

# Лекции по алгебре 4 модуль.

Андрей Тищенко

2023/2024 гг.

## Лекция 3 апреля

### Квадратичные формы

Определение: Многочлен второй степени от  $n$  переменных, то есть выражение вида

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j$$

Где  $a_{ij} \in \mathbb{R}$ , называют квадратичной формой.

Замечание: Многочлен  $q(x)$  называется однородным степени  $k$ , если

$$\forall \alpha \quad q(\alpha x) = \alpha^k q(x)$$

Замечание: Квадратичная форма - это отображение  $q : V \longrightarrow \mathbb{R}$  (вектор в число)

Рассмотрим  $n$ -мерное векторное пространство  $V$  над  $\mathbb{R}$ . Зафиксируем в нём базис  $e_1, \dots, e_n$ :

Тогда у любого  $x \in V$  есть набор координат в этом базисе  $x_1, \dots, x_n$ .

То есть  $\forall x \in V : x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

Пусть  $x^e = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow q(x)$  можно представить в виде  $q(x) = (x^e)^T A x^e$ , где

$A = (a_{ij})$  матрица квадратичной формы  $q(x)$  в базисе  $e_1, \dots, e_n$ ,  
 $a_{ij}$  - коэффициенты квадратичной формы.

Пример: В  $\mathbb{R}^3$

$$q(x) = x_1^2 + 8x_1x_3 = x_1^2 + 4x_1x_3 + 4x_3x_1 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Замечание: Матрица квадратичной формы всегда симметрическая. То есть

$$A^T = A$$

Замечание: По любой билинейной форме можно построить квадратичную форму, взяв  $q(x) = b(x, x)$ . Тогда  $a_{ij} = \frac{b_{ij} + b_{ji}}{2}$

Пример:  $b(x, y) = x_1y_1 + ex_1y_3 + 5x_3y_1 \Rightarrow q(x) = b(x, x) = x_1^2 + 8x_1x_3$

Определение: Билинейная форма называется симметрической, если

$$b(x, y) = b(y, x), \text{ например, скалярное произведение}$$

Называется кососимметрической, если

$$b(x, y) = -b(y, x)$$

Пример: Кососимметрическая билинейная форма с матрицей  $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow B^T = -B$$

Замечание: По любой квадратичной форме можно построить симметрическую билинейную форму. Это называется поляризацией квадратичной формы.

$$b(x, y) = \frac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)]$$

Полярная билинейная форма к  $q(x)$  (имеет ту же матрицу, что и  $q(x)$ ,  $b(x, x) = q(x)$ )

Утверждение: При переходе от базиса  $e$  к базису  $e'$  в линейном пространстве  $V$  матрица квадратичной формы меняется так:

$$A' = C^T \cdot A \cdot C, \text{ "Стас" без рофлов, реально Стасямба конкретная}$$

$A'$  - матрица квадратичной формы в новом базисе  $e'$

$C$  - матрица перехода от базиса  $e$  к базису  $e'$

Доказательство: Связать координат вектора:

$x = Cx'$ , так как  $x' = C^{-1}x$  - формула изменения координат вектора при замене базиса.

Тогда  $\forall x \quad q(x) = x^T A x = (Cx')^T A (Cx') = (x')^T C^T A C x' = (x')^T A' x'$ , значит  $A' = C^T A C$  (Можно в качестве  $x$  брать все векторы канонического базиса  $(0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0)$  и показать совпадение матричных элементов)

Определение: Если квадратичная форма в некотором базисе записана в виде  $q(x) = x^T A x$ , то есть если  $A$  - матрица квадратичной формы в некотором базисе, то  $\text{Rg } A$  называется рангом квадратичной формы  $q(x)$ .

Почему это определение корректно? То есть почему  $\text{Rg } A$  не зависит от базиса.

Лемма: Пусть  $A, U \in M_n(\mathbb{R})$ ,  $\det U \neq 0$ . Тогда  $\text{Rg } A \cdot U = \text{Rg } A = \text{Rg } U \cdot A$ , то есть при умножении на невырожденную матрицу ранг не меняется.

Доказательство:  $\text{Rg } A \cdot U \leq \text{Rg } A$ , так как столбцы матрицы  $AU$  есть линейные комбинации столбцов матрицы  $A$ .

