Лекции по математическому анализу 4 модуль.

Андрей Тищенко

2023/2024

Лекция 12 апреля.

Сходимость функциональных рядов

$f_n(x),\ n \in \mathbb{N},\ x \in E \subseteq \mathbb{R}$
$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$

Определение: $f_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows} f(x) \Leftrightarrow \sup\limits_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[b\to\infty]{} 0$

Пример: Закон больших чисел. $\eta_n(\omega) = \frac{\xi_1(\omega)+\dots+\xi_n(\omega)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} E\xi_1 = a$ почти наверное. $P\{\omega:\ \eta_n(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} a\} = 1$

Вопрос: можно ли переставлять операторы $\lim\limits_{n\to\infty},\ \lim\limits_{x\to x_0},\ \dfrac{d}{dx},\ \displaystyle\int dx$?

То есть $\lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) \overset{?}{=} \lim\limits_{x\to x_0} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{d}{dx} f_n(x) \overset{?}{=} \dfrac{d}{dx} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$

$\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int f_n(x)dx \overset{?}{=} \int \left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx$

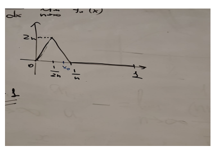
Нет, нельзя.

Пример 1. $f_n(x) = x^n,\ E = [0;\ 1],\ x_0 = 1$
$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to 1^-} x^n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$
$\lim_{x\to 1^-} \lim_{n\to\infty} x^n = \lim_{x\to 1^-} \begin{pmatrix} 0, & x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{pmatrix} = 0$

Теорема: $f_n(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in E$ и $f_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows} f(x)$, то
$f(x)$ непрерывна в точке x_0

Пример 2. $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n},\ x \in \mathbb{R},\ x_0 = 0$
$f(x) \equiv 0 \quad f'(0) = 0$
$f_n'(x) = \frac{\cos nx}{n} \cdot n = \cos nx|_{n_0=0} \equiv 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

Теорема: $f_n(x)$ непрерывна и дифференцируема на $[a;\ b]$
$\exists c \in [a;\ b]:\ f_n(c)$ сходится
$f_n'(x) \overset{[a;\ b]}{\rightrightarrows}$, тогда
$f_n(x) \overset{[a;\ b]}{\rightrightarrows}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{d}{dx} f_n(x) = \dfrac{d}{dx} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$

Пример 3. $f_n(x) =$ 
$\forall x \in [0;\ 1]\ f_n(x) \longrightarrow 0$
$\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx = 1,\ \lim_{n\to\infty} 1 = 1$
$\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = 0 \neq 1$

Теорема: $f_n(x) \overset{[a;\ b]}{\rightrightarrows} f(x)$, то
$\displaystyle\forall c \int_c^x f_n(t)dt \underset{n\to\infty}{\overset{[a;\ b]}{\rightrightarrows}} \int_c^x f(t)dt$

Сходимость функциональных рядов

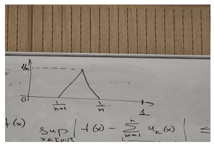
$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x),\ x \in E$$

Ряд сходится равномерно:

$$\sup_{x\in E} \left| \sum_{k=1}^{n} u_k(x) - S(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Теорема: (признак Вейерштрасса) если последовательность $u_n(x)$ мажорируется числовой последовательностью $a_n:\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in E\, |u_n(x)| \leqslant a_n$.

Тогда из сходимости $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ следует сходимость $u_n(x)$ на E.

Пример: $u_n(x) =$ 

$\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_n(x) = f(x)$

$\sup\limits_{x\in[0;\ 1]} \left| f(x) - \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x) \right| \leqslant \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\sup\limits_{x\in[0;\ 1]} |u_n(x)| = \frac{1}{n} \quad \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ расходится.

То есть мы имеем равномерную сходимость, но найти мажорирующую последовательность нельзя.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \stackrel{?}{=} \left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x^n \right)' = \left(\frac{x}{1-x} \right)'$

Степенные ряды

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} C_n \cdot (x-a)^n \quad \sum\limits_{n=0}^{+\infty} C_n x^n$

Лемма. (Абеля)

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n$ сходится при $x = x_1$, то $\forall x_0 : |(| x_0) < |x_1|$ ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n$ сходится
2. $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n$ расиходится при $x = x_2$, то $\forall x_0 : |(| x_0) > |x_2|$ ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n$ расходится

$C_n \cdot x_1^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow$ ограниченна $\Rightarrow \exists M\ \forall n\ \ |C_n \cdot x_1^n| < M$

Доказательство: 1. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |C_n \cdot x_0^n| = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left| C_n \cdot x_1^n \cdot \left(\frac{x_0}{x_1} \right)^n \right| \leqslant M \cdot \underbrace{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} q^n}_{\text{сходится}} \Rightarrow$ сходится абсолютно

2. Пусть сходится при $x = x_0 \underset{\text{п. 1}}{\Rightarrow}$ сходится при $x = x_2 \Rightarrow \perp$

Вывод: Возможен один из трёх вариантов

(a) $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n$ сходится $\forall x \in \mathbb{R}$

(b) $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n$ сходится только при $x = 0$

(c) $\exists R: \ \sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n$ сходится на $(-R;\ R)$ (множество сходимости), а на $(-\infty,\ -R) \cup (R,\ +\infty)$ расходится. Это R называется радиусом сходимости степенного ряда.

Теорема: $\forall r: \ 0 < r < R$ ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n$ сходится равномерно на $[-r,\ r]$

Доказательство: $\sup\limits_{[-r;\ r]} \left| \sum\limits_{k=0}^{n} C_k x^k - \sum\limits_{k=1}^{+\infty} C_k x^k \right| = \sup\limits_{[-r;\ r]} \left| \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} C_k x^k \right| \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \left| C_k r^k \right|$, так как r находится в множестве сходимости, значит $\underbrace{\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} C_k r^k}_{\text{числовой ряд}}$ сходится абсолютно.

Утверждение: Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ сходится и $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k x^k$ имеет радиус сходимости $R = 1$ и $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ существует, то $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$.

Теорема: 1. Если $\lim\limits_{n \to \infty} \left| \dfrac{C_n}{C_{n+1}} \right| = A$, то $R = A$

2. Если $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|C_n|} = B$, то $R = \frac{1}{B}$

Доказательство: 1. $0 < A < +\infty \quad \sum\limits_{n=0}^{+\infty} C_n \cdot x^n$

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{c_{n+1} x^{n+1}}{C_n x^n} \right| = |x| \cdot \lim_{n \to \infty} \left| \frac{C_{n+1}}{C_n} \right| = |x| \frac{1}{A}$$

$|x| < A$ сходится по Даламберу

$|x| > A$ расходится по Даламберу, значит $R = A$

2. $A = +\infty \quad \lim\limits_{n \to \infty} \left| \dfrac{C_{n+1} x^{n+1}}{C_n x^n} \right| = 0 \Rightarrow \forall x$ по Даламберу сходится $R = +\infty$

3. $A = 0 \quad \lim\limits_{n \to \infty} \left| \dfrac{C_{n+1} x^{n+1}}{C_n x^n} \right| = +\infty \Rightarrow \forall x \neq 0$ расходится.