

Семинары по математическому анализу 4

МОДУЛЬ.

Андрей Тищенко

2023/2024

Семинар 4 апреля

Сходимость функциональных последовательностей.

$$\begin{array}{l} \{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}} \quad x \in E \\ \forall x \in E \quad f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x) \end{array}$$

Номер 1. а. $f_n(x) = \frac{nx^2}{x + 3n + 2} = \frac{x^2}{\frac{x}{n} + 3 + \frac{2}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{x^2}{3}$

с. $f_n(x) = n(x^{\frac{1}{n}} - 1)$, $E = [1; 3]$
 $x = 1 \Rightarrow f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$$\frac{e^y - 1}{y} \xrightarrow{y \rightarrow 0} 1$$

$$f_n(x) = \frac{e^{\frac{1}{n} \ln x} - 1}{\frac{1}{n} \ln x} \ln x \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ln x$$

Итак, $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ln x$

Определение: $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$ на $E \Leftrightarrow \sup_E |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$
 $\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \forall n > N_\varepsilon \forall x \in E |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \Rightarrow$
 $\Rightarrow \sup_E |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

Номер 2. а. $f_n(x) = \frac{\arctg(nx)}{\sqrt{n+x}}$, $E = [0, +\infty)$

$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ поточечно.

$$\left| \frac{\arctg(nx)}{\sqrt{n+x}} \right| < \left| \frac{\pi}{\sqrt{n}} \right| < \varepsilon$$

$$\begin{aligned}
\text{b. } f_n(x) &= n \sin \frac{1}{nx}, \quad E = [1, +\infty) \\
f_n(x) &\sim n \cdot \frac{1}{nx} = \frac{1}{x} \Rightarrow f_n(x) \longrightarrow \frac{1}{x} = f(x) \\
\left| n \left(\sin \frac{1}{nx} - \frac{1}{nx} \right) \right| &= \dots \\
\sin y &= y - \frac{y^3}{6} + \frac{\sin c}{24} y^4 \\
\dots &= \left| n \left(\frac{1}{nx} - \frac{1}{nx} - \frac{1}{(nx)^3 6} + \frac{\sin c}{24} \frac{1}{(nx)^4} \right) \right| \leq \frac{1}{6n^2} + \frac{1}{24n^3} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0
\end{aligned}$$

(тут подставили $x = 1$, получив максимальное значение)

Номер 3. а. $f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2 x^2}, \quad E = [0; 1]$

$$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Рассмотрим последовательность $x_n = \frac{1}{n} \Rightarrow$

$$\Rightarrow f_n(x_n) = \frac{n \frac{1}{n}}{1 + n^2 \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

Как дополнительный пример рассмотрели:

$$x^n \text{ на } (0; 1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$x_n = 1 - \frac{1}{n}$$

$$f_n(x_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e} \text{ не сходится абсолютно.}$$

б. $f_n(x) = \ln \left(3 + \frac{n^2 e^x}{n^4 + e^{2x}} \right), \quad E = [0; +\infty)$

$$f(x) = \ln 3$$

$$f_n(x) - f(x) = \left| \ln \left(1 + \frac{n^2 e^x}{3(n^4 + e^{2x})} \right) \right|$$

Рассмотрим последовательность $x_n = \ln n^2$. Тогда

$$g_n(x_n) = \ln \left(1 + \frac{n^2 n^2}{3(n^4 + n^4)} \right) = \ln \frac{7}{6}$$

Семинар 12 апреля

$$f_n(x), \quad x \in E$$

1. $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x) \text{ на } E.$

2. Можно ли переставлять операторы $\lim_{n \rightarrow \infty}, \lim_{x \rightarrow x_0}, \frac{d}{dx}, \int dx$?

