Теория вероятности 1 модуль.

Андрей Тищенко БПИ231 @AndrewTGk

2024/2025

Лекция 6 сентября.

Формула оценки

$random()\%11$
Накоп = 0.1ИДЗ + 0.15РС + 0.25КР + 0.5Экзамен
ИДЗ = индивидуальное домашнее задание (выдаётся через вики курса).
РС = работа на семинарах.
КР = контрольные работы.

Учебник:

Кибзун А. К., Горяинова Е. Р., Наумов А. В. “Теория вероятности и математическая статистика. Базовый курс с примерами и задачами” 2013 или 2014 года.

История

Наука появилась из-за азартных игр. Кавалер Демире захотел составить математическую базу для расчётов в азартных играх. Перечесление многих известных математиков, работавших в этой области. Колмогоров легенда теорвера, придумал определение вероятности, основал СУНЦ, ездил на лыжах.

Основные понятия

Определения

Теория вероятности — раздел математики, изучающий математические модели массовых случайных явлений.
Массовость — за n повторений эксперимента, вероятность каждого исхода стабилизируется возле какого-то значения p_i.
Всякое случайное событие обладает массовостью.

Обозначения

$\omega_1, \dots,\ \omega_n$ — элементарные случайные события.
$\Omega = \{\omega_1, \dots,\ \omega_n\}$ — пространство элементарных событий.
$\forall\Omega\ \forall A \quad A \subset \Omega \Leftrightarrow A$ — случайное событие.
$\forall A\ \forall\Omega \quad \Omega \subseteq A \Leftrightarrow A$ — достоверное событие.
$\forall A\ \forall\Omega \quad \Omega \cap A = \varnothing \Leftrightarrow A$ — невозможное событие.

Операции с событиями

$$A,\ B \subset \Omega$$

Произведение

Произведением случайных событий $A,\ B$ называется событие $A \cdot B = A \cap B$

Сумма

Сумма $A + B$ есть событие $A \cup B$.

Разность

Разность множеств $A \backslash B$.

Дополнение

$\overline{A} = \Omega \backslash A$.

Свойства операций

1. $A + A = A$
2. $A \cdot A = A$
3. $A \cdot \Omega = A$
4. $A + \Omega = \Omega$
5. $A + B = B + A$
6. $A \cdot B = B \cdot A$
7. $A + (B + C) = (A + B) + C$
8. $\overline{\overline{A}} = A$
9. $\overline{\overline{\overline{A}}} = \overline{A}$
10. $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

Определение

Класс подмножнеств $\mathcal{A}$ на пространстве событий Ω называется σ-алгеброй событий, если:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. $\forall A \subset \Omega \quad A \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$
3. $\forall A_i\ A_1, \dots,\ A_n, \dots \in \mathcal{A} \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A} \wedge \prod\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

Классическое определение вероятности

Исход = элементарное случайное событие.

1. Конечное число исходов эксперимента.
2. Исходы взаимно исключающие.
3. Исходы равновозможны.

Тогда $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$
$|A|$ - мощность множества исходов, принадлежищих A.

1. $P(A) \geqslant 0$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $A \cdot B = \varnothing \Rightarrow P(A + B) = P(A) + P(B)$

Задача

В коробке 10 красных и 20 чёрных шаров.
Событие $A = \{\text{вытащить красный шар}\} \Rightarrow P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$

Лекция 13 сентября.

Геометрическое определение вероятности

Ω является подмножеством конечной меры в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{R}^2$, или ... или $\mathbb{R}^n$.
$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$, μ - мера (длина, площадь, n-мерный объём).
Свойства:

1. $P(A) \geqslant 0 \quad \forall A \subseteq \Omega$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $A \cdot B = \varnothing \Rightarrow P(A + B) = P(A) + P(B)$

Задача

Ромео и Джульетта хотят встретиться между полуночью и часом ночи, но не могут договориться о времени, поэтому они приходят в произвольный момент времени на этом отрезке и ждут 15 минут, после чего уходят. С какой вероятностью они не встретятся? x - время прихода Дж.
y - время прихода Ромео.
Тут должен быть балдёжный график, но писать это долго.
$x,\ y \in [0,\ 1]$, в часах.
$|x - y| \leqslant \frac{1}{4}$
$P(\overline{A}) = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}}{1} = \frac{9}{16} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$.
В этом определении мы избавились от конечности множества исходов.

Частотное (статистическое) определение вероятности

Определение

Пусть опыт проведён N раз, а событие A произошло n_A раз. Тогда $\frac{n_A}{N}$ называется частотой события A.
Тогда вероятность $P(A) = \lim\limits_{N\to\infty} \frac{n_A}{N}$

Аксиоматическое определение А. Н. Колмогорова (легенды, миллионера, плейбоя и филантропа)

Определение

Пусть $\mathcal{A} - \sigma$ алгебра событий на пространстве Ω. Назовём вероятностью числовую функцию $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^1$, удовлетворяющую следующим аксиомам:

1. $\forall A \in \mathcal{A} \quad P(A) \geqslant 0$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $\forall A_1, \dots,\ A_n \in \mathcal{A} \quad (\forall i,\ j \in \mathbb{N}\ A_i \cap A_j \neq \varnothing \Rightarrow i = j) \Rightarrow P\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) =$
   $= \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Определение

Число $P(A),\ A \in \mathcal{A}$ называется вероятностью события A.

