Лекции по дискретной математике 4 модуль.

Андрей Тищенко

2023/2024

Лекция 12 апреля.

Деревья

$\forall T$ T - $(m,\ n)$ граф тогда:
T дерево $\Leftrightarrow$ T связный ациклический
$\Leftrightarrow$ T минимально связен
$\Leftrightarrow$ T связен $m = n - 1$
$\Leftrightarrow$ в T любые 2 вершины соединены ровно 1 простым путём.

Определение: граф называется минимально связным если из него нельзя удалить ребро без потери связности.

Определение: Пусть $G = (V,\ E)$ - связный граф. Любое дерево $T = (V,\ E')$, такое что $E' \subseteq E$, (то есть T - подграф) называется остовным.

Теорема: В любом связном $(n,\ m)$ графе $G = (V,\ E)$ есть остовное дерево T

Доказательство: Индукция по m

$m = 0$: $n = 1,\ T = G$.

$m > 0$: 1. G - дерево, тогда $T = G$

2. G не деревоо $\Rightarrow$ не минимально связный $\Rightarrow \exists x,\ y \quad xEy \wedge$ ребро xy можно удалить без потери связности.
   G' - результат удаления ребра xy
   G' - $(n,\ m-1)$ связный граф $\underset{\text{ПИ}}{\Rightarrow}$ в G' есть остовное дерево T'
   $G = (V,\ E),\ G' = (V,\ E \backslash \{xy,\ yx\})$. То есть T' подграф G', а G' подграф $G \Rightarrow T := T'$

Двудольные графы

Определение: граф $G = (V,\ E)$ <u>двудольный</u> $\Leftrightarrow \exists V_1,\ V_2$:

$$\begin{cases} V_1 \cap V_2 = \varnothing \\ V_1 \cup V_2 = V \\ V_1,\ V_2 \neq \varnothing \\ x,\ y \in V_i \Rightarrow xy \notin E \end{cases}$$

Определение: граф $G = (V,\ E)$ раскрашиваем в k цветов $\Leftrightarrow \exists c : V \to \underline{k}$
$\forall x,\ y\ \big(c(x) = c(y) \Rightarrow xy \in E\big)$

Утверждение: G k-дольный $\Rightarrow \forall l \geqslant k,\ G$ можно раскрасить в l цветов.

Теорема 2: (Кёнинга).
$\forall$ графа $G = (V,\ E),\ |V| \geqslant 2$ следующие условия равносильны:

(a) G двудольныйв
(b) в G нет циклов нечётной длины
(c) в G нет простого цикла нечётной длины

Доказательство: $a \Rightarrow b$ допустим есть цикл нечётной длины:
$x_1 x_2 x_3 x_4 \dots x_{2n} x_{2n+1} x_1$
Без ограничения общности:
$x_1 \in V_1 \Rightarrow x_2 \in V_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow x_{2n} \in V_2 \Rightarrow x_{2n+1} \in V_1 \Rightarrow x_1 \in V_2 \perp$
$b \Rightarrow c$. Если нет никакого цикла нечётной длины, то простого также не будет. $c \Rightarrow a$.

Лемма* если граф G связен и $|V| \geqslant 2$ и в G нет простых циклов нечётной длины, то G двудольный.

$G = G_1 \sqcup G_2 \sqcup \dots \sqcup G_n$

Ещё не может быть компонент порядка 1.

$G' = (V',\ E)$ связен, $|V'| \geqslant 2$, в G' нет простого цикла нечётной длины.

Рассмотрим произвольную $z \in V$, тогда $\exists y\ zEy$

$d(u,\ w) :=$ длина кратчайшего пути между $u,\ w$ в G'

$d(z,\ z) = 0,\ d(z,\ y) = 1$

$V_1 = \{x \in V' \mid d(z,\ x) \equiv 1(2)\}$

$V_2 = \{x \in V' \mid d(z,\ x) \equiv 0(2)\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_1 \cap V_2 = \varnothing \\ V_1 \cup V_2 = V' \\ y \in V_1 \neq \varnothing \wedge z \in V_2 \neq \varnothing \end{cases}$$

Предположим $\exists u,\ w \in V_i \quad uEw \Rightarrow u \neq w$

$d(z,\ u) \equiv d(z,\ w)(2)$

Рассмотрим кратчайшие ($\rightarrow$ простые) пути $z \xrightarrow{p} u \wedge z \xrightarrow{q} w$

Пусть $t :=$ самая правая общая точка $z \xrightarrow{p} u,\ z \xrightarrow{q} w$ (самая правая - такая, что путь до u и w минимален).

