Теория вероятности 1 модуль.

Андрей Тищенко БПИ231 @AndrewTGk

2024/2025

Семинар 6 сентября.

Теория

Классическое определение вероятности:
Количество исходов конечно, они взаимоисключающие и равновозможные.
$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \in [0,\ 1]$.

Задача 0

Казино Монте-Карло с 37 слотами. 18 красных, 18 чёрных и 0. Тогда вероятность выиграть при ставке на красное будет $\frac{18}{37}$. Ставка удваивается. Можно играть на дюжины $[1,\ 12]$, $[13,\ 24]$, $[25,\ 36]$, тогда вероятность выигрыша $\frac{12}{37}$. Ставка при этом утраивается.

Задача 1

У взломщика есть связка из 10 ключей. С какой вероятностью он откроет дверь, перебрав ровно половину ключей.
Ключ равновероятно может находиться на любой позиции в его связке. На пятом месте он будет в единственном случае, тогда $P = \frac{1}{10}$

Задача 2

Студент выучил 20 билетов из тридцати. С какой вероятностью ему достанется выученный билет, если он заходит первым? Вторым? Если первым: $\frac{20}{30}$
Если вторым: $\frac{19}{29}\frac{2}{3} + \frac{20}{29}\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Задача 3

Есть буквы М, О, С, К, В, А. Какова вероятность получить слово МОСКВА при случайном расположении этих букв.
$P(A) = \frac{1}{6!} = \frac{1}{720}$
Условие такое же, но буквы А, Б, Р, А, К, А, Д, А, Б, Р, А и нужно получить АБРАКАДАБРА.
$P(A) = \frac{5!\,2!\,2!}{11!}$

Задача 4

Есть два брата и 10 мест за круглым столом. Какова вероятность размещения братьев напротив друг-друга.
Одного фиксируем, у второго 9 вариантов $P(A) = \frac{1}{9}$
Рассматриваем положение обоих $P(A) = \frac{10 \cdot 8!}{10!} = \frac{1}{9}$

Задача 5

10 человек, 10 мест, меджу двумя конкретными должно быть 3 человека.
$P(A) = \frac{6 \cdot 2 \cdot 8!}{10!}$
Выбираем m элементов из N, с учётом порядка:
$A_N^m = N(N-1)\dots(N-m+1) = \frac{N!}{(N-m)!}$
Без учёта порядка:
$C_N^m = \frac{A_N^m}{m!} = \frac{N!}{(N-m)!m!}$

Задача 6

Угадываем номер телефона, знаем все цифры, кроме последних трёх, но известно, что они разные:
$P(A) = \frac{1}{A_{10}^3} = \frac{1}{720}$

Задача 7

Какова вероятность выиграть в спортлото (49 видов спорта, 6 выигрышных, нужно собрать все 6).
$P(A) = \frac{1}{C_{49}^6} \approx \frac{1}{14\,000\,000}$.
$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Задача 8

Выбираются 3 цифры, хотим, чтобы их произведение было чётным.
Посчитаем вероятность нечётности произведения: $P(\overline{A}) = \frac{C_5^3}{C_{10}^3} = \frac{5!}{2!3!}\frac{7!3!}{10!} =$

$= \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{8 \cdot 9 \cdot 10} = \frac{1}{12} \Rightarrow$
$\Rightarrow P(A) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$

Задача 9

Колода 52 карты, какова вероятность достать 4 карты одной масти:
$P(A) = \frac{4 \cdot C_{13}^4}{C_{52}^4}$

Задача 10

Достать тройку, семёрку и туза из колоды с 52 картами:
$P(A) = \frac{4^3}{C_{52}^3}$

Задача 11

90 хороших и 10 плохих деталей, какова вероятность, что среди пяти вытащенных деталей нет брака:
$P(A) = \frac{C_{90}^5}{C_{100}^5} = \frac{90!\,5!\,95!}{5!\,85!\,100!} = \frac{86 \cdot 87 \cdot \ldots \cdot 89 \cdot 90}{96 \cdot 97 \cdot \ldots \cdot 99 \cdot 100}$
Хотим 3 хороших и 2 плохих:
$P(B) = \frac{C_{90}^3 \cdot C_{10}^2}{C_{100}^5}$

Задача 12

В спортлото угадать четыре из шести:
$P(A) = \frac{C_6^4 C_{43}^2}{C_{49}^6}$

Задача 13

Из 52 карт достать 2 красные и 2 чёрные карты:
$P(A) = \frac{C_{26}^2 \cdot C_{26}^2}{C_{52}^4}$

Задача 14

Вероятность при трёх бросках кубика получить три разных цифры:
$P(A) = \frac{A_6^3}{6^3}, \ A_6^3 = 6 \cdot 5 \cdot 4$

