

Лекции по математическому анализу 4

МОДУЛЬ.

Андрей Тищенко

2023/2024

Лекция 12 апреля.

Сходимость функциональных рядов

$$f_n(x), \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in E \subseteq \mathbb{R}$$
$$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$$

Определение: $f_n(x) \xrightarrow{E} f(x) \Leftrightarrow \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Пример: Закон больших чисел. $\eta_n(\omega) = \frac{\xi_1(\omega) + \dots + \xi_n(\omega)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E\xi_1 = a$ почти наверное. $P\{\omega : \eta_n(\omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a\} = 1$

Вопрос: можно ли переставлять операторы $\lim_{n \rightarrow \infty}, \lim_{x \rightarrow x_0}, \frac{d}{dx}, \int dx$?

То есть $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \stackrel{?}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} f_n(x) \stackrel{?}{=} \frac{d}{dx} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) dx \stackrel{?}{=} \int \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx$$

Нет, нельзя.

Пример 1. $f_n(x) = x^n, \quad E = [0; 1], \quad x_0 = 1$

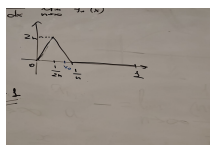
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow 1-} x^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \lim_{x \rightarrow 1-} \begin{pmatrix} 0, & x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{pmatrix} = 0$$

Теорема: $f_n(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in E$ и $f_n(x) \xrightarrow{E} f(x)$, то $f(x)$ непрерывна в точке x_0

Пример 2. $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$, $x \in \mathbb{R}$, $x_0 = 0$
 $f(x) \equiv 0$ $f'(0) = 0$
 $f'_n(x) = \frac{\cos nx}{n} \cdot n = \cos nx|_{n_0=0} \equiv 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$

Теорема: $f_n(x)$ непрерывна и дифференцируема на $[a; b]$
 $\exists c \in [a; b] : f_n(c)$ сходится
 $f'_n(x) \xrightarrow{[a; b]}$, тогда
 $f_n(x) \xrightarrow{[a; b]}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} f_n(x) = \frac{d}{dx} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$



Пример 3. $f_n(x) =$
 $\forall x \in [0; 1] f_n(x) \longrightarrow 0$
 $\int_0^1 f_n(x) dx = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$
 $\int_0^1 f(x) dx = 0 \neq 1$

Теорема: $f_n(x) \xrightarrow{[a; b]} f(x)$, то
 $\forall c \int_c^x f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_c^x f(t) dt$

Сходимость функциональных рядов

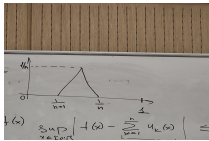
$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x), x \in E$$

Ряд сходится равномерно:

$$\sup_{x \in E} \left| \sum_{k=1}^n u_k(x) - S(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Теорема: (признак Вейерштрасса) если последовательность $u_n(x)$ мажорируется числовой последовательностью $a_n : \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in E |u_n(x)| \leq a_n$.

Тогда из сходимости $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ следует сходимость $u_n(x)$ на E .



Пример: $u_n(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x) = f(x)$

$$\sup_{x \in [0; 1]} \left| f(x) - \sum_{k=1}^n u_k(x) \right| \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\sup_{x \in [0; 1]} |u_n(x)| = \frac{1}{n} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \text{ расходится.}$$

То есть мы имеем равномерную сходимость, но найти мажорирующую последовательность нельзя.

$$\text{Рассмотрим ряд } \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} ? = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \right)' = \left(\frac{x}{1-x} \right)'$$

Степенные ряды

$$\sum_{n=0}^{+\infty} C_n \cdot (x-a)^n \quad \sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n$$

Лемма. (Абеля)

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n$ сходится при $x = x_1$, то $\forall x_0 : (|x_0| < |x_1|)$ ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n$ сходится

