

Семинары по алгебре 4 модуль.

Андрей Тищенко

2023/2024 гг.

Семинар 4 апреля

Номер 1. $a_1 = (1 \ 2 \ 1)$, $a_2 = (1 \ 1 \ -1)$, $a_3 = (1 \ 3 \ 3)$, $L_1 = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$
 $b_1 = (2 \ 3 \ -1)$, $b_2 = (1 \ 2 \ 2)$, $b_3 = (1 \ 1 \ -3)$, $L_2 = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$

Найти размерности и какие-нибудь базисы $L_1 + L_2$ и $L_1 \cap L_2$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dim L_1 = 2$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dim L_2 = 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim(L_1 + L_2) = 3 \Rightarrow$$

$$\dim(L_1 \cap L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 + L_2) = 1$$

Так как L_1 базис, через него выражается любой вектор, в том числе

$$\vec{X} = (x_1, x_2, x_3)$$

$$\text{Значит } \text{Rg} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$$

Аналогично для L_2 :

$$\text{Rg} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 8x_1 - 5x_2 + x_3 = 0$$

$$L_1 \cap L_2 : \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 8x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3x_2 \\ x_2 = 5x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \text{пример}$$

базиса объединения.

Номер 2. Доказать, что \mathbb{R}^4 является прямой суммой $L_1 = \langle a_1, a_2 \rangle$, $L_2 = \langle b_1, b_2 \rangle$ и разложить вектор $x = (2 \ -2 \ 3 \ -3)^T$ в сумму проекций на эти подпространства, где:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2)$$

$\dim L_1 = \dim L_2 = 2$, так как есть БМ порядка 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\dim(L_1 + L_2) = 4 \Rightarrow \dim(L_1 \cap L_2) = 0 \Rightarrow L_1 + L_2$$

$$x = x_1 + x_2 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} +$$

$$\alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 1 \\ E & & & 1 \\ & & & 0 \\ & & & -2 \end{array} \right)$$

$$x_1 = a_1 + a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in L_1 \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = -2b_2$$

$x = x_1 + x_2$ - ответ.

Номер 3. Доказать, что $M_n(\mathbb{R})$ есть прямая сумма подпространства всех симметрических матриц и L_2 всех кососимметрических матриц ($A^T = A$)

Утверждение: Сумма $L_1 + L_2$ прямая $\Leftrightarrow \forall x \in L_1 + L_2 \exists!$ разложение $x = x_1 + x_2$,
где $x_1 \in L_1, x_2 \in L_2$

Решение: Пусть $A = S + K$, где S - симметрическая матрица, K - кососимметрическая

$$A^T = S^T + K^T = S - K \Rightarrow \begin{cases} S = \frac{A + A^T}{2} \\ K = \frac{A - A^T}{2} \end{cases} \quad \text{- единственное}$$

разложение

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Билинейные формы

Определение: в $V \times V \longrightarrow R$ называется билинейной формой, если

$$\begin{cases} b(\alpha x + \beta y, z) = \alpha b(x, z) + \beta b(y, z) \\ b(x, \alpha y + \beta z) = \alpha b(x, y) + \beta b(x, z) \end{cases}, \text{ то есть линейность по каждому} \\ \text{аргументу.}$$

$$b(x, y) = x_e^T B_e y_e, \text{ переход к другому базису } (e \rightarrow e')$$

$$B' = C^T B C$$

Номер 4. Я решал у доски, скиньте пж запись.

