# Теория вероятностей.

Андрей Тищенко @AndrewTGk

2024/2025

**Семинар 6 сентября.**

## Теория

Классическое определение вероятности:
Количество исходов конечно, они взаимоисключающие и равновозможные.
$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \in [0,\ 1]$.

## Задача 0

Казино Монте-Карло с 37 слотами. 18 красных, 18 чёрных и 0. Тогда вероятность выиграть при ставке на красное будет $\frac{18}{37}$. Ставка удваивается.
Можно играть на дюжины $[1,\ 12],\ [13,\ 24],\ [25,\ 36]$, тогда вероятность выигрыша $\frac{12}{37}$. Ставка при этом утраивается.

## Задача 1

У взломщика есть связка из 10 ключей. С какой вероятностью он откроет дверь, перебрав ровно половину ключей.
Ключ равновероятно может находиться на любой позиции в его связке. На пятом месте он будет в единственном случае, тогда $P = \frac{1}{10}$

## Задача 2

Студент выучил 20 билетов из тридцати. С какой вероятностью ему достанется выученный билет, если он заходит первым? Вторым? Если первым: $\frac{20}{30}$
Если вторым: $\frac{19}{29}\frac{2}{3} + \frac{20}{29}\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

## Задача 3

Есть буквы М, О, С, К, В, А. Какова вероятность получить слово МОСКВА при случайном расположении этих букв.
$P(A) = \frac{1}{6!} = \frac{1}{720}$
Условие такое же, но буквы А, Б, Р, А, К, А, Д, А, Б, Р, А и нужно получить АБРАКАДАБРА.
$P(A) = \frac{5!\,2!\,2!}{11!}$

## Задача 4

Есть два брата и 10 мест за круглым столом. Какова вероятность размещения братьев напротив друг-друга.
Одного фиксируем, у второго 9 вариантов $P(A) = \frac{1}{9}$
Рассматриваем положение обоих $P(A) = \frac{10 \cdot 8!}{10!} = \frac{1}{9}$

## Задача 5

10 человек, 10 мест, меджу двумя конкретными должно быть 3 человека. $P(A) = \frac{6 \cdot 2 \cdot 8!}{10!}$
Выбираем $m$ элементов из $N$, с учётом порядка:
$A_N^m = N(N-1)\dots(N-m+1) = \frac{N!}{(N-m)!}$
Без учёта порядка:
$C_N^m = \frac{A_N^m}{m!} = \frac{N!}{(N-m)!m!}$

## Задача 6

Угадываем номер телефона, знаем все цифры, кроме последних трёх, но известно, что они разные:
$P(A) = \frac{1}{A_{10}^3} = \frac{1}{720}$

## Задача 7

Какова вероятность выиграть в спортлото (49 видов спорта, 6 выигрышных, нужно собрать все 6).
$P(A) = \frac{1}{C_{49}^6} \approx \frac{1}{14\,000\,000}$.
$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

## Задача 8

Выбираются 3 цифры, хотим, чтобы их произведение было чётным.
Посчитаем вероятность нечётности произведения: $P(\overline{A}) = \frac{C_5^3}{C_{10}^3} = \frac{5!}{2!3!} \frac{7!3!}{10!} =$
$= \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{8 \cdot 9 \cdot 10} = \frac{1}{12} \Rightarrow$
$\Rightarrow P(A) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$

## Задача 9

Колода 52 карты, какова вероятность достать 4 карты одной масти:
$P(A) = \frac{4 \cdot C_{13}^4}{C_{52}^4}$

## Задача 10

Достать тройку, семёрку и туза из колоды с 52 картами:
$P(A) = \frac{4^3}{C_{52}^3}$

## Задача 11

90 хороших и 10 плохих деталей, какова вероятность, что среди пяти вытащенных деталей нет брака:
$P(A) = \frac{C_{90}^5}{C_{100}^5} = \frac{90!\,5!\,95!}{5!\,85!\,100!} = \frac{86 \cdot 87 \cdot \ldots \cdot 89 \cdot 90}{96 \cdot 97 \cdot \ldots \cdot 99 \cdot 100}$
Хотим 3 хороших и 2 плохих:
$P(B) = \frac{C_{90}^3 \cdot C_{10}^2}{C_{100}^5}$

## Задача 12

В спортлото угадать четыре из шести:
$P(A) = \frac{C_6^4 C_{43}^2}{C_{49}^6}$

## Задача 13

Из 52 карт достать 2 красные и 2 чёрные карты:
$P(A) = \frac{C_{26}^2 \cdot C_{26}^2}{C_{52}^4}$

## Задача 14

Вероятность при трёх бросках кубика получить три разных цифры:
$P(A) = \frac{A_6^3}{6^3},\ A_6^3 = 6 \cdot 5 \cdot 4$
При броске шести кубиков выпали все цифры:
$P(A) = \frac{6!}{6^6}$

## Задача 15

В лифте девятиэтажного здания на первом этаже окалось 8 студентов. Никто не выходит на первом этаже, какова вероятность того, что лифт не остановится хотя бы на одном этаже.
$P(A) = 1 - \frac{8!}{8^8}$

## Задача 16

Какова вероятность, что 10 монет выпадут на одинаковую сторону:
$P(A) = \frac{2}{2^{10}} = \frac{1}{2^9}$

## Задача 17

Коробка с 100 шариками, каждый имеет номер от 1 до 100. Какова вероятность вытащить все шары и получить возрастающую последовательность, если:
а) Не возвращать шары в коробку:
$P(A) = \frac{1}{100!}$
б) Возвращать шары в коробку:
$P(A) = \frac{1}{100^{100}}$

Семинар 13 сентября

## Задача 1

Бросаем три шестигранных кубика, найти вероятность выпадения суммы 11 и 12.
$|\Omega| = 6^3$

| Комбинаций | $\sum 11$ | $\sum 12$ | Комбинаций |
|---|---|---|---|
| 6 | 5 - 4 - 2 | 5 - 5 - 2 | 3 |
| 3 | 5 - 3 - 3 | 6 - 5 - 1 | 6 |
| 3 | 4 - 4 - 3 | 6 - 4 - 2 | 6 |
| 3 | 5 - 5 - 1 | 6 - 3 - 3 | 3 |
| 6 | 6 - 3 - 2 | 5 - 4 - 3 | 6 |
| 6 | 6 - 4 - 1 | 4 - 4 - 4 | 1 |

$P(A_{11}) = \frac{27}{6^3},\ P(A_{12}) = \frac{25}{6^3}$

## Задача со * из ДЗ

Какова вероятность, что если взять 4 башмака из 10 пар, получишь пару. $P(\overline{A}) = \frac{20 \cdot 18 \cdot 16 \cdot 14}{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}$

## Задача 2

В девятиэтажном доме три человека садятся в лифт. Какова вероятность, что лифт остановится для высадки два раза?
$P(A) = 1 - \frac{8 + 8 \cdot 7 \cdot 6}{8^3} = \frac{21}{64}$

$$\frac{A_8^2 \cdot 3}{8^3} = \frac{21}{64}$$

### Задача 3

Имеется 100 чисел. Из них вытаскивают 15 чисел и упорядочивают по возрастанию.
Какова вероятность, что 13 число в полученной последовательности равно 87.
$\dfrac{C_{86}^{12} \cdot C_{13}^{2}}{C_{100}^{15}}$

### Задача 4

Есть 10 вагонов. Какова вероятность, что два человека окажутся в одном вагоне/ в соседних?
В одном: $\frac{1}{10}$ (оба в один и тот же вагон, выбрать вагон можно 10 способами)
В соседних: $\frac{18}{100}$ (9 различных пар (1, 2), (2, 3), (3, 4) и т.д. и наоборот).