Определение

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ называется вероятностным пространством.

Свойства P(A)

1. $P(A) = 1 - P(\overline{A})$.
   $\Omega = A + \overline{A} \wedge A \cap \overline{A} = \varnothing$
   $P(\Omega) = P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) \Rightarrow P(A) = 1 - P(\overline{A})$
2. $P(\varnothing) = 0$
   $\overline{\Omega} = \varnothing \Rightarrow P(\Omega) + P(\varnothing) = 1 \Rightarrow P(\varnothing) = 1 - 1 = 0$

3. $A \subseteq \Omega \wedge B \subseteq \Omega \wedge A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leqslant P(B)$
   $B = A + (B \backslash A) \Rightarrow P(B) = P\big(A + (B \backslash A)\big) = P(A) + \underbrace{P(B \backslash A)}_{\geqslant 0} \Rightarrow$
   $\Rightarrow P(A) \leqslant P(B)$
4. $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$
   По первой аксиоме $P(A) \geqslant 0$
   Из третьего $A \subseteq \Omega \wedge \Omega \subseteq \Omega \wedge A \subseteq \Omega \Rightarrow P(A) \leqslant P(\Omega) = 1$
5. Формула (теорема) сложения вероятностей:
$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$$
$$\begin{cases} A = A \cdot \Omega = A \cdot (B + \overline{B}) = AB + A\overline{B} \Rightarrow P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB) \\ B = B \cdot \Omega = B \cdot (A + \overline{A}) = BA + B\overline{A} \Rightarrow P(B\overline{A}) = P(B) - P(AB) \end{cases} \Rightarrow$$
   $\Rightarrow A + B = AB + A\overline{B} + B\overline{A} \Rightarrow P(A + B) =$
   $= P(AB) + P(A) - P(AB) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(AB)$
   Замечание: тут не было $2(AB)$, потому что сложение по определению есть объединение, поэтому одного экземпляра достаточно.
   Для трёх слагаемых:
   $P((A + B) + C) = P(A + B) + P(C) - P\big((A + B) \cdot C\big) =$
   $= P(A) + P(B) - P(AB) + P(C) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$
   $P(A_1 + \dots + A_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum\limits_{i \leqslant j} P(A_i A_j) + \sum\limits_{i \leqslant j \leqslant k} P(A_i A_j A_k) + \dots$
   $\dots + (-1)^{n-1} P(A_1, \dots,\ A_n)$

Задача

$A_1 = \{\text{Решка при 1-ом броске}\},\ A_2 = \{\text{Решка при 2-ом броске}\}$
$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Определение

Пусть $P(B) \neq 0$, тогда условная вероятность события A при условии B
$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Определение

События $A,\ B$ называются независимыми, если $P(A/B) = P(A)$
Отсюда следует: $\frac{P(AB)}{P(B)} = P(A) \Rightarrow P(AB) = P(A)P(B)$

Определение

События $A_1,\ A_2, \dots,\ A_n$ называются независимы в совокупности, если:

$\forall k = 2, \dots,\ n\ \forall i_1, \dots,\ i_k \quad (1 \leqslant i_1 \leqslant \dots \leqslant i_k \leqslant n) \Rightarrow P(A_{i_1}, \dots,\ A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot_{\dots} \cdot P(A_{i_k})$

Лекция 20 сентября.

Воспоминания

$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \quad P(AB) = P(B)P(A/B) = P(A)P(B/A)$

Теорема об умножении вероятностей

Пусть $(P(A_1, \dots,\ A_n)) > 0$, тогда:

$$P(A_1, \dots,\ A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)\dots P(A_n/A_1\dots A_{n-1})$$

Доказательство

$$\begin{cases} B_{n-1} = A_1\dots A_{n-1} \\ B_{n-2} = A_1\dots A_{n-2} \\ \dots \\ B_1 = A_1 \end{cases} \Rightarrow P(\underbrace{A_1\dots A_{n-1}}_{B_{n-1}}A_n) = P(\underbrace{\ B_{n-1}\ }_{B_{n-2}A_{n-1}})P(A_n/B_{n-1}) =$$

$$= P(B_{n-2}A_{n-1})P(A_n/A_1\dots A_{n-1}) = P(B_{n-2})P(A_{n-1}/B_{n-2})P(A_n/A_1\dots A_{n-1}) =$$

$$= P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)\dots P(A_n/A_1\dots A_{n-1})$$

Схема Бернулли (Биномиальная схема)

Последовательность испытаний, такая что:

1. Исход любого испытания двоичен $\forall A\ A \vee \overline{A} \equiv 1$
2. Испытания независимы в совокупности.
3. $P(A) = p$ не изменяется от опыта к опыту.