Номер 5. Найти $f(x, y)$, если $F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ - матрица билинейной формы

$$f, x = (1 \ 0 \ 3)^T, y = (-1 \ 2 \ -4)^T$$

$$f(x, y) = (1 \ 0 \ 3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = -43$$

Номер 6. Найти матрицу билинейной формы в базисе e' , если

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 - e_2 \\ e'_2 = e_1 + e_3 \\ e'_3 = e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$$

$$B_e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_{e'} = C^T B_e C = \begin{pmatrix} 0 & -6 & -9 \\ -2 & 20 & 30 \\ -3 & 30 & 45 \end{pmatrix} - \text{ответ.}$$

Номер 7. $q(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3 - x_3^2$ - квадратичная форма
Построить ассоциированную (или полярную) симметричную билинейную форму

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} = B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 - 3x_1y_3 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + 2x_2y_3 - 3x_3y_1 + 2x_3y_2 - x_3y_3 - \text{ответ}$$

$$b(x, y) = \frac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)]$$

Пример: $q(x) = x_1x_2 + x_1x_3$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$q(x) = x^T Ax, \quad A' = C^T AC$$

Критерий Сильвестра

Исследовать на положительную и отрицательную определённость при различных $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda & 3 \\ \lambda & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \Delta_1 = 2 > 0 \\ \Delta_2 = 4 - \lambda^2 = (2 - \lambda)(2 + \lambda) \\ \Delta_3 = \lambda^2 + 6\lambda - 16 < 0 \end{cases} \quad \text{Ответ: не является}$$

положительно определённой и не является отрицательно определённой.

Семинар 10 апреля

1. Найти все значения параметра a , при которых квадратичная форма
 - а. Положительно определена.
 - б. Отрицательно определена.

$$q(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 3z^2 + 2axy + (2 + 4a)yz$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 4 & 1 + 2a \\ 0 & 1 + 2a & 3 \end{pmatrix} \Delta_1 = 1 > 0$$

$$\Delta_2 = 4 - a^2 = (2 - a)(2 + a)$$

$$\Delta_3 = \det A = -7(a + 1)(a - \frac{11}{7})$$

Положительная определённость:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 > 0 \\ \Delta_3 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a \in (-1, \frac{11}{7})$$

Отрицательная определённость:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta_1 < 0 \\ \Delta_2 > 0 \\ \Delta_3 < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a \in \emptyset$$

2. Исследовать квадратичную форму на положительную и отрицательную определённость в зависимости от параметра:

$$q(x) = (\lambda - 1)x_1^2 + (2\lambda - 2)x_1x_2 - 2\lambda x_1x_3 + 2\lambda x_2^2 - 2\lambda x_2x_3 + (\lambda - 2)x_3^2$$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & \lambda - 1 & -\lambda \\ \lambda - 1 & 2\lambda & -\lambda \\ -\lambda & -\lambda & \lambda - 2 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta_1 = \lambda - 1 \\ \Delta_2 = (\lambda - 1)(2\lambda - (\lambda - 1)) = \lambda^2 - 1 \\ \Delta_3 = -(\lambda + 1)(\lambda - \frac{2}{3}) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{положительной определённости}$$

нет. Отрицательная при $\lambda < -1$. (Может быть неправильно посчитал).

Метод Лагранжа

3. Найти нормальный вид и невырожденное линейное преобразование, приводящее к этому виду. Также определить ранг и индексы инерции.

$$q(x) = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$$

Вынесем x_1 :

$$q(x) = \underline{x_1}^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + \underline{2x_1x_2} - \underline{4x_1x_3} =$$

$$\begin{aligned} & x_1^2 + 2x_1(x_2 - 2x_3) - x_2^2 + 4x_2x_3 - 4x_3^2 + (x_2 - 2x_3)^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + (x_2 - 2x_3)^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 = \\ & = (x_1 + (x_2 - 2x_3))^2 + 4x_2^2 - 8x_3^2 + 4x_2x_3 = (x_1 + (x_2 - 2x_3))^2 + (2x_2 + x_3)^2 - 9x_3^2 = \end{aligned}$$

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$$

Ранг равен 3, $i_+ = 2$, $i_- = 1$

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - 2x_3 \\ y_2 = 2x_2 + x_3 \\ y_3 = 3x \end{cases} \quad C_{y \rightarrow x} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \text{матрица перехода.}$$

