Семинары по дискретной математике модуль 4

Андрей Тищенко

2023/2024 гг.

Семинар 4 апреля

Графы

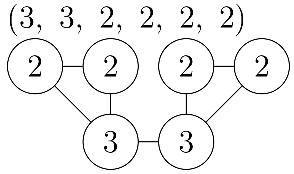
$$G = (\underset{\neq\varnothing}{V},\ E);\ \begin{cases} 1. E \subseteq V^2 \\ 2. E \text{ иррефлексивно} \\ \forall x \neg\ xEx \\ 3. E \text{ симметрично} \\ \forall x,\ y (xEy \Rightarrow yEx) \end{cases}$$

Вопрос 1. $V = \underline{n}$. Сколько существует различных графов на V?
Для графа размера 3.
Количество неупорядоченных пар различных вершин $= |\mathcal{P}_2(V)| = C_3^2 = 3$
Количество способов выбрать ребра $= |\mathcal{P}(\mathcal{P}_2(V))| = 2$

$\{x,\ y\}$ - ребро $\Leftrightarrow xEy \wedge yEx$

Степенная последовательность

2. $(3,\ 3,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2)$



Лемма о рукопожатиях

$(n,\ m)$ - граф $G = (V,\ E)$
$\sum\limits_{x \in V} d_G(x) = 2m = |E|$

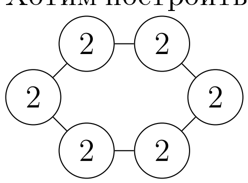
3. $(4,\ 4,\ 4,\ 4,\ 2)$ не является степенной.

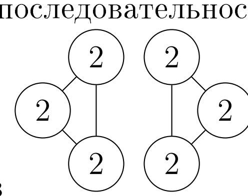
4. Задача

Дано: $(n,\ m)$ граф, $G = (V,\ E),\ n \geqslant 2$
Хотим: $\exists x,\ y \in V\ \big(x \neq y \wedge d(x) = d(y)\big)$
$\forall x\ 0 \leqslant d(x) \leqslant n-1 \quad d(x) \in \underline{n}$

Псуть не так: $\Rightarrow d$ инъективна.
$\underline{n} \sim V \overset{d}{\lesssim} \underline{n} \Rightarrow d$ сюръективна $\Rightarrow \begin{cases} \exists x_0\ d(x_0) = 0 \\ \exists x_{n-1}\ d(x_{n-1}) = n-1 \end{cases}$
$\neg x_0 E x_{n-1}$
$\forall y\ (y \neq x_{n-1}) \Rightarrow x_{n-1} E y \Rightarrow x_{n-1} E x_0 \Rightarrow \bot$

5. Хотим построить граф со степенной последовательностью $(2,\ 2, \ldots,\ 2)$





Граф $C_6 \ncong C_3 \sqcup C_3$

Пусть в G ровно k компонент связности. Одна компонента порядка $n_i \leqslant n,\ n_i = 5$
$(\underbrace{2,\ 2, \ldots,\ 2}_{n_i}) \Rightarrow G \cong C_{n_1} \sqcup \cdots \sqcup C_{n_k}$, где $\forall i\ n_i \geqslant 3,\ n_1 + \cdots + n_k = n$
$1 \leqslant k \leqslant \dfrac{n}{3}$ (округлить вверх)

7. $(100,\ 800)$ граф $G = (V,\ E)$

   а. $\forall x\ d_G(x) < 16$? Неверно по лемме о рукопожатиях.

   б. $\forall x\ d_G(x) = 16$.

Определение: граф называют <u>r-регулярным</u> $\Leftrightarrow \forall x\ d(x) = r$. Размер r-регулярного графа на n вершинах есть $\dfrac{rn}{2}$.

K_{t+1} - заведомо t-регулярный граф (полный граф на $t+1$ вершине).

Для нашей задачи возьмём K_{17}. В нём будет $\dfrac{17 \cdot 16}{2} = 136$ рёбер.

$800 = 136 \cdot 5 + 120$

$G \overset{?}{=} 5K_{17} + G'$, где G' 16-регулярный $(15,\ 120)$ граф (такого не бывает, так как одна из 15 вершин должна быть соседом с 16 другими $\perp$). Запрашиваю продолжение конспекта, тяжело.

Семинар 11 апреля

7. б. 16 регулярный граф на 100 вершинах.
$V = 100,\ xEy \Leftrightarrow \exists z \in \{\pm 8,\ \pm 7, \ldots,\ \pm 1\} = U \quad \big(x - y \equiv z\ (100)\big)$.
E иррефлексивно.

$$xEx \Rightarrow x - x = 0 \equiv z(100) \Rightarrow \perp$$

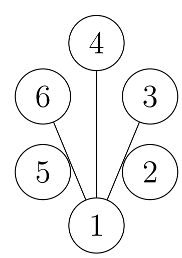
Симметричность.

$$xEy \Rightarrow yEx$$

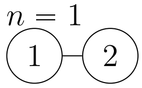
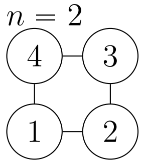
$$\exists z \in U \quad x - y \equiv z\ (100) \Rightarrow \begin{cases} y - x \equiv -z(100) \\ -z \in U \end{cases} \Rightarrow yEx$$

$x \in \underline{100}$. $N(x) = \{(x-8),\ (x-7), \ldots,\ (x-1),\ (x+1), \ldots,\ (x+8)\}$
Почему среди них нет одинаковых? Пусть есть:
$(x + d_1)\%100 = (x + d_2)\%100,\ |N(x)| \leqslant 16$
$\Leftrightarrow x + d_1 \equiv x + d_2\ (100)$
$\Leftrightarrow d_1 \equiv d_2\ (100) \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad |d_1 - d_2| = 16k \wedge d_2 - d_1 \leqslant 16 \Rightarrow$
$\Rightarrow d_1 = d_2 = 0.$

8. Среди любых шестерых людей есть хотя бы трое незнакомых или хотя бы трое знакомых.



