

Теория вероятностей.

Андрей Тищенко @AndrewTGk

2024/2025

Лекция 6 сентября.

Формула оценки

$random() \% 11$

Накоп = $0.1 \text{ИДЗ} + 0.15 \text{РС} + 0.25 \text{КР} + 0.5 \text{Экзамен}$

ИДЗ = индивидуальное домашнее задание (выдаётся через вики курса). РС = работа на семинарах.

КР = контрольные работы.

Учебник:

Кибзун А. К., Горяинова Е. Р., Наумов А. В. “Теория вероятности и математическая статистика. Базовый курс с примерами и задачами” 2013 или 2014 года.

История

Наука появилась из-за азартных игр. Кавалер Демире захотел составить математическую базу для расчётов в азартных играх. Перечисление многих известных математиков, работавших в этой области. Колмогоров легенда теорвера, придумал определение вероятности, основал СУНЦ, ездил на лыжах.

Основные понятия

Определения

Теория вероятности — раздел математики, изучающий математические модели массовых случайных явлений.

Массовость — за n повторений эксперимента, вероятность каждого исхода стабилизируется возле какого-то значения p_i .

Всякое случайное событие обладает массовостью.

Обозначения

$\omega_1, \dots, \omega_n$ — элементарные случайные события.

$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ — пространство элементарных событий.

$\forall \Omega \forall A \quad A \subset \Omega \Leftrightarrow A$ — случайное событие.

$\forall A \forall \Omega \quad \Omega \subseteq A \Leftrightarrow A$ — достоверное событие.

$\forall A \forall \Omega \quad \Omega \cap A = \emptyset \Leftrightarrow A$ — невозможное событие.

Операции с событиями

$A, B \subset \Omega$

Произведение

Произведением случайных событий A, B называется событие $A \cdot B = A \cap B$

Сумма

Сумма $A + B$ есть событие $A \cup B$.

Разность

Разность множеств $A \setminus B$.

Дополнение

$\bar{A} = \Omega \setminus A$.

Свойства операций

1. $A + A = A$
2. $A \cdot A = A$
3. $A \cdot \Omega = A$
4. $A + \Omega = \Omega$
5. $A + B = B + A$
6. $A \cdot B = B \cdot A$
7. $A + (B + C) = (A + B) + C$
8. $\overline{\bar{A}} = A$
9. $\overline{\overline{\bar{A}}} = \bar{A}$
10. $\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$

Определение

Класс подмножеств \mathcal{A} на пространстве событий Ω называется σ -алгеброй событий, если:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. $\forall A \subset \Omega \quad A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$
3. $\forall A_i \quad A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{A} \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A} \wedge \prod_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

Классическое определение вероятности

Исход = элементарное случайное событие.

1. Конечное число исходов эксперимента.
2. Исходы взаимно исключающие.
3. Исходы равновозможны.

Тогда $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

$|A|$ - мощность множества исходов, принадлежащих A .

1. $P(A) \geq 0$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $A \cdot B = \emptyset \Rightarrow P(A + B) = P(A) + P(B)$

Задача

В коробке 10 красных и 20 чёрных шаров.

Событие $A = \{\text{вытащить красный шар}\} \Rightarrow P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$

Лекция 13 сентября.

Геометрическое определение вероятности

Ω является подмножеством конечной меры в \mathbb{R} или \mathbb{R}^2 , или ... или \mathbb{R}^n . $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$, μ - мера (длина, площадь, n-мерный объём).

Свойства:

1. $P(A) \geq 0 \quad \forall A \subseteq \Omega$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $A \cdot B = \emptyset \Rightarrow P(A + B) = P(A) + P(B)$

Задача

Ромео и Джульетта хотят встретиться между полуночью и часом ночи, но не могут договориться о времени, поэтому они приходят в произвольный момент времени на этом отрезке и ждут 15 минут, после чего уходят. С какой вероятностью они не встретятся? x - время прихода Дж.

y - время прихода Ромео.

Тут должен быть балдёжный график, но писать это долго.

$x, y \in [0, 1]$, в часах.

$$|x - y| \leq \frac{1}{4}$$

$$P(\bar{A}) = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}}{1} = \frac{9}{16} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}.$$

В этом определении мы избавились от конечности множества исходов.

Частотное (статистическое) определение вероятности

Определение

Пусть опыт проведён N раз, а событие A произошло n_A раз. Тогда $\frac{n_A}{N}$ называется частотой события A .

Тогда вероятность $P(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_A}{N}$

Аксиоматическое определение А. Н. Колмогорова (легенды, миллионера, плебоя и филантропа)

Определение

Пусть \mathcal{A} — σ алгебра событий на пространстве Ω . Назовём вероятностью числовую функцию $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^1$, удовлетворяющую следующим аксиомам:

1. $\forall A \in \mathcal{A} \quad P(A) \geq 0$
2. $P(\Omega) = 1$

$$3. \forall A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \quad (\forall i, j \in \mathbb{N} \quad A_i \cap A_j \neq \emptyset \Rightarrow i = j) \Rightarrow P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Определение

Число $P(A)$, $A \in \mathcal{A}$ называется вероятностью события A .

Определение

(Ω, \mathcal{A}, P) называется вероятностным пространством.

Свойства $P(A)$

1. $P(A) = 1 - P(\overline{A})$.
 $\Omega = A + \overline{A} \wedge A \cap \overline{A} = \emptyset$
 $P(\Omega) = P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) \Rightarrow P(A) = 1 - P(\overline{A})$
2. $P(\emptyset) = 0$
 $\overline{\Omega} = \emptyset \Rightarrow P(\Omega) + P(\emptyset) = 1 \Rightarrow P(\emptyset) = 1 - 1 = 0$
3. $A \subseteq \Omega \wedge B \subseteq \Omega \wedge A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
 $B = A + (B \setminus A) \Rightarrow P(B) = P(A + (B \setminus A)) = P(A) + \underbrace{P(B \setminus A)}_{\geq 0} \Rightarrow$
 $\Rightarrow P(A) \leq P(B)$
4. $0 \leq P(A) \leq 1$
 По первой аксиоме $P(A) \geq 0$
 Из третьего $A \subseteq \Omega \wedge \Omega \subseteq \Omega \wedge A \subseteq \Omega \Rightarrow P(A) \leq P(\Omega) = 1$
5. Формула (теорема) сложения вероятностей:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$$

$$\begin{cases} A = A \cdot \Omega = A \cdot (B + \overline{B}) = AB + A\overline{B} \Rightarrow P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB) \\ B = B \cdot \Omega = B \cdot (A + \overline{A}) = BA + B\overline{A} \Rightarrow P(B\overline{A}) = P(B) - P(AB) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A + B = AB + A\overline{B} + B\overline{A} \Rightarrow P(A + B) =$$

$$= P(AB) + P(A) - P(AB) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Замечание: тут не было $2(AB)$, потому что сложение по определению есть объединение, поэтому одного экземпляра достаточно.

Для трёх слагаемых:

$$P((A + B) + C) = P(A + B) + P(C) - P((A + B) \cdot C) =$$

$$= P(A) + P(B) - P(AB) + P(C) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

$$P(A_1 + \dots + A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i \leq j} P(A_i A_j) + \sum_{i \leq j \leq k} P(A_i A_j A_k) + \dots$$

$$\dots + (-1)^{n-1} P(A_1, \dots, A_n)$$

Задача

$$A_1 = \{\text{Решка при 1-ом броске}\}, A_2 = \{\text{Решка при 2-ом броске}\}$$

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Определение

Пусть $P(B) \neq 0$, тогда условная вероятность события A при условии B

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Определение

События A, B называются независимыми, если $P(A/B) = P(A)$

Отсюда следует: $\frac{P(AB)}{P(B)} = P(A) \Rightarrow P(AB) = P(A)P(B)$

Определение

События A_1, A_2, \dots, A_n называются независимыми в совокупности, если:

$$\forall k = 2, \dots, n \quad \forall i_1, \dots, i_k \quad (1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n) \Rightarrow P(A_{i_1}, \dots, A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})$$

Лекция 20 сентября.

Воспоминания

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \quad P(AB) = P(B)P(A/B) = P(A)P(B/A)$$

Теорема об умножении вероятностей

Пусть $(P(A_1, \dots, A_n)) > 0$, тогда:

$$P(A_1, \dots, A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2) \dots P(A_n/A_1 \dots A_{n-1})$$

Доказательство

$$\begin{aligned} & \begin{cases} B_{n-1} = A_1 \dots A_{n-1} \\ B_{n-2} = A_1 \dots A_{n-2} \\ \dots \\ B_1 = A_1 \end{cases} \Rightarrow P(\underbrace{A_1 \dots A_{n-1}}_{B_{n-1}} A_n) = P(\underbrace{B_{n-1}}_{B_{n-2} A_{n-1}}) P(A_n/B_{n-1}) = \\ & = P(B_{n-2} A_{n-1}) P(A_n/A_1 \dots A_{n-1}) = P(B_{n-2}) P(A_{n-1}/B_{n-2}) P(A_n/A_1 \dots A_{n-1}) = \\ & = P(A_1) P(A_2/A_1) P(A_3/A_1 A_2) \dots P(A_n/A_1 \dots A_{n-1}) \end{aligned}$$

Схема Бернулли (Биномиальная схема)

Последовательность испытаний, такая что:

1. Исход любого испытания двоичен $\forall A \quad A \vee \bar{A} \equiv 1$
2. Испытания независимы в совокупности.
3. $P(A) = p$ не изменяется от опыта к опыту.

Например, подбрасывание монеты.

Положим У - успех, Н - неудача.

