Лекции по дискретной математике 4 модуль.

Андрей Тищенко

2023/2024

Лекция 12 апреля.

Деревья

$\forall T$ T - $(m,\ n)$ граф тогда:
T дерево $\Leftrightarrow T$ связный ациклический
$\Leftrightarrow T$ минимально связен
$\Leftrightarrow T$ связен $m = n - 1$
$\Leftrightarrow$ в T любые 2 вершины соединены ровно 1 простым путём.

Определение: граф называется <u>минимально связным</u> если из него нельзя удалить ребро без потери связности.

Определение: Пусть $G = (V,\ E)$ - связный граф. Любое дерево $T = (V,\ E')$, такое что $E' \subseteq E$, (то есть T - подграф) называется остовным.

Теорема: В любом связном $(n,\ m)$ графе $G = (V,\ E)$ есть остовное дерево T

Доказательство: Индукция по m

$m = 0$: $n = 1,\ T = G$.

$m > 0$: 1. G - дерево, тогда $T = G$

2. G не деревоо $\Rightarrow$ не минимально связный $\Rightarrow \exists x,\ y \quad xEy\wedge$ ребро xy можно удалить без потери связности.
   G' - результат удаления ребра xy
   G' - $(n,\ m-1)$ связный граф $\underset{\text{ПИ}}{\Rightarrow}$ в G' есть остовное дерево T'
   $G = (V,\ E),\ G' = (V,\ E\backslash\{xy,\ yx\})$. То есть T' подграф G', а G' подграф $G \Rightarrow T := T'$

Двудольные графы

Определение: граф $G = (V,\ E)$ <u>двудольный</u> $\Leftrightarrow \exists V_1,\ V_2:$

$$\begin{cases} V_1 \cap V_2 = \varnothing \\ V_1 \cup V_2 = V \\ V_1,\ V_2 \neq \varnothing \\ x,\ y \in V_i \Rightarrow xy \notin E \end{cases}$$

Определение: граф $G = (V,\ E)$ раскрашиваем в k цветов $\Leftrightarrow \exists c : V \to \underline{k}$
$\forall x,\ y\ \big(c(x) = c(y) \Rightarrow xy \in E\big)$

Утверждение: G k-дольный $\Rightarrow \forall l \geqslant k,\ G$ можно раскрасить в l цветов.

Теорема 2: (Кёнинга).
$\forall$ графа $G = (V,\ E),\ |V| \geqslant 2$ следующие условия равносильны:

(a) G двудольныйв
(b) в G нет циклов нечётной длины
(c) в G нет простого цикла нечётной длины

Доказательство: $a \Rightarrow b$ допустим есть цикл нечётной длины:
$x_1x_2x_3x_4\dots x_{2n}x_{2n+1}x_1$
Без ограничения общности:
$x_1 \in V_1 \Rightarrow x_2 \in V_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow x_{2n} \in V_2 \Rightarrow x_{2n+1} \in V_1 \Rightarrow x_1 \in V_2\ \bot$
$b \Rightarrow c$. Если нет никакого цикла нечётной длины, то простого также не будет. $c \Rightarrow a$.

Лемма* если граф G связен и $|V| \geqslant 2$ и в G нет простых циклов нечётной длины, то G двудольный.

$G = G_1 \sqcup G_2 \sqcup \dots \sqcup G_n$

Ещё не может быть компонент порядка 1.

$G' = (V',\ E)$ связен, $|V'| \geqslant 2$, в G' нет простого цикла нечётной длины.

Рассмотрим произвольную $z \in V$, тогда $\exists y\ zEy$

$d(u,\ w) :=$ длина кратчайшего пути между $u,\ w$ в G'

$d(z,\ z) = 0,\ d(z,\ y) = 1$

$V_1 = \{x \in V' \mid d(z,\ x) \equiv 1(2)\}$

$V_2 = \{x \in V' \mid d(z,\ x) \equiv 0(2)\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_1 \cap V_2 = \varnothing \\ V_1 \cup V_2 = V' \\ y \in V_1 \neq \varnothing \wedge z \in V_2 \neq \varnothing \end{cases}$$

Предположим $\exists u,\ w \in V_i \quad uEw \Rightarrow u \neq w$

$d(z,\ u) \equiv d(z,\ w)(2)$

Рассмотрим кратчайшие ($\to$ простые) пути $z \xrightarrow{p} u \wedge z \xrightarrow{q} w$

Пусть $t :=$ самая правая общая точка $z \xrightarrow{p} u,\ z \xrightarrow{q} w$ (самая правая - такая, что путь до u и w минимален).

$z \xrightarrow{p} w = z \xrightarrow{p_1} t \xrightarrow{p_2} w$

$z \xrightarrow{q} u = z \xrightarrow{q_1} t \xrightarrow{q_2} u$

Утверждение: $\left|z \xrightarrow{p_1} t\right| = \left|z \xrightarrow{q_1}\right| t$

Доказательство: Иначе без ограничения общности:

$\left|z \xrightarrow{p_1} t\right| > \left|z \xrightarrow{q_1} t\right|$

$\left|z \xrightarrow{q_1} t \xrightarrow{p_2}\right| < \left|z \xrightarrow{p} w\right| \perp \left|z \xrightarrow{p} w\right| = d(z,\ w) = d(z,\ u)$

$\left|z \xrightarrow{p_1} t\right| + \left|t \xrightarrow{p_2} w\right| \equiv \left|z \xrightarrow{q_1} t\right| + \left|t \xrightarrow{q_2} u\right|$

$\left|t \xrightarrow{p_2} w\right| \equiv \left|t \xrightarrow{q_2} u\right|$

Рассмотрим цикл twu, он является простым, его длина будет равна:

$$\left|t \xrightarrow{p_2} w\right| + \left|t \xrightarrow{q_2} y\right| + 1 \equiv 1(2)$$

Но простых циклов длины 2 тут быть не может $\perp$.

Лемма 4. Если $(n,\ m)$ граф $G = (V,\ E)$ двудольный с долями V_1 и V_2, то

$$\sum_{x \in V_1} d(x) = m = \sum_{x \in V_2} d(x)$$

Доказательство: Индуция по количеству рёбер.

$m = 0$: $\forall x \ d(x) = 0$

$m > 0$: есть ребро uw, удалим его и получим G'
Без ограничения общности:
$uw \in E \Rightarrow u \in V_1, \ w \in V_2$
G' - двудольный $(n, \ m-1)$ граф с долями $V-1, \ V_2$

$$\sum_{x \in V_1} d(x) = \sum_{x \in V_1 \setminus \{u\}} + \big(d_{G'} + 1\big) = \sum_{x \in V_1} d_{G'}(x) + 1 = (m-1) + 1 = m$$

Задача о свадьбах

Определение: граф G называется паросочетанием
$\Leftrightarrow \forall x \ d(x) = 1$
Условие для выдачи женщин замуж $\forall S \subseteq V_1 \ \ |E[S]| \geqslant |S|$

$T = \{t_1, \ t_2, \ldots, \ t_n\}$. Хотим построить инъекцию $T \overset{f}{\lesssim} \bigcup T = t_1 \cup \cdots \cup t_n$,
также хотим $\forall t \in T \ f(t) \in t$.
Тогда нужно $\forall S \subseteq T \ \ |\bigcup S| \geqslant |S|$

Лекция 19 апреля

Теорема Холла:

Дано: двудольный граф $G \ \big(W(\text{женщины}), M(\text{мужчины}), E\big), k = |W|$
Требуется выдать всех женщин замуж по любви без многоженства и многомужества

Формально:

$\exists f: \ W \to M$

1. f - инъективно
2. $\forall t \ t \ E \ f(t)$

$$\exists f \text{ удовлетворяющее условию} \underset{\text{т. Холла}}{\Longleftrightarrow} \forall S \subseteq W \quad |S| \leqslant \Big|E[S]\Big| \quad (*)$$

Доказательство:

$" \Leftarrow "$

$\forall S \subseteq W \quad f$ - инъективно

$$S \sim f[S] \subseteq E[S]$$

$$S \lesssim E[S] \Rightarrow |S| \leqslant |E[S]|$$

$" \Rightarrow "$

Индукция по m

$$\forall t\ 1 = |\{t\}| \leqslant |E[\{t\}]| \Rightarrow \forall t \in W\ \exists x\ tEx \Rightarrow E \text{ - тотально для } W$$

1й случай: E - инъективно

$f(x) :=$ любой $x \in E[\{x\}]$. Тогда мы в шоколаде

2й случай: E - не инъективно

a. $\exists S_0\ (S_0 \neq \varnothing \wedge |S_0| = |E[S_0]|)$ Рассмотрим подграф G, индуцированный множеством S_0

$$S_0 \neq W \Rightarrow |S_0| < |W|$$

$$\Rightarrow |W \backslash S_0| \neq \varnothing \Rightarrow \text{не все ребра в } G_0$$

$$\Rightarrow \text{размер}(G_0) < m$$

Допустим для G_0 выполнено условие $(*)$

$$S' \subseteq S_0 \Rightarrow E[S'] \subseteq E[S_0] \Rightarrow |S'| \leqslant |E[S']|$$

Вывод: по проедположению индукции для G_0 есть соответствуется фукнкция $f_0 :\ S_0 \rightarrow E[S_0]$
$G_1 =$ это те вершины и ребра, которые не вошли в G_0.
Утверждение: Для G_1 выполнено $(*)$.
Пусть $S' \subseteq W \backslash S_0$

$$\big|E[S_0]\big| + |S'| = |S_0| + |S'| = |S_0 \cup S'| \leqslant \big|E[S_0 \sup S']\big| = \big|E[S_0] \cup E[S']\big| =$$

$$= \left|(E[S'] \ E[S_0]) \cup E[S_0]\right| = \left|E[S']\backslash E[S_0]\right| + \left|E[S_0]\right|$$

