

Лекции по дискретной математике 4 МОДУЛЬ.

Андрей Тищенко

2023/2024

Лекция 12 апреля.

Деревья

$\forall T$ T - (m, n) граф тогда:

T дерево $\Leftrightarrow T$ связный ациклический

$\Leftrightarrow T$ минимально связан

$\Leftrightarrow T$ связан $m = n - 1$

\Leftrightarrow в T любые 2 вершины соединены ровно 1 простым путём.

Определение: граф называется минимально связным если из него нельзя удалить ребро без потери связности.

Определение: Пусть $G = (V, E)$ - связный граф. Любое дерево $T = (V, E')$, такое что $E' \subseteq E$, (то есть T - подграф) называется остовным.

Теорема: В любом связном (n, m) графе $G = (V, E)$ есть остовное дерево T

Доказательство: Индукция по m

$m = 0$: $n = 1$, $T = G$.

$m > 0$: 1. G - дерево, тогда $T = G$

2. G не дерево \Rightarrow не минимально связный $\Rightarrow \exists x, y \quad xEy \wedge$
ребро xy можно удалить без потери связности.
 G' - результат удаления ребра xy
 G' - $(n, m-1)$ связный граф \Rightarrow в G' есть остовное дерево
 T'
 $G = (V, E), G' = (V, E \setminus \{xy, yx\})$. То есть T' подграф G' ,
а G' подграф $G \Rightarrow T := T'$

Двудольные графы

Определение: граф $G = (V, E)$ двудольный $\Leftrightarrow \exists V_1, V_2 :$

$$\begin{cases} V_1 \cap V_2 = \emptyset \\ V_1 \cup V_2 = V \\ V_1, V_2 \neq \emptyset \\ x, y \in V_i \Rightarrow xy \notin E \end{cases}$$

Определение: граф $G = (V, E)$ раскрашиваем в k цветов $\Leftrightarrow \exists c : V \rightarrow \underline{k}$
 $\forall x, y \quad (c(x) = c(y) \Rightarrow xy \in E)$

Утверждение: G k -дольный $\Rightarrow \forall l \geq k, G$ можно раскрасить в l цветов.

Теорема 2: (Кёнинга).

\forall графа $G = (V, E), |V| \geq 2$ следующие условия равносильны:

- (a) G двудольный
- (b) в G нет циклов нечётной длины
- (c) в G нет простого цикла нечётной длины

Доказательство: $a \Rightarrow b$ допустим есть цикл нечётной длины:

$$x_1 x_2 x_3 x_4 \dots x_{2n} x_{2n+1} x_1$$

Без ограничения общности:

$$x_1 \in V_1 \Rightarrow x_2 \in V_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow x_{2n} \in V_2 \Rightarrow x_{2n+1} \in V_1 \Rightarrow x_1 \in V_2 \perp$$

$b \Rightarrow c$. Если нет никакого цикла нечётной длины, то простого также не будет. $c \Rightarrow a$.

Лемма* если граф G связан и $|V| \geq 2$ и в G нет простых циклов нечётной длины, то G двудольный.

$$G = G_1 \sqcup G_2 \sqcup \dots \sqcup G_n$$

Ещё не может быть компонент порядка 1.

$G' = (V', E)$ связен, $|V'| \geq 2$, в G' нет простого цикла нечётной длины.

Рассмотрим произвольную $z \in V$, тогда $\exists y \ zEy$

$d(u, w) :=$ длина кратчайшего пути между u, w в G'

$$d(z, z) = 0, \ d(z, y) = 1$$

$$V_1 = \{x \in V' \mid d(z, x) \equiv 1(2)\}$$

$$V_2 = \{x \in V' \mid d(z, x) \equiv 0(2)\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_1 \cap V_2 = \emptyset \\ V_1 \cup V_2 = V' \\ y \in V_1 \neq \emptyset \wedge z \in V_2 \neq \emptyset \end{cases}$$

Предположим $\exists u, w \in V_i \quad uEw \Rightarrow u \neq w$

$$d(z, u) \equiv d(z, w)(2)$$

Рассмотрим кратчайшие (\rightarrow простые) пути $z \xrightarrow{p} u \wedge z \xrightarrow{q} w$

