Семинары по математическому анализу 4 модуль.

Андрей Тищенко

Семинар 4 апреля

Сходимость функциональных последовательностей.

$\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}} \quad x \in E$
$\forall x \in E \quad f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$

Номер 1. a. $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{x+3n+2} = \dfrac{x^2}{\frac{x}{n}+3+\frac{2}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{x^2}{3}$

c. $f_n(x) = n(x^{\frac{1}{n}} - 1),\ E = [1;\ 3]$
$x = 1 \Rightarrow f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
$\dfrac{e^y - 1}{y} \xrightarrow[y\to 0]{} 1$
$f_n(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{n}\ln x} - 1}{\frac{1}{n}\ln x}\ln x \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln x$
Итак, $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln x$

Определение: $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x)$ на $E \Leftrightarrow \sup_E |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon\ \forall n > N_2\ \forall x \in E\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \Rightarrow$
$\Rightarrow \sup_E |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$

Номер 2. a. $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{arctg}(nx)}{\sqrt{n+x}},\ E = [0,\ +\infty)$
$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ поточечно.
$\left|\dfrac{\operatorname{arctg}(nx)}{\sqrt{n+x}}\right| < \left|\dfrac{\pi}{\sqrt{n}}\right| < \varepsilon$

b. $f_n(x) = n\sin\frac{1}{nx},\ E = [1,\ +\infty)$

$f_n(x) \sim n \cdot \dfrac{1}{nx} = \dfrac{1}{x} \Rightarrow f_n(x) \longrightarrow \dfrac{1}{x} = f(x)$

$\left| n \left(\sin \dfrac{1}{nx} - \dfrac{1}{nx} \right) \right| = \ldots$

$\sin y = y - \dfrac{y^3}{6} + \dfrac{\sin c}{24} y^4$

$\cdots = \left| n \left(\dfrac{1}{nx} - \dfrac{1}{nx} - \dfrac{1}{(nx)^3 6} + \dfrac{\sin c}{24} \dfrac{1}{(nx)^4} \right) \right| \leqslant \dfrac{1}{6n^2} + \dfrac{1}{24n^3} \xrightarrow[n\to\infty]{}$ 0 (тут подставили $x = 1$, получив максимальное значение)

Номер 3. a. $f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + n^2x^2},\ E = [0;\ 1]$

$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Рассмотрим последовательность $x_n = \dfrac{1}{n} \Rightarrow$

$\Rightarrow f_n(x_n) = \dfrac{n\frac{1}{n}}{1 + n^2\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$

Как дополнительный пример рассмотрели:

x^n на $(0;\ 1) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$x_n = 1 - \frac{1}{n}$

$f_n(x_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{1}{e}$ не сходится абсолютно.

b. $f_n(x) = \ln\left(3 + \dfrac{n^2e^x}{n^4 + e^{2x}}\right),\ E = [0;\ +\infty)$

$f(x) = \ln 3$

$f_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = \left| \ln\left(1 + \dfrac{n^2e^x}{3(n^4 + e^{2x})}\right) \right|$

Рассмотрим последовательность $x_n = \ln n^2$. Тогда

$g_n(x_n) = \ln\left(1 + \dfrac{n^2n^2}{3(n^4 + n^4)}\right) = \ln\dfrac{7}{6}$