

Семинары по математическому анализу 4

МОДУЛЬ.

Андрей Тищенко

2023/2024

Семинар 4 апреля

Сходимость функциональных последовательностей.

$$\begin{array}{l} \{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}} \quad x \in E \\ \forall x \in E \quad f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x) \end{array}$$

Номер 1. а. $f_n(x) = \frac{nx^2}{x + 3n + 2} = \frac{x^2}{\frac{x}{n} + 3 + \frac{2}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{x^2}{3}$

с. $f_n(x) = n(x^{\frac{1}{n}} - 1)$, $E = [1; 3]$
 $x = 1 \Rightarrow f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$$\frac{e^y - 1}{y} \xrightarrow{y \rightarrow 0} 1$$

$$f_n(x) = \frac{e^{\frac{1}{n} \ln x} - 1}{\frac{1}{n} \ln x} \ln x \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ln x$$

Итак, $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ln x$

Определение: $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$ на $E \Leftrightarrow \sup_E |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$
 $\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \forall n > N_\varepsilon \forall x \in E |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \Rightarrow$
 $\Rightarrow \sup_E |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

Номер 2. а. $f_n(x) = \frac{\operatorname{arctg}(nx)}{\sqrt{n+x}}$, $E = [0, +\infty)$

$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ поточечно.

$$\left| \frac{\operatorname{arctg}(nx)}{\sqrt{n+x}} \right| < \left| \frac{\pi}{\sqrt{n}} \right| < \varepsilon$$

$$\begin{aligned}
\text{b. } f_n(x) &= n \sin \frac{1}{nx}, \quad E = [1, +\infty) \\
f_n(x) &\sim n \cdot \frac{1}{nx} = \frac{1}{x} \Rightarrow f_n(x) \longrightarrow \frac{1}{x} = f(x) \\
\left| n \left(\sin \frac{1}{nx} - \frac{1}{nx} \right) \right| &= \dots \\
\sin y &= y - \frac{y^3}{6} + \frac{\sin c}{24} y^4 \\
\dots &= \left| n \left(\frac{1}{nx} - \frac{1}{nx} - \frac{1}{(nx)^3 6} + \frac{\sin c}{24} \frac{1}{(nx)^4} \right) \right| \leq \frac{1}{6n^2} + \frac{1}{24n^3} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0
\end{aligned}$$

(тут подставили $x = 1$, получив максимальное значение)

Номер 3. а. $f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2 x^2}, \quad E = [0; 1]$

$$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Рассмотрим последовательность $x_n = \frac{1}{n} \Rightarrow$

$$\Rightarrow f_n(x_n) = \frac{n \frac{1}{n}}{1 + n^2 \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

Как дополнительный пример рассмотрели:

$$x^n \text{ на } (0; 1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$x_n = 1 - \frac{1}{n}$$

$$f_n(x_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e} \text{ не сходится абсолютно.}$$

б. $f_n(x) = \ln \left(3 + \frac{n^2 e^x}{n^4 + e^{2x}} \right), \quad E = [0; +\infty)$

$$f(x) = \ln 3$$

$$f_n(x) - f(x) = \left| \ln \left(1 + \frac{n^2 e^x}{3(n^4 + e^{2x})} \right) \right|$$

Рассмотрим последовательность $x_n = \ln n^2$. Тогда

$$g_n(x_n) = \ln \left(1 + \frac{n^2 n^2}{3(n^4 + n^4)} \right) = \ln \frac{7}{6}$$

Семинар 12 апреля

$$f_n(x), \quad x \in E$$

1. $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x) \text{ на } E.$

2. Можно ли переставлять операторы $\lim_{n \rightarrow \infty}, \lim_{x \rightarrow x_0}, \frac{d}{dx}, \int dx$?