2. $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n$ расходится при $x = x_2$, то $\forall x_0 : (|x_0| > |x_2|)$ ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n$ расходится

$$C_n \cdot x_1^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \text{ограниченна} \Rightarrow \exists M \forall n |C_n \cdot x_1^n| < M$$

$$\text{Доказательство: } 1. \sum_{n=0}^{+\infty} |C_n \cdot x_0^n| = \sum_{n=0}^{+\infty} \left| C_n \cdot x_1^n \cdot \left(\frac{x_0}{x_1} \right)^n \right| \leq M \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} q^n}_{\text{сходится}} \Rightarrow \text{сходится}$$

абсолютно

2. Пусть сходится при $x = x_0 \Rightarrow$ п. 1 \Rightarrow сходится при $x = x_2 \Rightarrow \perp$

Вывод: Возможен один из трёх вариантов

- (a) $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n$ сходится $\forall x \in \mathbb{R}$
- (b) $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n$ сходится только при $x = 0$
- (c) $\exists R : \sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n$ сходится на $(-R; R)$ (множество сходимости),
а на $(-\infty, -R) \cup (R, +\infty)$ расходится. Это R называется
радиусом сходимости степенного ряда.

Теорема: $\forall r : 0 < r < R$ ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n$ сходится равномерно на $[-r, r]$

Доказательство: $\sup_{[-r; r]} \left| \sum_{k=0}^n C_k x^k - \sum_{k=1}^{+\infty} C_k x^k \right| = \sup_{[-r; r]} \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} C_k x^k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |C_k r^k|$, так
как r находится в множестве сходимости, значит $\underbrace{\sum_{k=n+1}^{+\infty} C_k r^k}_{\text{числовой ряд}}$ сходится
абсолютно.

Утверждение: Если ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ сходится и $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k x^k$ имеет радиус сходимости $R = 1$
и $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ существует, то $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$.

Теорема: 1. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_n}{C_{n+1}} \right| = A$, то $R = A$
2. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|C_n|} = B$, то $R = \frac{1}{B}$

Доказательство: 1. $0 < A < +\infty$ $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n \cdot x^n$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_{n+1} x^{n+1}}{C_n x^n} \right| = |x| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_{n+1}}{C_n} \right| = |x| \frac{1}{A}$
 $|x| < A$ сходится по Даламберу
 $|x| > A$ расходится по Даламберу, значит $R = A$
2. $A = +\infty$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_{n+1} x^{n+1}}{C_n x^n} \right| = 0 \Rightarrow \forall x$ по Даламберу сходится
 $R = +\infty$
3. $A = 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_{n+1} x^{n+1}}{C_n x^n} \right| = +\infty \Rightarrow \forall x \neq 0$ расходится.

Лекция 17 апреля

Степенные ряды

$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$. Выполняется одно из трёх.

1. Сходится только при $x = 0$
2. Сходится абсолютно $\forall x$
3. Сходится абсолютно на $(-R; R)$, расходится на $(-\infty; -R) \cup (R; +\infty)$.
 R - радиус сходимости.

Теорема: $\forall r : 0 < r < R_{\text{сх}}$ ряд сходится равномерно на $[-r; r]$

Теорема (Абеля): Если ряд сходится при $x = R$ абсолютно, то на отрезке $[0; R]$ ряд сходится равномерно.

Теорема: Если $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|C_{n+1}|}{|c_n|} (\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_n|}) = A \in \overline{\mathbb{R}}$, то

$$R_{\text{сх}} = \frac{1}{A}$$

Доказательство: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_{n+1} x^{n+1}|}{|c_n x^n|} = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = |x| \cdot A \quad (*)$

1 случай. $A = 0, (*) < 1$, то есть сходимость при любом x ,
то есть $R_{\text{сх}} = +\infty$

2 случай. $A = +\infty (*) = +\infty > 1$, то есть расходимость при любом $x \neq 0$,
то есть $R_{\text{сх}} = 0$

3 случай. $A \in \mathbb{R}^+ |x|A < 1$ сходится, то есть $|x| < \frac{1}{A}$,
 $|x|A > 1$ расходится, то есть $|x| > \frac{1}{A}$
То есть $R_{\text{сх}} = \frac{1}{A}$

Теорема: (Формула Коши-Адамара)

$$R_{\text{сх}} = \frac{1}{\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}}$$

Доказательства не будет.

