# Лекции по алгебре 4 модуль.

Андрей Тищенко

2023/2024 гг.

**Лекция 3 апреля**

Квадратичные формы

Определение: Многочлен второй степени от $n$ переменных, то есть выражение вида

$$q(x_1, \overset{x\in\mathbb{R}^n}{\ldots}, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{i\,i}x_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{i\,j}x_ix_j$$

Где $a_{i\,j} \in \mathbb{R}$, называют квадратичной формой.

Замечание: Многочлен $q(x)$ называется однородным степени $k$, если

$$\forall\alpha \quad q(\alpha x) = \alpha^k q(x)$$

Замечание: Квадратичная форма - это отображение $q : V \longrightarrow \mathbb{R}$ (вектор в число)

Рассмотрим $n$-мерное векстороное пространство $V$ над $\mathbb{R}$. Зафиксируем в нём базис $e_1, \ldots, e_n$:
Тогда у любого $x \in V$ есть набор координат в этом базисе $x_1, \ldots, x_n$.
То есть $\forall x \in V : x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$
Пусть $x^e = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow q(x)$ можно представить в виде $q(x) = (x^e)^T A x^e$, где
$A = (a_{i\,j})$ матрица квадратичной формы $q(x)$ в базисе $e_1, \ldots, e_n$,
$a_{i\,j}$ - коэффициенты квадратичной формы.

Пример: В $\mathbb{R}^3$

$$q(x) = x_1^2 + 8x_1x_3 = x_1^2 + 4x_1x_3 + 4x_3x_1 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Замечание: Матрица квадратичной формы всегда симметрическая. То есть

$$A^T = A$$

Замечание: По любой билинейной форме можно построить квадратичную форму, взяв $q(x) = b(x,\ x)$. Тогда $a_{i\,j} = \dfrac{b_{i\,j} + b_{j\,i}}{2}$

Пример: $b(x,\ y) = x_1y_1 + ex_1y_3 + 5x_3y_1 \Rightarrow q(x) = b(x,\ x) = x_1^2 + 8x_1x_3$

Определение: Билинейная форма называется <u>симметрической</u>, если

$$b(x,\ y) = b(y,\ x),\ \text{например, скалярное произведение}$$

Называется <u>кососиметрической</u>, если

$$b(x,\ y) = -b(y,\ x)$$

Пример: Кососиметрическая билинейная форма с матрицей $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow B^T = -B$

Замечание: По любой квадратичной форме можно построить симметрическую билинейную форму. Это называется <u>поляризацией</u> квадратичной формы.

$$b(x,\ y) = \frac{1}{2}\big[q(x+y) - q(x) - q(y)\big]$$

Полярная билинейная форма к $q(x)$ $\big($имеет ту же матрицу, что и $q(x)$, $b(x,\ x) = q(x)\big)$

Утверждение: При переходе от базиса $e$ к базису $e'$ в линейном пространстве $V$ матрица квадратичной формы меняется так:

$A' = C^T \cdot A \cdot C,$ "Стас" без рофлов, реально Стасямба конкретная

$A'$ - матрица квадартичной формы в новом базисе $e'$
$C$ - матрица перехода от базиса $e$ к базису $e'$

Доказательство: Свзять координат вектора:
$x = Cx'$, так как $x' = C^{-1}x$ - формула изменения координат вектора при замене базиса.
Тогда $\forall x \quad q(x) = x^T Ax = (Cx')^T A(Cx') = (x')^T C^T ACx' = (x')^T A'x'$,
значит $A' = C^T AC$ $\big($Можно в качестве $x$ брать все векторы канонического базиса $(0, \dots 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0)$ и показать совпадение матричных элементов$\big)$

Определение: Если квадратичная форма в некотором базисе записана в виде $q(x) = x^T Ax$, то есть если $A$ - матрица квадратичной формы в некотором базисе, то $\operatorname{Rg} A$ называется рангом квадратичной формы $q(x)$.

Почему это определение корректно? То есть почему $\operatorname{Rg} A$ не зависит от базиса.

Лемма: Пусть $A,\ U \in M_n(\mathbb{R}),\ \det U \neq 0$. Тогда $\operatorname{Rg} A \cdot U = \mathrm{RgA} = \operatorname{Rg} U \cdot A$, то есть при умножении на невырожденную матрицу ранг не меняется.

