ИДЗ 4 по алгебре. Вариант 29.

Андрей Тищенко 231

Задача 1.

Составим матрицы $A,\ B$ следующим образом:
$A = \begin{pmatrix} a_1^T & a_2^T & a_3^T & a_4^T \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_1^T & b_2^T & b_3^T & b_4^T \end{pmatrix};$
Пусть существует такое φ, что $\varphi A = B \Rightarrow B^T = A^T \varphi^T$. Решим задачу вида $B = Ax,\ x-?$:

$$\left(A^T | B^T\right) = \left(\begin{array}{ccc|cccc} -2 & -2 & 2 & 4 & 2 & -2 & -4 \\ -5 & -3 & 8 & 12 & 6 & -6 & -12 \\ 6 & 4 & -6 & -8 & -4 & 4 & 8 \\ 4 & 7 & 8 & 10 & 5 & -5 & -10 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|cccc} -1 & -1 & 1 & 2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & 18 & 9 & -9 & -18 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cccc} -1 & -1 & 1 & 2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 6 & 3 & -3 & -6 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|cccc} -1 & -1 & 1 & 2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 4 & -4 & -7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cccc} -1 & -1 & 1 & 2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -17 & -9 & 9 & 17 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 4 & -4 & -7 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Решений нет.

Задача 2.

$Q_1(x) = 25x_1^2 + 32x_1x_2 + 8x_1x_3 + 17x_2^2 + 28x_2x_3 + 20x_3^2, \quad Q_2(y) = y_2^2 - y_3^2$
Приведём квадратичную форму 1 к каноническому виду:
$Q_1(x) = \left(5x_1 + \frac{16}{5}x_2 + \frac{8}{10}x_3\right)^2 - \frac{256}{25}x_2^2 - \frac{128}{25}x_2x_3 - \frac{16}{25}x_3^2 + 17x_2^2 + 28x_2x_3 + 20x_3^2 =$

$= \left(5x_1 + \frac{16}{5}x_2 + \frac{8}{10}x_3\right)^2 + \left(\frac{13}{5}x_2\right)^2 + \frac{572}{25}x_2x_3 + \left(\frac{22}{5}x_3\right)^2 =$

$= \left(5x_1 + \frac{16}{5}x_2 + \frac{8}{10}x_3\right)^2 + \left(\frac{13}{5}x_2 + \frac{22}{5}x_3\right)^2.$

Заменим переменные:

$$\begin{cases} \alpha_1 = 5x_1 + \frac{16}{5}x_2 + \frac{8}{10}x_3 \\ \alpha_2 = \frac{13}{5}x_2 + \frac{22}{5}x_3 \end{cases} \Rightarrow Q_1(x) = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow i_+ = 2,\ i_- = 0,\ \mathrm{Rg}(Q_1) = 2,\ U_{x\to\alpha} = \begin{pmatrix} 5 & \frac{16}{5} & \frac{8}{10} \\ 0 & \frac{13}{5} & \frac{22}{5} \end{pmatrix}$

У $Q_2 : i_+ = 1,\ i_- = 1 \Rightarrow$ так как индекс инерции является инвариантом, то Q_1 и Q_2 не совпадут ни в каком базисе.

Проверим знакоопределённость матрицы квадратичной формы для Q_1:

$$\begin{pmatrix} 25 & 16 & 4 \\ 16 & 17 & 14 \\ 4 & 14 & 20 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \Delta_1 = 25 > 0 \\ \Delta_2 = 169 > 0 \\ \Delta_3 = 8500 + 896 + 896 - 272 - 5120 - 4900 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ не является знакоопределённой

Задача 3.

$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Домножим матрицу A на столбец $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, получаем $\begin{pmatrix} -2x + y \\ 3y \end{pmatrix} \Rightarrow$ образ числа $x + iy = (-2x + y) + 3yi$

Для проверки существования базиса, в котором матрица диагональна, нужно посмотреть собственные значения, если существует базис из собственных векторов, то матрица диагонализируема.

$\chi_A(\lambda) = (-2 - \lambda)(3 - \lambda) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases}$, посчитаем собственные векторы, удовлетворяющие этим собственным значениям:

Для $\lambda_1 = -2$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{Rg} = 1 \Rightarrow s_1 = m_1 = 1 \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Для $\lambda_2 = 3$:

$\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow s_1 = m_1 = 1 \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$. Получаем следующий базис из собственных векторов:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, тогда диагональный вид будет $\Lambda = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$A = U^{-1}\Lambda U$, искомые числа: $z_1 = 1,\ z_2 = 1 + 5i$.