То есть выполняется ли:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \stackrel{?}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} f_n(x) \stackrel{?}{=} \frac{d}{dx} \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)}_{f(x)}$$

$$E = [0; 1], f_n(x) = x^n \longrightarrow g(x) \begin{cases} 0, & x \in [0; 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow 1^-} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = 0$$

$0 \neq 1 \Rightarrow$ это неверно.

$$f_n(x) \xrightarrow{E} f(x) \Leftrightarrow \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{Ряды } \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = S(x)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (x^n)' \stackrel{?}{=} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \right)'$$

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x) \xrightarrow{E} S(x) \Leftrightarrow$$

$$\sup_{x \in E} \Leftrightarrow |S_n(x) - S(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\sup_{x \in E} \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Критерий Вейерштрасса: Если $u_n(x)$ мажорируется последовательностью a_n : $\forall n |u_n(x)| \leq a_n$,

$$\text{тогда } \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ сходится, тогда } S_n(x) \xrightarrow{E} S(x)$$

$$\text{Задача 1. а. } u_n(x) = \frac{\arctg(n^2 x) \cdot \cos(\pi n x)}{n \sqrt{n}}, E = \mathbb{R}$$

$$|u_n(x)| \leq \frac{\pi}{2n^{\frac{3}{2}}}, \text{ ряд } \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ сходится.}$$

b. $u_n(x) = e^{-n(x^2 + \sin x)}$, $E = [1; +\infty)$
 $e^{-n(x^2 + \sin x)} < e^{-n}$, так как

$$\begin{cases} x \geq \sqrt{2} : x^2 + \sin x \geq 2 + \sin x \geq 1 \\ 1 \leq x < \sqrt{2} : \sin x > 0 \Rightarrow x^2 + \sin x > 1 \end{cases}$$

Функциональные ряды

$$\sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cdot \underbrace{(x-a)^n}_t \Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} C_n \cdot t^n. \text{ Множество сходимости такого ряда имеет}$$

вид $(-R; R)$, $R \in \overline{\mathbb{R}}$, R называется радиусом сходимости.

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_n}{C_{n+1}} \right|$$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|C_n|}$$

2. a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)^2}{n^2} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2} \right| = 1$$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)!}{n!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |n| = +\infty$$

c. $\sum_{n=1}^{\infty} 5^n x^{3n} = \sum_{n=1}^{\infty} 5^n t^n$

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_t} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|5^n|} \Rightarrow \forall t : |t| < \frac{1}{5} \Rightarrow |x^3| < \frac{1}{5} \Rightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt[3]{5}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow R_x = \frac{1}{\sqrt[3]{5}} \end{aligned}$$

3. a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n^2+2} (x-1)^n$

$$R = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n+1}{3n^2+2}}{\frac{2n+3}{3n^2+6n+5}} = 1 \Rightarrow (0; 2)$$

Рассмотрим граничные точки:

$$x = 2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n^2+2} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3n} \text{ расходится.}$$

$$x = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{3n^2+2}$$

$\left(\frac{2n+1}{3n^2+2}\right)' = \frac{2(3n^2+2)-6n(2n+1)}{(3n^2+2)^2} = \frac{-6n^2-6n+4}{(3n^2+2)^2} \Rightarrow$ с какого-то момента она монотонно убывает. Тогда по признаку Лейбница ряд сходится.

$$4. \quad \text{a.} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = x \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = x \sum_{n=1}^{+\infty} (x^n)' = x \left(\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \right)' = x \cdot \left(\frac{x}{1-x} \right)' =$$

$$= x \frac{(1-x) + x}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Очевидно, что радиус сходимости такой функции равен 1. Положим

$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^2} = 2.$$

$$b. \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^{2n+1}} 2n+1 = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^{2n} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} dt =$$

$$= \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} (-t^2)^n dt = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \arctg t|_0^x = \arctg x$$

$$5. \quad \text{a.} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

Семинар 26 апреля.

Теория:

$$f(\vec{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = A \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{Коши: } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \vec{x} \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(\vec{x}_0) \quad |f(\vec{x}) - A| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \text{Гейне: } \forall \vec{x}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \vec{x}_0, \quad \vec{x}_n \neq \vec{x}_0 \Rightarrow f(\vec{x}_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$$

Задача 1. а.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 1}} \frac{x^2 - 4y^2}{x^2 + 2x - 2xy - 4y} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 1}} \frac{(x-2y)(x+2y)}{(x+2)(x-2y)} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 1}} \frac{x+2y}{x+2} = 1$$

Задача 1. b.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \frac{\sin xy}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \underbrace{\frac{\sin xy}{xy}}_1 y = 1 \cdot 2 = 2$$

