Семинары по математическому анализу 4 модуль.

Андрей Тищенко

2023/2024

Семинар 4 апреля

Сходимость функциональных последовательностей.

$\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}} \quad x \in E$
$\forall x \in E \quad f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$

Номер 1. a. $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{x+3n+2} = \dfrac{x^2}{\frac{x}{n}+3+\frac{2}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{x^2}{3}$

c. $f_n(x) = n(x^{\frac{1}{n}} - 1),\ E = [1;\ 3]$
$x = 1 \Rightarrow f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
$\dfrac{e^y - 1}{y} \xrightarrow[y\to 0]{} 1$
$f_n(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{n}\ln x} - 1}{\frac{1}{n}\ln x}\ln x \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln x$
Итак, $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln x$

Определение: $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x)$ на $E \Leftrightarrow \sup_E |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon\ \forall n > N_2\ \forall x \in E\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \Rightarrow$
$\Rightarrow \sup_E |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$

Номер 2. a. $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{arctg}(nx)}{\sqrt{n+x}},\ E = [0,\ +\infty)$
$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ поточечно.
$\left|\dfrac{\operatorname{arctg}(nx)}{\sqrt{n+x}}\right| < \left|\dfrac{\pi}{\sqrt{n}}\right| < \varepsilon$

b. $f_n(x) = n\sin\frac{1}{nx},\ E = [1,\ +\infty)$

$f_n(x) \sim n\cdot\dfrac{1}{nx} = \dfrac{1}{x} \Rightarrow f_n(x) \longrightarrow \dfrac{1}{x} = f(x)$

$\left|n\left(\sin\dfrac{1}{nx} - \dfrac{1}{nx}\right)\right| = \ldots$

$\sin y = y - \dfrac{y^3}{6} + \dfrac{\sin c}{24}y^4$

$\cdots = \left|n\left(\dfrac{1}{nx} - \dfrac{1}{nx} - \dfrac{1}{(nx)^3 6} + \dfrac{\sin c}{24}\dfrac{1}{(nx)^4}\right)\right| \leqslant \dfrac{1}{6n^2} + \dfrac{1}{24n^3} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (тут подставили $x = 1$, получив максимальное значение)

Номер 3. a. $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2},\ E = [0;\ 1]$

$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Рассмотрим последовательность $x_n = \dfrac{1}{n} \Rightarrow$

$\Rightarrow f_n(x_n) = \dfrac{n\frac{1}{n}}{1+n^2\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$

Как дополнительный пример рассмотрели:

x^n на $(0;\ 1) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$x_n = 1 - \frac{1}{n}$

$f_n(x_n) = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{1}{e}$ не сходится абсолютно.

b. $f_n(x) = \ln\left(3 + \dfrac{n^2e^x}{n^4+e^{2x}}\right),\ E = [0;\ +\infty)$

$f(x) = \ln 3$

$f_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = \left|\ln\left(1 + \dfrac{n^2e^x}{3(n^4+e^{2x})}\right)\right|$

Рассмотрим последовательность $x_n = \ln n^2$. Тогда

$g_n(x_n) = \ln\left(1 + \dfrac{n^2n^2}{3(n^4+n^4)}\right) = \ln\dfrac{7}{6}$

Семинар 12 апреля

$f_n(x),\ x \in E$

1. $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ на E.
2. Можно ли переставлять операторы $\lim\limits_{n\to\infty},\ \lim\limits_{x\to x_0},\ \dfrac{d}{dx},\ \displaystyle\int dx$?

То есть выполняется ли:

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x) \overset{?}{=} \lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{d}{dx}f_n(x) \overset{?}{=} \frac{d}{dx}\underbrace{\lim_{n\to\infty} f_n(x)}_{f(x)}$$

$E = [0;\ 1],\ f_n(x) = x^n \longrightarrow g(x) \begin{cases} 0, & x \in [0;\ 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{x\to 1^-} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$

$\lim\limits_{x\to 1^-}\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = 0$

$0 \neq 1 \Rightarrow$ это неверно.

