Консультация перед контрольной номер 3

Андрей Тищенко

Номер 1 Будет ли подгурппой

а. Объединение подгрупп?

б. Пересечение подгрупп?

Критерий подгруппы:

$$ab^{-1} \in H, \text{ при } a,\ b \in H$$

Проверим $\underset{\in a}{H_1} \cup \underset{\in b}{H_2}$:
Рассмотрим группу D_4, выделим две подгруппы:
H_1 - повороты (их 4)
$H_2 = \{p_0,\ S_1\}$ - одна симметриия + единичный элемент. $H_1 \cup H_2 = \{p_0,\ p_{\frac{\pi}{2}},\ p_\pi,\ p_{\frac{3\pi}{2}},\ S_1\}$ не является подгруппой, так как нет замкнутости по умножению. Например взяли симметрию (24), тогда: $S_1 \cdot p_\pi = (24)(13)(24) = (13)$ - вторая симметрия, которой нет в объединении.
Проверим $H_1 \cap H_2$
$\left.\begin{matrix} ab^{-1} \in H_1 \\ ab^{-1} \in H_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow ab^{-1} \in H_1 \cap H_2 \Rightarrow$ подгруппа

Идеал группы

$\mathbb{Z}_{20}$, подгруппы:
$20 = 2^2 \cdot 5^1 \Rightarrow (2+1)(1+1) = 6$ подгрупп
$|H_1| = 1,\ H_1 = \left\langle \overline{0} \right\rangle$
$|H_2| = 2,\ H_2 = \left\langle \overline{\frac{20}{2}} \right\rangle = \left\langle \overline{10} \right\rangle$
$|H_3| = 4,\ H_3 = \left\langle \overline{5} \right\rangle$
$|H_4| = 5,\ H_4 = \left\langle \overline{4} \right\rangle$

$|H_5| = 10,\ H_5 = \left\langle \overline{2} \right\rangle$
$|H_6| = 20,\ H_6 = \left\langle \overline{1} \right\rangle$
Мощности идут по делителям 20.
Какой порядок будет у $\left\langle \overline{18} \right\rangle$ в $\mathbb{Z}_{20}$
$\operatorname{ord} g^k = \dfrac{\operatorname{ord} g}{\gcd(\operatorname{ord} g),\ k},$
Для циклической группы $\langle g \rangle$, $\operatorname{ord} g = |\langle g \rangle|$
$\operatorname{ord} \overline{18} = \dfrac{20}{(18,\ 20)} = 10$

Номер 2. В циклической группе $\langle a \rangle$ порядка 1000, рассмотрим следующие элементы: $a^{-250},\ a^{-251}, \ldots,\ a^{-400} = a^{600}, \ldots,\ a^{750}$. Указать среди них те, порядок которых равен 50
$\operatorname{ord} g^k = \dfrac{1000}{(k,\ 1000)} = 50 \Rightarrow (k,\ 1000) = 20,\ k \in [600,\ 750]$
Пусть $l = \dfrac{k}{20} \Rightarrow (l,\ 50) = 1,\ l \in [30,\ 37] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} l = 31 \\ l = 33 \\ l = 37 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k_1 = 620 = -380 \\ k_2 = 660 = -340 \\ k_3 = 740 = -260 \end{array}\right.$
Ответ: $a^{-260},\ a^{-340},\ a^{-380}$

Группы: $D_n,\ S_n,\ A_n,\ Q_8,\ V_4,\ Z_n$
$V_4 = \{1,\ a,\ b,\ ab\}$, $\operatorname{ord} a = \operatorname{ord} b = 2$ - группа Клейна.

Номер 3. Изоморфны ли группы:

а. $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{36}$ и $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{18}$?
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9 \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9$. Можно заменять на Декартвое произведение циклических групп, порядки которых в произведении дают порядок исходной группы и взаимнопросты между собой.

б. $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{36}$ и $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{24}$?
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9$ и $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_8$
Группа $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \ncong \mathbb{Z}_8$, так как слева максимальный порядок - 4, а справа - 8.

Номер 4. Сколько элементов порядка $2,\ 4,\ 6$ в группе:

а. $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3$

б. $D_2(\mathbb{C})^* = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_1 & 0 \\ 0 & \mathbb{Z}_2 \end{pmatrix} \middle| \text{ где } \mathbb{Z}_i \text{ - корни 6 степени из 1} \right\} \sim \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6$

Номер 5. $R = \mathbb{Z}_5[x]/\langle x^2+4x+1\rangle$ является ли полем? Сколько элементов?
Представить в виде $\overline{f}$, где $\deg \overline{f} \leqslant 1$
$\overline{\dfrac{x}{x^3+x^2+2x+1}} = \overline{x} \cdot \overline{(x^3+x^2+2x+1)^{-1}}$
1. R - поле $\Leftrightarrow g(x) = x^2+4x+1$ - неприводимы в $\mathbb{Z}_5$

	g(x)
0	1
1	1
2	3
3	2
4	3

Значит $g(x)$ неприводим (нет нулей), значит R - поле $|R| = p^n = 5^2 = 25$
Элементы $R: \left\{\overline{ax+b} \middle| a,\ b \in \mathbb{Z}_5\right\}$
2. $\overline{x^2+4x+1+x} = \overline{x}$. Осуществим деление в столбик
$x^3+x^2+2x+1 = \underbrace{(x^2+4x+1)}_{g(x)}\underbrace{(x+2)}_{q_1(x)} + \underbrace{(3x+4)}_{r_1(x)}$
$x^2+4x+1 = (2x+2)(3x+4)+3$. Тогда $3 = \gcd(g,\ f) = (1+q_1q_2)g - fq_2$
$\overline{3} = \overline{f}(-\overline{q_2}) = \overline{f}(\overline{3x+3})| \cdot 2$
$\overline{1} = \overline{f}(\overline{x+1}) \Rightarrow \overline{f^{-1}} = \overline{x+1}$
$x \cdot f^{-1} = \overline{x}(\overline{x+1}) = \overline{x^2+x} = \overline{x^2+x} - g = \overline{x^2+x-x^2+4x-1} =$
$= \overline{2x+4} \leftarrow$ ответ.

Номер 6. $\langle 2x+6,\ x^2-9,\ x\rangle$