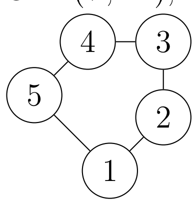
Пусть есть такая вершина, что у него есть три соседа.
Между вершинами 3, 4, 6 может быть ребро, тогда есть три попарно знакомых, может не быть рёбер, тогда есть три попарно незнакомых.

9. Булев куб:
   $x_1, \ldots,\ x_n E y_1, \ldots,\ y_n \Leftrightarrow \exists i\ (x_i \neq y_i \wedge \forall j \neq 1\ x_j = y_j)$
   $n = 1$
   
   $n = 2$
   
   $n = 3$. Тут куб, поверьте, пожалуйста.

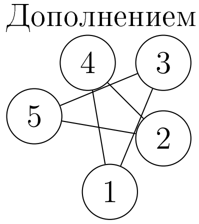
   a. $|V_n| = 2^n$
   b. Число рёбер графа $B_n = 2^n \cdot \frac{n}{2} = 2^{n-1} n$
   c. $2^n \cdot C_n^2$

Дополнение графа.

$G = (V,\ E), \quad \overline{G} = \big(V,\ (V^2 \setminus \mathrm{id}_V) \setminus E\big)$ Нарисуем дополнение:



Дополнением к такому графу будет граф



Докажем G не связен $\Rightarrow \overline{G}$ связен.
Рассмотрим произвольные вершины $x,\ y\ (x \neq y) \in V$.
Первый случай: $x \nsim_G y \Rightarrow \neg xEy \Rightarrow x\overline{E}y$

Второй случай: $x \sim_G y$, так как G не связен, то $\exists w : \begin{cases} x \nsim_G w \\ y \nsim_G w \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow xw,\ yw \notin E \Rightarrow xw,\ yw \in \overline{E} \Rightarrow x \sim_{\overline{G}} y$

11. Доказать:

$$\left.\begin{array}{c}(n,\ m)\text{ - граф } G\\ n=15\\ \forall x\ d(x)\geqslant 7\end{array}\right|\Rightarrow G\text{ связен}$$

Рассмотрим произвольные x и y и допустим $x \nsim y \Rightarrow (xy \notin E)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \notin N(x) \cup N(y) \\ y \notin N(x) \cup N(y) \end{cases}$$

$N(x) \cup N(y) \subseteq V \backslash \{x,\ y\}$

$|N(x)| + |N(y)| = |N(x) \cup N(y)| \leqslant 15 - 2 = 13$

Так как $|N(x)| \geqslant 7 \wedge |N(y)| \geqslant 7 \Rightarrow 7 + 7 - |N(x) \cap N(y)| \leqslant 13 \Rightarrow$
$\Rightarrow N(x) \cap N(y) \neq \varnothing$

Семинар 18 апреля

Задача 12. Уединённая $\Rightarrow$ степень не больше 3. Каждая вершина соединена хотя бы с тремя уединёнными.

Возьмём любую вершину x. У неё должно быть хотя бы 3 уединённых соседа, пусть среди них есть уединённая вершина y. У любой уединённой вершины степень не больше 3 и она имеет хотя бы 3 уединённых соседа, значит все её соседи являются уединёнными, то есть вершина x является уединённой. Получается, что любая вершина является уединённой.

Построим такой граф на 100 вершинах. Можно привести в приимер 25 полных графов на 4 вершинах

Задача 13. 1 случай. Если граф полный, то очевидно 2 случай. Граф не полный $G \ncong K_n,\ n \geqslant 4 \Rightarrow \exists x,\ y\ \neg xEy$

$|N(x)| \geqslant \frac{n}{2};\ |N(y)| \geqslant \frac{n}{2}$

$|N(x) \cup N(y)| \leqslant n-2$, так как $x,\ y \notin N(x) \wedge x,\ y \notin N(y) \Rightarrow$
$\Rightarrow x,\ y \notin N(x) \cup N(y)\ |N(x) \cup N(y)| = |N(x)| + |N(y)| - |N(x) \cap N(y)|$
$|N(x)| + |N(y)| \geqslant n \Rightarrow n-2 \geqslant n - |N(x) \cap N(y)| \Rightarrow |N(x) \cap N(y)| \geqslant 2 \Rightarrow \exists u,\ v$ (вершины), такие что:
$xEv \wedge vEy \wedge yEu \wedge uEx \cong C_4$, ч.т.д.