При броске шести кубиков выпали все цифры:
$P(A) = \frac{6!}{6^6}$

Задача 15

В лифте девятиэтажного здания на первом этаже окалось 8 студентов. Никто не выходит на первом этаже, какова вероятность того, что лифт не остановится хотя бы на одном этаже.
$P(A) = 1 - \frac{8!}{8^8}$

Задача 16

Какова вероятность, что 10 монет выпадут на одинаковую сторону:
$P(A) = \frac{2}{2^{10}} = \frac{1}{2^9}$

Задача 17

Коробка с 100 шариками, каждый имеет номер от 1 до 100. Какова вероятность вытащить все шары и получить возрастающую последовательность, если:
а) Не возвращать шары в коробку:
$P(A) = \frac{1}{100!}$
б) Возвращать шары в коробку:
$P(A) = \frac{1}{100^{100}}$

Семинар 13 сентября

Задача 1

Бросаем три шестигранных кубика, найти вероятность выпадения суммы 11 и 12.
$|\Omega| = 6^3$

Комбинаций	$\sum 11$	$\sum 12$	Комбинаций
6	5 - 4 - 2	5 - 5 - 2	3
3	5 - 3 - 3	6 - 5 - 1	6
3	4 - 4 - 3	6 - 4 - 2	6
3	5 - 5 - 1	6 - 3 - 3	3
6	6 - 3 - 2	5 - 4 - 3	6
6	6 - 4 - 1	4 - 4 - 4	1

$P(A_{11}) = \frac{27}{6^3}, \; P(A_{12}) = \frac{25}{6^3}$

Задача со * из ДЗ

Какова вероятность, что если взять 4 башмака из 10 пар, получишь пару.
$P(\overline{A}) = \frac{20 \cdot 18 \cdot 16 \cdot 14}{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}$

Задача 2

В девятиэтажном доме три человека садятся в лифт. Какова вероятность, что лифт остановится для высадки два раза?
$P(A) = 1 - \frac{8 + 8 \cdot 7 \cdot 6}{8^3} = \frac{21}{64}$
$$\frac{A_8^2 \cdot 3}{8^3} = \frac{21}{64}$$

Задача 3

Имеется 100 чисел. Из них вытаскивают 15 чисел и упорядочивают по возрастанию.
Какова вероятность, что 13 число в полученной последовательности равно 87.
$$\frac{C_{86}^{12} \cdot C_{13}^{2}}{C_{100}^{15}}$$

Задача 4

Есть 10 вагонов. Какова вероятность, что два человека окажутся в одном вагоне/ в соседних?
В одном: $\frac{1}{10}$ (оба в один и тот же вагон, выбрать вагон можно 10 способами)
В соседних: $\frac{18}{100}$ (9 различных пар (1, 2), (2, 3), (3, 4) и т.д. и наоборот).

Геометрические вероятности

Задача 5

В квадрат со стороной R вписан круг, какова вероятность, что брошенная в квадрат точка попадёт в круг.
$P(A) = \frac{\frac{\pi R^2}{4}}{R^2} = \frac{\pi}{4}$

Задача 6

На интервале $[0,\ 1]$ выбираются точки $x,\ y$, найти вероятность события: $x^2 \leqslant y \leqslant \sin \frac{\pi x}{2}$

$$P(A) = \frac{\int_0^1 \sin\frac{\pi x}{2} - x^2 dx}{1} = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \sin\frac{\pi x}{2} d\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{3} = \frac{2}{\pi}\left(-\cos\frac{\pi x}{2}\right)\Big|_0^1 - \frac{1}{3} =$$
$$= \frac{2}{\pi} - \frac{1}{3}$$

Условные вероятности

Задача 7

В коробке есть n белых и m чёрных шаров. A = первый шар белый, B = последний шар чёрный
$P(A) = \frac{n}{m+n}$, $P(B) = \frac{m}{m+n}$
$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{n}{m+n} \cdot \frac{m}{m+n-1}}{\frac{m}{n+m}} = \frac{n}{n+m-1}$

Задача 8

Два игрока подбрасывают кость по одному разу, побеждает тот, кто выбил больше. A = победил первый, B = победитель определён.
1. $P(A) = \frac{15}{36}$
2. $P(B) = \frac{30}{36}$
3. $P(A/B) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$
4. $P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{15}{36}}{\frac{5}{6}} = \frac{1}{2}$, так как $A \subseteq B$

События A, B зависимы, так как $P(A/B) \neq P(A)$.