Получаем сокращением $|S'| = \left|E[S']\backslash E[S_0]\right|$
Так как $|S_0| \neq 0$, то размер $(G_0) > 0 \Rightarrow$ размер $(G_1) < m$.
По принципу индукуции для G_1, есть $f_1 : \ W\backslash S_0 \to E_{G_1}[W\backslash S_0]$

$$f := f_0 \cup f_1$$

б. $\forall S \left(S \neq W \wedge S \neq \varnothing \Rightarrow |S| < \left|E[S]\right|\right)$
так как E - не инъекция, то:

$$\exists x \in M \ \exists \ t_1, t_2 \in W(t_1 \neq t_2 \wedge t_1 Ex \wedge t_2 Ex) \Rightarrow \text{размер}(G_1) < 1$$

$$\left|E_{G_1}[S]\right| \geqslant \left|E[S]\right| - 1$$

$$\Rightarrow |S| < \left|E[S]\right| \leqslant \left|E_{G_1}[S]\right| + 1 \Rightarrow |S| \leqslant \left|E_{G_1}[S]\right|$$

По предположению индукции для G_1, есть $f_1 : \ S \to E_{G_1}[S] \subseteq E_G[S]$

$$f := f_1$$

Теорем Холла о "представителях"

Дано U - конечное (не обязательно):

$$T = \{t_1, \ldots, t_k\} \subseteq \mathcal{P}(U)$$

тогда в конкретном t можно инъективно выбрать по элементу $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall S \subseteq T \ |S| \leqslant \underbrace{|\bigcup S|}_{=t_{i_1} \cup \cdots \cup t_{i_q}}$
Строим граф (T, U, E)

$$tEx :\Leftrightarrow x \in t$$

$$E[\{t_{i_1} \cup \cdots \cup t_{i_q}\}] = t_{i_1} \cup \cdots \cup t_{i_q}$$

т. Дилуорса $\Rightarrow$ т. Холла

тут идут рисуночки, сам нарисуешь (демонстрация без доказательства).
Понял, Вова. Скиньте рисуночки, пожалуйста

Ориентированные графы

Определение:

Ориентированный граф (орграф) - это пара (V, A), где $V \neq \varnothing,\ A \subseteq V^2$

$$N_+(x) := A[\{x\}]$$

$$N_-(x) := A^{-1}[\{x\}]$$

Показатель исхода

$$d_+(x) = |N_+(x)|$$

Показатель захода

$$d_-(x) = |N_-(x)|$$

Утверждение:

$$\sum_{x \in V} d_+(x) = |A| = \sum_{x \in V} d_-(x)$$

Определение:

Турнир - это орграф, такой, что

1 $\forall x\ \neg xAx$

2 $\forall x, y\ (x \neq y \Rightarrow (xAy \Leftrightarrow \neg yAx))$

Беспредельный анализ

Рассматриваем последовательности: $\mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ (\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$

$$f'(x) = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x}$$

Перефразируем в терминах "бесконечно малых"

$$f'(x) = \frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x},\ \text{где } \delta x \text{ бесконечно малая}$$

Для последовательностей зададим

$$\Delta a_n := a_{n+1} - a_n$$

Вторая производная

$$f'' = \frac{f'(x+\delta x) - f'(x)}{\delta x} = \frac{1}{\delta x}\left(\frac{f(x+2\delta x) - 2f(x+\delta x) + f(x)}{\delta x}\right) =$$

$$= \frac{f(x+2\delta x) - 2f(x+\delta x) + f(x)}{(\delta x)^2}$$

чем то похоже на $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
Для последовательнотей

$$\Delta^2 a_n = \Delta a_{n+1} - \Delta a_n = a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n$$

$$\Delta^3 a_n = \Delta^2 a_{n+1} - \Delta^2 a_n = a_{n+3} - 3a_{n+2} + 3a_{n+1} - a_n$$

Зададим S:

$$S:\ \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \quad S\ a_n = a_{n+1}$$

Тогда получаем дельту

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n = S\ a_n + a_n = (S-1)a_n$$

Получаем $\Delta = S - 1 \Rightarrow S = \Delta + 1 \Rightarrow S^k = (\Delta+1)^k$ Веселый результат

$$a_{n+k} = S^k\ a_n = (\Delta+1)^k a_n = \sum_{t=0}^{k} C_k^t \Delta^t\ a_n = \sum_{t=0}^{k} \frac{\Delta^t\ a_n}{t!} k^{(t)}$$

где $k^{(t)} = k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot (k-t+1)$

Лекция 26 апреля

Линейное пространство (Seq)

Носитель: $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ni \vec{a} = (a_0,\ a_1, \dots) = (a_n)_{n\in\mathbb{N}},\ \vec{a} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$

Скаляр: $\mathbb{R}$

$$\alpha \in \mathbb{R} : \alpha\vec{a} = (\alpha a_0,\ \alpha a_1, \dots),\ (\alpha\vec{a})_n = \alpha a_n$$

Сложение:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_0 + b_0,\ a_1 + b_1, \dots),\ (\vec{a} + \vec{b})_n = a_n + b_n$$

Утверждение 1: При этом выполняются все аксиомы линейного пространства.

Проверим дистрибутивность:

$$\left(\alpha\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\right)_n = \alpha(a_n+b_n) = \alpha a_n + \alpha b_n = (\alpha\vec{a})_n + (\alpha\vec{b})_n = (\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b})_n$$

$$\Big((\alpha+\beta)\vec{a}\Big)_n = (\alpha+\beta)a_n = \alpha a_n + \beta a_n = (\alpha\vec{a}+\beta\vec{a})_n$$

Ещё факты:

$$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$$

$$\vec{0}=(0,\ 0,\ 0,\dots)$$

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$

$$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$$

$$(-\vec{a})_n=-a_n$$

Определение: $F: Seq \longrightarrow Seq$ <u>линейная</u>

$$\Leftrightarrow \forall \vec{a},\ \vec{b}\in Seq\ \forall\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$$

$$F(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}) = \alpha F(\vec{a}) + \beta F(\vec{b})$$

Утверждение 2:

Каждый скаляр $\alpha\in\mathbb{R}$ можно рассматривать как линейный оператор:

$$\alpha: Seq\to Seq \quad \alpha(\vec{a}) = (\alpha a_0,\ \alpha a_1,\dots)$$

$$\alpha(\alpha'\vec{a}+\beta'\vec{b}) = \alpha(\alpha'\vec{a}) + \alpha(\beta'\vec{b}) = \alpha'(\alpha\vec{a}) + \beta'(\alpha\vec{b})$$

<u>Ещё линейные операторы</u>

Сдвиг: $S: Seq\longrightarrow Seq$

$$S(a_0,\ a_1,\ a_2,\dots) = (a_1,\ a_2,\ a_3,\dots)$$

$$\underbrace{(S\vec{a})_n}_{=Sa_n} = a_{n+1}$$

$$S(\alpha a_n+\beta b_n) = \left(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}\right)_{n+1} = \alpha a_{n+1}+\beta b_{n+1} = \alpha Sa_n + \beta Sb_n$$

Разность: $\Delta: Seq\longrightarrow Seq$

$$\underbrace{(\Delta\vec{a})_n}_{=\Delta a_n} = a_{n+1}-a_n$$

$$\left(\Delta\left(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}\right)\right)_n=\left(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}\right)_{n+1}-\left(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}\right)_n=\alpha a_{n+1}+\beta b_{n+1}-\alpha a_n-\beta b_n=$$

$$=\alpha(a_{n+1}-a_n)+\beta(b_{n+1}-b_n)=\alpha\Delta a_n+\beta\Delta b_n=\left(\alpha\Delta\vec{a}+\beta\Delta\vec{b}\right)_n$$

Утверждение 3:

Линейные опертары $Seq \longrightarrow Seq$ образуют кольцо, то есть их можно "разумным образом" складывать и умножать друг на друга.

Допустим $F,\ G \in L(Seq)$:

$$(F+G)(\vec{a})=F(\vec{a})+G(\vec{a})$$

$$F\cdot G=F\circ G \text{ ассоциативно}$$

Есть нулевой элемент

$$F+0=F,\ 0\in L(Seq)$$
$$(F+0)(\vec{a})=F(\vec{a})+0(\vec{a})=F(\vec{a})$$

Обратный по сложению

$$F+(-F)=0,\ -F=-1\circ F$$

Нейтральный по умножению

$$F\cdot 1=F=1\cdot F,\ 1(\vec{a})=\vec{a}$$

Дистрибутивность

$$F(G+H)=FG+FH$$

Применим это к $\vec{a}$:

$$\big(F\big(G+H\big)\big)(\vec{a})=\big(F\circ\big(G+H\big)\big)(\vec{a})=F\big(\big(G+H\big)\vec{a}\big)=F(G(\vec{a}))+F(H(\vec{a}))=$$

$$=(FG+FH)(\vec{a})=(G+H)(F(\vec{a}))=G(F(\vec{a}))+H(F(\vec{a}))=(GF+HF)(\vec{a})$$

Утверждение 4:

Скаляр коммутирует с любым линейным оператором:

Доказательство: пользуемся линейностью F

$$(\alpha F)(\vec{a}) = \alpha(F(\vec{a})) = F(\alpha\vec{a}) = (F\alpha)(\vec{a})$$

Уточнение:

$$\Delta_n = Sa_n - 1a_n = ((S-1)\vec{a})_n \Rightarrow \Delta = S - 1 \Rightarrow S = \Delta + 1$$

Вспомним биномиальную теорему:

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} \quad (x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k 1^{n-k}$$

Лемма 5:

$$\forall F \in L(Seq) \forall \alpha \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} \quad (F+\alpha)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k F^k (\alpha)^{n-k}$$

Доказательство: индукция по n

База:

$$(F+\alpha)^0 = 1 = \sum_{k=0}^{0} C_0^0 F^0 \alpha^{0-0} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