## Геометрические вероятности

### Задача 5

В квадрат со стороной $R$ вписан круг, какова вероятность, что брошенная в квадрат точка попадёт в круг.
$P(A) = \frac{\frac{\pi R^2}{4}}{R^2} = \frac{\pi}{4}$

### Задача 6

На интервале $[0,\ 1]$ выбираются точки $x,\ y$, найти вероятность события:
$x^2 \leqslant y \leqslant \sin\frac{\pi x}{2}$
$$P(A) = \frac{\int_0^1 \sin\frac{\pi x}{2} - x^2 dx}{1} = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \sin\frac{\pi x}{2} d\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{3} = \frac{2}{\pi}\left(-\cos\frac{\pi x}{2}\right)\Big|_0^1 - \frac{1}{3} =$$
$$= \frac{2}{\pi} - \frac{1}{3}$$

## Условные вероятности

### Задача 7

В коробке есть $n$ белых и $m$ чёрных шаров. A = первый шар белый, B = последний шар чёрный
$P(A) = \frac{n}{m+n},\ P(B) = \frac{m}{m+n}$
$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{n}{m+n}\cdot\frac{m}{m+n-1}}{\frac{m}{n+m}} = \frac{n}{n+m-1}$

### Задача 8

Два игрока подбрасывают кость по одному разу, побеждает тот, кто выбил больше. A = победил первый, B = победитель определён.
1. $P(A) = \frac{15}{36}$
2. $P(B) = \frac{30}{36}$
3. $P(A/B) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$
4. $P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{15}{36}}{\frac{5}{6}} = \frac{1}{2}$, так как $A \subseteq B$

События $A,\ B$ зависимы, так как $P(A/B) \neq P(A)$.

### Задача 9

2 партии по 100 деталей, в каждой партии 10 бракованных деталей.
A = {деталь из первой партии}.
B = {деталь бракованная}.
$P(A) = \frac{100}{200} = \frac{1}{2},\ P(B) = \frac{20}{200} = \frac{1}{10}$
$P(AB) = \frac{10}{200} = \frac{1}{20} \Rightarrow P(AB) = P(A)\cdot P(B)$, события независимы

### Задача 10

Почти как задача 9, но во второй 20 бракованных:
$P(A) = \frac{1}{2}$
$P(B) = \frac{3}{20}$
$P(AB) = \frac{1}{20} \Rightarrow P(A)P(B) \neq P(AB)$, события зависимы.

## Формула сложения вероятностей

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i \leqslant j} P(A_i A_j) + \sum_{i \leqslant j \leqslant k} P(A_i A_j A_k) + \dots$$
$\dots + (-1)^{n+1}(A_1 \dots A_n)$
$P(A_1 A_2) = P(A_1) P(A_2/A_1)$

### Задача 11

В урне 10 белых, 8 синих, 2 красных шара. Одновременно извлекают 3 шара, какова вероятность, что вытащенные шары одного цвета.
А = {вытащили (вовремя) 3 белых шара} В = {вытащили 3 синих шара}
$A_i$ = {i-й шар белый} $B_i$ = {i-й шар синий} Так как А, В несовместны: $P(A+B) = P(A)+P(B) = P(A_1A_2A_3)+P(B_1B_2B_3) =$
$= P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2) + P(B_1)P(B_2/B_1)P(B_3/B_1B_2) =$
$= (\frac{10}{20} \cdot \frac{9}{19} \cdot \frac{8}{18}) + (\frac{8}{20} \cdot \frac{7}{19} \cdot \frac{6}{18})$

Семинар 20 сентября.

### Задача 46 из дз

Дано: $P(A/B) = 0.05,\ P(A\overline{B}) = 0.079,\ P(\overline{A}B) = 0.0089,\ P(\overline{AB}) = 0,782$
Хотим: $P(B/A)$
$P(B/A) = \frac{P(BA)}{P(A)}$
$P(A) = P(AB + A\overline{B}) = P(AB) + P(A\overline{B}) - \underbrace{P(AB \cap A\overline{B})}_{=0} =$
$= 0.05 + 0.079 = 0.129 \Rightarrow P(B/A) = \frac{0.05}{0.129} \approx 0.3875$
Ответ: 39%

### Задача

5 мальчиков и 10 девочек, какова вероятность, что при разбиении их на 5 равных групп получим только группы вида ЖМЖ.
$A_i$ — {в i группе 2 девочки и 1 мальчик.}
$P(A_1A_2A_3A_4A_5) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1A_2) \cdot P(A_4/A_3A_2A_1) \cdot P(A_5/A_4A_3A_2A_1) =$
$= \frac{C_{10}^2 C_5^1}{C_{15}^3} \frac{C_8^2 C_4^1}{C_{12}^3} \frac{C_6^2 C_3^1}{C_9^3} \frac{C_4^2 C_2^1}{C_6^3} \frac{C_2^2 C_1^1}{C_3^3} 1$

### Задача

Система состоит из последовательно соединённых резисторов.
$A_i = \{$i-й элемент системы работает$\},\ i = \overline{1,\ n}$
$A = \{$Система работает$\}$
$A = A_1 \cdots A_n$
$$P(A) = P(\prod_{i=1}^{n} A_i) = \prod_{i=1}^{n} p_i$$
Если система состоит из параллельно соединённых резисторов, тогда:
$P(A) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2) = p_1 + p_2 - p_1p_2$

## Задача

Обращается русалочка к трём ведьмам, каждая даёт ей сосуд с зельем.
Вероятность отсутсвия эффекта:

1. 0.5
2. 0.4
3. 0.3

Она пьёт их по очереди и останавливается, если какое-то сработало. Какова вероятность успеха (хотя бы одно зелье сработало).
$A_i$ = {подействует i-е зелье}
Пусть ни одно не сработало: $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3) =$
$= 1 - 0.5 \cdot 0.6 \cdot 0.7 = 0.79$
Другой способ решения: $P(A) = P(A_1) + P(\overline{A}_1)P(A_2) + P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(A_3) = 0.5 + 0.5 \cdot 0.4 + 0.5 \cdot 0.6 \cdot 0.3 = 0.79$
Ещё один: $P(A) = P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) -$
$- P(A_1A_3) - P(A_2A_3) + P(A_1A_2A_3) = 0.79$

## Задача

Теннист участвует в турнире, у него есть соперник A и соперник B, известно, что соперник A играет лучше соперника B. Теннист хочет выиграть два матча подряд, какой порядок ему лучше выбрать?
$A - B - A$ или $B - A - B$?
$P(A) < P(B)$ — вероятность победы.
У него есть варианты: выиграть первые две, проиграть первую и выиграть оставшиеся.
В первом случае: $(1) = P(A)P(B) + \big(1 - P(A)\big)P(B)P(A)$
Во втором: $(2) = P(B)P(A) + \big(1 - P(B)\big)P(A)P(B)$
$(1) - (2) = P(A)P(B)(1 - P(A) - 1 + P(B)) = P(A)P(B)(P(B) - P(A)) > 0 \Rightarrow (1) > (2)$
В первом случае вероятность победы больше.