Задача 9

2 партии по 100 деталей, в каждой партии 10 бракованных деталей.
A = {деталь из первой партии}.
B = {деталь бракованная}.
$P(A) = \frac{100}{200} = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{20}{200} = \frac{1}{10}$
$P(AB) = \frac{10}{200} = \frac{1}{20} \Rightarrow P(AB) = P(A) \cdot P(B)$, события независимы

Задача 10

Почти как задача 9, но во второй 20 бракованных:
$P(A) = \frac{1}{2}$
$P(B) = \frac{3}{20}$
$P(AB) = \frac{1}{20} \Rightarrow P(A)P(B) \neq P(AB)$, события зависимы.

Формула сложения вероятностей

$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum\limits_{i \leqslant j} P(A_i A_j) + \sum\limits_{i \leqslant j \leqslant k} P(A_i A_j A_k) + \dots$
$\dots + (-1)^{n+1}(A_1 \dots A_n)$
$P(A_1 A_2) = P(A_1)P(A_2/A_1)$

Задача 11

В урне 10 белых, 8 синих, 2 красных шара. Одновременно извлекают 3 шара, какова вероятность, что вытащенные шары одного цвета.
A = {вытащили (вовремя) 3 белых шара} B = {вытащили 3 синих шара}
A_i = {i-й шар белый} B_i = {i-й шар синий} Так как A, B несовместны:
$P(A + B) = P(A) + P(B) = P(A_1 A_2 A_3) + P(B_1 B_2 B_3) =$
$= P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1 A_2) + P(B_1)P(B_2/B_1)P(B_3/B_1 B_2) =$
$= (\frac{10}{20} \cdot \frac{9}{19} \cdot \frac{8}{18}) + (\frac{8}{20} \cdot \frac{7}{19} \cdot \frac{6}{18})$

Семинар 20 сентября.

Задача 46 из дз

Дано: $P(A/B) = 0.05,\ P(A\overline{B}) = 0.079,\ P(\overline{A}B) = 0.0089,\ P(\overline{AB}) = 0,782$
Хотим: $P(B/A)$
$P(B/A) = \frac{P(BA)}{P(A)}$
$P(A) = P(AB + A\overline{B}) = P(AB) + P(A\overline{B}) - \underbrace{P(AB \cap A\overline{B})}_{=0} =$
$= 0.05 + 0.079 = 0.129 \Rightarrow P(B/A) = \frac{0.05}{0.129} \approx 0.3875$
Ответ: 39%

Задача

5 мальчиков и 10 девочек, какова вероятность, что при разбиении их на 5 равных групп получим только группы вида ЖМЖ.
A_i — {в i группе 2 девочки и 1 мальчик.}
$P(A_1 A_2 A_3 A_4 A_5) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 A_2) \cdot P(A_4/A_3 A_2 A_1) \cdot P(A_5/A_4 A_3 A_2 A_1) =$

$= \frac{C_{10}^2 C_5^1}{C_{15}^3} \frac{C_8^2 C_4^1}{C_{12}^3} \frac{C_6^2 C_3^1}{C_9^3} \frac{C_4^2 C_2^1}{C_6^3} \frac{C_2^2 C_1^1}{C_3^3} 1$

Задача

Система состоит из последовательно соединённых резисторов.
$A_i = \{$i-й элемент системы работает$\}, \ i = \overline{1, \ n}$
$A = \{$Система работает$\}$
$A = A_1 \cdots A_n$
$P(A) = P(\prod\limits_{i=1}^{n} A_i) = \prod\limits_{i=1}^{n} p_i$
Если система состоит из параллельно соединённых резисторов, тогда:
$P(A) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2) = p_1 + p_2 - p_1 p_2$

Задача

Обращается русалочка к трём ведьмам, каждая даёт ей сосуд с зельем. Вероятность отсутсвия эффекта:

1. 0.5
2. 0.4
3. 0.3

Она пьёт их по очереди и останавливается, если какое-то сработало. Какова вероятность успеха (хотя бы одно зелье сработало).
$A_i = \{$подействует i-е зелье$\}$
Пусть ни одно не сработало: $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3) =$
$= 1 - 0.5 \cdot 0.6 \cdot 0.7 = 0.79$
Другой способ решения: $P(A) = P(A_1) + P(\overline{A}_1)P(A_2) + P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(A_3) =$
$0.5 + 0.5 \cdot 0.4 + 0.5 \cdot 0.6 \cdot 0.3 = 0.79$
Ещё один: $P(A) = P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 A_2) -$
$- P(A_1 A_3) - P(A_2 A_3) + P(A_1 A_2 A_3) = 0.79$

Задача

Теннист участвует в турнире, у него есть соперник А и соперник В, известно, что соперник А играет лучше соперника В. Теннист хочет выиграть два матча подряд, какой порядок ему лучше выбрать?
$A - B - A$ или $B - A - B$?
$P(A) < P(B)$ — вероятность победы.
У него есть варианты: выиграть первые две, проиграть первую и выиграть оставшиеся.
В первом случае: $(1) = P(A)P(B) + \big(1 - P(A)\big)P(B)P(A)$
Во втором: $(2) = P(B)P(A) + \big(1 - P(B)\big)P(A)P(B)$

$(1) - (2) = P(A)P(B)(1 - P(A) - 1 + P(B)) = P(A)P(B)(P(B) - P(A)) > 0 \Rightarrow (1) > (2)$
В первом случае вероятность победы больше.

