Лекции по математическому анализу 4 модуль.

Андрей Тищенко

2023/2024

Лекция 12 апреля.

Сходимость функциональных рядов

$f_n(x),\ n \in \mathbb{N},\ x \in E \subseteq \mathbb{R}$
$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$

Определение: $f_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows} f(x) \Leftrightarrow \sup\limits_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[b\to\infty]{} 0$

Пример: Закон больших чисел. $\eta_n(\omega) = \frac{\xi_1(\omega)+\dots+\xi_n(\omega)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} E\xi_1 = a$ почти наверное. $P\{\omega:\ \eta_n(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} a\} = 1$

Вопрос: можно ли переставлять операторы $\lim\limits_{n\to\infty},\ \lim\limits_{x\to x_0},\ \dfrac{d}{dx},\ \displaystyle\int dx$?

То есть $\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) \overset{?}{=} \lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{d}{dx} f_n(x) \overset{?}{=} \dfrac{d}{dx}\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$

$\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int f_n(x)dx \overset{?}{=} \int \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx$

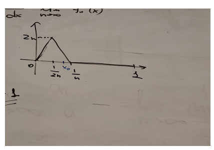
Нет, нельзя.

Пример 1. $f_n(x) = x^n,\ E = [0;\ 1],\ x_0 = 1$
$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to1^-} x^n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$
$\lim_{x\to1^-}\lim_{n\to\infty} x^n = \lim_{x\to1^-}\begin{pmatrix}0, & x<1\\ 1, & x=1\end{pmatrix} = 0$

Теорема: $f_n(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in E$ и $f_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows} f(x)$, то $f(x)$ непрерывна в точке x_0

Пример 2. $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n},\ x \in \mathbb{R},\ x_0 = 0$
$f(x) \equiv 0 \quad f'(0) = 0$
$f_n'(x) = \frac{\cos nx}{n} \cdot n = \cos nx|_{n_0=0} \equiv 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

Теорема: $f_n(x)$ непрерывна и дифференцируема на $[a;\ b]$
$\exists c \in [a;\ b]:\ f_n(c)$ сходится
$f_n'(x) \overset{[a;\ b]}{\rightrightarrows}$, тогда
$f_n(x) \overset{[a;\ b]}{\rightrightarrows}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{d}{dx} f_n(x) = \dfrac{d}{dx} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$

Пример 3. $f_n(x) =$ 
$\forall x \in [0;\ 1]\ f_n(x) \longrightarrow 0$
$\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx = 1,\ \lim_{n\to\infty} 1 = 1$
$\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = 0 \neq 1$

Теорема: $f_n(x) \overset{[a;\ b]}{\rightrightarrows} f(x)$, то
$\forall c \displaystyle\int_c^x f_n(t)dt \underset{n\to\infty}{\overset{[a;\ b]}{\rightrightarrows}} \int_c^x f(t)dt$

Сходимость функциональных рядов

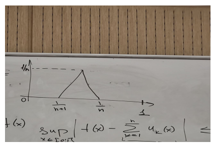
$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x),\ x \in E$$

Ряд сходится равномерно:

$$\sup_{x\in E} \left| \sum_{k=1}^{n} u_k(x) - S(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Теорема: (признак Вейерштрасса) если последовательность $u_n(x)$ мажорируется числовой последовательностью a_n : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in E\, |u_n(x)| \leqslant a_n$.

Тогда из сходимости $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ следует сходимость $u_n(x)$ на E.

Пример: $u_n(x) =$ 

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_n(x) = f(x)$$

$$\sup_{x\in[0;\ 1]} \left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \right| \leqslant \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\sup_{x\in[0;\ 1]} |u_n(x)| = \frac{1}{n} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \text{ расходится.}$$

То есть мы имеем равномерную сходимость, но найти мажорирующую последовательность нельзя.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \stackrel{?}{=} \left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x^n \right)' = \left(\dfrac{x}{1-x} \right)'$

Степенные ряды

$$\sum_{n=0}^{+\infty} C_n \cdot (x-a)^n \quad \sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n$$

Лемма. (Абеля)

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n$ сходится при $x = x_1$, то $\forall x_0 : |(|x_0) < |x_1|$ ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n$ сходится
2. $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n$ расиходится при $x = x_2$, то $\forall x_0 : |(|x_0) > |x_2|$ ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n$ расходится

$$C_n \cdot x_1^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \text{ограниченна} \Rightarrow \exists M\ \forall n\ |C_n \cdot x_1^n| < M$$