Например, подбрасывание монеты.
Положим У - успех, Н - неудача.
В таком случае k успехов можно получить $P_n(k)C_n^k p^k(\underbrace{1-p}_{=q})^{n-k}$ способами

Доказательство

$P(\underbrace{\text{У}\ldots\text{У}}_{k}\underbrace{\text{Н}\ldots\text{Н}}_{n-k}) = p^k q^{n-k}$

$P(\{\underbrace{\text{У}\ldots\text{У}}_{k}\text{Н}\ldots\text{Н}\}) + P(\text{Н}\underbrace{\text{У}\ldots\text{У}}_{k}\text{Н}\ldots\text{Н}) + \dots + P(\text{Н}\ldots\text{Н}\underbrace{\text{У}\ldots\text{У}}_{k}) =$

$= C_n^k p^k q^{n-k}$

$\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = 1$

Следствие

При $k_1 \leqslant k \leqslant k_2 : \quad P_n(k) = \sum\limits_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k q^{n-k}$

Обозначение

Если максимальная вероятность достигается при $k = m$, то есть

$$C_n^m p^m q^{n-m} = \max_{0\leqslant k\leqslant n} C_n^k p^k q^{n-k}$$

Тогда можно сказать $m = \operatorname*{argmax}\limits_{0\leqslant k\leqslant n} P_n(k)$

Можно посчитать без вычисления всех значений:

$m = \begin{cases} [(n+1)p], \text{ если } (n+1)p \text{ - нецелое число} \\ (n+1)p \wedge (n+1)p - 1, \text{ иначе} \end{cases}$

Полиномиальная схема испытаний

1. Проводится n независимых опытов
2. В каждом опыте m взаимноисключающих исходов $(n_1, \dots, n_m)$
3. $P(n_1) = p_1,\ P(n_2) = p_2, \dots,\ P(n_m) = p_m, \quad p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1$

$\sum\limits_{i=1}^{m} n_i = n$

$P_n(n_1,\ n_2, \dots,\ n_m) = \dfrac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_m!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_m^{n_m}$

Определение

Пусть $H_1, \dots,\ H_n \subset \Omega$, события $H_1, \dots,\ H_n$ называются полной группой событий (гипотезами), если

1. $\forall i,\ j \quad i \neq j \Rightarrow H_i \cdot H_j = \varnothing$
2. $H_1 + \dots + H_n = \Omega$

Формула полной вероятности

Пусть $H_1, \dots,\ H_n$ — полный граф событий, $A \subset \Omega$
$P(A) = P(A \cdot \Omega) = P\big(A \cdot (H_1 + \dots + H_n)\big) = P(AH_1 + \dots + AH_n)$, так как события $H_1, \dots,\ H_n$ независимы, можно сделать переход:
$P(AH_1 + \dots + AH_n) = P(AH_1) + \dots + P(AH_n) = P(H_1)P(A/H_1) + \dots + P(H_n)P(A/H_n)$
Получаем $P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + \dots + P(H_n)P(A/H_n)$

Задача

Студент выучил m билетов из n. Посчитать вероятность вытянуть выученный билет при заходе первым, вторым.
$A = \{$студент вытащит выученный билет$\}$
$H_1 = \{$Другой студент вытащит выученный нашим студентом билетом$\}$
$H_2 = \{$Наш студен вытащит невыученный билет$\}$
$P(H_1) = \frac{m}{n}, \quad P(H_2) = \frac{n-m}{n}$
$P(A/H_1) = \frac{m-1}{n-1}, \quad P(A/H_2) = \frac{m}{n-1}$
$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) = \frac{m}{n}\frac{m-1}{n-1} + \frac{n-m}{n}\frac{m}{n-1} = \frac{m}{n}$

Формула Байеса

$H_1, \dots H_n$ — гипотезы
$P(H_1), \dots,\ P(H_n)$ — априорные вероятности.
Произошло событие A
$P(H_1/A), \dots,\ P(H_n/A)$ — апосториорные вероятности.

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_iA)}{P(A)} = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n} P(H_k)P(A/H_k)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} P(H_i/A) = 1$$

Лекция 27 сентября

$H_1, \dots, \ H_n$ — ПГС
$P(H_1), \dots, \ P(H_n)$ — априорные вероятности.
Произошло событие A.
$P(H_1/A), \dots, \ P(H_n/A)$ — апостериорные вероятности.
$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_n)P(A/H_k)}$

Задача

Завод 1 поставляет 65% продукции. При этом 90% его продукции не имеет дефектов.
Завод 2 поставляет 35% продукции. При этом 80% его продукции не имеет дефектов.
Какой завод более вероятно поставит продукт с дефектом?
$A = \{$Произведён дефектный продукт$\}$
$H_1 = \{$Прибор изготовил завод 1$\}, \ P(H_1) = 0.65, \ P(A/H_1) = 0.1$
$H_2 = \{$Прибор изготовил завод 2$\}, \ P(H_2) = 0.35, \ P(A/H_2) = 0.2$
$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)} = \frac{0.1 \cdot 0.65}{0.1 \cdot 0.65 + 0.2 \cdot 0.35} = \frac{65}{135}$
$P(H_2/A) = \frac{70}{135} > P(H_1/A)$, получается деталь с дефектом с большей вероятностью поступила со второго завода.