То есть выполняется ли:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \stackrel{?}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} f_n(x) \stackrel{?}{=} \frac{d}{dx} \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)}_{f(x)}$$

$$E = [0; 1], f_n(x) = x^n \longrightarrow g(x) \begin{cases} 0, & x \in [0; 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow 1^-} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = 0$$

$0 \neq 1 \Rightarrow$ это неверно.

$$f_n(x) \xrightarrow{E} f(x) \Leftrightarrow \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{Ряды } \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = S(x)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (x^n)' \stackrel{?}{=} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \right)'$$

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x) \xrightarrow{E} S(x) \Leftrightarrow$$

$$\sup_{x \in E} |S_n(x) - S(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\sup_{x \in E} \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Критерий Вейерштрасса: Если $u_n(x)$ мажорируется последовательностью a_n : $\forall n |u_n(x)| \leq a_n$,

$$\text{тогда } \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ сходится, тогда } S_n(x) \xrightarrow{E} S(x)$$

$$\text{Задача 1. а. } u_n(x) = \frac{\arctg(n^2 x) \cdot \cos(\pi n x)}{n \sqrt{n}}, E = \mathbb{R}$$

$$|u_n(x)| \leq \frac{\pi}{2n^{\frac{3}{2}}}, \text{ ряд } \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ сходится.}$$

b. $u_n(x) = e^{-n(x^2 + \sin x)}$, $E = [1; +\infty)$
 $e^{-n(x^2 + \sin x)} < e^{-n}$, так как

$$\begin{cases} x \geq \sqrt{2} : x^2 + \sin x \geq 2 + \sin x \geq 1 \\ 1 \leq x < \sqrt{2} : \sin x > 0 \Rightarrow x^2 + \sin x > 1 \end{cases}$$

Функциональные ряды

$$\sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cdot \underbrace{(x-a)^n}_t \Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} C_n \cdot t^n. \text{ Множество сходимости такого ряда имеет}$$

вид $(-R; R)$, $R \in \overline{\mathbb{R}}$, R называется радиусом сходимости.

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_n}{C_{n+1}} \right|$$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|C_n|}$$

2. a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)^2}{n^2} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2} \right| = 1$$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)!}{n!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |n| = +\infty$$

c. $\sum_{n=1}^{\infty} 5^n x^{3n} = \sum_{n=1}^{\infty} 5^n t^n$

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_t} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|5^n|} \Rightarrow \forall t : |t| < \frac{1}{5} \Rightarrow |x^3| < \frac{1}{5} \Rightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt[3]{5}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow R_x = \frac{1}{\sqrt[3]{5}} \end{aligned}$$

3. a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n^2+2} (x-1)^n$

$$R = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n+1}{3n^2+2}}{\frac{2n+3}{3n^2+6n+5}} = 1 \Rightarrow (0; 2)$$

Рассмотрим граничные точки:

$$x = 2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n^2+2} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3n} \text{ расходится.}$$

$$x = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{3n^2+2}$$

$\left(\frac{2n+1}{3n^2+2}\right)' = \frac{2(3n^2+2)-6n(2n+1)}{(3n^2+2)^2} = \frac{-6n^2-6n+4}{(3n^2+2)^2} \Rightarrow$ с какого-то момента она монотонно убывает. Тогда по признаку Лейбница ряд сходится.

$$4. \quad \text{a.} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = x \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = x \sum_{n=1}^{+\infty} (x^n)' = x \left(\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \right)' = x \cdot \left(\frac{x}{1-x} \right)' =$$

$$= x \frac{(1-x) + x}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Очевидно, что радиус сходимости такой функции равен 1. Положим

$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^2} = 2.$$

$$b. \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^{2n+1}} 2n+1 = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^{2n} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} dt =$$

$$= \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} (-t^2)^n dt = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \arctg t|_0^x = \arctg x$$

$$5. \quad \text{a.} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

Семинар 26 апреля.

Теория:

$$f(\vec{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = A \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{Коши: } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \vec{x} \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(\vec{x}_0) \quad |f(\vec{x}) - A| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \text{Гейне: } \forall \vec{x}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \vec{x}_0, \quad \vec{x}_n \neq \vec{x}_0 \Rightarrow f(\vec{x}_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$$

Задача 1. а.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 1}} \frac{x^2 - 4y^2}{x^2 + 2x - 2xy - 4y} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 1}} \frac{(x-2y)(x+2y)}{(x+2)(x-2y)} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 1}} \frac{x+2y}{x+2} = 1$$

Задача 1. б.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \frac{\sin xy}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \underbrace{\frac{\sin xy}{xy}}_1 y = 1 \cdot 2 = 2$$