Доказательство: 1. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |C_n \cdot x_0^n| = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left| C_n \cdot x_1^n \cdot \left(\dfrac{x_0}{x_1} \right)^n \right| \leqslant M \cdot \underbrace{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} q^n}_{\text{сходится}} \Rightarrow$ сходится абсолютно

2. Пусть сходится при $x = x_0 \underset{\text{п. 1}}{\Rightarrow}$ сходится при $x = x_2 \Rightarrow \perp$

Вывод: Возможен один из трёх вариантов

(a) $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n$ сходится $\forall x \in \mathbb{R}$

(b) $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n$ сходится только при $x = 0$

(c) $\exists R:\ \sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n$ сходится на $(-R;\ R)$ (<u>множество сходимости</u>), а на $(-\infty,\ -R) \cup (R,\ +\infty)$ расходится. Это R называется <u>радиусом сходимости</u> степенного ряда.

Теорема: $\forall r:\ 0 < r < R$ ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n$ сходится равномерно на $[-r,\ r]$

Доказательство: $\sup\limits_{[-r;\ r]} \left| \sum\limits_{k=0}^{n} C_k x^k - \sum\limits_{k=1}^{+\infty} C_k x^k \right| = \sup\limits_{[-r;\ r]} \left| \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} C_k x^k \right| \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \left| C_k r^k \right|$, так как r находится в множестве сходимости, значит $\underbrace{\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} C_k r^k}_{\text{числовой ряд}}$ сходится абсолютно.

Утверждение: Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ сходится и $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k x^k$ имеет радиус сходимости $R = 1$ и $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ существует, то $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$.

Теорема: 1. Если $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{C_n}{C_{n+1}} \right| = A$, то $R = A$

2. Если $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|C_n|} = B$, то $R = \frac{1}{B}$

Доказательство: 1. $0 < A < +\infty \quad \sum\limits_{n=0}^{+\infty} C_n \cdot x^n$

$\lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{c_{n+1} x^{n+1}}{C_n x^n} \right| = |x| \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{C_{n+1}}{C_n} \right| = |x| \dfrac{1}{A}$

$|x| < A$ сходится по Даламберу

$|x| > A$ расходится по Даламберу, значит $R = A$

2. $A = +\infty \quad \lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{C_{n+1} x^{n+1}}{C_n x^n} \right| = 0 \Rightarrow \forall x$ по Даламберу сходится $R = +\infty$

3. $A = 0 \quad \lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{C_{n+1} x^{n+1}}{C_n x^n} \right| = +\infty \Rightarrow \forall x \neq 0$ расходится.

Лекция 17 апреля

Степенные ряды

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$. Выполняется одно из трёх.

1. Сходится только при $x = 0$
2. Сходится абсолютно $\forall x$
3. Сходится абсолютно на $(-R;\ R)$, расходится на $(-\infty;\ -R)\cup(R;\ +\infty)$.
   R - радиус сходимости.

Теорема: $\forall r: \quad 0 < r < R_{\text{сх}}$ ряд сходится равномерно на $[-r;\ r]$

Теорема (Абеля): Если рдя сходится при $x = R$ абсолютно, то на отрезке $[0;\ R]$ ряд сходится равномерно.

Теорема: Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|C_{n+1}|}{|c_n|}$ $(\exists \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|c_n|}) = A \in \overline{\mathbb{R}}$, то
$R_{\text{сх}} = \dfrac{1}{A}$

Доказательство: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|c_{n+1}x^{n+1}|}{|c_n x^n|} = |x| \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = |x| \cdot A \quad (*)$

1 случай. $A = 0$, $(*) < 1$, то есть сходимость при любом x,
то есть $R_{\text{сх}} = +\infty$

2 случай. $A = +\infty$ $(*) = +\infty > 1$, то есть расходимость при любом $x \neq 0$,
то есть $R_{\text{сх}} = 0$

3 случай. $A \in \mathbb{R}^+$ $|x|A < 1$ сходится, то есть $|x| < \dfrac{1}{A}$,
$|x|\, A > 1$ расходится, то есть $|x| > \dfrac{1}{A}$
То есть $R_{\text{сх}} = \dfrac{1}{A}$

Теорема: (Формула Коши-Адамара)

$$R_{\text{сх}} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}}$$

Доказывательства не будет.