Случайные величины

$\Omega = \{\omega_1, \ \omega_2, \dots, \ \omega_6\}$
$\xi = \{1, \ 2, \dots, \ 6\}$
$\Omega = \{\omega_1, \ \omega_2, \ \omega_3, \dots\}$
$\xi = \{1, \ 2, \ 3, \dots\}$
Я понятия не имею, что значат эти множества, но на доске мы их написали со словами: "Давайте покидаем монетку".
Случайная величина $\xi : \Omega \longrightarrow R^1$

Определение

Случайной величиной ξ называется числовая функция $\xi : \Omega \longrightarrow R^1$, которая удовлетворяет условию:

$$\forall x \ \{\omega; \ \xi(\omega) \leqslant x\} \in \mathcal{A}$$

Определение

Функцией распределения (вероятностей) случайной величины ξ называется

$$F_\xi(x) = P(\omega;\ \xi(\omega) \leqslant x) = P(\xi \leqslant x)$$

Свойства $F(x)$

1. $F(+\infty) = 1,\ F(-\infty) = 0 \Rightarrow 0 \leqslant F(x) \leqslant 1.$ На самом деле аргумент $F(x)$ принадлежит R^1, но видимо бесконечность теперь число.

2. Пусть $x_1 < x_2$, тогда $F(x_1) \leqslant F(x_2)$.
Доказательство:
$F(x_2) = P(\xi \leqslant x_2),\ C = \{\omega :\ \xi(\omega) \leqslant x_2\},\ A = \{\omega : \xi(\omega) \leqslant x_1\},$
$B = \{\omega : x_1 < \xi(\omega) \leqslant x_2\}.\ C = A + B,\ P(C) = P(A) + P(B)$
$F(x_2) = P(\xi \leqslant x_2) = P(\underbrace{\xi \leqslant x_1}_{A}) + P(B) = F(x_1) + P(B) \Rightarrow$
$\Rightarrow F(x_2) \geqslant F(x_1)$

3. $F(x_0) = \lim\limits_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} F(x_0 + \varepsilon)$

Определение

Дискретная случайная величина (тут реально ничего не было даже на лекции).

Определение

Пусть случайная величина ξ — дискретная. Рядом распределения ξ называется

ξ	x_1	x_2	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

$\sum\limits_{k=1}^{n} p_k = 1,\ p_k = P(\omega : \xi(\omega) = x_k)$

Пример

ξ	-1	0	2
P	0.3	0.5	0.2

Если $x < -1$, то $F(x) = 0$
Если $-1 \leqslant x < 0$, то $F(x) = 0.3$
Если $0 \leqslant x < 2$, то $F(x) = 0.8$
Если $2 \leqslant x$, то $F(x) = 1$

Определение

Математическим ожиданием (средним значением) дискретной случайной величины с конечным числом значений $x_1, \ldots, x_n$ называется число

$$E\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Если у дискретной случайной величины счётное количество значений, тогда

$$E\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i, \text{ если ряд } \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i \text{ сходится}$$

Сходимость к ∞ считают неопределённой, а с $+\infty,\ -\infty$ проблем нет.

Определение

Дисперсией случайной велиины ξ называют

$$\mathcal{D}\xi = E(\xi - E\xi)^2$$

Квадрат отклонения от среднего.

Определение

Среднеквадратическим отклонением случайной величины ξ называют

$$\sigma_1 = \sqrt{\mathcal{D}\xi}$$

Свойства математического ожидания

1. $\forall c \in \mathbb{R} \quad Ec = c$
2. $E(c \cdot \xi) = \sum_{i=1}^{n} c x_i p_i = cE\xi$
3. $\forall a,\ b \in \mathbb{R} \quad a \leqslant \xi \leqslant b \Rightarrow a \leqslant E\xi \leqslant b$
   Доказательство:
   $a \leqslant \sum_{i=1}^{n} a p_i \leqslant E\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} b p_i = b$
4. $E(\xi_1 + \xi_2) = E\xi_1 + E\xi_2$

Лекция 4 октября.

Воспоминания:

ξ	x_1	$\dots$	x_n
p	p_1	$\dots$	p_n

$E\xi = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i p_i$

Свойства математического ожидания (продолжение)

5. Пусть $\eta = \varphi(\xi),\ \varphi(x)$ - детерминированная функция.
   $E\xi = \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi(x_i) p_i$

Свойства дисперсии.