Доказательство: $\operatorname{Rg} A \cdot U \leqslant \operatorname{Rg} A$, так как столбцы матрицы $AU$ есть линейные комбинации столбцов матрицы $A$.
Ранг матрицы по теореме о ранге матрицы равен максимальному числу линейно независимых столбцов не могло вырасти, так как все столбцы $AU$ линейно выражаются через столбцы исходной матрицы.
Покажем $\operatorname{Rg} A \cdot U \geqslant \operatorname{Rg} A$.

$$\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg} A(U \cdot U^{-1}) = \operatorname{Rg}(AU)U^{-1} \leqslant \operatorname{Rg}(AU)$$

$$\operatorname{Rg} U \cdot A = \operatorname{Rg}(UA)^T = \operatorname{Rg} A^T U^T = \operatorname{Rg} A^T = \operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg} AU$$

Утверждение: (об инвариантности ранга квадратичной формы)
Пусть $q(x)$ - квадратичная форам на линейном пространстве V.
Пусть $a = (a_1, \dots, a_n)$ и $b = (b_1, \dots, b_n)$ - базисы в $V$.
Пусть $A$ - матрица квадратичной формы в базисе $a$
Пусть $B$ - матрицы квадратичной формы в базисе $b$
Тогда $\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg} B$ и ранг квадратичной формы корректно определен.

Доказательство: Было доказано, что $B = C^T AC \Rightarrow$ по лемме, так как мы умножаем матрицу $A$ на матрицы $C^T$ слева и на $C$ справа, то $\operatorname{Rg} B = \operatorname{Rg} A$, ч.т.д.

Определение: квадратичную форму $q(x)$ будем назвать <u>положительно определённой</u>, если

$$\forall x \neq 0 \quad q(x) > 0$$

<u>отрицательно определённой</u>, если

$$\forall x \neq 0 \quad q(x) < 0$$

<u>знакопеременной</u>, если

$$\exists x,\ y \in V : q(x) < 0 < q(y)$$

Пример: $q_1(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2$ на $\mathbb{R}^3$ - положительно определена
$q_2(x) = x_1^2 - x_3^2$ - знакопеременна $\big(y = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix},\ x = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow q(x) < 0 < q(y)\big)$.
$q_3(x) = -x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2$ - отрицательно определена на $\mathbb{R}^3$,
но $q_3'(x) = -x_1^2 - 3x_3^2$ - не является отрицательно определённой, так как $q_3'\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = 0$ - это неположительно определённая квадратная форма.

Теорема: (Критерий Сильвестра положительной определённости)
Пусть $A$ - матрица квадратичной формы $q(x)$ в некотором базисе.
Тогда

$q(x)$ положительно определена $\Leftrightarrow$ последовательность главных угловых миноров в A строго положительна

То есть $\begin{cases} \Delta_1 = a_{11} > 0 \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0 \\ \dots \\ \Delta_n = \det A > 0 \end{cases}$

Следствие:

Квадратичная форма отрицательно определена $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_1 < 0 \\ \Delta_2 > 0 \\ \dots \\ (-1)^n \Delta_n > 0 \end{cases}$

То есть знаки главных угловых миноров чередуются, начиная с минуса.

Доказательство: Так как $A$ - отрицательно определена $\Leftrightarrow -A$ положительно определена $\det(-A) = (-1)^n \det A$, ч.т.д.

Пример: $q(x) = -x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2$ - отрицательно определённая

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}$$

Определение: Квадратичную форму $q(x) = \alpha_1 x_1^2 + \dots + \alpha_n x_n^2$, где $\alpha_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{1,\ n}$, то есть в квадратичной форме нет попарных произведений вида $Cx_i x_j$, называют квадратичной формой каноничесмкого вида. Если $\alpha_i \in \{-1,\ 0,\ 1\}$, то канонический вид называют нормальным.

Замечание: Матрица квадратичной формы в каноническом виде является диагональной.

## Лекция 10 апреля

$x \in V \quad q(x) = \alpha_1 x_1^2 + \dots + \alpha_n x_n^2$ $(\alpha_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{1,\ n})$ - канонический вид. Если все коэффициенты $\alpha_i$ являются элементами множества $\{-1,\ 0,\ 1\}$, то это называется нормальным видом.