Вопрос:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x) \stackrel{?}{=} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right)'$$

Это не всегда верно, стоит запомнить данный факт.

1. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n x \quad R_1$

2. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n n x^{n-1} = \dfrac{1}{x}\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n n x^n \quad R_2$

3. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{c_n}{n+1} x^{n+1} = x\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{c_n}{n+1} x^n \quad R_3$

Теорема: $R_1 = R_2 = R_3$

Доказательство:

1. $R_2 \leqslant R_1 \leqslant R_3$ (очевидно из коэффициентов, так как $c_n n \geqslant c_n \geqslant \dfrac{c_n}{n+1}$)

   Пусть x_1 - точка сходимости 2. то есть сходится $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |c_n| \cdot |x_1|^n \cdot n$, тогда по признаку сравнения
   $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left|\dfrac{c_n}{n+1}\right| |x_1|^n \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |c_n| \, |x_1|^n \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |c_n| \cdot |x_1|^n \cdot n$
   Все остальные ряды сойдутся.

2. $R_3 \leqslant R_2$
   Если при x_0 сходится (абсолютно) 3., то при x_0 сходится 2.
   $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left|\dfrac{c_n}{n+1} x_1^n\right|$ - сходится $\Rightarrow$
   $\Rightarrow \exists M \forall n \ \left|\frac{c_n}{n+1} x_1^n\right| \leqslant M$
   $\exists x_1 : \quad |x_0| < |x_1| < R_3$
   $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |c_n n x_0^n| = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\left|\dfrac{c_n}{n+1} x_1^n\right|}_{\leqslant M} \cdot (n+1)n \cdot \left|\underbrace{\dfrac{x_0}{x_1}}_{q^n}\right|^n \leqslant$

   $\leqslant M \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n(n+1) q^n$ сходится по Даламберу $(0 < q < 1)$

Выводы:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = f(x), \quad D_f = (-R;\ R)$$
$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n n x^{n+1} = f'(x)$$
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1} = \int_0^x f(t)\,dt$$

$f(x)$ - бесконечно число раз дифференцируем.

$f^{(k)}(0) = c_k \cdot k!$

Вывод: Если $f(x)$ раскладывается в степенной ряд, то $c_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$

Пример: $f(x) \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}},\ x = 0 \\ 0,\ x = 0 \end{cases}$

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} - 0}{x - 0} = 0$$

Утверждение: $e^{-\frac{1}{x^2}} \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

$f^{(k)}(0) = \lim_{x\to 0} \dfrac{f^{(k+1)}(x) - f^{(k-1)}(0)}{x - 0} = 0$

$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \equiv 0 \neq f(x)$, хотя функция бесконечное число раз дифференцируема.

Ряды Тейлора

Определение: Рядом Тейлора функции бесконечное число раз дифференцируемой в точке $x = a$ называется

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad (*)$$

Теорема: (Достаточное условие) Если $f^{(k)}(x)$ ограничена в совокупности на интервале $(a - R;\ a + R)$, то $(*)$ верно на $(a - R;\ a + R)$

Доказательство: ограничена в совокупности означает:

$$\exists M\ \forall k\ \forall x \in U_R(a):\ \left|f^{(k)}\right| \leqslant M$$

$$\left|\underbrace{\sum_{n=0}^{k}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}_{T_k(x)} - f(x)\right| = \left|\frac{f^{(k+1)}(\xi)\cdot(x-n)^{k+1}}{(k+1)!}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \tfrac{M\cdot R^{k+1}}{(k+1)!} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

1. $y = e^x$
   $\left|f^{(k)}(x)\right| = |e^x| \leqslant e^R$
   $\forall x\ e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$

2. $y = \sin x$
   $\left|f^{(k)}(x)\right| \leqslant 1$
   $\forall x \sin x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$

3. $y = \cos x$
   $\forall x\ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$

В комплексных числах $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ аналитические функции (для них радиус сходимости выглядит так $|z| < R$)

4. $y = \ln(1+x), a = 0$
   $y' = \dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n,\ |x| < 1$
   $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^x (-1)^n t^n\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$
   Но $\ln(1+x) : x \in (-1;\ +\infty)$, а $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1} : x \in (-1;\ 1]$

5. $(1+x)^\alpha = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n^\alpha x^n \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)$