Лекции по математическому анализу 4 модуль.

Андрей Тищенко

2023/2024

Лекция 12 апреля.

Деревья

$\forall T$ T - $(m,\ n)$ граф тогда:
T дерево $\Leftrightarrow$ T связный ациклический
$\Leftrightarrow$ T минимально связен
$\Leftrightarrow$ T связен $m = n - 1$
$\Leftrightarrow$ в T любые 2 вершины соединены ровно 1 простым путём.

Определение: граф называется <u>минимально связным</u> если из него нельзя удалить ребро без потери связности.

Определение: Пусть $G = (V,\ E)$ - связный граф. Любое дерево $T = (V,\ E')$, такое что $E' \subseteq E$, (то есть T - подграф) называется остовным.

Теорема: В любом связном $(n,\ m)$ графе $G = (V,\ E)$ есть остовное дерево T

Доказательство: Индукция по m

$m = 0$: $n = 1,\ T = G$.

$m > 0$: 1. G - дерево, тогда $T = G$

2. G не деревоо $\Rightarrow$ не минимально связный $\Rightarrow \exists x,\ y \quad xEy \wedge$ ребро xy можно удалить без потери связности.
   G' - результат удаления ребра xy
   G' - $(n,\ m-1)$ связный граф $\underset{\text{ПИ}}{\Rightarrow}$ в G' есть остовное дерево T'
   $G = (V,\ E),\ G' = (V,\ E \backslash \{xy,\ yx\})$. То есть T' подграф G', а G' подграф $G \Rightarrow T := T'$

Двудольные графы

Определение: граф $G = (V,\ E)$ <u>двудольный</u> $\Leftrightarrow \exists V_1,\ V_2 :$

$$\begin{cases} V_1 \cap V_2 = \varnothing \\ V_1 \cup V_2 = V \\ V_1,\ V_2 \neq \varnothing \\ x,\ y \in V_i \Rightarrow xy \notin E \end{cases}$$

Определение: граф $G = (V,\ E)$ раскрашиваем в k цветов $\Leftrightarrow \exists c : V \to \underline{k}$
$\forall x,\ y\ \big(c(x) = c(y) \Rightarrow xy \in E\big)$

Утверждение: G k-дольный $\Rightarrow \forall l \geqslant k,\ G$ можно раскрасить в l цветов.

Теорема 2: (Кёнинга).
$\forall$ графа $G = (V,\ E),\ |V| \geqslant 2$ следующие условия равносильны:

(a) G двудольныйв

(b) в G нет циклов нечётной длины

(c) в G нет простого цикла нечётной длины

Доказательство: $a \Rightarrow b$ допустим есть цикл нечётной длины:
$x_1 x_2 x_3 x_4 \dots x_{2n} x_{2n+1} x_1$
Без ограничения общности:
$x_1 \in V_1 \Rightarrow x_2 \in V_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow x_{2n} \in V_2 \Rightarrow x_{2n+1} \in V_1 \Rightarrow x_1 \in V_2 \perp$
$b \Rightarrow c$. Если нет никакого цикла нечётной длины, то простого также не будет. $c \Rightarrow a$.

Лемма* если граф G связен и $|V| \geqslant 2$ и в G нет простых циклов нечётной длины, то G двудольный.

$G = G_1 \sqcup G_2 \sqcup \dots \sqcup G_n$
Ещё не может быть компонент порядка 1.
$G' = (V',\ E)$ связен, $|V'| \geqslant 2$, в G' нет простого цикла нечётной длины.
Рассмотрим произвольную $z \in V$, тогда $\exists y\ zEy$
$d(u,\ w) :=$ длина кратчайшего пути между $u,\ w$ в G'
$d(z,\ z) = 0,\ d(z,\ y) = 1$
$V_1 = \{x \in V' \mid d(z,\ x) \equiv 1(2)\}$
$V_2 = \{x \in V' \mid d(z,\ x) \equiv 0(2)\} \Rightarrow$
$\Rightarrow \begin{cases} V_1 \cap V_2 = \varnothing \\ V_1 \cup V_2 = V' \\ y \in V_1 \neq \varnothing \wedge z \in V_2 \neq \varnothing \end{cases}$
Предположим $\exists u,\ w \in V_i \quad uEw \Rightarrow u \neq w$
$d(z,\ u) \equiv d(z,\ w)(2)$
Рассмотрим кратчайшие ($\to$ простые) пути $z \xrightarrow{p} u \wedge z \xrightarrow{q} w$
Пусть $t :=$ самая правая общая точка $z \xrightarrow{p} u,\ z \xrightarrow{q} w$ (самая правая - такая, что путь до u и w минимален).
$z \xrightarrow{p} w = z \xrightarrow{p_1} t \xrightarrow{p_2} w$
$z \xrightarrow{q} u = z \xrightarrow{q_1} t \xrightarrow{q_2} u$