Задача

Два равносильных шахматиста играют между собой матчи, ничьих быть не может. Какое событие более вероятно:
$C_4^3 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{4!}{3!}\frac{1}{16} = \frac{1}{4}$
$C_8^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{7}{32}$
Вероятность выиграть 3 из 4 больше.

Задача

В круг радиуса r вписан квадрат. В круг кидают 4 точки, какова вероятность попадания ровно 3 точек в квадрат.
$p = \frac{2r^2}{\pi r^2} = \frac{2}{\pi}$ - вероятность попасть в квадрат.
$q = 1 - p = \frac{1}{-}\frac{2}{\pi}$
$C_4^3 \cdot \left(\frac{2}{\pi}\right)^3 \cdot \frac{\pi-2}{\pi} = \frac{32(\pi-2)}{\pi^4}$

Задача

Стрелок попадает в 10 с вероятностью 0.7, а в 9 с вероятностью 0.3. Какова вероятность получения за 3 выстрела не менее 29 очков.
Нас устраивают события:
$A_{29} = \{\text{Набрал 29 очков}\},\ A_{30} = \{\text{Набрал 30 очков}\}$
$P(A_{29} + A_{30}) = P(A_{29}) + P(A_{30}) = C_3^2(0.7)^2 \cdot 0.3 + (0.7)^3 = 0,784$

Задача

7 писем. 0.6 - письмо отправлено Онегину, 0.4 - письмо отправлено Ленскому.
$A_i = \{\text{Ровно i писем отправлено Онегину}\}$. $p(A) = P(A_7) + P(A_6) + P(A_5) = (0.6)^7 + 7(0.6)^6 \cdot 0.4 + \frac{2}{7}0.6^5 \cdot 0.4^2$

Задача

Стрелок попадает в мишень с вероятнотсью 0, 7. Ему позволяют стрелять до трёх промахов. Какова вероятность того, что он сделает ровно 8

выстрелов.
$C_7^2(0,7)^5 \cdot 0,3^2 \cdot 0,3$ (Два промаха можно как-то расположить в первых 7 выстрелах, последний всегда восьмой).

Задача

Всего 5 испытаний, вероятность искажения результата - $0,1$. А = ни одного искажённого. Б = не менее двух искажённых. В = Искажённых больше, чем неискажённых.
$P(A) = 0,9^5, \quad P(\text{Б}) = 1 - 0.9^5 - (C_5^1 \cdot 0,1 \cdot 0,9^4)$,
$P(\text{В}) = P(B) - C_5^2 \cdot 0,1^2 \cdot 0,9^3$

Задача

Гипотезы при подбрасывании двух кубиков:

$$\begin{cases} H_1 = \{\text{На 1-м кубике выпала “1”}\} \\ \dots \\ H_6 = \{\text{На 1-м кубике выпала “6”}\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_1 = \{1 - 1\} \\ \dots \\ H_{36} = \{6 - 6\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_1 = \{\text{На 1-м — чётное}\} \\ H_2 = \{\text{На 1-м — чётное}\} \end{cases}$$

Семинар 27 сентября

Формула полной вероятности

$H_1, \dots, H_n$ — полная группа событий. $i \neq j \Rightarrow H_i \cdot H_j = \varnothing$, $H_1 + \dots + H_n = \Omega$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A/H_i)$$

$$P(H_k/A) = \frac{P(H_k)P(A/H_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)}$$

Задача

Какова вероятность успешного переливания крови от одного человека к другому? Произошло успешное переливание, какова вероятность, что кровь переливали человеку с 1 группой? С 4 группой?
Медицинская справка:
Первой группе крови можно переливать только первую
Второй — вторую и первую
Третей — первую и третью
Четвёртой — любую.
$A = \{\text{Успешное переливание}\}$
$H_i = \{\text{У больного i группа}\},\ i = \overline{1,\ 4},$ по условию: $P(H_1) = 0.33,$
$P(H_2) = 0.36,\ P(H_3) = 0.23,\ P(H_4) = 0.08$
$P(A/H_1) = 0.33,\ P(A/H_2) = 0.69,\ P(A/H_3) = 0.56,\ P(A/H_4) = 1$
$P(A) = \sum\limits_{i=1}^{4} P(A/H_i)P(H_i) = 0.33^2 + 0.36 \cdot 0.69 + 0.23 \cdot 0.56 + 0.08 = 0.5661$
$P(H_1/A) = \frac{P(A/H_1)P(H_1)}{P(A)} = \frac{0.33^2}{0.5661} \approx 0,19237$
$P(H_4/A) = \frac{P(A/H_4)P(H_4)}{P(A)} = \frac{0.08}{0.5661} \approx 0.14$