Шаг: пользуемся предположением индукции, дистрибутивностью

$$(F+\alpha)^{n+1} = (F+\alpha)(F+\alpha)^n = (F+\alpha)\sum_{k=0}^{n} C_n^k F^k \alpha^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} F C_n^k F^k \alpha^{n-k} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n} \alpha C_n^k F^k \alpha^{n-k} \overset{\text{Утв 4}}{=} C_n^k F^{k+1} \alpha^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k F^k \alpha^{n+1-k} = \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} F^k \alpha^{n+1-k} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n} C_n^k F^k \alpha^{n+1-k} = \underset{C_{n+1}^0}{C_n^0} F^0 \alpha^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{(C_n^{k+1} + C_n^k)}_{=C_{n+1}^k} F^k \alpha^{n+1-k} + \underset{=C_{n+1}^{n+1}}{C_n^n} F^{k+1} \alpha^0 =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k F^k \alpha^{n+1-k}$$

Следствие 6: разность порядка t

$$\Delta^t = (s-1)^t = \sum_{k=0}^{t} \underbrace{C_t^k}_{=C_k^{t-k}} S^k(-1)^{t-k} = \sum_{k=0}^{t} C_t^k S^{t-k}(-1)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{t}(-1)^k C_t^k S^{t-k}$$

Следствие 7:

$$\Delta^t a_n = \sum_{k=0}^{t}(-1)^k C_t^k S^{t-k} a_n = \sum_{k=0}^{t}(-1)^k C_t^k a_{n+t-k}$$

$$\Delta^2 a_n = C_2^0 a_{n+2} - 1C_2^1 a_{n+1} + C_2^2 a_n = a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n$$

$$\Delta^3 a_n = a_{n+3} - 3a_{n+2} + 3a_{n+1} - a_n$$

Пример:

Первая степень

$$\begin{aligned} a_n =& a + dn \\ \Delta a_n =& a_{n+1} - a_n = a + d(n+1) - a - dn = d \\ \Delta^2 a_n =& \Delta d = d - d = 0 \end{aligned}$$

Вторая степень

$$\begin{aligned} a_n =& a + bn + cn^2 \\ \Delta a_n =& a_{n+1} - a_n \\ =& c(n+1)^2 + b(n+1) - cn^2 - bn \\ =& 2cn + c + b \\ \Delta^2 a_n =& 2c(n+1) - 2cn = 2c \\ \Delta^3 a_n =& 0 \end{aligned}$$

Лемма 8:

Если $P(n)$ - многочлен степени $m > 0$, то
$\Delta P(n)$ - многочлен степени $m-1$, а $\Delta^{m+1}P(n) = 0$

Доказательство: индукция по m

База:

Шаг:

$$P(n) = \overset{\neq 0}{\alpha} n^m + \overset{\deg \leqslant m-1}{Q(n)}$$

$$\Delta P(n) = P(n+1) - P(n) = \alpha(n+1)^m + Q(n+1) - \alpha n^m - Q_n =$$

$$= \alpha\left((n+1)^m - n^m\right) + \Delta Q(n) = \alpha(C_m^1 n^{m-1} + C_m^2 n^{m-2} + \dots) + \overset{\text{по ПИ } \deg \leqslant m-2}{Q'(n)}$$

Итак, степень $m-1$.

Следствие:

$\deg(\Delta^m P(n)) = 0 \Rightarrow \Delta^m P(n) = const \Rightarrow \Delta^{m+1}P(n) = 0.$ Отсюда рассмотрим:

$$0 = \Delta^{m+1}a_n = \sum_{k=0}^{m+1}(-1)^k C_{m+1}^k a_{n+m+1-k}$$

$$a_{n+m+1} = \sum_{k=1}^{m+1}(-1)^{k-1} C_{m+1}^k a_{n+m+1-k}$$

Следствие 9:

Если $a_n = P(n)$, многочлен степени $m > 0$, то

$$a_{n+m+1=\sum_{k=1}^{m+1}}(-1)^{k-1} C_{m+1}^k a_{n+m+1-k}$$

Пример:

$\deg a_n = 1 \Rightarrow a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$
$\deg a_n = 2 \Rightarrow a_{n+3} = 3a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n$

Следствие 10:

$$S^t = (\Delta + 1)^t = \sum_{k=0}^{t} C_t^k \Delta^k$$

$$a_{n+t} = S^t a_n = \sum_{k=0}^{t} C_t^k \Delta^k a_n = \sum_{k=0}^{t} \frac{\overbrace{t(t-1)\ldots(t-k+1)}^{t^{(k)}}}{k!} \Delta^k a_n =$$

$$= a_n + \frac{\Delta a_n}{1!} t^{(1)} + \frac{\Delta^2 a_n}{2!} t^{(2)} + \dots + \frac{\Delta^t a_n}{t!} t^{(t)}$$

Лекция 10 мая.

Воспоминания:

(1). $\Delta^t a_n = \sum\limits_{k=0}^{t} (-1)^k C_t^k a_{n+t-k}$

$\Delta^3 a_n = a_{n+3} - 3a_{n+2} + 3a_{n+1} - a_n$

(2). если a_n - многочлен степени $m > 0$, то $\Delta^{m+1} a_n = 0$.

Из этих фактов:

$$0 = \Delta^{m+1} a_n = \sum_{k=0}^{m+1} (-1)^k C_{m+1}^k a_{n+m+1-k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{m+1} (-1)^{k-1} C_{m+1}^k a_{n+m+1-k} = a_{n+m+1}$$

При $m = 2$ получим рекуррентное соотношение:

$$a_{n+3} = 3a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n$$

Определение:

Пусть $\vec{a} = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ удовлетворяет рекуррентному сооношению φ порядка $k > 0$, тогда

$$\varphi : \mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R} \wedge \forall n\ a_{n+k} = \varphi(a_{n+k-1},\ a_{n+k-2}, \dots,\ a_n,\ n)$$

Определение:

Если φ не зависит от n, $\big(\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^k\ \forall n,\ m\ \varphi(\vec{x},\ n) = \varphi(\vec{x},\ m)\big)$, то такое рекуррентное соотношение называется стационарным.

Попробуем привести нестационарное к стационарному, выразим факториал.

$$\begin{cases} a_{n+1} = (n+1)a_n \\ a_{n+2} = (n+2)a_{n+1} \end{cases} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} + 1 = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{n+2} = \frac{a_{n+1}^2 + a_{n+1}a_n}{a_n}$$

Получили стационарное рекуррентное соотношение порядка 2.

Рассмотрим последовательность $a_{n+1} = a_n$. Ему удовлетворяют все константы (и только они).

Добавим условие:

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n \\ a_0 = \alpha \end{cases} \Rightarrow \exists!\text{последовательность}: \ \forall n \ a_n = \alpha$$

Теорема 1:

Пусть φ - рекуррентное соотношение порядка k и $\forall i \ \alpha_i \in \mathbb{R}$, тогда рекуррентная задача

$$\begin{cases} \forall n \ a_{n+k} = \varphi(a_{n+k-1}, \dots, \ a_n, \ n) \\ a_0 = \alpha_0, \dots, \ a_{k-1} = \alpha_{k-1} \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

Доказательство:

Существование очевидно (по первым k членам последовательность восстанавливается), то есть φ даёт "рецепт" вычисления последовательности a_n.

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ удовлетворяют условию. Допустим $\vec{a} \neq \vec{b} \Rightarrow \exists n \ a_n \neq b_n \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists n \ (a_n \neq b_n \land \forall m < n \ a_m = b_m)$

1 случай. $n < k$

$a_n = \alpha_n = b_n \Rightarrow \perp$

2 случай. $n \geqslant k$

$a_{n+k} = \varphi(a_{n+k-1,\dots,\ a_n,\ n})$

$a_{n+k} = \varphi(b_{n+k-1,\dots,\ b_n,\ n})$

По предположению индукции все аргументы функции равны, значит равны a_{n+k} и b_{n+k}

Линейное стационарное рекуррентное соотношение

$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \dots + c_k a_n + c_0$

Если $c_0 = 0$, то соотношение однородное.

Теорема 2:

$\exists c'_1, \dots,\ c'_{k+1} \in \mathbb{R},\ \exists \beta_0, \dots,\ \beta_k \in \mathbb{R}$

$$(*)\begin{cases} a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + \dots + c_k a_n + c_0 \\ a_0 = \alpha_0, \dots,\ a_{k-1} = \alpha_{k-1} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\#)\begin{cases} a_{n+k+1} = c'_1 a_{n+k} + \dots + c'_{k+1} a_n \\ a_0 = \beta_0, \dots,\ a_{k-1} = \beta_{k-1},\ a_k = \beta_k \end{cases}$$

$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \dots + c_k a_n + c_0$
$a_{n+k+1} = a_{(n+1)+k} = c_1 a_{n+k} + c_2 a_{n+k-1} + \dots + c_k a_{n+1} + c_0$
Домножм первое на -1, сложим со вторым:

$$a_{n+k+1} = \overbrace{(c_1+1)}^{c'_1} a_{n+k} + \overbrace{(c_2-c_1)}^{c'_2} a_{n+k-1} + \overbrace{(c_3-c_2)}^{c'_3} a_{n+k-2} + \dots$$
$$\dots + \underbrace{(c_k - c_{k-1})}_{c'_k} a_{n+1} - \underbrace{c_k}_{c'_{k+1}} a_n + 0$$

Тогда $\beta_0 := \alpha_0, \dots,\ \beta_{k-1} = \alpha_{k-1},\ \beta_k = c_1\alpha_{k-1} + c_2\alpha_{k-2} + \dots + c_k\alpha_o + c_0$
У $(\#)$ не может быть других решений, так как у неё может быть не более одного решения, а решение $(*)$ является решением $(\#)$, значит их решения совпадают.

Пример:

$$\begin{cases} a_{n+1} = c a_n \\ a_0 = \alpha \end{cases} \Rightarrow a_1 = c\alpha,\ a_2 = c^2\alpha,\ a_3 = c^3\alpha, \dots$$

Видно, что $a_n = c^n\alpha$ - это решение, по теореме 1 других решений нет.

В терминах линейных операторов

$a_{n+1} - c a_n = 0 \Leftrightarrow \exists u\ a_n = c^n u$
$S a_n - c a_n = 0$
$\forall n\ (S-c) a_n = 0$
$(S-c)\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \in \ker(S-c)$
$\ker(S-c) = \{u,\ (1,\ c,\ c^2,\ c^3, \dots) \mid u \in \mathbb{R}\} = \langle (1,\ c,\ c^2, \dots) \rangle,$
то есть в ядре находятся всевозможные геометрические последовательности.