В таком случае k успехов можно получить $P_n(k) C_n^k p^k \underbrace{(1-p)^{n-k}}_{=q}$ способами

Доказательство

$$\begin{aligned} P(\underbrace{Y \dots Y}_k \underbrace{H \dots H}_{n-k}) &= p^k q^{n-k} \\ P(\{\underbrace{Y \dots Y}_k \underbrace{H \dots H}_{n-k}\}) + P(\underbrace{H Y \dots Y}_k \underbrace{H \dots H}_{n-k}) + \dots + P(\underbrace{H \dots H}_{n-k} \underbrace{Y Y \dots Y}_k) &= \\ = C_n^k p^k q^{n-k} & \\ \sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k} &= 1 \end{aligned}$$

Следствие

$$\text{При } k_1 \leq k \leq k_2: \quad P_n(k) = \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k q^{n-k}$$

Обозначение

Если максимальная вероятность достигается при $k = m$, то есть

$$C_n^m p^m q^{n-m} = \max_{0 \leq k \leq n} C_n^k p^k q^{n-k}$$

Тогда можно сказать $m = \operatorname{argmax}_{0 \leq k \leq n} P_n(k)$

Можно посчитать без вычисления всех значений:

$$m = \begin{cases} [(n+1)p], & \text{если } (n+1)p - \text{нецелое число} \\ (n+1)p \wedge (n+1)p - 1, & \text{иначе} \end{cases}$$

Полиномиальная схема испытаний

1. Проводится n независимых опытов
2. В каждом опыте m взаимноисключающих исходов (n_1, \dots, n_m)
3. $P(n_1) = p_1, P(n_2) = p_2, \dots, P(n_m) = p_m, \quad p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1$

$$\sum_{i=1}^m n_i = n$$

$$P_n(n_1, n_2, \dots, n_m) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_m!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_m^{n_m}$$

Определение

Пусть $H_1, \dots, H_n \subset \Omega$, события H_1, \dots, H_n называются полной группой событий (гипотезами), если

1. $\forall i, j \quad i \neq j \Rightarrow H_i \cdot H_j = \emptyset$
2. $H_1 + \dots + H_n = \Omega$

Формула полной вероятности

Пусть H_1, \dots, H_n — полный граф событий, $A \subset \Omega$

$P(A) = P(A \cdot \Omega) = P(A \cdot (H_1 + \dots + H_n)) = P(AH_1 + \dots + AH_n)$, так как события H_1, \dots, H_n независимы, можно сделать переход:

$$P(AH_1 + \dots + AH_n) = P(AH_1) + \dots + P(AH_n) = P(H_1)P(A/H_1) + \dots + P(H_n)P(A/H_n)$$

$$\text{Получаем } P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + \dots + P(H_n)P(A/H_n)$$

Задача

Студент выучил m билетов из n . Посчитать вероятность вытянуть выученный билет при заходе первым, вторым.

$A = \{\text{студент вытащит выученный билет}\}$

$H_1 = \{\text{Другой студент вытащит выученный нашим студентом билетом}\}$

$H_2 = \{\text{Наш студент вытащит невыученный билет}\}$

$$P(H_1) = \frac{m}{n}, \quad P(H_2) = \frac{n-m}{n}$$

$$P(A/H_1) = \frac{m-1}{n-1}, \quad P(A/H_2) = \frac{m}{n-1}$$

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) = \frac{m}{n} \frac{m-1}{n-1} + \frac{n-m}{n} \frac{m}{n-1} = \frac{m}{n}$$

Формула Байеса

H_1, \dots, H_n — гипотезы

$P(H_1), \dots, P(H_n)$ — априорные вероятности.

Произошло событие A

$P(H_1/A), \dots, P(H_n/A)$ — апостериорные вероятности.

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(A)} = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{k=1}^n P(H_k)P(A/H_k)}$$

$$\sum_{i=1}^n P(H_i/A) = 1$$

Лекция 27 сентября

H_1, \dots, H_n — ПГС

$P(H_1), \dots, P(H_n)$ — априорные вероятности.

Произошло событие A .

$P(H_1/A), \dots, P(H_n/A)$ — апостериорные вероятности.

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{k=1}^n P(H_k)P(A/H_k)}$$

Задача

Завод 1 поставляет 65% продукции. При этом 90% его продукции не имеет дефектов.

Завод 2 поставляет 35% продукции. При этом 80% его продукции не имеет дефектов.

Какой завод более вероятно поставит продукт с дефектом?

$A = \{\text{Произведён дефектный продукт}\}$

$H_1 = \{\text{Прибор изготовил завод 1}\}, P(H_1) = 0.65, P(A/H_1) = 0.1$

$H_2 = \{\text{Прибор изготовил завод 2}\}, P(H_2) = 0.35, P(A/H_2) = 0.2$

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2)} = \frac{0.1 \cdot 0.65}{0.1 \cdot 0.65 + 0.2 \cdot 0.35} = \frac{65}{135}$$

$P(H_2/A) = \frac{70}{135} > P(H_1/A)$, получается деталь с дефектом с большей вероятностью поступила со второго завода.

Случайные величины

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6\}$$

$$\xi = \{1, 2, \dots, 6\}$$

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots\}$$

$$\xi = \{1, 2, 3, \dots\}$$

Я понятия не имею, что значат эти множества, но на доске мы их написали со словами: "Давайте покидаем монетку".

Случайная величина $\xi : \Omega \longrightarrow R^1$

Определение

Случайной величиной ξ называется числовая функция $\xi : \Omega \longrightarrow R^1$, которая удовлетворяет условию:

$$\forall x \{ \omega; \xi(\omega) \leq x \} \in \mathcal{A}$$

Определение

Функцией распределения (вероятностей) случайной величины ξ называется

$$F_{\xi}(x) = P(\omega; \xi(\omega) \leq x) = P(\xi \leq x)$$

Свойства $F(x)$

1. $F(+\infty) = 1, F(-\infty) = 0 \Rightarrow 0 \leq F(x) \leq 1$. На самом деле аргумент $F(x)$ принадлежит R^1 , но видимо бесконечность теперь число.

2. Пусть $x_1 < x_2$, тогда $F(x_1) \leq F(x_2)$.

Доказательство:

$$F(x_2) = P(\xi \leq x_2), C = \{\omega : \xi(\omega) \leq x_2\}, A = \{\omega : \xi(\omega) \leq x_1\},$$

$$B = \{\omega : x_1 < \xi(\omega) \leq x_2\}. C = A + B, P(C) = P(A) + P(B)$$

$$F(x_2) = P(\xi \leq x_2) = P(\underbrace{\xi \leq x_1}_A) + P(B) = F(x_1) + P(B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(x_2) \geq F(x_1)$$

3. $F(x_0) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} F(x_0 + \varepsilon)$

Определение

Дискретная случайная величина (тут реально ничего не было даже на лекции).

Определение

Пусть случайная величина ξ — дискретная. Рядом распределения ξ называется

ξ	x_1	x_2	\dots	x_n
P	p_1	p_2	\dots	p_n

$$\sum_{k=1}^n p_k = 1, p_k = P(\omega : \xi(\omega) = x_k)$$

Пример

ξ	-1	0	2
P	0.3	0.5	0.2

Если $x < -1$, то $F(x) = 0$

Если $-1 \leq x < 0$, то $F(x) = 0.3$

Если $0 \leq x < 2$, то $F(x) = 0.8$

Если $2 \leq x$, то $F(x) = 1$

Определение

Математическим ожиданием (средним значением) дискретной случайной величины с конечным числом значений x_1, \dots, x_n называется число

$$E\xi = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

Если у дискретной случайной величины счётное количество значений, тогда

$$E\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i, \text{ если ряд } \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i \text{ сходится}$$

Сходимость к ∞ считают неопределённой, а с $+\infty$, $-\infty$ проблем нет.

Определение

Дисперсией случайной величины ξ называют

$$\mathcal{D}\xi = E(\xi - E\xi)^2$$

Квадрат отклонения от среднего.

Определение

Среднеквадратическим отклонением случайной величины ξ называют

$$\sigma_1 = \sqrt{\mathcal{D}\xi}$$

Свойства математического ожидания

1. $\forall c \in \mathbb{R} \quad Ec = c$

2. $E(c \cdot \xi) = \sum_{i=1}^n c x_i p_i = c E\xi$

3. $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad a \leq \xi \leq b \Rightarrow a \leq E\xi \leq b$

Доказательство:

$$a \leq \sum_{i=1}^n a p_i \leq E\xi = \sum_{i=1}^n x_i p_i \leq \sum_{i=1}^n b p_i = b$$

4. $E(\xi_1 + \xi_2) = E\xi_1 + E\xi_2$

Лекция 4 октября.

Воспоминания:

ξ	x_1	\dots	x_n
p	p_1	\dots	p_n

$$E\xi = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

Свойства математического ожидания (продолжение)

5. Пусть $\eta = \varphi(\xi)$, $\varphi(x)$ - детерминированная функция.

$$E\xi = \sum_{i=1}^n \varphi(x_i) p_i$$

Свойства дисперсии.