Утверждение 1: если $(n,\ m)$ - граф G связен, то $m \geqslant n-1$
Утверждение 2: $\forall (n,\ m)$ - графа G, $m \leqslant C_n^2$
Утверждение 3: Если G не связен, то $\overline{G}$ связен (см. задачу 10)
Утверждение 4: $\forall (n,\ m)$ - графа G. $\overline{G}$ есть $(m,\ C_n^2 - m)$ - граф

Задача 14. Допустим есть несвязный $(n,\ m)$ - граф G. Тогда связно его дополнение, являющееся $(n,\ C_n^2 - m)$ граф $\overline{G}$, значит для него выполнятеся $C_n^2 - m \geqslant n-1 \Rightarrow \dfrac{n(n-1)}{2} - m \geqslant n-1 \Rightarrow m \leqslant (n-1)(\frac{n}{2}-1) \Rightarrow$
$\Rightarrow m \leqslant \dfrac{(n-1)(n-2)}{2} = C_{n-1}^2$

Утверждение 5: Если $(n,\ m)$ - граф G не связен, то $m \leqslant C_{n-1}^2 < C_n^2$. Эта оценка неулучшаема (оптимальна). Это означает, что:
$\forall n \geqslant 2\ \exists$ несвязный $(n,\ C_{n-1}^2)$ - граф G

Задача 15. Пусть есть две вершины $x \neq y$ степени 5.
1 случай. Пусть они смежные (то есть xEy). Рассмотрим вершины, с которыми они связаны. Рассмотрим $\big(N(x)\backslash\{y\}\big) \cap \big(N(y)\backslash\{x\}\big)$
$|N'(x)| = |N(x)\backslash\{y\}| = |N(y)\backslash\{x\}| = N'(y) = 5-1 = 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow |N'(x) \cup N'(y)| \leqslant |V_G| - 2 = 9 - 2 = 7 \Rightarrow |N'(x) \cap N'(y)| \geqslant 1 \Rightarrow$
есть цикл. Противоречие.
2 случай. $x,\ y \notin N(x) \cup N(y)$
$|N(x) \cup N(y)| \leqslant 9 - 2 = 7$
$\underbrace{2|N(x)|}_{=10} - |N(x) \cap N(y)|$
$|N(x) \cap N(y)| \geqslant 3 \Rightarrow$ найдётся цикл.

Задача 16. $n \geqslant 2 \wedge m = n-1$
Лемма о рукопожатиях: $2(n-1) = \sum\limits_{x \in V} d(x)$
Пусть $t :=$ число вершин степени 1.
Тогда $2(n-1) = \sum\limits_{x \in V \wedge d(x) \geqslant 2} d(x) + t$. Хотим $t \geqslant 2$
Заметим $\sum\limits_{x \in V} d(x) \geqslant 2(n-t)$. То есть
$2(n-1) \geqslant 2(n-t) + t$
$2n - 2(n-1) \leqslant t \Rightarrow 2 \leqslant t$ ч.т.д.

Задача 17. Число вершин степени $2 = 0$, степени $1 = t$
$2(n-1) = \sum\limits_{x \in V} d(x) = t + \sum\limits_{x \in V \wedge d(x) \geqslant 3} d(x)$
$2(n-1) \geqslant t + 3(n-t) \Rightarrow 2n - 2 \geqslant t + 3n - 3t \Rightarrow$
$\Rightarrow -n-2 \geqslant -2t \Rightarrow t \geqslant \dfrac{n+2}{2} = \dfrac{n}{2} + 1 > \dfrac{n}{2}$, ч.т.д.

Задача 18. Возьмём остовное дерево в нашем графе. В любом дереве с количеством вершин более 2 есть хотя бы две вершины степени 1, можно удалить любую из них. Если вершина одна, то связность при удалении не потеряется.

Семинар 25 апреля

Задача 19. Проверить какой-нибудь граф на двудольность.

В двудольном графе нет циклов нечётной длины. Разбиваем множество вершин на:

$$V_1 = \{x \in V \mid d(z,\ x) \equiv 1 \pmod 2),\ V_2 = \{x \in V \mid d(z,\ x) \equiv 0 \pmod 2)\}\}$$

Разбирали на доске. Делали BFS по всем покомпонентам связности.

Задача 20. Доказать, что всякое дерева порядка $\geqslant 2$ двудольно. Сколько различных (правильных) раскрасок в 2 цвета есть у дерева? А у произвольного графа?

По определению дерево является связным графом без циклов, значит в нём нет циклов нечётной длины, оно является двудольным.

Одну раскраску получаем из двудольности, будет вторая - её инверсия. То есть таких раскрасок не меньше 2. Зафиксируем вершину z, возьмём произвольную вершину $x \neq z$. Пусть существуют две раскраски такие, что цвет z в них одинаков, а x меняется. Тогда рассмотрим простой путь между z и x, такой путь единственный, так как это вершины дерева. Цвет каждой вершины на пути должен чередоваться, иначе раскраска некорректна. Получается, что вершина, являющаяся соседом x имеет определённый цвет, зависящий от цвета z, тогда и цвет вершины x задан однозначно. Получается, что цвет одной вершины однозначно задаёт раскраску всего графа. Так как цветов всего 2, то столько раскрасок и будет.