Задача 1. с.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} (1+x)^{\frac{1}{x+x^2y}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} (1+x)^{\frac{1}{x} \frac{1}{x+y}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \left((1+x)^{\frac{1}{x}} \right)^{\frac{1}{x+y}} = e^{\frac{1}{0+1}} = e$$

Задача 2.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ a, & \text{иначе} \end{cases}$$

а. Является непрерывной по x .

$$f(x, 0) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2}, & x^2 \neq 0 \\ a, & x^2 = 0 \end{cases}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 1 \Rightarrow a = 1$$

б. Является непрерывной по y .

$$f(0, y) = \begin{cases} -\frac{y^2}{y^2}, & y^2 \neq 0 \\ a, & y^2 = 0 \end{cases}, \quad \lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = -1 \Rightarrow a = -1$$

с. Является непрерывной по кривой $y = \alpha\sqrt{x}$, $\alpha \neq 0$

$$f(x, \alpha\sqrt{x}) = \begin{cases} \frac{x^2 - \alpha x}{x^2 + \alpha^2 x}, & x^2 + \alpha x \neq 0 \\ a, & x^2 + \alpha^2 x = 0 \end{cases}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \alpha^2 x}{x^2 + \alpha^2 x} = \frac{x - \alpha^2}{x + \alpha^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -1 = a$$

д. Является <https://de.pornhub.com/> непрерывной.

Ни при каких, так как уже при приближении по x и по y значения параметра a для достижения непрерывности должны различаться.

Задача 3. Вычислить пределы:

а.

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0, \text{ аналогично}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

Знаем $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall (x, y) \in \overset{\circ}{U}_\delta(0, 0) |f(x, y) - 0| < \varepsilon$
 $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta \Rightarrow |x| < \delta \quad \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| < \varepsilon$

Также знаем $\frac{x^2 + y^2}{2} \geq xy \Rightarrow \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| \leq \left| \frac{x}{2} \right| < \left| \frac{\delta}{2} \right| \leq \varepsilon$. Верно при $\delta = 2\varepsilon$

b.

$$f(x, y) = x + y \sin \frac{1}{y}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} x + y \sin \frac{1}{y} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} x + y \sin \frac{1}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} y \sin \frac{1}{y} = 0$$

Скорее всего ошибка в задании, так как слагаемые сходятся независимо друг от друга, дальше не решали.

c.

$$f(x, y) = \log_{1+x}(1 + x + y)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \log_{1+x}(1 + x + y) = \lim_{x \rightarrow 0} \log_{1+x}(1 + x) = 1$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \log_{1+x}(1 + x + y) = \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x + y)}{\ln(1 + x)} = \infty$$

Дробь стремится к бесконечности, значит переходить к пределу по y переходить нельзя. Пределы не совпадают, значит к многомерному пределу переходить нельзя

Вставка:

Открытость множества $A \longleftrightarrow$ метрика \longrightarrow шары или окрестность.

$$\Updownarrow \\ \forall x \in A \exists \delta U_\delta(x) \subset A$$

Замкнут \Leftrightarrow дополнение к открытости.

1. Свойства непрерывных на компакте

Компакт $\xLeftrightarrow{\mathbb{R}^n}$ ограниченность, замкнутость.

2. f непрерывна на $E \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(A) \text{ - открытый для любого открытого } A \\ \{x \mid f(x) \in A\}$$

Задача 4.

f - непрерывна. $A = \{x \mid f(x) > y_0\}$

Пусть $x_1 \in A$ $f(x_1) > y_0$. Возьмём $\varepsilon_0 = \frac{f(x_1) - y_0}{2}$, тогда из определения непрерывности:

$$\exists \delta > 0 \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_1) \quad |f(x) - f(x_1)| < \varepsilon_0 \Rightarrow f(x) > y_0, \text{ ч.т.д.}$$

Вторую часть задачи решили устно (несложное упражнение).

Задача 5.