Задача

Две корзинки, в каждой по 10 бутылок, в первой корзине 2 отравленные, во второй — 3, по пути одна бутылка из первой корзины разбилась. Какова вероятность не отравиться при распитии одной бутылки?
$A = \{\text{распитие благополучно}\}$
$H_1 = \{\text{бутылка из 1 корзины}\},\ P(H_1) = \frac{1}{2}$
$H_2 = \{\text{бутылка из 2 корзины}\},\ P(H_2) = \frac{1}{2}$
Так как выбираем корзину, а не бутылку из неё.
$P(A/H_1) = 0.8,\ P(A/H_2) = 0.7.$ Вспоминаем задау про выученные билеты (поэтмоу вероятность отравиться бутылкой из первой корзины не поменяется).
$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) = \frac{8}{20} + \frac{7}{20} = \frac{3}{4}$

Задача

По каналу передаётся два вида сигналов $x,\ y$, при этом y передаётся в три раза чаще x. x искажается в 10% случаев, а y — в 20%. По каналу передан какой-то сигнал, какова вероятность, что будет получен сигнал x? Какова вероятность, что при получении сигнала x он и был передан?
$H_1 = \{\text{Передавали x}\},\ P(H_1) = \frac{1}{4}$
$H_2 = \{\text{Передавали y}\},\ P(H_2) = \frac{3}{4}$

$A = \{$Зафиксирован х$\}$,
$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) = \frac{1}{4}0.9 + \frac{3}{4}0.2 = \frac{3}{8}$
$B = H_1/A \Rightarrow P(B) = P(H_1/A) = \frac{P(A/H_1)P(H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{9}{40}}{\frac{3}{8}} = \frac{3}{5} = 0.6$

Задача

Три стрелка стреляют по мишени. Они соответсвенно попадают в мишень с вероятностью:

1 стрелок $\frac{4}{5}$

2 стрелок $\frac{3}{4}$

3 стрелок $\frac{2}{3}$

Все трое выстрелили одновременно, в мишень попали два раза. Какое событие более вероятно: промах третьего стрелка или его попадание?
$A = \{$попали ровно 2 раза$\}$
$H_1 = \{$третий попал$\}$, $P(H_1) = \frac{2}{3}$
$H_2 = \{$третий промахнулся$\}$, $P(H_2) = \frac{1}{3}$
$P(A/H_1) = \frac{4}{5}\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\frac{3}{4} = \frac{7}{20}$
$P(A/H_2) = \frac{4}{5}\frac{3}{4} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$
$P(A) = P(A/H_1)P(H_1) + P(A/H_2)P(H_2) = \frac{7}{20}\frac{2}{3} + \frac{3}{5}\frac{1}{3} = \frac{7}{30} + \frac{1}{5} = \frac{13}{30}$
$P(H_1/A) = \frac{P(A/H_1)P(H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{7}{20}\frac{2}{3}}{\frac{13}{30}} = \frac{7}{30}\frac{30}{13} = \frac{7}{13}$

Задача

Было две урны. В первой 5 белых шаров и 1 чёрный, во второй — 3 белых и 3 чёрных.
Из первой урны взяли два шара, из второй один и поместили их в третью урну. Какова вероятность того, что наугад вытащенный из третьей урны шар окажется белым?
$A = \{$Вытащили белый шар из третьей урны$\}$
$H_1 = \{$Вытащенный шар был в первой урне$\}$
$H_2 = \{$Вытащенный шар был во второй урне$\}$
$P(A/H_1) = \frac{5}{6}$
$P(A/H_2) = \frac{1}{2}$
$P(H_1) = \frac{2}{3}$
$P(H_2) = \frac{1}{3}$
$P(A) = P(A/H_1)P(H_1) + P(A/H_2)P(H_2) = \frac{10}{18} + \frac{1}{6} = \frac{13}{18}$

Семинар 4 октября

Решаем какие-то задачки из учебника.

Задача

ξ	-1	0	1
p	p_1	p_2	p_3

, $E\xi = 0$, $\mathcal{D}\xi = 0.5$. Найти p_1, p_2, p_3.

