

Лекции по алгебре 4 модуль.

Андрей Тищенко

2023/2024 гг.

Лекция 3 апреля

Квадратичные формы

Определение:

Многочлен второй степени от n переменных, то есть выражение вида

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j$$

Где $a_{ij} \in \mathbb{R}$, называют квадратичной формой.

Замечание:

Многочлен $q(x)$ называется однородным степени k , если

$$\forall \alpha \quad q(\alpha x) = \alpha^k q(x)$$

Замечание:

Квадратичная форма - это отображение $q : V \longrightarrow \mathbb{R}$ (вектор в число)

Рассмотрим n -мерное векторное пространство V над \mathbb{R} . Зафиксируем в нём базис e_1, \dots, e_n :

Тогда у любого $x \in V$ есть набор координат в этом базисе x_1, \dots, x_n .

То есть $\forall x \in V : x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

Пусть $x^e = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow q(x)$ можно представить в виде $q(x) = (x^e)^T A x^e$, где

$A = (a_{ij})$ матрица квадратичной формы $q(x)$ в базисе e_1, \dots, e_n ,

a_{ij} - коэффициенты квадратичной формы.

Пример:

В \mathbb{R}^3

$$q(x) = x_1^2 + 8x_1x_3 = x_1^2 + 4x_1x_3 + 4x_3x_1 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Замечание:

Матрица квадратичной формы всегда симметрическая. То есть

$$A^T = A$$

Замечание:

По любой билинейной форме можно построить квадратичную форму, взяв $q(x) = b(x, x)$. Тогда $a_{ij} = \frac{b_{ij} + b_{ji}}{2}$

Пример:

$$b(x, y) = x_1y_1 + ex_1y_3 + 5x_3y_1 \Rightarrow q(x) = b(x, x) = x_1^2 + 8x_1x_3$$

Определение:

Билинейная форма называется симметрической, если

$$b(x, y) = b(y, x), \text{ например, скалярное произведение}$$

Называется кососимметрической, если

$$b(x, y) = -b(y, x)$$

Пример:

$$\text{Кососимметрическая билинейная форма с матрицей } B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow B^T = -B$$

Замечание:

По любой квадратичной форме можно построить симметрическую билинейную форму. Это называется поляризацией квадратичной формы.

$$b(x, y) = \frac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)]$$

Полярная билинейная форма к $q(x)$ (имеет ту же матрицу, что и $q(x)$), $b(x, x) = q(x)$

Утверждение:

При переходе от базиса e к базису e' в линейном пространстве V матрица квадратичной формы меняется так:

$$A' = C^T \cdot A \cdot C, \text{ "Стас" без рофлов, реально Стасямба конкретная}$$

A' - матрица квадратичной формы в новом базисе e'

C - матрица перехода от базиса e к базису e'

Доказательство:

Связь координат вектора:

$x = Cx'$, так как $x' = C^{-1}x$ - формула изменения координат вектора при замене базиса.

Тогда $\forall x \quad q(x) = x^T A x = (Cx')^T A (Cx') = (x')^T C^T A C x' = (x')^T A' x'$, значит $A' = C^T A C$ (Можно в качестве x брать все векторы канонического базиса $(0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0)$ и показать совпадение матричных элементов)

Определение:

Если квадратичная форма в некотором базисе записана в виде $q(x) = x^T A x$, то есть если A - матрица квадратичной формы в некотором базисе, то $\text{Rg } A$ называется рангом квадратичной формы $q(x)$. Почему это определение корректно? То есть почему $\text{Rg } A$ не зависит от базиса.

Лемма:

Пусть $A, U \in M_n(\mathbb{R})$, $\det U \neq 0$. Тогда $\text{Rg } A \cdot U = \text{Rg } A = \text{Rg } U \cdot A$, то есть при умножении на невырожденную матрицу ранг не меняется.

Доказательство:

$\text{Rg } A \cdot U \leq \text{Rg } A$, так как столбцы матрицы AU есть линейные комбинации столбцов матрицы A .

Ранг матрицы по теореме о ранге матрицы равен максимальному числу линейно независимых столбцов не могло вырасти, так как все столбцы AU линейно выражаются через столбцы исходной матрицы.

Покажем $\text{Rg } A \cdot U \geq \text{Rg } A$.

$$\text{Rg } A = \text{Rg } A(U \cdot U^{-1}) = \text{Rg}(AU)U^{-1} \leq \text{Rg}(AU)$$

$$\text{Rg } U \cdot A = \text{Rg}(UA)^T = \text{Rg } A^T U^T = \text{Rg } A^T = \text{Rg } A = \text{Rg } AU$$

Утверждение: (об инвариантности ранга квадратичной формы)

Пусть $q(x)$ - квадратичная форма на линейном пространстве V .
Пусть $a = (a_1, \dots, a_n)$ и $b = (b_1, \dots, b_n)$ - базисы в V .
Пусть A - матрица квадратичной формы в базисе a
Пусть B - матрица квадратичной формы в базисе b
Тогда $\text{Rg } A = \text{Rg } B$ и ранг квадратичной формы корректно определен.

Доказательство:

Было доказано, что $B = C^T A C \Rightarrow$ по лемме, так как мы умножаем матрицу A на матрицы C^T слева и на C справа, то $\text{Rg } B = \text{Rg } A$, ч.т.д.