Утверждение: $\left|z \xrightarrow{p_1} t\right| = \left|z \xrightarrow{q_1}\right| t$

Доказательство: Иначе без ограничения общности:
$\left|z \xrightarrow{p_1} t\right| > \left|z \xrightarrow{q_1} t\right|$
$\left|z \xrightarrow{q_1} t \xrightarrow{p_2}\right| < \left|z \xrightarrow{p} w\right| \perp \left|z \xrightarrow{p} w\right| = d(z,\ w) = d(z,\ u)$
$\left|z \xrightarrow{p_1} t\right| + \left|t \xrightarrow{p_2} w\right| \equiv \left|z \xrightarrow{q_1} t\right| + \left|t \xrightarrow{q_2} u\right|$
$\left|t \xrightarrow{p_2} w\right| \equiv \left|t \xrightarrow{q_2} u\right|$
Рассмотрим цикл twu, он является простым, его длина будет равна:

$$\left|t \xrightarrow{p_2} w\right| + \left|t \xrightarrow{q_2} y\right| + 1 \equiv 1(2)$$

Но простых циклов длины 2 тут быть не может $\perp$.

Лемма 4. Если $(n,\ m)$ граф $G = (V,\ E)$ двудольный с долями V_1 и V_2, то

$$\sum_{x \in V_1} d(x) = m = \sum_{x \in V_2} d(x)$$

Доказательство: Индуция по количеству рёбер.

$m=0$: $\forall x\ d(x)=0$

$m>0$: есть ребро uw, удалим его и получим G'
Без ограничения общности:
$uw \in E \Rightarrow u \in V_1,\ w \in V_2$
G' - двудольный $(n,\ m-1)$ граф с долями $V-1,\ V_2$

$$\sum_{x\in V_1} d(x) = \sum_{x\in V_1\setminus\{u\}} + \big(d_{G'}+1\big) = \sum_{x\in V_1} d_{G'}(x)+1 = (m-1)+1 = m$$

Задача о свадьбах

Определение: граф G называется <u>паросочетанием</u>
$\Leftrightarrow \forall x\ d(x)=1$
Условие для выдачи женщин замуж $\forall S \subseteq V_1\ \ |E[S]| \geqslant |S|$

$T=\{t_1,\ t_2,\dots,\ t_n\}$. Хотим построить инъекцию $T \overset{f}{\lesssim} \bigcup T = t_1 \cup \dots \cup t_n$, также хотим $\forall t \in T\ f(t) \in t$.
Тогда нужно $\forall S \subseteq T\ \ |\bigcup S| \geqslant |S|$

Лекция 19 апреля

Теорема Холла:

Дано: двудольный граф $G\ \big(W(\text{женщины}), M(\text{мужчины}), E\big), k=|W|$
Требуется выдать всех женщин замуж по любви без многоженства и многомужества

Формально:

$\exists f:\ W \to M$

1. f - инъективно
2. $\forall t\ t\ E\ f(t)$

$$\exists f \text{ удовлетворяющее условию} \underset{\text{т. Холла}}{\Longleftrightarrow} \forall S \subseteq W \quad |S| \leqslant \Big|E[S]\Big| \quad (*)$$

Доказательство:

$" \Leftarrow "$

$\forall S \subseteq W \quad f$ - инъективно

$$S \sim f[S] \subseteq E[S]$$

$$S \lesssim E[S] \Rightarrow |S| \leqslant |E[S]|$$

$" \Rightarrow "$

Индукция по m

$$\forall t \ 1 = |\{t\}| \leqslant |E[\{t\}]| \Rightarrow \forall t \in W \ \exists x \ tEx \Rightarrow E \text{ - тотально для } W$$

1й случай: E - инъективно

$f(x) :=$ любой $x \in E[\{x\}]$. Тогда мы в шоколаде

2й случай: E - не инъективно

a. $\exists S_0 \, (S_0 \neq \varnothing \wedge |S_0| = |E[S_0]|)$ Рассмотрим подграф G, индуцированный множеством S_0

$$S_0 \neq W \Rightarrow |S_0| < |W|$$

$$\Rightarrow |W \backslash S_0| \neq \varnothing \Rightarrow \text{не все ребра в } G_0$$

$$\Rightarrow \text{размер}(G_0) < m$$

Допустим для G_0 выполнено условие $(*)$

$$S' \subseteq S_0 \Rightarrow E[S'] \subseteq E[S_0] \Rightarrow |S'| \leqslant |E[S']|$$

Вывод: по проедположению индукции для G_0 есть соответствуется фукнкция $f_0 : \ S_0 \to E[S_0]$
G_1 = это те вершины и ребра, которые не вошли в G_0.
Утверждение: Для G_1 выполнено $(*)$.
Пусть $S' \subseteq W \backslash S_0$

$$\big|E[S_0]\big| + |S'| = |S_0| + |S'| = |S_0 \cup S'| \leqslant \big|E[S_0 \sup S']\big| = \big|E[S_0] \cup E[S']\big| =$$

$$= \left|(E[S'] \ E[S_0]) \cup E[S_0]\right| = \left|E[S'] \backslash E[S_0]\right| + \left|E[S_0]\right|$$