## Задача

Два равносильных шахматиста играют между собой матчи, ничьих быть не может. Какое событие более вероятно:
$C_4^3 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{4!}{3!}\frac{1}{16} = \frac{1}{4}$
$C_8^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{7}{32}$
Вероятность выиграть 3 из 4 больше.

## Задача

В круг радиуса $r$ вписан квадрат. В круг кидают 4 точки, какова вероятность попадания ровно 3 точек в квадрат.
$p = \frac{2r^2}{\pi r^2} = \frac{2}{\pi}$ - вероятность попасть в квадрат.
$q = 1 - p = \frac{1}{-}\frac{2}{\pi}$
$C_4^3 \cdot \left(\frac{2}{\pi}\right)^3 \cdot \frac{\pi - 2}{\pi} = \frac{32(\pi-2)}{\pi^4}$

## Задача

Стрелок попадает в 10 с вероятностью $0.7$, а в 9 с вероятностью $0.3$. Какова вероятность получения за 3 выстрела не менее 29 очков.
Нас устраивают события:
$A_{29} = \{\text{Набрал 29 очков}\},\ A_{30} = \{\text{Набрал 30 очков}\}$
$P(A_{29} + A_{30}) = P(A_{29}) + P(A_{30}) = C_3^2(0.7)^2 \cdot 0.3 + (0.7)^3 = 0,784$

## Задача

7 писем. 0.6 - письмо отправлено Онегину, 0.4 - письмо отправлено Ленскому.
$A_i = \{$Ровно i писем отправлено Онегину$\}$. $p(A) = P(A_7) + P(A_6) + P(A_5) = (0.6)^7 + 7(0.6)^6 \cdot 0.4 + \frac{2}{7} 0.6^5 \cdot 0.4^2$

## Задача

Стрелок попадает в мишень с вероятнотсью $0,7$. Ему позволяют стрелять до трёх промахов. Какова вероятность того, что он сделает ровно 8 выстрелов.
$C_7^2(0,7)^5 \cdot 0,3^2 \cdot 0,3$ (Два промаха можно как-то расположить в первых 7 выстрелах, последний всегда восьмой).

## Задача

Всего 5 испытаний, вероятность искажения результата - $0,1$. А = ни одного искажённого. Б = не менее двух искажённых. В = Искажённых больше, чем неискажённых.
$P(A) = 0,9^5, \quad P(\text{Б}) = 1 - 0.9^5 - (C_5^1 \cdot 0,1 \cdot 0,9^4),$
$P(\text{В}) = P(B) - C_5^2 \cdot 0,1^2 \cdot 0,9^3$

## Задача

Гипотезы при подбрасывании двух кубиков:

$$\begin{cases} H_1 = \{\text{На 1-м кубике выпала “1”}\} \\ \dots \\ H_6 = \{\text{На 1-м кубике выпала “6”}\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_1 = \{1 — 1\} \\ \dots \\ H_{36} = \{6 — 6\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_1 = \{\text{На 1-м — чётное}\} \\ H_2 = \{\text{На 1-м — чётное}\} \end{cases}$$

Семинар 27 сентября

## Формула полной вероятности

$H_1, \dots,\ H_n$ — полная группа событий. $i \neq j \Rightarrow H_i \cdot H_j = \varnothing,\ H_1 + \dots + H_n = \Omega$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)$$

$$P(H_k/A) = \frac{P(H_k)P(A/H_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)}$$

## Задача

Какова вероятность успешного переливания крови от одного человека к другому? Произошло успешное переливание, какова вероятность, что кровь переливали человеку с 1 группой? С 4 группой?
Медицинская справка:
Первой группе крови можно переливать только первую
Второй — вторую и первую
Третей — первую и третью
Четвёртой — любую.
$A = \{$Успешное переливание$\}$
$H_i = \{$У больного i группа$\},\ i = \overline{1,\ 4},$ по условию: $P(H_1) = 0.33,$

$P(H_2) = 0.36,\ P(H_3) = 0.23,\ P(H_4) = 0.08$
$P(A/H_1) = 0.33,\ P(A/H_2) = 0.69,\ P(A/H_3) = 0.56,\ P(A/H_4) = 1$
$P(A) = \sum\limits_{i=1}^{4} P(A/H_i)P(H_i) = 0.33^2 + 0.36 \cdot 0.69 + 0.23 \cdot 0.56 + 0.08 = 0.5661$
$P(H_1/A) = \frac{P(A/H_1)P(H_1)}{P(A)} = \frac{0.33^2}{0.5661} \approx 0,19237$
$P(H_4/A) = \frac{P(A/H_4)P(H_4)}{P(A)} = \frac{0.08}{0.5661} \approx 0.14$

## Задача

Две корзинки, в каждой по 10 бутылок, в первой корзине 2 отравленные, во второй — 3, по пути одна бутылка из первой корзины разбилась. Какова вероятность не отравиться при распитии одной бутылки?
$A = \{\text{распитие благополучно}\}$
$H_1 = \{\text{бутылка из 1 корзины}\},\ P(H_1) = \frac{1}{2}$
$H_2 = \{\text{бутылка из 2 корзины}\},\ P(H_2) = \frac{1}{2}$
Так как выбираем корзину, а не бутылку из неё.
$P(A/H_1) = 0.8,\ P(A/H_2) = 0.7$. Вспоминаем задау про выученные билеты (поэтмоу вероятность отравиться бутылкой из первой корзины не поменяется).
$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) = \frac{8}{20} + \frac{7}{20} = \frac{3}{4}$

## Задача

По каналу передаётся два вида сигналов $x,\ y$, при этом $y$ передаётся в три раза чаще $x$. $x$ искажается в 10% случаев, а $y$ — в 20%. По каналу передан какой-то сигнал, какова вероятность, что будет получен сигнал $x$? Какова вероятность, что при получении сигнала $x$ он и был передан?
$H_1 = \{\text{Передавали x}\},\ P(H_1) = \frac{1}{4}$
$H_2 = \{\text{Передавали y}\},\ P(H_2) = \frac{3}{4}$
$A = \{\text{Зафиксирован x}\},$
$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) = \frac{1}{4}0.9 + \frac{3}{4}0.2 = \frac{3}{8}$
$B = H_1/A \Rightarrow P(B) = P(H_1/A) = \frac{P(A/H_1)P(H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{9}{40}}{\frac{3}{8}} = \frac{3}{5} = 0.6$

## Задача

Три стрелка стреляют по мишени. Они соответсвенно попадают в мишень с вероятностью:

стрелок $\frac{4}{5}$

стрелок $\frac{3}{4}$

стрелок $\frac{2}{3}$

Все трое выстрелили одновременно, в мишень попали два раза. Какое событие более вероятно: промах третьего стрелка или его попадание?
$A = \{\text{попали ровно 2 раза}\}$
$H_1 = \{\text{третий попал}\},\ P(H_1) = \frac{2}{3}$
$H_2 = \{\text{третий промахнулся}\},\ P(H_2) = \frac{1}{3}$
$P(A/H_1) = \frac{4}{5}\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\frac{3}{4} = \frac{7}{20}$
$P(A/H_2) = \frac{4}{5}\frac{3}{4} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$
$P(A) = P(A/H_1)P(H_1) + P(A/H_2)P(H_2) = \frac{7}{20}\frac{2}{3} + \frac{3}{5}\frac{1}{3} = \frac{7}{30} + \frac{1}{5} = \frac{13}{30}$
$P(H_1/A) = \frac{P(A/H_1)P(H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{7}{20}\frac{2}{3}}{\frac{13}{30}} = \frac{7}{30}\frac{30}{13} = \frac{7}{13}$

