

# Теория вероятностей.

Андрей Тищенко @AndrewTGk

2024/2025

Семинар 6 сентября.

## Теория

Классическое определение вероятности:

Количество исходов конечно, они взаимоисключающие и равновозможные.

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \in [0, 1].$$

## Задача 0

Казино Монте-Карло с 37 слотами. 18 красных, 18 чёрных и 0. Тогда вероятность выиграть при ставке на красное будет  $\frac{18}{37}$ . Ставка удваивается.

Можно играть на дюжины  $[1, 12]$ ,  $[13, 24]$ ,  $[25, 36]$ , тогда вероятность выигрыша  $\frac{12}{37}$ . Ставка при этом утраивается.

## Задача 1

У взломщика есть связка из 10 ключей. С какой вероятностью он откроет дверь, перебрав ровно половину ключей.

Ключ равновероятно может находиться на любой позиции в его связке. На пятом месте он будет в единственном случае, тогда  $P = \frac{1}{10}$

## Задача 2

Студент выучил 20 билетов из тридцати. С какой вероятностью ему достанется выученный билет, если он заходит первым? Вторым? Если первым:  $\frac{20}{30}$

$$\text{Если вторым: } \frac{19}{29} \cdot \frac{20}{30} + \frac{20}{29} \cdot \frac{1}{30} = \frac{2}{3}$$

## Задача 3

Есть буквы М, О, С, К, В, А. Какова вероятность получить слово МОСКВА при случайном расположении этих букв.

$$P(A) = \frac{1}{6!} = \frac{1}{720}$$

Условие такое же, но буквы А, Б, Р, А, К, А, Д, А, Б, Р, А и нужно получить АБРАКАДАБРА.

$$P(A) = \frac{5! \cdot 2! \cdot 2!}{11!}$$

## Задача 4

Есть два брата и 10 мест за круглым столом. Какова вероятность размещения братьев напротив друг-друга.

$$\text{Одного фиксируем, у второго 9 вариантов } P(A) = \frac{1}{9}$$

$$\text{Рассматриваем положение обоих } P(A) = \frac{10 \cdot 8!}{10!} = \frac{1}{9}$$

## Задача 5

10 человек, 10 мест, между двумя конкретными должно быть 3 человека.  $P(A) = \frac{6 \cdot 2 \cdot 8!}{10!}$

Выбираем  $m$  элементов из  $N$ , с учётом порядка:

$$A_N^m = N(N-1) \dots (N-m+1) = \frac{N!}{(N-m)!}$$

Без учёта порядка:

$$C_N^m = \frac{A_N^m}{m!} = \frac{N!}{(N-m)!m!}$$

## Задача 6

Угадываем номер телефона, знаем все цифры, кроме последних трёх, но известно, что они разные:

$$P(A) = \frac{1}{A_{10}^3} = \frac{1}{720}$$

## Задача 7

Какова вероятность выиграть в спортлото (49 видов спорта, 6 выигрышных, нужно собрать все 6).

$$P(A) = \frac{1}{C_{49}^6} \approx \frac{1}{14\,000\,000}.$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

## Задача 8

Выбираются 3 цифры, хотим, чтобы их произведение было чётным.

$$\text{Посчитаем вероятность нечётности произведения: } P(\bar{A}) = \frac{C_5^3}{C_{10}^3} = \frac{5!}{2!3!} \cdot \frac{7!3!}{10!} =$$

$$= \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{8 \cdot 9 \cdot 10} = \frac{1}{12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$$

## Задача 9

Колода 52 карты, какова вероятность достать 4 карты одной масти:

$$P(A) = \frac{4 \cdot C_{13}^4}{C_{52}^4}$$

## Задача 10

Достать тройку, семёрку и туза из колоды с 52 картами:

$$P(A) = \frac{4^3}{C_{52}^3}$$

## Задача 11

90 хороших и 10 плохих деталей, какова вероятность, что среди пяти вытащенных деталей нет брака:

$$P(A) = \frac{C_{90}^5}{C_{100}^5} = \frac{90! 5! 95!}{5! 85! 100!} = \frac{86 \cdot 87 \cdot \dots \cdot 89 \cdot 90}{96 \cdot 97 \cdot \dots \cdot 99 \cdot 100}$$

Хотим 3 хороших и 2 плохих:

$$P(B) = \frac{C_{90}^3 \cdot C_{10}^2}{C_{100}^5}$$

## Задача 12

В спортлото угадать четыре из шести:

$$P(A) = \frac{C_6^4 \cdot C_{43}^2}{C_{49}^6}$$

## Задача 13

Из 52 карт достать 2 красные и 2 чёрные карты:

$$P(A) = \frac{C_{26}^2 \cdot C_{26}^2}{C_{52}^4}$$

## Задача 14

Вероятность при трёх бросках кубика получить три разных цифры:

$$P(A) = \frac{A_6^3}{6^3}, A_6^3 = 6 \cdot 5 \cdot 4$$

При броске шести кубиков выпали все цифры:

$$P(A) = \frac{6!}{6^6}$$

## Задача 15

В лифте девятиэтажного здания на первом этаже оказалось 8 студентов. Никто не выходит на первом этаже, какова вероятность того, что лифт не остановится хотя бы на одном этаже.

$$P(A) = 1 - \frac{8!}{8^8}$$

## Задача 16

Какова вероятность, что 10 монет выпадут на одинаковую сторону:

$$P(A) = \frac{2}{2^{10}} = \frac{1}{2^9}$$

## Задача 17

Коробка с 100 шариками, каждый имеет номер от 1 до 100. Какова вероятность вытащить все шары и получить возрастающую последовательность, если:

а) Не возвращать шары в коробку:

$$P(A) = \frac{1}{100!}$$

б) Возвращать шары в коробку:

$$P(A) = \frac{1}{100^{100}}$$

Семинар 13 сентября

## Задача 1

Бросаем три шестигранных кубика, найти вероятность выпадения суммы 11 и 12.

$$|\Omega| = 6^3$$

Комбинаций	$\sum 11$	$\sum 12$	Комбинаций
6	5 - 4 - 2	5 - 5 - 2	3
3	5 - 3 - 3	6 - 5 - 1	6
3	4 - 4 - 3	6 - 4 - 2	6
3	5 - 5 - 1	6 - 3 - 3	3
6	6 - 3 - 2	5 - 4 - 3	6
6	6 - 4 - 1	4 - 4 - 4	1

$$P(A_{11}) = \frac{27}{6^3}, P(A_{12}) = \frac{25}{6^3}$$

## Задача со \* из ДЗ

Какова вероятность, что если взять 4 башмака из 10 пар, получишь пару.  $P(\bar{A}) = \frac{20 \cdot 18 \cdot 16 \cdot 14}{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}$

## Задача 2

В девятиэтажном доме три человека садятся в лифт. Какова вероятность, что лифт остановится для высадки два раза?

$$P(A) = 1 - \frac{8+8 \cdot 7 \cdot 6}{8^3} = \frac{21}{64}$$

$$\frac{A_8^2 \cdot 3}{8^3} = \frac{21}{64}$$

### Задача 3

Имеется 100 чисел. Из них вытаскивают 15 чисел и упорядочивают по возрастанию.