Определение:

Точка x называется граничной точкой множества A , если:

$$\forall \delta > 0 \exists x_0 \in U_\delta(x) \quad x_0 \in A \wedge \exists x_1 \in U_\delta(x) \quad x_1 \in \bar{A}$$

Семинар 10 мая

Рассматриваем такие штуки: $f(\vec{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

0. Определение, множество значений, линии уровня.

$$1. \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = A.$$

Гейне:

$$\forall \vec{x}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \vec{x}_0 \quad \vec{x}_n \neq \vec{x} : f(\vec{x}_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$$

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)$$

$$\forall i \quad x_n^i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0^i \Leftrightarrow \rho(\vec{x}_n; \vec{x}_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \sum_{i=1}^n |x_n^i - x_0^i|^2 \rightarrow 0$$

2. Дифференцируемость

В одномерном случае:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Leftrightarrow f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0)$$

В многомерном:

Определение: $f(x)$ называется дифференцируемой в точке \vec{x}_0 :

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \sum_{i=1}^n A_i(x^i - x_0^i) + o(\rho(\vec{x}; \vec{x}_0))$$

$$\text{Определение: } \frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{x^i \rightarrow x_0^i} \frac{f(x_0^1, \dots, x^i, \dots, x_0^n) - f(\vec{x}_0)}{x^i - x_0^i}$$

Пример:

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

$$f(x, 0) = \frac{0}{x^2}$$

$$\frac{\partial f(x, 0)}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial f(0, y)}{\partial y} = 0$$

Достаточное условие дифференцируемости

1. $\frac{\partial f}{\partial x_i} \exists$ окрестность точки \vec{x}_0
2. Частные производные в точке \vec{x}_0 непрерывны
 \Rightarrow функция дифференцируема в точке \vec{x}_0

Задача 1.

$$f(x, y) = x + y^2 + \ln(x + y^2)$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 1 + \frac{1}{x+y^2} \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 2y + \frac{2y}{x+y^2}$$

В окрестности точки $(0, 1)$ существуют частные производные (так как точка лежит в области определения).

$(x_n, y_n) \rightarrow (0, 1)$, непрерывность есть, так как частные производные непрерывны на области определения, значит функция дифференцируема.

$$df(x, y)|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 2dx + 4dy$$

Задача 2. а.

$$f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sqrt[3]{y} \frac{1}{3\sqrt[3]{x}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt[3]{x} \frac{1}{3\sqrt[3]{y}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 0.$$

Очевидно:

$$f(x, 0) \equiv 0 \quad \forall x$$

$$f(0, y) \equiv 0 \quad \forall y$$

$$\sqrt[3]{xy} = 0 + Ax + By + o(\sqrt{x^2 + y^2})$$

При этом A, B являются частными производными, то есть $\sqrt[3]{xy} = o(\sqrt{x^2 + y^2})$

$$\frac{\sqrt[3]{xy}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0$$

Положим $x = y \Rightarrow \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \infty$, то есть дифференцируемости нет.

Задача 2. б.

$$f(x, y) = \cos \sqrt[3]{xy}$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = -\sin \sqrt[3]{xy} \cdot \frac{\sqrt[3]{y}}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = -\sin \sqrt[3]{xy} \cdot \frac{\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{y^2}}$$

Частные производные есть, в точках $(x, 0)$ и $(0, y)$ они равны 0, так как синус обратится в тождественную 1.

$$\cos \sqrt[3]{xy} = 1 + Ax + By + o(\rho(x, y))$$

$$\cos \sqrt[3]{xy} - 1 = o(\sqrt{x^2 + y^2})$$

$$\frac{\cos \sqrt[3]{xy} - 1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{-\frac{\sqrt[3]{x^2 y^2}}{2} + o(1)(\sqrt[3]{x^2 y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \dots$$

Из неравенства Коши $\sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{2xy}$

$$\dots \leq \frac{-\frac{(xy)^{\frac{2}{3}}}{2} + o(1)(\sqrt[3]{xy})^2}{\sqrt{2xy}} \xrightarrow{(x, y)} 0$$

Задача 3.

$$\begin{aligned} & f(u, v), f'_u f'_v \\ & g(x, y) = f(x \cos y, x \sin y) \\ & \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{df}{du} \frac{du}{dx} + \frac{df}{dv} \frac{dv}{dx} = f'_u (x \cos y)'_x + f'_v (x \sin y)'_x = f'_u \cos y + f'_v \sin y \end{aligned}$$

Производная по направлению

$$\begin{aligned} & \vec{e}(e_1, \dots, e_n), |\vec{e}| = 1 \\ & f(\vec{x}_0 + t\vec{e}) = g(t) \end{aligned}$$

Семинар 17 мая.