## Задача

Было две урны. В первой 5 белых шаров и 1 чёрный, во второй — 3 белых и 3 чёрных.
Из первой урны взяли два шара, из второй один и поместили их в третью урну. Какова вероятность того, что наугад вытащенный из третьей урны шар окажется белым?
$A = \{\text{Вытащили белый шар из третьей урны}\}$

$H_1 = \{\text{Вытащенный шар был в первой урне}\}$
$H_2 = \{\text{Вытащенный шар был во второй урне}\}$
$P(A/H_1) = \frac{5}{6}$
$P(A/H_2) = \frac{1}{2}$
$P(H_1) = \frac{2}{3}$
$P(H_2) = \frac{1}{3}$
$P(A) = P(A/H_1)P(H_1) + P(A/H_2)P(H_2) = \frac{10}{18} + \frac{1}{6} = \frac{13}{18}$

Семинар 4 октября

Решаем какие-то задачки из учебника.

## Задача

| $\xi$ | -1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| $p$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ |

$E\xi = 0,\ \mathcal{D}\xi = 0.5$. Найти $p_1,\ p_2,\ p_3$.

| $\xi$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $p$ | $p_2$ | $p_1 + p_3$ |

$\mathcal{D}\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = E\xi^2 = p_1 + p_3$

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\ p_1 = p_3 \\ p_1 + p_3 = 0.5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 = 0.25 \\ p_2 = 0.5 \\ p_3 = 0.25 \end{cases}$$

## Задача

a.

| $\xi$ | $-0,5$ | $0$ | $0,5$ | $1$ | $1,5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $p$ | $0,1$ | $0,4$ | $0,1$ | $0,3$ | $0,1$ |

$Y = 10x - 1 \Rightarrow$

| $Y$ | $-6$ | $-1$ | $4$ | $9$ | $14$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $p$ | $0,1$ | $0,4$ | $0,1$ | $0,3$ | $0,1$ |

$EY = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i p_i = 3,5$
$\mathcal{D}Y = 3,5^2$

b.

| $\xi$ | $-0,25$ | $0$ | $-1$ | $-2,25$ |
|---|---|---|---|---|
| $p$ | $0,2$ | $0,4$ | $0,3$ | $0,1$ |

$Y = -x^2 \Rightarrow EY = -0,53$
$\mathcal{D}Y = 0,25^2 \cdot 0,2 + 0,3 + 2,25^2 \cdot 0,1 - (0,53)^2$

## Задача

| $\xi$ | 2 | 1 | 0 |
|---|---|---|---|
| $p$ | $\frac{28}{45}$ | $\frac{16}{45}$ | $\frac{1}{45}$ |

$P(\xi = 2) = \frac{C_8^2}{C_{10}^2} = \frac{7 \cdot 8}{9 \cdot 10} = \frac{28}{45}$
$P(\xi = 1) = \frac{2}{10}\frac{8}{9} \cdot 2 = \frac{16}{45}$
$P(\xi = 0) = \frac{1}{C_{10}^2} = \frac{1}{45}$
$E\xi = \frac{2 \cdot 28 + 16}{45} = \frac{72}{45} = \frac{8}{5}$
$\mathcal{D}\xi = E\xi^2 - \big(E\xi\big)^2 = \frac{128}{45} - \frac{64}{25}$

## Задача

В связке есть ключи, человек пробует все ключи, пока не подберёт нужный. Сколько в среднем ключей он переберёт?
$\xi$ — количество попыток. Показана вероятность успеха.

| $\xi$ | 1 | 2 | $\dots$ | 10 |
|---|---|---|---|---|
| $p$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{10}$ | $\dots$ | $\frac{1}{10}$ |

$E\xi = \frac{55}{10} = 5,5$

## Задача

Есть 4 стула, в одном из них драгоценности. Человек ломает стулья, пока не найдёт драгоценности. Сколько стульев в среднем будет сломано? $\xi$ — количество сломанных стульев.

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} \xi & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline p & \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\frac{1}{3} & \frac{3}{4}\frac{2}{3}\frac{1}{2} & \frac{3}{4}\frac{2}{3}\frac{1}{2}1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|c|c|c|c} \xi & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline p & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}$$

$E\xi = \frac{1}{4}(1+2+3+4) = \frac{10}{4}$
$\mathcal{D}\xi = E(xi^2) - 2,5^2 = \frac{30}{4} - 6,25 = \frac{20}{16} = \frac{5}{4}$

## Задача

$P(\xi = k) = \frac{c}{k(k+1)}$
$c-?,\ P(\xi \leqslant 10)-?,\ P(10 \leqslant \xi \leqslant 20)-?$
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c}{k(k+1)} = 1 \Rightarrow c\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1}\right) = 1$$
$$c\lim_{k\to\infty}\left(1 - \frac{1}{k}\right) = 1 \Rightarrow c \cdot 1 = 1 \Rightarrow c = 1$$
$$P(\xi = k) = \frac{1}{k(k+1)}$$
$$P(\xi \leqslant 10) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{11} = \frac{10}{11}$$
$$P(10 \leqslant \xi \leqslant 20) = P(\xi \leqslant 20) - p(\xi \leqslant 9) = (1 - \frac{1}{21}) - (1 - \frac{1}{10}) = \frac{11}{210}$$
$E\xi = \sum\limits_{k=1} \infty \frac{1}{k(k+1)}k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1}$ - расходится.
$E\xi = +\infty$

11 октября

Разбор задач из домашнего задания. $F_\xi(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x},\ x \geqslant 1 \\ 0,\ x < 1 \end{cases}$

Найти a: $P(\xi > a) = \frac{1}{3}$
$P(\xi > a) = 1 - F_\xi(a) = \frac{1}{3}$
$F_\xi(x) = \frac{2}{3}$
$\begin{cases} 1 - \frac{1}{x} = \frac{2}{3} \\ x \geqslant 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} = \frac{1}{x} \\ x \geqslant 1 \end{cases}$
$x = 3 \Rightarrow a = 3$

Распределения

Распределение Бернулли: $\xi \sim \mathrm{Ber}(p)$

$\begin{array}{c|c|c} \xi & 0 & 1 \\ \hline p & \text{1 - p = q} & \text{p} \end{array},\ E\xi = p,\ \mathcal{D}\xi = pq$

Биномиальное распределение.
Распределение Пуассона.
Геометрическое распределение.