Допустим G k-связен и G двудольный. Пусть $\nu(G) :=$ #раскрасок G в 2 цвета
Тогда G не двудольный и
$|V_G| > 1 \Rightarrow \nu(G) = 0$
$|V_G| = 1 \Rightarrow \nu(G) = 2$
$\nu(G) = \nu(G_1) \cdot \nu(G_2) \ldots \nu(G_k)$
В каждой компоненте связности можно выделить остовное дерево. Каждая раскраска графа как-то раскрашивает дерево, а у дерева есть всего две

расраски.
Вывод: у каждой связной компоненты ровно две раскарски.
Тогда $\nu(G) = 2^k$
Ответ: $\nu(G) = \begin{cases} 0, & |V_G| > 1 \wedge G \text{ не двудольный} \\ 2^k, & k = \#\text{компонент связности} \end{cases}$

Задача 21. У каждого члена клуба есть ровно один друг и ровно один враг. Можно ли разбить участников на две комнаты так, чтобы в каждой комнате не было ни друзей, ни врагов.

$v =$ члены клуба.
$xEy \Leftrightarrow xE_1y \vee xE_2y$, то есть они друзья или враги.
$E = E_1 \sqcup E_2$
$\forall x\ d(x) = d_1(x) + d_2(x) = 1 + 1 = 2$
Пусть в таком графе есть цикл нечётной длины:

$$x_1E_1x_2 \wedge x_2E_2x_3 \dots x_{n-1}E_2x_n \wedge x_nE_1x_1$$

Получается, что у вершины x_1 два друга или два врага, что противоречит условию, значит наш граф двудольный и требуемое разбиение существует.

Задача 22.

Рассмотрим двудольный граф. В первой доли находятся ученики класса "А", во второй - ученики класса "Б".
$xEy \leftrightarrow x,\ y$ подрались.
$\forall x \in A\ d(x) = 6$
Допустим $\exists k\ \forall y \in G\ d(y) = k$, хотим противоречие.
$\#\text{ребёр} = \sum\limits_{x \in A} d(x) = \sum\limits_{x \in B} d(x)$
Однако $\sum\limits_{x \in A} d(x) = 6 \cdot 22 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11$
$\sum\limits_{y \in B} = 21k = 3 \cdot 7 \cdot k$. Семеёрки нет в сумме степеней вершин A, значит такие суммы совпасть никак не могут. Противоречие.

Задача 23.

Полустепень исхода: $d_+(x) = \Big|\{y \in V \mid xAy\}\Big|$
Пусть x_0 - вершина с наибольшей степенью исхода. $d_+(x_0) = k$
То в вершины $y_1, \dots,\ y_k$ ведут стрелки из x_0.
Рассмотрим произвольное z:

1. x_0Az, тогда всё хорошо.

2. zAx_0. Сравним каждый y_i с этим z.

    2.1. $\forall i\ zAy_i \Rightarrow d_+(z) \geqslant k+1 > d(x_0) \Rightarrow \perp$

    2.2. $\exists j\ y_jAz \Rightarrow \mathrm{dist}(x_0,\ z) \leqslant 2$

Семинар 23 мая

Задача 14*.

Последовательность $a_n = \ln(210+n)$.
Знаем:
$\ln(210) \approx a_0 = 5,347108$
$\ln(212) \approx a_2 = 5,356586$
$\ln(213) \approx a_3 = 5,361292$
$\ln(214) \approx a_4 = 5,365976$
Также знаем:

$$0 = \Delta^4 a_n = a_{n+4} - 4a_{n+3} + 6n_{n+2} - 4a_{n+1} + a_n$$

Подставим $n = 0$:

$$\Delta^4 a_0 = a_4 - 4a_3 + 6a_2 - 4a_1 + a_0 = 0 \Rightarrow a_1 = \frac{a_4 - 4a_3 + 6a_2 + a_0}{4} \approx 5,351858$$

Задача 15. а.

$\forall n\ a_n = \dfrac{1}{n+1} \Rightarrow a_{n+1} = \dfrac{1}{n+2}$
$n = \frac{1}{a_n} - 1,\ a_{n+2} = \dfrac{1}{\frac{1}{a_n}+1} \Rightarrow a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_n+1}$

Задача 15. б.

$\forall n\ a_n = \sqrt{n}$
$n = a_n^2$
$a_{n+1} = \sqrt{a_n^2+1}$

Задача 15. в.

$\forall n\ a_n = P(n),\ \deg P = 3$
$0 = \Delta^4 a_n = a_{n+4} - 4a_{n+3} + 6a_{n+2} - 4a_{n+1} + a_n \Rightarrow$
$\Rightarrow a_{n+4} = 4a_{n+3} - 6a_{n+2} + 4a_{n+1} - a_n$

Задача 15. г.

$3a_{n+2} = 6a_{n+1} - 3a_n + Q(n),\ \deg Q(n) = 2$
$3(a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n) = Q(n)$
$3(\Delta^2 a_n) = Q(n)$
$\Delta^3(\Delta^2 a_n) = \Delta^3 Q(n) = 0$
$\Delta^5 a_n = 0 \Rightarrow 0 = a_{n+5} - 5a_{n+4} + 10a_{n+3} - 10a_{n+2} + 5a_{n+1} - a_n$

Задача 15. д.