1. $\mathcal{D}c = 0$

2. $\mathcal{D}(c\xi) = E(c\xi - cE\xi)^2 = Ec^2(\xi - E\xi)^2 = c^2 \mathcal{D}\xi$

3. $\forall \xi \text{ случайная величина}(\xi) \Rightarrow \mathcal{D}\xi \geq 0$

4. $\mathcal{D}\xi = E(\xi^2 - 2\xi E\xi + (E\xi)^2) = E\xi^2 - 2(E\xi)^2 + (E\xi)^2 = E\xi^2 - (E\xi)^2$

5.
$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\xi_1 + \xi_2) &= E(\xi_1 + \xi_2)^2 - (E(\xi_1 + \xi_2))^2 = \\ &= E\xi_1^2 + 2E(\xi_1 \xi_2) + E\xi_2^2 - ((E\xi_1)^2 + 2E\xi_1 E\xi_2 + (E\xi_2)^2) = \\ &= (E\xi_1^2 - (E\xi_1)^2) + (E\xi_2^2 - (E\xi_2)^2) + 2(E(\xi_1 \xi_2) - E\xi_1 E\xi_2) = \\ &= \mathcal{D}\xi_1 + \mathcal{D}\xi_2 + 2 \underbrace{(E(\xi_1 \xi_2) - E\xi_1 E\xi_2)}_{\text{Ковариация } \xi_1 \text{ и } \xi_2} \end{aligned}$$

Если ξ_1, ξ_2 независимы, то $\text{cov}(\xi_1, \xi_2) = 0$ (ковариация нулевая).

Определение

Начальным моментом k-го порядка случайной величины ξ называется

$$\mu_k = E\xi^k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Определение

Центральным моментом k-го порядка случайной величины ξ называется

$$\nu_k = E(\xi - E\xi)^k, \quad k = 2, 3, \dots$$

$$\nu_2 = \mathcal{D}\xi$$

Определение

Случайная величина $\overset{\circ}{\xi} = \xi - E\xi$ называется центрированной случайной величиной

$$E\overset{\circ}{\xi} = 0$$

Определение

Случайная величина $\xi^* = \frac{\overset{\circ}{\xi}}{\sigma}$ называют нормированной случайной величиной.

$$D\xi^* = 1$$

Распределения:

1. Распределение Бернулли

$$\xi \sim \text{Ber}(p), \quad 0 < p < 1$$

ξ	0	1
p	$1-p$	p

ξ^2	0	1
p	$1-p$	p

$$E\xi = p, \quad \mathcal{D}\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq$$

2. Биномиальное распределение

$$\xi \sim \text{Bi}(n, p), \quad 0 < p < 1$$

ξ	0	1	k	n
p	\dots	\dots	$C_n^k p^k q^{n-k}$	\dots

$$\begin{aligned} E\xi &= \sum_{k=0}^n k C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^n k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} = \\ &= np \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} q^{n-k} = \left\langle j = k-1 \atop k = j+1 \right\rangle = \\ &= np \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{j!(n-1-j)!} p^j q^{n-1-j} = np(p+q)^{n-1} = np \end{aligned}$$

Можно посчитать математическое ожидание иначе:

$$\xi = \xi_1 + \dots + \xi_n, \quad \frac{\xi_i}{p} \mid \frac{0}{q} \mid \frac{1}{p} \Rightarrow E\xi = E\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right) = \sum_{i=1}^n E\xi_i = np$$

$$\mathcal{D}\xi = \sum_{k=0}^n k^2 C_n^k p^k q^{n-k} - (np)^2 = \dots = npq$$

Так как ξ_1, \dots, ξ_n независимы:

$$\mathcal{D}\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathcal{D}\xi_i = npq$$

3. Распределение Пуассона

$$\xi \sim \Pi(\lambda), \quad \lambda > 0$$

$$\xi = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$P(\xi = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

$$E\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$

$$\begin{aligned} D\xi &= E\xi^2 - (E\xi)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} - \lambda^2 = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{e^{-\lambda} \lambda^{k-1}}{(k-1)!} - \lambda^2 = \\ &= \lambda \sum_{k=1}^{\infty} (k-1+1) \frac{e^{-\lambda} \lambda^{k-1}}{(k-1)!} - \lambda^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda \end{aligned}$$

Теорема Пуассона

Пусть в схеме испытаний Бернулли: $n \rightarrow \infty$, $p \rightarrow 0$, $np \rightarrow \lambda$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

Доказательство

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} C_n^k p^k q^{n-k} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{n^k} \frac{(1 - \frac{\lambda}{n})^n}{(1 - \frac{\lambda}{n})^k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \end{aligned}$$

Погрешность такой аппроксимации:

$$\left| C_n^k p^k q^{n-k} - \frac{e^{-np} (np)^k}{k!} \right| \leq np^2$$

Задача

Завод поставяет 1000 бутылок воды. Каждая бутлка может быть повреждена в пути с вероятностью 0.002. Какое среднее количество бутылок будет повреждено? Какова вероятность повреждения не более 2 бутылок? Случайная величина ξ — количество повреждённых бутылок.

$$\xi \sim \text{Bi}(1000, 0.002) \Rightarrow E\xi = 1000 \cdot 0.002 = 2$$

Погрешность при аппроксимации Пуассоновским распределением будет $\leq np^2 = 0.004$, что нас устраивает по точности.

$$P(\xi \leq 2) = p(\xi = 0) + p(\xi = 1) + p(\xi = 2) = e^{-2}(1 + 2 + 2) = \frac{5}{e^2}$$

Ещё распределения

4. Геометрическое распределение

$$\xi \sim G(p), \quad 0 < p < 1$$

$\xi = \{1, 2, \dots\}$, $P(\xi = k) = q^{k-1}p$. После первого успеха эксперименты прекращаются.

$$E\xi = \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} p = p \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} (q^k)' = p \left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k \right)' = p \left(\frac{q}{1-q} \right)' =$$

$$\frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

Задача

Студент выучил 80% билетов. Преподаватель спрашивает его, пока не обнаружит незнание. Сколько в среднем билетов спросит преподаватель?

$$\xi \sim G(0.2) \quad E\xi = \frac{1}{0.2} = 5$$

Лекция 11 октября.

Воспоминания: $F_\xi(x) = P(\xi \leq x)$

Непрерывные случайные величины

Определение

Неотрицательная кусочно-непрерывная функция $f_\xi(x)$ называется плотностью распределения случайной величины ξ , если

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^x f_\xi(t) dt$$

Прикол про Канторову лестницу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{2}F(3x), & 0 \leq x < \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}F(3x-2), & \frac{2}{3} \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

непрерывна, но не имеет плотности.

$$P(\xi = x) = F(x) - \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} F(x - \varepsilon) = 0$$

$$f(x) = F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x < \xi \leq x + \Delta x)}{\Delta x}$$
$$f(x)\Delta x \underset{\Delta x \rightarrow 0}{=} P(x < \xi \leq x + \Delta x)$$

Свойства $f_\xi(x)$

1. $\forall x \in \mathbb{R}^1 \quad f_\xi(x) \geq 0$

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x) dx = F(+\infty) = 1$

3. $\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 < \xi \leq x_2)$

4. В точках дифференцируемости функции $F(x)$

$$f(x) = F'(x)$$

5. Пусть случайная величина ξ имеет плотность распределения $f_\xi(x)$. Детерминированная функция $\varphi(x)$ является монотонной и дифференцируемой.

$$\text{СВ } \eta = \varphi(\xi) \quad f_\eta(y) = ?$$

а. Пусть $\varphi(x)$ — монотонно возрастающая функция:

$$F_\eta(y) = P(\eta \leq y) = P(\varphi(\xi) \leq y) = P(\xi \leq \varphi^{-1}(y)) = F_\xi(\varphi^{-1}(y))$$

$$f_\eta(y) = \frac{d}{dy} F_\eta(y) = f_\xi(\varphi^{-1}(y)) \cdot (\varphi^{-1}(y))'$$

b. Пусть $\varphi(x)$ — монотонно убывающая функция.

$$F_{\eta}(y) = P(\eta \leq y) = P(\varphi(\xi) \leq y) = P(\xi \geq \varphi^{-1}(y)) = 1 - F_{\xi}(\varphi^{-1}(y))$$

$$f_{\eta}(y) = \frac{d}{dy} F_{\eta}(y) = -f_{\xi}(\varphi^{-1}(y)) (\varphi^{-1}(y))'$$

Минус возникает для компенсации отрицательности производной обратной функции.

c. Пусть $\varphi(x)$ — монотонная функция:

$$f_{\eta}(y) = f_{\xi}(\varphi^{-1}(y)) |(\varphi^{-1}(x))'|$$

d. Если $\varphi(x)$ — немонотонная функция. Разбиваем на интервалы монотонности:

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$$

Найдём: $\varphi_1^{-1}(y), \varphi_2^{-1}(y), \dots, \varphi_n^{-1}(y)$. Тогда:

$$f_{\eta}(y) = \sum_{i=1}^k f(\varphi_i^{-1}(y)) |(\varphi_i^{-1}(y))'|$$

Определение

Математическое ожидание непрерывной случайной величины ξ с плотностью $f_{\xi}(x)$ называется число:

$$E\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\xi}(x) dx$$

если сходится $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_{\xi}(x) dx$

Замечание

1. Если $f_{\xi}(x) > 0$ только при $x > 0$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\xi}(x) dx$ расходится, то $E\xi = +\infty$

2. Если $f_{\xi}(x) > 0$ только при $x < 0$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\xi}(x) dx$ расходится, то $E\xi = -\infty$

3. Распределение Коши: $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx$$

1. $Ec = c$
2. $E(c\xi) = cE(\xi)$
3. $a \leq \xi \leq b \Rightarrow a \leq E\xi \leq b$
4. $E(\xi_1 + \xi_2) = E\xi_1 + E\xi_2$
5. Пусть случайная величина $\eta = \varphi(\xi)$, φ — детерминированная функция.

$$E\eta = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f_{\xi}(x) dx$$

Определение

Дисперсией называется:

$$\mathcal{D}\xi = E(\xi - E\xi)^2 = E\xi^2 - (E\xi)^2$$

Квантиль.