Определение:

квадратичную форму $q(x)$ будем называть положительно определённой, если

$$\forall x \neq 0 \quad q(x) > 0$$

отрицательно определённой, если

$$\forall x \neq 0 \quad q(x) < 0$$

знакопеременной, если

$$\exists x, y \in V : q(x) < 0 < q(y)$$

Пример:

$q_1(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2$ на \mathbb{R}^3 - положительно определена

$q_2(x) = x_1^2 - x_3^2$ - знакопеременная ($y = (1 \ 0 \ 0)$, $x = (0 \ 0 \ 1) \Rightarrow q(x) < 0 < q(y)$).
 $q_3(x) = -x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2$ - отрицательно определена на \mathbb{R}^3 ,

но $q'_3(x) = -x_1^2 - 3x_3^2$ - не является отрицательно определённой, так как

$$q'_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 - \text{это неположительно определённая квадратная форма.}$$

Теорема: (Критерий Сильвестра положительной определённости)

Пусть A - матрица квадратичной формы $q(x)$ в некотором базисе. Тогда

$q(x)$ положительно определена \Leftrightarrow последовательность главных угловых миноров в A строго положительна

$$\text{То есть } \begin{cases} \Delta_1 = a_{11} > 0 \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0 \\ \dots \\ \Delta_n = \det A > 0 \end{cases}$$

Следствие:

$$\text{Квадратичная форма отрицательно определена} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_1 < 0 \\ \Delta_2 > 0 \\ \dots \\ (-1)^n \Delta_n > 0 \end{cases}$$

То есть знаки главных угловых миноров чередуются, начиная с минуса.

Доказательство:

Так как A - отрицательно определена $\Leftrightarrow -A$ положительно определена
 $\det(-A) = (-1)^n \det A$, ч.т.д.

Пример:

$$q(x) = -x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2 \text{ - отрицательно определённая}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}$$

Определение:

Квадратичную форму $q(x) = \alpha_1 x_1^2 + \dots + \alpha_n x_n^2$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$, то есть в квадратичной форме нет попарных произведений вида $Cx_i x_j$, называют квадратичной формой канонического вида.

Если $\alpha_i \in \{-1, 0, 1\}$, то канонический вид называют нормальным.

Замечание:

Матрица квадратичной формы в каноническом виде является диагональной.

Лекция 10 апреля

$x \in V \quad q(x) = \alpha_1 x_1^2 + \dots + \alpha_n x_n^2 \quad (\alpha_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n})$ - канонический вид.
Если все коэффициенты α_i являются элементами множества $\{-1, 0, 1\}$,
то это называется нормальным видом.

Утверждение. Любую квадратичную форму можно привести к каноническому и к нормальному виду.

Методы приведения

1. Метод Лагранжа.

Главная идея состоит в последовательном выделении полных квадратов.
При этом на каждом шаге под квадрат полностью уходит одна переменная
(невыполнение этого условия является частой ошибкой при решении задач).
Получается, что не более чем за n шагов алгоритм даст канонический вид.

Если на некотором этапе переменных в квадрате не осталось, но есть выражение вида $c \cdot x_i \cdot x_j \quad (i \neq j)$, то делают замену переменных:

$$\begin{cases} x_i = x'_i - x'_j \\ x_j = x'_i + x'_j \end{cases} \Rightarrow c x_i x_j = c ((x'_i)^2 - (x'_j)^2)$$

Получили новые квадраты, продолжаем выполнение метода (то есть выделяем полный квадрат при необходимости).

$$\alpha_i x_i^2 + 2x_i \underbrace{(\beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n)}_{\text{нет } x_i} = \alpha_i \left(x_i^2 + 2x_i \frac{\beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n}{\alpha_i} + \left(\frac{\beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n}{\alpha_i} \right)^2 \right) - \underbrace{\frac{(\beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n)^2}{\alpha_i}}_{\text{уже без } x_i}$$
$$= \alpha_i \underbrace{\left(x_i + \frac{\beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n}{\alpha_i} \right)}_{\text{заменяем на } y_i}$$

То есть x_i полностью ушла под квадрат.

2. Метод Якоби. (может быть пройдем на семинаре)

3. Симметричный Гаусс. (может быть пройдем на семинаре)
4. Метод приведения к главным осям (только для канонического).
(может быть пройдем на семинаре)

Теорема. Закон инерции квадратичной формы

Для любых двух канонических видов одной квадратичной формы. $q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_k x_k^2$, $\lambda_i \neq 0$, $i = \overline{1, k}$
 $q(y) = \mu_1 y_1^2 + \dots + \mu_m y_m^2$, $\mu_j \neq 0$, $j = \overline{1, m}$
 где $x, y \in V$

То есть это запись одной и той же квадратичной формы в разных базисах.

1. $k = m = \text{Rg } A \leftarrow$ равно рангу квадратичной формы. При этом $k = m$ может быть меньше размерности V , то есть $k = m \leq n = \dim V$
2. Количество положительных λ_i совпадает с количеством положительных μ_j . Это называется положительный индекс инерции квадратичной формы.

Обозначение: i_+

3. Количество отрицательных λ_i совпадает с количеством отрицательных μ_i и называется отрицательным индексом инерции.

Обозначение: i_-

Определение: Сигнатурой квадратичной формы называют два числа (i_+, i_-) .

Замечание: Если у двух квадратичных форм совпадают сигнатуры, то существует невырожденная линейное преобразование (=замена координат, =замена базиса), которое одну квадратичную форму переводит в другую.
 Сначала обе в нормальный вид, он совпадает, так как одинаковое количество $+1$ и -1 , и для одной преобразование в обратную сторону.

Замечание: Если у двух квадратичных форм разные сигнатуры (i_+, i_-) , то одну нельзя перевести в другую невырожденным линейным преобразованием.
 То есть квадратичные формы разные.

Замечание: $\text{Rg } A = i_+ + i_-$. Иногда вводят величину $S = i_+ - i_-$. Знание $\text{Rg } A$ и S эквивалентно знанию i_+ и i_- , и поэтому число S иногда называют сигнатурой.