Задача 5.

Найти QR разложение матрицы с помощью ортогонализации столбцов:
$$A = \begin{pmatrix} -4 & 12 & -21 & -12 \\ -4 & 2 & 7 & -14 \\ -4 & 2 & -1 & -10 \\ -4 & 12 & -13 & 8 \end{pmatrix},\ v_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} -21 \\ 7 \\ -1 \\ -13 \end{pmatrix},$$
$v_4 = \begin{pmatrix} -12 \\ -14 \\ -10 \\ 8 \end{pmatrix}$. Применим процесс ортогонализации Грамма-Шмидта.

$$u_1 = v_1 \Rightarrow e_1 = \tfrac{1}{2} u_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$u_2 = v_2 - \tfrac{(u_1,\ v_2)}{(u_1,\ u_1)} u_1 = \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix} - \tfrac{-48-8-8-48}{16+16+16+16} \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix} + \tfrac{7}{4} \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow e_2 = \tfrac{1}{10} u_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$u_3 = v_3 - \ frac(u_1,\ v_3)64 u_1 - \tfrac{(u_2,\ v_3)}{(u_2,\ u_2)} u_2 = \begin{pmatrix} -21 \\ 7 \\ -1 \\ -13 \end{pmatrix} - \tfrac{84-28+4+52}{64} \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} -$$

$$- \tfrac{-105-35+5-65}{100} \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow e_3 = \tfrac{1}{8} u_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$u_4 = v_4 - \tfrac{(u_1,\ v_4)}{64} u_1 - \tfrac{(u_2,\ v_4)}{100} u_2 - \tfrac{(u_3,\ v_4)}{(u_3,\ u_3)} u_3 = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow e_4 = \tfrac{1}{12} u_4 =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Получаем матрицу $Q = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, где $(e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4)$ - ортонормированный базис.

$$R = Q^T A = \begin{pmatrix} 8 & -14 & 14 & 14 \\ 0 & 10 & -20 & 10 \\ 0 & 0 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = QR = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -14 & 14 & 14 \\ 0 & 10 & -20 & 10 \\ 0 & 0 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Задача 6.

Найдите расстояние от вектора $\alpha = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ до подпространства L, заданного системой уравнений $Ax = 0$. Найдите косинус угла между L и α.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 18 & 9 \\ 0 & 6 & 15 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1.5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 & -1.5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Составим ФСР: $\begin{pmatrix} -0.5 \\ 1.5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\text{Пр}_L(\alpha) = A(A^TA)^{-1}A^T\alpha = \begin{pmatrix}1\\-3\\2\\2\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}-1 & 3 & -2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\3\\-2\\2\end{pmatrix}\right)^{-1}\begin{pmatrix}-1 & 3 & -2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4\\-1\\1\\-2\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}-1\\3\\-2\\2\end{pmatrix}\cdot(1+9+8)^{-1}\cdot(4-3-2-4) = \begin{pmatrix}-1\\3\\-2\\2\end{pmatrix}\cdot\tfrac{1}{18}\cdot(-5) = \tfrac{1}{18}\begin{pmatrix}5\\-15\\10\\-10\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}\tfrac{5}{18} & -\tfrac{5}{6} & \tfrac{5}{9} & -\tfrac{5}{9}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\tfrac{5}{18}\\-\tfrac{5}{6}\\\tfrac{5}{9}\\-\tfrac{5}{9}\end{pmatrix}$$

$$\cos\left(\widehat{L,\ \alpha}\right) = \tfrac{(\text{Пр}_L(\alpha),\ \text{Пр}_L(\alpha))}{(\alpha,\ \alpha)} = \tfrac{25}{18}\tfrac{1}{16+6} = \tfrac{25}{396}$$

Задача 8.

$A = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}-8+\sqrt{2} & -4-2\sqrt{2} & -\sqrt{10}\\ -4-2\sqrt{2} & -2+4\sqrt{2} & 2\sqrt{10}\\ \sqrt{10} & -2\sqrt{10} & 5\sqrt{2}\end{pmatrix}$. Найдём собственные значения:

$$\frac{1}{1000}\begin{vmatrix}-8+\sqrt{2}-10\lambda & -4-2\sqrt{2} & -\sqrt{10}\\ -4-2\sqrt{2} & -2+4\sqrt{2}-10\lambda & 2\sqrt{10}\\ \sqrt{10} & -2\sqrt{10} & 5\sqrt{2}-10\lambda\end{vmatrix} = -1+(\sqrt{2}-1)\lambda+(\sqrt{2}-1)\lambda^2-\lambda^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -(1+\lambda)(1-\sqrt{2}\lambda+\lambda^2) \Rightarrow \begin{cases}\lambda_1 = -1\\ \lambda_2 = \frac{1-i}{\sqrt{2}} & \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \pm i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ \lambda_3 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\end{cases}$$

Тогда в каноническом виде: $\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & 0\\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

Угол поворота: $\frac{\pi}{4}$.

