

# Лекции по математическому анализу 4

## МОДУЛЬ.

Андрей Тищенко

2023/2024

### Лекция 12 апреля.

Сходимость функциональных рядов

$$f_n(x), \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in E \subseteq \mathbb{R}$$
$$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$$

Определение:  $f_n(x) \xrightarrow{E} f(x) \Leftrightarrow \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Пример: Закон больших чисел.  $\eta_n(\omega) = \frac{\xi_1(\omega) + \dots + \xi_n(\omega)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E\xi_1 = a$  почти наверное.  $P\{\omega : \eta_n(\omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a\} = 1$

Вопрос: можно ли переставлять операторы  $\lim_{n \rightarrow \infty}, \lim_{x \rightarrow x_0}, \frac{d}{dx}, \int dx$ ?

То есть  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \stackrel{?}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} f_n(x) \stackrel{?}{=} \frac{d}{dx} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) dx \stackrel{?}{=} \int \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx$$

Нет, нельзя.

Пример 1.  $f_n(x) = x^n$ ,  $E = [0; 1]$ ,  $x_0 = 1$

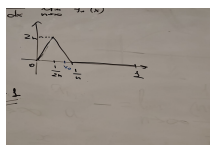
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow 1-} x^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \lim_{x \rightarrow 1-} \begin{pmatrix} 0, & x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{pmatrix} = 0$$

Теорема:  $f_n(x)$  непрерывна в точке  $x_0 \in E$  и  $f_n(x) \xrightarrow{E} f(x)$ , то  $f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$

Пример 2.  $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x_0 = 0$   
 $f(x) \equiv 0$   $f'(0) = 0$   
 $f'_n(x) = \frac{\cos nx}{n} \cdot n = \cos nx|_{n_0=0} \equiv 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$

Теорема:  $f_n(x)$  непрерывна и дифференцируема на  $[a; b]$   
 $\exists c \in [a; b] : f_n(c)$  сходится  
 $f'_n(x) \xrightarrow{[a; b]}$ , тогда  
 $f_n(x) \xrightarrow{[a; b]}$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} f_n(x) = \frac{d}{dx} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$



Пример 3.  $f_n(x) =$   
 $\forall x \in [0; 1] f_n(x) \longrightarrow 0$   
 $\int_0^1 f_n(x) dx = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$   
 $\int_0^1 f(x) dx = 0 \neq 1$

Теорема:  $f_n(x) \xrightarrow{[a; b]} f(x)$ , то  
 $\forall c \int_c^x f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_c^x f(t) dt$

Сходимость функциональных рядов

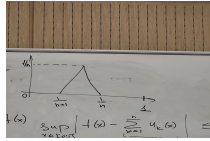
$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x), x \in E$$

Ряд сходится равномерно:

$$\sup_{x \in E} \left| \sum_{k=1}^n u_k(x) - S(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Теорема: (признак Вейерштрасса) если последовательность  $u_n(x)$  мажорируется числовой последовательностью  $a_n : \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in E |u_n(x)| \leq a_n$ .

Тогда из сходимости  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$  следует сходимость  $u_n(x)$  на  $E$ .



Пример:  $u_n(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x) = f(x)$

$$\sup_{x \in [0; 1]} \left| f(x) - \sum_{k=1}^n u_k(x) \right| \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\sup_{x \in [0; 1]} |u_n(x)| = \frac{1}{n} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \text{ расходится.}$$

То есть мы имеем равномерную сходимость, но найти мажорирующую последовательность нельзя.

$$\text{Рассмотрим ряд } \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} ? = \left( \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \right)' = \left( \frac{x}{1-x} \right)'$$

Степенные ряды

$$\sum_{n=0}^{+\infty} C_n \cdot (x-a)^n \quad \sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n$$

Лемма. (Абеля)

1.  $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n$  сходится при  $x = x_1$ , то  $\forall x_0 : (|x_0| < |x_1|)$  ряд  $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n$  сходится

2.  $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n$  расходится при  $x = x_2$ , то  $\forall x_0 : (|x_0| > |x_2|)$  ряд  $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n$  расходится

$$C_n \cdot x_1^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \text{ограниченна} \Rightarrow \exists M \forall n |C_n \cdot x_1^n| < M$$

$$\text{Доказательство: } 1. \sum_{n=0}^{+\infty} |C_n \cdot x_0^n| = \sum_{n=0}^{+\infty} \left| C_n \cdot x_1^n \cdot \left( \frac{x_0}{x_1} \right)^n \right| \leq M \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} q^n}_{\text{сходится}} \Rightarrow \text{сходится}$$

абсолютно

2. Пусть сходится при  $x = x_0 \Rightarrow$  п. 1  $\Rightarrow$  сходится при  $x = x_2 \Rightarrow \perp$

Вывод: Возможен один из трёх вариантов

- (a)  $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n$  сходится  $\forall x \in \mathbb{R}$
- (b)  $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n$  сходится только при  $x = 0$
- (c)  $\exists R : \sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n$  сходится на  $(-R; R)$  (множество сходимости),  
а на  $(-\infty, -R) \cup (R, +\infty)$  расходится. Это  $R$  называется радиусом сходимости степенного ряда.