Ранг матрицы по теореме о ранге матрицы равен максимальному числу линейно независимых столбцов не могло вырасти, так как все столбцы  $AU$  линейно выражаются через столбцы исходной матрицы. Покажем  $\text{Rg } A \cdot U \geq \text{Rg } A$ .

$$\text{Rg } A = \text{Rg } A(U \cdot U^{-1}) = \text{Rg}(AU)U^{-1} \leq \text{Rg}(AU)$$

$$\text{Rg } U \cdot A = \text{Rg}(UA)^T = \text{Rg } A^T U^T = \text{Rg } A^T = \text{Rg } A = \text{Rg } AU$$

Утверждение: (об инвариантности ранга квадратичной формы)

Пусть  $q(x)$  - квадратичная форма на линейном пространстве  $V$ .

Пусть  $a = (a_1, \dots, a_n)$  и  $b = (b_1, \dots, b_n)$  - базисы в  $V$ .

Пусть  $A$  - матрица квадратичной формы в базисе  $a$

Пусть  $B$  - матрица квадратичной формы в базисе  $b$

Тогда  $\text{Rg } A = \text{Rg } B$  и ранг квадратичной формы корректно определен.

Доказательство: Было доказано, что  $B = C^T A C \Rightarrow$  по лемме, так как мы умножаем матрицу  $A$  на матрицы  $C^T$  слева и на  $C$  справа, то  $\text{Rg } B = \text{Rg } A$ , ч.т.д.

Определение: квадратичную форму  $q(x)$  будем называть положительно определённой, если

$$\forall x \neq 0 \quad q(x) > 0$$

отрицательно определённой, если

$$\forall x \neq 0 \quad q(x) < 0$$

знакопеременной, если

$$\exists x, y \in V : q(x) < 0 < q(y)$$

Пример:  $q_1(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2$  на  $\mathbb{R}^3$  - положительно определена  
 $q_2(x) = x_1^2 - x_3^2$  - знакопеременная ( $y = (1 \ 0 \ 0)$ ,  $x = (0 \ 0 \ 1) \Rightarrow q(x) < 0 < q(y)$ ).  
 $q_3(x) = -x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2$  - отрицательно определена на  $\mathbb{R}^3$ ,  
но  $q'_3(x) = -x_1^2 - 3x_3^2$  - не является отрицательно определённой, так  
как  $q'_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$  - это неположительно определённая квадратная форма.

Теорема: (Критерий Сильвестра положительной определённости)

Пусть  $A$  - матрица квадратичной формы  $q(x)$  в некотором базисе.

Тогда

$q(x)$  положительно определена  $\Leftrightarrow$  последовательность главных угловых миноров в  $A$  строго положительна

$$\text{То есть } \begin{cases} \Delta_1 = a_{11} > 0 \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0 \\ \dots \\ \Delta_n = \det A > 0 \end{cases}$$

Следствие:

$$\text{Квадратичная форма отрицательно определена} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_1 < 0 \\ \Delta_2 > 0 \\ \dots \\ (-1)^n \Delta_n > 0 \end{cases}$$

То есть знаки главных угловых миноров чередуются, начиная с минуса.

Доказательство: Так как  $A$  - отрицательно определена  $\Leftrightarrow -A$  положительно определена  $\det(-A) = (-1)^n \det A$ , ч.т.д.

Пример:  $q(x) = -x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2$  - отрицательно определённая

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}$$

Определение: Квадратичную форму  $q(x) = \alpha_1 x_1^2 + \dots + \alpha_n x_n^2$ , где  $\alpha_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = \overline{1, n}$ , то есть в квадратичной форме нет попарных произведений вида  $Cx_i x_j$ , называют квадратичной формой канонического вида. Если  $\alpha_i \in \{-1, 0, 1\}$ , то канонический вид называют нормальным.

Замечание: Матрица квадратичной формы в каноническом виде является диагональной.

### Лекция 10 апреля

$x \in V$   $q(x) = \alpha_1 x_1^2 + \dots + \alpha_n x_n^2$  ( $\alpha_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ) - канонический вид.