Пусть $t :=$ самая правая общая точка $z \xrightarrow{p} u, z \xrightarrow{q} w$ (самая правая - такая, что путь до u и w минимален).

$$z \xrightarrow{p} w = z \xrightarrow{p_1} t \xrightarrow{p_2} w$$

$$z \xrightarrow{q} u = z \xrightarrow{q_1} t \xrightarrow{q_2} u$$

$$\text{Утверждение: } \left| z \xrightarrow{p_1} t \right| = \left| z \xrightarrow{q_1} t \right|$$

Доказательство: Иначе без ограничения общности:

$$\begin{aligned} \left| z \xrightarrow{p_1} t \right| &> \left| z \xrightarrow{q_1} t \right| \\ \left| z \xrightarrow{q_1} t \xrightarrow{p_2} \right| &< \left| z \xrightarrow{p} w \right| \perp \left| z \xrightarrow{p} w \right| = d(z, w) = d(z, u) \\ \left| z \xrightarrow{p_1} t \right| + \left| t \xrightarrow{p_2} w \right| &\equiv \left| z \xrightarrow{q_1} t \right| + \left| t \xrightarrow{q_2} u \right| \\ \left| t \xrightarrow{p_2} w \right| &\equiv \left| t \xrightarrow{q_2} u \right| \end{aligned}$$

Рассмотрим цикл twu , он является простым, его длина будет равна:

$$\left| t \xrightarrow{p_2} w \right| + \left| t \xrightarrow{q_2} u \right| + 1 \equiv 1(2)$$

Но простых циклов длины 2 тут быть не может \perp .

Лемма 4. Если (n, m) граф $G = (V, E)$ двудольный с долями V_1 и V_2 , то

$$\sum_{x \in V_1} d(x) = m = \sum_{x \in V_2} d(x)$$

Доказательство: Индукция по количеству рёбер.

$$m = 0: \forall x \, d(x) = 0$$

$m > 0$: есть ребро uw , удалим его и получим G'

Без ограничения общности:

$$uw \in E \Rightarrow u \in V_1, \, w \in V_2$$

G' - двудольный $(n, \, m - 1)$ граф с долями $V - 1, \, V_2$

$$\sum_{x \in V_1} d(x) = \sum_{x \in V_1 \setminus \{u\}} (d_{G'}(x) + 1) = \sum_{x \in V_1} d_{G'}(x) + 1 = (m - 1) + 1 = m$$

Задача о свадьбах

Определение: граф G называется паросочетанием

$$\Leftrightarrow \forall x \, d(x) = 1$$

$$\text{Условие для выдачи женщин замуж } \forall S \subseteq V_1 \quad |E[S]| \geq |S|$$

$T = \{t_1, \, t_2, \dots, \, t_n\}$. Хотим построить инъекцию $T \xrightarrow{f} \bigcup T = t_1 \cup \dots \cup t_n$, также хотим $\forall t \in T \, f(t) \in t$.

Тогда нужно $\forall S \subseteq T \quad |\bigcup S| \geq |S|$

Лекция 19 апреля

Теорема Холла:

Дано: двудольный граф $G \, (W(\text{женщины}), \, M(\text{мужчины}), \, E), \, k = |W|$

Требуется выдать всех женщин замуж по любви без многоженства и многомужества

Формально:

$$\exists f : W \rightarrow M$$

1. f - инъективно

2. $\forall t \in E \, f(t)$

$$\exists f \text{ удовлетворяющее условию } \underset{\text{т. Холла}}{\Leftrightarrow} \forall S \subseteq W \quad |S| \leq |E[S]| \quad (*)$$

Доказательство:

” \Leftarrow ”

$\forall S \subseteq W \quad f$ - инъективно

$$S \sim f[S] \subseteq E[S]$$

$$S \lesssim E[S] \Rightarrow |S| \leq |E[S]|$$

” \Rightarrow ”

Индукция по m

$$\forall t \ 1 = |\{t\}| \leq |E[\{t\}]| \Rightarrow \forall t \in W \ \exists x \ tEx \Rightarrow E \text{ - тотально для } W$$