$f_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows} f(x) \Leftrightarrow \sup\limits_{x\in E}|f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Ряды $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = S(x)$

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\cdot x^{n-1} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(x^n)' \overset{?}{=} \left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x^n\right)'$

$S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x) \overset{E}{\rightrightarrows} S(x) \Leftrightarrow$

$\sup\limits_{x\in E} \Leftrightarrow |S_n(x) - S(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\sup\limits_{x\in E}|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)| \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

изнак Вейерштрассе: Если $u_n(x)$ мажорируется последовательностью a_n: $\forall n\ |u_n(x)| \leqslant a_n$, тогда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится, тогда $S_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows} S(x)$

Задача 1. a. $u_n(x) = \frac{\operatorname{arctg}(n^2x)\cdot\cos(\pi n x)}{n\sqrt{n}},\ E = \mathbb{R}$

$|u_n(x)| \leqslant \frac{\pi}{2n^{\frac{3}{2}}}$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится.

b. $u_n(x) = e^{-n(x^2+\sin x)}$, $E = [1;\ +\infty)$
$e^{-n(x^2+\sin x)} < e^{-n}$, так как

$$\begin{cases} x \geqslant \sqrt{2}:\ \ x^2 + \sin x \geqslant 2 + \sin x \geqslant 1 \\ 1 \leqslant x < \sqrt{2}:\ \ \sin x > 0 \Rightarrow x^2 + \sin x > 1 \end{cases}$$

Функциональные ряды

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} C_n \cdot (\underbrace{x-a}_{t})^n \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{+\infty} C_n \cdot t^n$. Множество сходимости такого ряда имеет вид $(-R;\ R)$, $R \in \overline{\mathbb{R}}$, R называется радиусом сходимости.

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{C_n}{C_{n+1}} \right|$$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|C_n|}$$

2. a. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^2}$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^2}{n^2} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n^2+2n+1}{n^2} \right| = 1$$

b. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)!}{n!} \right| = \lim_{n\to\infty} |n| = +\infty$$

c. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 5^n x^{3n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 5^n t^n$

$$\frac{1}{R_t} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|5^n|} \Rightarrow \forall t : |t| < \frac{1}{5} \Rightarrow \left|x^3\right| < \frac{1}{5} \Rightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt[3]{5}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_x = \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$$

3. a. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n+1}{3n^2+2}(x-1)^n$

$$R = \lim_{m\to\infty} \frac{\frac{2n+1}{3n^2+2}}{\frac{2n+3}{3n^2+6n+5}} = 1 \Rightarrow (0;\ 2)$$

Рассмотрим граничные точки:

$x = 2 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n+1}{3n^2+2} \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{3n}$ расходится.

$x = 0 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{2n+1}{3n^2+2}$

$\left(\frac{2n+1}{3n^2+2}\right)' = \frac{2(3n^2+2)-6n(2n+1)}{(3n^2+2)^2} = \frac{-6n^2-6n+4}{(3n^2+2)^2} \Rightarrow$ с какого-то момента она монотонно убывает. Тогда по признаку Лейбница ряд сходится.

4. a. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^n = x \cdot \sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = x \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (x^n)' = x \left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x^n \right) = x \cdot \left(\dfrac{x}{1-x} \right)' =$
$= x \dfrac{(1-x)+x}{(1-x)^2} = \dfrac{x}{(1-x)^2}$
Очевидно, что радиус сходимости такой функции равен 1. Положим $x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n}{2^n} = \dfrac{\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^2} = 2.$

   b. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{x^{2n+1}} 2n+1 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^{2n}\, dt = \int_0^x \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}\, dt =$
$= \int_0^x \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-t^2)^n\, dt = \int_0^x \dfrac{1}{1+t^2} dt = \operatorname{arctg} t|_0^x = \operatorname{arctg} x$

5. a. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$