Какова вероятность, что 13 число в полученной последовательности равно 87.

$$\frac{C_{86}^{12} \cdot C_{13}^2}{C_{100}^{15}}$$

### Задача 4

Есть 10 вагонов. Какова вероятность, что два человека окажутся в одном вагоне/ в соседних?

В одном:  $\frac{1}{10}$  (оба в один и тот же вагон, выбрать вагон можно 10 способами)

В соседних:  $\frac{18}{100}$  (9 различных пар (1, 2), (2, 3), (3, 4) и т.д. и наоборот).

## Геометрические вероятности

### Задача 5

В квадрат со стороной  $R$  вписан круг, какова вероятность, что брошенная в квадрат точка попадёт в круг.

$$P(A) = \frac{\pi R^2}{R^2} = \frac{\pi}{4}$$

### Задача 6

На интервале  $[0, 1]$  выбираются точки  $x, y$ , найти вероятность события:

$$x^2 \leq y \leq \sin \frac{\pi x}{2}$$

$$P(A) = \frac{\int_0^1 \sin \frac{\pi x}{2} - x^2 dx}{1} = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \sin \frac{\pi x}{2} d\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{3} = \frac{2}{\pi} \left( -\cos \frac{\pi x}{2} \right) \Big|_0^1 - \frac{1}{3} =$$
$$= \frac{2}{\pi} - \frac{1}{3}$$

## Условные вероятности

### Задача 7

В коробке есть  $n$  белых и  $m$  чёрных шаров.  $A$  = первый шар белый,  $B$  = последний шар чёрный

$$P(A) = \frac{n}{m+n}, P(B) = \frac{m}{m+n}$$

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{n}{m+n} \cdot \frac{m}{m+n-1}}{\frac{m}{n+m}} = \frac{n}{n+m-1}$$

### Задача 8

Два игрока подбрасывают кость по одному разу, побеждает тот, кто выбил больше.  $A$  = победил первый,  $B$  = победитель определён.

$$1. P(A) = \frac{15}{36}$$

$$2. P(B) = \frac{30}{36}$$

$$3. P(A/B) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$$

$$4. P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{15}{36}}{\frac{30}{36}} = \frac{1}{2}, \text{ так как } A \subseteq B$$

События  $A, B$  зависимы, так как  $P(A/B) \neq P(A)$ .

### Задача 9

2 партии по 100 деталей, в каждой партии 10 бракованных деталей.

$A$  = {деталь из первой партии}.

$B$  = {деталь бракованная}.

$$P(A) = \frac{100}{200} = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{20}{200} = \frac{1}{10}$$

$$P(AB) = \frac{10}{200} = \frac{1}{20} \Rightarrow P(AB) = P(A) \cdot P(B), \text{ события независимы}$$

## Задача 10

Почти как задача 9, но во второй 20 бракованных:

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{3}{20}$$

$$P(AB) = \frac{1}{20} \Rightarrow P(A)P(B) \neq P(AB), \text{ события зависимы.}$$

## Формула сложения вероятностей

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i \leq j} P(A_i A_j) + \sum_{i \leq j \leq k} P(A_i A_j A_k) + \dots$$

$$\dots + (-1)^{n+1} (A_1 \dots A_n)$$

$$P(A_1 A_2) = P(A_1)P(A_2/A_1)$$

## Задача 11

В урне 10 белых, 8 синих, 2 красных шара. Одновременно извлекают 3 шара, какова вероятность, что вытас-  
щенные шары одного цвета.

$A = \{\text{вытащили (вовремя) 3 белых шара}\}$   $B = \{\text{вытащили 3 синих шара}\}$

$A_i = \{i\text{-й шар белый}\}$   $B_i = \{i\text{-й шар синий}\}$  Так как  $A, B$  несовместны:  $P(A+B) = P(A) + P(B) = P(A_1 A_2 A_3) +$   
 $P(B_1 B_2 B_3) =$

$$= P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1 A_2) + P(B_1)P(B_2/B_1)P(B_3/B_1 B_2) =$$

$$= \left(\frac{10}{20} \cdot \frac{9}{19} \cdot \frac{8}{18}\right) + \left(\frac{8}{20} \cdot \frac{7}{19} \cdot \frac{6}{18}\right)$$

Семинар 20 сентября.

## Задача 46 из дз

Дано:  $P(A/B) = 0.05$ ,  $P(\overline{AB}) = 0.079$ ,  $P(\overline{AB}) = 0.0089$ ,  $P(\overline{AB}) = 0,782$

Хотим:  $P(B/A)$

$$P(B/A) = \frac{P(BA)}{P(A)}$$

$$P(A) = P(AB + \overline{AB}) = P(AB) + P(\overline{AB}) - \underbrace{P(AB \cap \overline{AB})}_{=0} =$$

$$= 0.05 + 0.079 = 0.129 \Rightarrow P(B/A) = \frac{0.05}{0.129} \approx 0.3875$$

Ответ: 39%

## Задача

5 мальчиков и 10 девочек, какова вероятность, что при разбиении их на 5 равных групп получим только группы  
вида ЖМЖ.

$A_i$  — {в  $i$  группе 2 девочки и 1 мальчик.}

$$P(A_1 A_2 A_3 A_4 A_5) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 A_2) \cdot P(A_4/A_1 A_2 A_3) \cdot P(A_5/A_1 A_2 A_3 A_4) =$$

$$= \frac{C_{10}^2 C_5^1}{C_{15}^3} \frac{C_8^2 C_4^1}{C_{12}^3} \frac{C_6^2 C_3^1}{C_9^3} \frac{C_4^2 C_2^1}{C_6^3} \frac{C_2^2 C_1^1}{C_3^3} 1$$

## Задача

Система состоит из последовательно соединённых резисторов.

$A_i = \{i\text{-й элемент системы работает}\}$ ,  $i = \overline{1, n}$

$A = \{\text{Система работает}\}$

$$A = A_1 \dots A_n$$

$$P(A) = P\left(\prod_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n p_i$$

Если система состоит из параллельно соединённых резисторов, тогда:

$$P(A) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2) = p_1 + p_2 - p_1 p_2$$

## Задача

Обращается русалочка к трём ведьмам, каждая даёт ей сосуд с зельем.

Вероятность отсутствия эффекта:

1. 0.5
2. 0.4
3. 0.3

Она пьёт их по очереди и останавливается, если какое-то сработало. Какова вероятность успеха (хотя бы одно зелье сработало).

$A_i = \{\text{подействует } i\text{-е зелье}\}$

Пусть ни одно не сработало:  $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) =$   
 $= 1 - 0.5 \cdot 0.6 \cdot 0.7 = 0.79$

Другой способ решения:  $P(A) = P(A_1) + P(\bar{A}_1)P(A_2) + P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(A_3) = 0.5 + 0.5 \cdot 0.4 + 0.5 \cdot 0.6 \cdot 0.3 = 0.79$

Ещё один:  $P(A) = P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) -$   
 $- P(A_1A_3) - P(A_2A_3) + P(A_1A_2A_3) = 0.79$

## Задача

Теннисист участвует в турнире, у него есть соперник А и соперник В, известно, что соперник А играет лучше соперника В. Теннисист хочет выиграть два матча подряд, какой порядок ему лучше выбрать?

$A - B - A$  или  $B - A - B$ ?

$P(A) < P(B)$  — вероятность победы.

У него есть варианты: выиграть первые две, проиграть первую и выиграть оставшиеся.

