Лекции по алгебре 4 модуль.

Андрей Тищенко

Лекция 3 апреля

Квадратичные формы

Определение: Многочлен второй степени от n переменных, то есть выражение вида

$$q(x_1, \overset{x\in\mathbb{R}^n}{\ldots}, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{i\,i}x_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{i\,j}x_ix_j$$

Где $a_{i\,j} \in \mathbb{R}$, называют квадратичной формой.

Замечание: Многочлен $q(x)$ называется однородным степени k, если

$$\forall\alpha \quad q(\alpha x) = \alpha^k q(x)$$

Замечание: Квадратичная форма - это отображение $q : V \longrightarrow \mathbb{R}$ (вектор в число)

Рассмотрим n-мерное векторонoе пространство V над $\mathbb{R}$. Зафиксируем в нём базис $e_1, \ldots, e_n$:
Тогда у любого $x \in V$ есть набор координат в этом базисе $x_1, \ldots, x_n$.
То есть $\forall x \in V : x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$
Пусть $x^e = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow q(x)$ можно представить в виде $q(x) = (x^e)^T Ax^e$, где
$A = (a_{i\,j})$ матрица квадратичной формы $q(x)$ в базисе $e_1, \ldots, e_n$,
$a_{i\,j}$ - коэффициенты квадратичной формы.

Пример: В $\mathbb{R}^3$

$$q(x) = x_1^2+8x_1x_3 = x_1^2+4x_1x_3+4x_3x_1 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Замечание: Матрица квадратичной формы всегда симметрическая. То есть

$$A^T = A$$

Замечание: По любой билинейной форме можно построить квадратичную форму, взяв $q(x) = b(x,\ x)$. Тогда $a_{i\,j} = \dfrac{b_{i\,j} + b_{j\,i}}{2}$

Пример: $b(x,\ y) = x_1 y_1 + e x_1 y_3 + 5 x_3 y_1 \Rightarrow q(x) = b(x,\ x) = x_1^2 + 8 x_1 x_3$

Определение: Билинейная форма называется <u>симметрической</u>, если

$$b(x,\ y) = b(y,\ x),\ \text{например, скалярное произведение}$$

Называется <u>кососиметрической</u>, если

$$b(x,\ y) = -b(y,\ x)$$

Пример: Кососиметрическая билинейная форма с матрицей $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow B^T = -B$

Замечание: По любой квадратичной форме можно построить симметрическую билинейную форму. Это называется <u>поляризацией</u> квадратичной формы.

$$b(x,\ y) = \frac{1}{2}\big[q(x+y) - q(x) - q(y)\big]$$

Полярная билинейная форма к $q(x)$ $\big($имеет ту же матрицу, что и $q(x)$, $b(x,\ x) = q(x)\big)$

Утверждение: При переходе от базиса e к базису e' в линейном пространстве V матрица квадратичной формы меняется так:

$A' = C^T \cdot A \cdot C,$ "Стас" без рофлов, реально Стасямба конкретная

A' - матрица квадартичной формы в новом базисе e'
C - матрица перехода от базиса e к базису e'

Доказательство: Свзять координат вектора:
$x = Cx'$, так как $x' = C^{-1}x$ - формула изменения координат вектора при замене базиса.
Тогда $\forall x \quad q(x) = x^T Ax = (Cx')^T A(Cx') = (x')^T C^T ACx' = (x')^T A'x'$,
значит $A' = C^T AC$ $\big($Можно в качестве x брать все векторы канонического базиса $(0, \dots 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0)$ и показать совпадение матричных элементов$\big)$

Определение: Если квадратичная форма в некотором базисе записана в виде $q(x) = x^T Ax$, то есть если A - матрица квадратичной формы в некотором базисе, то $\operatorname{Rg} A$ называется рангом квадратичной формы $q(x)$.

Почему это определение корректно? То есть почему $\operatorname{Rg} A$ не зависит от базиса.