Задача 5.

$$\begin{aligned} & \operatorname{arctg} \frac{xy}{z^2}, M(0; 1; 2) \\ & \overrightarrow{\operatorname{grad} f} = \overrightarrow{\nabla f} = \left(\frac{1}{4}; 0; 0\right) \\ & 1. \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\left(\frac{xy}{z^2}\right)^2 + 1} \cdot \frac{y}{z^2} \Big|_M = \frac{1}{4} \\ & 2. \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\left(\frac{xy}{z^2}\right)^2 + 1} \cdot \frac{x}{z^2} \Big|_M = 0 \\ & 3. \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{\left(\frac{xy}{z^2}\right)^2 + 1} \cdot \frac{-2}{z^3} xy \Big|_M = 0 \end{aligned}$$

Задача 4.

$$\begin{aligned} & f(x, y, z) = x^3 + 2xy^2 + 3yz^2 \\ & \vec{l} = (2, 2, 1), M = (3, 3, 1) \\ & \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 2y^2 \\ & \frac{\partial f}{\partial y} = 4xy + 3z^2 \\ & \frac{\partial f}{\partial z} = 6yz \\ & \overrightarrow{\nabla f} = (45, 39, 18) \\ & \vec{l}_n = \frac{(2, 2, 1)}{\sqrt{9}} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \\ & \frac{\partial f}{\partial l_n} = 30 + 26 + 6 = 62 \text{ (скалярное произведение векторов } \vec{l}_n, \overrightarrow{\nabla f}) \end{aligned}$$

Задача 6.

$f(x, y) = x^2 + y^2$. Возьмём произвольную точку (x_0, y_0) . Тогда возьмём вектор единичного размера:

$$\vec{n} = \left\{ \frac{x_0}{\sqrt{c}}, \frac{y_0}{\sqrt{c}} \right\}$$

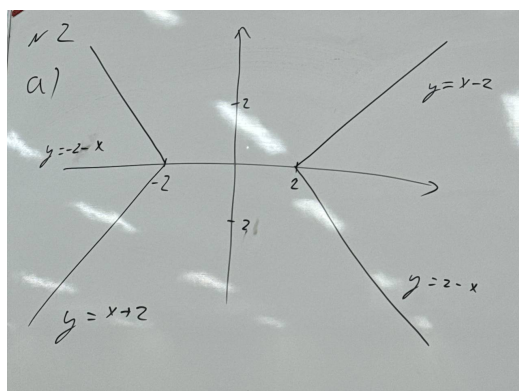
Посчитаем частные производные:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \Rightarrow \vec{\nabla} f = (2x_0; 2y_0)$$

Неявно заданные функции

$$F(y, \vec{x}) = 0$$

Задача 2. а.



Рисуночки, ура.

Задача 2. б.

Задача 2. с.

Семинар 24 мая

Задача 4.

$$x + y(x) = xy^2(x) - x^2y(x), \quad |y| < |x|$$

Продифференцируем по x : $1 + y'_x = y^2 + 2xy \cdot y'_x - x^2y'_x - 2xy \Rightarrow$

$$\Rightarrow y'_x = \frac{y^2 - 2xy - 1}{1 - 2xy + x^2} = 0, \quad |y| < |x|$$

$$\begin{cases} \frac{y^2 - 2xy - 1}{1 - 2xy + x^2} = 0 \\ x + y = xy^2 - x^2y \end{cases}$$

$$x = \frac{y^2 - 1}{2y}$$

$$x + y = xy^2 - x^2y$$

$$\frac{y^2-1}{2y} + y = \frac{y^2-1}{2y}y^2 - \left(\frac{y^2-1}{2y}\right)y$$

Решение системы было подсказано:

$$y = \pm\sqrt{3} \pm 2\sqrt{2}$$

Вспоминаем факты из прошлого:

$$\begin{cases} y'_x = 0 \\ y''_{xx} > 0 \end{cases} \quad \text{- точка минимума}$$

$$\begin{cases} y'_x = 0 \\ y''_{xx} < 0 \end{cases} \quad \text{- точка максимума}$$

Дифференцируем второй раз (при этом в наших точках первая производная зануляется):

$$y''_{xx} - 2y''_{xx}xy + x^2y''_{xx} = -2y - \underset{=0}{2xy'_x}$$

$$y''_{xx} = \frac{-2y}{1 - 2xy + x^2} = \frac{2y}{2xy - 1 - x^2}$$

Задача 5.