$z \xrightarrow{p} w = z \xrightarrow{p_1} t \xrightarrow{p_2} w$

$z \xrightarrow{q} u = z \xrightarrow{q_1} t \xrightarrow{q_2} u$

Утверждение: $\left|z \xrightarrow{p_1} t\right| = \left|z \xrightarrow{q_1}\right| t$

Доказательство: Иначе без ограничения общности:

$\left|z \xrightarrow{p_1} t\right| > \left|z \xrightarrow{q_1} t\right|$

$\left|z \xrightarrow{q_1} t \xrightarrow{p_2}\right| < \left|z \xrightarrow{p} w\right| \perp \left|z \xrightarrow{p} w\right| = d(z,\ w) = d(z,\ u)$

$\left|z \xrightarrow{p_1} t\right| + \left|t \xrightarrow{p_2} w\right| \equiv \left|z \xrightarrow{q_1} t\right| + \left|t \xrightarrow{q_2} u\right|$

$\left|t \xrightarrow{p_2} w\right| \equiv \left|t \xrightarrow{q_2} u\right|$

Рассмотрим цикл twu, он является простым, его длина будет равна:

$$\left|t \xrightarrow{p_2} w\right| + \left|t \xrightarrow{q_2} y\right| + 1 \equiv 1(2)$$

Но простых циклов длины 2 тут быть не может $\perp$.

Лемма 4. Если $(n,\ m)$ граф $G = (V,\ E)$ двудольный с долями V_1 и V_2, то

$$\sum_{x \in V_1} d(x) = m = \sum_{x \in V_2} d(x)$$

Доказательство: Индуция по количеству рёбер.

$m = 0$: $\forall x \ d(x) = 0$

$m > 0$: есть ребро uw, удалим его и получим G'
Без ограничения общности:
$uw \in E \Rightarrow u \in V_1, \ w \in V_2$
G' - двудольный $(n, \ m-1)$ граф с долями $V-1, \ V_2$

$$\sum_{x \in V_1} d(x) = \sum_{x \in V_1 \setminus \{u\}} + \big(d_{G'} + 1\big) = \sum_{x \in V_1} d_{G'}(x) + 1 = (m-1) + 1 = m$$

Задача о свадьбах

Определение: граф G называется <u>паросочетанием</u>
$\Leftrightarrow \forall x \ d(x) = 1$
Условие для выдачи женщин замуж $\forall S \subseteq V_1 \ \ |E[S]| \geqslant |S|$

$T = \{t_1, \ t_2, \ldots, \ t_n\}$. Хотим построить инъекцию $T \overset{f}{\lesssim} \bigcup T = t_1 \cup \cdots \cup t_n$, также хотим $\forall t \in T \ f(t) \in t$.
Тогда нужно $\forall S \subseteq T \ \ |\bigcup S| \geqslant |S|$

Лекция 19 апреля

Теорема Холла:

Дано: двудольный граф $G \ \big(W(\text{женщины}), M(\text{мужчины}), E\big), k = |W|$
Требуется выдать всех женщин замуж по любви без многоженства и многомужества

Формально:

$\exists f : \ W \to M$

1. f - инъективно
2. $\forall t \ t \ E \ f(t)$

$$\exists f \text{ удовлетворяющее условию} \underset{\text{т. Холла}}{\Longleftrightarrow} \forall S \subseteq W \quad |S| \leqslant \Big|E[S]\Big| \quad (*)$$

Доказательство:

$"\Leftarrow"$

$\forall S \subseteq W \quad f$ - инъективно

$$S \sim f[S] \subseteq E[S]$$

$$S \lesssim E[S] \Rightarrow |S| \leqslant |E[S]|$$

$"\Rightarrow"$

Индукция по m

$$\forall t \; 1 = |\{t\}| \leqslant |E[\{t\}]| \Rightarrow \forall t \in W \; \exists x \; tEx \Rightarrow E \text{ - тотально для } W$$