Утверждение. Любую квадратичную форму можно привести к каноническому и к нормальному виду.

### Методы приведения

1. Метод Лагранжа.
   Главная идея состоит в последовательном выделении полных квадратов. При этом на каждом шаге под квадрат полностью уходит одна переменная (невыполнение этого условия является частой ошибкой при решении задач). Получается, что не более чем за $n$ шагов алгоритм даст канонический вид.
   Если на некотором этапе переменных в квадрате не осталось, но есть выражение вида $c \cdot x_i \cdot x_j$ $(i \neq j)$, то делают замену переменных:

$$\begin{cases} x_i = x_i' - x_j' \\ x_j = x_i' + x_j' \end{cases} \Rightarrow c x_i x_j = c\left((x_i')^2 - (x_j')^2\right)$$

Получили новые квадраты, продолжаем выполнение метода (то есть выделяем полный квадрат при необходимости).

$$\alpha_i x_i^2 + 2x_i \underbrace{(\beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n)}_{\text{нет } x_i} = \alpha_i \left( x_i^2 + 2x_i \frac{\beta_i x_1 + \dots + \beta_n x_n}{\alpha_i} + \left( \frac{\beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n}{\alpha_i} \right)^2 \right)$$

$$- \frac{\beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n}{\alpha_i} = \alpha_i \underbrace{\left( x_i + \frac{\beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n}{\alpha_i} \right)}_{\text{заменяем на } y_i} - \underbrace{\frac{(\beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n)^2}{\alpha_i}}_{\text{уже без } x_i}$$

То есть $x_i$ полностью ушла под квадрат.

2. Метод Якоби. (может быть пройдём на семинаре)

3. Симметичный Гаусс. (может быть пройдём на семинаре)

4. Метод приведения к главным осям (только для канонического). (может быть пройдём на семинаре)

Теорема. Закон инерции квадратичной формы

Для любых двух канонических видов одной квадратичной формы. $q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_k x_k^2,\ \lambda_i \neq 0,\ i = \overline{1,\ k}$
$q(y) = \mu_1 y_1^2 + \dots + \mu_m y_m^2,\ \mu_j \neq 0,\ j = \overline{1,\ m}$
где $x,\ y \in V$
То есть это запись одной и той же квадратичной формы в разных базисах.

1. $k = m = \operatorname{Rg} A \leftarrow$ равно рангу квадратичной формы. При этом $k = m$ может быть меньше размерности $V$, то есть $k = m \leqslant n = \dim V$

2. Количество положительных $\lambda_i$ совпадает с количество положительных $\mu_j$. Это называется положительный индекс инерции квадратичной формы.

Обозначение: $i_+$

3. Количество отрицательных $\lambda_i$ совпадает с количеством отрицательрных $\mu_i$ и называется отрицательным индексом инерции.

Обозначение: $i_-$

Определение: Сигнатурой квадратичной формы называют два числа $(i_+,\ i_-)$.

Замечание: Если у двух квадратичных форм совпадают сигнатуры, то существует невырожденная линейное преобразование (=замена координат, =замена базиса), которое одну квадратичную форму переводит в другую. Сначала обе в нормальный вид, он совпадает, так как одинаковое количество $+1$ и $-1$, и для одной преобразование в обратную сторону.

Замечание: Если у двух квадратичных форм разные сигнатуры $(i_+,\ i_-)$, то одну нельзя перевести в другую невырожденным линейным преобразованием. То есть квадратичные формы разные.

Замечание: $\operatorname{Rg} A = i_+ + i_-$. Иногда вводят величину $S = i_+ - i_-$. Знание $\operatorname{Rg} A$ и $S$ эквивалентно знанию $i_+$ и $i_-$, и поэтому число $S$ иногда называют сигнатурой.

## Линейные отображения и линейные операторы

Пусть $V_1$ и $V_2$ - два линейных пространства над полем $F$

Определение: Отображение $\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$ называется линейным, если

1. $\forall x,\ y \in V_1,\ \varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$
2. $\forall x \in V_1,\ \forall \alpha \in F\ \varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x)$

Замечание: эти два условия равносильны $\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y)$

Замечание: Линейное отображение это гомоморфизм линейных пространств, и есть обозначение $\varphi \in \operatorname{Hom}(V_1,\ V_2)$

Определение: Если $V_1 = V_2 = V$ (пространства совпадают), то линейное отображение $\varphi$ называется линейным оператором (л. о.)