Пример: порядок 2.

$$\begin{cases} a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n \\ a_0 = \pi, \ a_1 = e \end{cases}$$

Рассмотрим характеристичекий многочлен $x^2 - 5x + 6$, то $\forall n \ x^{n+2} = 5x^{n+1} - 6x^n$, то есть $a_n = x^n$ удовлетворяет рекуррентному соотношению $x_{1,\ 2} = \frac{5+\pm\sqrt{25-24}}{2} = 3,\ 2$
Итак, последовательности $2^n,\ 3^n$ удовлетворяют рекуррентному соотношению.
Легко видеть, что $\forall u,\ v \in \mathbb{C}\ a_n = u2^n + v3^n$ также удовлетворяет рекуррентному соотношению.
$a_{n+2} = u2^{n+2} + v3^{n+2} = u(6 \cdot 2^{n+1} - 6 \cdot 2^n) + v(5 \cdot 3^{n+1} - 6 \cdot 3^n) = 5(u \cdot 2^{n+1} + v \cdot 3^{n+1}) - 6(u \cdot 2^n + v3^n) = 5a_{n+1} - 6a_n$
Подберём $u,\ v$ так, что

$$\begin{cases} u + v = u2^0 + v3^0 = a_0 = \pi \\ 2u + 3v = u2^1 + v3^1 = a_1 = e \end{cases}$$

$\det = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 \neq 0,\ 2u + 3(\pi - u) = e \Rightarrow \begin{cases} u = 3\pi - e \\ v = e - 2\pi \end{cases}$
Ответ: $a_n = (3\pi - e)2^n + (e - 2\pi)3^n$
В терминах операторов:

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$$

$$S^2 a_n - 5Sa_n + 6a_n = 0$$

$$(S^2 - 5S + 6)\vec{a} = \vec{0}$$

$$(S-3)(S-2)\vec{a} \Rightarrow \begin{cases} \ker(S-2)(S-3) \supseteq \ker(S-3) = \langle (1,\ 3,\ 3^2, \dots) \rangle \\ \ker(S-3)(S-2) \supseteq \ker(S-2) = \langle (1,\ 2,\ 2^2, \dots) \rangle \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \big\langle (1,\ 2,\ 2^2, \dots),\ (1,\ 3,\ 3^2, \dots) \big\rangle \subseteq \ker(S-2)(S-3)$$

Лекция 17 мая.

$a_{n+2} = c_1 a_{n+1} + c_2 a_n$. Характеристичекий многоЧлен $x^2 = c_1 x + c_2$

$$a_{n+2} - c_1 a_{n+1} - c_2 a_n = 0 \Leftrightarrow (S^2 - c_1 S - c_2)\vec{a} = \vec{a}$$

$\begin{cases} a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (*) \\ a_1 = 1;\ a_0 = 0 \end{cases}$ - числа Фибоначчи. Рассмотрим характеристический многочлен:

$$x^2 = x + 1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618 = \phi \\ x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0,618 \end{array} \right.$$

$x_2 = -\frac{1}{x_1} = (-\phi)^{-1},\ |x_2| < 1$
$x_i^2 = x_i + 1 \Rightarrow x_i^{n+2} = x_i^{n+1} + x_i$. Тогда последовательность x_i^n будет удовлетворять $(*)$. Из линейности:

$$\forall u,\ v \in \mathbb{R}\ ux_1^n + vx_2^n \text{ удовлетворяет } (*)$$

Хотим выбрать $u,\ v$ такие, чтобы удовлетворять начальным условиям:

$$\begin{cases} 0 = a_0 = ux_1^0 + vx_2^0 = u + v \\ 1 = a_1 = ux_1 + vx_2 = u\phi - \frac{v}{\phi} \end{cases},\ \det = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \phi & \frac{1}{\phi} \end{vmatrix} = \frac{1}{\phi} - \phi \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = -u,\ 1 = u\phi + \frac{u}{\phi} = u\left(\phi + \frac{1}{\phi}\right) \Rightarrow u = \frac{\phi}{\phi^2 + 1} = \frac{\phi}{\phi + 2} = \frac{1}{1 + \frac{2}{\phi}} =$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{4}{1+\sqrt{5}}} = \frac{1+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}(1+\sqrt{5})} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow v = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Пользовались соотношением $x^2 = x + 1 \Rightarrow x^2 + 1 = x + 2 \Rightarrow \phi^2 + 1 = \phi + 2$
Тогда $a_n = \dfrac{x_1^n}{\sqrt{5}} - \dfrac{x_2^n}{\sqrt{5}} = \dfrac{\phi^n - (-\phi)^n}{\sqrt{5}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{\phi^n}{\sqrt{5}}$
Рассмотрим систему: $\begin{cases} a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n \quad (*) \\ a_1 = 1;\ a_0 = 2 \end{cases}$, $x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow (x-3)^2 = 0,\ x_{1,\ 2} = 3$ Нужно ещё одно линейно независимое решение, иначе det обнулится. Домножим характеристический многоЧлен на x^{n+1}:

$$x^{n+1}(x-3)^2 = x^{n+3} - 6x^{n+2} + 9x^{n+1} = 0$$

Корни: 0 кратности $n+1$ и 3 кратности 2.

Утверждение:

Если x_0 - корень многочлена $P(x)$ кратности $\geqslant 2$, то x_0 - корень $P'(x)$.

Доказательство:

$P(x) = (x - x_0)^2 Q(x) \Rightarrow P'(x) = 2(x - x_0)Q(x) + (x - x_0)^2 Q'(x) \Rightarrow P'(x_0) = 0$
Вернёмся к нашей задаче:

$$P'(x) = (n+3)x^{n+2} - 6(n+2)x^{n+1} + 9(n+1)x^n, \ P'(3) = 0$$

$$\underbrace{(n+3)3^{n+2}}_{a_{n+2}} = 6\underbrace{(n+2)3^{n+1}}_{a_{n+1}} - 9\underbrace{(n+1)3^n}_{a_n}$$

Итак, $a_n = (n+1)3^n$ удовлетворяет $(*)$

$$\forall u, \ v: \ u3^n + v(n+1)3^n, \ \text{удовлетворяет } (*)$$

Получаем систему: $\begin{cases} 2 = a_0 = u + v \\ 1 = a_1 = 3u + 6v \end{cases}$, $\det = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 3 = 3 \neq 0$

$$\begin{aligned} v &= 2 - u \\ 1 &= 3u + 6(2 - u) = -3u + 12 \\ u &= \frac{11}{3} \\ v &= -\frac{5}{3} \end{aligned}$$

Рассмотрим для комплексных чисел (изначальное рекурретное соотношение поменяется):
$x^2 + 5x + 9 = 0 \Rightarrow x_{1,\ 2} = \frac{-5 \pm \sqrt{-11}}{2} = \frac{-5 \pm i\sqrt{11}}{2}, \ x_1 \neq x_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \begin{cases} 2 = u + v \\ 1 = ux_1 + vx_2 \big| \cdot 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = 2 - u \\ 2 = u(-5 + i\sqrt{11}) + (2 - u)(-5 - i\sqrt{11}) \end{cases} \Rightarrow$
$\Rightarrow \begin{cases} v = 2 - u \\ 2 = 2ui\sqrt{11} - 10 - 2i\sqrt{11} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = 2 - u \\ 12 + i2\sqrt{11} = ui2\sqrt{11} \end{cases} \Rightarrow$
$\Rightarrow \begin{cases} v = 2 - u \\ 12i - 2\sqrt{11} = -2u\sqrt{11} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = 1 + \frac{6i}{\sqrt{11}} \\ u = 1 - \frac{6i}{\sqrt{11}} \end{cases}$
$a_n = \left(1 - \frac{6i}{\sqrt{11}}\right)\left(\frac{-5+\sqrt{11}}{2}\right)^n + \left(1 + \frac{6i}{\sqrt{11}}\right)\left(\frac{-5-i\sqrt{11}}{2}\right)^n$

Теорема 1:

Рассмотрим рекурретную задачу

$$\begin{cases} a_{n+2} = c_1 a_{n+1} + c_2 a_n \\ a_0 = \alpha, \ a_1 = \beta \end{cases}, \text{ где } c_2 \neq 0$$

Тогда:
1. Если $D = c_1^2 + 4c_2 \neq 0$ (определитель характеристического многоЧлена), то

$$\exists u, \ v \ a_n = ux_1^n + vx_2^n, \text{ где } x_1, \ x_2 - \text{корни } P(x) = x^2 - c_1 x - c_2$$

2. Если $D = 0$, то

$$\exists u, \ v \ a_n = ux_1^n + v(n+1)x_1^n$$

Доказательство:

1.

Как мы видели $\forall n, \ v \ ux_1^n + vx_2^n$ удовлетворяют $(*)$, СЛАУ:

$$\begin{cases} \alpha = u + v \\ \beta = ux_1 + vx_2 \end{cases}, \text{ имеет } \det = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1 \neq 0 \Rightarrow \text{ решаема}$$

2.

Как мы видели $\forall u, \ v \ ux_1^n + v(n+1)x_1^n$ удовлетворяет $(*)$, СЛАУ:

$$\begin{cases} \alpha = u + v \\ \beta = ux_1 + 2vx_1 \end{cases}, \text{имеет } \det = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & 2x_1 \end{vmatrix} = x_1 \neq 0$$

Единственный корень не равен 0, так как свободный член не равен 0 (требовали $c_2 \neq 0$).