1й случай: E - инъективно

$f(x) :=$ любой $x \in E[\{x\}]$. Тогда мы в шоколаде

2й случай: E - не инъективно

a. $\exists S_0 \; (S_0 \neq \varnothing \wedge |S_0| = |E[S_0]|)$ Рассмотрим подграф G, индуцированный множеством S_0

$$S_0 \neq W \Rightarrow |S_0| < |W|$$

$$\Rightarrow |W \backslash S_0| \neq \varnothing \Rightarrow \text{не все ребра в } G_0$$

$$\Rightarrow \text{размер}(G_0) < m$$

Допустим для G_0 выполнено условие $(*)$

$$S' \subseteq S_0 \Rightarrow E[S'] \subseteq E[S_0] \Rightarrow |S'| \leqslant |E[S']|$$

Вывод: по проедположению индукции для G_0 есть соответствуется фукнкция $f_0 : \; S_0 \to E[S_0]$
$G_1 =$ это те вершины и ребра, которые не вошли в G_0.
Утверждение: Для G_1 выполнено $(*)$.
Пусть $S' \subseteq W \backslash S_0$

$$\big|E[S_0]\big| + |S'| = |S_0| + |S'| = |S_0 \cup S'| \leqslant \big|E[S_0 \sup S']\big| = \big|E[S_0] \cup E[S']\big| =$$

$$= \left|(E[S'] \ E[S_0]) \cup E[S_0]\right| = \left|E[S'] \backslash E[S_0]\right| + \left|E[S_0]\right|$$

Получаем сокращением $|S'| = \left|E[S'] \backslash E[S_0]\right|$
Так как $|S_0| \neq 0$, то размер $(G_0) > 0 \Rightarrow$ размер $(G_1) < m$.
По принципу индукуции для G_1, есть $f_1 : \ W \backslash S_0 \to E_{G_1}[W \backslash S_0]$

$$f := f_0 \cup f_1$$

б. $\forall S \left(S \neq W \wedge S \neq \varnothing \Rightarrow |S| < \left|E[S]\right|\right)$
так как E - не инъекция, то:

$$\exists x \in M \ \exists \ t_1, t_2 \in W (t_1 \neq t_2 \wedge t_1 E x \wedge t_2 E x) \Rightarrow \text{размер}(G_1) < 1$$

$$\left|E_{G_1}[S]\right| \geqslant \left|E[S]\right| - 1$$

$$\Rightarrow |S| < \left|E[S]\right| \leqslant \left|E_{G_1}[S]\right| + 1 \Rightarrow |S| \leqslant \left|E_{G_1}[S]\right|$$

По предположению индукции для G_1, есть $f_1 : \ S \to E_{G_1}[S] \subseteq E_G[S]$

$$f := f_1$$

Теорем Холла о "представителях"

Дано U - конечное (не обязательно):

$$T = \{t_1, \dots, t_k\} \subseteq \mathcal{P}(U)$$

тогда в конкретном t можно инъективно выбрать по элементу $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall S \subseteq T \ |S| \leqslant \underbrace{|\bigcup S|}_{=t_{i_1} \cup \dots \cup t_{i_q}}$
Строим граф (T, U, E)

$$tEx :\Leftrightarrow x \in t$$

$$E[\{t_{i_1} \cup \dots \cup t_{i_q}\}] = t_{i_1} \cup \dots \cup t_{i_q}$$

т. Дилуорса $\Rightarrow$ т. Холла

тут идут рисуночки, сам нарисуешь (демонстрация без доказательства).
Понял, Вова. Скиньте рисуночки, пожалуйста

Ориентированные графы

Определение:

Ориентированный граф (орграф) - это пара (V, A), где $V \neq \varnothing,\ A \subseteq V^2$

$$N_+(x) := A[\{x\}]$$

$$N_-(x) := A^{-1}[\{x\}]$$

Показатель исхода

$$d_+(x) = |N_+(x)|$$

Показатель захода

$$d_-(x) = |N_-(x)|$$

Утверждение:

$$\sum_{x \in V} d_+(x) = |A| = \sum_{x \in V} d_-(x)$$

Определение:

Турнир - это орграф, такой, что

1 $\forall x\ \neg xAx$

2 $\forall x, y\ (x \neq y \Rightarrow (xAy \Leftrightarrow \neg yAx))$

Беспредельный анализ

Рассматриваем последовательности: $\mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ (\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$

$$f'(x) = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x}$$

Перефразируем в терминах "бесконечно малых"

$$f'(x) = \frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x},\ \text{где } \delta x \text{ безконечно малая}$$

Для последовательностей зададим

$$\Delta a_n := a_{n+1} - a_n$$

Вторая производная

$$f'' = \frac{f'(x+\delta x) - f'(x)}{\delta x} = \frac{1}{\delta x}\left(\frac{f(x+2\delta x) - 2f(x+\delta x) + f(x)}{\delta x}\right) =$$

$$= \frac{f(x+2\delta x) - 2f(x+\delta x) + f(x)}{(\delta x)^2}$$

чем то похоже на $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
Для последовательнотей

$$\Delta^2 a_n = \Delta a_{n+1} - \Delta a_n = a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n$$

$$\Delta^3 a_n = \Delta^2 a_{n+1} - \Delta^2 a_n = a_{n+3} - 3a_{n+2} + 3a_{n+1} - a_n$$

Зададим S:

$$S: \ \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \quad S\ a_n = a_{n+1}$$

Тогда получаем дельту

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n = S\ a_n + a_n = (S-1)a_n$$

Получаем $\Delta = S - 1 \Rightarrow S = \Delta + 1 \Rightarrow S^k = (\Delta+1)^k$ Веселый результат

$$a_{n+k} = S^k\ a_n = (\Delta+1)^k a_n = \sum_{t=0}^{k} C_k^t \Delta^t\ a_n = \sum_{t=0}^{k} \frac{\Delta^t\ a_n}{t!} k^{(t)}$$

где $k^{(t)} = k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot (k-t+1)$

Лекция 26 апреля

Линейное пространство (Seq)

Носитель: $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ni \vec{a} = (a_0,\ a_1, \dots) = (a_n)_{n\in\mathbb{N}},\ \vec{a}: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$

Скаляр: $\mathbb{R}$

$$\alpha \in \mathbb{R} : \alpha\vec{a} = (\alpha a_0,\ \alpha a_1, \dots),\ (\alpha\vec{a})_n = \alpha a_n$$

Сложение:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_0 + b_0,\ a_1 + b_1, \dots),\ (\vec{a} + \vec{b})_n = a_n + b_n$$

Утверждение 1: При этом выполняются все аксиомы линейного пространства.

Проверим дистрибутивность:

$$\left(\alpha\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\right)_n = \alpha(a_n+b_n) = \alpha a_n + \alpha b_n = (\alpha\vec{a})_n + (\alpha\vec{b})_n = (\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b})_n$$

$$\left((\alpha+\beta)\vec{a}\right)_n = (\alpha+\beta)a_n = \alpha a_n + \beta a_n = (\alpha\vec{a}+\beta\vec{a})_n$$

Ещё факты:

$$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$$

$$\vec{0}=(0,\ 0,\ 0,\dots)$$

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$

$$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$$

$$(-\vec{a})_n=-a_n$$

Определение: $F: Seq \longrightarrow Seq$ линейная

$$\Leftrightarrow \forall \vec{a},\ \vec{b}\in Seq\ \forall\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$$

$$F(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}) = \alpha F(\vec{a}) + \beta F(\vec{b})$$

Утверждение 2:

Каждый скаляр $\alpha\in\mathbb{R}$ можно рассматривать как линейный оператор:

$$\alpha: Seq\to Seq \quad \alpha(\vec{a}) = (\alpha a_0,\ \alpha a_1,\dots)$$

$$\alpha(\alpha'\vec{a}+\beta'\vec{b}) = \alpha(\alpha'\vec{a})+\alpha(\beta'\vec{b}) = \alpha'(\alpha\vec{a})+\beta'(\alpha\vec{b})$$