Определение

Число Z_{γ} , $0 < \gamma < 1$, называется γ -квантилью непрерывного строго монотонного распределения $F_{\xi}(x)$, если:

$$F_{\xi}(Z_{\gamma}) = \gamma = P(\xi \leq Z_{\gamma}) = \int_{-\infty}^{Z_{\gamma}} f(x) dx$$

Были примеры с графиками, я их очень люблю.

Определение

Квантиль $Z_{0,5}$ называется медианой. Не всегда совпадает с математическим ожиданием.

Лекция 25 октября

Равномерное распределение

$$\xi \sim R(a, b)$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (a, b) \\ \frac{1}{b-a}, & x \in (a, b) \end{cases}$$

$$E\xi = \frac{a+b}{2}$$

$$\mathcal{D}\xi = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \Rightarrow F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & x \in (a, b) \\ 1, & x \geq b \end{cases}$$

Экспоненциальное (показательное) распределение

$$\xi \sim E(\lambda), \lambda > 0$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$E\xi = \frac{1}{\lambda}$$

$$\mathcal{D}\xi = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Свойства

Пусть $\xi \sim E(\lambda)$, тогда:

$$\forall t, \tau \quad P(\xi > t + \tau / \xi > t) = P(\xi > \tau), \text{ условная вероятность}$$

Доказательство

$$\begin{aligned} P(\xi > t + \tau / \xi > t) &= \frac{P(\xi > t + \tau)}{P(\xi > t)} = \frac{1 - F(t + \tau)}{1 - F(t)} = \frac{e^{-\lambda(t+\tau)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda \tau} = \\ &= 1 - F(\tau) = P(\xi > \tau) \end{aligned}$$

Нормальное (гауссовское) распределение

$$\xi \sim N(m, \sigma^2)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

$$E\xi = m$$

$$D\xi = \sigma^2$$

Определение

Функция $\Phi_0(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ называется функцией Лапласа

Свойства

$$\Phi_0(+\infty) = 0.5$$

$$\Phi_0(-x) = -\Phi_0(x)$$

Правило трёх сигм

$$P(|\xi - m| < 3\sigma) = 2\Phi_0\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi_0(3) = 0.997$$

Лекция 1 ноября

Неравенства Чебникова

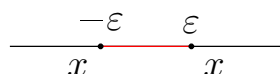
Пусть $E|\xi|^r < \infty$. Тогда:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P(|\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{E|\xi|^r}{\varepsilon^r}$$

Доказательство

$$E|\xi|^r = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^r f(x) dx$$

$x \in (-\infty, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, +\infty)$, то есть



Тогда:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^r f(x) dx &\geq \int_{|x| \geq \varepsilon} |x|^r f(x) dx \geq \varepsilon^r \int_{|x| \geq \varepsilon} f(x) dx = \varepsilon^r P(|\xi| \geq \varepsilon) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{E|\xi|^r}{\varepsilon^r} \geq P(|\xi| \geq \varepsilon), \text{ ч.т.д.} \end{aligned}$$

Частные случаи

1. $r = 1 \wedge P(\xi \geq 0) = 1$

$$P(\xi \geq \varepsilon) \leq \frac{E\xi}{\varepsilon}$$

2. Пусть $r = 2$

$$P(|\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{E\xi^2}{\varepsilon^2}$$

3. Пусть $r = 2$, $\eta = \xi - E\xi$

$$P(|\xi - E\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$$

Задача

Случайная величина ξ — расход электрической энергии в месяц. Известно $E\xi = 4\,000$. Оценить $P(\xi \geq 10\,000)$.

Применяя неравенство Чебышёва может прикинуть эту вероятность:

$$P(\xi \geq 10\,000) \leq \frac{4\,000}{10\,000} = 0.4$$

Неравенство не находит вероятность точно, используется только для получения грубой оценки!

Определение

Вектор $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, компоненты которого ξ_1, \dots, ξ_n , являющиеся случайными величинами, называется случайным вектором.

Определение

Функцией распределения случайного вектора $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ называется

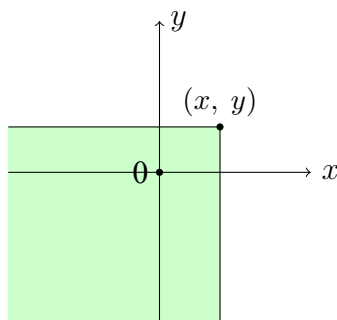
$$F_\xi(x_1, \dots, x_n) = P(\xi_1 \leq x_1, \dots, \xi_n \leq x_n)$$

Замечание

$$\{\xi_1 \leq x_1, \dots, \xi_n \leq x_n\} = \{(\xi_1 \leq x_1) \cap (\xi_2 \leq x_2) \cap \dots \cap (\xi_n \leq x_n)\}$$

Пример

Пусть $n = 2$. $F_\xi(x, y) = P(\xi_1 \leq x, \xi_2 \leq y)$



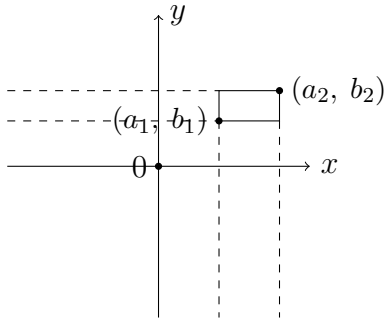
Свойства $F(x, y)$

1. $\forall x, y \quad 0 \leq F(x, y) \leq 1$

2. $F(-\infty, -\infty) = 0 = F(x, -\infty) = F(-\infty, y)$

$$3. F(+\infty, +\infty) = 1$$

$$4. F(+\infty, y) = P(\xi_2 \leq y) = F_{\xi_2}(y) \text{ Рассмотрим вероятность попадания в квадрат:}$$



$$5. P(a_1 \leq \xi \leq a_2, b_1 \leq \xi_2 \leq b_2) = F(a_2, b_2) - F(a_2, b_1) - F(a_1, b_2) + F(a_1, b_1)$$

$$6. F(x, y) \text{ монотонно неубывающая функция по каждому аргументу.}$$

$$\text{Доказательство: } \forall \Delta x > 0 \quad F(x + \Delta x, y) \geq F(x, y)$$

$$F_{\xi}(x + \Delta x, y) = P(\xi \leq x + \Delta x, \xi_2 \leq y) = P(\xi_1 \leq x, \xi_2 \leq y) + \underbrace{P(x < \xi_1 \leq x + \Delta x, \xi_2 \leq y)}_{\alpha \geq 0} = F(x, y) + \alpha \geq F(x, y)$$

Определение

Компоненты ξ_1 и ξ_2 случайного вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ называются независимыми, если верно:

$$\forall x, y \quad F_{\xi}(x, y) = F_{\xi_1}(x)F_{\xi_2}(y)$$

Определение

Дискретный случайный вектор:

ξ_1, ξ_2	$y_1 \dots y_k$
x_1	$p_{11} \dots p_{1k}$
x_2	$p_{21} \dots p_{2k}$
\vdots	\vdots
x_n	$p_{n1} \dots p_{nk}$

$$p_{ij} = P(\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j)$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k p_{ij} = 1$$

ξ_1	x_1	x_2	\dots	x_m
p	$p_{1\bullet}$	$p_{2\bullet}$	\dots	$p_{m\bullet}$

$$p_{i\bullet} = \sum_{j=1}^k p_{ij}$$

Утверждение

Компоненты ξ_1, ξ_2 дискретного случайного вектора $\xi = (x_1, x_2)$ независимы тогда и только тогда, когда

$$\forall i = \overline{1, m}, j = \overline{1, k} \quad p_{ij} = p_{i\bullet} \cdot p_{\bullet j}$$

Определение

Неотрицательная кусочно-непрерывная функция $f_{\xi}(x, y)$ называется плотностью распределения случайного вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, если

$$F_{\xi}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(t_1, t_2) dt_2 dt_1$$

Замечание

В точках дифференцируемости $F(x, y)$

$$f(x, y) = \frac{\delta^2 F(x, y)}{\delta x \delta y}, \quad \delta \text{ частная производная}$$

Свойства $f(x, y)$

1. $\forall x, y \quad f(x, y) \geq 0$

2.
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = F(+\infty, +\infty) = 1$$

3.
$$\int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} f(x, y) dy dx = F(a_2, b_2) - F(a_2, b_1) - (F(a_1, b_2) - F(a_1, b_1)) =$$

$$= P(a_1 < \xi_1 \leq a_2, b_1 < \xi_2 \leq b_2)$$

4. На доске нарисована клякса D , разбитая на много маленьких прямоугольников $f(\tilde{x}, \tilde{y}), \Delta x, \Delta y, \quad \tilde{x} \in (x, x + \Delta x), \tilde{y} \in (y, y + \Delta y)$. Тогда

$$P(\xi \in D) = \iint_D f(x, y) dx dy, \quad \text{вспоминаем матан.}$$

5.
$$F_{\xi_1}(x) = F_{\xi}(x, +\infty) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, y) dy dt$$

$$f_{\xi_1}(x) = \frac{d}{dx} F_{\xi_1}(x) = \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, y) dy dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$$

$$f_{\xi_2}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$$

Лекция 8 ноября

Определение

Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ имеет равномерное распределение в области $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^n$, если

$$f_{\xi}(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} c, & \text{если } (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{D} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \quad \text{где } c \text{ — константа}$$

