичного размера:

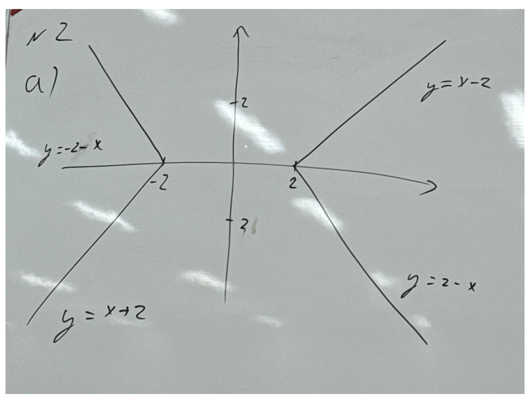
$$\vec{n} = \left\{ \frac{x_0}{\sqrt{c}},\ \frac{y_0}{\sqrt{c}} \right\}$$

Посчитаем частные производные:
$\frac{\vartheta f}{\vartheta x} = 2x,\ \frac{\vartheta f}{\vartheta y} = 2y \Rightarrow \overrightarrow{\bigtriangledown f} = (2x_0;\ 2y_0)$

Неявно заданные функции

$F(y,\ \vec{x}) = 0$

Задача 2. a.



Рисуночки, ура.

Задача 2. b.

Задача 2. c.

Семинар 24 мая

Задача 4.

$x + y(x) = xy^2(x) - x^2y(x), \quad |y| < |x|$
Продифференцируем по x: $1 + y'_x = y^2 + 2xy \cdot y'_x - x^2y'_x - 2xy \Rightarrow$
$\Rightarrow y'_x = \dfrac{y^2 - 2xy - 1}{1 - 2xy + x^2} = 0,\ |y| < |x|$

$\begin{cases} \dfrac{y^2-2xy-1}{1-2xy+x^2}=0 \\ x+y=xy^2-x^2y \end{cases}$
$x=\dfrac{y^2-1}{2y}$
$x+y=xy^2-x^2y$
$\frac{y^2-1}{2y}+y=\frac{y^2-1}{2y}y^2-\left(\frac{y^2-1}{2y}\right)y$
Решение системы было подсказано:
$y=\pm\sqrt{3\pm2\sqrt{2}}$
Вспоминаем факты из прошлого:
$\begin{cases} y'_x=0 \\ y''_{xx}>0 \end{cases}$ - точка минимума
$\begin{cases} y'_x=0 \\ y''_{xx}<0 \end{cases}$ - точка максимума
Дифференцируем второй раз (при этом в наших точках первая производная зануляется):
$y''_{xx}-2y''_{xx}xy+x^2y''_{xx}=-2y-2x\underset{=0}{y'_x}$
$y''_{xx}=\dfrac{-2y}{1-2xy+x^2}=\dfrac{2y}{2xy-1-x^2}$

Задача 5.

Хотим $u=f(x,\ y)$.

$$u^3-2u^2x+uxy-2=0$$

Выясним, выполняется ли теорема о неявной функции.

$$\frac{\vartheta F}{\vartheta u}=3u^2-4ux+xy\Big|_{\substack{x=1\\y=1}}=3u^2-4u+1$$

Найдём u с помощью изначального уравнения, подставив $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$:

$$u^3-2u^2+u-2=(u-2)(u^2+1)\Rightarrow u=2$$

Тогда $\dfrac{\vartheta F}{\vartheta u}=12-8+1=5\neq0$
$F(u,\ x,\ y)=0\longrightarrow u=u(x,\ y)$

Тогда изначальное равенство выглядит так:

$$(*) = u^3(x,\ y) - 2u^2(x,\ y)x + u(x,\ y)xy - 2 = 0$$

$$\frac{\vartheta(*)}{\vartheta x} = 3u^2u'_x - 4uu'_x x - 2u^2 + u'_x xy + uy = 0$$

Подставим найденное значение u и заданные значения $x,\ y$:

$$12u'_x - 8u'_x - 8 + u'_x + 2 = 0 \Rightarrow u'_x = \frac{6}{5}$$

Задача 6.