1й случай: E - инъективно

$f(x) :=$ любой $x \in E[\{x\}]$. Тогда мы в шоколаде

2й случай: E - не инъективно

а. $\exists S_0 \ (S_0 \neq \emptyset \wedge |S_0| = |E[S_0]|)$ Рассмотрим подграф G , индуцированный множеством S_0

$$\begin{aligned} S_0 \neq W &\Rightarrow |S_0| < |W| \\ \Rightarrow |W \setminus S_0| \neq \emptyset &\Rightarrow \text{не все ребра в } G_0 \\ \Rightarrow \text{размер}(G_0) < m \end{aligned}$$

Допустим для G_0 выполнено условие (*)

$$S' \subseteq S_0 \Rightarrow E[S'] \subseteq E[S_0] \Rightarrow |S'| \leq |E[S']|$$

Вывод: по предположению индукции для G_0 есть соответствующая функция $f_0 : S_0 \rightarrow E[S_0]$

G_1 = это те вершины и ребра, которые не вошли в G_0 .

Утверждение: Для G_1 выполнено (*).

Пусть $S' \subseteq W \setminus S_0$

$$|E[S_0]| + |S'| = |S_0| + |S'| = |S_0 \cup S'| \leq |E[S_0 \cup S']| = |E[S_0] \cup E[S']| =$$

$$= |(E[S'] \setminus E[S_0]) \cup E[S_0]| = |E[S'] \setminus E[S_0]| + |E[S_0]|$$

Получаем сокращением $|S'| = |E[S'] \setminus E[S_0]|$

Так как $|S_0| \neq 0$, то размер $(G_0) > 0 \Rightarrow \text{размер}(G_1) < m$.

По принципу индукции для G_1 , есть $f_1 : W \setminus S_0 \rightarrow E_{G_1}[W \setminus S_0]$

$$f := f_0 \cup f_1$$

$$6. \forall S (S \neq W \wedge S \neq \emptyset \Rightarrow |S| < |E[S]|)$$

так как E - не инъекция, то:

$$\exists x \in M \exists t_1, t_2 \in W (t_1 \neq t_2 \wedge t_1 E x \wedge t_2 E x) \Rightarrow \text{размер}(G_1) < 1$$

$$|E_{G_1}[S]| \geq |E[S]| - 1$$

$$\Rightarrow |S| < |E[S]| \leq |E_{G_1}[S]| + 1 \Rightarrow |S| \leq |E_{G_1}[S]|$$

По предположению индукции для G_1 , есть $f_1 : S \rightarrow E_{G_1}[S] \subseteq E_G[S]$

$$f := f_1$$

Теорем Холла о "представителях"

Дано U - конечное (не обязательно):

$$T = \{t_1, \dots, t_k\} \subseteq \mathcal{P}(U)$$

тогда в конкретном t можно инъективно выбрать по элементу \Leftrightarrow

$$\Leftrightarrow \forall S \subseteq T |S| \leq \left| \bigcup_{=t_{i_1} \cup \dots \cup t_{i_q}} S \right|$$

Строим граф (T, U, E)

$$t E x :\Leftrightarrow x \in t$$

$$E[\{t_{i_1} \cup \dots \cup t_{i_q}\}] = t_{i_1} \cup \dots \cup t_{i_q}$$

т. Дилуорса \Rightarrow т. Холла

тут идут рисуночки, сам нарисуешь (демонстрация без доказательства).

Понял, Вова. Скиньте рисуночки, пожалуйста

Ориентированные графы

Определение:

Ориентированный граф (орграф) - это пара (V, A) , где $V \neq \emptyset$, $A \subseteq V^2$

$$N_+(x) := A[\{x\}]$$

$$N_-(x) := A^{-1}[\{x\}]$$

Показатель исхода

$$d_+(x) = |N_+(x)|$$

Показатель захода

$$d_-(x) = |N_-(x)|$$

Утверждение:

$$\sum_{x \in V} d_+(x) = |A| = \sum_{x \in V} d_-(x)$$

Определение:

Турнир - это орграф, такой, что

$$1 \quad \forall x \neg xAx$$

$$2 \quad \forall x, y (x \neq y \Rightarrow (xAy \Leftrightarrow \neg yAx))$$

Беспредельный анализ

Рассматриваем последовательности: $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$

$$f'(x) = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x}$$

Перефразируем в терминах "бесконечно малых"

$$f'(x) = \frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x}, \text{ где } \delta x \text{ бесконечно малая}$$