## Задача

С вероятностью $\frac{5}{6}$ яблоко падает недалеко от яблони, всего 10 яблок. Случайная величина $\xi$ — количество яблок, которые упали недалеко от яблони.
$\xi \sim \mathrm{Bi}(10,\ \frac{5}{6})$
$E\xi = \frac{25}{3},\ \mathcal{D}\xi = \frac{25}{18}.$

## Задача

$\xi \sim \mathrm{Bi}(4,\ 0.7)$
$E\xi = 2,8$
$\mathcal{D}\xi = 0,24$
$Z_{\frac{8}{1000}} = \min(x,\ F(x) \geqslant \frac{8}{1000})$
$F(0) = \frac{81}{10000} > \frac{8}{1000} \Rightarrow Z_{\frac{8}{1000}} = 0$

## Задача

Три стрелка, вероятность попадания:

1. 0,7
2. 0,6
3. 0,5

Каждый выстрелил по одному разу, какое среднее количество попаданий?
$\xi_1 \sim \mathrm{Bi}(1,\ 0.7),\ \xi_2 \sim \mathrm{Bi}(1,\ 0.6),\ \xi_3 \sim \mathrm{Bi}(1,\ 0.5)$
$E\xi = E(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) = E\xi_1 + E\xi_2 + E\xi_3 = 1.8$
Так как события независимы, их ковариация равна 0, поэтому:
$\mathcal{D}\xi = \mathcal{D}\xi_1 + \mathcal{D}\xi_2 + \mathcal{D}\xi_3 = 0,7 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,4 + 0,5 \cdot 0,5 = 0,7$

## Задача

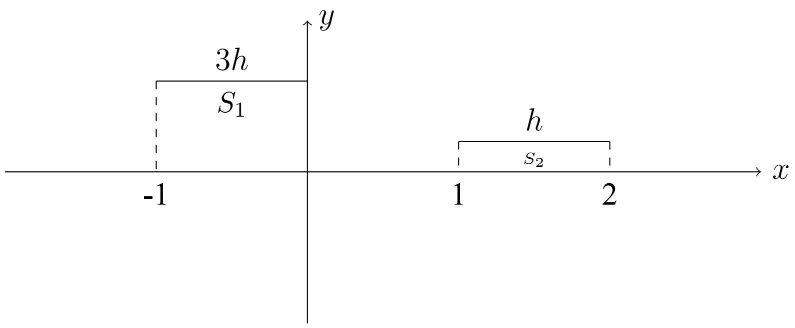
Известно, что бутерброд падает маслом вниз с вероятностью $0,999$. Некий экспериментатор уронил бутерброд 1000 раз. Какова вероятность, что бутерброд упадёт маслом вверх более 2 раз? $\xi$ — маслом вверх.
$\xi \sim \mathrm{Bi}(1000, 0.001)$
Хотелось бы отпуассонить (апроксимировать распределением Пуассона) это распределение.
После апроксимации: $\Delta = \left| C_n^k p^k q^{n-k} - \frac{e^{-np}(np)^k}{k!} \right| \leqslant np^2$
$\Delta = 0.001$. Можем апроксимировать: $\xi \sim \Pi(1),\ \lambda = np = 1$
$P(\xi > 2) = 1 - P(\xi \leqslant 2) = 1 - P(\xi = 0) - P(\xi = 1) - P(\xi = 2) =$
$= 1 - \frac{e^{-1}1^0}{0!} - \frac{e^{-1}1}{1!} - \frac{e^{-1}1^2}{2!} = 1 - \frac{5}{2e}$

## Задача

$\xi \sim \mathrm{G}(0,2) \Rightarrow E\xi = 5$. Наиболее вероятное значение: $P(\xi = k) = q^{k-1}p \leqslant p = 0,2 \Rightarrow k = 1$

Семинар 1 ноября

Задача 34 страница 93.




$S = S_1 + S_2 = 3h + h = 4h = 1 \Rightarrow h = \frac{1}{4}$

$$F(x) = \begin{cases} 0,\ x \in (-\infty,\ -1) \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{-1} 0\,dt + \int_{-1}^{x} \frac{3}{4}\,dt = \frac{3}{4}(x+1),\ x \in [-1,\ 0] \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{-1} 0\,dt + \int_{-1}^{1} \frac{3}{4}\,dt + \int_{0}^{x} 0\,dt = \frac{3}{4},\ x \in (0,\ 1) \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{-1} 0\,dt + \int_{-1}^{1} \frac{3}{4}\,dt + \int_{0}^{1} 0\,dt + \int_{1}^{2} \frac{1}{4}\,dt = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}(x-1),\ x \in [1,\ 2] \\ 1,\ x \in (2,\ +\infty) \end{cases}$$

$M[]$ — матожидание.

$M[(2-x)(3-x)] = M[6-5x+x^2] = M[6] - M[5x] + M[x^2] =$

$= 6 - 5\left(\displaystyle\int_{-1}^{0} x\frac{3}{4}\,dx + \int_{1}^{2} x \cdot \frac{1}{4}\,dx\right) + \left(\int_{-1}^{0} x^2 \cdot \frac{3}{4}\,dx + \int_{1}^{2} x^2 \cdot \frac{1}{4}\,dx\right)$

$\mathcal{D}[2-3x] = 9\mathcal{D}[x] = 3(M[x^2] - M^2[x])$

Распределение Гаусса

$\xi \sim N(m, \sigma^2)$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$

$\Phi_0(x) = \displaystyle\int_{0}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$

$P(\alpha < \xi < \beta) = \Phi_0\left(\dfrac{\beta - m}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\dfrac{\alpha - m}{\sigma}\right)$

Находим значения $\Phi_0$ через таблицу функции Лапласа.

Если $x > 5$, то $\Phi_0(x) = 0.5$

## Задача

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{72\pi}} e^{-\frac{(x+3)^2}{72}} \Rightarrow \xi \sim N(-3,\ 36)$

$P(0 < \xi < 12) = \Phi_0\left(\frac{12-12}{3}\right) - \Phi_0\left(\frac{0-12}{3}\right) = \Phi_0(0) - \Phi_0(-4) = 0 + \Phi_0(4) =$

$= 0.4999683$

Второй начальный момент $\mu_2 = E\xi^2 = \mathcal{D}\xi + (E\xi)^2 = 9 + 12^2 = 153$

$\mathcal{D}(5-3\xi) = 9\mathcal{D}(\xi) = 9 \cdot 9$

## Задача 51 стр 94

По условию $\xi \sim N\big(0,\ 0.4^2\big)$. Нужно посчитать $P(-0.7 < \xi < 0.7) = \Phi_0\left(\frac{0.7}{0.4}\right) - \Phi_0\left(\frac{-0.7}{0.4}\right) = 2\Phi_0\left(\frac{7}{4}\right) \approx 2 \cdot 0.46 = 0.92$

В общем случае:$P(|\xi - E\xi| < \delta) = 2\Phi_0\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$

Пусть $\eta$ — количество годных шариков из 50 изготовленных. Заметим, что $\eta \sim Bi(50,\ 0.92) \Rightarrow E\eta = n \cdot p = 50 \cdot 0.92 = 46$

## Задача

$\xi \sim N(0,\ 1)$

$Z_{0.9}$–? $\Rightarrow \Phi_0(Z_{0.9}) = 0.9 - 0.5 = 0.4$ (так как интегрировать надо от $-\infty$, а не от 0, а $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \dots = \frac{1}{2}$), тогда $Z_{0.9} \approx 1.29$.

Отсюда можно посчитать $Z_{0.1} = -Z_{0.9} = -1.29$

Интересный факт $P(-1.65 < \xi < 1.65) = 0.9$. И ещё один:

$$P(|\xi| < 1.96) = 0.95$$

1.96 является знаменитой точкой, использующейся в подсчёте доверительных интервалов (случайная величина попадает в него с вероятностью $95$ процентов, немало).