1. $\mathcal{D}c = 0$
2. $\mathcal{D}(c\xi) = E(c\xi - cE\xi)^2 = Ec^2(\xi - E\xi)^2 = c^2\mathcal{D}\xi$
3. $\forall\xi \quad$ случайная величина$(\xi) \Rightarrow \mathcal{D}\xi \geqslant 0$
4. $\mathcal{D}\xi = E\big(\xi^2 - 2\xi E\xi + (E\xi)^2\big) = E\xi^2 - 2(E\xi)^2 + (E\xi)^2 = E\xi^2 - (E\xi)^2$
5. $\mathcal{D}(\xi_1 + \xi_2) = E(\xi_1 + \xi_2)^2 - \big(E(\xi_1 + \xi - 2)\big)^2 =$
   $= E\xi_1^2 + 2E(\xi_1\xi_2) + E\xi_2^2 - \big((E\xi_1)^2 + 2E\xi_1E\xi_2 + (E\xi_2)^2\big) =$
   $= \big(E\xi_1^2 - (E\xi_1)^2\big) + \big(E\xi_2^2 - (E\xi_2)^2\big) + 2\big(E(\xi_1\xi_2) - E\xi_1E\xi_2\big) =$
   $= \mathcal{D}\xi_1 + \mathcal{D}\xi_2 + 2\underbrace{\big(E(\xi_1\xi_2) - E\xi_1E\xi_2\big)}_{\text{Ковариация } \xi_1 \text{ и } \xi_2}$

Если $\xi_1,\ \xi_2$ независимы, то $\mathrm{cov}(\xi_1,\ \xi_2) = 0$ (ковариация нулевая).

Определение

Начальным моментом k-го порядка случайной величины ξ называется

$$\mu_k = E\xi^k,\ k = 1,\ 2, \dots$$

Определение

Центральным моментом k-го порядка случайной величины ξ называется

$$\nu_k = E(\xi - E\xi)^k,\ k = 2,\ 3, \dots$$

$$\nu_2 = \mathcal{D}\xi$$

Определение

Случайная величина $\overset{0}{\xi} = \xi - E\xi$ называется <u>центрированной</u> случайной величиной

$$E\overset{0}{\xi} = 0$$

Определение

Случайная величина $\xi^* = \frac{\overset{0}{\xi}}{\sigma}$ называют <u>нормированной</u> случайной величиной.

$$D\xi^* = 1$$

Распределения:

1. Распределение Бернулли

$$\xi \sim \mathrm{Ber}(p), \quad 0 < p < 1$$

ξ	0	1
p	$1-p$	p

ξ^2	0	1
p	$1-p$	p

$$E\xi = p, \quad \mathcal{D}\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq$$

2. Биномиальное распределение

$$\xi \sim \mathrm{Bi}(n,\ p), \quad 0 < p < 1$$

ξ	0	1	k	n
p	$\ldots$	$\ldots$	$C_n^k p^k q^{n-k}$	$\ldots$

$$E\xi = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k} =$$

$$= np\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}p^{k-1}q^{n-k} = \left\langle \begin{matrix} j = k-1 \\ k = j+1 \end{matrix} \right\rangle =$$

$$= np\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{j!(n-1-j)!}p^j q^{n-1-j} = np(p+q)^{n-1} = np$$

Можно посчитать математическое ожидание иначе:

$$\xi = \xi_1 + \cdots + \xi_n, \quad \begin{array}{c|c|c} \xi_i & 0 & 1 \\ \hline \mathrm{p} & q & p \end{array} \Rightarrow E\xi = E\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E\xi_i = np$$

$$\mathcal{D}\xi = \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k p^k q^{n-k} - (np)^2 = \dots = npq$$

Так как $\xi_1, \dots,\ x_n$ независимы:

$$\mathcal{D}\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{D}\xi_i = npq$$

3. Распределение Пуассона

$$\xi \sim \Pi(\lambda), \quad \lambda > 0$$

$$\xi = \{0,\ 1,\ 2, \dots\}$$

$$P(\xi = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

$$E\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$

$$\mathcal{D}\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} - \lambda^2 = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k-1}}{(k-1)!} - \lambda^2 =$$

$$= \lambda \sum_{k=1}^{\infty} (k - 1 + 1) \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k-1}}{(k-1)!} - \lambda^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

Теорема Пуассона

Пусть в схеме испытаний Бернулли: $n \to \infty,\ p \to 0,\ np \to \lambda$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