Ещё линейные операторы

Сдвиг: $S: Seq \longrightarrow Seq$

$$S(a_0,\ a_1,\ a_2,\dots) = (a_1,\ a_2,\ a_3,\dots)$$

$$\underbrace{(S\vec{a})_n}_{=Sa_n} = a_{n+1}$$

$$S(\alpha a_n+\beta b_n) = \left(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}\right)_{n+1} = \alpha a_{n+1}+\beta b_{n+1} = \alpha S a_n + \beta S b_n$$

Разность: $\Delta: Seq \longrightarrow Seq$

$$\underbrace{(\Delta\vec{a})_n}_{=\Delta a_n} = a_{n+1}-a_n$$

$$\left(\Delta\left(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}\right)\right)_n=\left(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}\right)_{n+1}-\left(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}\right)_n=\alpha a_{n+1}+\beta b_{n+1}-\alpha a_n-\beta b_n=$$

$$=\alpha(a_{n+1}-a_n)+\beta(b_{n+1}-b_n)=\alpha\Delta a_n+\beta\Delta b_n=\left(\alpha\Delta\vec{a}+\beta\Delta\vec{b}\right)_n$$

Утверждение 3:

Линейные оператры $Seq \longrightarrow Seq$ образуют кольцо, то есть их можно "разумным образом" складывать и умножать друг на друга.

Допустим $F,\ G \in L(Seq)$:

$$(F+G)(\vec{a})=F(\vec{a})+G(\vec{a})$$

$$F\cdot G=F\circ G \text{ ассоциативно}$$

Есть нулевой элемент

$$F+0=F,\ 0\in L(Seq)$$
$$(F+0)(\vec{a})=F(\vec{a})+0(\vec{a})=F(\vec{a})$$

Обратный по сложению

$$F+(-F)=0,\ -F=-1\circ F$$

Нейтральный по умножению

$$F\cdot 1=F=1\cdot F,\ 1(\vec{a})=\vec{a}$$

Дистрибутивность

$$F(G+H)=FG+FH$$

Применим это к $\vec{a}$:

$$\Big(F\big(G+H\big)\Big)(\vec{a})=\Big(F\circ\big(G+H\big)\Big)(\vec{a})=F\Big(\big(G+H\big)\vec{a}\Big)=F(G(\vec{a}))+F(H(\vec{a}))=$$

$$=(FG+FH)(\vec{a})=(G+H)(F(\vec{a}))=G(F(\vec{a}))+H(F(\vec{a}))=(GF+HF)(\vec{a})$$

Утверждение 4:

Скаляр коммутирует с любым линейным оператором:

Доказательство: пользуемся линейностью F

$$(\alpha F)(\vec{a}) = \alpha(F(\vec{a})) = F(\alpha\vec{a}) = (F\alpha)(\vec{a})$$

Уточнение:

$$\Delta_n = Sa_n - 1a_n = ((S-1)\vec{a})_n \Rightarrow \Delta = S - 1 \Rightarrow S = \Delta + 1$$

Вспомним биномиальную теорему:

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} \quad (x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k 1^{n-k}$$

Лемма 5:

$$\forall F \in L(Seq) \forall \alpha \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} \quad (F+\alpha)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k F^k (\alpha)^{n-k}$$

Доказательство: индукция по n

База:

$$(F+\alpha)^0 = 1 = \sum_{k=0}^{0} C_0^0 F^0 \alpha^{0-0} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

Шаг: пользуемся предположением индукции, дитрибутивностью

$$(F+\alpha)^{n+1} = (F+\alpha)(F+\alpha)^n = (F+\alpha)\sum_{k=0}^{n} C_n^k F^k \alpha^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} F C_n^k F^k \alpha^{n-k} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n} \alpha C_n^k F^k \alpha^{n-k} \overset{\text{Утв } 4}{=} C_n^k F^{k+1} \alpha^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k F^k \alpha^{n+1-k} = \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} F^k \alpha^{n+1-k} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n} C_n^k F^k \alpha^{n+1-k} = \underset{C_{n+1}^0}{C_n^0} F^0 \alpha^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{(C_n^{k+1} + C_n^k)}_{=C_{n+1}^k} F^k \alpha^{n+1-k} + \underset{=C_{n+1}^{n+1}}{C_n^n} F^{k+1} \alpha^0 =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k F^k \alpha^{n+1-k}$$