Для последовательностей зададим

$$\Delta a_n := a_{n+1} - a_n$$

Вторая производная

$$\begin{aligned} f'' &= \frac{f'(x + \delta x) - f'(x)}{\delta x} = \frac{1}{\delta x} \left(\frac{f(x + 2\delta x) - 2f(x + \delta x) + f(x)}{\delta x} \right) = \\ &= \frac{f(x + 2\delta x) - 2f(x + \delta x) + f(x)}{(\delta x)^2} \end{aligned}$$

чем то похоже на $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

Для последовательностей

$$\Delta^2 a_n = \Delta a_{n+1} - \Delta a_n = a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n$$

$$\Delta^3 a_n = \Delta^2 a_{n+1} - \Delta^2 a_n = a_{n+3} - 3a_{n+2} + 3a_{n+1} - a_n$$

Зададим S :

$$S : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \quad S a_n = a_{n+1}$$

Тогда получаем дельту

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n = S a_n - a_n = (S - 1)a_n$$

Получаем $\Delta = S - 1 \Rightarrow S = \Delta + 1 \Rightarrow S^k = (\Delta + 1)^k$ Веселый результат

$$a_{n+k} = S^k a_n = (\Delta + 1)^k a_n = \sum_{t=0}^k C_k^t \Delta^t a_n = \sum_{t=0}^k \frac{\Delta^t a_n}{t!} k^{(t)}$$

где $k^{(t)} = k \cdot (k - 1) \cdot \dots \cdot (k - t + 1)$

Лекция 26 апреля

Линейное пространство (Seq)

Носитель: $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ni \vec{a} = (a_0, a_1, \dots) = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad \vec{a} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$

Скаляр: \mathbb{R}

$$\alpha \in \mathbb{R} : \alpha \vec{a} = (\alpha a_0, \alpha a_1, \dots), \quad (\alpha \vec{a})_n = \alpha a_n$$

Сложение:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots), \quad (\vec{a} + \vec{b})_n = a_n + b_n$$

Утверждение 1: При этом выполняются все аксиомы линейного пространства.

Проверим дистрибутивность:

$$\begin{aligned}\left(\alpha(\vec{a} + \vec{b})\right)_n &= \alpha(a_n + b_n) = \alpha a_n + \alpha b_n = (\alpha \vec{a})_n + (\alpha \vec{b})_n = (\alpha \vec{a} + \alpha \vec{b})_n \\ ((\alpha + \beta)\vec{a})_n &= (\alpha + \beta)a_n = \alpha a_n + \beta a_n = (\alpha \vec{a} + \beta \vec{a})_n\end{aligned}$$

Ещё факты:

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{0} &= \vec{a} \\ \vec{0} &= (0, 0, 0, \dots) \\ \vec{a} + \vec{b} &= \vec{b} + \vec{a} \\ \vec{a} + (-\vec{a}) &= \vec{0} \\ (-\vec{a})_n &= -a_n\end{aligned}$$

Определение: $F : Seq \longrightarrow Seq$ линейная

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \forall \vec{a}, \vec{b} \in Seq \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\ F(\alpha \vec{a} + \beta \vec{b}) &= \alpha F(\vec{a}) + \beta F(\vec{b})\end{aligned}$$

Утверждение 2:

Каждый скаляр $\alpha \in \mathbb{R}$ можно рассматривать как линейный оператор:

$$\begin{aligned}\alpha : Seq \rightarrow Seq \quad \alpha(\vec{a}) &= (\alpha a_0, \alpha a_1, \dots) \\ \alpha(\alpha' \vec{a} + \beta' \vec{b}) &= \alpha(\alpha' \vec{a}) + \alpha(\beta' \vec{b}) = \alpha'(\alpha \vec{a}) + \beta'(\alpha \vec{b})\end{aligned}$$

Ещё линейные операторы

Сдвиг: $S : Seq \longrightarrow Seq$

$$\begin{aligned}S(a_0, a_1, a_2, \dots) &= (a_1, a_2, a_3, \dots) \\ (S\vec{a})_n &= a_{n+1} \\ &= Sa_n \\ S(\alpha a_n + \beta b_n) &= (\alpha \vec{a} + \beta \vec{b})_{n+1} = \alpha a_{n+1} + \beta b_{n+1} = \alpha Sa_n + \beta Sb_n\end{aligned}$$