Лемма: Пусть $A,\ U \in M_n(\mathbb{R}),\ \det U \neq 0$. Тогда $\operatorname{Rg} A \cdot U = \mathrm{RgA} = \operatorname{Rg} U \cdot A$, то есть при умножении на невырожденную матрицу ранг не меняется.

Доказательство: $\operatorname{Rg} A \cdot U \leqslant \operatorname{Rg} A$, так как столбцы матрицы AU есть линейные комбинации столбцов матрицы A.
Ранг матрицы по теореме о ранге матрицы равен максимальному числу линейно независимых столбцов не могло вырасти, так как все столбцы AU линейно выражаются через столбцы исходной матрицы.
Покажем $\operatorname{Rg} A \cdot U \geqslant \operatorname{Rg} A$.

$$\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg} A(U \cdot U^{-1}) = \operatorname{Rg}(AU)U^{-1} \leqslant \operatorname{Rg}(AU)$$

$$\operatorname{Rg} U \cdot A = \operatorname{Rg}(UA)^T = \operatorname{Rg} A^T U^T = \operatorname{Rg} A^T = \operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg} AU$$

Утверждение: (об инвариантности ранга квадратичной формы)
Пусть $q(x)$ - квадратичная форам на линейном пространстве V.
Пусть $a = (a_1, \dots, a_n)$ и $b = (b_1, \dots, b_n)$ - базисы в V.
Пусть A - матрица квадратичной формы в базисе a
Пусть B - матрицы квадратичной формы в базисе b
Тогда $\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg} B$ и ранг квадратичной формы корректно определен.

Доказательство: Было доказано, что $B = C^T AC \Rightarrow$ по лемме, так как мы умножаем матрицу A на матрицы C^T слева и на C справа, то $\operatorname{Rg} B = \operatorname{Rg} A$, ч.т.д.

Определение: квадратичную форму $q(x)$ будем назвать <u>положительно определённой</u>, если

$$\forall x \neq 0 \quad q(x) > 0$$

<u>отрицательно определённой</u>, если

$$\forall x \neq 0 \quad q(x) < 0$$

<u>знакопеременной</u>, если

$$\exists x,\ y \in V : q(x) < 0 < q(y)$$

Пример: $q_1(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2$ на $\mathbb{R}^3$ - положительно определена
$q_2(x) = x_1^2 - x_3^2$ - знакопеременна $\big(y = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix},\ x = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow q(x) < 0 < q(y)\big)$.
$q_3(x) = -x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2$ - отрицательно определена на $\mathbb{R}^3$,
но $q_3'(x) = -x_1^2 - 3x_3^2$ - не является отрицательно определённой, так как $q_3' \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = 0$ - это неположительно определённая квадратная форма.

Теорема: (Критерий Сильвестра положительной определённости)
Пусть A - матрица квадратичной формы $q(x)$ в некотором базисе.
Тогда

$q(x)$ положительно определена $\Leftrightarrow$ последовательность главных угловых миноров в А строго положительна

То есть $\begin{cases} \Delta_1 = a_{1\,1} > 0 \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} \end{vmatrix} > 0 \\ \dots \\ \Delta_n = \det A > 0 \end{cases}$

Следствие:

Квадратичная форма отрицательно определена $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_1 < 0 \\ \Delta_2 > 0 \\ \dots \\ (-1)^n \Delta_n > 0 \end{cases}$

То есть знаки главных угловых миноров чередуются, начиная с минуса.

Доказательство: Так как A - отрицательно определена $\Leftrightarrow -A$ положительно определена $\det(-A) = (-1)^n \det A$, ч.т.д.

Пример: $q(x) = -x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2$ - отрицательно определённая

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}$$

Определение: Квадратичную форму $q(x) = \alpha_1 x_1^2 + \dots + \alpha_n x_n^2$, где $\alpha_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{1,\ n}$, то есть в квадратичной форме нет попарных произведений вида Cx_ix_j, называют квадратичной формой каноничесмкого вида.
Если $\alpha_i \in \{-1,\ 0,\ 1\}$, то канонический вид называют нормальным.

Замечание: Матрица квадратичной формы в каноническом виде является диагональной.