$a_n = \dfrac{n}{n+1}$
$(n+1)a_n = n$
$a_n = n(1-a_n) \Rightarrow n = \dfrac{a_n}{1-a_n}$
$a_{n+1} = \dfrac{n+1}{n+2} = \dfrac{\frac{a_n}{1-a_n}+1}{\frac{a_n}{1-a_n}+2} = \dfrac{\frac{1}{1-a_n}}{\frac{2-a_n}{1-a_n}} = \dfrac{1}{2-a_n}$

Задача 16.

$\forall n\ a_{n+2} = 7a_{n+1} - 2a_n + 4 \Rightarrow a_{n+3} = 7a_{n+2} - 2a_{n+1} + 4$
$a_{n+3} - a_{n+2} = -7a_{n+1} + 2a_n - 4 + 7a_{n+2} - 2a_{n+1} + 4$
$a_{n+3} = 8a_{n+2} - 9a_{n+1} + 2a_n$

Добавим начальные условия: $\begin{cases} a_{n+2} = 7a_{n+1} - 2a_n + 4 \\ a_0 = -3,\ a_1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{n+3} = 8a_{n+2} - 9a_{n+1} + 2a_n \\ a_0 = -3 \\ a_1 = 5 \\ a_2 = 7a_1 - 2a_0 + 4 = 45 \end{cases}$

Задача 17.

$F_n = \dfrac{\phi^n - (-\phi)^{-n}}{\sqrt{5}}$, где $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$
$k \leqslant n \Rightarrow F_n^2 - F_{n-k}F_{n+k} = (-1)^{n+k}F_k^2$

Распишем левую часть:

$$\frac{\left(\phi^n-(-\phi)^{-n}\right)^2}{5}-\frac{\left(\phi^{n-k}-(-\phi)^{-n+k}\right)\left(\phi^{n+k}-(-\phi)^{-n-k}\right)}{5}=$$

$$=\frac{\phi^{2n}-2\phi^n(-\phi)^{-n}+(-\phi)^{-2n}-\phi^{n-k}(-\phi)^{n+k}+\phi^{n-k}(-\phi)^{-n-k}-}{5}$$

$$\frac{+\phi^{n+k}(-\phi)^{-n+k}-(-\phi)^{-n+k}(-\phi)^{-n-k}}{5}=$$

$$=\frac{-2(-1)^n+(-1)^{n-k}\phi^{2k}+(-1)^{n-k}(-\phi)^{-2k}}{5}=$$

$$=\frac{-2(-1)^n+(-1)^{n-k}(\phi^{2k}+(-\phi)^{2k})}{5}=(-1)^{n-k}F_k^2$$

Задача 18.

$S\vec{a}=\lambda\vec{a}\Rightarrow(S-\lambda)\vec{a}=0\Leftrightarrow\vec{a}\in\ker(S-\lambda)\Leftrightarrow\langle(1,\ \lambda,\ \lambda^2,\ \lambda^3,\dots)\rangle$
$(S-\lambda)a_n=0$
$a_{n+1}=\lambda a_n\Leftrightarrow\vec{a}=(c,\ \lambda c,\ \lambda^2c,\dots)\ \Delta\vec{a}=\lambda\vec{a}$
$(S-1)\vec{a}=\lambda\vec{a}$
$\big(S-(\lambda+1)\big)\vec{a}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{a}\in\langle(1,\ \lambda+1,\ (\lambda+1)^2,\dots)\rangle$
$\sum\vec{a}=\lambda\vec{a}$

$$\sum\vec{a}=(0,\ a_0,\ a_0+a_1,\ a_0+a_1+a_2)\Rightarrow\begin{cases}0=\lambda a_0\\ a_0=\lambda a_1\\ a_0+a_1=\lambda a_2\\ a_0+a_1+a_2=\lambda a_3\\ \dots\end{cases}$$

Допустим $\lambda=0\Rightarrow\forall i\ a_i=0$
Пусть $\lambda\neq0\Rightarrow\lambda a_0=0\Rightarrow a_0=0\Rightarrow\lambda a_1=0\Rightarrow a_1$ и т.д.
Получаем $\forall\lambda\ \vec{a}=\vec{0}$

Семинар 30 мая

Задача 19. a.

$$\begin{cases} a_{n+2} = 3a_{n+1} + 4a_n \\ a_0 = 5 \\ a_1 = -2 \end{cases}$$

$x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow (x-4)(x+1) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 4 \\ x_2 = -1 \end{array}\right.$

$$\begin{cases} a_0 = c_1 + c_2 = 5 \\ a_1 = c_1 z_1 + c_2 z_2 = 4c_1 - c_2 = -2 \end{cases}$$

$4c_1 + 4c_2 = 20 \Rightarrow 5c_2 = 22,\ c_2 = \dfrac{22}{5},\ c_1 = 5 - c_2 = \dfrac{25-22}{5} = \dfrac{3}{5}$

Итак, ответом является $a_n = \frac{3}{5}4^n + \frac{22}{5}(-1)^n$

Задача 19. b.