Линейные отображения и линейные операторы

Пусть V_1 и V_2 - два линейных пространства над полем F

Определение: Отображение $\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$ называется линейным, если

1. $\forall x, y \in V_1, \varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$
2. $\forall x \in V_1, \forall \alpha \in F \varphi(\alpha x) = \alpha \varphi(x)$

Замечание: эти два условия равносильны $\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha \varphi(x) + \beta \varphi(y)$

Замечание: Линейное отображение это гомоморфизм линейных пространств, и есть обозначение $\varphi \in \text{Hom}(V_1, V_2)$

Определение: Если $V_1 = V_2 = V$ (пространства совпадают), то линейное отображение φ называется линейным оператором (л. о.)

Пусть e_1, \dots, e_n - базис в V_1 , $\dim V_1 = n$

f_1, \dots, f_m - базис в V_2 , $\dim V_2 = m$

Рассмотрим векторы $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n) \in V_2$ (образы базисных векторов первого пространства под действием φ), и разложим их по базису второго пространства f_1, \dots, f_m :

$$\begin{cases} \varphi(e_1) = a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + \dots + a_{m1}f_m \\ \vdots \\ \varphi(e_n) = a_{1n}f_1 + a_{2n}f_2 + \dots + a_{mn}f_m \end{cases}$$

Определение: Матрица линейного отображения в паре базисов (e_1, \dots, e_n) и (f_1, \dots, f_m) это матрица:

$$[\varphi]_{ef} = A_{ef} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\dim V_1} \Bigg\} \dim V_2$$

По столбцам стоят координаты образов векторов первого базиса при разложении по второму базису.

Определение: Пусть $\varphi : V_1 \longrightarrow V$ - линейный оператор и e_1, \dots, e_n - базис.

$$\text{Пусть } \begin{cases} \varphi(e_1) = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \dots + a_{n1}e_n \\ \vdots \\ \varphi(e_n) = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \dots + a_{nn}e_n \end{cases}$$

То есть образы базисных векторов под действием φ разложим по тому же базису.

Тогда:

$$A_e = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Называется матрицей линейного оператора

Пример: $\varphi(x) = \text{Пр}_L x$, где $L = \mathcal{L}(\bar{i})$ в V_3 , где \bar{i} - ось абсцисс.

Рассмотрим стандартный базис $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ в V_3 .

$$\begin{cases} \varphi(i) = i = 1 \cdot i + 0 \cdot j + 0 \cdot k \\ \varphi(j) = 0 \\ \varphi(k) = 0 \end{cases} \Rightarrow A_{\{i, j, k\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Теорема: (о том, что действие линейного оператора полностью определяется его матрицей)

Пусть φ - линейный оператор в пространстве V

$e = (e_1, \dots, e_n)$ - базис в V , $x \in V$ - вектор.

$$x^e = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \text{столбец координат вектора } x \text{ в базисе } e, \text{ то есть } x =$$

$$x_1e_1 + \dots + x_ne_n$$

Пусть A_e - матрица линейного оператора φ в базисе e , тогда:

$$(\varphi(x))^e = A_e \cdot x^e, \text{ (матричное произведение)}$$

Доказательство: $\varphi(x) = \varphi(x_1e_1 + \dots + x_ne_1) \overset{\text{по линейности}}{=} x_1\varphi(e_1) + \dots + x_n\varphi(e_n) \overset{\text{определение матрицы л.о.}}{=} x_1(a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \dots + a_{n1}e_n) + \dots + x_n(a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \dots + a_{nn}e_n) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)e_1 + \dots + (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n)e_n$ - получили разложение $\varphi(x)$ по базису e

$$\Rightarrow (\varphi(x))^e = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{pmatrix}$$

Но это результат умножения A_e на $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x^e$, то есть $(\varphi(x))^e =$

$A_e \cdot x^e$, ч.т.д.

Замечание: Для линейных отображений аналогично

$$(\varphi(x))^f = A_{ef}x^e$$

Замечание: При фиксированном базисе есть биекция между линейными операторами (линейными отображениями) и матрицами $n \times n$, $(m \times n)$.

Лекция 17 апреля.

Линейные операторы

(Напоминание) Пусть $\varphi : V \longrightarrow V$ - линейный оператор в пространстве V , фиксируем базис $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ в V .

Тогда $\exists!$ матрица линейного оператора A_e в базисе e , что

$$\forall x \in V \quad (\varphi(x))_{n \times 1}^e = A_e \cdot x_{n \times 1}^e$$

Для линейного отображения $\phi : V_1 \longrightarrow V_2$ в фиксированной паре базисов e, f

$$(\phi(x))_{m \times 1}^f = A_{ef} \cdot x_{n \times 1}^e$$

Утверждение: Пусть A - матрица линейного оператора φ в базисе e .

A' - матрица линейного оператора φ в базисе e'

Пусть T - матрица перехода в V от базиса e к базису e' .

Тогда $A' = T^{-1} \cdot A \cdot T$

Доказательство: По доказанному:

$$y = A \cdot x, \quad y = (\varphi(x))^e \tag{1}$$

$$y' = A' \cdot x', \quad y' = (\varphi(x))^{e'} \tag{2}$$

$y = T \cdot y'$ (так как $y' = T^{-1}y$) и $x = Tx'$ - формула изменения координат вектора при замене базиса.

Подставляем в (1): $T \cdot y' = A \cdot T \cdot x'$, но T - невырожденная матрица (так как она является матрицей перехода), домножим слева на $T^{-1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow y' = \underbrace{T^{-1} \cdot A \cdot T}_{A'} \cdot x', \text{ сравним с (2)} \Rightarrow A' = T^{-1} \cdot A \cdot T, \text{ так как}$$

матрица линейного оператора в заданном базисе единственная.

Утверждение: Пусть φ - линейное отображение линейного пространства V_1 ($\dim V_1 = n$) в линейное пространство V_2 , ($\dim V_2 = m$).

Пусть $A_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}$ - матрица линейного отображения в паре базисов ε_1 в пространстве V_1 и ε_2 в пространстве V_2 .