Хотим $u = f(x, y)$.

$$u^3 - 2u^2x + uxy - 2 = 0$$

Выясним, выполняется ли теорема о неявной функции.

$$\frac{\partial F}{\partial u} = 3u^2 - 4ux + xy \Big|_{\substack{x=1 \\ y=1}} = 3u^2 - 4u + 1$$

Найдём u с помощью изначального уравнения, подставив $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$:

$$u^3 - 2u^2 + u - 2 = (u - 2)(u^2 + 1) \Rightarrow u = 2$$

$$\text{Тогда } \frac{\partial F}{\partial u} = 12 - 8 + 1 = 5 \neq 0$$

$$F(u, x, y) = 0 \longrightarrow u = u(x, y)$$

Тогда изначальное равенство выглядит так:

$$(*) = u^3(x, y) - 2u^2(x, y)x + u(x, y)xy - 2 = 0$$

$$\frac{\vartheta(*)}{\vartheta x} = 3u^2u'_x - 4uu'_xx - 2u^2 + u'_xxy + uy = 0$$

Подставим найденное значение u и заданные значения x, y :

$$12u'_x - 8u'_x - 8 + u'_x + 2 = 0 \Rightarrow u'_x = \frac{6}{5}$$

Задача 6.

Найти в точке $(x, y, u, v) = (1, 0, 1, -2)$ частные производные $u = f_1(x, y), v = f_2(x, y)$, заданной системой:

$$\begin{cases} xu + yv - u^3 = 0 \\ x + y + u + v = 0 \end{cases}$$

Хотим, чтобы определитель матрицы Якоби не занулялся, то есть

$$\begin{vmatrix} \frac{\vartheta F}{\vartheta u} & \frac{\vartheta F}{\vartheta v} \\ \frac{\vartheta G}{\vartheta u} & \frac{\vartheta G}{\vartheta v} \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x - 3u^2 & y \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

Продолжаем решение:

$$\begin{cases} xu(x, y) + yv(x, y) - u^3(x, y) = 0 \\ x + y + u(x, y) + v(x, y) = 0 \end{cases}$$

Дифференцируем по y :

$$\begin{cases} xu'_y + v_y + v'_yy - 3u^2u'_y = 0 \\ u'_y + v'_y + 1 = 0 \end{cases}$$

Подставим значения $(1, 0, 1, -2)$

$$\begin{cases} u'_y - 2 - 3u'_y = 0 \\ u'_y + v'_y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'_y = -1 \\ v'_y = 0 \end{cases}$$

Нахождение экстремумов.

\vec{x}_0 называется точкой минимума, если $f(\vec{x}_0)$ самое маленькое в $U_\delta(\vec{x}_0)$

Задача 1.

$$u(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 3yx - 36y + 26, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 39, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 6xy - 36 = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ xy = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \end{cases}$$

Составим матрицу Гесса: $\begin{pmatrix} u''_{xx} & u''_{xy} \\ u''_{xy} & u''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{pmatrix}$

Если матрица Гесса положительно определена $\Rightarrow \vec{x}_0$ - точка минимума.

Если она отрицательно определена $\Rightarrow \vec{x}_0$ - точка максимума.

Если она знакопеременна $\Rightarrow \vec{x}_0$ - не экстремум.