$$\begin{cases} a_{n+2} = -6a_{n+1} - 9a_n \\ a_0 = 5 \\ a_1 = 2 \end{cases}$$

$x^2 + 6x + 9 = 0 \Rightarrow x = -3$. Домножим многочлен на x^{n+1}, получаем

$$\begin{cases} x^{n+3} + 6x^{n+2} + 9x^{n+1} = 0 \\ \text{корень -3 кратности 2} \\ \text{корень 0 кратности } n+1 \end{cases}$$

Продифференцируем уравнение:

$$(n+3)x^{n+2} + 6(n+2)x^{n+1} + 9(n+1)x^n = 0$$

Такое уравнение имеет корень -3 кратности 1

$$\begin{cases} u + v = 5 \\ ux_1 + v(n+1)x_1 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u + v = 5 \\ ux_1 + 2vx_1 = -2 \\ -3u - 6v = -2 \end{cases}$$

Не успел дальше

Задача 19. c.

$$\begin{cases} a_{n+2} = 2a_{n+1} - 3a_n \\ a_0 = 5 \\ a_1 = -2 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2x + 3 = 0,\ D = 4 - 12 = -8 = (i2\sqrt{2})^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1 + i\sqrt{2} \\ x_2 = i - i\sqrt{2} \end{array}\right.$$

$$a_n = ux_1^n + vx_2^n \Rightarrow \begin{cases} a_0 = u + v = 5 \\ a_1 = u(1+\sqrt{2}) + v(1+\sqrt{2}) = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u + v = 5 \\ u + v + i\sqrt{2}(u - v) = -2 \end{cases} \Rightarrow i\sqrt{2}(u-v) = -7 \Rightarrow u - v = i\frac{7}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u = \frac{10 + 7i\sqrt{2}}{4},\ v = \frac{10 - 7i\sqrt{2}}{4}$$

Задача 20.

$$\begin{cases} a_{n+3} = 3a_{n+2} + a_n \\ a_0 = 1 \\ a_1 = 2 \\ a_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 4 = 0$$

$$(x+1)(x-2)^2 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 2 \end{array}\right.$$

Домножим на x^{n+1}:

$$x^{n+4} = 3x^{n+3} - 4x^{n+1} \overset{\frac{d}{dx}}{\Rightarrow} (n+4)x^{n+3} = 3(n+3)x^{n+2} - 4(n+1)x^n$$

$$ux_1^n + vx_2^n + w(n+1)x_2^n \Rightarrow \begin{cases} 1 = a_0 = u + v + w \\ 2 = a_1 = ux_1 + vx_2 + 2wx_2 \\ 3 = a_2 = ux_1^2 + vx_2^2 + 3wx_2^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = a_0 = u + v + w \\ 2 = a_1 = -u + 2v + 4w \\ 3 = a_2 = u + 4v + 12w \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 12 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 11 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{23}{18} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = -\frac{1}{9} \\ v = \frac{23}{18} \\ w = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

Задача 21*.

$$\begin{cases} a_n = 3 \\ a_{n+1} = (n+1)a_n + \sqrt{n+1} \end{cases}$$

Рассмотрим $b_{n+1} = (n+1)b_n \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = 1b_0 \\ b_2 = 2 \cdot 1b_0 \\ b_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1b_0 \\ \dots \\ b_{n+1} = (n+1)!b_0 \end{cases}$

Рассмотрим более общий случай: $a_{n+1} = f(n)a_n + g(n) \Rightarrow$

$$\Rightarrow b_{n+1} = f(n)b_n \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = f(0)b_0 \\ b_2 = f(1)f(0)b_0 \\ b_3 = f(2)f(1)f(0)b_0 \\ \dots \\ b_{n+1} = \prod\limits_{k=0}^{n} f(k) \cdot b_0 \end{cases}$$

Обозначим $\prod\limits_{k=0}^{n} f(k)$ как $\prod f(n+1)$, при этом $\prod f(0) = 1$

$$b_n = \prod f(n) \cdot \overset{=b_0}{\beta}$$

Вариация постоянной. Ищем решение в виде $a_n = \alpha(n) \prod f(n)$. Тогда

$$\alpha(n+1) \cdot \prod f(n+1) = f(n)\alpha(n) \prod f(n) + g(n)$$

Заметим, что $f(n) \prod f(n) = \prod f(n+1)$. Тогда верно

$$\big(\alpha(n+1) - \alpha(n)\big) \prod f(n+1) = g(n) \Rightarrow \Delta\alpha(n) = \frac{g(n)}{\prod f(n+1)}$$

$$\alpha(n)-\alpha(0)=\sum\Delta\alpha(n)=\sum_{m=0}^{n-1}\frac{g(n)}{\prod\limits_{k=0}^{m}f(k)}\Rightarrow\alpha(n)=\alpha(0)+\sum_{m=0}^{n-1}\frac{g(n)}{\prod\limits_{k=0}^{m}f(k)}$$

Тогда $a_0=\alpha_0\prod f(0)=\alpha_0\Rightarrow\alpha_0=a_0$
В нашем случае:

$$\alpha_n=\prod_{k=0}^{n-1}f(k)\cdot\left(a_0+\sum_{m=0}^{n-1}\frac{g(m)}{\prod\limits_{k=0}^{m}f(k)}\right)=n!\left(3+\sum_{m=0}^{n-1}\frac{\sqrt{n-1}}{(m+1)!}\right)=$$

$$=3n!+\sum_{m=0}^{n-1}\sqrt{m+1}n^{(n-m+1)}$$

Семинар 6 июня

Задача 1.