Вопрос:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x) \stackrel{?}{=} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right)'$$

Это не всегда верно, стоит запомнить данный факт.

$$1. \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x \quad R_1$$

$$2. \sum_{n=0}^{+\infty} c_n n x^{n-1} = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} c_n n x^n \quad R_2$$

$$3. \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1} = x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{n+1} x^n \quad R_3$$

Теорема: $R_1 = R_2 = R_3$

Доказательство: 1. $R_2 \leq R_1 \leq R_3$ (очевидно из коэффициентов, так как $c_n n \geq c_n \geq \frac{c_n}{n+1}$)

Пусть x_1 - точка сходимости 2. то есть сходится $\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n| \cdot |x_1|^n \cdot n$,

тогда по признаку сравнения

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{c_n}{n+1} \right| |x_1|^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |c_n| |x_1|^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |c_n| \cdot |x_1|^n \cdot n$$

Все остальные ряды сойдутся.

2. $R_3 \leq R_2$

Если при x_0 сходится (абсолютно) 3., то при x_0 сходится 2.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{c_n}{n+1} x_1^n \right| - \text{сходится} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists M \forall n \left| \frac{c_n}{n+1} x_1^n \right| \leq M$$

$$\exists x_1 : |x_0| < |x_1| < R_3$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n n x_0^n| = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\left| \frac{c_n}{n+1} x_1^n \right|}_{\leq M} \cdot (n+1)n \cdot \underbrace{\left| \frac{x_0}{x_1} \right|}_{q^n}^n \leq$$

$$\leq M \sum_{n=0}^{+\infty} n(n+1)q^n \text{ сходится по Даламберу } (0 < q < 1)$$

Выводы:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = f(x), \quad D_f = (-R; R)$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n n x^{n+1} = f'(x)$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1} = \int_0^x f(t) dt$$

$f(x)$ - бесконечно число раз дифференцируем.

$$f^{(k)}(0) = c_k \cdot k!$$

Вывод: Если $f(x)$ раскладывается в степенной ряд, то $c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$

Пример: $f(x) \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} - 0}{x - 0} = 0$$

Утверждение: $e^{-\frac{1}{x^2}} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$

$$f^{(k)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(k+1)}(x) - f^{(k+1)}(0)}{x - 0} = 0$$

$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \equiv 0 \neq f(x)$, хотя функция бесконечное число раз дифференцируема.

Ряды Тейлора

Определение: Рядом Тейлора функции бесконечное число раз дифференцируемой в точке $x = a$ называется

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n \quad (*)$$

Теорема: (Достаточное условие) Если $f^{(k)}(x)$ ограничена в совокупности на интервале $(a - R; a + R)$, то $(*)$ верно на $(a - R; a + R)$

Доказательство: ограничена в совокупности означает:

$$\exists M \forall k \forall x \in U_R(a) : |f^{(k)}| \leq M$$

$$\left| \underbrace{\sum_{n=0}^k \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n}_{T_k(x)} - f(x) \right| = \left| \frac{f^{(k+1)}(\xi) \cdot (x-a)^{k+1}}{(k+1)!} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M \cdot R^{k+1}}{(k+1)!} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$$

$$1. \quad y = e^x$$

$$|f^{(k)}(x)| = |e^x| \leqslant e^R$$

$$\forall x \quad e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$2. \quad y = \sin x$$

$$|f^{(k)}(x)| \leqslant 1$$

$$\forall x \quad \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$3. \quad y = \cos x$$

$$\forall x \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

В комплексных числах $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ аналитические функции (для них радиус сходимости выглядит так $|z| < R$)

$$4. \quad y = \ln(1+x), a = 0$$

$$y' = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n, \quad |x| < 1$$

$$\int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x (-1)^n t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$$

$$\text{Но } \ln(1+x) : x \in (-1; +\infty), \text{ а } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} : x \in (-1; 1]$$

$$5. \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n^\alpha x^n \alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)$$