В первом случае:  $(1) = P(A)P(B) + (1 - P(A))P(B)P(A)$

Во втором:  $(2) = P(B)P(A) + (1 - P(B))P(A)P(B)$

$(1) - (2) = P(A)P(B)(1 - P(A) - 1 + P(B)) = P(A)P(B)(P(B) - P(A)) > 0 \Rightarrow (1) > (2)$

В первом случае вероятность победы больше.

## Задача

Два равносильных шахматиста играют между собой матчи, ничьих быть не может. Какое событие более вероятно:

$$C_4^3 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{4!}{3!1!} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$$

$$C_8^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{7}{32}$$

Вероятность выиграть 3 из 4 больше.

## Задача

В круг радиуса  $r$  вписан квадрат. В круг кидают 4 точки, какова вероятность попадания ровно 3 точек в квадрат.

$$p = \frac{2r^2}{\pi r^2} = \frac{2}{\pi} - \text{вероятность попасть в квадрат.}$$

$$q = 1 - p = \frac{1}{\pi}$$

$$C_4^3 \cdot \left(\frac{2}{\pi}\right)^3 \cdot \frac{1}{\pi} = \frac{32(\pi-2)}{\pi^4}$$

## Задача

Стрелок попадает в 10 с вероятностью 0.7, а в 9 с вероятностью 0.3. Какова вероятность получения за 3 выстрела не менее 29 очков.

Нас устраивают события:

$A_{29} = \{\text{Набрал 29 очков}\}$ ,  $A_{30} = \{\text{Набрал 30 очков}\}$

$$P(A_{29} + A_{30}) = P(A_{29}) + P(A_{30}) = C_3^2(0.7)^2 \cdot 0.3 + (0.7)^3 = 0,784$$

## Задача

7 писем. 0.6 - письмо отправлено Онегину, 0.4 - письмо отправлено Ленскому.

$$A_i = \{\text{Ровно } i \text{ писем отправлено Онегину}\}. p(A) = P(A_7) + P(A_6) + P(A_5) = (0.6)^7 + 7(0.6)^6 \cdot 0.4 + {}^2_7 0.6^5 \cdot 0.4^2$$

## Задача

Стрелок попадает в мишень с вероятностью 0,7. Ему позволяют стрелять до трёх промахов. Какова вероятность того, что он сделает ровно 8 выстрелов.

$$C_7^2(0,7)^5 \cdot 0,3^2 \cdot 0,3 \quad (\text{Два промаха можно как-то расположить в первых 7 выстрелах, последний всегда восьмой}).$$

## Задача

Всего 5 испытаний, вероятность искажения результата - 0,1. А = ни одного искажённого. Б = не менее двух искажённых. В = Искажённых больше, чем неискажённых.

$$P(A) = 0,9^5, \quad P(B) = 1 - 0,9^5 - (C_5^1 \cdot 0,1 \cdot 0,9^4),$$

$$P(B) = P(B) - C_5^2 \cdot 0,1^2 \cdot 0,9^3$$

## Задача

Гипотезы при подбрасывании двух кубиков:

$$\begin{cases} H_1 = \{\text{На 1-м кубике выпала "1"}\} \\ \dots \\ H_6 = \{\text{На 1-м кубике выпала "6"}\} \\ H_1 = \{1 \text{ --- } 1\} \\ \dots \\ H_{36} = \{6 \text{ --- } 6\} \\ H_1 = \{\text{На 1-м --- чётное}\} \\ H_2 = \{\text{На 1-м --- чётное}\} \end{cases}$$

Семинар 27 сентября

## Формула полной вероятности

$H_1, \dots, H_n$  — полная группа событий.  $i \neq j \Rightarrow H_i \cdot H_j = \emptyset$ ,  $H_1 + \dots + H_n = \Omega$

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i)$$

$$P(H_k/A) = \frac{P(H_k)P(A/H_k)}{\sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i)}$$

## Задача

Какова вероятность успешного переливания крови от одного человека к другому? Произошло успешное переливание, какова вероятность, что кровь переливали человеку с 1 группой? С 4 группой?

Медицинская справка:

Первой группе крови можно переливать только первую

Второй — вторую и первую

Третьей — первую и третью

Четвёртой — любую.

$$A = \{\text{Успешное переливание}\}$$

$$H_i = \{\text{У больного } i \text{ группа}\}, \quad i = \overline{1, 4}, \quad \text{по условию: } P(H_1) = 0.33,$$

$$P(H_2) = 0.36, P(H_3) = 0.23, P(H_4) = 0.08$$

$$P(A/H_1) = 0.33, P(A/H_2) = 0.69, P(A/H_3) = 0.56, P(A/H_4) = 1$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^4 P(A/H_i)P(H_i) = 0.33^2 + 0.36 \cdot 0.69 + 0.23 \cdot 0.56 + 0.08 = 0.5661$$

$$P(H_1/A) = \frac{P(A/H_1)P(H_1)}{P(A)} = \frac{0.33^2}{0.5661} \approx 0,19237$$

$$P(H_4/A) = \frac{P(A/H_4)P(H_4)}{P(A)} = \frac{0.08}{0.5661} \approx 0.14$$

## Задача

Две корзинки, в каждой по 10 бутылок, в первой корзине 2 отравленные, во второй — 3, по пути одна бутылка из первой корзины разбилась. Какова вероятность не отравиться при распитии одной бутылки?

$A = \{\text{распитие благополучно}\}$

$H_1 = \{\text{бутылка из 1 корзины}\}, P(H_1) = \frac{1}{2}$

$H_2 = \{\text{бутылка из 2 корзины}\}, P(H_2) = \frac{1}{2}$

Так как выбираем корзину, а не бутылку из неё.

$P(A/H_1) = 0.8, P(A/H_2) = 0.7$ . Вспоминаем задау про выученные билеты (поэтмоу вероятность отравиться бутылкой из первой корзины не поменяется).

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) = \frac{8}{20} + \frac{7}{20} = \frac{3}{4}$$

## Задача

По каналу передаётся два вида сигналов  $x, y$ , при этом  $y$  передаётся в три раза чаще  $x$ .  $x$  искажается в 10% случаев, а  $y$  — в 20%. По каналу передан какой-то сигнал, какова вероятность, что будет получен сигнал  $x$ ? Какова вероятность, что при получении сигнала  $x$  он и был передан?

$H_1 = \{\text{Передавали } x\}, P(H_1) = \frac{1}{4}$

$H_2 = \{\text{Передавали } y\}, P(H_2) = \frac{3}{4}$

$A = \{\text{Зафиксирован } x\},$

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) = \frac{1}{4}0.9 + \frac{3}{4}0.2 = \frac{3}{8}$$

$$B = H_1/A \Rightarrow P(B) = P(H_1/A) = \frac{P(A/H_1)P(H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{9}{40}}{\frac{3}{8}} = \frac{3}{5} = 0.6$$

## Задача

Три стрелка стреляют по мишени. Они соответственно попадают в мишень с вероятностью:

стрелок  $\frac{4}{5}$

стрелок  $\frac{3}{4}$

стрелок  $\frac{2}{3}$

Все трое выстрелили одновременно, в мишень попали два раза. Какое событие более вероятно: промах третьего стрелка или его попадание?