Следствие 6: разность порядка t

$$\Delta^t = (s-1)^t = \sum_{k=0}^{t} \underbrace{C_t^k}_{=C_k^{t-k}} S^k (-1)^{t-k} = \sum_{k=0}^{t} C_t^k S^{t-k} (-1)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{t} (-1)^k C_t^k S^{t-k}$$

Следствие 7:

$$\Delta^t a_n = \sum_{k=0}^{t} (-1)^k C_t^k S^{t-k} a_n = \sum_{k=0}^{t} (-1)^k C_t^k a_{n+t-k}$$

$$\Delta^2 a_n = C_2^0 a_{n+2} - 1 C_2^1 a_{n+1} + C_2^2 a_n = a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n$$

$$\Delta^3 a_n = a_{n+3} - 3a_{n+2} + 3a_{n+1} - a_n$$

Пример:

Первая степень

$$\begin{aligned} a_n =& a + dn \\ \Delta a_n =& a_{n+1} - a_n = a + d(n+1) - a - dn = d \\ \Delta^2 a_n =& \Delta d = d - d = 0 \end{aligned}$$

Вторая степень

$$\begin{aligned} a_n =& a + bn + cn^2 \\ \Delta a_n =& a_{n+1} - a_n \\ =& c(n+1)^2 + b(n+1) - cn^2 - bn \\ =& 2cn + c + b \\ \Delta^2 a_n =& 2c(n+1) - 2cn = 2c \\ \Delta^3 a_n =& 0 \end{aligned}$$

Лемма 8:

Если $P(n)$ - многочлен степени $m > 0$, то
$\Delta P(n)$ - многочлен степени $m-1$, а $\Delta^{m+1}P(n) = 0$

Доказательство: индукция по m

База:

Шаг:

$$P(n) = \overset{\neq 0}{\alpha} n^m + \overset{\deg\leqslant m-1}{Q(n)}$$

$$\Delta P(n) = P(n+1) - P(n) = \alpha(n+1)^m + Q(n+1) - \alpha n^m - Q_n =$$

$$= \alpha\left((n+1)^m - n^m\right) + \Delta Q(n) = \alpha(C_m^1 n^{m-1} + C_m^2 n^{m-2} + \dots) + \overset{\text{по ПИ }\deg\leqslant m-2}{Q'(n)}$$

Итак, степень $m-1$.

Следствие:

$\deg(\Delta^m P(n)) = 0 \Rightarrow \Delta^m P(n) = const \Rightarrow \Delta^{m+1}P(n) = 0.$ Отсюда рассмотрим:

$$0 = \Delta^{m+1}a_n = \sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k C_{m+1}^k a_{n+m+1-k}$$

$$a_{n+m+1} = \sum_{k=1}^{m+1}(-1)^{k-1}C_{m+1}^k a_{n+m+1-k}$$

Следствие 9:

Если $a_n = P(n)$, многочлен степени $m > 0$, то

$$a_{n+m+1=\sum_{k=1}^{m+1}}(-1)^{k-1}C_{m+1}^k a_{n+m+1-k}$$

Пример:

$\deg a_n = 1 \Rightarrow a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$
$\deg a_n = 2 \Rightarrow a_{n+3} = 3a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n$

Следствие 10:

$$S^t = (\Delta + 1)^t = \sum_{k=0}^{t} C_t^k \Delta^k$$

$$a_{n+t} = S^t a_n = \sum_{k=0}^{t} C_t^k \Delta^k a_n = \sum_{k=0}^{t} \frac{\overbrace{t(t-1)\dots(t-k+1)}^{t^{(k)}}}{k!} \Delta^k a_n =$$

$$= a_n + \frac{\Delta a_n}{1!} t^{(1)} + \frac{\Delta^2 a_n}{2!} t^{(2)} + \dots + \frac{\Delta^t a_n}{t!} t^{(t)}$$

Лекция 10 мая.