ξ	0	1
p	p_2	$p_1 + p_3$

, $\mathcal{D}\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = E\xi^2 = p_1 + p_3$

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\ p_1 = p_3 \\ p_1 + p_3 = 0.5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 = 0.25 \\ p_2 = 0.5 \\ p_3 = 0.25 \end{cases}$$

Задача

a.

ξ	$-0,5$	0	$0,5$	1	$1,5$
p	$0,1$	$0,4$	$0,1$	$0,3$	$0,1$

$Y = 10x - 1 \Rightarrow$

Y	-6	-1	4	9	14
p	$0,1$	$0,4$	$0,1$	$0,3$	$0,1$

$EY = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i p_i = 3,5$

$\mathcal{D}Y = 3,5^2$

b.

ξ	$-0,25$	0	-1	$-2,25$
p	$0,2$	$0,4$	$0,3$	$0,1$

$Y = -x^2 \Rightarrow EY = -0,53$

$\mathcal{D}Y = 0,25^2 \cdot 0,2 + 0,3 + 2,25^2 \cdot 0,1 - (0,53)^2$

Задача

ξ	2	1	0
p	$\frac{28}{45}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{1}{45}$

$P(\xi = 2) = \frac{C_8^2}{C_{10}^2} = \frac{7 \cdot 8}{9 \cdot 10} = \frac{28}{45}$

$P(\xi = 1) = \frac{2}{10}\frac{8}{9} \cdot 2 = \frac{16}{45}$

$P(\xi = 0) = \frac{1}{C_{10}^2} = \frac{1}{45}$

$E\xi = \frac{2 \cdot 28 + 16}{45} = \frac{72}{45} = \frac{8}{5}$

$\mathcal{D}\xi = E\xi^2 - \left(E\xi\right)^2 = \frac{128}{45} - \frac{64}{25}$

Задача

В связке есть ключи, человек пробует все ключи, пока не подберёт нужный. Сколько в среднем ключей он переберёт?

ξ — количество попыток. Показана вероятность успеха.

ξ	1	2	$\dots$	10
p	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\dots$	$\frac{1}{10}$

$E\xi = \frac{55}{10} = 5,5$

Задача

Есть 4 стула, в одном из них драгоценности. Человек ломает стулья, пока не найдёт драгоценности. Сколько стульев в среднем будет сломано?
ξ — количество сломанных стульев.

ξ	1	2	3	4
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}\frac{2}{3}\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}\frac{2}{3}\frac{1}{2}1$

$\Rightarrow$

ξ	1	2	3	4
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$E\xi = \frac{1}{4}(1+2+3+4) = \frac{10}{4}$
$\mathcal{D}\xi = E(xi^2) - 2,5^2 = \frac{30}{4} - 6,25 = \frac{20}{16} = \frac{5}{4}$

Задача

$P(\xi = k) = \frac{c}{k(k+1)}$
c–?, $P(\xi \leqslant 10)$–?, $P(10 \leqslant \xi \leqslant 20)$–?

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c}{k(k+1)} = 1 \Rightarrow c\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1}\right) = 1$$

$$c\lim_{k\to\infty}\left(1 - \frac{1}{k}\right) = 1 \Rightarrow c\cdot 1 = 1 \Rightarrow c = 1$$

$$P(\xi = k) = \frac{1}{k(k+1)}$$

$$P(\xi \leqslant 10) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{11} = \frac{10}{11}$$

$$P(10 \leqslant \xi \leqslant 20) = P(\xi \leqslant 20) - p(\xi \leqslant 9) = (1 - \frac{1}{21}) - (1 - \frac{1}{10}) = \frac{11}{210}$$

$$E\xi = \sum_{k=1} \infty \frac{1}{k(k+1)} k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1}$$ - расходится.

$E\xi = +\infty$

11 октября

Разбор задач из домашнего задания. $F_\xi(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x},\ x \geqslant 1 \\ 0,\ x < 1 \end{cases}$

Найти a: $P(\xi > a) = \frac{1}{3}$

$P(\xi > a) = 1 - F_\xi(a) = \frac{1}{3}$
$F_\xi(x) = \frac{2}{3}$
$\begin{cases} 1 - \frac{1}{x} = \frac{2}{3} \\ x \geqslant 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} = \frac{1}{x} \\ x \geqslant 1 \end{cases}$
$x = 3 \Rightarrow a = 3$

Распределения

Распределение Бернулли: $\xi \sim \mathrm{Ber}(p)$

ξ	0	1
p	1 - p = q	p

, $E\xi = p,\ \mathcal{D}\xi = pq$

Биномиальное распределение.
Распределение Пуассона.
Геометрическое распределение.