Частный случай

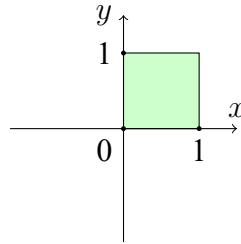
При $n = 2$ случайный вектор $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ распределён равномерно в области \mathcal{D} , если

$$f_{\xi}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{S}, & \text{если } (x, y) \in \mathcal{D} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \quad \text{где } S \text{ — площадь } \mathcal{D}$$

Пример 1

Пусть $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ распределён равномерно в области

$$f_{\xi}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in (0, 1) \wedge y \in (0, 1) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$



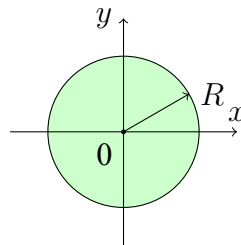
$$f_{\xi_1}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi}(x, y) dy = \begin{cases} \int_0^1 1 dy, & \text{если } x \in (0, 1) \\ 0, & \text{если } x \notin (0, 1) \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in (0, 1) \\ 0, & \text{если } x \notin (0, 1) \end{cases}$$

$$f_{\xi_2}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi}(x, y) dx = \begin{cases} \int_0^1 1 dx, & \text{если } y \in (0, 1) \\ 0, & \text{если } y \notin (0, 1) \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{если } y \in (0, 1) \\ 0, & \text{если } y \notin (0, 1) \end{cases}$$

Получаем $\forall x, y \in \mathbb{R}^2 \quad f_{\xi}(x, y) = f_{\xi_1}(x) \cdot f_{\xi_2}(y) \Rightarrow$ случайные величины независимы.

Пример 2

Пусть $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ распределён равномерно в круге радиуса R



$$f_{\xi}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi R^2}, & \text{если } x^2 + y^2 \leq R^2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$f_{\xi_1}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi}(x, y) dy = \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2}} \frac{1}{\pi R^2} dy = \begin{cases} \frac{2\sqrt{R^2-x^2}}{\pi R^2}, & \text{если } |x| \leq R \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$f_{\xi_2}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi}(x, y) dx = \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{+\sqrt{R^2-y^2}} \frac{1}{\pi R^2} dx = \begin{cases} \frac{2\sqrt{R^2-y^2}}{\pi R^2}, & \text{если } |y| \leq R \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Получаем $\exists x, y \quad f_{\xi}(x, y) \neq f_{\xi_1}(x) \cdot f_{\xi_2}(y) \Rightarrow$ случайные величины зависимы.

Утверждение

Пусть $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ — непрерывный случайный вектор, тогда ξ_1 и ξ_2 — независимы тогда и только тогда, когда

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad f_{\xi}(x, y) = f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(y)$$

Доказательство

“ \Rightarrow ”

Пусть ξ_1 и ξ_2 независимы, тогда:

$$f_{\xi}(x, y) = \frac{\delta^2 F(x, y)}{\delta x \cdot \delta y} = \frac{\delta^2 F_{\xi_1}(x) F_{\xi_2}(y)}{\delta x \delta y} = \frac{dF_{\xi_1}(x)}{dx} \cdot \frac{dF_{\xi_2}(y)}{dy} = f_{\xi_1}(x) \cdot f_{\xi_2}(y)$$

“ \Leftarrow ”

Пусть $f_{\xi}(x, y) = f_{\xi_1}(x) \cdot f_{\xi_2}(y)$, тогда:

$$\begin{aligned} F_{\xi}(x, y) &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{\xi}(t, s) ds dt = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{\xi_1}(t) f_{\xi_2}(s) ds dt = \int_{-\infty}^x f_{\xi_1}(t) \left(\int_{-\infty}^y f_{\xi_2}(s) ds \right) dt = \\ &= F_{\xi_1}(x) F_{\xi_2}(y) \Rightarrow \xi_1, \xi_2 \text{ независимы.} \end{aligned}$$

Определение

Математическим ожиданием вектора $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ называют вектор $E\xi = (m_1, \dots, m_n)$, где $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} m_i = E\xi_i$

Свойства математического ожидания

1. $E(\xi_1 + \xi_2) = E\xi_1 + E\xi_2$

Доказательство: $E(\xi_1 + \xi_2) = \sum_i \sum_j (x_i + y_j) p_{ij} =$
 $= \sum_i \sum_j x_i p_{ij} + \sum_i \sum_j y_j p_{ij} = \sum_i x_i p_{i\bullet} + \sum_j y_j p_{\bullet j} = E\xi_1 + E\xi_2$

2. ξ_1, ξ_2 независимы $\Rightarrow E(\xi_1 \xi_2) = E\xi_1 \cdot E\xi_2$

Доказательство: $E(\xi_1 \xi_2) = \iint xy f(x, y) dx dy = \left\langle \begin{array}{l} \text{компоненты } \xi_1, \xi_2 \\ \text{независимы} \end{array} \right\rangle =$
 $= \iint xy f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{\xi_2}(y) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\xi_1}(x) dx \right) dy =$
 $= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\xi_1}(x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{\xi_2}(y) dy = E\xi_1 \cdot E\xi_2$

Определение

Ковариацией случайных величин ξ_1, ξ_2 называют величину

$$\text{cov}(\overset{\circ}{\xi_1}, \overset{\circ}{\xi_2}) = k_{\xi_1 \xi_2} = E(\xi_1 - E\xi_1)(\xi_2 - E\xi_2) = E\overset{\circ}{\xi_1} \overset{\circ}{\xi_2}$$

Напоминание: $\overset{\circ}{\xi}$ обозначает центрированную случайную величину.

Определение

Коэффициентом корреляции случайных величин ξ_1, ξ_2 называется

$$\rho_{\xi_1 \xi_2} = \frac{\text{cov}(\xi_1, \xi_2)}{\sqrt{\mathcal{D}\xi_1 \mathcal{D}\xi_2}} = \text{cov}(\xi_1^*, \xi_2^*)$$

Напоминание: $\xi^* = \frac{\xi - E\xi}{\sqrt{\mathcal{D}\xi}}$

Определение

Случайные величины ξ_1, ξ_2 называются некоррелированными, если

$$\rho_{\xi_1, \xi_2} = 0$$

Положительно коррелированными, если

$$\rho_{\xi_1, \xi_2} > 0$$

Отрицательно коррелированными, если

$$\rho_{\xi_1, \xi_2} < 0$$

Свойства $\text{cov}(\xi_1, \xi_2)$

1. $\text{cov}(\xi, \xi) = \mathcal{D}\xi$
2. $\mathcal{D}(\xi + \eta) = \mathcal{D}\xi + \mathcal{D}\eta + 2\text{cov}(\xi, \eta)$
3. $\text{cov}(\xi, \eta) = \text{cov}(\eta, \xi)$
4. $\text{cov}(\xi, \eta) = E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta) = E(\xi\eta) - E\xi \cdot E\eta$
5. $\text{cov}(a\xi + b, c\eta + d) = E(a\xi + b - aE\xi - b)(c\eta + d - cE\eta - d) = a \cdot c \text{cov}(\xi, \eta)$

6. $|\rho_{\xi\eta}| = \frac{|\text{cov}(\xi, \eta)|}{\sigma_\xi \sigma_\eta} \leq 1 \Rightarrow |\text{cov}(\xi, \eta)| \leq \sigma_\xi \sigma_\eta$

Доказательство:

$$\begin{aligned} 0 \leq \mathcal{D}(\xi^* + \eta^*) &= \mathcal{D}\xi^* + \mathcal{D}\eta^* + 2\overbrace{\text{cov}(\xi^*, \eta^*)}^{=\rho_{\xi^* \eta^*}} = 1 + 1 + 2\rho_{\xi^* \eta^*} = \\ &= 2(1 + \rho_{\xi^* \eta^*}) \geq 0 \Rightarrow \rho_{\xi^* \eta^*} \geq -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 \leq \mathcal{D}(\xi^* - \eta^*) &= \mathcal{D}\xi^* + \mathcal{D}\eta^* - 2\overbrace{\text{cov}(\xi^*, \eta^*)}^{=\rho_{\xi^* \eta^*}} = 1 + 1 - 2\rho_{\xi^* \eta^*} = \\ &= 2(1 - \rho_{\xi^* \eta^*}) \geq 0 \Rightarrow \rho_{\xi^* \eta^*} \leq 1 \end{aligned}$$

7. ξ, η — независимые случайные величины и $\mathcal{D}\xi, \mathcal{D}\eta \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{cov}(\xi, \eta) = 0$

Доказательство:

$$\begin{aligned} \text{cov}(\xi, \eta) &= E\xi\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_\xi)(y - m_\eta) f(x, y) dx dy = \left\langle \begin{array}{l} \text{компоненты } \xi, \eta \\ \text{независимы} \end{array} \right\rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_\xi) f(x) (y - m_\eta) f(y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_\xi) f(x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} (y - m_\eta) f(y) dy = 0 \end{aligned}$$

0 получается, потому что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_\xi) f(x) dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx}_{=E\xi} - m_\xi \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx}_{=1} = E\xi - E\xi = 0$$