## Теория

$\xi \sim f_\xi(x),\ \eta = \phi(\xi),\ f_\eta(y) - ?$
Пусть $\varphi(x)$ — монотонная функция. $y = \varphi(x),\ x = \varphi^{-1}(y)$
$f_\eta(y) = f_\xi\big(\varphi^{-1}(y)\big)\left|\big(\varphi^{-1}(y)\big)'\right|$
Разобьём $\varphi$ на отрезки монотонности (пусть их $k$ штук):

$$f_\eta(y) = \sum_{i=1}^{k} f_\xi\left(\varphi_i^{-1}(y)\right)\left|\left(\varphi_i^{-1}(y)\right)'\right|$$

## Задача

$\xi \sim N(0,\ \sigma^2)$

a. $\eta = \xi^3,\ f_\eta(y) - ?, f_\eta(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\left(y^{\frac{1}{3}}\right)^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{3} \cdot y^{-\frac{2}{3}}$

b. $\eta = \xi^2$. Разбиваем на интервалы монотонности:

$$\varphi_1^{-1}(y) = -\sqrt{y},\ \varphi_2^{-1}(y) = \sqrt{y} \Rightarrow \left(\varphi_1^{-1}\right)' = -\frac{1}{2}\sqrt{y} = -\left(\varphi_2^{-1}\right)'$$

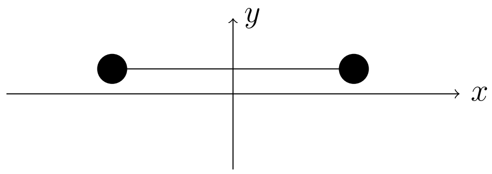
$$f_\eta(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y}{2\sigma^2}} \cdot \left|\frac{1}{2\sqrt{y}}\right| \cdot 2,\ x > 0$$

При $x \leqslant 0 : f_\eta(y) = 0$

Семинар 8 ноября

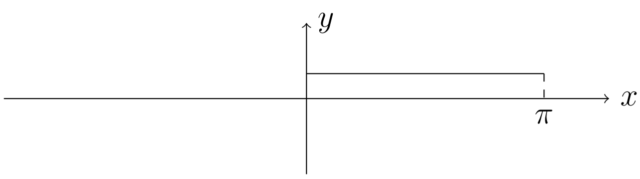
Разбор домашнего задания.
$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi},\ x \in \left[\frac{-\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right] \\ 0,\ \text{иначе} \end{cases}$

$f(x)$




$\eta = \sin\xi = \varphi(\xi)$
$\varphi^{-1}(y) = \arcsin y$
$(\varphi^{-1}(y))' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$
$f_\eta(y) = f_\xi(\varphi^{-1}(y))\,(\varphi^{-1}(y))' = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\ y \in (-1,\ 1) \\ 0,\ \text{иначе} \end{cases}$

$f(x)$



$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi},\ x \in [0,\ \pi] \\ 0,\ \text{иначе} \end{cases}$
$\eta = \sin \xi$
$\varphi_1^{-1}(y) = \arcsin(y)$
$\varphi_2^{-1}(y) = \pi - \arcsin(y)$
$\left(\varphi_1^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$
$\left(\varphi_2^{-1}(y)\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$
$f_\eta(y) = \sum\limits_{i=1}^{2} f_\xi \varphi_i^{-1}(y) \left|\left(\varphi_i^{-1}(y)\right)'\right| = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\ y \in (0,\ 1) \\ 0,\ \text{иначе} \end{cases}$

## Многомерные случайные величины

| $\xi_1,\ \xi_2$ | $y_1, \dots$ | $y_j$ | $\dots,\ y_k$ |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | $\vdots$ | $\vdots$ | |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | |
| $x_i$ | $\dots$ | $p_{i\,j}$ | |
| $\vdots$ | | | |
| $x_m$ | | | |

$p_{i\,j} = p(\xi_1 = x_i,\ \xi_2 = y_j)$
$\sum\limits_i \sum\limits_j p_{i\,j} = 1$
$p_{i\,\bullet} = \sum\limits_{j=1}^{m} p_{i\,j},\ p_{\bullet\,j} = \sum\limits_{i=1}^{k} p_{i\,j}$
$\text{cov}(\xi_1,\ \xi_2) = E(\overset{\circ}{\xi_1}\overset{\circ}{\xi_2}) = E\xi_1\xi_2 - E\xi_1 E\xi_2$
$E\xi_i\xi_2 = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{k} x_i \cdot y_j \cdot p_{i\,j}$

## Задача

Построить одномерное распределение, определить матожидание и дисперсию двумерной случайной величины.

| $\downarrow \xi,\ \eta \rightarrow$ | -1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| -2 | 0.1 | 0.2 | 0.3 |
| 2 | 0.1 | 0.1 | ? |

За знаком ? стоит вероятность 0.2, так как сумма всех вероятностей в таблице должна равняться 1.
Построим табличку, где $p_{i\,j} = p_{i\,\bullet} \cdot p_{\bullet\,j}$
Строить не будем, так как уже $p_{1\,1} \neq p_{1\,\bullet} \cdot p_{\bullet\,1}$, так как $0.1 \neq 0.2 \cdot 0.6 = 0.12$
$E\xi = -1.2 + 0.8 = -0.4$
$E\eta = -0.2 + 0.5 = 0.3$

| $\xi + \eta$ | -3 | -2 | -1 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.1 | 0.1 | 0.2 |

$E(\xi + \eta) = -0.3 - 0.4 - 0.3 + 0.1 + 0.2 + 0.6 = -0.1 = E\xi + E\eta$
$\mathcal{D}\xi = 4 - 0.16 - 3.84$
$\mathcal{D}\eta = 0.2 + 0.5 - 0.09 = 0.61$
$\mathcal{D}(\eta + \xi) = 9 \cdot 0.3 + 4 \cdot 0.3 + 0.4 \cdot 1 - 0.01 = 2.7 + 1.2 + 0.4 - 0.01 = 4.29 = E(\eta + \xi)^2 - \left(E(\eta + \xi)\right)^2$

| $\xi \cdot \eta$ | -2 | 0 | 2 |
|---|---|---|---|
| | 0.4 | 0.3 | 0.3 |

$\text{cov}(\xi,\ \eta) = E(\xi\eta) - E\xi E\eta = -0.2 + 0.12 = -0.08$
Проверим корректность

$$\mathcal{D}(\eta + \xi) = \xi + \eta + \text{cov}(\xi,\ \eta) = 0.61 + 3.84 - 2 \cdot 0.08 = 4.29$$

Верно.

## Задача

Изучение таблички (доделать дома).
$\xi$ — материальное положение.
$\eta$ — уровень образования.
Определить зависимость и коэффициент корреляции.

| $\eta,\ \xi$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.083 | 0.035 | 0.001 |
| 2 | 0.31 | 0.375 | 0.026 |
| 3 | 0.04 | 0.116 | 0.014 |

Семинар 15 ноября

## Задача 7 стр 132

Запишем условие в виде таблицы:

| B\ A | 1 | 0 | sum |
|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{25}{1000}$ | $\frac{2}{100}$ | $\frac{45}{1000}$ |
| 0 | $\frac{5}{1000}$ | $\frac{95}{100}$ | $\frac{955}{1000}$ |
| sum | $\frac{3}{100}$ | $\frac{97}{100}$ | 1 |

Посчитаем вероятность произведения:

| AB | 1 | 0 |
|---|---|---|
| p | $\frac{25}{1000}$ | $\frac{975}{1000}$ |

$\operatorname{cov}(A, B) = E(AB) - EA \cdot EB = \frac{25}{1000} - \frac{3}{100} \cdot \frac{45}{1000} = \frac{2365}{10000}$

## Задача 1

я решал, перепишу с фотографии.