Тогда, если T_1 - Это матрица перехода в V_1 от базиса ε_1 к базису ε'_1 .

T_2 - матрица перехода в V_2 от ε_2 к ε'_2 .

Тогда имеет место следующее равенство:

$$A_{\varepsilon'_1 \varepsilon'_2} = \underbrace{T_2^{-1}}_{m \times m} \cdot \underbrace{A_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}}_{m \times n} \cdot \underbrace{T_1}_{n \times n}$$

Доказательство: Пусть y - образ x под действием φ (то есть $y = \varphi(x)$), тогда:

$$(1) \quad y^{\varepsilon_2} = A_{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \cdot x^{\varepsilon_1} \leftarrow \text{в старом базисе}$$

$$(2) \quad y^{\varepsilon'_2} = A_{\varepsilon'_1 \varepsilon'_2} \cdot x^{\varepsilon'_1} \leftarrow \text{в новом базисе}$$

$$x^{\varepsilon_1} = T_1 \cdot x^{\varepsilon'_1}$$

$$y^{\varepsilon_2} = T_2 \cdot y^{\varepsilon'_2} \leftarrow \text{формула изменения координат вектора}$$

Подставим в (1), получим:

$$T_2 y^{\varepsilon'_2} = A_{\varepsilon_1 \varepsilon_2} T_1 x^{\varepsilon'_1}. \text{ Домножим на } T_2^{-1} \text{ слева, так как } T_2 \text{ - невырожденная} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^{\varepsilon'_2} = \underbrace{T_2^{-1} A_{\varepsilon_1 \varepsilon_2} T_1}_{A_{\varepsilon'_1 \varepsilon'_2}} x^{\varepsilon'_1}, \text{ сравнивая с (2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_{\varepsilon'_1 \varepsilon'_2} = T_2^{-1} \cdot A_{\varepsilon_1 \varepsilon_2} T_1$$

Определение: Квадратные матрицы A и B называются подобными, если существует невырожденная матрица C :

$$B = C^{-1}AC \quad (\det C \neq 0)$$

Замечание: Матрицы линейных операторов в разных базисах подобны между собой.

Утверждение: Определители подобных матриц равны.

Доказательство: Пусть A и B подобны, то есть $B = C^{-1}AC \Rightarrow$

$$\det B = \det (C^{-1}AC) = \det C^{-1} \det A \det C = \frac{\det C}{\det C} \det A = \det A$$

Замечание: Это означает, что $\det A$ - определитель матрицы линейного оператора не зависит от выбора базиса, то есть является инвариантом замены координат (и $\text{Rg } A$ - тоже инвариант)

Определение: Ядром линейного отображения $\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$ называется множество:

$$\ker \varphi = \{x \in V_1 \mid \varphi(x) = 0\} = \varphi^{-1}(0) \subseteq V_1$$

Образом линейного отображения φ называется множество

$$\text{Im } \varphi = \{x \in V_2 \mid \exists y \in V_1 : \varphi(y) = x\} = \varphi(V_1) \subseteq V_2$$

Замечание: $\ker \varphi$ и $\text{Im } \varphi$ являются линейными подпространствами в V_1 и V_2 соответственно (проверить замкнутость по операциям).

Утверждение: Пусть $\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$ - линейное отображение.

Тогда $\dim \ker \varphi + \dim \text{Im } \varphi = n = \dim V_1$

Доказательство: Зафиксируем базис $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ в V_1

$\forall x \in V_1$ можно представить в виде $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

$\varphi(x) = x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n)$, но $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ - столбцы матрицы линейного отображения (если фиксировать базис и в V_2).

$\text{Im } \varphi = \mathcal{L}(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$ (линейная оболочка). \Rightarrow

$\Rightarrow \dim \text{Im } \varphi = \text{Rg } A$ - ранг матрицы линейного отображения.

Ядро φ описывается однородной СЛАУ $Ax = 0$, размерность пространства её решений (то есть число векторов ФСР) равна $k = n - \text{Rg } A$, где

k - размерность ядра,

n - размерность образа.

Итак, $\dim \ker \varphi + \dim \text{Im } \varphi = n$, где $n = \dim V_1$.

Замечание: Если $\varphi : V \longrightarrow V$ - линейный оператор (то есть $\ker \varphi, \text{Im } \varphi \subseteq V$), то вообще говоря,

$V \neq \ker \varphi + \text{Im } \varphi$, хотя и $\dim \ker \varphi + \dim \text{Im } \varphi = \dim V$

Пример: Рассмотрим линейное пространство $\mathbb{R}_n[x]$ - пространство многочленов от x , $\deg f \leq n$ с вещественными коэффициентами и оператор $\mathcal{D} : f \mapsto f' \leftarrow$ производная, $\mathcal{D} : \mathbb{R}_n[x] \rightarrow \mathbb{R}_n[x]$
 $\dim \mathbb{R}_n[x] = n + 1$, так как $\mathbb{R}_n[x] = \mathcal{L}\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$
 $\text{Im } \mathcal{D} = \mathbb{R}_{n-1}[x]$, $\dim \text{Im } \mathcal{D} = n$
 $\ker \mathcal{D} = \mathcal{L}(1)$ - константы, $\dim \ker \mathcal{D} = 1$,
но $\ker \mathcal{D} \subseteq \text{Im } \mathcal{D}$, но
 $\dim \ker \mathcal{D} + \dim \text{Im } \mathcal{D} = n + 1 = \dim \mathbb{R}_n[x]$

Действия с линейными операторами и их матрицами

Пусть A и B - линейные операторы на линейном пространстве V над полем F , тогда

Определение: $(A + B)(x) = A(x) + B(x)$
 $(\lambda A)(x) = \lambda A(x)$ - умножение на число $\lambda \in F$
 $(A \cdot B)(x) = A(B(x))$ - умножение линейного оператора (композиция)

Замечание: $A+B$, $\lambda \cdot A$, $A \cdot B$ - снова линейные операторы (провека по определению)

Утверждение: Пусть фиксирован базис $e = \{e_1, \dots, e_n\}$. Тогда:

$$\begin{cases} (1) (A + B)_e = A_e + B_e \\ (2) (\lambda A)_e = \lambda A_e \\ (3) (A \cdot B)_e = A_e \cdot B_e \end{cases}$$

Доказательство (3): $\left((A \cdot B)(x)\right)^e = A_e \cdot (B(x))^e = A_e \cdot B_e x^e = (AB)_e x^e \Rightarrow$
 $\Rightarrow (AB)_e = A_e B_e$, так как матрица линейных операторов в фиксированном базисе единственна.