4. Привести квадратичную форму к нормальному виду. Найти Rg, сигнатуру и матрицу перехода от старого базиса к новому.

$$q(x) = -2x_1x_3 - 2x_2x_3 + x_3^2$$

$$x_3^2 - 2x_3(x_1 + x_2) + (x_1 + x_2)^2 - (x_1 + x_2)^2$$

$$(x_3 - (x_1 + x_2))^2$$

$$X = C_{y \rightarrow x} Y$$

$$C_{y \rightarrow x} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{x \rightarrow x} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5. $q(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

$$y_1^2 - y_2^2 + y_1y_3 - y_2y_3 + y_1y_3 + y_2y_3$$

$$(y_1 + y_3)^2 - y_2^2 - y_3^2$$

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + y_3 \\ z_2 = y_2 \\ z_3 = y_3 \end{cases} \Rightarrow z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$i_- = 2, i_+ = 1, \text{ Rg} = 3$$

$$\begin{cases} x = C_1 y \\ z = C_2 y \end{cases}, \quad y = C_2^{-1} z \Rightarrow x = C_1 y = C_1 C_2^{-1} z = C_3 z$$

$$C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Существует ли невырожденное линейное преобразование, переводящее квадратичную форму f в квадратичную форму g ? Если да, то найти бы одно.

$$f(x) = -2x_1x_3 - 2x_2x_3 + x_3^2, \quad g(y) = 4y_1^2 - 2y_1y_3$$

$$f(x) = f(z) = z_1^2 - z_2^2$$

$$\begin{cases} z_1 = -x_1 - x_2 + x_3 \\ z_2 = x_1 + x_2 \\ z_3 = x_1 \end{cases}, \quad z = C_1x, \quad C_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$g(y) = 4y_1^2 - 2y_1y_3 = ((2y_1)^2 + 2 \cdot 2y_1 \cdot \frac{1}{2}y_3 + \frac{1}{4}y_3^2) - \frac{1}{4}y_3^2 =$$

$$= (2y_1 + \frac{1}{2}y_3)^2 - (\frac{1}{2}y_3)^2$$

$$\begin{cases} z_1 = 2y_1 + \frac{1}{2}y_3 \\ z_2 = \frac{1}{2}y_3 \\ z_3 = y_2 \end{cases}, \quad z = C_2y \Rightarrow C_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

надо $x = C_3y$. Имеем $\begin{cases} z = C_1x \\ z = C_2y \end{cases} \Rightarrow x = C_1^{-1}z \Rightarrow$

$$\Rightarrow (*) \text{ есть } x = C_1^{-1}C_2 \cdot y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} y \leftarrow \text{матрица перехода.}$$

Семинар 17 апреля.

$$T_{e \rightarrow e} = \{t_{ij}\} = \begin{cases} e'_1 = t_{11}e_1 + \dots + t_{n1}e_n \\ \dots \\ e'_n = t_{1n}e_1 + \dots + t_{nn}e_n \end{cases}$$

Симметричный Гаусс

Задача 1. Привести $q(x)$ к нормальному виду, найти Rg , (i_+, i_-) , матричный переход от старого базиса к новому.

$$q(x) = -2x_1x_3 - 2x_2x_3 + x_3^2$$

1 способ. Метод Лагранжа (был на прошлом семинаре).

$$q(x) = y_1^2 - y_2^2$$

$$\begin{cases} y_1 = -x_1 - x_2 + x_3 \\ y_2 = x_1 + x_2 \\ y_3 = x_1 \end{cases} \Leftrightarrow y = Cx$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Третью строчку мы выбрали так, чтобы матрица C была невырождена.

$$x^f = T_{f \rightarrow e} x^e$$

Немного фактов с семинара: 1. $f = e \cdot T_{e \rightarrow f}$ - для матриц

$$2. \begin{cases} x = e \cdot x^e \\ x = f \cdot x^f \end{cases}$$

$C_{x \rightarrow y} = C^{-1}$ 2 способ. Симметричный Гаусс.

$$\text{Матрица квадратичной формы } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Цель: привести A к диагональному виду

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) = q(y) = y_1^2 - y_2^2. \text{ Правая матрица будет} \end{aligned}$$

$C_{x \rightarrow y}$ - матрица перехода.