Доказать $A(S),\ B(S)\neq 0\Rightarrow A(S)B(S)\neq 0$
Положим $A(S)B(S)=C(S)=\sum\limits_{n}c_nS^n$, тогда $c_n=\sum\limits_{k=0}^{n}a_tb_{n-k}=[C(S)](s^n)$
По ПНЧ, возьмём наименьшие такие $i,\ j$, что $a_i\neq 0\wedge b_j\neq 0$

$$c_{i+j}=\sum_{k=0}^{i+j}a_kb_{i+j-k}=\sum_{k=i}^{i+j}a_kb_{i+j-k}=a_ib_j\neq 0$$

Так как при $k<i$ $a_k=0$, а при $k>i$ $b_{i-k+j}=0$. Задача решена.

Задача 2.

Доказать $sA(s)=1\Rightarrow\perp$
$sA(s)=s\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_ns^n=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}=1?$
Распишем полученную последовательность: $(0,\ a_0,\ a_1,\dots)$. Чтобы выполнялось равенство, должно выполняться

$$(0,\ a_0,\ a_1,\dots)=(1,\ 0,\ 0,\dots)\Rightarrow 1\neq 0\Rightarrow\perp$$

Задача 3. d.

Доказать $\ln(1+s)=\sum\limits_n(-1)^n\dfrac{s^{n+1}}{n+1}$

Возьмём такую $B(S)$, что $\ln(\frac{1}{1-B(S)})=\ln(1+s)\Rightarrow\frac{1}{1-B(S)}=1+s\Rightarrow$

$\Rightarrow B(S)=1-(1+s)^{-1}=1-\sum\limits_n\dbinom{-1}{n}s^n=1-\sum\limits_n(-1)^ns^n=\sum\limits_n(-1)^ns^{n+1}$

Было: $[A(B(S))](s^n)=\sum\limits_{k=0}^n a_k\sum\limits_{\substack{x_1+\dots+x_k=n\\x_i\geqslant1}}b_{x_1}b_{x_2}\dots b_{x_k}$

Тогда после подстановки получим функцию:

$$\sum_n\left(\sum_{k=0}^n\frac{1}{k}\sum_{\substack{x_1+\dots+x_k=n\\x_I>0}}(-1)^{x_1-1}-\dots(-1)^{x_k-1}\right)s^n=\sum_{k=1}^n\frac{(-1)^{n-k}}{k}\sum_{\substack{x_1+\dots+x_k=n\\x_I>0}}1$$

По формуле Муавра: $\sum\limits_{k=1}^n\dfrac{(-1)^{n-k}}{k}C_{n-1}^{k-1}=\sum\limits_{k=1}^n\dfrac{(-1)^{n-k}}{k}\dfrac{(n-1)!}{(n-k)!k!}(-1)^{n-k}=$
$=\dfrac{1}{n}\sum\limits_n C_n^k(-1)^{n-k}$

Вспоминаем: $\big(1+(-1)\big)^n=\sum\limits_{k=0}^n C_n^k1^k(-1)^{n-k}=\sum\limits_{k=1}^n C_n^k(-1)^{n-k}+(-1)^n=0$

Тогда $\frac{1}{n}\sum_n C_n^k(-1)^{n-k}=\frac{1}{n}(0-(-1)^n)=\frac{(-1)^{n-1}}{n}$. Это коэффициент при n, какой и требуется формулой.

Задача 4. b.

Доказать, что при $A(0)=B(0)=0$:

$$\left(\int A\right)(B(t))=\int(A(B(t))\cdot B'(t))\Rightarrow(A(B(t)))'=A'(B(t))\cdot B'(t)$$

Определение: $(A(s))'=\left(\sum\limits_n a_ns^n\right)=\sum_n(n+1)a_{n+1}s^n$

$\int A(s)=\sum\limits_n\dfrac{a_n}{n+1}s^{n+1}$

Было $\left(\int A(s)\right)' = A(s)$
Утверждение:
Если $A(0) = 0$, то $\exists$ производящая функция $\hat{A}(s) \quad \int \hat{A} = A$
Так как $A(0) = 0$, то $A(s) = \int A'(s)$
Тогда $(A(B(t)))' = \big((\int A')(B(t))\big)' = (\int(A'(B(t))B'(t)))' = A'(B(t))B'(t)$

Задача 6. a.

$\vec{a} = (1,\ 2,\ 3, \dots),\ A(s) = \sum\limits_n a_n s^n = \sum\limits_n (n+1)s^n$

Последовательность совпадает с $\left(\sum\limits_n s^n\right)' = \left(\frac{1}{1-s}\right)' = \frac{1}{(1-s)^2}$ - производящая функция натурального ряда.

Задача 6. b.

$A(s) = \sum\limits_n (n+1)(n+2)s^n = 2 + 6s + 12s^2 + 20s^3 + \dots$

$(2s + 3s^2 + 4s^3 + \dots + (n+1)s^n)' = \left(\sum\limits_n (n+2)s^{n+1}\right)' = \left(\sum\limits_n (n+1)s^n\right)' =$

$= \left(\left(\sum\limits_n s^n\right)'\right)' = \left(\frac{1}{1-s}\right)'' = \frac{2}{(1-s)^3}$

Семинар 13 июня

Задача 7.