Если все коэффициенты  $\alpha_i$  являются элементами множества  $\{-1, 0, 1\}$ , то это называется нормальным видом.

Утверждение. Любую квадратичную форму можно привести к каноническому и к нормальному виду.

### Методы приведения

#### 1. Метод Лагранжа.

Главная идея состоит в последовательном выделении полных квадратов.

При этом на каждом шаге под квадрат полностью уходит одна переменная (невыполнение этого условия является частой ошибкой при решении задач). Получается, что не более чем за  $n$  шагов алгоритм даст канонический вид.

Если на некотором этапе переменных в квадрате не осталось, но есть выражение вида  $c \cdot x_i \cdot x_j$  ( $i \neq j$ ), то делают замену переменных:

$$\begin{cases} x_i = x'_i - x'_j \\ x_j = x'_i + x'_j \end{cases} \Rightarrow cx_i x_j = c((x'_i)^2 - (x'_j)^2)$$

Получили новые квадраты, продолжаем выполнение метода (то есть выделяем полный квадрат при необходимости).

$$\alpha_i x_i^2 + \underbrace{2x_i(\beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n)}_{\text{нет } x_i} = \alpha_i \left( x_i^2 + 2x_i \frac{\beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n}{\alpha_i} + \left( \frac{\beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n}{\alpha_i} \right)^2 \right) - \underbrace{\frac{\beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n}{\alpha_i}}_{\text{заменяем на } y_i} = \alpha_i \underbrace{\left( x_i + \frac{\beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n}{\alpha_i} \right)}_{\text{уже без } x_i} - \underbrace{\frac{(\beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n)^2}{\alpha_i}}_{\text{уже без } x_i}$$

То есть  $x_i$  полностью ушла под квадрат.

2. Метод Якоби. (может быть пройдем на семинаре)
3. Симметричный Гаусс. (может быть пройдем на семинаре)
4. Метод приведения к главным осям (только для канонического).  
(может быть пройдем на семинаре)

#### Теорема. Закон инерции квадратичной формы

Для любых двух канонических видов одной квадратичной формы.  $q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_k x_k^2$ ,  $\lambda_i \neq 0$ ,  $i = \overline{1, k}$

$q(y) = \mu_1 y_1^2 + \dots + \mu_m y_m^2$ ,  $\mu_j \neq 0$ ,  $j = \overline{1, m}$

где  $x, y \in V$

То есть это запись одной и той же квадратичной формы в разных базисах.

1.  $k = m = \text{Rg } A \leftarrow$  равно рангу квадратичной формы. При этом  $k = m$  может быть меньше размерности  $V$ , то есть  $k = m \leq n = \dim V$
2. Количество положительных  $\lambda_i$  совпадает с количеством положительных  $\mu_j$ . Это называется положительный индекс инерции квадратичной формы.

Обозначение:  $i_+$

3. Количество отрицательных  $\lambda_i$  совпадает с количеством отрицательных  $\mu_i$  и называется отрицательным индексом инерции.

Обозначение:  $i_-$

Определение: Сигнатурой квадратичной формы называют два числа  $(i_+, i_-)$ .

Замечание: Если у двух квадратичных форм совпадают сигнатуры, то существует невырожденная линейное преобразование (=замена координат, =замена базиса), которое одну квадратичную форму переводит в другую. Сначала обе в нормальный вид, он совпадает, так как одинаковое количество  $+1$  и  $-1$ , и для одной преобразование в обратную сторону.

Замечание: Если у двух квадратичных форм разные сигнатуры  $(i_+, i_-)$ , то одну нельзя перевести в другую невырожденным линейным преобразованием. То есть квадратичные формы разные.

Замечание:  $\text{Rg } A = i_+ + i_-$ . Иногда вводят величину  $S = i_+ - i_-$ . Знание  $\text{Rg } A$  и  $S$  эквивалентно знанию  $i_+$  и  $i_-$ , и поэтому число  $S$  иногда называют сигнатурой.