Разность: $\Delta : Seq \longrightarrow Seq$

$$\begin{aligned}(\Delta \vec{a})_n &= a_{n+1} - a_n \\ &= \Delta a_n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\Delta\left(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}\right)\right)_n &= \left(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}\right)_{n+1}-\left(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}\right)_n = \alpha a_{n+1}+\beta b_{n+1}-\alpha a_n-\beta b_n = \\
&= \alpha(a_{n+1}-a_n)+\beta(b_{n+1}-b_n)=\alpha\Delta a_n+\beta\Delta b_n=\left(\alpha\Delta\vec{a}+\beta\Delta\vec{b}\right)_n
\end{aligned}$$

Утверждение 3:

Линейные операторы $Seq \longrightarrow Seq$ образуют кольцо, то есть их можно "разумным образом" складывать и умножать друг на друга.

Допустим $F, G \in L(Seq)$:

$$(F+G)(\vec{a}) = F(\vec{a}) + G(\vec{a})$$

$$F \cdot G = F \circ G \text{ ассоциативно}$$

Есть нулевой элемент

$$F+0 = F, \quad 0 \in L(Seq)$$

$$(F+0)(\vec{a}) = F(\vec{a}) + 0(\vec{a}) = F(\vec{a})$$

Обратный по сложению

$$F+(-F) = 0, \quad -F = -1 \circ F$$

Нейтральный по умножению

$$F \cdot 1 = F = 1 \cdot F, \quad 1(\vec{a}) = \vec{a}$$

Дистрибутивность

$$F(G+H) = FG + FH$$

Применим это к \vec{a} :

$$\begin{aligned}
(F(G+H))(\vec{a}) &= (F \circ (G+H))(\vec{a}) = F((G+H)\vec{a}) = F(G(\vec{a})) + F(H(\vec{a})) = \\
&= (FG + FH)(\vec{a}) = (G+H)(F(\vec{a})) = G(F(\vec{a})) + H(F(\vec{a})) = (GF + HF)(\vec{a})
\end{aligned}$$

Утверждение 4:

Скаляр коммутирует с любым линейным оператором:

Доказательство: пользуемся линейностью F

$$(\alpha F)(\vec{a}) = \alpha(F(\vec{a})) = F(\alpha\vec{a}) = (F\alpha)(\vec{a})$$

Уточнение:

$$\Delta_n = Sa_n - 1a_n = ((S - 1)\vec{a})_n \Rightarrow \Delta = S - 1 \Rightarrow S = \Delta + 1$$

Вспомним биномиальную теорему:

$$\forall x \in \mathbb{R} \ \forall n \in \mathbb{N} \quad (x + 1)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k 1^{n-k}$$

Лемма 5:

$$\forall F \in L(Seq) \forall \alpha \in \mathbb{R} \ \forall n \in \mathbb{N} \quad (F + \alpha)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k F^k (\alpha)^{n-k}$$

Доказательство: индукция по n

База:

$$(F + \alpha)^0 = 1 = \sum_{k=0}^0 C_0^0 F^0 \alpha^{0-0} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

Шаг: пользуемся предположением индукции, дистрибутивностью

$$\begin{aligned} (F + \alpha)^{n+1} &= (F + \alpha)(F + \alpha)^n = (F + \alpha) \sum_{k=0}^n C_n^k F^k \alpha^{n-k} = \sum_{k=0}^n F C_n^k F^k \alpha^{n-k} + \\ &+ \sum_{k=0}^n \alpha C_n^k F^k \alpha^{n-k} \stackrel{\text{YTB}^4}{=} \sum_{k=0}^n C_n^k F^{k+1} \alpha^{n-k} + \sum_{k=0}^n C_n^k F^k \alpha^{n+1-k} = \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} F^k \alpha^{n+1-k} + \\ &+ \sum_{k=0}^n C_n^k F^k \alpha^{n+1-k} = \underbrace{C_n^0}_{C_{n+1}^0} F^0 \alpha^{n+1} + \sum_{k=1}^n \underbrace{(C_n^{k+1} + C_n^k)}_{=C_{n+1}^k} F^k \alpha^{n+1-k} + \underbrace{C_n^n}_{=C_{n+1}^{n+1}} F^{n+1} \alpha^0 = \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k F^k \alpha^{n+1-k} \end{aligned}$$