Производящие функции

Рассмотрим конечные последовательности:
$(a_0, \ a_1, \ldots, \ a_n)$. Её можно закодировать многочленом:

$$P_{\vec{a}}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

Многочлены мы умеем складывать:

$$P_{\vec{a}}(x) + P_{\vec{b}}(x) = (a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) + (b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m) =$$

Без ограничения общности полагаем $n \leqslant m$:

$$= (a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+\dots+(a_n+b_n)x^n+(0+b_{n+1})x^{n+1}+\dots+(0+b_m)x^m = P_{\vec{a}+\vec{b}}(x)$$

Также мы умеем умножать многочлены:
$P_{\vec{a}}(x)\cdot P_{\vec{b}}(x) = (a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n)\cdot(b_0+b_1x+b_2x^2+\dots+b_mx^m) =$
$a_0b_0 + x(a_0b_1 + a_1b_0) +$
$+x^2(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)+\dots+x^t\sum_{k=0}^{t} a_kb_{t-k} = P_{\vec{a}\cdot\vec{b}}(x)$. Раскодировав данный многочлен, получаем <u>определение произведения последовательностей</u> (конечных).

Определение:

Для последовательностей (a_n), $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n-ый элемент их произведения определяется:

$$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)_n = \sum_{k=0}^{n} a_kb_{n-k}$$

Мы можем рассматривать данную операцию как умножение "бесконечных многочленов" (<u>формальные</u> степенные ряды).

Определение:

Формальным рядом называется ряд, о сходимости которого мы не говорим:

$$A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

$A(x)$ - производящая функция последовательности $\vec{a}$

Свойства операций с последовательностями:

$A(S) + B(S) = \sum\limits_{n}(a_n + b_n)S^n$

$A(S)\cdot B(S) = \sum\limits_{n}\left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_kb_{n-k}\right)S^n$

Теорема 2.

1. Сложение коммутативно и ассоциативно.

2. Любой многоЧлен - это производящая функция последовательности, где лишь конечно много ненулевых членов.

3. Умножение коммутативно, ассоциативно и дистрибутивно относительно сложения:

$$A(S)\big(B(S) + C(S)\big) = A(S)B(S) + A(S)C(S)$$

Доказательство:

Коммутативность умножения:

$$(A + B)S^n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \underset{m=n-k}{=} = \sum_{m=0}^{n} a_{n-m} b_m = \sum_{k=0}^{n} b_k a_{n-k} = (B + A)S^n$$

Ассоциативность умножения ($[x](S^n)$ подразумевает, что x является коэффициентом при S^n):

$$[(A+B)C](S^n) = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l} \right) c_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l} c_{n-k} = \sum_{\substack{(x_1,\ x_2,\ x_3) \\ x_1+x_2+x_3=n}} a_{x_1} b_{x_2} c_{c_3} =$$

$= [A(B + C)](S^n)$
Дистрибутивность умножения:

$$[A(B+C)](S^n) = \sum_{k=0}^{n} a_k (b_{n-k} + c_{n-k}) = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} + \sum_{k=0}^{n} a_k c_{n-k} = [AB](S^n) + [AC](S^n)$$

Определение:

Операция подстановки для $A(S) = \sum_n a_n S^n,\ B(t) = \sum_n b_n t^n,\ b_0 = 0$:

$$A\big(B(t)\big) = a_0 + \underbrace{a_1 B(t)}_{\deg \geqslant 1} + a_2 \underbrace{\big(B(t)\big)^2}_{\deg \geqslant 2} + \underbrace{\big(a_3 B(t)\big)^3}_{\deg \geqslant 3} + \dots$$

Тогда:

$$\begin{aligned}
d_0 &= a_0 \\
d_1 &= a_1 b_1 \\
d_2 &= a_1 b_2 + a_2 b_1^2 \\
d_3 &= a_1 b_3 + a_2(b_1 b_2 + b_2 b_1) + a_3 b_1^3 \\
d_4 &= a_1 b_4 + a_2(b_1 b_3 + b_2^2 + b_3 b_1) + a_3(b_1^2 b_2 + b_1 b_2 b_1 + b_2 b_1^2) + a_4 b_4^4
\end{aligned}$$

Определение (строгое):

Операция подстановки $D(t)$:

$$\begin{cases} b_0 = 0 \\ D(t) = A\big(B(t)\big) \end{cases}, \ d_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \sum_{\substack{x_1 + \dots + x_k = n \\ x_i > 1}} b_{x_1} b_{x_2} \dots b_{x_k}$$

Теорема 3:

$\forall B$, где $b_0 = 0 \wedge b_1 \neq 0$

$$\exists! A,\ C : \begin{cases} A\big(B(t)\big) = t \\ B\big(C(S)\big) = S \end{cases}$$

Лекция 24 мая

Производящие функции

$$\vec{a} = (a_0,\ a_1, \dots) \rightsquigarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n S^n = A(S)$$

Пример.

$$(-7,\ 1,\ 0,\ 0,\ 5,\ 0, \dots) \leftrightsquigarrow 5s^4 + s - 7$$

Подстановка.

$B(t) = b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + \dots, \quad b_0 = 0$

$$A\big(B(t)\big) = a_0 + \underbrace{a_1 B(t)}_{\deg \geqslant 1} + \underbrace{a_2 B^2(t)}_{\deg \geqslant 2} + \underbrace{a_3 B^3(t)}_{\deg \geqslant 3} + \underbrace{a_4 B^4(t)}_{\deg \geqslant 4} + \dots$$

$$A\big(B(t)\big) = a_0 + a_1 b_1 t + t^2 (a_1 b_2 + a_2 b_1^2) + t^3 \big(a_1 b_3 + a_2(b_1 b_2 + b_2 b_1) + a_3 b_1^3\big) + \\ + t^4 \big(a_1 b_4 + a_2(b_1 b_3 + b_2^2 + b_3 b_1) + a_3(b_1^2 b_2 + b_1 b_2 b_1 + b_2 b_1^2) + a_4 b_1^4\big)$$

Определение.

$C(t) = A\big(B(t)\big)$, если $b_0 = 0$
$c_0 = a_0$
$n \geqslant 1: \ c_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \sum\limits_{\substack{x_1+\dots+x_k=n \\ x_i \geqslant 1}} b_{x_1} b_{x_2} \dots b_{x_k}$

Определение.

Пусть $b_0 = a_0$, тогда производящая функция $D(t) = A\big(B(t)\big)$ такова:
$d_0 = a_0, \ \forall n \geqslant 1 \ d_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \sum\limits_{\substack{x_1+\dots+x_k=n \\ x_i \geqslant 1}} b_{x_1} b_{x_2} \dots b_{x_k}$
Таким образом мы можем подставлять аргументы в производящую функцию, то есть:

$$A(0) = a_0, \ A(1) - \text{не является производящей, так как } 1_0 \neq 0$$

Теорема 1. (об обратимости подстановки)

Пусть производящая функция $B(t)$ такова, что $b_0 = 0$ и $b_1 \neq 0$, тогда:

$$\exists! A(S) \ \exists! C(S): \begin{cases} A\big(B(t)\big) = t \\ B\big(C(S)\big) = S \end{cases}$$

Доказательство.

Пусть $D(t) = A\big(B(t)\big)$, хотим: $\begin{cases} d_0 = 0 \\ d_1 = 1 \\ d_n = 0, \ (n \geqslant 2) \end{cases}$

Можно взять $(*) = \begin{cases} a_0 = d_0 = 0 \\ a_1 b_1 = d_1 = 1 \\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \sum\limits_{\substack{x_1+\dots+x_k=n \\ x_i \geqslant 1}} b_{x_1} b_{x_2} \dots b_{x_k} = d_n = 0 \end{cases}$

Решаем $(*)$ относительно $a_0,\ a_1, \cdots:$

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = \frac{1}{b_1} \\ a_n = -\frac{1}{b_1^n} \sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k \sum\limits_{\substack{x_1+\dots+x_k=n \\ x_i \geqslant 1}} b_{x_1} b_{x_2} \dots b_{x_k} \end{cases}$$

Пусть $D(S) = B\big(C(S)\big)$

$$(\#) \begin{cases} 0 = d_0 = b_0 \\ 1 = d_1 = b_1 c_1 \\ 0 = d_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k \sum\limits_{\substack{x_1+\dots+x_k=n \\ x_i \geqslant 1}} c_{x_1} c_{x_2} \dots c_{x_k} \end{cases}$$

Решаем $(\#)$ относительно $\vec{c}$:

$$\begin{cases} c_0 = 0, \text{ иначе не определена } B\big(C(S)\big) \\ c_1 = \frac{1}{b_1} \\ c_n = -\frac{1}{b_1} \sum\limits_{k=2}^{n} b_k \sum\limits_{\substack{x_1+\dots+x_k=n \\ x_i \geqslant 1}} c_{x_1} c_{x_2} \dots c_{x_k} \end{cases} \Rightarrow c_n = f(c_1, \dots,\ c_{n-1},\ n)$$

Теорема 2. (о делении)

Пусть производящая функция $A(S)$ такова, что $a_0 = A(0) \neq 0$. Тогда

$$\exists! B(S)\ A(S) \cdot B(S) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 b_0 = 1,\ n = 0 \\ \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = 0,\ n \geqslant 1 \end{cases}$$

Решаем относительно $\vec{b}$:

$$\begin{cases} b_0 = \frac{1}{a_0} \\ a_0 b_n + \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow b_n = -\frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k},\ n-k < n$$

Определение. (элементарные производящие функции)

$\alpha \in \mathbb{R}$

1. $(1+s)^\alpha = \sum_n \dfrac{\alpha^{(n)}}{n!}s^n$, где $\alpha^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)$

Определение.

$\dbinom{\alpha}{n} = \dfrac{\alpha^{(n)}}{n!}$

Утверждение (1 случай).

Если $\alpha \in \mathbb{N} \wedge n \leqslant \alpha \quad \dbinom{\alpha}{n} = C_\alpha^n$

$\alpha \in \mathbb{N} \Rightarrow \dfrac{\alpha^{(n)}}{n!} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} = C_\alpha^n$

Следствие.

Если $\alpha \in \mathbb{N}$, то:

$$(1+s)^\alpha = \sum_{n \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{n} s^n = \sum_{n=0}^{\alpha} C_a^\alpha s^n$$

Проверяем: $(1+s)^1 = C_1^0 + C_1^1 \cdot s = 1 + s$

Утверждение (2 случай).