Лекция 19 апреля
Многомерный анализ

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}; \quad f(\vec{x}); \quad \vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$$

Определение: (Коши)

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \forall \vec{x} : \vec{x} \in U_{\delta}(\vec{x}_0)$$

$$|f(\vec{x}) - A| < \varepsilon$$

Определение:

$$\vec{x} \in U_{\delta}(\vec{x}_0) \Leftrightarrow 0 < \rho(\vec{x}, \vec{x}_0) < \delta$$

Определение:

метрическим пространством называется (M, ρ) : $\forall x, y$

$$1 \quad \rho(x, y) = \rho(y, x) \geq 0$$

$$2 \quad \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$3 \quad \forall x, y, z \quad \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$$

Классическая метрика на \mathbb{R}_n

$$\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

Определение: (Гейне)

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = A \Leftrightarrow \forall \vec{x}_k : \vec{x}_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \vec{x}_0 \quad \vec{x}_k \neq \vec{x}_0 \Rightarrow f(\vec{x}_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} A$$

$$\textbf{Определение 1: } \vec{x}_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \vec{x}_0 \Leftrightarrow \forall i : 1 \leq i \leq n \quad x_{i,k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} x_{i,0}$$

$$\textbf{Определение 2: } \vec{x}_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \vec{x}_0 \Leftrightarrow \rho(\vec{x}_k, \vec{x}_0) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$$

Теорема: Определение 1 \Leftrightarrow Определение 2

$$1 \Rightarrow 2$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_{i,k} - x_{i,0})^2} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \quad \text{по арифметике пределов последовательностей}$$

$$1 \Leftarrow 2$$

$$|x_{i,k} - x_{i,0}| \leq \rho(\vec{x}_k, \vec{x}_0) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$$

Замечание 1:

Наследуется вся арифметика пределов

Замечание 2:

Тяжело доказывается сходимость

Там далее примеры были, но нам пофигу, сам там напишешь. ОК, спасибо, Вова.

Определение:

$f(\vec{x})$ называется непрерывной в точке $\vec{x}_0 \Leftrightarrow \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)$

Теорема:

Функция непрерывна на компакте

- 1 ограничена на нём
- 2 достигаются наибольшее и наименьшее значение
- 3 принимает все промежуточные значения

Определение:

Множество называется компактом, если для любого покрытия открытыми множествами существует конечное подпокрытие.

$$K \subset \bigcup_{\alpha} A_{\alpha} \exists \text{ конечный набор } A_{\alpha_1}, \dots, A_{\alpha_m} :$$

$$K \subset \bigcup_{\alpha}^m A_{\alpha_i}$$

Определение:

В \mathbb{R}^n компактами являются ограниченные и замкнутые множества.

$$U_\delta(\vec{x}_0) = \{\vec{x} : \rho(\vec{x}, \vec{x}_0) < \delta\}$$

Определение:

множество A называется открытым $\Leftrightarrow \forall \vec{x} \in A \exists \delta > 0 : U_\delta(\vec{x}) \subset A$

Пример:

$$A \subseteq \mathbb{R} \quad A \text{ открыты} \Leftrightarrow A = \bigcup_{k=1}^{(n)+\infty} (a_k, b_k), \quad a_i, b_i \in \overline{\mathbb{R}}$$

Определение:

множество B называется замкнутым, если \overline{B} - открыто

Теорема:

A_i - открыто, B_i - замкнуто

1 $\bigcup_i A_i$ - открыто

2 $\bigcap_i A_i$ - открыто

3 $\bigcap_i B_i$ - замкнуто

4 $\bigcup_i B_i$ - замкнуто

Пример (2):

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left(0 - \frac{1}{2^n}; 1 + \frac{1}{2^n} \right) = [0, 1]$$

Пример (4):

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n}; 1 - \frac{1}{n} \right] = (0, 1)$$