$A = \{\text{попали ровно 2 раза}\}$

$H_1 = \{\text{третий попал}\}, P(H_1) = \frac{2}{3}$

$H_2 = \{\text{третий промахнулся}\}, P(H_2) = \frac{1}{3}$

$$P(A/H_1) = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{7}{20}$$

$$P(A/H_2) = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

$$P(A) = P(A/H_1)P(H_1) + P(A/H_2)P(H_2) = \frac{7}{20} \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{30} + \frac{1}{5} = \frac{13}{30}$$

$$P(H_1/A) = \frac{P(A/H_1)P(H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{7}{20} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{13}{30}} = \frac{7}{30} \cdot \frac{30}{13} = \frac{7}{13}$$

## Задача

Было две урны. В первой 5 белых шаров и 1 чёрный, во второй — 3 белых и 3 чёрных.

Из первой урны взяли два шара, из второй один и поместили их в третью урну. Какова вероятность того, что наугад вытащенный из третьей урны шар окажется белым?

$A = \{\text{Вытащили белый шар из третьей урны}\}$



$H_1 = \{\text{Вытащенный шар был в первой урне}\}$   
 $H_2 = \{\text{Вытащенный шар был во второй урне}\}$

$$P(A/H_1) = \frac{5}{6}$$

$$P(A/H_2) = \frac{1}{2}$$

$$P(H_1) = \frac{2}{3}$$

$$P(H_2) = \frac{1}{3}$$

$$P(A) = P(A/H_1)P(H_1) + P(A/H_2)P(H_2) = \frac{10}{18} + \frac{1}{6} = \frac{13}{18}$$

Семинар 4 октября

Решаем какие-то задачки из учебника.

## Задача

$$\begin{array}{c|c|c|c} \xi & -1 & 0 & 1 \\ \hline p & p_1 & p_2 & p_3 \end{array}, E\xi = 0, D\xi = 0.5. \text{ Найти } p_1, p_2, p_3.$$

$$\begin{array}{c|c|c} \xi & 0 & 1 \\ \hline p & p_2 & p_1 + p_3 \end{array}, D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = E\xi^2 = p_1 + p_3$$

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\ p_1 = p_3 \\ p_1 + p_3 = 0.5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 = 0.25 \\ p_2 = 0.5 \\ p_3 = 0.25 \end{cases}$$

## Задача

a.

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} \xi & -0,5 & 0 & 0,5 & 1 & 1,5 \\ \hline p & 0,1 & 0,4 & 0,1 & 0,3 & 0,1 \end{array}$$

$$Y = 10x - 1 \Rightarrow \begin{array}{c|c|c|c|c|c} Y & -6 & -1 & 4 & 9 & 14 \\ \hline p & 0,1 & 0,4 & 0,1 & 0,3 & 0,1 \end{array}$$

$$EY = \sum_{i=1}^n y_i p_i = 3,5$$

$$DY = 3,5^2$$

b.

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} \xi & -0,25 & 0 & -1 & -2,25 \\ \hline p & 0,2 & 0,4 & 0,3 & 0,1 \end{array}$$

$$Y = -x^2 \Rightarrow EY = -0,53$$

$$DY = 0,25^2 \cdot 0,2 + 0,3 + 2,25^2 \cdot 0,1 - (-0,53)^2$$

## Задача

$$\begin{array}{c|c|c|c} \xi & 2 & 1 & 0 \\ \hline p & \frac{28}{45} & \frac{16}{45} & \frac{1}{45} \end{array}$$

$$P(\xi = 2) = \frac{C_8^2}{C_{10}^2} = \frac{7 \cdot 8}{9 \cdot 10} = \frac{28}{45}$$

$$P(\xi = 1) = \frac{2 \cdot 8}{10 \cdot 9} \cdot 2 = \frac{16}{45}$$

$$P(\xi = 0) = \frac{1}{C_{10}^2} = \frac{1}{45}$$

$$E\xi = \frac{2 \cdot 28 + 16}{45} = \frac{72}{45} = \frac{8}{5}$$

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{128}{45} - \frac{64}{25}$$

## Задача

В связке есть ключи, человек пробует все ключи, пока не подберёт нужный. Сколько в среднем ключей он переберёт?

$\xi$  — количество попыток. Показана вероятность успеха.

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} \xi & 1 & 2 & \dots & 10 \\ \hline p & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \dots & \frac{1}{10} \end{array}$$

$$E\xi = \frac{55}{10} = 5,5$$

## Задача

Есть 4 стула, в одном из них драгоценности. Человек ломает стулья, пока не найдёт драгоценности. Сколько стульев в среднем будет сломано?  $\xi$  — количество сломанных стульев.

$$\frac{\xi}{p} \left| \begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} \end{array} \right| \Rightarrow \frac{\xi}{p} \left| \begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array} \right|$$

$$E\xi = \frac{1}{4}(1 + 2 + 3 + 4) = \frac{10}{4}$$

$$\mathcal{D}\xi = E(\xi^2) - 2,5^2 = \frac{30}{4} - 6,25 = \frac{20}{16} = \frac{5}{4}$$

## Задача

$$P(\xi = k) = \frac{c}{k(k+1)}$$

$$c - ?, P(\xi \leq 10) - ?, P(10 \leq \xi \leq 20) - ?$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c}{k(k+1)} = 1 \Rightarrow c \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1$$

$$c \lim_{k \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{k} \right) = 1 \Rightarrow c \cdot 1 = 1 \Rightarrow c = 1$$

$$P(\xi = k) = \frac{1}{k(k+1)}$$

$$P(\xi \leq 10) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{11} = \frac{10}{11}$$

$$P(10 \leq \xi \leq 20) = P(\xi \leq 20) - P(\xi \leq 9) = \left( 1 - \frac{1}{21} \right) - \left( 1 - \frac{1}{10} \right) = \frac{11}{210}$$

$$E\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} - \text{расходится.}$$

$$E\xi = +\infty$$

11 октября

$$\text{Разбор задач из домашнего задания. } F_{\xi}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x}, & x \geq 1 \\ 0, & x < 1 \end{cases}$$

$$\text{Найти а: } P(\xi > a) = \frac{1}{3}$$

$$P(\xi > a) = 1 - F_{\xi}(a) = \frac{1}{3}$$

$$F_{\xi}(x) = \frac{2}{3}$$

$$\begin{cases} 1 - \frac{1}{x} = \frac{2}{3} \\ x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} = \frac{1}{x} \\ x \geq 1 \end{cases}$$

$$x = 3 \Rightarrow a = 3$$

## Распределения

Распределение Бернулли:  $\xi \sim \text{Ber}(p)$

$$\frac{\xi}{p} \left| \begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline p & 1-p=q \end{array} \right| p, E\xi = p, \mathcal{D}\xi = pq$$

Биномиальное распределение.

Распределение Пуассона.

Геометрическое распределение.