$n > \alpha$: $C_\alpha^n = 0 \Rightarrow \dfrac{\alpha^{(n)}}{n!} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-\alpha)\dots(\alpha-n+1)}{n!} = 0$

Утвреждение (3 случай).

$\alpha \notin \mathbb{N}$

$(1+s)^{-1} = \sum\limits_n \dfrac{(-1)^{(n)}}{n!}s^n = \sum\limits_n (-1)^n s^n$

$\dfrac{(-1)^{(n)}}{n!} = \dfrac{(-1)(-2)(-3)\dots(-n)}{n!} = (-1)^n \dfrac{n!}{n!} = (-1)^n$

$(1-s)^{-1} = \sum\limits_n (-1)^n(-s)^n = \sum\limits_n s^n$

Рассмотрим $G(s) = 1 + s + s^2 + s^3 + \dots = \sum\limits_n s^n$
$s(G(s)) = s + s^2 + s^3 + \dots \Rightarrow G(s) = 1 + sG(s)$
$G(s)(1-s) = 1 \Rightarrow G(s) = \dfrac{1}{1-s} = (1-s)^{-1} = \sum\limits_n s^n$

Утверждение.

$$\forall \alpha,\ \beta\ (1+s)^\alpha (1+s)^\beta = (1+s)^{\alpha+\beta}$$

Доказательство.

$$\left[(1+s)^\alpha (1+s)^\beta\right](s^n) = \sum_{k=0}^{n} \left[(1+s)^\alpha\right](s^k)\left[(1+s)^\beta\right](s^{n-k}) = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n-k} = (*)$$

Здесь $[\dots](s^n)$ обозначает коэффициент при s^n
Было: $\forall \alpha,\ \beta \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} C_\alpha^k C_\beta^{n-k} = C_{\alpha+\beta}^n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n-k} = \binom{\alpha+\beta}{n}$$

В левой части равенства стоит многочлен от α, β. Из алгебры знаем, что если два многочлена равны на бесконечном количестве точек, то они совпадают всюду (так как у многочлена конечное множество корней, а разность многочленов от α и β тоже многочлен).

$$(*) = \binom{\alpha+\beta}{n} = \left[(1+s)^{\alpha+\beta}\right](s^n)$$

Элементарные производящие функции

2. $e^s = \sum\limits_n \dfrac{s^n}{n!} = 1 + s + \dfrac{s^2}{2} + \dfrac{s^3}{6} + \dots$

Утверждение.

$$e^s \cdot e^{-s} = 1$$

$$\left[e^s \cdot e^{-s}\right](s^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^{n-k}(-1)^k = \frac{1}{n!}\big(1+(-1)\big)^n = \begin{cases} 0, & n > 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases}$$

3. $\ln(\frac{1}{1-s}) = \sum_n \frac{s^{n+1}}{n+1} = s + \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{3} + \dots$

4. $\sin s = s - \frac{s^3}{3!} + \frac{s^5}{5!} + \dots = \sum_n (-1)^n \frac{s^{2n+1}}{(2n+1)!}$

5. $\cos s = 1 - \frac{s^2}{2!} + \frac{s^4}{4!} - \dots = \sum_n (-1)^n \frac{s^{2n}}{(2n)!}$

Упражнение.

Доказать:

$$\sin^2 s + \cos^2 s = 1$$

Пример.

$e^{is} = 1 + is - \frac{s^2}{2} - \frac{is^3}{6} + \frac{s^4}{24} + \dots = \cos s + i \sin s$

Определение (производная и первообразная).

$\big(A(S)\big)' = (a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + \dots)' = a_1 + 2a_2 s + 3a_3 s^2 + \dots =$
$= \sum_n (n+1) a_{n+1} s^n$
$\displaystyle\int A(s) = \int (a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + \dots) = a_0 s + \frac{a_1}{2} s^2 + \frac{a_2}{3} s^3 + \frac{a_3}{4} s^4 + \dots =$
$\displaystyle= \sum_n \frac{a_n}{n+1} s^{n+1}$

Утверждение.

$$\left(\int A(s)\right)' = A(s)$$

Доказательство.

Пусть $\displaystyle\int A(s) = B(s) \Rightarrow$
$\displaystyle\Rightarrow B'(s) = \sum_n (n+1) n_{n+1} s^n = \sum_n (n+1) \frac{a_n}{(n+1)} s^n = A(s)$

Пример.

$$(e^s)' = 1 + \frac{2}{2}s + \frac{3}{3!}s^2 + \frac{4}{4!}s^3 + \dots = 1 + s + \frac{s^2}{2!} + \frac{s^3}{3!} + \dots = e^s$$

Лекция 31 мая.

Было:

$\forall \alpha,\ \beta \in \mathbb{N}$

$$\binom{\alpha+\beta}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} \binom{\beta}{n-k}$$

Хотим: $\forall \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$

Рассмотрим $P(\alpha,\ \beta) = \dbinom{\alpha+\beta}{n} - \sum_{k=0}^{n} \dbinom{\alpha}{k} \dbinom{\beta}{n-k}$ - многочлен степени n

Напоминание: $\dbinom{x}{n} = \dfrac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!}$

Зафиксируем $\beta_0 \in \mathbb{N}$:

$$P_{\beta_0}(\alpha) = P(\alpha,\ \beta_0) \text{ - многочлен степени } n \text{ от } \alpha$$

У $P_{\beta_0}(\alpha)$ - корни во всех $\alpha \in \mathbb{N} \Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R}\ P_{\beta_0}(\alpha) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R}\ \forall \beta \in \mathbb{N}\ P(\alpha,\ \beta) = 0$
Рассмотрим $\hat{P}_{\alpha_0}(\beta) = P(\alpha_0,\ \beta)$ - многочлен степени n от β. Получается, что для всех α у $\hat{P}_{\alpha_0}(\beta)$ корни во всех $\beta \in \mathbb{N} \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall \beta \in \mathbb{R}\ \hat{P}_{\alpha_0}(\beta) = 0.$
Итак, $\forall \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}\ P(\alpha,\ \beta) = 0$

Было:

$$(1,\ 1,\ 1, \dots) \rightsquigarrow G(S) = 1 + s + s^2 + \dots$$

$$G(S) = 1 + s + s^2 + s^3 + \dots$$

$$sG(S) = s + s^2 + s^3 + s^4 + \dots$$

$$G(S) - sG(S) = 1$$

$$(1-s)G(S) = 1$$

$$G(S) == \frac{1}{1-s}(1-s)^{-1}$$

Возьмём последовательность Фибоначчи

$$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}(0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\dots) \rightsquigarrow Fib(S) := \sum_n f_n s^n$$

$$\begin{aligned}
Fib(s) =& s + s^2 + 2s^3 + 3s^4 + 5s^5 + \dots \\
s\cdot Fib(s) =& f_0 s + f_1 s^2 + f_2 s^3 + f_3 s^4 + 3s^5 + \dots \\
s^2 Fib(s) =& 0 + 0^2 + f_0 s^3 + f_1 s^4 + f_2 s^5 + \dots \\
(s+s^2)Fib(s) =& f_0 s + \sum_{n\geqslant 2}(f_{n-1} + f_{n-2})s^n = f_0 s + \sum_{n\geqslant 2} f_n s^n = \\
=& f_0 s + (Fib(s) - f_0 - f_1 s) = Fib(S) + (f_0 - f_1)s - f_0 = \\
=& Fib(s) - s \\
Fib(s)(s^2 + s - 1) =& - s \\
Fib(s) =& \frac{-s}{s^2+s-1}
\end{aligned}$$

Числа Фибоначчи задаются следующим образом:

$$\begin{cases} f_0 = 0 \\ f_1 = 1 \\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \end{cases} \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Тогда $s^2 + s - 1 = (s + x_1)(s + x_2)$ (легко проверить подстановкой)

$$Fib(s) = \frac{-s}{(s+x_1)(s+x_2)} = (*)$$

$$\frac{1}{s+x_1} - \frac{1}{s+x_2} = \frac{x_2 - x_1}{(s+x_1)(s+x_2)} = \frac{-\sqrt{5}}{(s+x_1)(s+x_2)}$$

С этим знанием можно сказать

$$(*) = \frac{s}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{s+x_1} - \frac{1}{s+x_2}\right) = \frac{s}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{x_1(1+\frac{s}{x_1})} - \frac{1}{x_2(1+\frac{s}{x_2})}\right) =$$

$$= \frac{s}{\sqrt{5}} = \left(\frac{1}{x_1}\left(1 + \frac{s}{x_1}\right)^{-1} - \frac{1}{x_2}\left(1 + \frac{s}{x_2}\right)^{-1}\right) =$$

$$= \frac{s}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{x_1}\sum_n (-1)^n \frac{s^n}{x_1^n} - \frac{1}{x_2}\sum_n (-1)^n \frac{s^n}{x_2^n}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_n (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}}\right)s^{n+1} = Fib(S)$$

$$f_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{x_2^{n+1} - \frac{1}{x_1^{n+1}}} \right) = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{5}} \left(x_2^{-(n+1)} - x_1^{-(n+1)} \right) =$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{5}} \left((-1)^{-(n+1)} x_1^{n+1} - (-1)^{n+1} x_2^{n+1} \right) = \frac{x_1^{n+1} - x_2^{n+1}}{\sqrt{5}}$$

Теорема 1.

Пусть $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ удовлетворяет стационарному линейному однорондному рекуррентному соотношению порядка k, то есть

$$\forall n\ a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \cdots + c_k + a_n$$

Тогда существует многочлен $P(s)$ такой, что

$$\deg P < k \wedge \sum a_n S^n = A(S) = \frac{P(S)}{1 - c_1 s - c_2 s^2 - \cdots - c_k s^k}$$

Доказательство:

$c_1 s A(s) = \sum\limits_{n=1}^{k-1} c_1 a_{n-1} s^n + \sum\limits_{n \geqslant k} c_1 a_{n-1} s^n$

$c_2 s^2 A(s) = \sum\limits_{n=2}^{k-1} c_2 a_{n-2} s^n + \sum\limits_{n \geqslant k} c_2 a_{n-2} s^n$

. . . .