$A(s) = \sum\limits_n^{\infty} a_n s^n$

Задача 7. a.

$\vec{b} = a_0 + a_1,\ a_1 + a_2,\ a_2 + a_3 \dots$
$B(s) = \sum\limits_n (a_n + a_{n+1})s^n = \sum\limits_n a_n s^n + \sum\limits_n a_{n+1} s^n$

$$\sum_n a_{n+1}s^n = a_1 + a_2 s + a_3 s^2 + \cdots = \frac{A(s) - a_0}{s} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow B(s) = \frac{A(s)(s+1) - A(0)}{s} = A(s) + \frac{A(s) - A(0)}{s}$$

Задача 7. b.

$\vec{b} = a_0,\ a_0 + a_1,\ a_0 + a_1 + a_2 \ldots$
$b_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \cdot 1^{n-k} = [s^n](A(s) \cdot (1 + s + s^2 + \ldots)) = [s^n]A(s)\dfrac{1}{1-s}$
Воспользовались формулой произведения производящих функций. Тогда:
$B(s) = \dfrac{A(s)}{1-s}$.

Задача 7. c.

$\vec{b} = a_0,\ a_1\alpha,\ a_2\alpha^2 \ldots$
$B(s) = a_0 + a_1\alpha s + a_2\alpha^2 s^2 + a_3\alpha^3 s^3 + \cdots = \sum\limits_n a_n \alpha^n s^n = \sum\limits_n a_n(\alpha s)^n = A(\alpha s)$

Задача 7. d.

$\vec{b} = a_0,\ a_2,\ a_3 \ldots$
$A(-s) = a_0 - a_1 s + a_2 s^2 - a_3 s^3 + \ldots$
$A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + \ldots$
$A(-s) + A(s) = 2(a_0 + a_2 s^2 + a_4 s^4 + a_6 s^6) \Rightarrow$
$\Rightarrow \dfrac{A(s) + A(-s)}{2} \sim a_0,\ 0,\ a_2,\ 0,\ a_4,\ 0,\ a_6 \ldots$, тогда:
$\dfrac{A(\sqrt{s}) + A(-\sqrt{s})}{2} = \sum\limits_n a_{2n}(\sqrt{s})^{2n} = \sum\limits_n a_2 n s^n = a_0 + a_2 s + a_4 s^2 + a_6 s^4.$
Вообще корень не является производящей функцией, но в данном случае все нецелые степени занулились, поэтому мы можем считать это валидной производящей функцией.

Задача 9.

$$\begin{cases} a_0 = 1,\ a_1 = 0,\ a_2 = 0 \\ a_{n+3} = -3a_{n+2} - 3a_{n+1} - a_n \end{cases} \Rightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x+1)^3$$

$$\begin{aligned} -3sA(s) &= -3sa_0 - 3a_1 s^2 - 3a_2 s^3 - 3a_3 s^4 - \ldots \\ -3s^2 A(s) &= \qquad\quad -3a_0 s^2 - 3a_1 s^3 - 3a_2 s^4 - \ldots \\ -s^3 A(s) &= \qquad\qquad\qquad\quad -a_0 s^3 \quad - a_1 s^4 - \ldots \end{aligned}$$

Получили $M(s) + a_3 s^3 + a_4 s^4 + a_5 s^5$
$A(s)(-3s - 3s^2 - s^3) = M(s) + A(s) - a_0 - a_1 s - a_2 s^2$
$A(s) = \dfrac{a_0 + a_1 s + a_2 s - M(s)}{1 + 3s + 3s^2 + s^3} = \dfrac{1 + 3s + 3s^2}{1 + 3s + 3s^2 + s^3}$

Задача 10.

$a_n :=$ #решений $(*)\begin{cases} n = 12x + 7y + 5z \\ x,\ y,\ z \in \mathbb{N} \end{cases}$

$a_n = b_n^{12,\ 7,\ 5};\quad (b_n^{12}) = (\overset{0}{1},\ \overset{1}{0},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\ldots,\ \overset{10}{0},\ \overset{11}{0},\ \overset{12}{1},\ldots)$

$$B^{12}(s) = \sum_n s^{12n} = \frac{1}{1-s^{12}},$$

$$B^5(s) = \sum_n s^{5n} = \frac{1}{1-s^5},$$

$$B^7(s) = \sum_n s^{7n} = \frac{1}{1-s^7}$$

Итак, $b_n^{12,\ 7,\ 5} = \sum\limits_{k+l+m=n} b_k^{12}\cdot b_l^7 \cdot b_m^5$

Вспомним формулу произведения $\Big(A(s)\cdot B(s)\Big)[s^n] = \sum\limits_{k=0}^{n} a_n b_{n-k} = \sum\limits_{k+m=n} a_k b_m$

Тогда $\sum\limits_{k+l+m=n} b_k^{12}\cdot b_l^7\cdot b_m^5 = [s^n]\Big(B^{12}(s)B^7(s)B^5(s)\Big) \Rightarrow$

$$\Rightarrow A(s) = \frac{1}{(1-s^{12})(1-s^7)(1-s^5)}$$