Итак, можно сделать вывод:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \quad - \text{ не экстремум}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \quad - \text{ максимум}$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \end{cases} \quad - \text{ не экстремум}$$

$$\begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \end{cases} \quad - \text{ минимум}$$

Семинар 31 мая**Задача 1.**

Найти условные экстремумы функции $u = xyz$ относительно уравнений связи

$$x + y + z = 6 \quad x + 2y + 3z = 6$$

Получаем систему:

$$\begin{cases} u = xyz \\ 6 - y - 2z = 6 \\ y = 6 - 2y - 3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = z(-2z)(6 + z) = -2z^3 - 12z^2 \\ y = -2z \\ x = 6 + z \end{cases} \Rightarrow u' = -6z^2 -$$

$$24z = -6z(z + 4)$$

То есть минимум при $z = -4$, максимум при $z = 0$ Ответ: точка минимума $(2, 8, -4)$, точка максимума $(6, 0, 0)$

Задача 2.

Найти условные экстремумы функции $f(x, y) = 6 - 5x - 4y$ относительно уравнения связи:

$$x^2 - y^2 - 9 = 0$$

Если явно не выражается, то нужно составлять функцию Лагранжа:

$$L(\vec{x}, \vec{\lambda}) = f_0(\vec{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x)$$

f_i - уравнение связи. λ_i - коэффициенты для зануления набора f_i (уравнения связи линейно зависимы)

Если \vec{x}_0 - точка условного локального экстремума, то $\exists \vec{\lambda}_0$

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial L}{\partial x_i} \right|_{\substack{\vec{x} \\ \vec{\lambda}_0}} = 0 \\ f_i(\vec{x}_0) = 0 \end{cases}$$

Составим уравнение Лагранжа:

$$6 - 5x - 4y = f(x, y)$$

$$x^2 - y^2 - 9 = 0$$

$$L(\vec{x}, \vec{\lambda}) = 6 - 5x - 4y + \lambda(x^2 - y^2 - 9)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -5 + 2\lambda x = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -4 - 2\lambda y = 0$$

$$\begin{cases} -5 + 2\lambda x = 0 \\ -4 - 2\lambda y = 0 \\ x^2 - y^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2\lambda} \\ y = -\frac{4}{2\lambda} \\ \frac{25}{4\lambda^2} - \frac{16}{4\lambda^2} = 9 \end{cases} \quad (1)$$

$$(1) : \frac{1 - 4\lambda^2}{4\lambda^2} = 0 \Rightarrow \lambda = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 5 \\ y = -4 \\ \lambda = \frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -5 \\ y = 4 \\ \lambda = -\frac{1}{2} \end{cases} \end{cases}$$

Посчитаем Гессониан для каждой из λ :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & -2\lambda \end{pmatrix}$$

Тогда для $\lambda = \frac{1}{2}$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ не является экстремумом, так как знакопеременная (начиная с плюса).

Для $\lambda = -\frac{1}{2}$: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ не является экстремумом, так как оба минора отрицательные.

Задача 3. а.

Найти наибольшее и наименьшее значение функции на множестве заданном ограничением:

$$f(x, y) = (y^2 - x^2) \cdot e^{1-x^2+y^2} \quad x^2 + y^2 \leq 4$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (-2x)e^{1-x^2+y^2} + (y^2 - x^2)(-2x)e^{1-x^2+y^2} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (2y)e^{1-x^2+y^2} + (y^2 - x^2)2ye^{1-x^2+y^2} = 0$$

$$\begin{cases} e^{1-x^2+y^2}(2y + 2y^3 - 2yx^2) = 0 \\ e^{1-x^2+y^2}(-2x + 2x^3 - 2xy^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(y^2 - x^2 + 1) = 0 \\ x(x^2 - y^2 - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\text{При } y = 0: \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\text{При } x = 0: y = 0$$

$$\text{При } x, y \neq 0: x^2 - y^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = y^2 + 1$$

Рассмотрим значения функции от $x^2 - y^2$ при таких значениях (не забываем про $x^2 + y^2 \leq 4$).

$$f(0) = e \cdot 0 = 0$$

$$f(1) = -1$$

Рассмотрим граничные точки:

$$f_0(x, y) = (y^2 - x^2)e^{1-x^2+y^2} = 0$$

$$f_1(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0 \Rightarrow y^2 = 4 - x^2$$

$$\begin{aligned}
f_0(x) &= (4 - 2x^2)e^{5-2x^2} \Rightarrow f'_0(x) = -4xe^{5-2x^2} - 4x(4 - 2x^2)e^{5-2x^2} = \\
&= e^{5-2x^2}(-4x)(1 + 4x - 2x^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases} \Rightarrow \\
\Rightarrow f_0(0) &= 4e^5, \quad f\left(\pm\sqrt{\frac{5}{2}}\right) = -1e^0 = -1
\end{aligned}$$

Стоит поверить десмос'у наслово, что точки $(0, \pm 1)$ являются локальными максимумами, а точки $\left(\sqrt{\frac{5}{2}}, 0\right)$ - локальные минимумы.