## Задача 2

Дано $f(x,\ y) = \begin{cases} \frac{1}{4}\sin x \sin y, \text{ если } 0 \leqslant x,\ y \leqslant \pi \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$
$\xi = (\xi_1,\ \xi_2),\ P(\xi \in \mathcal{D})$

$$f_{\xi_1}(x) = \int\limits_0^{\pi} \frac{1}{4}\sin x \sin y\, dy = \frac{1}{4}\sin x(-\cos y)\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2}\sin x,\ x \in [0,\ \pi]$$

$$f_{\xi_2}(y) = \int\limits_0^{\pi} \frac{1}{4}\sin x \sin y\, dx = \frac{1}{4}\sin y(-\cos x)\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2}\sin y,\ y \in [0,\ \pi]$$

Заметим, что $f_\xi(x,\ y) = f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(y)$, значит $\xi_1,\ \xi_2$ независимы $\Rightarrow$
$\Rightarrow \operatorname{cov}(\xi_1,\ \xi_2) = 0$

$$P(\xi \in \mathcal{D}) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{4}\sin x \sin y\, dy\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4}\sin x(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2})\, dx = = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{3}-1}{8}\sin x\, dx = \frac{\sqrt{3}-1}{8}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right) = \sqrt{3}$$

Посчитаем вектор матожидания:

$$E\xi_1 = E\xi_2 = \int\limits_0^{\pi} \frac{x}{2}\sin x\, dx = \int\limits_0^{\pi} \frac{x}{2}\, d\cos x = -\frac{x\cos x}{2}\Big|_0^{\pi} - \int\limits_0^{\pi} -\frac{\cos x}{2}\, dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\sin x}{2}\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

Получается $E\xi = (\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2})$.
$K_\xi = \begin{pmatrix} ? & 0 \\ 0 & ? \end{pmatrix}$. Найдём дисперсии:

$$E\xi_1^2 = E\xi_2^2 = \int\limits_0^\pi \frac{x^2}{2}\sin x\,dx = -\frac{x^2\cos x}{2}\Big|_0^\pi + \int\limits_0^\pi x\cos x\,dx = \frac{\pi^2}{2} - \int\limits_0^\pi \sin x\,dx = \frac{\pi^2}{2} - 2$$

$\mathcal{D}\xi_1 = \mathcal{D}\xi_2 = \frac{\pi^2}{2} - 2 - \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{4} - 2$
Итак, $K_\xi = \begin{pmatrix} \frac{\pi^2}{4} - 2 & 0 \\ 0 & \frac{\pi^2}{4} - 2 \end{pmatrix}$

Семинар 22 ноября

## Задача 1

$\xi_1 \sim R(0,\ 1), \quad \xi_2 \sim R(0,\ 1),\ \xi_2$ и $\xi_1$ независимы.
Найти $\xi = \xi_1 + \xi_2$. Для решения воспользуемся формулой свёртки:

$$f_\xi(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(z-x)\,dx$$

$$f_{\xi_1}(x) = \begin{cases} 1,\ x \in (0,\ 1) \\ 0,\ \text{иначе} \end{cases}$$

$$f_{\xi_2}(z-x) = \begin{cases} 1,\ x \in (z-1,\ z) \\ 0,\ \text{иначе} \end{cases}$$

Рассмотрим случаи:

$z \in (0,\ 1)$ Тогда нас интересует интервал $(0,\ z)$

$z \in (1,\ 2)$ Тогда — $(z-1, 1)$

Во всех остальных случаях произведение функций будет 0.

Получаем плотность распределения $\xi$:

$$f_\xi(z) = \begin{cases} z,\ z \in (0,\ 1) \\ 2 - z,\ z \in (1,\ 2) \\ 0,\ \text{иначе} \end{cases}$$

Дана таблица двумерного дискретного распределения.

## Задача 5 стр. 131-132

$E(y \mid x = 1)$

| $y \backslash x$ | -1 | 1 |
|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{3}$ |
| 2 | 0 | $\frac{1}{6}$ |
| 3 | $\frac{1}{3}$ | 0 |

$P(x = 1) = \frac{1}{2}$,
$P(y = 1 \mid x = 1) = \frac{2}{3}$,
$P(y = 2 \mid x = 1) = \frac{1}{3}$,
$P(y = 3 \mid x = 1) = 0$
$E(y \mid x = 1) = 1 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$
$E(y) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2\frac{1}{6} = \frac{11}{6}$

## Задача про табличку с данными

$P(\eta = 1 \mid \xi = 1) = \frac{0.085}{0.119} \approx 0.697$
$P(\eta = 2 \mid \xi = 1) = \frac{0.035}{0.119} \approx 0.294 P(\eta = 3 \mid \xi = 1) = \frac{0.001}{0.119} \approx 0.009$
$E(\eta \mid \xi = 1) = 1 \cdot 0.697 + 2 \cdot 0.294 + 3 \cdot 0.009 = 1.312$

Семинар 29 ноября.

Вспоминаем неравенство Чебышёва: $E|\xi|^r < \infty \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad P(|\xi| > \varepsilon) \leqslant \frac{E|\xi|^r}{\varepsilon^r}$

## Задача

Найди вероятность того, что в некоторой области скорость ветра превысит 80 км/ч, если:
а) $E\xi = 16\frac{\text{км}}{\text{ч}}$
б) $E\xi = 16\frac{\text{км}}{\text{ч}},\ \sigma = 4\frac{\text{км}}{\text{ч}}$
В пункте а: $P(\xi > 80) \leqslant \frac{E\xi}{80} = \frac{16}{80} = 0.2$
В пункте б: можем воспользоваться $\sigma$ для нахождения матожидания квадрата:

$$E\xi^2 = \mathcal{D}\xi + (E\xi)^2 = 16 + 256 = 272 < \infty$$

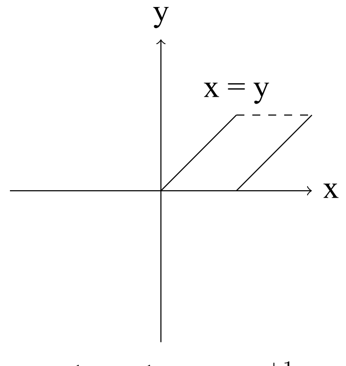
$P(\xi > 80) \leqslant \frac{E\xi^2}{80^2} = \frac{272}{80^2} = 0.0425$

## Задача

Пусть $\xi$ = {Количество доживших до 50 лет среди 1000 новорождённых}
$\xi \sim Bi(1000,\ 0.87)$. Можем оценить $P(|\underbrace{\frac{\xi}{1000} - 0.87|}_{\eta} > 0.04) \leqslant \frac{\mathcal{D}\frac{\xi}{n}}{0{,}04^2}$
Из свойств биномиального распределения: $E\xi = np,\ E\frac{\xi}{n} = p,\ \mathcal{D}\xi = npq,\ \mathcal{D}\frac{\xi}{n} = \frac{pq}{n}$
Тогда $P(|\eta| > 0,04) \leqslant 0,07 \Rightarrow P(|\eta| < 0,04) \geqslant 1 - 0,07 = 0,93$.