Собственные векторы и собственные числа

Определение: Число λ называется собственным числом (или собственным значением, то есть с. з.) линейного оператора $\varphi : V \longrightarrow V$, где V - линейное пространство, если \exists вектор $x \in V$, $x \neq 0$, такой что $\varphi(x) = \lambda \cdot x$. При этом x называется собственным вектором (с. в.), отвечающим собственному значению λ .

Замечание: Если x - собственный вектор, отвечающих собственному значению λ , то $\forall \alpha \in F$, $\alpha \neq 0$, αx - тоже собственный вектор, отвечающий собственному значению λ $\varphi(\alpha x) = \alpha \varphi(x) = \alpha \lambda x = \lambda(\alpha x) \Rightarrow \alpha x$ - собственный вектор.

Замечание: Другими словами, собственный вектор - ненулевой вектор, остающийся коллинеарным (либо равным 0) самому себе под действием линейного оператора φ

Пример 1: Пусть $\text{Пр}_{Ox} : V_2 \longrightarrow V_1$ ($V_2 \cong \mathbb{R}^2$) - линейный оператор проекции на Ox в плоскости V_2 . Все векторы $\in Ox$, отличные от 0 - собственные векторы.

Например, $\vec{i} = (1, 0)$

$\varphi(\vec{i}) = i$ - собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda_1 = 1$

$\varphi(\vec{j}) = 0 \Rightarrow j$ - собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda_2 = 0$

В базисе $\{i, j\}$ - базис из собственных векторов. Матрица линейного оператора $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ - диагональная матрица.

$V_2 = Ox \oplus Oy$

Бывает, что нет собственных значений и собственных векторов для линейного оператора

Лекция 24 апреля

Задача:

Есть 10000 человек.

Каждый день 15% здоровых заболевают и 10% больных выздоравливают (можно болеть повторно).

В первый день заболело 100 человек.

A - линейный оператор ежедневной динамики.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = A^n(x_0), \quad x_0 = \begin{pmatrix} 9900 \\ 100 \end{pmatrix}$$

$A^n - ?$

Определение:

Для произвольной квадратной матрицы A определитель

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$$

Называется характеристическим многочленом матрицы A , а уравнение $\chi_A(\lambda) = 0$ - многочлен степени n

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \chi_A(\lambda) = \det \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2)$$

Утверждение:

Характеристические уравнения подобных матриц совпадают.

Доказательство:

A и A' подобны, если существует T , $\det T \neq 0$: $A' = T^{-1}AT$

$$\begin{aligned} \chi_{A'}(\lambda) &= \det(A' - \lambda E) = \det(T^{-1}AT - \lambda T^{-1}ET) = \det(T^{-1}(A - \lambda E)T) = \\ &= \det T^{-1} \det(A - \lambda E) \det T = \det(A - \lambda E) = \chi_A \end{aligned}$$

Следствие:

Характеристические многочлены для матриц линейных операторов в разных базисах совпадают (сами матрицы могут различаться).

То есть корректно говорить о характеристическом многочлене для линейного оператора (то есть он инвариантен при замене базиса).

Определение:

Множество всех собственных значений линейного оператора называют спектром линейного оператора.

Теорема:

λ - собственное значение линейного оператора $\Leftrightarrow \lambda$ - корень характеристического уравнения линейного оператора (над алгебраически замкнутым полем (например \mathbb{C}) или в случае, когда корни характеристического уравнения лежат в том же поле, над которым рассматривается линейный оператор).

Доказательство:

Необходимость :

Дано: λ - собственное значение линейного оператора A

Доказать: λ - корень $\chi_A(\lambda) = 0$

По определению $\exists x \neq 0$ $A(x) = \lambda \cdot x$, то есть $A(x) = \lambda \cdot I(x)$, где $I(x)$ - тождественный линейный оператор.

$$(A - \lambda I)(x) = 0 \quad (*)$$

Запишем равенство $(*)$ в некотором базисе e :

$$(A_e - \lambda E) \cdot x^e = 0$$

Это однородное СЛАУ с ненулевым решением, то есть по критерию существования ненулевых решений $\det(A_e - \lambda E) = 0$, а это и есть $\chi_A(\lambda) = 0$

Достаточность :

Дано: λ - корень $\chi_A(\lambda) = 0$

Доказать: λ - собственное значение линейного оператора A

Если λ - корень, то в заданном базисе e выполнено равенство

$$\det(A_e - \lambda E) = 0$$

То есть однородное СЛАУ $(A_e - \lambda E)x^e = 0$ имеет ненулевое решение (по тому же критерию) и соответственно выполняется (*)

$$(A - \lambda I)(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = \lambda x \quad (x \neq 0)$$

То есть x - собственный вектор, отвечающий собственному значению λ , ч.т.д.

Пример:

$$\chi_A(\lambda) = \lambda(\lambda - 2) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases} \text{ - спектр линейного оператора } A$$

Определение:

Алгебраической кратностью собственного значения λ называется его кратность как корня характеристического уравнения.