Доказательство:

$$1 \bigcup_i A_i = A$$

$$\vec{x} \in A \Rightarrow \exists i \vec{x} \in A_i \Rightarrow \exists \delta : U_\delta(\vec{x}) \subset A_i \Rightarrow U_\delta(\vec{y}_0) \subset A$$

$$3 \bigcap_i B_i = \overline{\bigcup_i B_i} - \text{замкнуто}$$

$$4 \bigcup_{i=1}^k B_i$$

Возьмем $\forall \vec{x}_n \in B$ и $\vec{x}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \vec{x}_0 \quad \exists i$ и $\exists n_k$

$$\forall k \vec{x}_{n_k} \in B_i \wedge \vec{x}_{n_k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \vec{x}_0 \Rightarrow \vec{x}_0 \in B_i \Rightarrow \vec{x}_0 \in B$$

Теорема:

множество B замкнуто \Leftrightarrow

$$\forall \vec{x}_k \in B : \vec{x}_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \vec{x}_0 \Rightarrow \vec{x}_0 \in B$$

Доказательство:

” \Rightarrow ”

Предположим противное, то есть B замкнуто, но $\exists \vec{x}_k \in B : \vec{x}_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \vec{x}_0 \wedge \vec{x}_0 \notin B$, то есть $\vec{x}_0 \in \overline{B}$ – открытое

$$\exists \delta : U_\delta(\vec{x}_0) \subset \overline{B}$$

так как $\vec{x}_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \vec{x}_0 \Rightarrow \exists N = N(\delta) : \forall k > N \vec{x}_k \in U_\delta(\vec{x}_0) \subset \overline{B}$ - противоречие.

” \Leftarrow ”

B - замкнуто $\Leftrightarrow \overline{B}$ - открыто. $\vec{y}_0 \in \overline{B} \exists \delta : U_\delta(\vec{y}_0) \subset \overline{B}$

Предположим противное, то есть $\delta_n = \frac{1}{n}$, то $\exists y_n \in U_\delta(\vec{y}_0) \wedge y_n \notin \overline{B}$ (то есть $y_n \in B$) Получаем $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y_0 \Rightarrow y_0 \in B$ - противоречие

Лекция 26 апреля

Дифференцируемость функции многих переменных.

$n = 1$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Leftrightarrow f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \bar{o}((x - x_0))$$

производная дифференциал

$n > 1$

Частные производные:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} := \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

Пример:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = (0)'_x = 0$$

$$\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 0$$

$$\Delta f = \text{линейная функция от } (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n) + \bar{o}(\rho(\vec{x}, \vec{x}_0))$$

Определение: ($n = 2$)

Функции $f(x)$ называется дифференцируемой в точке (x_0, y_0) , если

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0) + \bar{o}\left(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\right)$$

Теорема:

Если $f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0) , то

$$\exists \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$$

$$\text{и } A = \frac{\partial f}{\partial x}, B = \frac{\partial f}{\partial y} \quad (x_0, y_0) \text{ и } f(x, y) \text{ непрерывна в } (x_0, y_0), \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Доказательство:

$$f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) = A \underset{\rightarrow 0}{(x - x_0)} + B \underset{\rightarrow 0}{(y - y_0)} + \underset{\rightarrow 0}{\bar{o}(\rho(\vec{x}, \vec{x}_0))}$$

$$f(x, y_0) = f(x_0, y_0) + A \underset{\rightarrow 0}{(x - x_0)} + \underset{\rightarrow 0}{\bar{o}(|x - x_0|)}$$

Из курса матанализа можно сказать $\exists \frac{\partial f}{\partial x}$ и A равен ему.