Следствие 6: разность порядка t

$$\begin{aligned}\Delta^t = (s-1)^t &= \sum_{k=0}^t C_t^k S^k (-1)^{t-k} = \sum_{k=0}^t C_t^k S^{t-k} (-1)^k = \\ &= \sum_{k=0}^t (-1)^k C_t^k S^{t-k}\end{aligned}$$

Следствие 7:

$$\begin{aligned}\Delta^t a_n &= \sum_{k=0}^t (-1)^k C_t^k S^{t-k} a_n = \sum_{k=0}^t (-1)^k C_t^k a_{n+t-k} \\ \Delta^2 a_n &= C_2^0 a_{n+2} - 1C_2^1 a_{n+1} + C_2^2 a_n = a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n \\ \Delta^3 a_n &= a_{n+3} - 3a_{n+2} + 3a_{n+1} - a_n\end{aligned}$$

Пример:

Первая степень

$$\begin{aligned}a_n &= a + dn \\ \Delta a_n &= a_{n+1} - a_n = a + d(n+1) - a - dn = d \\ \Delta^2 a_n &= \Delta d = d - d = 0\end{aligned}$$

Вторая степень

$$\begin{aligned}a_n &= a + bn + cn^2 \\ \Delta a_n &= a_{n+1} - a_n \\ &= c(n+1)^2 + b(n+1) - cn^2 - bn \\ &= 2cn + c + b \\ \Delta^2 a_n &= 2c(n+1) - 2cn = 2c \\ \Delta^3 a_n &= 0\end{aligned}$$

Лемма 8:

Если $P(n)$ - многочлен степени $m > 0$, то
 $\Delta P(n)$ - многочлен степени $m - 1$, а $\Delta^{m+1}P(n) = 0$

Доказательство: индукция по m

База:

Шаг:

$$\begin{aligned}
 P(n) &= \overset{\neq 0}{\alpha} n^m + \overset{\deg \leq m-1}{Q(n)} \\
 \Delta P(n) &= P(n+1) - P(n) = \alpha(n+1)^m + Q(n+1) - \alpha n^m - Q_n = \\
 &= \alpha((n+1)^m - n^m) + \Delta Q(n) = \alpha(C_m^1 n^{m-1} + C_m^2 n^{m-2} + \dots) + \overset{\text{по ПИ } \deg \leq m-2}{Q'(n)} \\
 &\text{Итак, степень } m-1.
 \end{aligned}$$

Следствие:

$\deg(\Delta^m P(n)) = 0 \Rightarrow \Delta^m P(n) = \text{const} \Rightarrow \Delta^{m+1}P(n) = 0$. Отсюда рассмотрим:

$$\begin{aligned}
 0 &= \Delta^{m+1}a_n = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k C_{m+1}^k a_{n+m+1-k} \\
 a_{n+m+1} &= \sum_{k=1}^{m+1} (-1)^{k-1} C_{m+1}^k a_{n+m+1-k}
 \end{aligned}$$

Следствие 9:

Если $a_n = P(n)$, многочлен степени $m > 0$, то

$$a_{n+m+1} = \sum_{k=1}^{m+1} (-1)^{k-1} C_{m+1}^k a_{n+m+1-k}$$

Пример:

$$\begin{aligned}
 \deg a_n = 1 &\Rightarrow a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n \\
 \deg a_n = 2 &\Rightarrow a_{n+3} = 3a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n
 \end{aligned}$$

Следствие 10:

$$S^t = (\Delta + 1)^t = \sum_{k=0}^t C_t^k \Delta^k$$

$$\begin{aligned}
a_{n+t} &= S^t a_n = \sum_{k=0}^t C_t^k \Delta^k a_n = \sum_{k=0}^t \frac{\overbrace{t(t-1)\dots(t-k+1)}^{t^{(k)}}}{k!} \Delta^k a_n = \\
&= a_n + \frac{\Delta a_n}{1!} t^{(1)} + \frac{\Delta^2 a_n}{2!} t^{(2)} + \dots + \frac{\Delta^t a_n}{t!} t^{(t)}
\end{aligned}$$