Найти в точке $(x,\ y,\ u,\ v) = (1,\ 0,\ 1,\ -2)$ частные производные $u = f_1(x,\ y),\ v = f_2(x,\ y)$, заданной системой:

$$\begin{cases} xu + yv - u^3 = 0 \\ x + y + u + v = 0 \end{cases}$$

Хотим, чтобы определитель матрицы Якоби не занулялся, то есть

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\vartheta F}{\vartheta u} & \dfrac{\vartheta F}{\vartheta v} \\ \dfrac{\vartheta G}{\vartheta u} & \dfrac{\vartheta G}{\vartheta v} \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x - 3u^2 & y \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

Продолжаем решение:

$$\begin{cases} xu(x,\ y) + yv(x,\ y) - u^3(x,\ y) = 0 \\ x + y + u(x,\ y) + v(x,\ y) = 0 \end{cases}$$

Дифференцируем по y:

$$\begin{cases} xu'_y + v_y + v'_y y - 3u^2u'_y = 0 \\ u'_y + v'_y + 1 = 0 \end{cases}$$

Подставим значения $(1,\ 0,\ 1,\ -2)$

$$\begin{cases} u'_y - 2 - 3u'_y = 0 \\ u'_y + v'_y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'_y = -1 \\ v'_y = 0 \end{cases}$$

Нахождение экстремумов.

$\vec{x}_0$ называется точкой минимума, если $f(\vec{x}_0)$ самое маленькое в $U_\delta(\vec{x}_0)$

Задача 1.

$u(x,\ y) = x^3 + 3xy^2 - 3yx - 36y + 26,\ \frac{\vartheta u}{\vartheta x} = 3x^2 + 3y^2 - 39,\ \frac{\vartheta u}{\vartheta y} = 6xy - 36 = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ xy = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \end{cases}$$

Составим матрицу Геса: $\begin{pmatrix} u''_{xx} & u''_{xy} \\ u''_{xy} & u''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{pmatrix}$

Если матрица Геса положительно определена $\Rightarrow \vec{x}_0$ - точка минимума.
Если она отрицательно определена $\Rightarrow \vec{x}_0$ - точка максимума.
Если она знакопеременна $\Rightarrow \vec{x}_0$ - не экстремум.
Итак, можно сделать вывод:

$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$ - не экстремум

$\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$ - максимум

$\begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \end{cases}$ - не экстремум

$\begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \end{cases}$ - минимум

Семинар 31 мая

Задача 1.

Найти условные экстремумы функции $u = xyz$ относительно уравнений связи

$$x + y + z = 6 \qquad x + 2y + 3z = 6$$

Получаем систему:

$$\begin{cases} u = xyz \\ 6 - y - 2z = 6 \\ y = 6 - 2y - 3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = z(-2z)(6+z) = -2z^3 - 12z^2 \\ y = -2z \\ x = 6 + z \end{cases} \Rightarrow u' = -6z^2-$$

$24z = -6z(z+4)$

То есть минимум при $z = -4$, максимум при $z = 0$ Ответ: точка минимума $(2,\ 8,\ -4)$, точка максимума $(6,\ 0,\ 0)$

Задача 2.

Найти условные экстремумы функции $f(x,\ y) = 6 - 5x - 4y$ относительно уравнения связи:

$$x^2 - y^2 - 9 = 0$$

Если явно не выражается, то нужно составлять функцию Лагранжа:

$$L(\vec{x},\ \vec{\lambda}) = f_0(\vec{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x)$$

f_i - уравнение связи. λ_i - коэффициенты для зануления набора f_i (уравнения связи линейно зависимы)

Если $\vec{x}_0$ - точка условного локального экстремума, то $\exists \vec{\lambda}_0$

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\vartheta L}{\vartheta x_i}\right|_{\substack{\vec{x} \\ \vec{\lambda}_0}} = 0 \\ f_i(\vec{x}_0) = 0 \end{cases}$$

Составим уравнение Лагранжа:

$6 - 5x - 4y = f(x,\ y)$

$x^2 - y^2 - 9 = 0$

$L(\vec{x},\ \vec{\lambda}) = 6 - 5x - 4y + \lambda(x^2 - y^2 - 9)$

$\dfrac{\vartheta L}{\vartheta x} = -5 + 3\lambda x = 0$

$\dfrac{\vartheta L}{\vartheta y} = -4 - 2\lambda y = 0$

$$\begin{cases} -5 + 3\lambda x = 0 \\ -4 - 2\lambda y = 0 \\ x^2 - y^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5}{2\lambda} \\ y = -\dfrac{4}{2\lambda} \\ \dfrac{25}{4\lambda^2} - \dfrac{16}{4\lambda^2} = 9 \qquad (1) \end{cases}$$

$$(1) : \frac{1 - 4\lambda^2}{4\lambda^2} = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 5 \\ y = -4 \\ \lambda = \dfrac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -5 \\ y = 4 \\ \lambda = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \end{array} \right.$$