$c_{k-1} s^{k-1} A(s) = \sum\limits_{n=k-1}^{k-1} c_{k-1} a_{n-k+1} s^n + \sum\limits_{n \geqslant k} c_{k-1} a_{n-k+1} s^n$

$c_k s^k A(s) = 0 + \sum\limits_{n \geqslant k} c_k a_{n-k} s^n$

Тогда $\left(c_1 s + c_2 s^2 + \cdots + c_k s^k\right) A(s) =$

$= R(s) + \sum\limits_{n \geqslant k} \underbrace{(c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k})}_{=a_n} s^n,\ \deg R \leqslant k-1$

$R(s) + \sum\limits_{n \geqslant k} a_n s^n = R(s) + \left(A(s) - \sum\limits_{n=0}^{k-1} a_n s^n \right) = A(s) + \left(R(s) - \sum\limits_{n=0}^{k-1} a_n s^n \right) =$

$= A(s) - P(s),\ \deg P \leqslant k-1 \Rightarrow P(s) = A(s)(1 - c_1 s - c_2 s^2 - \cdots - c_k s^k)$

$A(s) = \dfrac{P(s)}{1 - c_1 s - c_2 s^2 - \cdots - c_k s^k}$

Числа Каталана

Рассмотрим правильные скобочные последовательности. Введём понятие баланса последовательности

$$b(\sigma) = |\sigma|_{(} - |\sigma|_{)}$$

Определение:

$\sigma_1, \ldots,\ \sigma_n = \sigma$ правильная $\Leftrightarrow \begin{cases} b(\sigma) = 0 \\ \forall i(\sigma_1, \ldots,\ \sigma_i) \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow p(\sigma)$ (путь) возвращается в 0 и никогда не бывает ниже 0. (см картинку)

Определение:

n-ое число Каталана $c_n = \#$правильных скобочных последовательностей длины $2n$

$$c_0 = 1, \quad c_1 = 1, \quad c_2 = 2, \quad c_3 = 5, \ldots$$

Утверждние:

$\forall \sigma$ - правильный, если $\sigma \neq \varepsilon$ (непустое), то $\exists!(\tau,\ \rho)$ правильное

$$\sigma = (\tau)\rho$$

Доказательство:

1. σ начинается с '(' и заканчивается ')'
2. $\tau :=$ кратчайшее τ' такое, что:

$$\tau' \text{ правильный} \wedge \exists \rho\ \sigma = (\tau')\rho$$

3. Полученное в пункте 2 ρ.

Утверждение:

$$c_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$$

Лекция 7 июня

Вспоминаем, что такое правильная скобочная последовательность.

Утверждение:

Для любой непустой правильной скобочной последовательности σ $\exists!(\tau,\ \rho)$, такие что $\sigma = (\tau)\rho$, где $\tau,\ \rho$ - правильные скобочные последовательности.
Единственность:
$(\tau)\rho = \sigma = (\tau')\rho'$
Допустим $\tau \neq \tau'$, без ограничений общности положим $|\tau'| > |\tau|$
$(\tau') = (\tau)\pi$. Заметим, что $\tau)$ - начало τ' (левая скобочка имеет закрывающую в π), так как она правильная, получаем $b[\tau)] \geqslant 0 \Rightarrow b[\tau)] = b[\tau] - 1 = 0 - 1 \Rightarrow \perp$
Существование:
Введём понятие кратчайшего непустого правильного начала - первые i элементов со свойством $b[\tau_i] = 0$ (первый раз зануляется баланс в последовательности).
Рассмотрим $\pi :=$ кратчайшеее правильное непустое начало σ (оно существует).
$\exists\tau \quad \pi = (\tau) \Rightarrow \sigma = (\tau)\rho$
Докажем, что $\rho,\ \tau$ - правильные.
Допустим τ не является правильной:
$\forall\xi$ (начало τ) $b[(\xi] \geqslant 0 \Rightarrow b[\xi] \geqslant -1$. Тогда $\exists\xi$ (начало τ) $b[\xi] < 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\xi \quad = -1 \Rightarrow b[(\xi] = 0 \longrightarrow$ это более короткое, чем $\pi = (\tau)$ правильное непустое начало $\sigma \Rightarrow \perp$
Рассмотрим ρ:
$(\tau)\underbrace{\rho'\rho''}_{\rho}$, тогда

$$b[p'] = b[(\tau)\rho'] \geqslant 0$$

Определение:

$B_n =$ множество правильный последовательностией из $2n$ скобочек $c_n = |B_n|$

Следствие:

$B_{n+1} \sim \bigcup\limits_{k=0}^{n}(B_k \times B_{n-k})$
$\forall B_{n+1}\ \exists! k \quad \sigma = (\underbrace{\ \tau\ }_{\in B_k})\underbrace{\ \rho\ }_{B_{n-k}}$
$C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$
Рассмотрим производящую функцию для $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$Cat(S) = \sum_n c_n s^n$$

Тогда
$$\frac{Cat(s)-1}{s}[S^n] = c_{n+1} = [s^n](Cat(s)Cat(s))$$

$Cat(s) - c_0 = s(c_1 + c_2 s + c_3 s) = \sum_n c_{n+1}s^n = \dfrac{Cat(s)-1}{s}$
Тогда $Cat(s) - 1 = sCat^2(s) \Rightarrow sCat^2(s) + Cat(s) - 1 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow Cat(s) = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4s}}{2s} = \dfrac{1 \pm (1-4s)^{\frac{1}{2}}}{2s}$
$1 + (1-4s)^{\frac{1}{2}} = 1 + \sum\limits_n \binom{\frac{1}{2}}{n}(-4)^n s^n = 1 + 1 - \binom{\frac{1}{2}}{1}4s + \dots \Rightarrow$ свободный член 2, то есть она не делится на s и поэтому не является производящей функцией.
Рассмотрим второй корень:
$\dfrac{1-(1-4s)^{\frac{1}{2}}}{2s} = \dfrac{1 - \sum_n \binom{\frac{1}{2}}{n}(-4)^n s^n}{2s} = \dfrac{1 - 1 - \sum_n \binom{\frac{1}{2}}{n}(-4)^n s^n}{2s} = \dots,$
что уже делится на s
Продолжим преобразовывать полученную сумму:

$$\dots = \frac{4}{2}\sum_{n\geqslant 1}\binom{\frac{1}{2}}{n}(-4)^{n-1}s^{n-1} = 2\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n+1}(-4)^n s^n$$

$(n+1)!\dbinom{\frac{1}{2}}{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{2}\right)\left(-\dfrac{3}{2}\right)\dots\left(-\dfrac{1-2n}{2}\right) = \dfrac{(-1)^n 1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-1)}{2^{n+1}} =$

$$= \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^{n+1}}$$

Подставим это в формулу $= 2\sum_n \frac{1}{(n+1)!}\frac{(-1)^n(2n-1)!!(-1)^n 4^n s^n}{2^{n+1}} =$
$= \sum_n \frac{2^n(2n-1)!!}{(n+1)!}s^n = \sum_n \frac{n!2^n(2n-1)!!}{n!(n+1)!}s^n = \ldots$ Знаем $2^n n! = (2n)!! \Rightarrow$
$\Rightarrow \cdots = \sum_n \frac{(2n)!!(2n-1)!!}{n!(n+1)!}s^n = \sum_n \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}s^n = \sum_n \frac{1}{n+1}\frac{(2n)!}{n!n!}s^n =$
$= \sum_n \frac{1}{n+1}C_{2n}^n s^n = Cat(s).$

Вывод:

$\forall n \in \mathbb{N} \quad c_n = \frac{1}{n+1}C_{2n}^n$
Тогда $c_{n+1} = \frac{1}{n+2}C_{2n+2}^{n+1} \Rightarrow \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{n+1}{n+2}C_{2n+2}^{n+1}\frac{1}{C_{2n}^n} = \frac{n+1}{n+2}\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}\frac{n!n!}{(2n)!} =$
$= \frac{n+1}{n+2}\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = \frac{4n+2}{n+2}$

Следствие:

$\begin{cases} c_0 = 1 \\ c_{n+1} = \frac{4n+2}{n+2}c_n \end{cases}$

Упражнение:

$c_0 = 0,\ c_1 = 1,\ C_{n+2} = \frac{2c_{n+1}(8c_n + c_{n+1})}{10c_n - c_{n+1}}.$

Задача Муавра

Попробуем решить задачу, используя производящие функции. Вспомним условие:

$$\begin{cases} x_1 + \cdots + x_m = n \\ x_i \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$q_n^m = \#$ решений системы. Было: $q_n^m = C_{n+m-1}^{m-1}$
Построим производящую функцию для фиксированного m. Тогда

$$Q_m(s) = \sum_n q_n^m s^n$$

$q_n^1 = 1$, тогда q_n^{m+1}, зафиксируем $x_1 := k$, тогда

$$q_n^{m+1} = \sum_{k=0}^{n} q_{n-k}^m = \sum_{k=0}^{n} q_{n-k}^m = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{1 q_{n-k}^m}_{a_k b_{n-k}} = [s^n](G(s)Q_m(s))$$

Тогда $Q_{m+1}(s) = G(s)Q_m(s) = \dfrac{Q_m(s)}{1-s}$

$Q_1(s) = G(s) = \dfrac{1}{1-s}$

Следствие:

$\forall m \geqslant 1 \quad Q_m(s) = \left(\frac{1}{1-s}\right)^m$
Было (со звёздочкой):
Сколько есть шестизначных чисел с суммой цифр 29.

$$\begin{cases} x_1 + \dots + x_6 = 29 \\ 1 \leqslant x_1 \leqslant 9 \\ 0 \leqslant x_{2\dots6} \leqslant 9 \end{cases}$$

Ответом было 49467. Попробуем решить с помощью производящих функций.
Перефразируем задачу $\begin{cases} x_1 + \dots + x_n = n \\ \forall i \ x_i \in T \subseteq \mathbb{N} \end{cases}$
Зададим ограничение с помощью производящей функции:

$$T(s) = \sum_n 1_T(n) s^n = \sum_{n \in T} s^n$$

$T = \{1,\ 2, \dots,\ 9\} \Rightarrow T(s) = s + s^2 + s^3 + \dots + s^9$. Рассмотрим количество способов разбить на множество из 1 элемента, попадающего в T? Это будет $q_n^{T,\ 1} = 1_T(n)$, тогда $q^{T,\ m+1} n = \sum\limits_{k=0}^{n} 1_T(k) q_{n-k}^{T,\ m}$.
Тогда $Q_{m+1}^T(s) = T(s) Q_m^T(s)$
$Q_1^T(s) = T(s) \Rightarrow \forall m \geqslant 1 \ Q_m(s) = (T(s))^m$
С таким знанием верёмся к задаче:

$$\begin{cases} x_1 + \dots + x_6 = 29 \\ 1 \leqslant x_1 \leqslant 9 \ (\hat{T}) \\ 0 \leqslant x_{2\dots6} \leqslant 9 \ (T) \end{cases}$$

Заметим $T(s) = 1 + \hat{T}(s)$ Тогда составим функцию:

$$P(s) = \hat{T}(s)(T(s))^5 = \hat{T}(s)(\hat{T}(s)+1)^5$$

Проверили на вольфраме, получается магия (совпало).