Ось поворота есть собственный вектор, отвечающий $\lambda = -1$:

$$\begin{pmatrix}2+\sqrt{2} & -4-2\sqrt{2} & -\sqrt{10}\\ -4-2\sqrt{2} & 8+4\sqrt{2} & 2\sqrt{10}\\ \sqrt{10} & -2\sqrt{10} & 5\sqrt{2}+10\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}2+\sqrt{2} & -4-2\sqrt{2} & -\sqrt{10}\\ \sqrt{10} & -2\sqrt{10} & 5\sqrt{2}+10\end{pmatrix} \sim$$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -\sqrt{10}\frac{2-\sqrt{2}}{2} \\ 10 & -20 & 10\sqrt{5}+10\sqrt{10} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -\sqrt{10}\frac{2-\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 10\sqrt{5}+10\sqrt{10}(1+\frac{2-\sqrt{2}}{2}) \end{pmatrix} \sim$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Это и будет осью поворота.

Задача 9.

$A = \begin{pmatrix} -50 & -36 & 54 \\ -36 & 46 & 18 \\ 54 & 18 & 31 \end{pmatrix}$. Можно ортогональными преобразованиями перевести эту матрицу из ортонормированного базиса в ортонормированный (с диагональным видом), так как она симметрична (то есть $A = A^T$), а значит самосопряжена.

Найдём характеристический многочлен: $\begin{vmatrix} -50-\lambda & -36 & 54 \\ -36 & 46-\lambda & 18 \\ 54 & 18 & 31-\lambda \end{vmatrix} =$

$= -\lambda^3 + 27\lambda^2 + 6960\lambda - 299396 = -(\lambda-58)^2(\lambda+89)$

$\lambda = 58,\ m_1 = 2:$

$\begin{pmatrix} -108 & -36 & 54 \\ -36 & -12 & 18 \\ 54 & 18 & -27 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -6 & -2 & 3 \\ -6 & -2 & 3 \\ 6 & 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -6 & -2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow x_2 = \frac{3}{2}x_3 - 3x_1$

	y_1	y_2
x_2	-3	$\frac{3}{2}$
x_1	1	0
x_3	0	1

Ортогонализируем:

$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow e_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}b_1$

$b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{(b_1,\ y_2)}{(b_1,\ b_1)}b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{-9}{10}b_1 = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} \\ 3 - \frac{27}{10} \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} \\ \frac{3}{10} \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow e_1 = \frac{\sqrt{10}}{7}b_2$

$\lambda = -89,\ m_2 = 1$

$\begin{pmatrix} 39 & -36 & 54 \\ -36 & 135 & 18 \\ 54 & 18 & 120 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 13 & -12 & 18 \\ -4 & 15 & 2 \\ 9 & 3 & 20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 49 & 0 & 98 \\ -49 & 0 & -98 \\ 9 & 3 & 20 \end{pmatrix} \sim$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 \\ x_2 = -\frac{2}{3}x_3 \end{cases} \Rightarrow y_3 = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Так как собственный вектор у этого собственного значения всего один, то его можно не ортогонализировать, только нормировать:
$e_3 = \frac{1}{7}y_3$

Тогда диагональный вид: $\begin{pmatrix} 58 & 0 & 0 \\ 0 & 58 & 0 \\ 0 & 0 & -89 \end{pmatrix}$