Доказательство

$$\lim_{n\to\infty} C_n^k p^k q^{n-k} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \frac{(1-\frac{\lambda}{n})^n}{(1-\frac{\lambda}{n})^k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Погрешность такой апроксимации:

$$\left| C_n^k p^k q^{n-k} - \frac{e^{-np}(np)^k}{k!} \right| \leqslant np^2$$

Задача

Завод поставляет 1000 бутылок воды. Каждая бутлка может быть повреждена в пути с вероятностью 0.002. Какое среднее количество бутылок будет повреждено? Какова вероятность повреждения не более 2 бутылок?
Случайная величина ξ — количество повреждённых бутылок.
$\xi \sim \mathrm{Bi}(1000, 0.002) \Rightarrow E\xi = 1000 \cdot 0.002 = 2$
Погрешность при апроксимации Пуассоновским распределением будет $\leqslant np^2 = 0.004$, что нас устраивает по точности.
$P(\xi \leqslant 2) = p(\xi = 0) + p(\xi = 1) + p(\xi = 2) = e^{-2}(1 + 2 + 2) = \frac{5}{e^2}$

Ещё распределения

4. Геометрическое распределение

$$\xi \sim G(p), \quad 0 < p < 1$$

$\xi = \{1,\, 2, \dots\}, \quad P(\xi = k) = q^{k-1}p$. После первого успеха эксперименты прекращаюся.

$$E\xi = \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}p = p\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = p\sum_{k=1}^{\infty} \left(q^k\right)' = p\left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k\right)' = p\left(\frac{q}{1-q}\right)' = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

Задача

Студент выучил 80% билетов. Преподаватель спрашивает его, пока не обнаружит незнание. Сколько в среднем билетов спросит преподаватель?
$\xi \sim G(0.2) \quad E\xi = \frac{1}{0.2} = 5$

Лекция 11 октября.

Воспоминания: $F_\xi(x) = P(\xi \leqslant x)$

Непрерывные случайные величины

Определение

Неотрицательная кусочно-непрерывная функция $f_\xi(x)$ называется плотностью распределения случайной величины ξ, если

$$F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\, dt$$

Прикол про Канторову лестницу:

$$F(x) = \begin{cases} 0,\ x \leqslant 0 \\ \frac{1}{2}F(3x),\ 0 \leqslant x < \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2} \leqslant x < \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}F(3x-2),\ \frac{2}{3} \leqslant x < 1 \\ 1,\ x \geqslant 1 \end{cases} \qquad \text{непрерывна, но не имеет плотности.}$$

$$P(\xi = x) = F(x) - \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} F(x - \varepsilon) = 0$$

$$f(x) = F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \tfrac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \tfrac{P(x < \xi \leqslant x + \Delta x)}{\Delta x}$$

$$f(x)\Delta x \underset{\Delta x \to 0}{=} P(x < \xi \leqslant x + \Delta x)$$

Свойства $f_\xi(x)$

1. $\forall x \in \mathbb{R}^1 \quad f_\xi(x) \geqslant 0$
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)\,dx = F(+\infty) = 1$
3. $\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 < \xi \leqslant x_2)$
4. В точках дифференцируемости функции $F(x)$
$$f(x) = F'(x)$$
5. Пусть случайная величина ξ имеет плотность распределения $f_\xi(x)$. Детерминированная функция $\varphi(x)$ является монотонной и дифференцируемой.
$$\text{СВ } \eta = \varphi(\xi) \quad f_\eta(y) - ?$$
   a. Пусть $\varphi(x)$ — монотонно возрастающая функция:
   $$F_\eta(y) = P(\eta \leqslant y) = P(\varphi(\xi) \leqslant y) = P\big(\xi \leqslant \varphi^{-1}(y)\big) = F_\xi\big(\varphi^{-1}(y)\big)$$
   $$f_\eta(y) = \frac{d}{dy}F_\eta(y) = f_\xi\big(\varphi^{-1}(y)\big) \cdot (\varphi^{-1}(y))'$$
   b. Пусть $\varphi(x)$ — монотонно убывающая функция.
   $$F_\eta(y) = P(\eta \leqslant y) = P\big(\varphi(\xi) \leqslant y\big) = P\big(\xi \geqslant \varphi^{-1}(y)\big) = 1 - F_\xi\big(\varphi^{-1}(y)\big)$$
   $$f_\eta(y) = \frac{d}{dy}F_\eta(y) = -f_\xi\big(\varphi^{-1}(y)\big)\big(\varphi^{-1}(y)\big)'$$
   Минус возникает для компенсации отрицательности производной обратной функции.

c. Пусть $\varphi(x)$ — монотонная функция:

$$f_\eta(y) = f_\xi\big(\varphi^{-1}(y)\big)\Big|\big(\varphi^{-1}(x)\big)'\Big|$$

d. Если $\varphi(x)$ — немонотонная функция. Разбиваем на интервалы монотонности:

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x), \ldots,\ \varphi_n(x)$$

Найдём: $\varphi_1^{-1}(y),\ \varphi_2^{-1}(y), \ldots,\ \varphi_n^{-1}(y)$. Тогда:

$$f_\eta(y) = \sum_{i=1}^{k} f\left(\varphi_i^{-1}(y)\right)\Big|\big(\varphi_i^{-1}(y)\big)'\Big|$$

Определение

Математическое ожидание непрерывной случайной величины ξ с плотностью $f_\xi(x)$ называется число:

$$E\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)\,dx$$

если сходится $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x| f_\xi(x)\,dx$

Замечание

1. Если $f_\xi(x) > 0$ только при $x > 0$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)\,dx$ расходится, то $E\xi = +\infty$

2. Если $f_\xi(x) > 0$ только при $x < 0$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)\,dx$ расходится, то $E\xi = -\infty$

3. Распределение Коши: $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx$$

Совйства математического ожидания

1. $Ec = c$
2. $E(c\xi) = cE(\xi)$
3. $a \leqslant \xi \leqslant b \Rightarrow a \leqslant E\xi \leqslant b$
4. $E(\xi_1 + \xi_2) = E\xi_1 + E\xi_2$
5. Пусть случайная величина $\eta = \varphi(\xi)$, φ — детерминированная функция.

$$E\eta = \int\limits_{\infty}^{\infty} \varphi(x) f_\xi(x)\, dx$$

Определение

Дисперсией называется:

$$\mathcal{D}\xi = E(\xi - E\xi)^2 = E\xi^2 - (E\xi)^2$$

Кванти́ль.

Определение

Число Z_γ $0 < \gamma < 1$, называется γ-квантилью непрерывного строго монотонного распределения $F_\xi(x)$, если:

$$F_\xi(Z_\gamma) = \gamma = P(\xi \leqslant Z_\gamma) = \int\limits_{-\infty}^{Z_\gamma} f(x)\, dx$$

Были примеры с графиками, я их очень люблю.

Определение

Квантиль $Z_{0,5}$ называется медианой. Не всегда совпадает с математическим ожиданием.

Дайте лекцию за 25 октября, пожалуйста

Лекция 1 ноября

Неравенства Чебникова

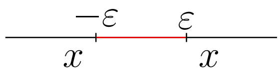
Пусть $E|\xi|^r < \infty$. Тогда:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P(|\xi| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{E|\xi|^r}{\varepsilon^r}$$

Доказательство

$$E|\xi|^r = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x|^r f(x)\,dx$$

$$x \in (-\infty,\ -\varepsilon] \cup [\varepsilon,\ +\infty), \text{ то есть}$$



Тогда:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x|^r f(x)\,dx \geqslant \int\limits_{|x| \geqslant \varepsilon}^{+\infty} |x|^r f(x)\,dx \geqslant \varepsilon^r \int\limits_{|x| > \varepsilon}^{+\infty} f(x)\,dx = \varepsilon^r P(|\xi| \geqslant \varepsilon) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \dfrac{E|\xi|^r}{\varepsilon^r} \geqslant P(|\xi| \geqslant \varepsilon)$, ч.т.д.

Частные случаи

1. $r = 1 \wedge P(\xi \geqslant 0) = 1$
$$P(\xi \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{E\xi}{\varepsilon}$$
2. Пусть $r = 2$
$$P(|\xi| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{E\xi^2}{\varepsilon^2}$$
3. Пусть $r = 2, \quad \eta = \xi - E\xi$
$$P(|\xi = E\xi| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathcal{D}\xi}{\varepsilon^2}$$

Задача

Случайная величина ξ — расход электрической энергии в месяц. Известно $E\xi = 4\,000$. Оценить $P(\xi \geqslant 10\,000)$.
Применяя неравенство Чебышёва может прикинуть эту вероятность:

$$P(\xi \geqslant 10\,000) \leqslant \frac{4\,000}{10\,000} = 0.4$$

Неравенство не находит вероятность точно, используется только для получения грубой оценки!

Определение

Вектор $\xi = (\xi_1, \dots,\ \xi_n)$, компоненты которого $\xi_1, \dots,\ \xi_n$, являющиеся случайными величинами, называется случайным вектором.

Определение

Функцией распределения случайного вектора $\xi = (\xi_1, \dots,\ \xi_n)$ называется

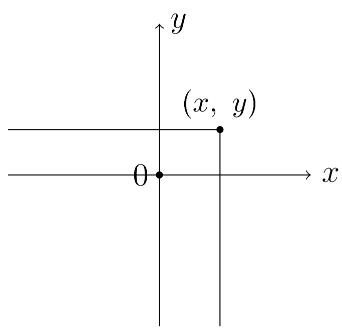
$$F_\xi(x_1, \dots,\ x_n) = P(\xi_1 \leqslant x_1, \dots,\ \xi_n \leqslant x_n)$$

Замечание

$\{\xi_1 \leqslant x_1, \dots,\ \xi_n \leqslant x_n\} = \{(\xi_1 \leqslant x_1) \cap (\xi_2 \leqslant x_2) \cap \dots \cap (\xi_n \leqslant x_n)\}$