Обозначение:

m_i - алгебраическая кратность собственного значения λ_i

Пример:

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - 5)^3(\lambda - 2)^2$$

Тогда будет верно:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 5 \leftarrow m_1 = 3 \\ \lambda_2 = 2 \leftarrow m_2 = 2 \end{cases}$$

Определение:

Пусть $A : V \rightarrow V$ - линейный оператор λ - собственное значение линейного оператора A . Тогда множество

$$V_\lambda = \{x \in V \mid Ax = \lambda x\}$$

называется собственным подпространством отвечающим собственному значению λ .

Замечание:

V_λ является линейным подпространством в V (состоящим из собственных векторов, отвечающих собственным значениям λ , и нулевого вектора).

Доказательство:

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow (A - \lambda E) \cdot x = 0$$

То есть $V_\lambda = \ker(A - \lambda I)$ линейный оператор с матрицей $(A - \lambda E)$
 $\ker B$ любого линейного оператора B является подпространством в V
(проверить замкнутость).

Определение:

Размерность собственного подпространства V_λ называется геометрической кратностью собственного значения λ

Обозначение:

s_i - геометрическая кратность собственного значения λ

Замечание:

Геометрическая кратность собственного значения λ всегда ≥ 1 ($s_i \geq 1$).

Теорема: без доказательства

Геометрическая кратность собственного значения λ всегда \leq его алгебраической кратности ($s_i \leq m_i$)

Определение:

Следом матрицы $A \in M_n(F)$ называется сумма е диагональных элементов

$$\text{tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

Утверждение:

$$\forall A, B \in M_n(F) \quad \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$$

Утверждение:

Пусть A - линейный оператор в базисе e . Тогда $\text{tr } A_e$ не зависит от выбора базиса.

Доказательство:

$A_{e'} = T^{-1}A_eT$, где $A_{e'}$ - матрица линейного оператора A в базисе e' .
Тогда $\text{tr } A_{e'} = \text{tr}((T^{-1}A_e)T) = \text{tr}(T(T^{-1}A_e)) = \text{tr } A_e$.

Итого:

$\text{Rg } A, \det A, \text{tr } A, \chi_A(\lambda)$ - инварианты линейного оператора при замене базиса.

Замечание:

$$A \in M_n(\mathbb{R}), \chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = (-1)^n \lambda^n \neq (-1)^{n-1} \text{tr } A \lambda^{n-1} + \dots \dots + \det A$$

Критерий диагональности линейного оператора

Утверждение:

Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ - собственные значения линейного оператора и пусть $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$.

Пусть v_1, \dots, v_k - соответствующие собственные векторы

Тогда v_1, \dots, v_k - линейно независимы.

То есть собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям являются линейно независимыми.

Доказательство:

Применим принцип математической индукции.

При $k = 1$ - утверждение верно, так как собственный вектор по определению $\neq 0$ и соответственно образует линейно независимую систему.

Пусть утверждение верно при $k = m$.

Добавим ещё 1 собственный вектор v_{m+1} , отвечающий собственному значению λ_{m+1} . Докажем, что система собственных векторов v_1, \dots, v_{m+1} останется линейно независимой.

Рассмотрим равенство:

$$1. \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m + \alpha_{m+1} v_{m+1} = 0$$

Применим к 1. линейный оператор A , тогда по линейности:

$$\alpha_1 A(v_1) + \dots + \alpha_m A(v_m) + \alpha_{m+1} A(v_{m+1}) = 0$$

Вспомним, что v_i - собственный вектор для собственного значения λ_i

$$2. \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_m \lambda_m v_m + \alpha_{m+1} \lambda_{m+1} v_{m+1}$$

Умножим 1. на λ_{m+1} и вычтем из 2.

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{m+1})v_1 + \dots + \alpha_m(\lambda_m - \lambda_{m+1})v_m = 0$$

По предположению индукции v_1, \dots, v_m - линейно независимы:

$$\begin{cases} \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{m+1}) = 0 \\ \dots \\ \alpha_m(\lambda_m - \lambda_{m+1}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \dots \\ \alpha_m = 0 \end{cases}$$

Теперь 1. можно записать в виде:

$$0 + \alpha_{m+1}v_{m+1} = 0$$

Но $v_{m+1} \neq 0$ (собственный вектор), значит $\alpha_{m+1} = 0 \Rightarrow$ по определению система v_1, \dots, v_{m+1} является линейно независимой.

Утверждение: Критерий диагональности матрицы линейного оператора A

Матрица линейного оператора A является диагональной в данном базисе \Leftrightarrow все векторы этого базиса являются собственными векторами для линейного оператора A .

Доказательство:

Необходимость :

Дано: A_e - диагональная матрица

Доказать: e состоит из собственных векторов по A

По определению матрицы линейного оператора в j -м столбце стоят координаты вектора $A(e_j)$ в базисе e_1, \dots, e_n

Если A_e - диагональна, то j -й столбец имеет вид $(0, \dots, 0, \lambda_j, 0, \dots, 0) \Rightarrow$

$\Rightarrow A(e_j) = 0 + \dots + 0 + \lambda_j e_j + 0 + \dots + 0$, то есть $A(e_j) = \lambda_j e_j$, $e_j \neq 0 \Rightarrow$ по определению e_j - собственный вектор, отвечающий собственному значению λ_j (на диагонали матрицы A_e - собственное значение).

Достаточность :

Дано: e состоит из собственных векторов по A

Доказать: A_e - диагональная матрица

$$A(e_j) = \lambda_j e_j,$$

$\forall j = \overline{1, n} \Rightarrow$ по определению матрицы линейного оператора, все элементы кроме диагональных равны нулю в каждом столбце (на диагонали собственные значения λ_i), ч.т.д.

Определение:

Линейный оператор, для которого в линейном пространстве V существует базис из собственных векторов, называется диагонализируемым.