Теорема:  $\forall r : 0 < r < R$  ряд  $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n$  сходится равномерно на  $[-r, r]$

Доказательство:  $\sup_{[-r; r]} \left| \sum_{k=0}^n C_k x^k - \sum_{k=1}^{+\infty} C_k x^k \right| = \sup_{[-r; r]} \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} C_k x^k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |C_k r^k|$ , так  
как  $r$  находится в множестве сходимости, значит  $\underbrace{\sum_{k=n+1}^{+\infty} C_k r^k}_{\text{числовой ряд}}$  сходится  
абсолютно.

Утверждение: Если ряд  $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$  сходится и  $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k x^k$  имеет радиус сходимости  $R = 1$   
и  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$  существует, то  $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ .

Теорема: 1. Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_n}{C_{n+1}} \right| = A$ , то  $R = A$   
2. Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|C_n|} = B$ , то  $R = \frac{1}{B}$

Доказательство: 1.  $0 < A < +\infty$   $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n \cdot x^n$   
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_{n+1} x^{n+1}}{C_n x^n} \right| = |x| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_{n+1}}{C_n} \right| = |x| \frac{1}{A}$   
 $|x| < A$  сходится по Даламберу  
 $|x| > A$  расходится по Даламберу, значит  $R = A$   
2.  $A = +\infty$   $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_{n+1} x^{n+1}}{C_n x^n} \right| = 0 \Rightarrow \forall x$  по Даламберу сходится  
 $R = +\infty$   
3.  $A = 0$   $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_{n+1} x^{n+1}}{C_n x^n} \right| = +\infty \Rightarrow \forall x \neq 0$  расходится.

## Лекция 17 апреля

### Степенные ряды

$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ . Выполняется одно из трёх.

1. Сходится только при  $x = 0$
2. Сходится абсолютно  $\forall x$
3. Сходится абсолютно на  $(-R; R)$ , расходится на  $(-\infty; -R) \cup (R; +\infty)$ .  
 $R$  - радиус сходимости.

Теорема:  $\forall r : 0 < r < R_{\text{сх}}$  ряд сходится равномерно на  $[-r; r]$

Теорема (Абеля): Если ряд сходится при  $x = R$  абсолютно, то на отрезке  $[0; R]$  ряд сходится равномерно.

Теорема: Если  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|C_{n+1}|}{|c_n|} (\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_n|}) = A \in \overline{\mathbb{R}}$ , то

$$R_{\text{сх}} = \frac{1}{A}$$

Доказательство:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_{n+1} x^{n+1}|}{|c_n x^n|} = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = |x| \cdot A \quad (*)$

1 случай.  $A = 0, (*) < 1$ , то есть сходимость при любом  $x$ ,  
то есть  $R_{\text{сх}} = +\infty$

2 случай.  $A = +\infty (*) = +\infty > 1$ , то есть расходимость при любом  $x \neq 0$ ,  
то есть  $R_{\text{сх}} = 0$

3 случай.  $A \in \mathbb{R}^+ |x|A < 1$  сходится, то есть  $|x| < \frac{1}{A}$ ,

$|x|A > 1$  расходится, то есть  $|x| > \frac{1}{A}$

То есть  $R_{\text{сх}} = \frac{1}{A}$

Теорема: (Формула Коши-Адамара)

$$R_{\text{сх}} = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$$

Доказательства не будет.

Вопрос:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x) \stackrel{?}{=} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right)'$$

Это не всегда верно, стоит запомнить данный факт.

$$1. \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x \quad R_1$$

$$2. \sum_{n=0}^{+\infty} c_n n x^{n-1} = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} c_n n x^n \quad R_2$$

$$3. \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1} = x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{n+1} x^n \quad R_3$$

Теорема:  $R_1 = R_2 = R_3$

Доказательство: 1.  $R_2 \leq R_1 \leq R_3$  (очевидно из коэффициентов, так как  $c_n n \geq c_n \geq \frac{c_n}{n+1}$ )

Пусть  $x_1$  - точка сходимости 2. то есть сходится  $\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n| \cdot |x_1|^n \cdot n$ ,

тогда по признаку сравнения

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{c_n}{n+1} \right| |x_1|^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |c_n| |x_1|^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |c_n| \cdot |x_1|^n \cdot n$$

Все остальные ряды сойдутся.