Задача 1. c.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} (1+x)^{\frac{1}{x+x^2y}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} (1+x)^{\frac{1}{x} \frac{1}{x+y}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \left((1+x)^{\frac{1}{x}} \right)^{\frac{1}{x+y}} = e^{\frac{1}{0+1}} = e$$

Задача 2.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ a, & \text{иначе} \end{cases}$$

a. Является непрерывной по x .

$$f(x, 0) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2}, & x^2 \neq 0 \\ a, & x^2 = 0 \end{cases}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 1 \Rightarrow a = 1$$

b. Является непрерывной по y .

$$f(0, y) = \begin{cases} -\frac{y^2}{y^2}, & y^2 \neq 0 \\ a, & y^2 = 0 \end{cases}, \quad \lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = -1 \Rightarrow a = -1$$

c. Является непрерывной по кривой $y = \alpha\sqrt{x}$, $\alpha \neq 0$

$$f(x, \alpha\sqrt{x}) = \begin{cases} \frac{x^2 - \alpha x}{x^2 + \alpha^2 x}, & x^2 + \alpha x \neq 0 \\ a, & x^2 + \alpha^2 x = 0 \end{cases}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \alpha^2 x}{x^2 + \alpha^2 x} = \frac{x - \alpha^2}{x + \alpha^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -1 = a$$

d. Является непрерывной.

Ни при каких, так как уже при приближении по x и по y значения параметра a для достижения непрерывности должны различаться.

Задача 3. Вычислить пределы:

a.

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0, \text{ аналогично}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

Знаем $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall (x, y) \in \overset{\circ}{U}_\delta(0, 0) |f(x, y) - 0| < \varepsilon$
 $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta \Rightarrow |x| < \delta \quad \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| < \varepsilon$

Также знаем $\frac{x^2 + y^2}{2} \geq xy \Rightarrow \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| \leq \left| \frac{x}{2} \right| < \left| \frac{\delta}{2} \right| \leq \varepsilon$. Верно при $\delta = 2\varepsilon$

b.

$$f(x, y) = x + y \sin \frac{1}{y}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} x + y \sin \frac{1}{y} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} x + y \sin \frac{1}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} y \sin \frac{1}{y} = 0$$

Скорее всего ошибка в задании, так как слагаемые сходятся независимо друг от друга, дальше не решали.

c.

$$f(x, y) = \log_{1+x}(1 + x + y)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \log_{1+x}(1 + x + y) = \lim_{x \rightarrow 0} \log_{1+x}(1 + x) = 1$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \log_{1+x}(1 + x + y) = \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x + y)}{\ln(1 + x)} = \infty$$

Дробь стремится к бесконечности, значит переходить к пределу по y переходить нельзя. Пределы не совпадают, значит к многомерному пределу переходить нельзя

Вставка:

Открытость множества $A \longleftrightarrow$ метрика \longrightarrow шары или окрестность.

$$\updownarrow \\ \forall x \in A \exists \delta U_\delta(x) \subset A$$

Замкнут \Leftrightarrow дополнение к открытости.

1. Свойства непрерывных на компакте

Компакт $\overset{\mathbb{R}^n}{\Leftrightarrow}$ ограниченность, замкнутость.

2. f непрерывна на $E \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(A) \text{ - открытый для любого открытого } A \\ \{x \mid f(x) \in A\}$$

Задача 4.

f - непрерывна. $A = \{x \mid f(x) > y_0\}$

Пусть $x_1 \in A$ $f(x_1) > y_0$. Возьмём $\varepsilon_0 = \frac{f(x_1) - y_0}{2}$, тогда из определения непрерывности:

$$\exists \delta > 0 \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_1) \quad |f(x) - f(x_1)| < \varepsilon_0 \Rightarrow f(x) > y_0, \text{ ч.т.д.}$$

Вторую часть задачи решили устно (несложное упражнение).

Задача 5.

Определение:

Точка x называется граничной точкой множества A , если:

$$\forall \delta > 0 \exists x_0 \in U_\delta(x) \quad x_0 \in A \wedge \exists x_1 \in U_\delta(x) \quad x_1 \in \overline{A}$$