### Линейные отображения и линейные операторы

Пусть  $V_1$  и  $V_2$  - два линейных пространства над полем  $F$

Определение: Отображение  $\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$  называется линейным, если

1.  $\forall x, y \in V_1, \varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$
2.  $\forall x \in V_1, \forall \alpha \in F \varphi(\alpha x) = \alpha \varphi(x)$

Замечание: эти два условия равносильны  $\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha \varphi(x) + \beta \varphi(y)$

Замечание: Линейное отображение это гомоморфизм линейных пространств, и есть обозначение  $\varphi \in \text{Hom}(V_1, V_2)$

Определение: Если  $V_1 = V_2 = V$  (пространства совпадают), то линейное отображение  $\varphi$  называется линейным оператором (л. о.)

Пусть  $e_1, \dots, e_n$  - базис в  $V_1$ ,  $\dim V_1 = n$

$f_1, \dots, f_m$  - базис в  $V_2$ ,  $\dim V_2 = m$

Рассмотрим векторы  $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n) \in V_2$  (образы базисных векторов первого пространства под действием  $\varphi$ ), и разложим их по базису второго пространства  $f_1, \dots, f_m$ :

$$\begin{cases} \varphi(e_1) = a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + \dots + a_{m1}f_m \\ \vdots \\ \varphi(e_n) = a_{1n}f_1 + a_{2n}f_2 + \dots + a_{mn}f_m \end{cases}$$

Определение: Матрица линейного отображения в паре базисов  $(e_1, \dots, e_n)$  и  $(f_1, \dots, f_m)$  это матрица:

$$[\varphi]_{ef} = A_{ef} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\dim V_1}^{m \times n} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}} \right\} \dim V_2$$

По столбцам стоят координаты образов векторов первого базиса при разложении по второму базису.

Определение: Пусть  $\varphi : V_1 \longrightarrow V$  - линейный оператор и  $e_1, \dots, e_n$  - базис.

$$\text{Пусть } \begin{cases} \varphi(e_1) = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \dots + a_{n1}e_n \\ \vdots \\ \varphi(e_n) = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \dots + a_{nn}e_n \end{cases}$$

То есть образы базисных векторов под действием  $\varphi$  разложим по тому же базису.

Тогда:

$$A_e = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Называется матрицей линейного оператора

Пример:  $\varphi(x) = \text{Pr}_L x$ , где  $L = \mathcal{L}(\bar{i})$  в  $V_3$ , где  $\bar{i}$  - ось абсцисс.

Рассмотрим стандартный базис  $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$  в  $V_3$ .

$$\begin{cases} \varphi(i) = i = 1 \cdot i + 0 \cdot j + 0 \cdot k \\ \varphi(j) = 0 \\ \varphi(k) = 0 \end{cases} \Rightarrow A_{\{i, j, k\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Теорема: (о том, что действие линейного оператора полностью определяется его матрицей)

Пусть  $\varphi$  - линейный оператор в пространстве  $V$



$e = (e_1, \dots, e_n)$  - базис в  $V$ ,  $x \in V$  - вектор.

$x^e = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  - столбец координат вектора  $x$  в базисе  $e$ , то есть  $x =$

$x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

Пусть  $A_e$  - матрица линейного оператора  $\varphi$  в базисе  $e$ , тогда:

$$(\varphi(x))^e = A_e \cdot x^e, \text{ (матричное произведение)}$$

Доказательство:  $\varphi(x) = \varphi(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) \stackrel{\text{по линейности}}{=} x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n) \stackrel{\text{определение}}{=} \underset{\text{матрицы л.о.}}{=} x_1 (a_{11} e_1 + a_{21} e_2 + \dots + a_{n1} e_n) + \dots + x_n (a_{1n} e_1 + a_{2n} e_2 + \dots + a_{nn} e_n) = (a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n) e_1 + \dots + (a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n) e_n$  - получили разложение  $\varphi(x)$  по базису  $e$

$$\Rightarrow (\varphi(x))^e = \begin{pmatrix} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \\ \vdots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n \end{pmatrix}$$

Но это результат умножения  $A_e$  на  $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x^e$ , то есть  $(\varphi(x))^e =$

$A_e \cdot x^e$ , ч.т.д.

Замечание: Для линейных отображений аналогично

$$(\varphi(x))^f = A_e f x^e$$

Замечание: При фиксированном базисе есть биекция между линейными операторами (линейными отображениями) и матрицами  $n \times n$ ,  $(m \times n)$ .