2.  $R_3 \leq R_2$

Если при  $x_0$  сходится (абсолютно) 3., то при  $x_0$  сходится 2.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{c_n}{n+1} x_1^n \right| - \text{сходится} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists M \forall n \left| \frac{c_n}{n+1} x_1^n \right| \leq M$$

$$\exists x_1 : |x_0| < |x_1| < R_3$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n n x_0^n| = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\left| \frac{c_n}{n+1} x_1^n \right|}_{\leq M} \cdot (n+1)n \cdot \underbrace{\left| \frac{x_0}{x_1} \right|}_{q^n}^n \leq$$

$$\leq M \sum_{n=0}^{+\infty} n(n+1)q^n \text{ сходится по Даламберу } (0 < q < 1)$$

Выводы:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = f(x), \quad D_f = (-R; R)$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n n x^{n+1} = f'(x)$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1} = \int_0^x f(t) dt$$

$f(x)$  - бесконечно число раз дифференцируем.

$$f^{(k)}(0) = c_k \cdot k!$$

Вывод: Если  $f(x)$  раскладывается в степенной ряд, то  $c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$

Пример:  $f(x) \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} - 0}{x - 0} = 0$$

Утверждение:  $e^{-\frac{1}{x^2}} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$

$$f^{(k)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(k+1)}(x) - f^{(k+1)}(0)}{x - 0} = 0$$

$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \equiv 0 \neq f(x)$ , хотя функция бесконечное число раз дифференцируема.

### Ряды Тейлора

Определение: Рядом Тейлора функции бесконечное число раз дифференцируемой в точке  $x = a$  называется

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n \quad (*)$$

Теорема: (Достаточное условие) Если  $f^{(k)}(x)$  ограничена в совокупности на интервале  $(a - R; a + R)$ , то  $(*)$  верно на  $(a - R; a + R)$

Доказательство: ограничена в совокупности означает:

$$\exists M \forall k \forall x \in U_R(a) : |f^{(k)}| \leq M$$

$$\left| \underbrace{\sum_{n=0}^k \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n}_{T_k(x)} - f(x) \right| = \left| \frac{f^{(k+1)}(\xi) \cdot (x-a)^{k+1}}{(k+1)!} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M \cdot R^{k+1}}{(k+1)!} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$$

$$1. \quad y = e^x$$

$$|f^{(k)}(x)| = |e^x| \leqslant e^R$$

$$\forall x \quad e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$2. \quad y = \sin x$$

$$|f^{(k)}(x)| \leqslant 1$$

$$\forall x \quad \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$3. \quad y = \cos x$$

$$\forall x \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

В комплексных числах  $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$  аналитические функции (для них радиус сходимости выглядит так  $|z| < R$ )

$$4. \quad y = \ln(1+x), a = 0$$

$$y' = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n, \quad |x| < 1$$

$$\int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x (-1)^n t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$$

$$\text{Но } \ln(1+x) : x \in (-1; +\infty), \text{ а } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} : x \in (-1; 1]$$

$$5. \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n^\alpha x^n \alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)$$



**Лекция 19 апреля**  
**Многомерный анализ**

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}; \quad f(\vec{x}); \quad \vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$$

**Определение: (Коши)**

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \forall \vec{x} : \vec{x} \in U_{\delta}(\vec{x}_0)$$

$$|f(\vec{x}) - A| < \varepsilon$$

**Определение:**

$$\vec{x} \in U_{\delta}(\vec{x}_0) \Leftrightarrow 0 < \rho(\vec{x}, \vec{x}_0) < \delta$$

**Определение:**

метрическим пространством называется  $(M, \rho)$ :  $\forall x, y$

$$1 \quad \rho(x, y) = \rho(y, x) \geq 0$$

$$2 \quad \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$3 \quad \forall x, y, z \quad \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$$

Классическая метрика на  $\mathbb{R}_n$

$$\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

**Определение: (Гейне)**

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = A \Leftrightarrow \forall \vec{x}_k : \vec{x}_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \vec{x}_0 \quad \vec{x}_k \neq \vec{x}_0 \Rightarrow f(\vec{x}_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} A$$

$$\textbf{Определение 1: } \vec{x}_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \vec{x}_0 \Leftrightarrow \forall i : 1 \leq i \leq n \quad x_{i,k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} x_{i,0}$$

$$\textbf{Определение 2: } \vec{x}_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \vec{x}_0 \Leftrightarrow \rho(\vec{x}_k, \vec{x}_0) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$$

**Теорема: Определение 1  $\Leftrightarrow$  Определение 2**

$$1 \Rightarrow 2$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_{i,k} - x_{i,0})^2} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \quad \text{по арифметике пределов последовательностей}$$

$$1 \Leftarrow 2$$

$$|x_{i,k} - x_{i,0}| \leq \rho(\vec{x}_k, \vec{x}_0) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$$

**Замечание 1:**

Наследуется вся арифметика пределов

**Замечание 2:**

Тяжело доказывается сходимость

Там далее примеры были, но нам пофигу, сам там напишешь. ОК, спасибо, Вова.