## Задача

С вероятностью  $\frac{5}{6}$  яблоко падает недалеко от яблони, всего 10 яблок. Случайная величина  $\xi$  — количество яблок, которые упали недалеко от яблони.

$$\xi \sim \text{Bi}(10, \frac{5}{6})$$

$$E\xi = \frac{25}{3}, \mathcal{D}\xi = \frac{25}{18}.$$

## Задача

$$\xi \sim \text{Bi}(4, 0.7)$$

$$E\xi = 2,8$$

$$\mathcal{D}\xi = 0,24$$

$$Z_{\frac{8}{1000}} = \min(x, F(x) \geq \frac{8}{1000})$$

$$F(0) = \frac{81}{10000} > \frac{8}{1000} \Rightarrow Z_{\frac{8}{1000}} = 0$$

## Задача

Три стрелка, вероятность попадания:

1. 0,7

2. 0,6

3. 0,5

Каждый выстрелил по одному разу, какое среднее количество попаданий?

$$\xi_1 \sim \text{Bi}(1, 0.7), \xi_2 \sim \text{Bi}(1, 0.6), \xi_3 \sim \text{Bi}(1, 0.5)$$

$$E\xi = E(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) = E\xi_1 + E\xi_2 + E\xi_3 = 1.8$$

Так как события независимы, их ковариация равна 0, поэтому:

$$\mathcal{D}\xi = \mathcal{D}\xi_1 + \mathcal{D}\xi_2 + \mathcal{D}\xi_3 = 0,7 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,4 + 0,5 \cdot 0,5 = 0,7$$

## Задача

Известно, что бутерброд падает маслом вниз с вероятностью 0,999. Некий экспериментатор уронил бутерброд 1000 раз. Какова вероятность, что бутерброд упадёт маслом вверх более 2 раз?  $\xi$  — маслом вверх.

$$\xi \sim \text{Bi}(1000, 0.001)$$

Хотелось бы отпуассонить (аппроксимировать распределением Пуассона) это распределение.

$$\text{После аппроксимации: } \Delta = \left| C_n^k p^k q^{n-k} - \frac{e^{-np} (np)^k}{k!} \right| \leq np^2$$

$$\Delta = 0.001. \text{ Можем аппроксимировать: } \xi \sim \Pi(1), \lambda = np = 1$$

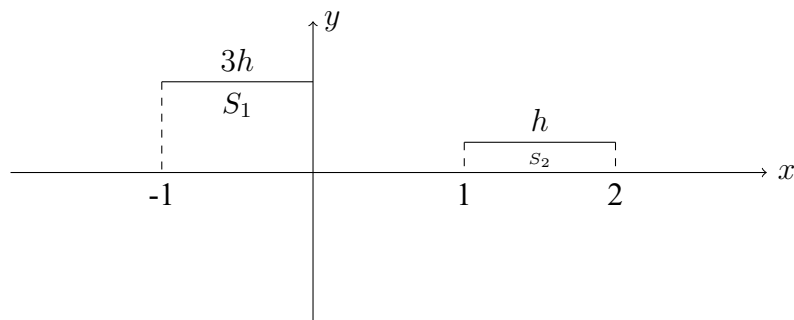
$$P(\xi > 2) = 1 - P(\xi \leq 2) = 1 - P(\xi = 0) - P(\xi = 1) - P(\xi = 2) = \\ = 1 - \frac{e^{-1}1^0}{0!} - \frac{e^{-1}1^1}{1!} - \frac{e^{-1}1^2}{2!} = 1 - \frac{5}{2e}$$

## Задача

$$\xi \sim G(0, 2) \Rightarrow E\xi = 5. \text{ Наиболее вероятное значение: } P(\xi = k) = q^{k-1}p \leq p = 0,2 \Rightarrow k = 1$$

Семинар 1 ноября

Задача 34 страница 93.



$$S = S_1 + S_2 = 3h + h = 4h = 1 \Rightarrow h = \frac{1}{4}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -1) \\ \int_{-\infty}^{-1} 0 \, dt + \int_{-1}^x \frac{3}{4} \, dt = \frac{3}{4}(x+1), & x \in [-1, 0] \\ \int_{-\infty}^{-1} 0 \, dt + \int_{-1}^1 \frac{3}{4} \, dt + \int_0^x 0 \, dt = \frac{3}{4}, & x \in (0, 1) \\ \int_{-\infty}^{-1} 0 \, dt + \int_{-1}^1 \frac{3}{4} \, dt + \int_0^1 0 \, dt + \int_1^x \frac{1}{4} \, dt = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}(x-1), & x \in [1, 2] \\ 1, & x \in (2, +\infty) \end{cases}$$

$M[\ ]$  — матожидание.

$$M[(2-x)(3-x)] = M[6 - 5x + x^2] = M[6] - M[5x] + M[x^2] =$$

$$= 6 - 5 \left( \int_{-1}^0 x \frac{3}{4} \, dx + \int_1^2 x \cdot \frac{1}{4} \, dx \right) + \left( \int_{-1}^0 x^2 \cdot \frac{3}{4} \, dx + \int_1^2 x^2 \cdot \frac{1}{4} \, dx \right)$$

$$\mathcal{D}[2-3x] = 9\mathcal{D}[x] = 3(M[x^2] - M^2[x])$$

## Распределение Гаусса

$$\xi \sim N(m, \sigma^2)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\Phi_0(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt$$

$$P(\alpha < \xi < \beta) = \Phi_0\left(\frac{\beta-m}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{\alpha-m}{\sigma}\right)$$

Находим значения  $\Phi_0$  через таблицу функции Лапласа.

Если  $x > 5$ , то  $\Phi_0(x) = 0.5$

## Задача

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{72\pi}} e^{-\frac{(x+3)^2}{72}} \Rightarrow \xi \sim N(-3, 36)$$

$$P(0 < \xi < 12) = \Phi_0\left(\frac{12-12}{3}\right) - \Phi_0\left(\frac{0-12}{3}\right) = \Phi_0(0) - \Phi_0(-4) = 0 + \Phi_0(4) = 0.4999683$$

$$\text{Второй начальный момент } \mu_2 = E\xi^2 = \mathcal{D}\xi + (E\xi)^2 = 9 + 12^2 = 153$$

$$\mathcal{D}(5-3\xi) = 9\mathcal{D}(\xi) = 9 \cdot 9$$

## Задача 51 стр 94

По условию  $\xi \sim N(0, 0.4^2)$ . Нужно посчитать  $P(-0.7 < \xi < 0.7) = \Phi_0\left(\frac{0.7}{0.4}\right) - \Phi_0\left(\frac{-0.7}{0.4}\right) = 2\Phi_0\left(\frac{7}{4}\right) \approx 2 \cdot 0.46 = 0.92$

В общем случае:  $P(|\xi - E\xi| < \delta) = 2\Phi_0\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$

Пусть  $\eta$  — количество годных шариков из 50 изготовленных. Заметим, что  $\eta \sim Bi(50, 0.92) \Rightarrow E\eta = n \cdot p = 50 \cdot 0.92 = 46$

## Задача

$$\xi \sim N(0, 1)$$

$Z_{0.9} - ? \Rightarrow \Phi_0(Z_{0.9}) = 0.9 - 0.5 = 0.4$  (так как интегрировать надо от  $-\infty$ , а не от 0, а  $\int_{-\infty}^0 \dots = \frac{1}{2}$ ), тогда

$$Z_{0.9} \approx 1.29.$$

Отсюда можно посчитать  $Z_{0.1} = -Z_{0.9} = -1.29$

Интересный факт  $P(-1.65 < \xi < 1.65) = 0.9$ . И ещё один:

$$P(|\xi| < 1.96) = 0.95$$

1.96 является знаменитой точкой, использующейся в подсчёте доверительных интервалов (случайная величина попадает в него с вероятностью 95 процентов, немало).