Теорема: (достаточное условие дифференцируемости функции)

Если $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ существует в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) и непрерывна в точке (x_0, y_0) , то функция дифференцируема в точке (x_0, y_0)

Пример:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y(x^2 + y^2) - 2x(xy)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^3 - x^2y}{(x^2 + y^2)^2} \Rightarrow \neg \exists \lim$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^3 - xy^2}{(x^2 + y^2)^2} \Rightarrow \neg \exists \lim$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0) &= f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x; y_0) + \\ &\quad = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y \Theta 1) \Delta y \\ &+ f(x_0 + \Delta x; y_0) - f(x_0; y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0) \Delta y + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0) \Delta x + \bar{o}(1) + \\ &\quad = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \Theta 2 \Delta x; y_0) \Delta x \end{aligned}$$

$$+ \Delta y \bar{o}(1) + \Delta x \bar{o}(1), \text{ здесь } 0 < \Theta_1, \Theta_2 < 1$$

$$\text{Докажем, что } \Delta x \cdot \bar{o}(1) = \bar{o}(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \cdot \bar{o}(1) \xrightarrow{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} 0$$

Итак, мы нашли нужные коэффициенты и представили функцию как сумму с нужным порядком малости.

1. Производная сложной функции.

$$f(\vec{x}) \oplus \vec{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$$

$$f(\vec{x}(t)) = g(x)$$

Теорема: ($n = 2$)

Если $f(x; y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0) , $\begin{matrix} x = x(t) \\ y = y(t) \end{matrix}$ дифференцируема

в точке t_0 : $\begin{matrix} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{matrix}$, то

$$g'(t) = \frac{dg(t)}{dt} = \frac{\partial t}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \frac{dx(t)}{dt} \Big|_{t=t_0} + \frac{\partial t}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \frac{dy(t)}{dt} \Big|_{t=t_0} = f'_x x'_t + f'_y y'_t$$

Доказательство:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + f'_x(x-x_0) + f'_y(y-y_0) + \bar{o}\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right) \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} =$$

$$\frac{f(x(t), y(t)) - f(x_0, y_0)}{t - t_0} = f'_x \underbrace{\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}}_{x'_t} + f'_y \underbrace{\frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0}}_{y'_t} + \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} +$$

$$+ \bar{o}(1)$$

$$\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} \xrightarrow{t \rightarrow t_0} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}$$

2. Производная по направлению.

$$\vec{e} \quad |\vec{e}| = 1$$

$$\vec{e} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + e_1 t, x_2 + e_2 t, \dots, x_n + e_n t) - f(x_1, \dots, x_n)}{t}$$

$$\frac{dg(t)}{dt} = \frac{\partial t}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \frac{dx(t)}{dt} \Big|_{t=t_0} + \frac{\partial t}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \frac{dy(t)}{dt} \Big|_{t=t_0} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot e_i =$$

$$= (\nabla \vec{f}, \vec{e}) \in \mathbb{R}$$

При этом $\nabla \vec{f}$ называется градиентом функции f

Получается, что наибольшее значение производной по направлению получается, когда вектор \vec{e} сонаправлен с вектором $\nabla \vec{f}$

Лекция 10 мая.

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

1. Предел + непрерывность + свойства непрерывности.

2. Дифференцируемость \rightarrow не понятно.

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \sum_{i=1}^n A_i(x^i - x_0^i) + o(\rho(\vec{x}; \vec{x}_0))$$

Производная по направлению:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x}_0 + t\vec{l}) - f(\vec{x}_0)}{t}, \quad |\vec{l}| = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} \rightarrow \max, \text{ если } \vec{l} - \text{градиент.}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \frac{dg(t)}{dt} = \frac{d}{dt} (f(\vec{x}_0 + t\vec{l})) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{d(x_i)}{dt}, \text{ где } x_i = x_i^0 + tl_i, \text{ тогда это}$$

равно:

$$\sum_{i=1}^n f'_{x_i} l_i = \langle \text{grad } \vec{f}, \vec{l} \rangle = \text{proj}_{\vec{e}} \text{grad } \vec{f}$$

proj - проекция.

$$\text{Итак, } \frac{\partial f}{\partial \vec{l}} \rightarrow \max \Leftrightarrow \vec{e} \uparrow \text{grad } \vec{f}, \quad \max \frac{\partial f}{\partial \vec{e}} = |\text{grad } \vec{f}|$$