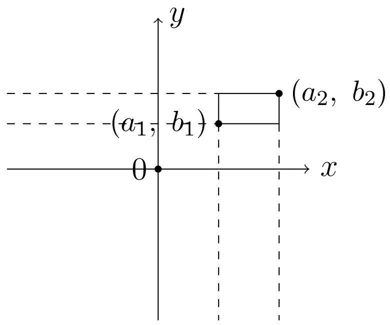
Пример

Пусть $n = 2$. $F_\xi(x,\ y) = P(\xi_1 \leqslant x,\ \xi_2 \leqslant y)$



Свойства $F(x,\ y)$

1. $\forall x,\ y \quad 0 \leqslant F(x,\ y) \leqslant 1$
2. $F(-\infty,\ -\infty) = 0 = F(x,\ -\infty) = F(-\infty,\ y)$
3. $F(+\infty,\ +\infty) = 1$
4. $F(+\infty,\ y) = P(\xi_2 \leqslant y) = F_{\xi_2}(y)$ Рассмотрим вероятность попадания в квадрат:



5. $P(a_1 \leqslant \xi \leqslant a_2,\ b_1 \leqslant \xi_2 \leqslant b_2) =$
   $= F(a_2,\ b_2) - F(a_2,\ b_1) - F(a_1,\ b_2) + F(a_1,\ b_1)$

6. $F(x,\ y)$ монотонно неубывающая функция по каждому аргументу.
   Доказательство: $\forall \Delta x > 0 \quad F(x + \Delta x,\ y) \geqslant F(x,\ y)$
   $F_\xi(x + \Delta x,\ y) = P(\xi \leqslant x + \Delta x,\ \xi_2 \leqslant y) = P(\xi_1 \leqslant x,\ \xi_2 \leqslant y) +$
   $+ \underbrace{P(x < \xi_1 \leqslant x + \Delta x,\ \xi_2 \leqslant y)}_{\alpha \geqslant 0} = F(x,\ y) + \alpha \geqslant F(x,\ y)$

Определение

Компоненты ξ_1 и ξ_2 случайного вектора $\xi = (\xi_1,\ \xi_2)$ называются независимыми, если верно:

$$\forall x,\ y \quad F_\xi(x,\ y) = F_{\xi_1}(x) F_{\xi_2}(y)$$

Определение

Дискретный случайный вектор:

$\xi_1,\ \xi_2$	$y_1 \ldots y_k$
x_1	$p_{1\,1} \ldots p_{1\,k}$
x_2	$p_{2\,1} \ldots p_{2\,k}$
$\vdots$	$\vdots$
x_n	$p_{n\,1} \ldots p_{n\,k}$

$p_{i\,j} = P(\xi_1 = x_i,\ \xi_2 = y_j)$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} p_{i\,j} = 1$$

ξ_1	x_1	x_2	$\ldots$	x_m
p	$p_{1\bullet}$	$p_{2\bullet}$	$\ldots$	$p_{m\bullet}$

$$p_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{k} p_{i\,j}$$

Утверждение

Компоненты $\xi_1,\ \xi_2$ дискретного случайного вектора $\xi = (x_1,\ x_2)$ независимы тогда и только тогда, когда

$$\forall i = \overline{1,\ m},\ j = \overline{1,\ k} \quad p_{i\,j} = p_{i\bullet} \cdot p_{\bullet j}$$

Определение

Неотрицательная кусочно-непрерывная функция $f_\xi(x,\ y)$ называется плотностью распределения случайного вектора $\xi = (\xi_1,\ \xi_2)$, если

$$F_\xi(x,\ y) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} f(t_1,\ t_2)\, dt_2\, dt_1$$

Замечание

В точках дифференцируемости $F(x,\ y)$

$$f(x,\ y) = \frac{\delta^2 F(x,\ y)}{\delta x\, \delta y},\ \delta \text{ частная производная}$$

<u>Свойства $f(x,\ y)$</u>

1. $\forall x,\ y \quad f(x,\ y) \geqslant 0$
2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,\ y)\, dx\, dy = F(+\infty, +\infty) = 1$
3. $\int\limits_{a_1}^{a_2} \int\limits_{b_1}^{b_2} f(x,\ y)\, dy\, dx = F(a_2\, b_2) - F(a_2,\ b_1) - \big(F(a_1,\ b_2) - F(a_1,\ b_1)\big) =$
   $= P(a_1 < \xi_1 \leqslant a_2,\ b_1 < \xi_2 \leqslant b_2)$
4. На доске нарисована клякса D, разбитая на много маленьких прямоугольников $f(\tilde{x},\ \tilde{y}),\ \Delta x,\ \Delta y, \quad \tilde{x} \in (x,\ x + \Delta x),\ \tilde{y} \in (y,\ y + \Delta y)$. Тогда

$$P(\xi \in D) = \iint\limits_{D} f(x,\ y)\, dx\, dy, \text{ вспоминаем матан.}$$

5. $F_{\xi_1}(x) = F_{\xi}(x,\ +\infty) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t,\ y)\, dy\, dt$

$$f_{\xi_1}(x) = \frac{d}{dx} F_{\xi_1}(x) = \frac{d}{dx} \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t,\ y)\, dy\, dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,\ y)\, dy$$

$$f_{\xi_2}(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,\ y)\, dx$$