Задача

С вероятностью $\frac{5}{6}$ яблоко падает недалеко от яблони, всего 10 яблок. Случайная величина ξ — количество яблок, которые упали недалеко от яблони.
$\xi \sim \mathrm{Bi}(10,\ \frac{5}{6})$
$E\xi = \frac{25}{3},\ \mathcal{D}\xi = \frac{25}{18}$.

Задача

$\xi \sim \mathrm{Bi}(4,\ 0.7)$
$E\xi = 2,8$
$\mathcal{D}\xi = 0,24$
$Z_{\frac{8}{1000}} = \min(x,\ F(x) \geqslant \frac{8}{1000})$
$F(0) = \frac{81}{10000} > \frac{8}{1000} \Rightarrow Z_{\frac{8}{1000}} = 0$

Задача

Три стрелка, вероятность попадания:

1. 0,7

2. 0,6

3. 0,5

Каждый выстрелил по одному разу, какое среднее количество попаданий?
$\xi_1 \sim \mathrm{Bi}(1,\ 0.7),\ \xi_2 \sim \mathrm{Bi}(1,\ 0.6),\ \xi_3 \sim \mathrm{Bi}(1,\ 0.5)$
$E\xi = E(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) = E\xi_1 + E\xi_2 + E\xi_3 = 1.8$
Так как события независимы, их ковариация равна 0, поэтому:
$\mathcal{D}\xi = \mathcal{D}\xi_1 + \mathcal{D}\xi_2 + \mathcal{D}\xi_3 = 0,7 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,4 + 0,5 \cdot 0,5 = 0,7$

Задача

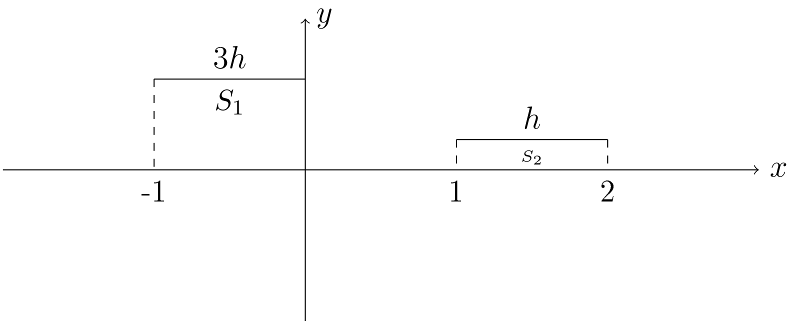
Известно, что бутерброд падает маслом вниз с вероятностью $0,999$. Некий экспериментатор уронил бутерброд 1000 раз. Какова вероятность, что бутерброд упадёт маслом вверх более 2 раз? ξ — маслом вверх.
$\xi \sim \mathrm{Bi}(1000, 0.001)$
Хотелось бы отпуассонить (апроксимировать распределением Пуассона) это распределение.
После апроксимации: $\Delta = \left|C_n^k p^k q^{n-k} - \frac{e^{-np}(np)^k}{k!}\right| \leqslant np^2$
$\Delta = 0.001$. Можем апроксимировать: $\xi \sim \Pi(1),\ \lambda = np = 1$
$P(\xi > 2) = 1 - P(\xi \leqslant 2) = 1 - P(\xi = 0) - P(\xi = 1) - P(\xi = 2) =$
$= 1 - \frac{e^{-1}1^0}{0!} - \frac{e^{-1}1}{1!} - \frac{e^{-1}1^2}{2!} = 1 - \frac{5}{2e}$

Задача

$\xi \sim \mathrm{G}(0,2) \Rightarrow E\xi = 5$. Наиболее вероятное значение: $P(\xi = k) = q^{k-1}p \leqslant p = 0,2 \Rightarrow k = 1$

Семинар 1 ноября

Задача 34 страница 93.



$S = S_1 + S_2 = 3h + h = 4h = 1 \Rightarrow h = \frac{1}{4}$

$$F(x)=\begin{cases}0,\ x\in(-\infty,\ -1)\\ \displaystyle\int_{-\infty}^{-1}0\,dt+\int_{-1}^{x}\frac{3}{4}\,dt=\frac{3}{4}(x+1),\ x\in[-1,\ 0]\\ \displaystyle\int_{-\infty}^{-1}0\,dt+\int_{-1}^{1}\frac{3}{4}\,dt+\int_{0}^{x}0\,dt=\frac{3}{4},\ x\in(0,\ 1)\\ \displaystyle\int_{-\infty}^{-1}0\,dt+\int_{-1}^{1}\frac{3}{4}\,dt+\int_{0}^{1}0\,dt+\int_{1}^{2}\frac{1}{4}\,dt=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}(x-1),\ x\in[1,\ 2]\\ 1,\ x\in(2,\ +\infty)\end{cases}$$

$M[]$ — матожидание.