Посчитаем Гессониан для каждой из λ:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & -2\lambda \end{pmatrix}$$

Тогда для $\lambda = \dfrac{1}{2}$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ не является экстремумом, так как знакочередующаяся (начиная с плюса).
Для $\lambda = -\dfrac{1}{2}$: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ не является экстремумов, так как оба минора отрицательные.

Задача 3. а.

Найти наибольшее и наименьшее значение функции на множестве заданном ограничением:

$$f(x,\ y) = (y^2 - x^2) \cdot e^{1-x^2+y^2} \qquad x^2 + y^2 \leqslant 4$$

$\dfrac{\vartheta f}{\vartheta x} = (-2x)e^{1-x^2+y^2} + (y^2 - x^2)(-2x)e^{1-x^2+y^2} = 0$
$\dfrac{\vartheta f}{\vartheta y} = (2y)e^{1-x^2+y^2} + (y^2 - x^2)2ye^{1-x^2+y^2} = 0$
$\begin{cases} e^{1-x^2+y^2}(2y + 2y^3 - 2yx^2) = 0 \\ e^{1-x^2+y^2}(-2x + 2x^3 - 2xy^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(y^2 - x^2 + 1) = 0 \\ x(x^2 - y^2 - 1) = 0 \end{cases}$
При $y = 0$: $\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \\ x = 0 \end{array}\right.$.
При $x = 0$: $y = 0$
При $x,\ y \neq 0$: $x^2 - y^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = y^2 + 1$
Рассмотрим значения функции от $x^2 - y^2$ при таких значениях (не забываем про $x^2 + y^2 \leqslant 4$).

$$f(0) = e \cdot 0 = 0$$

$$f(1) = -1$$

Рассмотрим граничные точки:
$f_0(x,\ y) = (y^2 - x^2)e^{1-x^2+y^2} = 0$
$f_1(x,\ y) = x^2 + y^2 - 4 = 0 \Rightarrow y^2 = 4 - x^2$

$f_0(x) = (4-2x^2)e^{5-2x^2} \Rightarrow f_0'(x) = -4xe^{5-2x^2} - 4x(4-2x^2)e^{5-2x^2} =$

$= e^{5-2x^2}(-4x)(1+4x-2x^2) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{c} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{\dfrac{5}{2}} \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow f_0(0) = 4e^5,\ f\left(\pm\sqrt{\dfrac{5}{2}}\right) = -1e^0 = -1$

Стоит поверить desmos'у наслово, что точки $(0,\ \pm 1)$ являются локальными максимумами, а точки $\left(\sqrt{\frac{5}{2}},\ 0\right)$ - локальные минимумы.

Задача 3. b.

$$f(x,\ y) = 3 + 2xy \qquad f_1(x,\ y) = x^2 + y^2 \leqslant 1$$

$\dfrac{\vartheta f}{\vartheta x} = 2y$

$\dfrac{\vartheta f}{\vartheta t} = 2x$

Зануляется в точке $0,\ 0$. $f(0,\ 0) = 3$

$: (\vec{x},\ \vec{\lambda}) = 3 + 2xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$

$\dfrac{\vartheta L}{\vartheta x} = 2y + 2\lambda x = 0$

$\dfrac{\vartheta L}{\vartheta y} = 2x + 2\lambda y = 0$

$x^2 + y^2 - 1 = 0$

$\begin{cases} y = -\lambda x \\ 2x - 2\lambda^2 x = 0 \to \left[\begin{array}{l} x = 0 \to y = 0 \\ \lambda^2 = 1 \to \left[\begin{array}{l} \lambda = 1 \\ \lambda = -1 \end{array}\right. \end{array}\right. \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$

Отсюда получаем ответ:

$$2|xy| \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 1$$

$$f(x,\ y) \in [2,\ 4] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{array}\right.$$