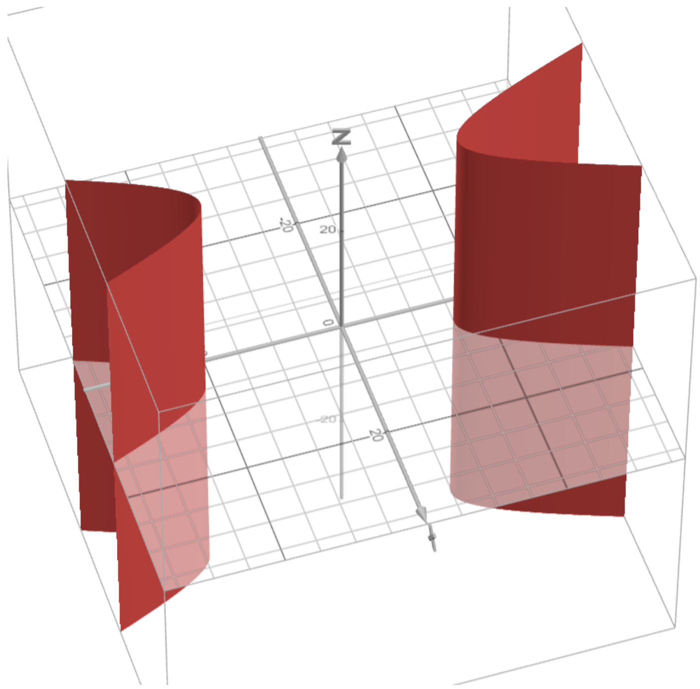
Матрица перехода: $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{9}{7\sqrt{10}} & -\frac{6}{7} \\ -\frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{3}{7\sqrt{10}} & -\frac{2}{7} \\ 0 & \frac{2\sqrt{10}}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$.

Задача 11.

а.

$-x^2+8x+9y^2+54y+29 = 0 \Rightarrow -x^2+2\cdot4x-16+45+(3y+9)^2+2\cdot3\cdot9y+81-81$
$-(x-4)^2+(3y+9)^2-36 \Rightarrow -\frac{(x-4)^2}{6^2}+\frac{(3y+9)^2}{6^2} = 1 \Rightarrow -\frac{(x-4)^2}{6^2}+\frac{(y+3)^2}{18^2} = 1$
- гиперболический цилиндр. Параллельным переносом можно получить новые координаты: $\begin{cases} x' = x-4 \\ y' = y+3 \end{cases}$

Делит пространство на 3 части.
Эскиз:



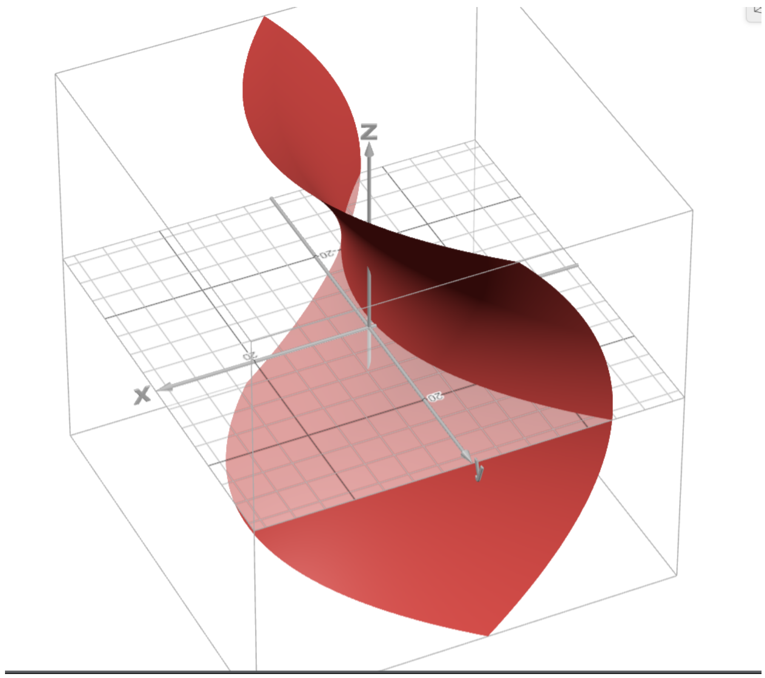
b.

$-72x-y^2-8y+z^2-4z-84=0 \Rightarrow -72x-y^2-8y-16+z^2-4z+4-72=0$

$72(1+x)=-(y+4)^2+(z-2)^2 \Rightarrow 2(1+x)=-\frac{(y+4)^2}{36}+\frac{(z-2)^2}{36} \Rightarrow \begin{cases} x'=1+x \\ y'=y+4 \\ z'=z-2 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x'=\frac{z'^2}{36}-\frac{y'^2}{36}$, гиперболический параболоид.

Делит пространство на 2 части.
Эскиз:



c.

$x^2 + 8x - y^2 + 6y + 4z^2 - 8z - 5 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 + 8x + 16 - y^2 + 6y - 9 + 4z^2 - 8z + 4 - 16 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x+4)^2 - (y-3)^2 + 4(z-1)^2 = 16 \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{(x+4)^2}{16} - \frac{(y-3)^2}{16} + \frac{(z-1)^2}{4} = 1$. Однополостный гиперболоид.

Делит пространство на 2 части.
Эскиз: