# Семинары по математическому анализу 4 модуль.

Андрей Тищенко

2023/2024

**Семинар 4 апреля**

Сходимость функциональных последовательностей.

$\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}} \quad x \in E$
$\forall x \in E \quad f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$

Номер 1. a. $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{x+3n+2} = \dfrac{x^2}{\frac{x}{n}+3+\frac{2}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{x^2}{3}$

c. $f_n(x) = n(x^{\frac{1}{n}}-1),\ E = [1;\ 3]$
$x = 1 \Rightarrow f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
$\dfrac{e^y-1}{y} \xrightarrow[y\to 0]{} 1$
$f_n(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{n}\ln x}-1}{\frac{1}{n}\ln x}\ln x \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln x$
Итак, $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln x$

Определение: $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x)$ на $E \Leftrightarrow \sup_E |f_n(x)-f(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
$\forall\varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon\ \forall n > N_2\ \forall x \in E\ |f_n(x)-f(x)| < \varepsilon \Rightarrow$
$\Rightarrow \sup_E |f_n(x)-f(x)| \leqslant \varepsilon$

Номер 2. a. $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{arctg}(nx)}{\sqrt{n+x}},\ E = [0,\ +\infty)$
$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ поточечно.
$\left|\dfrac{\operatorname{arctg}(nx)}{\sqrt{n+x}}\right| < \left|\dfrac{\pi}{\sqrt{n}}\right| < \varepsilon$

b. $f_n(x) = n\sin\frac{1}{nx},\ E = [1,\ +\infty)$

$f_n(x) \sim n\cdot\dfrac{1}{nx} = \dfrac{1}{x} \Rightarrow f_n(x) \longrightarrow \dfrac{1}{x} = f(x)$

$\left|n\left(\sin\dfrac{1}{nx} - \dfrac{1}{nx}\right)\right| = \dots$

$\sin y = y - \dfrac{y^3}{6} + \dfrac{\sin c}{24}y^4$

$\dots = \left|n\left(\dfrac{1}{nx} - \dfrac{1}{nx} - \dfrac{1}{(nx)^3 6} + \dfrac{\sin c}{24}\dfrac{1}{(nx)^4}\right)\right| \leqslant \dfrac{1}{6n^2} + \dfrac{1}{24n^3} \xrightarrow[n\to\infty]{}$ 0 (тут подставили $x = 1$, получив максимальное значение)

Номер 3. a. $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2},\ E = [0;\ 1]$

$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Рассмотрим последовательность $x_n = \dfrac{1}{n} \Rightarrow$

$\Rightarrow f_n(x_n) = \dfrac{n\frac{1}{n}}{1+n^2\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$

Как дополнительный пример рассмотрели:

$x^n$ на $(0;\ 1) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$x_n = 1 - \frac{1}{n}$

$f_n(x_n) = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{1}{e}$ не сходится абсолютно.

b. $f_n(x) = \ln\left(3 + \dfrac{n^2e^x}{n^4+e^{2x}}\right),\ E = [0;\ +\infty)$

$f(x) = \ln 3$

$f_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = \left|\ln\left(1 + \dfrac{n^2e^x}{3(n^4+e^{2x})}\right)\right|$

Рассмотрим последовательность $x_n = \ln n^2$. Тогда

$g_n(x_n) = \ln\left(1 + \dfrac{n^2n^2}{3(n^4+n^4)}\right) = \ln\dfrac{7}{6}$

## Семинар 12 апреля

$f_n(x),\ x \in E$

1. $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ на $E$.
2. Можно ли переставлять операторы $\lim\limits_{n\to\infty}$, $\lim\limits_{x\to x_0}$, $\dfrac{d}{dx}$, $\int dx$?

То есть выполняется ли:

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x) \stackrel{?}{=} \lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{d}{dx}f_n(x) \stackrel{?}{=} \frac{d}{dx}\underbrace{\lim_{n\to\infty} f_n(x)}_{f(x)}$$

$E = [0;\ 1],\ f_n(x) = x^n \longrightarrow g(x)\begin{cases}0, & x\in[0;\ 1)\\ 1, & x = 1\end{cases}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{x\to 1^-} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$

$\lim\limits_{x\to 1^-}\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = 0$

$0 \neq 1 \Rightarrow$ это неверно.

$f_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows} f(x) \Leftrightarrow \sup\limits_{x\in E}|f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Ряды $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = S(x)$

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\cdot x^{n-1} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(x^n)' \stackrel{?}{=} \left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x^n\right)'$

$S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x) \overset{E}{\rightrightarrows} S(x) \Leftrightarrow$

$\sup\limits_{x\in E} \Leftrightarrow |S_n(x) - S(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\sup\limits_{x\in E}|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)| \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

изнак Вейерштрассе: Если $u_n(x)$ мажорируется последовательностью $a_n$: $\forall n\ |u_n(x)| \leqslant a_n$, тогда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится, тогда $S_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows} S(x)$

Задача 1. а. $u_n(x) = \frac{\mathrm{arctg}(n^2x)\cdot\cos(\pi nx)}{n\sqrt{n}},\ E = \mathbb{R}$

$|u_n(x)| \leqslant \frac{\pi}{2n^{\frac{3}{2}}}$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится.

b. $u_n(x) = e^{-n(x^2+\sin x)}$, $E = [1;\ +\infty)$
$e^{-n(x^2+\sin x)} < e^{-n}$, так как

$$\begin{cases} x \geqslant \sqrt{2}:\ \ x^2 + \sin x \geqslant 2 + \sin x \geqslant 1 \\ 1 \leqslant x < \sqrt{2}:\ \ \sin x > 0 \Rightarrow x^2 + \sin x > 1 \end{cases}$$

Функциональные ряды

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} C_n \cdot (\underbrace{x-a}_{t})^n \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{+\infty} C_n \cdot t^n$. Множество сходимости такого ряда имеет вид $(-R;\ R)$, $R \in \overline{\mathbb{R}}$, $R$ называется <u>радиусом сходимости</u>.

$R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{C_n}{C_{n+1}}\right|$

$\dfrac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|C_n|}$

2. a. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^2}$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)^2}{n^2}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n^2+2n+1}{n^2}\right| = 1$$

b. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)!}{n!}\right| = \lim_{n\to\infty} |n| = +\infty$$

c. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 5^n x^{3n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 5^n t^n$

$$\frac{1}{R_t} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|5^n|} \Rightarrow \forall t : |t| < \frac{1}{5} \Rightarrow \left|x^3\right| < \frac{1}{5} \Rightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt[3]{5}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow R_x = \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$$

3. a. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n+1}{3n^2+2}(x-1)^n$

$$R = \lim_{m\to\infty} \frac{\frac{2n+1}{3n^2+2}}{\frac{2n+3}{3n^2+6n+5}} = 1 \Rightarrow (0;\ 2)$$

Рассмотрим граничные точки:

$x = 2 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n+1}{3n^2+2} \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{3n}$ расходится.

$x = 0 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{2n+1}{3n^2+2}$

$\left(\frac{2n+1}{3n^2+2}\right)' = \frac{2(3n^2+2)-6n(2n+1)}{(3n^2+2)^2} = \frac{-6n^2-6n+4}{(3n^2+2)^2} \Rightarrow$ с какого-то момента она монотонно убывает. Тогда по признаку Лейбница ряд сходится.

4. a. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^n = x \cdot \sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = x \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (x^n)' = x \left( \sum\limits_{n=1}^{+\infty} x^n \right) = x \cdot \left( \dfrac{x}{1-x} \right)' =$

$= x \dfrac{(1-x)+x}{(1-x)^2} = \dfrac{x}{(1-x)^2}$

Очевидно, что радиус сходимости такой функции равен 1. Положим $x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n}{2^n} = \dfrac{\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^2} = 2.$

b. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{x^{2n+1}} 2n+1 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^{2n}\, dt = \int_0^x \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}\, dt =$

$= \int_0^x \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-t^2)^n\, dt = \int_0^x \dfrac{1}{1+t^2} dt = \operatorname{arctg} t|_0^x = \operatorname{arctg} x$

5. a. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$

**Семинар 26 апреля.**

**Теория:**

$$f(\vec{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = A \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{Коши: } \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall \vec{x} \in \overset{\circ}{U}_\delta(\vec{x}_0) \quad |f(\vec{x}) - A| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \text{Гейне: } \forall \vec{x}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \vec{x}_0,\ \vec{x}_n \neq \vec{x}_0 \Rightarrow f(\vec{x}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} A$$

**Задача 1. a.**

$$\lim_{\substack{x\to2\\y\to1}} \frac{x^2-4y^2}{x^2+2x-2xy-4y} = \lim_{\substack{x\to2\\y\to1}} \frac{(x-2y)(x+2y)}{(x+2)(x-2y)} = \lim_{\substack{x\to2\\y\to1}} \frac{x+2y}{x+2} = 1$$

**Задача 1. b.**

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \frac{\sin xy}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \underbrace{\frac{\sin xy}{xy}}_{1} y = 1\cdot 2 = 2$$

**Задача 1. c.**

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} (1+x)^{\frac{1}{x+x^2y}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} (1+x)^{\frac{1}{x}\frac{1}{x+y}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)^{\frac{1}{x+y}} = e^{\frac{1}{0+1}} = e$$

**Задача 2.**

$$f(x,\ y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2},\ x^2+y^2\neq 0 \\ a,\ \text{иначе} \end{cases}$$

**a.** Является непрерывной по $x$.

$$f(x,\ 0) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2},\ x^2\neq 0 \\ a,\ x^2=0 \end{cases} \quad ,\ \lim_{x\to 0} f(x,\ 0) = 1 \Rightarrow a = 1$$

**b.** Является непрерывной по $y$.

$$f(0,\ y) = \begin{cases} -\frac{y^2}{y^2},\ y^2\neq 0 \\ a,\ y^2=0 \end{cases} \quad ,\ \lim_{y\to 0} f(0,\ y) = -1 \Rightarrow a = -1$$

**c.** Является непрерывной по кривой $y = \alpha\sqrt{x},\ \alpha\neq 0$

$$f(x,\ \alpha\sqrt{x}) = \begin{cases} \frac{x^2-\alpha x}{x^2+\alpha^2 x},\ x^2+\alpha x\neq 0 \\ a,\ x^2+\alpha^2 x = 0 \end{cases} \quad , \lim_{x\to 0} \frac{x^2-\alpha^2 x}{x^2+\alpha^2 x} = \frac{x-\alpha^2}{x+\alpha^2} \xrightarrow[x\to 0]{} -1 = a$$

**d.** Является непрерывной.

Ни при каких, так как уже при приближении по $x$ и по $y$ значения параметра $a$ для достижения непрерывности должны различаться.

**Задача 3.** Вычислить пределы:

**a.**

$$f(x,\ y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{x\to0}\lim_{y\to0} f(x,\ y) = \lim_{x\to0}\frac{0}{x^2} = \lim_{x\to0} 0 = 0$$

$$\lim_{y\to0}\lim_{x\to0} f(x,\ y) = 0,\ \text{аналогично}$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2y}{x^2+y^2}$$

Знаем $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \underbrace{\forall(x,\ y)\in\overset{\circ}{U}_\delta(0,\ 0)}_{\sqrt{x^2+y^2}<\delta\Rightarrow|x|<\delta}\ \underbrace{|f(x,\ y)-0|<\varepsilon}_{\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|<\varepsilon}$

Также знаем $\frac{x^2+y^2}{2}\geqslant xy \Rightarrow \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|\leqslant\left|\frac{x}{2}\right|<\left|\frac{\delta}{2}\right|\leqslant\varepsilon$. Верно при $\delta=2\varepsilon$

**b.**

$$f(x,\ y) = x + y\sin\frac{1}{y}$$

$$\lim_{x\to0}\lim_{y\to0} x + y\sin\frac{1}{y} = \lim_{x\to0} x = 0$$

$$\lim_{y\to0}\lim_{x\to0} x + y\sin\frac{1}{y} = \lim_{y\to0} y\sin\frac{1}{y} = 0$$

Скорее всего ошибка в задании, так как слагаемые сходятся внезависимости друг от друга, дальше не решали.

**c.**

$$f(x,\ y) = \log_{1+x}(1+x+y)$$

$$\lim_{x\to0}\lim_{y\to0}\log_{1+x}(1+x+y) = \lim_{x\to0}\log_{1+x}(1+x) = 1$$

$$\lim_{y\to0}\lim_{x\to0}\log_{1+x}(1+x+y) = \lim_{y\to0}\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x+y)}{\ln(1+x)} = \infty$$

Дробь стремится к бесконечности, значит переходить к пределу по $y$ переходить нельзя. Пределы не совпадают, значит к многомерному пределу переходить нельзя

**Вставка:**

Открытость множества $A \longleftrightarrow$ метрика $\longrightarrow$ шары или окрестность.
$\Updownarrow$
$\forall x \in A\ \exists \delta\ U_\delta(x) \subset A$
Замкнут $\Leftrightarrow$ дополнение к открытости.

**1.** Свойства непрерывных на компакте

Компакт $\overset{\mathbb{R}^n}{\Longleftrightarrow}$ ограниченность, замкнутость.

**2.** $f$ непрерывна на $E \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \underbrace{f^{-1}(A)}_{\{x \mid f(x) \in A\}}$ - открытый для любого открытого $A$

**Задача 4.**

$f$ - непрерывна. $A = \{x \mid f(x) > y_0\}$
Пусть $x_1 \in A\ f(x_1) > y_0$. Возьмём $\varepsilon_0 = \dfrac{f(x_1) - y_0}{2}$, тогда из определения непрерывности:
$\exists \delta > 0\ \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_1)\ \ |f(x) - f(x_1)| < \varepsilon_0 \Rightarrow f(x) > y_0$, ч.т.д.
Вторую часть задачи решили устно (несложное упражнение).

**Задача 5.**

**Определение:**

Точка $x$ называется граничной точкой множества $A$, если:

$$\forall \delta > 0\ \exists x_0 \in U_\delta(x)\ x_0 \in A \wedge \exists x_1 \in U_\delta(x)\ x_1 \in \overline{A}$$

**Семинар 10 мая**

Рассматриваем такие штуки: $f(\vec{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

0. Определение, множество значений, линии уровня.

1. $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f(\vec{x}) = A$.

Гейне:

$$\forall \vec{x}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \vec{x}_0 \quad \vec{x}_n \neq \vec{x}:\ f(\vec{x}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} A$$

$\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)$

$$\forall i\ x_n^i \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0^i \Leftrightarrow \rho(\vec{x}_n;\ \vec{x}_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \left|x_n^i - x_0^i\right|^2 \to 0$$

2. Дифференцируемость

В одномерном случае:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Leftrightarrow f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \overline{o}(x - x_0)$$

В многомерном:
Определение: $f(x)$ называется дифференцируемой в точке $\vec{x}_0$:

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} A_i(x^i - x_0^i) + \overline{o}\big(\rho(\vec{x};\ \vec{x}_0)\big)$$

Определение: $\dfrac{\vartheta f}{\vartheta x_i} = \lim\limits_{x^i\to x_0^i} \dfrac{f(x_0^i), \dots,\ x^i, \dots,\ x_0^i - f(\vec{x}_0)}{x^i - x_0^i}$
Пример:
$f(x,\ y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$
$f(x,\ 0) = \frac{0}{x^2}$
$\dfrac{\vartheta f(x,\ 0)}{\vartheta x} = 0 \quad \dfrac{\vartheta f(0,\ y)}{\vartheta y} = 0$

Достаточное условие дифференцируемости

1. $\dfrac{\vartheta f}{\vartheta x_i}$ $\exists$ окрестность точки $\vec{x}_0$

2. Частные производные в точке $\vec{x}_0$ непрерывны
   $\Rightarrow$ функция дифференцируема в точке $\vec{x}_0$

**Задача 1.**

$f(x,\ y) = x + y^2 + \ln(x + y^2)$
$\frac{\vartheta f(x,\ y)}{\vartheta x} = 1 + \frac{1}{x+y^2} \quad \frac{\vartheta f(x,\ y)}{\vartheta y} = 2y + \frac{2y}{x+y^2}$
В окрестности точки $(0,\ 1)$ существуют частные производные (так как точка лежит в области определения).
$(x_n,\ y_n) \to (0,\ 1)$, непрерывность есть, так как частные производные непрерывны на области определения, значит функция дифференцируема.
$df(x,\ y)\Big|_{\substack{x=0\\y=0}} = 2dx + 4dy$

**Задача 2. a.**

$f(x,\ y) = \sqrt[3]{xy}$
$\frac{\vartheta f}{\vartheta x} = \sqrt[3]{y}\frac{1}{3\sqrt[3]{x}}, \quad \frac{\vartheta f}{\vartheta y} = \sqrt[3]{x}\frac{1}{3\sqrt[3]{y}}$
$\frac{\vartheta f}{\vartheta x}\frac{\vartheta f}{\vartheta y}\Big|_{\substack{x=0\\y=0}} = 0.$
Очевидно:
$f(x,\ 0) \equiv 0\ \forall x$
$f(0,\ y) \equiv 0\ \forall y$
$\sqrt[3]{xy} = 0 + Ax + By + \overline{o}(\sqrt{x^2 + y^2})$
При этом $A,\ B$ являются частными производными, то есть $\sqrt[3]{xy} = \overline{o}(\sqrt{x^2 + y^2})$
$$\frac{\sqrt[3]{xy}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \xrightarrow[(x,\ y)\to(0,\ 0)]{} 0$$
Положим $x = y \Rightarrow \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \xrightarrow[x\to 0]{} \infty$, то есть дифференцируемости нет.

**Задача 2. b.**

$f(x,\ y) = \cos\sqrt[3]{xy}$
$\frac{\vartheta f(x,\ y)}{\vartheta x} = -\sin\sqrt[3]{xy}\cdot\frac{\sqrt[3]{y}}{3\sqrt[3]{x^2}}$
$\frac{\vartheta f(x,\ y)}{\vartheta y} = -\sin\sqrt[3]{xy}\cdot\frac{\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{y^2}}$
Частные производные есть, в точках $(x,\ 0)$ и $(0,\ y)$ они равны 0, так как синус обратится в тождественную 1.
$\cos\sqrt[3]{xy} = 1 + Ax + By + \overline{o}(\rho(x,\ y))$
$\cos\sqrt[3]{xy} - 1 = \overline{o}(\sqrt{x^2 + y^2})$
$$\frac{\cos\sqrt[3]{xy} - 1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{-\frac{\sqrt[3]{x^2y^2}}{2} + \overline{o}(1)(\sqrt[3]{x^2y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leqslant \dots$$

Из неравенства Коши $\sqrt{x^2+y^2} \geqslant \sqrt{2xy}$

$\dots \leqslant \dfrac{-\frac{(xy)^{\frac{2}{3}}}{2} + \overline{o}(1)(\sqrt[3]{xy})^2}{\sqrt{2xy}} \xrightarrow[(x,\ y)]{} 0$

**Задача 3.**

$f(u,\ v),\ f'_u\ f'_v$

$g(x,\ y) = f(x\cos y,\ x\sin y)$

$\dfrac{\vartheta g}{\vartheta x} = \dfrac{df}{du}\dfrac{du}{dx} + \dfrac{df}{dv}\dfrac{dv}{dx} = f'_u(x\cos y)'_x + f'_v(x\sin y)'_x = f'_u\cos y + f'_v\sin y$

Производная по направлению

$\vec{e}(e_1, \dots,\ e_n),\ |\vec{e}| = 1$

$f(\vec{x}_0 + t\vec{e}) = g(t)$