Пусть $e_1, \dots,\ e_n$ - базис в $V_1$, $\dim V_1 = n$
$f_1, \dots,\ f_m$ - базис в $V_2$, $\dim V_2 = m$
Рассмотрим векторы $\varphi(e_1), \dots,\ \varphi(e_n) \in V_2$ (образы базисных векторов первого пространства под действием $\varphi$), и разложим их по базису второго пространства $f_1, \dots,\ f_m$ :

$$\begin{cases} \varphi(e_1) = a_{1\,1}f_1 + a_{2\,1}f_2 + \dots + a_{m\,1}f_m \\ \vdots \\ \varphi(e_n) = a_{1\,n}f_1 + a_{2\,n}f_2 + \dots + a_{m\,n}f_m \end{cases}$$

Определение: Матрица линейного отображения в паре базисов $(e_1, \ldots,\ e_n)$ и $(f_1, \ldots,\ f_m)$ это матрица:

$$[\varphi]_{e\,f} = A_{e\,f} = \left.\underbrace{\begin{pmatrix} a_{1\,1} & \ldots & a_{1\,n} \\ a_{2\,1} & \ldots & a_{2\,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m\,1} & \ldots & a_{m\,n} \end{pmatrix}_{m\times n}}_{\dim V_1}\right\} \dim V_2$$

По столбцам стоят координаты образов векторов первого базиса при разложении по второму базису.

Определение: Пусть $\varphi : V_1 \longrightarrow V$ - линейный оператор и $e_1, \ldots,\ e_n$ - базис.

Пусть $\begin{cases} \varphi(e_1) = a_{1\,1}e_1 + a_{2\,1}e_2 + \cdots + a_{n\,1}e_n \\ \vdots \\ \varphi(e_n) = a_{1\,n}e_1 + a_{2\,n}e_2 + \cdots + a_{n\,n}e_n \end{cases}$

То есть образы базисных векторов под дейсвтием $\varphi$ разложим по тому же базису.

Тогда:

$$A_e = \begin{pmatrix} a_{1\,1} & \ldots & a_{1\,n} \\ a_{2\,1} & \ldots & a_{2\,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n\,1} & \ldots & a_{n\,n} \end{pmatrix}$$

Называется матрицей линейного оператора

Пример: $\varphi(x) = \text{Пр}_L\, x$, где $L = \mathcal{L}(\bar{i})$ в $V_3$, где $\bar{i}$ - ось абсцисс.

Рассмотрим стандартный базис $\{\bar{i},\ \bar{j},\ \bar{k}\}$ в $V_3$.

$$\begin{cases} \varphi(i) = i = 1 \cdot i + 0 \cdot j + 0 \cdot k \\ \varphi(j) = 0 \\ \varphi(k) = 0 \end{cases} \Rightarrow A_{\{i,\ j,\ k\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Теорема: (о том, что действие линейного оператора полностью определяется его матрицей)

Пусть $\varphi$ - линейный оператор в пространстве $V$

$e = (e_1, \dots,\ e_n)$ - базис в $V,\ x \in V$ - вектор.

$x^e = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ - столбец координат вектора $x$ в базисе $e$, то есть $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

Пусть $A_e$ - матрица линейного оператора $\varphi$ в базисе $e$, тогда:

$$\big(\varphi(x)\big)^e = A_e \cdot x^e,\ \text{(матричное произведение)}$$

Доказательство: $\varphi(x) = \varphi(x_1e_1 + \dots + x_1e_1) \overset{\text{по линейности}}{=} x_1\varphi(e_1) + \dots + x_n\varphi(e_n) \overset{\text{определение матрицы л.о.}}{=} x_1(a_{1\,1}e_1 + a_{2\,1}e_2 + \dots + a_{n\,1}e_n) + \dots + x_1(a_{1\,n}e_1 + a_{2\,1}e_2 + \dots + a_{n\,n}e_n) = (a_{1\,1}x_1 + a_{1\,2}x_2 + \dots + a_{1\,n}x_n)e_1 + \dots + (a_{n\,1}x_1 + a_{n\,2}x_2 + \dots + a_{n\,n}x_n)e_n$ - получили разложение $\varphi(x)$ по базису $e$