**Определение:**

$f(\vec{x})$  называется непрерывной в точке  $\vec{x}_0 \Leftrightarrow \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)$

**Теорема:**

Функция непрерывна на компакте

1 ограничена на нём

2 достигаются наибольшее и наименьшее значение

3 принимает все промежуточные значения

**Определение:**

Множество называется компактом, если для любого покрытия открытыми множествами существует конечное подпокрытие.

$$K \subset \bigcup_{\alpha} A_{\alpha} \exists \text{ конечный набор } A_{\alpha_1}, \dots, A_{\alpha_m} :$$

$$K \subset \bigcup_{\alpha}^m A_{\alpha_i}$$

**Определение:**

В  $\mathbb{R}^n$  компактами являются ограниченные и замкнутые множества.

$$U_\delta(\vec{x}_0) = \{\vec{x} : \rho(\vec{x}, \vec{x}_0) < \delta\}$$

**Определение:**

множество  $A$  называется открытым  $\Leftrightarrow \forall \vec{x} \in A \exists \delta > 0 : U_\delta(\vec{x}) \subset A$

**Пример:**

$$A \subseteq \mathbb{R} \quad A \text{ открыты} \Leftrightarrow A = \bigcup_{k=1}^{(n)+\infty} (a_k, b_k), \quad a_i, b_i \in \overline{\mathbb{R}}$$

**Определение:**

множество  $B$  называется замкнутым, если  $\overline{B}$  - открыто

**Теорема:**

$A_i$  - открыто,  $B_i$  - замкнуто

1  $\bigcup_i A_i$  - открыто

2  $\bigcap_i A_i$  - открыто

3  $\bigcap_i B_i$  - замкнуто

4  $\bigcup_i B_i$  - замкнуто

**Пример (2):**

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left(0 - \frac{1}{2^n}; 1 + \frac{1}{2^n}\right) = [0, 1]$$

Пример (4):

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[ \frac{1}{n}; 1 - \frac{1}{n} \right] = (0, 1)$$

Доказательство:

$$1 \bigcup_i A_i = A$$

$$\vec{x} \in A \Rightarrow \exists i \vec{x} \in A_i \Rightarrow \exists \delta : U_\delta(\vec{x}) \subset A_i \Rightarrow U_\delta(\vec{y}_0) \subset A$$

$$3 \bigcap_i B_i = \overline{\bigcup_i \overline{B_i}} - \text{замкнуто}$$

$$4 \bigcup_{i=1}^k B_i$$

Возьмем  $\forall \vec{x}_n \in B$  и  $\vec{x}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \vec{x}_0 \quad \exists i$  и  $\exists n_k$

$$\forall k \vec{x}_{n_k} \in B_i \wedge \vec{x}_{n_k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \vec{x}_0 \Rightarrow \vec{x}_0 \in B_i \Rightarrow \vec{x}_0 \in B$$

Теорема:

множество  $B$  замкнуто  $\Leftrightarrow$

$$\forall \vec{x}_k \in B : \vec{x}_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \vec{x}_0 \Rightarrow \vec{x}_0 \in B$$

Доказательство:

”  $\Rightarrow$  ”

Предположим противное, то есть  $B$  замкнуто, но  $\exists \vec{x}_k \in B : \vec{x}_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \vec{x}_0 \wedge \vec{x}_0 \notin B$ , то есть  $\vec{x}_0 \in \overline{B}$  – открытое

$$\exists \delta : U_\delta(\vec{x}_0) \subset \overline{B}$$

так как  $\vec{x}_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \vec{x}_0 \Rightarrow \exists N = N(\delta) : \forall k > N \vec{x}_k \in U_\delta(\vec{x}_0) \subset \overline{B}$  - противоречие.

”  $\Leftarrow$  ”

$B$  - замкнуто  $\Leftrightarrow \overline{B}$  - открыто.  $\vec{y}_0 \in \overline{B} \exists \delta : U_\delta(\vec{y}_0) \subset \overline{B}$

Предположим противное, то есть  $\delta_n = \frac{1}{n}$ , то  $\exists y_n \in U_\delta(\vec{y}_0) \wedge y_n \notin \overline{B}$  (то есть  $y_n \in B$ ) Получаем  $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y_0 \Rightarrow y_0 \in B$  - противоречие