Вывод:

Определение:

Линией уровня функции $y = f(\vec{x})$ называется множество точек $\in \mathbb{R}^n$ таких, что

$$f(\vec{x}) = c, \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

Утверждение:

$\text{grad } f|_{\vec{x}_0}$ перпендикулярен линии уровня $f(\vec{x}) = \underbrace{f(\vec{x}_0)}_c$

$$f(\vec{x}(t)) = c \quad \forall t$$

Запараметризуем линию уровня:

$$\frac{d}{dt} f(\vec{x}(t)) = 0$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dt} = 0 \Rightarrow (\text{grad } f; \vec{v}) = 0 \Rightarrow \text{Перпендикулярно.}$$

Неявно заданные функции

$$y = f(x)$$

$$F(x, y) = 0$$

$$\text{Хотим найти } y = f(x) : \forall x \quad F(x, f(x)) = 0$$

Пример:

$$y = \pm \sqrt{1-x^2} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -\sqrt{1-x^2}, & \frac{1}{2} < |x| \leq 1 \end{cases}$$

Определение:

Функция $F(x, y) = 0$, заданная на $A \subseteq \mathbb{R}^2$

$$\exists y = f(x) \quad D_f = B \subseteq \text{proj}_x A$$

$$\forall x \in B : \quad F(x, f(x)) = 0, \text{ то}$$

$$y = f(x) \text{ называется неявной функцией, определяемой } F(x, y) = 0$$

Лемма:

$F(x, y)$ непрерывна на $U_\xi(x_0) \times U_\eta(y_0)$ и $F(x_0, y_0) = 0 \quad \forall x \in U_\xi(x_0) \quad F(x, y)$ строго монотонна по y , тогда:

$$\exists \delta, \varepsilon \quad \forall x \in U_\delta(x_0) \quad \exists! y \in U_\varepsilon(y_0) : F(x, y) = 0$$

Обозначим $y = f(x) \leftarrow$ непрерывна в точке x_0

Доказательство:

Знаем $F(x_0, y_0) = 0$. Пусть она возрастает.

Возьмём $\varepsilon < \eta$

$$F(x_0, y_0 + \varepsilon) > 0$$

$$F(x_0, y_0 - \varepsilon) < 0$$

$\exists \delta$ в δ -окрестности точки $(x_0, y_0 + \varepsilon)$ $F(x, y) > 0$,

в δ -окрестности $(x_0, y_0 - \varepsilon)$ $F(x, y) < 0$

Возьмём $x \in U_\delta(x_0) : F(x, y_0 - \varepsilon) < 0 \wedge F(x, y_0 + \varepsilon) > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists! y \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon) : F(x, y) = 0$. Существование из непрерывности, единственность из строгой монотонности.

Из доказательства для любого ε найдётся δ , что для всех x из окрестности найдётся единственное y из окрестности, то есть $y = f(x)$ монотонна.

Теорема: (о неявной функции)

$F(x, y)$ непрерывна в некоторой окрестности (x_0, y_0) и $\exists F'_y(x, y)$ непрерывна в точке (x_0, y_0) , $F(x_0, y_0) = 0$ $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$, то

$$\exists \delta \exists \varepsilon \forall x \in U_\delta(x_0) \exists! y \in U_\varepsilon(y_0) : F(x, y) = 0$$

$y = f(x)$ непрерывна в точке x_0

Бонус:

Если $\exists F'_x(x, y)$ в окрестности т. (x_0, y_0) и есть непрерывность в точке (x_0, y_0) , то

$$\exists f'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}$$

Пример:

$$\cos xy + x = 0$$

$$y = f(x) \quad x \cos xf(x) + x = 0$$

$$F(x, f(x)) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{f'(x)}{dx} = 0$$

$$\sin xf(x)(f(x) + xf'(x)) + 1 = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \left(\frac{-1}{\sin xf(x)} - f(x) \right)$$