$\Rightarrow \big(\varphi(x)\big)^e = \begin{pmatrix} a_{1\,1}x_1 + a_{1\,2}x_2 + \dots a_{1\,n}x_n \\ \vdots\ \vdots\ \vdots \\ a_{n\,1}x_1 + a_{n\,2}x_2 + \dots + a_{n\,n}x_n \end{pmatrix}$

Но это результат умножения $A_e$ на $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x^e$, то есть $\big(\varphi(x)\big)^e = A_e \cdot x^e$, ч.т.д.

Замечание: Для линейных отображений аналогично

$$\big(\varphi(x)\big)^f = A_{e\,f}x^e$$

Замечание: При фиксированном базисе есть биекция между линейными операторами (линейными отображениями) и матрицами $n \times n,\ (m \times n)$.

## Лекция 17 апреля.

### Линейные операторы

(Напоминание) Пусть $\varphi : V \longrightarrow V$ - линейный оператор в пространстве $V$, фиксируем базис $e = \{e_1, \dots,\ e_n\}$ в $V$.

Тогда $\exists!$ матрица линейного оператора $A_e$ в базисе $e$, что

$$\forall x \in V\ \ \big(\varphi(x)\big)^e_{n\times 1} = \underset{n\times n}{A_e} \cdot x^e_{n\times 1}$$

Для линейного отображения $\phi : V_1 \longrightarrow V_2$ в фиксированной паре базисов $e,\ f$

$$\big(\phi(x)\big)^f_{m\times 1} = \underset{m\times n}{A_{e\,f}} \cdot x^e_{n\times 1}$$

Утверждение: Пусть $A$ - матрица линейного оператора $\varphi$ в базисе $e$.
$A'$ - матрица линейного оператора $\varphi$ в базисе $e'$
Пусть $T$ - матрица перехода в $V$ от базисе $e$ к базису $e'$.
Тогда $A' = T^{-1} \cdot A \cdot T$

Доказательство: По доказанному:

$$y = A \cdot x,\ y = \big(\varphi(x)\big)^e \tag{1}$$

$$y' = A' \cdot x',\ y' = \big(\varphi(x)\big)^{e'} \tag{2}$$

$y = T \cdot y'$ (так как $y' = T^{-1}y$) и $x = Tx'$ - формула зименения координат вектора при замене базиса.
Подставляем в (1): $T \cdot y' = A \cdot T \cdot x'$, но $T$ - невырожденная матрица (так как она является матрицей перехода), домножим слева на $T^{-1} \Rightarrow$
$\Rightarrow y' = \underbrace{T^{-1} \cdot A \cdot T}_{A'} \cdot x'$, сравним с (2) $\Rightarrow A' = T^{-1} \cdot A \cdot T$, так как матрица линейного оператора в заданном базисе единственная.

Утверждение: Пусть $\varphi$ - линейное отображение линейного пространства $V_1$ ($\dim V_1 = n$) в линейное пространство $V_2$, ($\dim V_2 = m$).
Пусть $A_{\varepsilon_1\,\varepsilon_2}$ - матрица линейного отображения в паре базисов $\varepsilon_1$ в пространстве $V_1$ и $\varepsilon_2$ в пространстве $V_2$.
Тогда, если $T_1$ - Это матрица перехода в $V_1$ от базиса $\varepsilon_1$ к базису $\varepsilon_1'$.
$T_2$ - матрица перехода в $V_2$ от $\varepsilon_2$ к $\varepsilon_2'$.
Тогда имеет место следующее равенство:

$$\underset{m\times n}{A_{\varepsilon_1'\,\varepsilon_2'}} = \underset{m\times m}{T_2^{-1}} \cdot \underset{m\times n}{A_{\varepsilon_1\varepsilon_2}} \cdot \underset{n\times n}{T_1}$$

Доказательство: Пусть $y$ - образ $x$ под действием $\varphi$ $\big($то есть $y = \varphi(x)\big)$, тогда:
(1) $\quad y^{\varepsilon_2} = A_{\varepsilon_1\,\varepsilon_2} \cdot x^{\varepsilon_1} \leftarrow$ в старом базисе
(2) $\quad y_{\varepsilon_2'} = A_{\varepsilon_1'\varepsilon_2'} \cdot x^{\varepsilon_1'} \leftarrow$ в новом базисе