Задача 3. б.

$$f(x, y) = 3 + 2xy \quad f_1(x, y) = x^2 + y^2 \leq 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x$$

Зануляется в точке $0, 0$. $f(0, 0) = 3$

$$: (\vec{x}, \vec{\lambda}) = 3 + 2xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2y + 2\lambda x = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2x + 2\lambda y = 0$$

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$\begin{cases} y = -\lambda x \\ 2x - 2\lambda^2 x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow y = 0 \\ \lambda^2 = 1 \rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = -1 \end{cases} \end{cases} \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Отсюда получаем ответ:

$$2|xy| \leq x^2 + y^2 \leq 1$$

$$f(x, y) \in [2, 4] \Rightarrow \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{bmatrix}$$

Семинар 7 июня

Задача 1.

Равенство G системе уравнений здесь обозначает множество точек внутри фигуры, ограниченной уравнениями системы.

$$\iint_G (1+x+y)^{-2} dx dy$$

a.

$$\begin{aligned} G &= \begin{cases} x = 2y \\ y = 2x \\ x + y = 6 \end{cases} \\ &= \int_0^2 \left(\int_{\frac{x}{2}}^{2x} \frac{1}{1+x+y^2} dy \right) dx + \int_2^4 \left(\int_{\frac{x}{2}}^{6-x} \frac{1}{1+x+y^2} dy \right) dx = \\ &= \int_0^2 \left(-\frac{1}{1+x+2x} \right) - \left(-\frac{1}{1+x+\frac{x}{2}} \right) dx + \int_2^4 \left(-\frac{1}{1+x+(6-x)} - \left(-\frac{1}{1+x+\frac{x}{2}} \right) \right) dx = \\ &= \int_0^2 \frac{1}{1+\frac{3}{2}x} - \frac{1}{1+3x} dx + \int_2^4 \frac{1}{1+\frac{3}{2}x} - \frac{1}{7} dx = \int_0^2 \frac{1}{1+\frac{3}{2}x} dx - \int_0^2 \frac{1}{1+3x} dx + \\ &+ \int_2^4 \frac{1}{1+\frac{3}{2}x} dx - \frac{2}{7} = \frac{2}{3} \ln \left(1 + \frac{3}{2}x \right) \Big|_0^4 - \frac{1}{3} \ln(1+3x) \Big|_0^2 - \frac{2}{7} = \frac{1}{3} \ln(7) - \frac{2}{7} \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned} f(x, y) = y^2, \quad G &= \begin{cases} x = y^2 \\ y = x - 2 \end{cases} \\ \iint_G f(x, y) dx dy &= \int_{-1}^2 \left(\int_{y^2}^{y+2} y^2 dx \right) dy, \text{ дальше не считали.} \end{aligned}$$

Задача 2.

Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле

$$\int_0^{\pi} \left(\int_0^{2 \sin x} f(x, y) dy \right) dx = \int_0^2 \left(\int_{\arcsin \frac{y}{2}}^{\pi - \arcsin \frac{y}{2}} f(x, y) dx \right) dy$$

Если x меняется от 0 до π , то y меняется от 0 до 2. При фиксированном y принимает значения, являющейся границами вложенного интеграла правой части.

Задача 3.

Вычислить

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_x^1 \sqrt[4]{1-y^2} dy \right) dx &= \int_0^1 \left(\int_0^y \sqrt[4]{1-y^2} dx \right) dy = \int_0^1 \sqrt[4]{1-y^2} y dy = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt[4]{1-y^2} d(1-y^2) = -\frac{1}{2} \left(\frac{4}{5} (1-y^2)^{\frac{5}{4}} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{5} \end{aligned}$$