Лекция 14 июня.

Решали задачу Муавра через производящие функции: $T_i \subseteq \mathbb{N}m$ $x_i \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}_+$
$\begin{cases} x_1 + \dots + x_m = n \\ x_1 \in T_1, \dots x_m \in T_m \end{cases}$
$q_n^{T_1,\dots,\ T_m} :=$ #решений системы. Здесь верхний индекс - список ограничений, наложенных на решения.

Возьмём производящую функцию $T(s) = \sum\limits_{n \in T} s^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 1_T(n) s^n$
$T = \{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13\} \rightsquigarrow T(s) = s^2 + s^3 + s^5 + s^7 + s^{11} + s^{13}$.
$T =$все нечётные $\rightsquigarrow T(s) = s + s^3 + s^5 + s^7 + \dots = \sum\limits_n s^{2n+1}$
Допустим $x_1 = k$, тогда $q_n^{T_1,\ T_2,\dots,\ T_m} = 1_{T_1}(k) q_{n-k}^{T_2,\dots,\ T_m}$
В общем случае: $q_n^{T_1,\ T_2,\dots,\ T_m} = \sum\limits_{k=0}^{n} 1_{T_1}(k) \cdot q_{n-k}^{T_2,\dots,\ T_m} = [s^n]\Big(T_1(s) \cdot Q^{T_2,\dots,\ T_m}(s)\Big)$.
Но при этом справделиво: $q_n^{T_1,\ T_2,\dots,\ T_m} = [s^n] Q^{T_1,\ T_2,\dots,\ T_m}(s) \Rightarrow$
$\Rightarrow Q^{T_1,\ T_2,\dots,\ T_m}(s) = T_1(s) Q^{T_2,\dots,\ T_m}(s)$.
Значит $q_n^{T_m} = 1_{T_m}(n) \Rightarrow Q^{T_m}(s) = T_m(s)$.

Следствие:

$Q^{T_1,\dots T_m}(s) = T_1(s) \cdot T_2(s) \dots T_m(s)$

Пример:

Сколько есть 8-значных чисел, где первые 3 цифра чётна, 5 цифра $\leqslant 6$ и сумма цифр 39.
Тогда построим ограничения:
$T_1(s) = T_2(s) = T_4(s) = T_6(s) = T_7(s) = T_8(s) = s + s^2 + s^3 + \dots + s^9$
$T_3(s) = 1 + s^2 + s^4 + s^6 + s^8$
$T_5(s) = 1 + s + s^2 + s^3 + s^4 + s^5 + s^6$

Новая задача:

Сколько есть способов отсчитать 100 рублей монетами по $3,\ 5,\ 7$ рублей.
$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = n \\ x_i \in \mathbb{N} \end{cases}$
$a_n :=$ #решений системы. $A(s) = \sum\limits_n a_n s^n$
Рассмотрим $A_3(s) = \sum a_n^3 s^n$
$a_n^3 :=$ #решений $\begin{cases} 3x = n \\ x \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow a_n^3 = \begin{cases} 1, & 3 \big| n \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$,
$A_3(s) = 1 + s^3 + s^6 + s^9 + s^{12} = \sum\limits_n s^{3n} = \dfrac{1}{1 - s^3}$
Аналогично $A_5(s) = \dfrac{1}{1 - s^5},\ A_7(s) = \dfrac{1}{1 - s^7}$
$A_{3,\ 5}(s) = \sum\limits_n a_n^{3,\ 5} s^n$, где $a_n^{3,\ 5} :=$ #решений $\begin{cases} 3x + 5y = n \\ x,\ y \in \mathbb{N} \end{cases}$
Допустим, что сумма трёхрублёвых равна k, тогда:

$$a_n^{3,\ 5} = \sum_{k=0}^{n} a_k^3 \cdot a_{n-k}^5 = \Big(A_3(s) \cdot A_5(s)\Big)[s^n] \Rightarrow A_{3,\ 5}(s) = A_3(s) \cdot A_5(s)$$

Вернёмся к нашей задаче:
$a_n = a_n^{3,\ 5,\ 7} = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k^{3,\ 5} \cdot a_{n-k}^7 = \Big(A_{3,\ 5}(s) \cdot A_7(s)\Big)[s^n] \Rightarrow$
$\Rightarrow A(s) = A_3(s) \cdot A_5(s) \cdot A_7(s) = \dfrac{1}{(1 - s^3)(1 - s^5)(1 - s^7)}$. При разложении этого добра в ряд Тейлора мы получаем ответ на задачу для всех n.

Замечание:

Допустим, что монету 5 можно использовать не более одного раза, тогда:

$$A_5(s) = 1 + s^5 \Rightarrow A(s) = \frac{1 + s^5}{(1 - s^3)(1 - s^7)}$$

Задача о числе разбиений

Сколькими способами можно разбить число в натуральные слагаемые (без учёта порядка):

$$
\begin{aligned}
4 &= 4 \\
&= 3+1 \\
&= 2+2 \\
&= 2+1+1 \\
&= 1+1+1+1
\end{aligned}
$$

Пусть $p_n :=$ #разбиений $n =$ #способов представить n рублей монетами $\{1,\ 2, \ldots,\ n\}$

Тогда $P(s) = \sum p_n s^n$.

При фиксированном n это равно $\dfrac{1}{(1-s)(1-s^2)(1-s^3)\ldots(1-s^n)}$

Введём $\sum\limits_n p_n^m s^n = P_m(s) = \dfrac{1}{\prod\limits_{k=1}^{m}(1-s^k)}$, тогда $p_n^m :=$ #способов разложить n на $1,\ 2, \ldots, m$.

Получается $\forall m \geqslant n \quad p_n = p_n^m$ (монеты номинала больше n не могут быть использованы). Получается (с жульничеством):

$$p_n = [s^n]P(s) = [s^n]P_m(s) = [s]^n \frac{1}{(1-s)\ldots(1-s^n)(1-s^{n+1})\ldots(1-s^m)} \overset{?!}{=} \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1-s^k)}$$

?! - момент, в котором мы сжульничали.

Тогда $P(s) = \dfrac{1}{\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1-s^k)}$. Раскладываем в ряд, получаем ответ на задачу.

Замечание:

Если хотим брать разбиения, где все слагаемые разные, то будем брать следующую производящую функцию P':

$$P'(s) = \prod_{k=1}^{\infty}(1+s^k)$$

Задача 11 с семинара.

Вспоминаем числа Каталана:
#правильный скобочных последовательностей длины $2n = c_n$.
Усовершенствуем числа Каталана:
$\tilde{c}_n = \begin{cases} c_{n/2}, \ 2\big|n \\ 0, \ \text{иначе} \end{cases} \quad \Rightarrow (\tilde{c}) = (c_0, \ 0, \ c_1, \ 0, \ c_2, \dots)$
Эта последовательность имеет производящую функцию:
$\sum\limits_n \tilde{c}_n s^n = \tilde{\mathrm{Cat}}(s) = \sum\limits_n c_n s^{2n} = \mathrm{Cat}(s^2)$

Задача:

Сколько существует траекторий движения частицы таких, что она никогда не оказывается ниже 0.
Общее число путей: 2^n
Для такого числа производящая функция выглядит так: $\dfrac{1}{1-2s}$.
Так как $G(s) = \dfrac{1}{1-s}, \ G(\alpha s) = \dfrac{1}{1-\alpha s}$, здесь мы моложили $\alpha = 2$.
Рассмотрим все пути, на которых траектория находится в отрицательной области в какой-то момент.
$d_n :=$ #путей до n, опускающихся ниже 0.
$d_0 = 0$. В каждом таком пути есть хотя бы один шаг "вниз".
Возьмём наименьший k такой, что путь из первых k шагов правильный.
Тогда если $k+1$ шаг вниз, то путь уже будет "плохим" и это не зависит от следующих шагов, то есть можно сделать различных 2^{n-k} шагов. То есть:

$$d_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \tilde{c}_k 2^{n-k}$$

$\dfrac{D(s) - d_0}{s}[s^n] = d_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} \tilde{c}_k 2^{n-k} = [s^n]\left(\tilde{\mathrm{Cat}}(s)\dfrac{1}{1-2s}\right) \Rightarrow$
$\Rightarrow \dfrac{D(s)}{s} = \dfrac{\tilde{\mathrm{Cat}}(s)}{1-2s^2} \Rightarrow D(s) = \dfrac{s\,\mathrm{Cat}(s^2)}{1-2s}$
Тогда производящая функция для "хороших" путей:

$$P(s) = \frac{1}{1-2s} - \frac{s\,\mathrm{Cat}(s^2)}{1-2s} = \frac{1 - s\,\mathrm{Cat}(s^2)}{1-2s}$$