Лекция 15 ноября

Свойства $\rho_{\xi, \eta}$

1. $|\rho_{\xi\eta}| \leq 1$
2. $\rho_{\xi\xi} = 1$

3. Если случайная величина $\eta = a\xi + b$, $a \neq 0$, то

$$\rho_{\xi\eta} = \begin{cases} 1, & \text{если } a > 0 \\ -1, & \text{если } a < 0 \end{cases}$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} \rho_{\xi\eta} &= \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{\mathcal{D}\xi \cdot \mathcal{D}\eta}} = \frac{E\xi\eta - E\xi E\eta}{\sqrt{\mathcal{D}\xi \cdot \mathcal{D}\eta}} = \frac{E\xi(a\xi + b) - E\xi E(a\xi + b)}{\sqrt{\mathcal{D}\xi \cdot \mathcal{D}(a\xi + b)}} = \\ &= \frac{aE\xi^2 + bE\xi - a(E\xi)^2 - bE\xi}{\sqrt{a^2(\mathcal{D}\xi)^2}} = \frac{a(E\xi^2 - (E\xi)^2)}{|a|\mathcal{D}\xi} = \frac{a\mathcal{D}\xi}{|a|\mathcal{D}\xi} = \begin{cases} 1, & \text{если } a > 0 \\ -1, & \text{если } a < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

4. Пусть $|\rho_{\xi\eta}| = 1 \Rightarrow \eta = a\xi + b$

а) $\rho_{\xi\eta} = 1 = \rho_{\xi^*\eta^*}$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\xi^* - \eta^*) &= \mathcal{D}\xi^* + \mathcal{D}\eta^* + 2\text{cov}(\xi^*, -\eta^*) = \mathcal{D}\xi^* + \mathcal{D}\eta^* - 2\text{cov}(\xi^*, \eta^*) = \\ &= 2 - 2\rho_{\xi\eta} = 2(1 - \rho_{\xi\eta}) = 0 \end{aligned}$$

Итак, получаем:

$$\mathcal{D}(\xi^* - \eta^*) = 0 \Rightarrow \xi^* - \eta^* = c \Rightarrow \frac{\xi - m_\xi}{\sigma_\xi} - \frac{\eta - m_\eta}{\sigma_\eta} = c \Rightarrow \text{линейно зависимы}$$

б) $\rho_{\xi\eta} = -1$:

$$\mathcal{D}(\xi^* + \eta^*) = \mathcal{D}\xi^* + \mathcal{D}\eta^* + 2\text{cov}(\xi^*, \eta^*) = 2(1 + \rho_{\xi\eta}) = 0$$

Пример

Пусть $\xi \sim R(-a, a)$, $\eta = \xi^2$. Посчитаем коэффициент корреляции:

$$\text{cov}(\xi, \eta) = E\xi\eta - \underbrace{E\xi}_{=0} E\eta = E\xi^3 = \int_{-a}^a x^3 \frac{1}{2a} dx = 0 \Rightarrow \rho_{\xi\eta} = 0$$

Итого, величины зависимы, но не коррелированы (так как корреляция показывает линейную зависимость, а η зависит от ξ квадратично).

Определение

Ковариационной матрицей вектора $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ называется матрица $K_\xi = (k_{ij})$, где $k_{ij} = \text{cov}(\xi_i, \xi_j)$, $i, j = \overline{1, n}$

Свойства K_ξ

1. $k_{ij} = k_{ji} \Rightarrow K_\xi$ симметричная
2. $k_{ii} = \mathcal{D}\xi_i$, $i = \overline{1, n}$
3. K_ξ неотрицательно определённая, то есть

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \quad \sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j k_{ij} \geq 0$$

Доказательство:

$$0 \leq E \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \overset{\circ}{\xi_i} \right)^2 = E \left(\sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j \overset{\circ}{\xi_i} \overset{\circ}{\xi_j} \right) = \sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j \underbrace{E \overset{\circ}{\xi_i} \overset{\circ}{\xi_j}}_{k_{ij}}$$

Определение

Корреляционной матрицей случайного вектора $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ называется матрица $R_\xi = (\rho_{ij})$, где $\rho_{ij} = \rho_{\xi_1 \xi_2}$

1. $\forall i, j = \overline{1, n} \quad \rho_{ij} = \rho_{ji}$
2. $\forall i = \overline{1, n} \quad \rho_{ii} = 1$

Формула свёртки

Пусть случайные величины ξ_1 и ξ_2 — независимы, $\xi_1 \sim f_{\xi_1}(x)$, $\xi_2 \sim f_{\xi_2}(y)$

Случайная величина $\eta = \xi_1 + \xi_2$.

Найти: $f_\eta(z)$ —?

$$F_\eta(z) = P(\eta \leq z) = P(\xi_1 + \xi_2 \leq z) = \iint_{x+y \leq z} f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(y) dy dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{z-x} f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(y) dy dx$$
$$f_\eta(z) = \frac{d}{dz} F_\eta(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(z-x) dx$$

Пример

$\xi_1 \sim N(0, 1)$, $\xi_2 \sim N(0, 1)$

ξ_1 и ξ_2 — независимы.

$\eta = \xi_1 + \xi_2$, $f_\eta(z)$ —?

$$f_\eta(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-x)^2}{2}} dx = \int \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2} - \left(\frac{z^2}{2} - xz + \frac{x^2}{2}\right)} dx =$$
$$= \frac{e^{-\frac{z^2}{4}}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{1}{2}}} e^{-x^2 + xz - \frac{z^2}{4}} dx = \frac{e^{-\frac{z^2}{4}}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{1}{2}}} e^{-(x-\frac{z}{2})^2} dx}_{=1}$$

Равно 1, потому что это гауссовская плотность, тогда оставшаяся часть и будет плотностью распределения. Итак, $\eta \sim N(0, 2)$.

Утверждение

Пусть ξ_1, \dots, ξ_n — независимые случайные величины, такие что $\xi_i \sim N(m_i, \sigma_i^2)$, $i = \overline{1, n}$

Тогда случайная величина $\eta = \xi_1 + \dots + \xi_n \sim N(m_\eta, \mathcal{D}\eta)$,

где $m_\eta = \sum_{i=1}^n m_i$, $\mathcal{D}\eta = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$

Лекция 22 ноября.

Условное распределение

(ξ, η) — дискретный случайный вектор.

$\xi \backslash \eta$	$y_1 \dots y_k$
x_1	$p_{11} \dots p_{1k}$
\vdots	
x_m	$p_{m1} \dots p_{mk}$

Тогда по формуле условной вероятности:

$$p(\xi = x_i \mid \eta = y_j) = \frac{p(\xi = x_i, \eta = y_j)}{p(\eta = y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}}$$

Определение

Набор вероятностей $\forall i = \overline{1, m} \quad \frac{p_{i,j}}{p_{\bullet,j}}$ называется условным распределением случайной величины ξ при условии $\{\eta = y_j\}$.

Определение

Условной функцией распределения случайной величины ξ при условии $\{\eta = y_j\}$ таком, что $P(\eta = y_j) > 0$, называется:

$$F_{\xi}(x | y_j) = P(\xi \leq x | \eta = y_j) = \sum_{x_i \leq x} \frac{p_{i,j}}{p_{\bullet,j}}$$

Определение

Условным математическим ожиданием случайной величины ξ :

При условии $\{\eta = y_j\}$ называется:

$$E(\xi | \eta = y_j) = \sum_{i=1}^m x_i \cdot p(\xi = x_i | \eta = y_j) = \sum_{i=1}^m x_i \frac{p_{i,j}}{p_{\bullet,j}}$$

При условии $\{\eta\}$:

$$E(\xi | \eta) = g(\eta)$$

То есть это некоторая функция от случайного аргумента (значит она является случайной величиной). Распишем таблицу значений:

$E(\xi \eta)$	$E(\xi \eta = y_1)$	\dots	$E(\xi \eta = y_k)$
p	$p_{\bullet,1}$	\dots	$p_{\bullet,k}$

Рассмотрим $E(g(\eta))$, заодно докажем формулу полного математического ожидания:

$$E(E(\xi | \eta)) = E\xi$$

Доказательство

$$E(E(\xi | \eta)) = \sum_{j=1}^n E(\xi | \eta = y_j) p_{\bullet,j} = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^m x_i \cdot \frac{p_{i,j}}{p_{\bullet,j}} p_{\bullet,j} = \sum_{i=1}^m x_i \sum_{j=1}^k p_{i,j} = \sum_{i=1}^m x_i p_{i\bullet} = E\xi$$

Для непрерывных случайных величин:

Определение

Пусть $f(x, y)$ и $f_{\eta}(y)$ — непрерывны в точке y_0 и $f_{\eta}(y_0) > 0$. Тогда условной функцией распределения случайной величины ξ при условии $\{\eta = y_0\}$ называется функция:

$$F_{\xi}(x | y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow +0} P(\xi \leq x | y_0 < \eta \leq y_0 + \Delta y)$$

Корректность определения:

$$\begin{aligned} F_{\xi}(x | y_0) &= \lim_{\Delta y \rightarrow +0} P(\xi \leq x | y_0 < \eta \leq y_0 + \Delta y) = \lim_{\Delta y \rightarrow +0} \frac{P(\xi \leq x, y_0 < \eta \leq y_0 + \Delta y)}{P(y_0 < \eta \leq y_0 + \Delta y)} = \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow +0} \frac{\int_{-\infty}^x \int_{y_0}^{y_0 + \Delta y} f(t, s) ds dt}{\int_{y_0}^{y_0 + \Delta y} f_{\eta}(s) ds} = \left\langle \begin{array}{c} \text{По теореме о} \\ \text{среднем значении} \end{array} \right\rangle = \lim_{\Delta y \rightarrow +0} \frac{\Delta y \int_{-\infty}^x f(t, \tilde{s}) dt}{\Delta y f_{\eta}(\tilde{s})} = \\ &= \frac{\int_{-\infty}^x f(t, y_0) dt}{f_{\eta}(y_0)} \end{aligned}$$