## Теория

$\xi \sim f_\xi(x)$ ,  $\eta = \phi(\xi)$ ,  $f_\eta(y)$ —?

Пусть  $\varphi(x)$  — монотонная функция.  $y = \varphi(x)$ ,  $x = \varphi^{-1}(y)$

$$f_\eta(y) = f_\xi(\varphi^{-1}(y)) \left| (\varphi^{-1}(y))' \right|$$

Разобьём  $\varphi$  на отрезки монотонности (пусть их  $k$  штук):

$$f_\eta(y) = \sum_{i=1}^k f_\xi(\varphi_i^{-1}(y)) \left| (\varphi_i^{-1}(y))' \right|$$

## Задача

$\xi \sim N(0, \sigma^2)$

a.  $\eta = \xi^3$ ,  $f_\eta(y)$ —?,  $f_\eta(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\left(y^{\frac{1}{3}}\right)^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{3} \cdot y^{-\frac{2}{3}}$

b.  $\eta = \xi^2$ . Разбиваем на интервалы монотонности:

$$\varphi_1^{-1}(y) = -\sqrt{y}, \varphi_2^{-1}(y) = \sqrt{y} \Rightarrow (\varphi_1^{-1})' = -\frac{1}{2}\sqrt{y} = -(\varphi_2^{-1})'$$

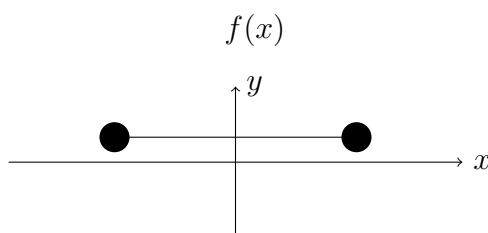
$$f_\eta(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y}{2\sigma^2}} \cdot \left| \frac{1}{2\sqrt{y}} \right| \cdot 2, x > 0$$

При  $x \leq 0$ :  $f_\eta(y) = 0$

Семинар 8 ноября

Разбор домашнего задания.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

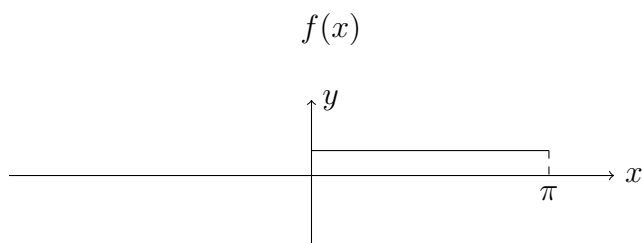


$\eta = \sin \xi = \varphi(\xi)$

$\varphi^{-1}(y) = \arcsin y$

$$(\varphi^{-1}(y))' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$f_\eta(y) = f_\xi(\varphi^{-1}(y)) (\varphi^{-1}(y))' = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, & y \in (-1, 1) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$



$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & x \in [0, \pi] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\eta = \sin \xi$$

$$\varphi_1^{-1}(y) = \arcsin(y)$$

$$\varphi_2^{-1}(y) = \pi - \arcsin(y)$$

$$(\varphi_1^{-1}(y))' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$(\varphi_2^{-1}(y))' = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$f_{\eta}(y) = \sum_{i=1}^2 f_{\xi} \varphi_i^{-1}(y) \left| (\varphi_i^{-1}(y))' \right| = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, & y \in (0, 1) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

## Многомерные случайные величины

$\xi_1, \xi_2$	$y_1, \dots$	$y_j$	$\dots, y_k$
$x_1$	$\vdots$	$\vdots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$x_i$	$\dots$	$p_{ij}$	
$\vdots$			
$x_m$			

$$p_{ij} = p(\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j)$$

$$\sum_i \sum_j p_{ij} = 1$$

$$p_{i\bullet} = \sum_{j=1}^m p_{ij}, p_{\bullet j} = \sum_{i=1}^k p_{ij}$$

$$\text{cov}(\xi_1, \xi_2) = E(\overset{\circ}{\xi_1} \overset{\circ}{\xi_2}) = E\xi_1 \xi_2 - E\xi_1 E\xi_2$$

$$E\xi_i \xi_j = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k x_i \cdot y_j \cdot p_{ij}$$

## Задача

Построить одномерное распределение, определить матожидание и дисперсию двумерной случайной величины.

$\downarrow \xi, \eta \rightarrow$	-1	0	1
-2	0.1	0.2	0.3
2	0.1	0.1	?

За знаком ? стоит вероятность 0.2, так как сумма всех вероятностей в таблице должна равняться 1.

Построим табличку, где  $p_{ij} = p_{i\bullet} \cdot p_{\bullet j}$

Строить не будем, так как уже  $p_{11} \neq p_{1\bullet} \cdot p_{\bullet 1}$ , так как  $0.1 \neq 0.2 \cdot 0.6 = 0.12$

$$E\xi = -1.2 + 0.8 = -0.4$$

$$E\eta = -0.2 + 0.5 = 0.3$$

$\xi + \eta$	-3	-2	-1	1	2	3
	0.1	0.2	0.3	0.1	0.1	0.2

$$E(\xi + \eta) = -0.3 - 0.4 - 0.3 + 0.1 + 0.2 + 0.6 = -0.1 = E\xi + E\eta$$

$$\mathcal{D}\xi = 4 - 0.16 - 3.84$$

$$\mathcal{D}\eta = 0.2 + 0.5 - 0.09 = 0.61$$

$$\mathcal{D}(\eta + \xi) = 9 \cdot 0.3 + 4 \cdot 0.3 + 0.4 \cdot 1 - 0.01 = 2.7 + 1.2 + 0.4 - 0.01 = 4.29 = E(\eta + \xi)^2 - (E(\eta + \xi))^2$$

$\xi \cdot \eta$	-2	0	2
	0.4	0.3	0.3

$$\text{cov}(\xi, \eta) = E(\xi\eta) - E\xi E\eta = -0.2 + 0.12 = -0.08$$

Проверим корректность

$$\mathcal{D}(\eta + \xi) = \xi + \eta + \text{cov}(\xi, \eta) = 0.61 + 3.84 - 2 \cdot 0.08 = 4.29$$

Верно.

## Задача

Изучение таблички (доделать дома).

$\xi$  — материальное положение.

$\eta$  — уровень образования.

Определить зависимость и коэффициент корреляции.

$\eta, \xi$	1	2	3
1	0.083	0.035	0.001
2	0.31	0.375	0.026
3	0.04	0.116	0.014

Семинар 15 ноября

## Задача 7 стр 132

Запишем условие в виде таблицы:

B \ A	1	0	sum
1	$\frac{25}{1000}$	$\frac{2}{100}$	$\frac{45}{1000}$
0	$\frac{5}{1000}$	$\frac{95}{100}$	$\frac{955}{1000}$
sum	$\frac{3}{100}$	$\frac{97}{100}$	1

Посчитаем вероятность произведения:

AB	1	0
P	$\frac{25}{1000}$	$\frac{975}{1000}$

$$\text{cov}(A, B) = E(AB) - EA \cdot EB = \frac{25}{1000} - \frac{3}{100} \cdot \frac{45}{1000} = \frac{2365}{10000}$$

## Задача 1

я решал, перепишу с фотографии.