$M[(2-x)(3-x)]=M[6-5x+x^2]=M[6]-M[5x]+M[x^2]=$

$=6-5\left(\displaystyle\int_{-1}^{0}x\frac{3}{4}\,dx+\int_{1}^{2}x\cdot\frac{1}{4}\,dx\right)+\left(\int_{-1}^{0}x^2\cdot\frac{3}{4}\,dx+\int_{1}^{2}x^2\cdot\frac{1}{4}\,dx\right)$

$\mathcal{D}[2-3x]=9\mathcal{D}[x]=3(M[x^2]-M^2[x])$

Распределение Гаусса

$\xi\sim N(m,\sigma^2)$

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$

$\Phi_0(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$

$P(\alpha<\xi<\beta)=\Phi_0\left(\dfrac{\beta-m}{\sigma}\right)-\Phi_0\left(\dfrac{\alpha-m}{\sigma}\right)$

Находим значения Φ_0 через таблицу функции Лапласа.

Если $x>5$, то $\Phi_0(x)=0.5$

Задача

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{72\pi}}e^{-\frac{(x+3)^2}{72}}\Rightarrow\xi\sim N(-3,\ 36)$

$P(0<\xi<12)=\Phi_0\left(\frac{12-12}{3}\right)-\Phi_0\left(\frac{0-12}{3}\right)=\Phi_0(0)-\Phi_0(-4)=0+\Phi_0(4)=$

$=0.4999683$

Второй начальный момент $\mu_2=E\xi^2=\mathcal{D}\xi+(E\xi)^2=9+12^2=153$

$\mathcal{D}(5-3\xi)=9\mathcal{D}(\xi)=9\cdot 9$

Задача 51 стр 94

По условию $\xi\sim N\big(0,\ 0.4^2\big)$. Нужно посчитать $P(-0.7<\xi<0.7)=\Phi_0\left(\frac{0.7}{0.4}\right)-\Phi_0\left(\frac{-0.7}{0.4}\right)=2\Phi_0\left(\frac{7}{4}\right)\approx 2\cdot 0.46=0.92$

В общем случае:$P(|\xi - E\xi| < \delta) = 2\Phi_0\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$
Пусть η — количество годных шариков из 50 изготовленных. Заметим, что $\eta \sim Bi(50,\ 0.92) \Rightarrow E\eta = n \cdot p = 50 \cdot 0.92 = 46$

Задача

$\xi \sim N(0,\ 1)$
$Z_{0.9}-? \Rightarrow \Phi_0(Z_{0.9}) = 0.9 - 0.5 = 0.4$ (так как интегрировать надо от $-\infty$, а не от 0, а $\int_{-\infty}^{0} \dots = \frac{1}{2}$), тогда $Z_{0.9} \approx 1.29$.
Отсюда можно посчитать $Z_{0.1} = -Z_{0.9} = -1.29$
Интересный факт $P(-1.65 < \xi < 1.65) = 0.9$. И ещё один:

$$P(|\xi| < 1.96) = 0.95$$

1.96 является знаменитой точкой, использующейся в подсчёте доверительных интервалов (случайная величина попадает в него с вероятностью 95 процентов, немало).

Теория

$\xi \sim f_\xi(x),\ \eta = \phi(\xi),\ f_\eta(y)-?$
Пусть $\varphi(x)$ — монотонная функция. $y = \varphi(x),\ x = \varphi^{-1}(y)$
$f_\eta(y) = f_\xi\big(\varphi^{-1}(y)\big)\left|\big(\varphi^{-1}(y)\big)'\right|$
Разобьём φ на отрезки монотонности (пусть их k штук):

$$f_\eta(y) = \sum_{i=1}^{k} f_\xi\left(\varphi_i^{-1}(y)\right)\left|\big(\varphi_i^{-1}(y)\big)'\right|$$

Задача

$\xi \sim N(0,\ \sigma^2)$

a. $\eta = \xi^3,\ f_\eta(y)-?,\ f_\eta(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\left(y^{\frac{1}{3}}\right)^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{3} \cdot y^{-\frac{2}{3}}$

b. $\eta = \xi^2$. Разбиваем на интервалы монотонности:

$$\varphi_1^{-1}(y) = -\sqrt{y},\ \varphi_2^{-1}(y) = \sqrt{y} \Rightarrow \left(\varphi_1^{-1}\right)' = -\frac{1}{2}\sqrt{y} = -\left(\varphi_2^{-1}\right)'$$

$$f_\eta(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y}{2\sigma^2}} \cdot \left| \frac{1}{2\sqrt{y}} \right| \cdot 2,\ x > 0$$

При $x \leqslant 0 : f_\eta(y) = 0$