Важное замечание: мы можем применять операции к столбцам левой матрицы, не затрагивая правую.

Линейные операторы

Фиксируем базис $e = (e_1, \dots, e_n)$ в V

$$\varphi: V \rightarrow V$$

1. $\forall x \in V$:

$$(\varphi(x))^e = A_e x^e$$

2. Пусть $T_{e \rightarrow f}$ - матрица перехода к f

$$A_f = T^{-1} A_e T = T_{f \rightarrow e} A_e T_{e \rightarrow f}$$

3. $\dim \ker \varphi + \dim \operatorname{Im} \varphi = \dim V$

Задача 2. Найти размерности и базисы \ker и Im линейного оператора, задаваемого матрицей A в некотором базисе \mathbb{R}^4 .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Rg} A = \dim \operatorname{Im} \varphi$$

$$\dim \ker \varphi = n - r = 2$$

Задача 3. Доказать, что поворот плоскости на угол α - линейный оператор в $V_2 \cong \mathbb{R}^2$ найти его матрицу в базисе $\{i, j\}$

1. $\forall \lambda \in \mathbb{R} \varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x)$

2. $\varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$ поворачивается на угол α параллелограмм на векторах $x_1, x_2 \Rightarrow$ их сумма (диагональ этого параллелограмма) также поворачивается на угол α . Значит это линейный оператор.

$$\text{Рассмотрим } \varphi(i) = \varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \cos \alpha i + \sin \alpha j$$

$$\varphi(j) = \varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\sin \alpha i + \cos \alpha j \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} - \text{матрица поворота}$$

4. Является ли преобразование линейным оператором. Если да, то найти его матрицу.

а. $\varphi(x) = (x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, 3x_1 - x_2 + x_3)$

$$\begin{pmatrix} \varphi(x_1) \\ \varphi(x_2) \\ \varphi(x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ 2x_1 + x_3 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{То есть } \varphi(x)^T = A \cdot x^T \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha A x + \beta A y \Rightarrow \text{линейный оператор.}$$

б. $\varphi(x) = (x_1, x_2 + 1, x_3 + 2)$. Не уважает сложение векторов, значит не является линейным оператором.

5. Доказать, что существует единственный линейный оператор, переводящий векторы a_1, a_2, a_3 в векторы b_1, b_2, b_3 . Найти его матрицу.

$$\begin{aligned} a_1 &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}, & b_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ a_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, & b_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ a_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & b_3 &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Утверждение: существует единственный линейный оператор в \mathbb{R}^n , переводящий линейно независимые векторы a_1, \dots, a_n в любые заданные векторы b_1, \dots, b_n

$$\varphi(a_1) = b_1$$

\dots , дано

$$\varphi(a_n) = b_n$$

$\forall x \in V \quad a_1, \dots, a_n$ - базис \Rightarrow

$\Rightarrow x = x_1 a_1 + \dots + x_n a_n$, единственное разложение

$$\varphi(x) = x_1 \underbrace{\varphi(a_1)}_{b_1} + \dots + x_n \underbrace{\varphi(a_n)}_{b_n} = \sum_{i=1}^n x_i b_i$$

Пусть $A = (a_1, \dots, a_n)$, $B = (b_1, \dots, b_n) \Rightarrow$

$\Rightarrow \Phi_a = BA^{-1}$, где Φ - матрица линейного оператора φ базиса a

$$b_1 = \varphi(a_1) = \Phi_a \cdot a_1$$

\dots

$$b_n = \varphi(a_n) = \Phi_n \cdot a_n \Rightarrow B = \Phi_a A \Rightarrow \Phi_a = B \cdot A^{-1}$$