Определение

Пусть $f(x, y)$, $f_\eta(y)$ — непрерывны в точке y_0 и $f_\eta(y_0) > 0$. Функция $f_\xi(x | y_0)$ называется условной плотностью случайной величины ξ при условии $\eta = y$, если:

$$F_\xi(x | y_0) = \int_{-\infty}^x f_\xi(t | y) dt$$

Замечание

В точке дифференцируемости $F_\xi(x | y_0)$:

$$f_\xi(x | y_0) = \frac{\delta F_\xi(x | y_0)}{\delta x} \Rightarrow f_\xi(x | y_0) = \frac{\delta}{\delta x} \cdot \frac{\int_{-\infty}^x f(t, y_0) dt}{f_\eta(y_0)} = \frac{f(x, y_0)}{f_\eta(y_0)}$$

Критерий независимости непрерывных случайных величин

$$\forall x \in \mathbb{R} \forall y \quad (f_\eta(y) > 0) \Rightarrow f_\xi(x | y) = \frac{f(x, y)}{f_\eta(y)}$$

Если ξ и η независимы, тогда:

$$f(x, y) = f_\xi(x)f_\eta(y) \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad f_\xi(x | y) = f_\xi(x)$$

Пример

Пусть случайный вектор (ξ, η) распределён равномерно в круге радиуса R с центром в начале координат:

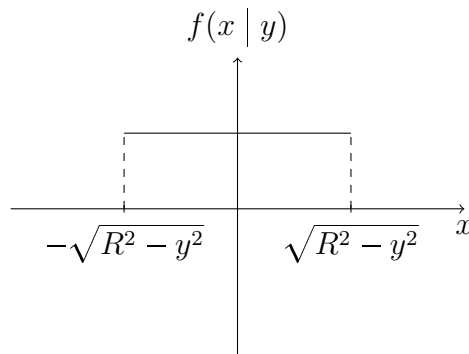
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi R^2}, & x^2 + y^2 \leq R^2 \\ 0, & x^2 + y^2 > R^2 \end{cases}$$

$$f_\eta(y) = \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} \frac{dx}{\pi R^2} = \begin{cases} \frac{2\sqrt{R^2-y^2}}{\pi R^2}, & |y| < R \\ 0, & |y| > R \end{cases}$$

Теперь мы можем посчитать условную вероятность:

$$\begin{aligned} \forall y \quad |y| < R \Rightarrow f_\xi(x | y) = \frac{f(x, y)}{f_\eta(y)} &= \begin{cases} \frac{1}{\pi R^2} \cdot \frac{\pi R^2}{2\sqrt{R^2-y^2}}, & \text{при } -\sqrt{R^2-y^2} \leq x \leq \sqrt{R^2-y^2} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{R^2-y^2}}, & \text{при } -\sqrt{R^2-y^2} \leq x \leq \sqrt{R^2-y^2} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \end{aligned}$$

Поскольку y фиксированный, получаем равномерное распределение:



Стоит заметить, что $E(\xi | \eta = y) = 0$, так как плотность распределения симметрична.

Свойства $E(\xi \mid \eta)$

1. $E(c \mid \eta) = c$
2. $E(c\xi \mid \eta) = cE(\xi \mid \eta)$
3. $E(\varphi(\xi) \cdot \psi(\eta) \mid \eta) = \psi(\eta)E(\varphi(\xi) \mid \eta)$, так как η фиксирована и $\varphi(\eta)$ является константой.
4. ξ и η — независимы $\Rightarrow E(\xi \mid \eta) = E\xi$

$$\begin{aligned}
 5. \quad E(E(\xi \mid \eta)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x \mid y) dx \right) f_{\eta}(y) dy = \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{f(x, y)}{f_{\eta}(y)} f_{\eta}(y) dx \right) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\xi}(x) dx = E\xi
 \end{aligned}$$

Лекция 29 ноября.

Определение

Условной дисперсией дискретной случайной величины ξ при условии $\{\eta = y_j\}$ называют величину:

$$\mathcal{D}(\xi \mid \eta = y_j) = \sum (x_i - E(\xi \mid \eta = y_j))^2 \frac{p_{ij}}{i_{\bullet j}}$$

Условным математическим ожиданием непрерывной случайной величины ξ называется:

$$E(\xi \mid \eta = y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_{\xi}(x \mid y) dx$$

Условной дисперсией непрерывной случайной величины ξ называется:

$$\mathcal{D}(\xi \mid \eta = y) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(\xi \mid \eta = y))^2 f_{\xi}(x \mid y) dx$$

Проверка нормировки

Пусть ξ_1, ξ_2 независимы и имеют нормальное распределение на интервале $(0, 1)$. То есть $\xi_1, \xi_2 \sim N(0, 1)$. Тогда $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ называется Гауссовским вектором.

$$f_{\xi_1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$f_{\xi}(x, y) = f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi}(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1}(x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_2}(y) dy$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy = \left\langle \begin{matrix} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ |J| = r \end{matrix} \right\rangle = \int_0^{+2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{r}{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} dr d\varphi =$$

$$= \int_0^{+\infty} r e^{-\frac{r^2}{2}} dt = \int_0^{+\infty} -e^{-\frac{r^2}{2}} d\frac{r^2}{2} = -e^{-\frac{r^2}{2}} \Big|_0^{+\infty} = 1$$

Определение

Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ имеет нормальное (гауссовское) распределение $\xi \sim N(m, K)$, если плотность распределения имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det K}} e^{-\frac{1}{2}((x-m)^T K^{-1}(x-m))}$$

Замечание

Здесь K — ковариационная матрица.

$$x = (x_1, \dots, x_n), m = (m_1, \dots, m_n), K = (k_{ij}), k_{ij} = \text{cov}(\xi_i, \xi_j)$$

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{\sqrt{\det C}}{\sqrt{(2\pi)^n}} e^{-\frac{1}{2}(\sum_i \sum_j c_{ij}(x_i - m_i)(x_j - m_j))}$$

$$C = K^{-1}$$

Свойства многомерного гауссовского распределения.

1. $E\xi = m, K_\xi = K$
2. Любой подвектор гауссовского вектора имеет гауссовское распределение.
3. Пусть $\eta = \sum_{i=1}^n \alpha_i \xi_i$ и все $a_i = 0$, тогда случайная величина η имеет гауссовское распределение.
4. Пусть $\eta = A\xi + B$, где A — матрица размера $k \times n$, а B — вектор, размера k , тогда:

$$\eta \sim N(Am_\xi + B, AK_\xi A^T)$$

5. Пусть компоненты ξ_1, \dots, ξ_n вектора ξ попарно некоррелированы, тогда ξ_1, \dots, ξ_n независимы. *Доказательство:*

$$\begin{aligned} \text{Пусть } \rho_{\xi_i, \xi_j} = 0 \text{ при } i \neq j \Rightarrow \text{cov}(\xi_i, \xi_j) = 0 \Rightarrow K &= \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \Rightarrow C = K^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{1}{\sigma_n^2} \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow f(x_1, \dots, x_n) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \sigma_1 \dots \sigma_n}} e^{-\frac{1}{2} \sum_i c_{ii}(x_i - m_i)^2} = \prod_{i=1}^n \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i}} e^{-\frac{(x_i - m_i)^2}{2\sigma_i^2}}}_{f_{\xi_i}(x_i)} = \prod_{i=1}^n f_{\xi_i}(x_i) \Rightarrow \text{величины } \xi_1, \dots, \xi_n \\ &\text{независимы.} \end{aligned}$$

Теорема о нормальной корреляции

Пусть $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \sim N(m, K)$

$$\mathcal{L}(\underbrace{(\xi_1, \dots, \xi_l)}_{\eta_1} \mid \underbrace{(\xi_{l+1}, \dots, \xi_n)}_{\eta_2} = x) \sim N(E(\eta_1 \mid \eta_2 = x), K_{\eta_1 \mid \eta_2 = x})$$

$$m = (\underbrace{m_1, \dots, m_l}_{E\eta_1} \mid \underbrace{m_{l+1}, \dots, m_n}_{E\eta_2}), K_\xi = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix}$$

$$E(\eta_1 \mid \eta_2 = x) = E\eta_1 + K_{12}K_{22}^{-1}(x - E\eta_2)$$

$$K_{\eta_1 \mid \eta_2 = x} = K_{11} - K_{12}K_{22}^{-1}K_{12}^T$$

Пусть $n = 2, \xi = (\xi_1, \dots, \xi_2), K_\xi = \begin{pmatrix} \mathcal{D}\xi_1 & \text{cov}(\xi_1, \xi_2) \\ \text{cov}(\xi_2, \xi_1) & \mathcal{D}\xi_2 \end{pmatrix}$

$$E(\xi_1 \mid \xi_2 = x) = E\xi_1 + \frac{\text{cov}(\xi_1, \xi_2)}{\mathcal{D}\xi_2}(x - E\xi_2)$$

$$\mathcal{D}(\xi_1 \mid \xi_2 = x) = \mathcal{D}\xi_1 - \frac{(\text{cov}(\xi_1, \xi_2))^2}{\mathcal{D}\xi_2}$$

Пример

$$(\xi_A, \xi_B) \sim N(m, K), \quad m = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 4 & 3,6 \\ 3,6 & 9 \end{pmatrix}$$

1. $P(\xi_A > \xi_B) = ?$

2. $\xi_B = 14 : E(\xi_A | \xi_B = 14), D(\xi_A | \xi_B = 14) = ?$.