## Задача

$$f(x,\ y) = \begin{cases} axy,\ 0 < y < 1, y < x < y + 1 \\ 0,\ \text{иначе} \end{cases}$$




$$\int_0^1 \int_y^{y+1} f(x,\ y)\, dx\, dy = \int_0^1 \int_y^{y+1} axy\, dx\, dy = \int_0^1 \int_y^{y+1} a\, \frac{x^2}{2} y \Big|_y^{y+1} dy = \int_0^1 ay^2 + \frac{ay}{2}\, dy = \frac{a}{3} + \frac{a}{4} = 1 \Rightarrow a = \frac{12}{7}$$

$$f_{\xi_1}(x) = \begin{cases} \int_0^x \frac{12}{7} xy\, dy = \frac{6x^3}{7}, 0 < x < 1 \\ \int_{x-1}^1 \frac{12}{7} xy\, dy = \frac{6y^2}{7} x|_{x-1}^1 = \frac{6x^2}{7}(2 - x),\ 1 < x < 2 \\ 0,\ \text{иначе} \end{cases}$$

$$f_{\xi_2}(y) = \begin{cases} \int_y^{y+1} \frac{12}{7} xy\, dx = \frac{6y}{7}(2y + 1),\ 0 < y < 1 \\ 0,\ \text{иначе} \end{cases}$$

$$f_{\xi_1}(x \mid y) = \begin{cases} \frac{\frac{12}{7}xy}{\frac{6}{7}y(2y+1)} = \frac{2x}{2y+1},\ y < x < y+1 \\ 0,\ \text{иначе} \end{cases}$$

$$f_{\xi_2}(y \mid x) = \begin{cases} \frac{\frac{12}{7}xy}{\frac{6}{7}x^3} = \frac{2y}{x^2} 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 \\ \frac{\frac{12}{7}xy}{\frac{6}{7}x^2(2-x)} = \frac{2y}{x(2-x)} 1 < x < 2,\ 0 < y < 1 \end{cases}$$

$$E(\xi_2 \mid \xi_1 = 1) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\xi_1}(x \mid y)\, dx = \int_1^2 \frac{x}{\cdot} \frac{2x}{3}\, dx = \left. \frac{2x^3}{9} \right|_1^2 = \frac{14}{9}$$

Семинар 6 декабря

Пусть $\zeta = (\xi,\ \eta)$, где $\xi$ — рост человека, а $\eta$ — вес. $\zeta \sim N(m_\zeta,\ k_\zeta),\ m_\zeta = (175,\ 74)^T,\ K_\zeta = \begin{pmatrix} 49 & 26 \\ 26 & 36 \end{pmatrix}$

$E(\xi - \eta) = E(\xi) - E(\eta) = 175 - 74 = 101$

$\mathcal{D}(\xi - \eta) = \mathcal{D}(\xi) + \mathcal{D}(\eta) + 2\operatorname{cov}(\xi,\ -\eta) = 49 + 36 - 2 \cdot 26 = 33$

$\xi - \eta \sim N(101,\ 33)$

Считается, что человек страдает избыточным весом, если $\xi - \eta \leqslant 90$. Посчитаем вероятность этого события:

$P(\xi - \eta \leqslant 90) = \Phi_0\left(\frac{90-101}{\sqrt{33}}\right) - \Phi_0(-\infty) = -\Phi_0\left(\sqrt{\frac{11}{3}}\right) + \frac{1}{2} = 0,5 - 0,4719 = 0,0281$

По теореме о нормальной корреляции:

$E(\xi \mid \eta = y) = E(\xi) + \frac{\operatorname{cov}(\xi,\ \eta)}{\mathcal{D}\eta}(y - E(\eta))$

$\mathcal{D}(\xi \mid \eta = y) = \mathcal{D}(\xi) - \frac{(\operatorname{cov}(\xi,\ \eta))^2}{\mathcal{D}\eta}$

Нас интересуют следующие величины:

$E(\eta \mid \xi = 180) = 74 + \frac{26}{49} \cdot (180 - 175) = 76,65$

$E(\eta \mid \xi = 190) = 74 + \frac{26}{49} \cdot (190 - 175) = 81,96$

$\forall a\ \mathcal{D}(\eta \mid \xi = a) = 36 - \frac{26^2}{49} = 22,2$

## Центральная предельная теорема

Считается, что шаг пешехода распределён равномерно от 0,7 до 0,8 метра. Какова вероятность, что за 10 000 шагов человек пройдёт от 7,49 до 7,51 километра?

$\xi_i$ — длина i-го шага, $\xi_i \sim R(0,7;\ 0,8)$

$n = 10\,000,\ S = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k.$

$E\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k\right) = \sum_{k=1}^{n} E(\xi_k) = n \cdot \frac{0,7+0,8}{2} = 0,75n = 7500$

$\mathcal{D}(\xi_i) = \frac{(0,8-0,7)^2}{12} = \frac{1}{1200},\ \mathcal{D}(S) = \frac{10\,000}{1200} = \frac{100}{12} = \frac{25}{3}$

$\frac{S - 7\,500}{\sqrt{\mathcal{D}(S)}} = \frac{S-7500}{\frac{5}{\sqrt{3}}} \sim U(0,\ 1) \Rightarrow P\left(7490 < S < 7510\right) = 2\Phi_0\left(\frac{10}{\frac{5}{\sqrt{3}}}\right) = 2\Phi_0(2\sqrt{3}) \approx 2 \cdot 0,4997 = 0,9994$

## Задача

Мальчик рождается с вероятностью 0,52. Найти вероятность того, что среди 1 000 новорождённых девочек окажется не меньше, чем мальчиков.

$\xi \sim Bi(1000;\ 0,52),\ E\xi = 520,\ \mathcal{D} = 520 \cdot 0,48 = 249,6$

Найдём $P(\xi \leqslant 500) = \Phi_0\left(\frac{500-520}{\sqrt{249,6}}\right) - \Phi_0(-\infty) = \frac{1}{2} - \Phi_0\left(\frac{20}{15,8}\right) \approx \frac{1}{2} - 0,3962 = 0,1038$

Проводим $n$ испытаний, частота успеха $\frac{\xi_n}{n} \Rightarrow E\frac{\xi_n}{n} = \frac{np}{n} = p,\ \mathcal{D}\frac{\xi_n}{n} = \frac{pq}{n}$

Тогда при $n \to \infty$:

$$\frac{\frac{\xi_n}{n} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \xrightarrow{d} U \sim N(0,\ 1)$$

Пусть хотим найти $P\left(\left|\frac{\xi_n}{n} - p\right| < \delta\right) = 2\Phi_0\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right)$

## Задача

$\xi_n \sim Bi(1\,000;\ 0,87)$. Нас интересует $P\left(\left|\frac{\xi_n}{n} - 0,87\right| < 0,04\right)$
$E\left(\frac{\xi_n}{n}\right) = p = 0,87,\ \mathcal{D}\left(\frac{\xi_n}{n}\right) = \frac{npq}{n^2} = \frac{pq}{n} = \frac{8,7\cdot 1,3}{1000} = 11,31$
Тогда можно посчитать $P\left(\left|\frac{\xi_n}{n} - 0,87\right| < 0,04\right) = 2\Phi_0\left(\frac{0,04}{\sqrt{11,31}}\right) = 2\Phi_0\left(\frac{0,04}{0,1063}\right) = 2\Phi_0\left(\frac{400}{1063}\right) \approx 2\Phi_0(0,38)$