Теорема: Критерий диагонализируемости линейного оператора.

(Без доказательства) Линейный оператор диагонализируем \Leftrightarrow
 \Leftrightarrow для любых его собственных значений λ_i алгебраическая кратность
равна геометрической кратности ($m_i = s_i$)

Теорема:

Если характеристическое уравнение линейного оператора, действующего в пространстве V , где $\dim V = n$ имеет ровно n попарно различных корней, то оператор диагонализируем (корни лежат в поле, над которым рассматривается линейное пространство V)

Доказательство:

Если собственное значение $\lambda_i \in F$, то ему можно сопоставить хотя бы один собственный вектор v_i . Система v_1, \dots, v_n - линейно независимы, так как по условию $\lambda_i \neq \lambda_j$, при $i \neq j$ (доказали ранее), их число равно $\dim V \Rightarrow$ они образуют базис в V из собственных векторов \Rightarrow линейный оператор диагонализируем

Лекция 15 мая

Евклидовы пространства

В этом разделе всякое поле будет полем вещественных чисел:

$$\forall F \text{ } F \text{ - поле} \Rightarrow F = \mathbb{R}$$

Определение:

Евклидово пространство \mathcal{E} - это пара $(V, g(x, y))$, где

V - линейное пространство,

$g(x, y)$ - скалярное произведение, то есть симметрическая, положительно определённая билинейная форма.

То есть для $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ выполняются свойства (аксиомы скалярного произведения):

1. $\forall x, y \in V \quad g(x, y) = g(y, x)$ - симметричность

2. $\forall x, y, z \in V \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad g(\alpha x + \beta y, z) = \alpha g(x, z) + \beta g(y, z)$, линейность

$$g(\alpha x + \beta y, z) = \alpha g(x, z) + \beta g(y, z), \text{ линейность}$$

3. $\forall x \in V \quad g(x, x) \geq 0 \wedge g(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ нулевой вектор

Пример:

1. $\mathcal{E} = (V, g(x, y) = |x| \cdot |y| \cos(x, y))$ - евклидово пространство

2. $V = C[a, b]$ - функции, непрерывные на отрезке $[a, b]$

$$g(f_1(x), f_2(x)) = \int_a^b f_1(x) f_2(x) dx - \text{скалярное произведение} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{E} = (C[a, b], g(x, y)) - \text{евклидово пространство}$$

Определение:

Пусть \mathcal{E} - евклидово пространство. Тогда величина $\|v\| = \sqrt{g(v, v)}$ (может обозначаться как $|v|$) называется нормой (длиной) вектора v .

Определение:

$\forall v_1, v_2 \in \mathcal{E}, v_1, v_2 \neq 0$:

$$\cos \varphi = \frac{g(v_1, v_2)}{\|v_1\| \cdot \|v_2\|} = \frac{g(v_1, v_2)}{\sqrt{g(v_1, v_1)}\sqrt{g(v_2, v_2)}}$$

Где φ - угол между v_1, v_2 . Это определение угла между векторами (берём $\varphi \in [0, \pi]$)

Определение:

$\forall x, y \in \mathcal{E}$:

$$\rho(x, y) = \|x - y\| - \text{расстояние между векторами } x, y$$

Утверждение (Неравенство Коши-Буняковского)

$\forall x, y \in \mathcal{E}$:

$$|g(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Доказательство:

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 0 &\leq g(\lambda x - y, \lambda x - y) = \lambda g(x, \lambda x - y) - g(y, \lambda x - y) = \\ &= \lambda^2 g(x, x) - \lambda g(x, y) - \lambda g(y, x) + g(y, y) = \|x\|^2 \lambda^2 - 2g(x, y)\lambda + \|y\|^2 \end{aligned}$$

Квадратное уравнение относительно λ , которое $\geq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow$
 $\Rightarrow D \leq 0, \quad D = 4(g(x, y))^2 - 4\|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \leq 0 \Rightarrow |g(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|,$
ч.т.д.

Утверждение (неравенство треугольника):

$\forall x, y \in \mathcal{E}$:

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Доказательство:

$\|x+y\|^2 = g(x+y, x+y) = \|x\|^2 + 2g(x, y) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 =$
 $= (\|x+y\|)^2$. Тут было применено неравенство Коши-Буняковского. Так как норма вектора всегда ≥ 0 , То

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Определение:

Два вектора $x, y \in \mathcal{E}$ называются ортогональными, если $g(x, y) = 0$.

Определение:

Система векторов a_1, \dots, a_k называется:

- а. Ортогональной, если $g(a_i, a_j) = 0, \forall i, j = \overline{1, k}, i \neq j$
- б. Ортонормированной, если она ортогональна и $g(a_i, a_i) = 1, \forall i = \overline{1, k}$

Лемма 1.

Пусть a_1, \dots, a_k - ортогональная система векторов, и $a_i \neq 0, i = \overline{1, k}$. Тогда эта система линейно независима.

Доказательство:

Приравняем к нулю линейную комбинацию

$$\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k = 0$$

Домножим скалярно на a_i для каждого $i = \overline{1, k}$

$$(\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k, a_i) = (0, a_i) = 0$$

$$\alpha_1 (a_1, a_i) + \dots + \alpha_i (a_i, a_i) + \dots + \alpha_k (a_k, a_i) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \alpha_i (a_i, a_i) = 0$, но $a_i \neq 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \Rightarrow$ по определению система a_1, \dots, a_k линейно независима.

Замечание:

Если $\dim \mathcal{E} = n$ и $k = n$, то a_1, \dots, a_n , ($a_i \neq 0, \forall i$) образует ортогональный базис. Если рассмотреть $e_i = \frac{a_i}{\|a_i\|}$, $i = \overline{1, n}$ (то есть нормировать), то получим ортонормированный базис.

Лемма 2.