Получаем сокращением $|S'| = \left|E[S'] \backslash E[S_0]\right|$
Так как $|S_0| \neq 0$, то размер $(G_0) > 0 \Rightarrow$ размер $(G_1) < m$.
По принципу индукуции для G_1, есть $f_1 : \ W \backslash S_0 \to E_{G_1}[W \backslash S_0]$

$$f := f_0 \cup f_1$$

б. $\forall S \left(S \neq W \wedge S \neq \varnothing \Rightarrow |S| < \left|E[S]\right|\right)$
так как E - не инъекция, то:

$$\exists x \in M \ \exists \ t_1, t_2 \in W(t_1 \neq t_2 \wedge t_1 E x \wedge t_2 E x) \Rightarrow \text{размер}(G_1) < 1$$

$$\left|E_{G_1}[S]\right| \geqslant \left|E[S]\right| - 1$$

$$\Rightarrow |S| < \left|E[S]\right| \leqslant \left|E_{G_1}[S]\right| + 1 \Rightarrow |S| \leqslant \left|E_{G_1}[S]\right|$$

По предположению индукции для G_1, есть $f_1 : \ S \to E_{G_1}[S] \subseteq E_G[S]$

$$f := f_1$$

Теорем Холла о "представителях"

Дано U - конечное (не обязательно):

$$T = \{t_1, \ldots, t_k\} \subseteq \mathcal{P}(U)$$

тогда в конкретном t можно инъективно выбрать по элементу $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall S \subseteq T \ |S| \leqslant \underbrace{|\bigcup S|}_{=t_{i_1} \cup \cdots \cup t_{i_q}}$
Строим граф (T, U, E)

$$tEx :\Leftrightarrow x \in t$$

$$E[\{t_{i_1} \cup \cdots \cup t_{i_q}\}] = t_{i_1} \cup \cdots \cup t_{i_q}$$

т. Дилуорса $\Rightarrow$ т. Холла

тут идут рисуночки, сам нарисуешь (демонстрация без доказательства).
Понял, Вова. Скиньте рисуночки, пожалуйста

Ориентированные графы

Определение:

Ориентированный граф (орграф) - это пара (V, A), где $V \neq \varnothing,\ A \subseteq V^2$

$$N_+(x) := A[\{x\}]$$

$$N_-(x) := A^{-1}[\{x\}]$$

Показатель исхода

$$d_+(x) = |N_+(x)|$$

Показатель захода

$$d_-(x) = |N_-(x)|$$

Утверждение:

$$\sum_{x \in V} d_+(x) = |A| = \sum_{x \in V} d_-(x)$$

Определение:

Турнир - это орграф, такой, что

1 $\forall x\ \neg xAx$

2 $\forall x, y\ (x \neq y \Rightarrow (xAy \Leftrightarrow \neg yAx))$

Беспредельный анализ

Рассматриваем последовательности: $\mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ (\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$

$$f'(x) = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x}$$

Перефразируем в терминах "бесконечно малых"

$$f'(x) = \frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x}, \text{ где } \delta x \text{ безконечно малая}$$

Для последовательностей зададим

$$\Delta a_n := a_{n+1} - a_n$$

Вторая производная

$$f'' = \frac{f'(x+\delta x) - f'(x)}{\delta x} = \frac{1}{\delta x}\left(\frac{f(x+2\delta x) - 2f(x+\delta x) + f(x)}{\delta x}\right) =$$

$$= \frac{f(x+2\delta x) - 2f(x+\delta x) + f(x)}{(\delta x)^2}$$

чем то похоже на $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
Для последовательнотей

$$\Delta^2 a_n = \Delta a_{n+1} - \Delta a_n = a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n$$

$$\Delta^3 a_n = \Delta^2 a_{n+1} - \Delta^2 a_n = a_{n+3} - 3a_{n+2} + 3a_{n+1} - a_n$$

Зададим S:

$$S: \ \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \quad S\ a_n = a_{n+1}$$

Тогда получаем дельту

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n = S\ a_n + a_n = (S-1)a_n$$

Получаем $\Delta = S - 1 \Rightarrow S = \Delta + 1 \Rightarrow S^k = (\Delta+1)^k$ Веселый результат

$$a_{n+k} = S^k\ a_n = (\Delta+1)^k a_n = \sum_{t=0}^{k} C_k^t \Delta^t\ a_n = \sum_{t=0}^{k} \frac{\Delta^t\ a_n}{t!} k^{(t)}$$

где $k^{(t)} = k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot (k-t+1)$