## Задача 2

$$\text{Дано } f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4} \sin x \sin y, & \text{если } 0 \leq x, y \leq \pi \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\xi = (\xi_1, \xi_2), P(\xi \in \mathcal{D})$$

$$f_{\xi_1}(x) = \int_0^{\pi} \frac{1}{4} \sin x \sin y dy = \frac{1}{4} \sin x (-\cos y) \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2} \sin x, x \in [0, \pi]$$

$$f_{\xi_2}(y) = \int_0^{\pi} \frac{1}{4} \sin x \sin y dx = \frac{1}{4} \sin y (-\cos x) \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2} \sin y, y \in [0, \pi]$$

Заметим, что  $f_{\xi}(x, y) = f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(y)$ , значит  $\xi_1, \xi_2$  независимы  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow \text{cov}(\xi_1, \xi_2) = 0$

$$P(\xi \in \mathcal{D}) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{4} \sin x \sin y dy dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4} \sin x \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{3}-1}{8} \sin x dx = \frac{\sqrt{3}-1}{8} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{8} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Посчитаем вектор матожидания:

$$\begin{aligned} E\xi_1 = E\xi_2 &= \int_0^{\pi} \frac{x}{2} \sin x dx = \int_0^{\pi} \frac{x}{2} d \cos x = -\frac{x \cos x}{2} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\frac{\cos x}{2} dx = \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{\sin x}{2} \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Получается  $E\xi = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ .

$K_\xi = \begin{pmatrix} ? & 0 \\ 0 & ? \end{pmatrix}$ . Найдём дисперсии:

$$E\xi_1^2 = E\xi_2^2 = \int_0^\pi \frac{x^2}{2} \sin x \, dx = -\frac{x^2 \cos x}{2} \Big|_0^\pi + \int_0^\pi x \cos x \, dx = \frac{\pi^2}{2} - \int_0^\pi \sin x \, dx = \frac{\pi^2}{2} - 2$$

$$\mathcal{D}\xi_1 = \mathcal{D}\xi_2 = \frac{\pi^2}{2} - 2 - \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{4} - 2$$

$$\text{Итак, } K_\xi = \begin{pmatrix} \frac{\pi^2}{4} - 2 & 0 \\ 0 & \frac{\pi^2}{4} - 2 \end{pmatrix}$$

Семинар 22 ноября

## Задача 1

$\xi_1 \sim R(0, 1)$ ,  $\xi_2 \sim R(0, 1)$ ,  $\xi_2$  и  $\xi_1$  независимы.

Найти  $\xi = \xi_1 + \xi_2$ . Для решения воспользуемся формулой свёртки:

$$f_\xi(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(z-x) \, dx$$

$$f_{\xi_1}(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, 1) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$f_{\xi_2}(z-x) = \begin{cases} 1, & x \in (z-1, z) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Рассмотрим случаи:

$z \in (0, 1)$  Тогда нас интересует интервал  $(0, z)$

$z \in (1, 2)$  Тогда —  $(z-1, 1)$

Во всех остальных случаях произведение функций будет 0.

Получаем плотность распределения  $\xi$ :

$$f_\xi(z) = \begin{cases} z, & z \in (0, 1) \\ 2-z, & z \in (1, 2) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Дана таблица двумерного дискретного распределения.

## Задача 5 стр. 131-132

$E(y \mid x = 1)$

$y \backslash x$	-1	1
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
2	0	$\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{3}$	0

$$P(x = 1) = \frac{1}{2},$$

$$P(y = 1 \mid x = 1) = \frac{2}{3},$$

$$P(y = 2 \mid x = 1) = \frac{1}{3},$$

$$P(y = 3 \mid x = 1) = 0$$

$$E(y \mid x = 1) = 1 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

$$E(y) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{11}{6}$$



## Задача про табличку с данными

$$\begin{aligned}P(\eta = 1 \mid \xi = 1) &= \frac{0.085}{0.119} \approx 0.697 \\P(\eta = 2 \mid \xi = 1) &= \frac{0.035}{0.119} \approx 0.294 \\P(\eta = 3 \mid \xi = 1) &= \frac{0.001}{0.119} \approx 0.009 \\E(\eta \mid \xi = 1) &= 1 \cdot 0.697 + 2 \cdot 0.294 + 3 \cdot 0.009 = 1.312\end{aligned}$$

Семинар 29 ноября.

Вспоминаем неравенство Чебышёва:  $E|\xi|^r < \infty \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad P(|\xi| > \varepsilon) \leq \frac{E|\xi|^r}{\varepsilon^r}$

## Задача

Найди вероятность того, что в некоторой области скорость ветра превысит 80 км/ч, если:

а)  $E\xi = 16 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$

б)  $E\xi = 16 \frac{\text{км}}{\text{ч}}, \sigma = 4 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$

В пункте а:  $P(\xi > 80) \leq \frac{E\xi}{80} = \frac{16}{80} = 0.2$

В пункте б: можем воспользоваться  $\sigma$  для нахождения матожидания квадрата:

$$E\xi^2 = D\xi + (E\xi)^2 = 16 + 256 = 272 < \infty$$

$$P(\xi > 80) \leq \frac{E\xi^2}{80^2} = \frac{272}{80^2} = 0.0425$$

## Задача

Пусть  $\xi = \{\text{Количество доживших до 50 лет среди 1000 новорождённых}\}$

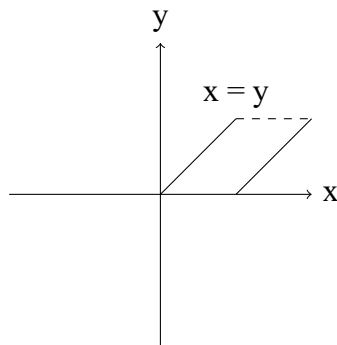
$$\xi \sim Bi(1000, 0.87). \text{ Можем оценить } P(\underbrace{|\frac{\xi}{1000} - 0.87|}_{\eta} > 0.04) \leq \frac{D\frac{\xi}{n}}{0.04^2}$$

Из свойств биномиального распределения:  $E\xi = np$ ,  $E\frac{\xi}{n} = p$ ,  $D\xi = npq$ ,  $D\frac{\xi}{n} = \frac{pq}{n}$

Тогда  $P(|\eta| > 0.04) \leq 0.07 \Rightarrow P(|\eta| < 0.04) \geq 1 - 0.07 = 0.93$ .