Пусть $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, то есть x_i - коэффициенты вектора x в ортонормированном базисе. e_1, \dots, e_n , тогда $x_i = (x, e_i)$, $\forall i = \overline{1, n}$
 Если базис не является ортонормированным, но ортогонален, то $x_i = \frac{(x, e_i)}{(e_i, e_i)}$, $i = \overline{1, n}$

Доказательство:

$= x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \leftarrow$ умножим скалярно на $e_i, e = \overline{1, n}$

$$(x, e_i) = x_1 \cdot g(e_1, e_i) + \dots + x_i \cdot g(e_i, e_i) + \dots + x_n \cdot g(e_n, e_i) = x_i \cdot g(e_i, e_i) = x_i$$

Замечание:

Пусть a_1, \dots, a_n - базис в \mathcal{E} . Тогда $g(x, y) = x^T \Gamma Y$, где x, Y - столбцы координат векторов x, y в базисе a_1, \dots, a_n ,

$$\Gamma = \begin{pmatrix} g(a_1, a_1) & \dots & g(a_1, a_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g(a_1, a_n) & \dots & g(a_n, a_n) \end{pmatrix}$$

Матрица Грамма (она же матрица билинейной формы).

Свойства Грамма

1. Γ - симметрическая, то есть $\Gamma^T = \Gamma$ (из симметричности скалярного произведения). Более того $\forall x \neq 0 \quad x^T \Gamma x \underset{=g(x, x)}{> 0}$ (из положительной определённости)
2. Матрицы Грамма двух базисов e, e' связаны соотношением

$$\Gamma' = U^T \Gamma U$$

Где U - матрица перехода $e \rightarrow e'$ (так как это верно для всех билинейных форм).

3. $\det \Gamma = \text{Gr}(a_1, \dots, a_n) > 0$ если a_1, \dots, a_n - базис ($\det \Gamma$ называется граммианом и обозначается Gr)

Доказательство пункта 3.

По свойству 2 $\det \Gamma' = \det(U^T \Gamma U) = \det U^T \det \Gamma \det U = (\det U)^2 \det \Gamma$
 Перейдём к ортонормированному базису (далее докажем, что это всегда возможно). В ортонормированном базисе

$$\Gamma' = E, \det \Gamma' = \det E = 1 \Rightarrow \det \Gamma = \frac{1}{(\det U)^2} > 0$$

Утверждение (Метод ортогонализации Грамма-Шмидта):

Если \mathcal{E} - евклидово пространство, то в нём существует ортонормированный базис.

Доказательство:

Предъявим алгоритм, который по произвольному базису a_1, \dots, a_n строит ортогональный b_1, \dots, b_n (из него можно получить ортонормированный $e_i = \frac{b_i}{\|b_i\|}$).

1. Так как $a_1 \neq 0$ (вектор базиса), можно взять $b_1 = a_1$.
2. Будем считать b_2 в виде:

$$b_2 = a_2 - \alpha b_1, \alpha \in \mathbb{R}$$

Ищем α из условия $(b_1, b_2) = 0$. То есть:

$$(a_2 - \alpha b_1, b_1) = 0 \Rightarrow (a_2, b_1) - \alpha(b_1, b_1) = 0 \Rightarrow$$

Так как $(b_1, b_1) \neq 0$ может на него поделить

$$\Rightarrow \alpha = \frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)}$$

То есть α - проекция вектора a_2 на a_1 , $b_2 = a_2 - \frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1$

Векторы b_1, b_2 линейно выражаются через $a_1, a_2 \Rightarrow$ они принадлежат \mathcal{E} (это может быть подпространство). При этом a_1, a_2 могут быть выражены через $b_1, b_2 \Rightarrow b_1, b_2$ - линейно независимы.

3. Пусть b_1, \dots, b_k , $k \geq 2$, уже построены. Будем искать b_{k+1} в виде:

$$b_{k+1} = a_{k+1} - c_{k+1, 1}b_1 - c_{k+1, 2}b_2 - \dots - c_{k+1, k}b_k$$

Коэффициент $c_{k+1, i}$, $i = \overline{1, k}$, найдём из условия ортогональности с b_i , домножим выражение скалярно на b_i .

$$0 = (b_{k+1}, b_i) = (a_{k+1}, b_i) - 0 - \dots - c_{k+1, i}(b_i, b_i) - \dots - 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_{k+1, i} = \frac{(a_{k+1}, b_i)}{(b_i, b_i)} \Rightarrow b_{k+1} = a_{k+1} - \sum_{i=1}^k \frac{(a_{k+1}, b_i)}{(b_i, b_i)} b_i$$

Продолжаем так делать, пока не получим ортогональную линейно независимую систему векторов b_1, \dots, b_n , где $n = \dim \mathcal{E} \Rightarrow$ ортонормальный базис.

Утверждение (четвёртое свойство матрицы Грамма):

Определитель матрицы Грамма не меняется в процессе ортогонализации Грамма-Шмидта.

$$\text{Gr}(a_1, \dots, a_n) = \det \Gamma = \det \Gamma' = \text{Gr}(b_1, \dots, b_n) = \|b_1\|^2 \cdot \dots \cdot \|b_n\|^2$$

Так как матрица Грамма ортогонального базиса является диагональной.

Доказательство:

Рассмотрим матрицу перехода от a к b :

$$U_{a \rightarrow b} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \dots & * & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & * \\ \vdots & 0 & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Получилась верхнетреугольная матрица, определитель которой равен 1.

И участвуют только векторы b_i с $i \leq k$, которые выражаются через a_j , где $a_j \leq a_i$

$$\Rightarrow \det U_{a \rightarrow b} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Gr}(b_1, \dots, b_n) = \det \Gamma' = (\det U)^2 \det \Gamma = 1 \det \Gamma = \text{Gr}(a_1, \dots, a_n)$$