Воспоминания:

(1). $\Delta^t a_n = \sum\limits_{k=0}^{t} (-1)^k C_t^k a_{n+t-k}$

$\Delta^3 a_n = a_{n+3} - 3a_{n+2} + 3a_{n+1} - a_n$

(2). если a_n - многочлен степени $m > 0$, то $\Delta^{m+1} a_n = 0$.

Из этих фактов:

$$0 = \Delta^{m+1} a_n = \sum_{k=0}^{m+1} (-1)^k C_{m+1}^k a_{n+m+1-k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{m+1} (-1)^{k-1} C_{m+1}^k a_{n+m+1-k} = a_{n+m+1}$$

При $m = 2$ получим рекуррентное соотношение:

$$a_{n+3} = 3a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n$$

Определение:

Пусть $\vec{a} = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ удовлетворяет рекуррентному сооношению φ порядка $k > 0$, тогда

$$\varphi : \mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R} \wedge \forall n \ a_{n+k} = \varphi(a_{n+k-1},\ a_{n+k-2}, \dots,\ a_n,\ n)$$

Определение:

Если φ не зависит от n, $\big(\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^k \ \forall n,\ m \ \varphi(\vec{x},\ n) = \varphi(\vec{x},\ m)\big)$, то такое рекуррентное соотношение называется стационарным.

Попробуем привести нестационарное к стационарному, выразим факториал.

$$\begin{cases} a_{n+1} = (n+1) a_n \\ a_{n+2} = (n+2) a_{n+1} \end{cases} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} + 1 = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{n+2} = \frac{a_{n+1}^2 + a_{n+1}a_n}{a_n}$$

Получили стационарное рекуррентное соотношение порядка 2.

Рассмотрим последовательность $a_{n+1} = a_n$. Ему удовлетворяют все константы (и только они).

Добавим условие:

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n \\ a_0 = \alpha \end{cases} \Rightarrow \exists!\text{последовательность}: \ \forall n \ a_n = \alpha$$

Теорема 1:

Пусть φ - рекуррентное соотношение порядка k и $\forall i \ \alpha_i \in \mathbb{R}$, тогда рекуррентная задача

$$\begin{cases} \forall n \ a_{n+k} = \varphi(a_{n+k-1}, \dots, \ a_n, \ n) \\ a_0 = \alpha_0, \dots, \ a_{k-1} = \alpha_{k-1} \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

Доказательство:

Существование очевидно (по первым k членам последовательность восстанавливается), то есть φ даёт "рецепт" вычисления последовательности a_n.

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ удовлетворяют условию. Допустим $\vec{a} \neq \vec{b} \Rightarrow \exists n \ a_n \neq b_n \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists n \ (a_n \neq b_n \wedge \forall m < n \ a_m = b_m)$

1 случай. $n < k$

$a_n = \alpha_n = b_n \Rightarrow \perp$

2 случай. $n \geqslant k$

$a_{n+k} = \varphi(a_{n+k-1,\dots, \ a_n, \ n})$

$a_{n+k} = \varphi(b_{n+k-1,\dots, \ b_n, \ n})$

По предположению индукции все аргументы функции равны, значит равны a_{n+k} и b_{n+k}

Линейное стационарное рекуррентное соотношение

$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \dots + c_k a_n + c_0$

Если $c_0 = 0$, то соотношение однородное.

Теорема 2:

$\exists c'_1, \dots,\ c'_{k+1} \in \mathbb{R},\ \exists \beta_0, \dots,\ \beta_k \in \mathbb{R}$

$$(*) \begin{cases} a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + \dots + c_k a_n + c_0 \\ a_0 = \alpha_0, \dots,\ a_{k-1} = \alpha_{k-1} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\#) \begin{cases} a_{n+k+1} = c'_1 a_{n+k} + \dots + c'_{k+1} a_n \\ a_0 = \beta_0, \dots,\ a_{k-1} = \beta_{k-1},\ a_k = \beta_k \end{cases}$$