Решим первый пункт: $P(\xi_A > \xi_B) = P(\xi_A - \xi_B > 0)$, $\xi_A - \xi_B \sim N(-2, (2, 4)^2)$

$$\xi_A - \xi_B = \mathcal{D}\xi_A + \mathcal{D}\xi_B + 2 \operatorname{cov}(\xi_A - \xi_B) = 4 + 9 - 2 \cdot 3,6 = 5,8 \approx (2, 4)^2$$

Тогда можем посчитать $P(\xi_A - \xi_B > 0) = \Phi_0(+\infty) - \Phi_0(\frac{0+2}{2,4}) = 0,5 - \Phi_0(\frac{1}{1,2}) \approx 0,5 - 0,297 = 0,203$

Решим второй пункт: $E(\xi_A | \xi_B = 14) = 10 + \frac{3,6}{9}(14 - 12) = 10 + \frac{7,2}{9} = 10,8$

$$D(\xi_A | \xi_B = 14) = 4 - \frac{3,6^2}{9} = 2,56$$

Виды сходимости случайных последовательностей

Обычное определение сходимости последовательности:

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \geq N \quad |x_n - x| < \varepsilon$$

Здесь не подходит, так как оно работает для детерминированных последовательностей, поэтому нужно вводить новые определения:

Определение

Последовательность случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$, определённых на одном вероятностном пространстве Ω , называется случайной последовательностью $\{\xi_n\}$

Определение

Случайная последовательность $\{\xi_n\}$ сходится по вероятности к случайной величине ξ ($\xi_n \xrightarrow{p} \xi$), если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \begin{cases} P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \\ P(|\xi_n - \xi| < \varepsilon) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1 \end{cases}$$

Доказать, что $\xi_n \xrightarrow{p} 0$:

$$P(|\xi_n - 0| < \varepsilon) = 2 \int_0^\varepsilon \frac{1}{n\pi(x^2 + \frac{1}{n^2})} dx = \frac{2}{\pi} \arctg x \cdot n \Big|_0^\varepsilon = \frac{2}{\pi} \arctg \varepsilon \cdot n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$$

Лекция 6 декабря.

Определение

Случайная последовательность $\{\xi_n\}$ сходится к случайной величине ξ в среднеквадратическом ($\xi_n \xrightarrow{с.к.} \xi$), если:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\xi_n - \xi)^2 = 0$$

Пример

ξ_n	0	1
p	$1 - \frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$

 Докажем, что $\xi_n \xrightarrow{с.к.} 0$:

$$E(\xi_n - 0)^2 = 0 + 1 \cdot \frac{1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

Замечание

Докажем, что $\xi_n \xrightarrow{\text{с. к.}} \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{p} \xi$:

$$\text{По неравенству Чебышёва: } \forall \varepsilon > 0 \quad P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) \leq \frac{E(\xi_n - \xi)^2}{\varepsilon^2}$$

Числитель сходится к нулю, так как есть среднеквадратическая сходимост, значит:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) \leq 0$$

Замечание

В обратную сторону это неверно, вот пример: $\frac{\xi_n}{p} \left| \begin{array}{c|c|c} 0 & & \sqrt{n} \\ \hline 1 - \frac{1}{n} & & \frac{1}{n} \end{array} \right| \quad P(|\xi_n - 0| > \varepsilon) = P(\xi_n = \sqrt{n}) = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Однако среднеквадратически она не сойдётся к нулю: $E(\xi_n - 0)^2 = E\xi_n^2 = 0 + n \cdot \frac{1}{n} = 1 \rightarrow 1 \neq 0$

Определение

Случайная последовательность $\{\xi_n\}$ сходится к случайной величине ξ почти наверное ($\xi_n \xrightarrow{\text{п. н.}} \xi$), если:

$$P(\omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega)) = 1$$

или

$$P(\omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega) \rightarrow \xi(\omega)) = 0$$

Поработаем с этим определением

По определению Коши: $\xi_n(\omega) \rightarrow \xi(\omega)$ означает:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n : \forall k \geq n \quad |\xi_k(\omega) - \xi(\omega)| < \varepsilon$$

Тогда отрицание этого предела:

$$\exists \varepsilon > 0 \forall n : \exists k \geq n \quad |\xi_k(\omega) - \xi(\omega)| \geq \varepsilon$$

Рассмотрим события $A_k^\varepsilon = \{\omega : |\xi_k(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon\}$

Также рассмотрим $B^\varepsilon = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} A_k^\varepsilon$ (по сути тут переписано отрицание определения Коши).

Если $B^\varepsilon = \emptyset$, то сходимост почти наверное имеется.

Лемма Бореля-Кантелли

Пусть A_1, \dots, A_k — случайные события, а $B = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} A_k$. Тогда:

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) < \infty \Rightarrow P(B) = 0$$

Также есть вторая часть этой леммы:

$$A_1, \dots, A_n \text{ независимы} \wedge \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) < \infty \Rightarrow P(B) = 0$$

Из сходимости почти наверное следует сходимост по вероятности, то есть

$$\xi_n \xrightarrow{\text{п. н.}} \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{p} \xi$$

Если интересно, могу написать доказательство

Пример:

$$\begin{array}{c|c|c} \xi_n & 0 & n \\ \hline p & 1 - \frac{1}{n^2} & \frac{1}{n^2} \end{array}$$

Исследуем эту последовательность на сходимости:

$$\xi_n \xrightarrow{\text{п. н.}} 0?$$

$$A_k^\varepsilon = \{\omega : |\xi_k(\omega) - 0| > \varepsilon\} = \{\omega : \xi_k(\omega) = k\}$$

$$P(A_k^\varepsilon) = \frac{1}{k^2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k^\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \rightarrow 0 \Rightarrow P(B) = 0 \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{\text{п. н.}} 0$$

Проверим на среднеквадратическую сходимость:

$$E\xi_n^2 = n^2 \cdot \frac{1}{n^2} + 0 = 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \neq 0$$

Пример

Рассмотрим одну из предыдущих последовательностей, мы доказали, что она среднеквадратически сходится к 0.

$$\begin{array}{c|c|c} \xi_n & 0 & 1 \\ \hline p & 1 - \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \end{array}$$

$$A_k^\varepsilon = \{\omega : |\xi_k(\omega) - 0| > \varepsilon\} = \{\omega : \xi_k(\omega) = 1\}, \text{ отсюда получаем:}$$

$$P(A_k^\varepsilon) = \frac{1}{k} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k^\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ гармонический ряд расходится} \Rightarrow \xi_n \text{ не сходится п.н. к } 0$$

Определение

Пусть $F_1(x), \dots, F_n(x), \dots$ — функции распределения случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ соответственно, а $F(x)$ — функция распределения случайной величины ξ . Случайная последовательность $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ сходится по распределению (distribution) (слабо сходится) к случайной величине ξ ($\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ или $\xi_n \xrightarrow{w} \xi$), если:

$$\forall x \in \mathbb{C}(F) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$$

Здесь $\mathbb{C}(F)$ обозначает множество точек, в которых $F(x)$ непрерывна.

Сходимости относятся друг к другу следующим образом:

$$\left. \begin{array}{l} \xi_n \xrightarrow{\text{п. н.}} \xi \\ \xi_n \xrightarrow{\text{с. к.}} \xi \end{array} \right] \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{p} \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{d} \xi$$

Центральная Предельная Теорема (ЦПТ)

Говорят, что для последовательности случайных величин $\{\xi_n\}$ выполнена (или выполняется) ЦПТ, если:

$$\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i - E \sum_{i=1}^n \xi_i}{\sqrt{\mathcal{D} \sum_{i=1}^n \xi_i}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} U \sim N(0, 1)$$

Можно записать по-другому:

$$P \left(\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i - E \sum_{i=1}^n \xi_i}{\sqrt{\mathcal{D} \sum_{i=1}^n \xi_i}} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Теорема

Пусть случайные величины ξ_1, \dots, ξ_n независимы, одинаково распределены и $\mathcal{D}\xi_1 < \infty$ (величины распределены одинаково, поэтому их дисперсии одинаковы), тогда:

$$\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i - n \cdot m_{\xi_1}}{\sigma \sqrt{n}} \xrightarrow{d} U \sim N(0, 1)$$

Теорема Муавра-Лапласа

Является частным случаем предыдущей теоремы.

Пусть ξ_n — количество успехов в схеме из n испытаний Бернулли с вероятностью успеха равной p . Тогда:

$$\frac{\xi_n - np}{\sqrt{npq}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} U \sim N(0, 1)$$

Заметим, что η_i — количество успехов в i -м испытании (все η_i независимы), тогда:

$$\frac{\eta_i}{P} \left| \begin{array}{c|c|c} 0 & 1 \\ \hline 1-p & p \end{array} \right. \Rightarrow E\eta_i = p \Rightarrow D\eta_i = pq = p(1-p), \quad \xi_k = \sum_i^n \eta_i$$

Тогда мы попадаем под условия предыдущей теорема и $\{\eta_n\}$ попадает под условия ЦПТ

Интегральная теорема Муавра-Лапласа

Пусть $\xi_n \sim Bi(n, p)$ и $n \rightarrow \infty$:

$$P(k_1 \leq \xi_n \leq k_2) = \Phi_0\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi_0\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

Локальная теорема Муавра-Лапласа

$$P(\xi_n = k) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{(k-np)^2}{npq}}$$

Неравенство Берри-Эссеена

$$\sup_x \left| P\left(\frac{\xi_n - np}{\sqrt{npq}} \leq x\right) - \Phi(x) \right| \leq \frac{p^2 + q^2}{\sqrt{npq}}$$

Заметим, что аппроксимация распределением Пуассона с погрешностью np^2 может быть лучше. Если np^2 большое, то Берри-Эссеен даёт маленькую погрешность и наоборот.