## Задача

$$f(x, y) = \begin{cases} axy, & 0 < y < 1, y < x < y + 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$



$$\int_0^1 \int_y^{y+1} f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_y^{y+1} axy dx dy = \int_0^1 \int_y^{y+1} a \frac{x^2}{2} y \Big|_y^{y+1} dy = \int_0^1 ay^2 + \frac{ay}{2} dy = \frac{a}{3} + \frac{a}{4} = 1 \Rightarrow a = \frac{12}{7}$$

$$f_{\xi_1}(x) = \begin{cases} \int_0^x \frac{12}{7} xy dy = \frac{6x^3}{7}, & 0 < x < 1 \\ \int_{x-1}^1 \frac{12}{7} xy dy = \frac{6y^2}{7} x \Big|_{x-1}^1 = \frac{6x^2}{7}(2-x), & 1 < x < 2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$f_{\xi_2}(y) = \begin{cases} \int_y^{y+1} \frac{12}{7} xy dx = \frac{6y}{7}(2y+1), & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$f_{\xi_1}(x | y) = \begin{cases} \frac{\frac{12}{7}xy}{\frac{6}{7}y(2y+1)} = \frac{2x}{2y+1}, & y < x < y+1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$f_{\xi_2}(y | x) = \begin{cases} \frac{\frac{12}{7}xy}{\frac{6}{7}x^3} = \frac{2y}{x^2} & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ \frac{\frac{12}{7}xy}{\frac{6}{7}x^2(2-x)} = \frac{2y}{x(2-x)} & 1 < x < 2, 0 < y < 1 \end{cases}$$

$$E(\xi_2 | \xi_1 = 1) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\xi_1}(x | y) dx = \int_1^2 \frac{x}{3} dx = \frac{2x^2}{6} \Big|_1^2 = \frac{14}{9}$$

Семинар 6 декабря

Пусть  $\zeta = (\xi, \eta)$ , где  $\xi$  — рост человека, а  $\eta$  — вес.  $\zeta \sim N(m_\zeta, K_\zeta)$ ,  $m_\zeta = (175, 74)^T$ ,  $K_\zeta = \begin{pmatrix} 49 & 26 \\ 26 & 36 \end{pmatrix}$

$$E(\xi - \eta) = E(\xi) - E(\eta) = 175 - 74 = 101$$

$$\mathcal{D}(\xi - \eta) = \mathcal{D}(\xi) + \mathcal{D}(\eta) + 2 \operatorname{cov}(\xi, -\eta) = 49 + 36 - 2 \cdot 26 = 33$$

$$\xi - \eta \sim N(101, 33)$$

Считается, что человек страдает избыточным весом, если  $\xi - \eta \leq 90$ . Посчитаем вероятность этого события:

$$P(\xi - \eta \leq 90) = \Phi_0\left(\frac{90-101}{\sqrt{33}}\right) - \Phi_0(-\infty) = -\Phi_0\left(\sqrt{\frac{11}{3}}\right) + \frac{1}{2} = 0,5 - 0,4719 = 0,0281$$

По теореме о нормальной корреляции:

$$E(\xi | \eta = y) = E(\xi) + \frac{\operatorname{cov}(\xi, \eta)}{\mathcal{D}\eta}(y - E(\eta))$$

$$\mathcal{D}(\xi | \eta = y) = \mathcal{D}(\xi) - \frac{(\operatorname{cov}(\xi, \eta))^2}{\mathcal{D}\eta}$$

Нас интересуют следующие величины:

$$E(\eta | \xi = 180) = 74 + \frac{26}{49} \cdot (180 - 175) = 76,65$$

$$E(\eta | \xi = 190) = 74 + \frac{26}{49} \cdot (190 - 175) = 81,96$$

$$\forall a \mathcal{D}(\eta | \xi = a) = 36 - \frac{26^2}{49} = 22,2$$

## Центральная предельная теорема

Считается, что шаг пешехода распределён равномерно от 0,7 до 0,8 метра. Какова вероятность, что за 10 000 шагов человек пройдёт от 7,49 до 7,51 километра?

$\xi_i$  — длина  $i$ -го шага,  $\xi_i \sim R(0,7; 0,8)$

$$n = 10\,000, S = \sum_{k=1}^n \xi_k.$$

$$E\left(\sum_{k=1}^n \xi_k\right) = \sum_{k=1}^n E(\xi_k) = n \cdot \frac{0,7+0,8}{2} = 0,75n = 7500$$

$$\mathcal{D}(\xi_i) = \frac{(0,8-0,7)^2}{12} = \frac{1}{1200}, \mathcal{D}(S) = \frac{10\,000}{1200} = \frac{100}{12} = \frac{25}{3}$$

$$\frac{S-7500}{\sqrt{\mathcal{D}(S)}} = \frac{S-7500}{\frac{5}{\sqrt{3}}} \sim U(0, 1) \Rightarrow P(7490 < S < 7510) = 2\Phi_0\left(\frac{10}{\frac{5}{\sqrt{3}}}\right) = 2\Phi_0(2\sqrt{3}) \approx 2 \cdot 0,4997 = 0,9994$$

## Задача

Мальчик рождается с вероятностью 0,52. Найти вероятность того, что среди 1 000 новорождённых девочек окажется не меньше, чем мальчиков.

$$\xi \sim Bi(1000; 0,52), E\xi = 520, \mathcal{D} = 520 \cdot 0,48 = 249,6$$

$$\text{Найдём } P(\xi \leq 500) = \Phi_0\left(\frac{500-520}{\sqrt{249,6}}\right) - \Phi_0(-\infty) = \frac{1}{2} - \Phi_0\left(\frac{20}{15,8}\right) \approx \frac{1}{2} - 0,3962 = 0,1038$$

$$\text{Проводим } n \text{ испытаний, частота успеха } \frac{\xi_n}{n} \Rightarrow E \frac{\xi_n}{n} = \frac{np}{n} = p, \mathcal{D} \frac{\xi_n}{n} = \frac{pq}{n}$$

Тогда при  $n \rightarrow \infty$ :

$$\frac{\frac{\xi_n}{n} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \xrightarrow{d} U \sim N(0, 1)$$

$$\text{Пусть хотим найти } P\left(\left|\frac{\xi_n}{n} - p\right| < \delta\right) = 2\Phi_0\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right)$$

## Задача

$\xi_n \sim Bi(1\,000; 0,87)$ . Нас интересует  $P(|\frac{\xi_n}{n} - 0,87| < 0,04)$

$$E(\frac{\xi_n}{n}) = p = 0,87, \quad \mathcal{D}(\frac{\xi_n}{n}) = \frac{npq}{n^2} = \frac{pq}{n} = \frac{8,7 \cdot 1,3}{1000} = 11,31$$

Тогда можно посчитать  $P(|\frac{\xi_n}{n} - 0,87| < 0,04) = 2\Phi_0\left(\frac{0,04}{\sqrt{11,31}}\right) = 2\Phi_0\left(\frac{0,04}{0,1063}\right) = 2\Phi_0\left(\frac{400}{1063}\right) \approx 2\Phi_0(0,38)$

Семинар 13 декабря

Посчитаем  $\int_0^1 x^2 dx$ . Пусть  $\xi_1, \dots, \xi_n \sim R(0, 1)$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п. н.}} E\xi^2 = \int_0^1 x^2 dx = I$$

$P(|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i^2 - I| < \delta) = 0,95$ , где  $\delta = 0,01$ .

По ЦПТ:

$$\frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i^2 - I}{\sqrt{\mathcal{D}(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i^2)}} \xrightarrow{d} U \sim N(0, 1)$$

Тогда  $P(|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i^2 - I| < \delta) = 2\Phi_0\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sqrt{\mathcal{D}\xi_1^2}}\right)$

Величина простая, поэтому можем в явном виде посчитать дисперсию:

$$\mathcal{D}\xi_1^2 = E\xi_1^4 - (E\xi_1^2)^2 = \int_0^1 x^4 dx - \left(\int_0^1 x^2 dx\right)^2 = \frac{1}{5} - \frac{1}{9} = \frac{4}{45}$$

Получаем следующее:

$$2\Phi_0\left(\frac{\delta\sqrt{n}3\sqrt{5}}{2}\right) = 2\Phi_0\left(\frac{0,03\sqrt{5}}{2}\sqrt{n}\right) = 0,95 \Rightarrow n \approx 3400$$