$\left.\begin{array}{l} x^{\varepsilon_1} = T_1 \cdot x^{\varepsilon_1'} \\ y^{\varepsilon_2} = T_2 \cdot y^{\varepsilon_2'} \end{array}\right. \leftarrow$ формула изменения координат вектора

Подставим в (1), получим:
$T_2 y^{\varepsilon_2'} = A_{\varepsilon_1\,\varepsilon_2} T_1 x^{\varepsilon_1'}$. Домножим на $T_2^{-1}$ слева, так как $T_2$ - невырожденная$\Rightarrow$

$\Rightarrow y^{\varepsilon_2'} = \underbrace{T_2^{-1} A_{\varepsilon_1\,\varepsilon_2} T_1}_{A_{\varepsilon_1'}\,A_{\varepsilon_2'}} x^{\varepsilon_1'}$, сравнивая с (2) $\Rightarrow$

$\Rightarrow A_{\varepsilon_1'\,\varepsilon_2'} = T_2^{-1} \cdot A_{\varepsilon_1\,\varepsilon_2} T_1$

Определение: Квадратные матрицы $A$ и $B$ называются подобными, если существует невырожденная матрица $C$:

$$B = C^{-1} A C \quad (\det C \neq 0)$$

Замечание: Матрицы линейных операторов в разных базисах подобнымежду собой.

Утверждение: Определители подобных матриц равны.

Доказательство: Пусть $A$ и $B$ подобны, то есть $B = C^{-1}AC \Rightarrow$

$$\det B = \det\left(C^{-1}AC\right) = \det C^{-1} \det A \det C = \frac{\det C}{\det C} \det A = \det A$$

Замечание: Это означает, что $\det A$ - определитель матрицы линейного оператора не зависит от выбора базиса, то есть является инвариантом замены координат (и $\operatorname{Rg} A$ - тоже инвариант)

Определение: Ядром линейного отображения $\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$ назыается множество:

$$\ker \varphi = \left\{ x \in V_1 \middle|\ \varphi(x) = 0 \right\} = \varphi^{-1}(0) \subseteq V_1$$

Образом линейного отображения $\varphi$ называется множество

$$\operatorname{Im} \varphi = \left\{ x \in V_2 \ \middle|\ \exists y \in V_1 :\ \varphi(y) = x \right\} = \varphi(V_1) \subseteq V_2$$

Замечание: $\ker \varphi$ и $\operatorname{Im} \varphi$ являются линейными подпространствами в $V_1$ и $V_2$ соответственно (проверить замкнутость по оперицаям).

Утверждение: Пусть $\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$ - линейное отображение.
Тогда $\dim \ker \varphi + \dim \operatorname{Im} \varphi = n = \dim V_1$

Доказательство: Зафиксируем базис $e = \{e_1, \dots,\ e_n\}$ в $V_1$
$\forall x \in V_1$ можно представить в виде $x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$
$\varphi(x) = x_1\varphi(e_1) + \dots + x_n\varphi(e_n)$, но $\varphi(e_1), \dots,\ \varphi(e_n)$ - столбцы матрицы линейного отображения (если фиксировать базис и в $V_2$).
$\operatorname{Im}\varphi = \mathcal{L}\big(\varphi(e_1), \dots,\ \varphi(e_2)\big)$ (линейная оболочка). $\Rightarrow$
$\Rightarrow \dim\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Rg} A$ - ранг матрицы линейного отображения.
Ядро $\varphi$ описывается однородной СЛАУ $Ax = 0$, размерность пространства её решений (то есть число векторов ФСР) равна $k = n - \operatorname{Rg} A$, где
$k$ - размерность ядра,
$n$ - размерность образа.
Итак, $\dim\ker\varphi + \dim\operatorname{Im}\varphi = n$, где $n = \dim V_1$.

