Математическая статистика.

Андрей Тищенко @AndrewTGk

2024/2025

Семинар 10 января

Задача 1

$x_1, \ldots,\ x_n \sim F_\xi(x)$, найти функцию распределения для $X_{(n)},\ X_{(1)}$
$F_{X_{(n)}}(x) = P(X_{(n)} \leqslant x) = P(X_{(1)} \leqslant x, \ldots,\ X_{(n)} \leqslant x) = P(X_1 \leqslant x, \ldots,\ X_n \leqslant x) =$
$= P(X_1 \leqslant x) \ldots P(X_n \leqslant x) = (F_\xi(x))^n$
$F_{X_{(1)}}(x) = P(X_{(1)} \leqslant x) = 1 - P(X_{(1)} > x) = 1 - P(X_{(1)} > x, \ldots,\ X_{(n)} > x) =$
$= 1 - P(X_1 > x, \ldots,\ X_n > x) = 1 - P(X_1 > x) \ldots P(X_n > x) = 1 - \big(1 - F_\xi(x)\big)^n$

Задача 2

$x_1, \ldots,\ x_n \sim R(0,\ 1)$. Найти $EX_{(n)},\ EX_{(1)}$.
$F_{X_{(n)}}(x) = \big(F_\xi(x)\big)^n$
$f_{X_{(n)}}(x) = \big(F_{X_{(n)}}(x)\big)' = n\big(F_\xi(x)\big)^{n-1} \cdot f_\xi(x)$
$F_\xi(x) = \begin{cases} 0,\ x < 0 \\ x,\ x \in [0,\ 1] \\ 1,\ x > 1 \end{cases}$
Подставим в предыдущее уравнение:

$$f_{X_{(n)}} = \begin{cases} 0,\ x < 0 \\ nx^{n-1},\ x \in [0,\ 1] \\ 0,\ x > 1 \end{cases}$$

$EX_{(n)} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_{X_{(n)}}(x)\,dx = \int\limits_0^1 x n x^{n-1}\,dx = n\int\limits_0^1 x^n\,dx = \dfrac{n}{n+1}$
Посчитаем для $X_{(1)}$:
$F_{X_{(1)}}(x) = 1 - (1 - F_\xi(x))^n$
$F_{X_{(1)}}(x) = \big(F_{X_{(1)}}(x)\big)' = n(1 - F_\xi(x))^{n-1}\big(F_\xi(x)\big)' = n(1 - F_\xi(x))^{n-1} f_\xi(x) = \begin{cases} 0,\ x < 0 \\ n(1-x)^{n-1},\ 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0,\ x > 1 \end{cases}$
$EX_{(1)} = \int\limits_0^1 xn(1-x)^{n-1}\,dx = n\int\limits_0^1 x(1-x)^{n-1}\,dx = \left\langle \begin{matrix} t = 1 - x \\ x = 1 - t \end{matrix} \right\rangle = -n\int\limits_1^0 (1-t)t^{n-1}\,dt = n\int\limits_0^1 (1-t)t^{n-1}\,dt =$
$= n\int\limits_0^1 t^{n-1}\,dt - n\int\limits_0^1 t^n\,dt = 1 - \dfrac{n}{n+1}$

Задача 3

$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$
$E\overline{x} = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E(x_i) = Ex_i$

$\mathcal{D}(\overline{x}) = \mathcal{D}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathcal{D}x_i = \frac{\mathcal{D}x_i}{n}$
Посчитаем выборочную дисперсию:

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

$ES^2 = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(x_i - \overline{x})^2 = \mathcal{D}(x_1 - \overline{x}) = \mathcal{D}(x_1) + \mathcal{D}(\overline{x}) - 2\operatorname{cov}(x_1,\ \overline{x}) = \frac{(n+1)\mathcal{D}(x_1)}{n} -$
$- 2\operatorname{cov}(x_1,\ \overline{x})$
$\operatorname{cov}(x_1,\ \overline{x}) = \operatorname{cov}(x_1,\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i) = \frac{1}{n}\operatorname{cov}(x_1,\ \sum_{i=1}^{n} x_i) = \frac{1}{n}\operatorname{cov}(x_1,\ x_1) = \frac{\mathcal{D}(x_1)}{n}$
Тогда

$$ES^2 = \frac{(n+1)\mathcal{D}(x_1)}{n} - \frac{2\mathcal{D}(x_1)}{n} = \mathcal{D}(x_1)\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

Несмещённая выборачная дисперсия (её математическое ожидание равняется дисперсии x_1):

$$\tilde{S}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

Посчитаем дисперсию S^2:

$$\mathcal{D}\left(x_1 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \mathcal{D}\left(\frac{(n-1)x_1}{n}\right) + \mathcal{D}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n} x_i\right) = \frac{(n-1)^2}{n^2}\mathcal{D}(x_1) + \frac{n-1}{n^2}\mathcal{D}(x_1) =$$

$$= \mathcal{D}(x_1)\left(\frac{(n-1)(n-1+1)}{n^2}\right) = \mathcal{D}(x_1)\frac{n-1}{n}$$