$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \dots + c_k a_n + c_0$
$a_{n+k+1} = a_{(n+1)+k} = c_1 a_{n+k} + c_2 a_{n+k-1} + \dots + c_k a_{n+1} + c_0$
Домножм первое на -1, сложим со вторым:

$$a_{n+k+1} = \overbrace{(c_1+1)}^{c'_1} a_{n+k} + \overbrace{(c_2-c_1)}^{c'_2} a_{n+k-1} + \overbrace{(c_3-c_2)}^{c'_3} a_{n+k-2} + \dots$$
$$\dots + \underbrace{(c_k - c_{k-1})}_{c'_k} a_{n+1} - \underbrace{c_k}_{c'_{k+1}} a_n + 0$$

Тогда $\beta_0 := \alpha_0, \dots,\ \beta_{k-1} = \alpha_{k-1},\ \beta_k = c_1\alpha_{k-1} + c_2\alpha_{k-2} + \dots + c_k\alpha_o + c_0$
У $(\#)$ не может быть других решений, так как у неё может быть не более одного решения, а решение $(*)$ является решением $(\#)$, значит их решения совпадают.

Пример:

$$\begin{cases} a_{n+1} = c a_n \\ a_0 = \alpha \end{cases} \Rightarrow a_1 = c\alpha,\ a_2 = c^2\alpha,\ a_3 = c^3\alpha, \dots$$

Видно, что $a_n = c^n\alpha$ - это решение, по теореме 1 других решений нет.

В терминах линейных операторов

$a_{n+1} - c a_n = 0 \Leftrightarrow \exists u\ a_n = c^n u$
$S a_n - c a_n = 0$
$\forall n\ (S-c) a_n = 0$
$(S-c)\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \in \ker(S-c)$
$\ker(S-c) = \{u,\ (1,\ c,\ c^2,\ c^3, \dots) \mid u \in \mathbb{R}\} = \langle (1,\ c,\ c^2, \dots) \rangle$,
то есть в ядре находятся всевозможные геометрические последовательности.

Пример: порядок 2.

$$\begin{cases} a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n \\ a_0 = \pi, \ a_1 = e \end{cases}$$

Рассмотрим характеристичекий многочлен $x^2 - 5x + 6$, то $\forall n \ x^{n+2} = 5x^{n+1} - 6x^n$, то есть $a_n = x^n$ удовлетворяет рекуррентному соотношению
$x_{1,\ 2} = \frac{5+\pm\sqrt{25-24}}{2} = 3,\ 2$
Итак, последовательности $2^n,\ 3^n$ удовлетворяют рекуррентному соотношению.
Легко видеть, что $\forall u,\ v \in \mathbb{C}\ a_n = u2^n + v3^n$ также удовлетворяет рекуррентному соотношению.
$a_{n+2} = u2^{n+2} + v3^{n+2} = u(6\cdot 2^{n+1} - 6\cdot 2^n) + v(5\cdot 3^{n+1} - 6\cdot 3^n) = 5(u\cdot 2^{n+1} + v\cdot 3^{n+1}) - 6(u\cdot 2^n + v3^n) = 5a_{n+1} - 6a_n$
Подберём $u,\ v$ так, что

$$\begin{cases} u + v = u2^0 + v3^0 = a_0 = \pi \\ 2u + 3v = u2^1 + v3^1 = a_1 = e \end{cases}$$

$\det = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 \neq 0,\ 2u + 3(\pi - u) = e \Rightarrow \begin{cases} u = 3\pi - e \\ v = e - 2\pi \end{cases}$
Ответ: $a_n = (3\pi - e)2^n + (e - 2\pi)3^n$
В терминах операторов:

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$$

$$S^2 a_n - 5Sa_n + 6a_n = 0$$

$$(S^2 - 5S + 6)\vec{a} = \vec{0}$$

$$(S-3)(S-2)\vec{a} \Rightarrow \begin{cases} \ker(S-2)(S-3) \supseteq \ker(S-3) = \langle (1,\ 3,\ 3^2, \dots) \rangle \\ \ker(S-3)(S-2) \supseteq \ker(S-2) = \langle (1,\ 2,\ 2^2, \dots) \rangle \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \big\langle (1,\ 2,\ 2^2, \dots),\ (1,\ 3,\ 3^2, \dots) \big\rangle \subseteq \ker(S-2)(S-3)$$