Семинары по дискретной математике
модуль 4

Андрей Тищенко

2023/2024 гг.

Семинар 4 апреля

Графы

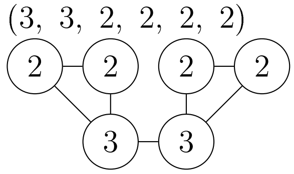
$$G = (\underset{\neq\varnothing}{V},\ E);\ \begin{cases} 1. E \subseteq V^2 \\ 2. E \text{ иррефлексивно} \\ \forall x \neg\ xEx \\ 3. E \text{ симметрично} \\ \forall x,\ y(xEy \Rightarrow yEx) \end{cases}$$

Вопрос 1. $V = \underline{n}$. Сколько существует различных графов на V?
Для графа размера 3.
Количество неупорядоченных пар различных вершин $= |\mathcal{P}_2(V)| = C_3^2 = 3$
Количество способов выбрать ребра $= |\mathcal{P}(\mathcal{P}_2(V))| = 2$

$\{x,\ y\}$ - ребро $\Leftrightarrow xEy \wedge yEx$

Степенная последовательность

2. $(3,\ 3,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2)$



Лемма о рукопожатиях

$(n,\ m)$ - граф $G = (V,\ E)$

$\sum\limits_{x \in V} d_G(x) = 2m = |E|$

3. $(4,\ 4,\ 4,\ 4,\ 2)$ не является степенной.

4. Задача

Дано: $(n,\ m)$ граф, $G = (V,\ E),\ n \geqslant 2$

Хотим: $\exists x,\ y \in V\ \big(x \neq y \wedge d(x) = d(y)\big)$

$\forall x\ 0 \leqslant d(x) \leqslant n-1 \quad d(x) \in \underline{n}$

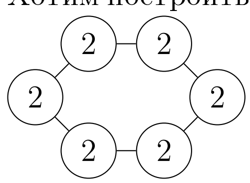
Псуть не так: $\Rightarrow d$ инъективна.

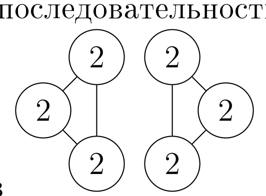
$\underline{n} \sim V \overset{d}{\lesssim} \underline{n} \Rightarrow d$ сюръективна $\Rightarrow \begin{cases} \exists x_0\ d(x_0) = 0 \\ \exists x_{n-1}\ d(x_{n-1}) = n-1 \end{cases}$

$\neg x_0 E x_{n-1}$

$\forall y\ (y \neq x_{n-1}) \Rightarrow x_{n-1} E y \Rightarrow x_{n-1} E x_0 \Rightarrow \perp$

5. Хотим построить граф со степенной последовательностью $(2,\ 2, \ldots,\ 2)$





Граф $C_6 \ncong C_3 \sqcup C_3$

Пусть в G ровно k компонент связности. Одна компонента порядка $n_i \leqslant n,\ n_i = 5$

$(\underbrace{2,\ 2, \ldots,\ 2}_{n_i}) \Rightarrow G \cong C_{n_1} \sqcup \cdots \sqcup C_{n_k}$, где $\forall i\ n_i \geqslant 3,\ n_1 + \cdots + n_k = n$

$1 \leqslant k \leqslant \dfrac{n}{3}$ (округлить вверх)

7. $(100,\ 800)$ граф $G = (V,\ E)$

   а. $\forall x\ d_G(x) < 16$? Неверно по лемме о рукопожатиях.

   б. $\forall x\ d_G(x) = 16$.

Определение: граф называют <u>r-регулярным</u> $\Leftrightarrow \forall x\ d(x) = r$. Размер r-регулярного графа на n вершинах есть $\dfrac{rn}{2}$.

K_{t+1} - заведомо t-регулярный граф (полный граф на $t+1$ вершине).

Для нашей задачи возьмём K_{17}. В нём будет $\dfrac{17 \cdot 16}{2} = 136$ рёбер.

$800 = 136 \cdot 5 + 120$

$G \stackrel{?}{=} 5K_{17} + G'$, где G' 16-регулярный $(15,\ 120)$ граф (такого не бывает, так как одна из 15 вершин должна быть соседом с 16 другими $\perp$). Запрашиваю продолжение конспекта, тяжело.