Замечание: Если $\varphi:\ V \longrightarrow V$ - линейный оператор (то есть $\ker\varphi,\ \operatorname{Im}\varphi \subseteq V$),
то вообще говоря,
$V \neq \ker\varphi + \operatorname{Im}\varphi$, хотя и $\dim\ker\varphi + \dim\operatorname{Im}\varphi = \dim V$

Пример: Рассмотрим линейное пространство $\mathbb{R}_n[x]$ - пространство многочленов от $x$, $\deg f \leqslant n$ с вещественными коэффициентами и оператор
$\mathcal{D} : f \mapsto f' \leftarrow$ производная, $\mathcal{D}:\ \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$
$\dim\mathbb{R}_n[x] = n + 1$, так как $\mathbb{R}_n[x] = \mathcal{L}\{1,\ x,\ x^2, \dots,\ x^n\}$
$\operatorname{Im}\mathcal{D} = \mathbb{R}_{n-1}[x],\ \dim\operatorname{Im}\mathcal{D} = n$
$\ker\mathcal{D} = \mathcal{L}(1)$ - константы, $\dim\ker\mathcal{D} = 1$,
но $\ker\mathcal{D} \subseteq \operatorname{Im}\mathcal{D}$, но
$\dim\ker\mathcal{D} + \dim\operatorname{Im}\mathcal{D} = n + 1 = \dim\mathbb{R}_n[x]$

Действия с линейными операторами и их матрицами

Пусть $A$ и $B$ - линейные операторы на линейном пространстве $V$ над полем $F$, тогда

Определение: $(A + B)\,(x) = A(x) + B(x)$
$(\lambda A)\,(x) = \lambda A(x)$ - умножение на число $\lambda \in F$
$(A \cdot B)\,(x) = A\big(B(x)\big)$ - умножение линейного оператора (композиция)

Замечание: $A + B,\ \lambda \cdot A,\ A \cdot B$ - снова линейные операторы (провека по определению)

Утверждение: Пусть фиксирован базис $e = \{e_1, \dots,\ e_n\}$. Тогда:

$$\begin{cases} (1)\ \big(A + B\big)_e = A_e + B_e \\ (2)\ \big(\lambda A\big)_e = \lambda A_e \\ (3)\ \big(A \cdot B\big)_e = A_e \cdot B_e \end{cases}$$

Доказательство (3): $\Big((A \cdot B)(x)\Big)^e = A_e \cdot \big(B(x)\big)^e = A_e \cdot B_e x^e = (AB)_e x^e \Rightarrow$
$\Rightarrow (AB)_e = A_e B_e$, так как матрица линейных операторов в фиксированном базисе единственна.

Собственные векторы и собственные числа

Определение: Число $\lambda$ называется <u>собственным числом</u> (или <u>собственным значением</u>, то есть <u>с. з.</u>) линейного оператора $\varphi : V \longrightarrow V$, где $V$ - линейное простраснтво, если $\exists$ вектор $x \in V,\ x \neq 0$, такой что $\varphi(x) = \lambda \cdot x$. При этом $x$ называется <u>собственным вектором</u> (<u>с. в.</u>), отвечающим собственному значению $\lambda$.

Замечание: Если $x$ - собственный вектор, отвечающих собственному значению $\lambda$, то $\forall \alpha \in F,\ \alpha \neq 0$, $\alpha x$ - тоже собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda$ $\varphi(\alpha x) = \alpha \varphi(x) = \alpha \lambda x = \lambda(\alpha x) \Rightarrow \alpha x$ - собственный вектор.

Замечание: Дригими словами, собственный вектор - ненулевой вектор, остающийся коллинеарным (либо равным 0) самому себе под действием линейного оператора $\varphi$

Пример 1: Пусть $\text{Пр}_{Ox} : V_2 \longrightarrow V_1$ $(V_2 \cong \mathbb{R}^2)$ - линейный оператор проекции на $Ox$ в плоскости $V_2$. Все векторы $\in Ox$, отличные от 0 - собственные векторы.
Например, $\vec{i} = (1,\ 0)$
$\varphi(\vec{i}) = i$ - собтсвенный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda_1 = 1$
$\varphi(\vec{j}) = 0 \Rightarrow j$ - собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda_2 = 0$
В базисе $\{i,\ j\}$ - базис из собственных векторов. Матрица линейного оператора $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ - диагональная матрица.
$V_2 = Ox \oplus Oy$
Бывает, что нет собственных значений и собственных векторов для линейного оператора