

# Математическая статистика.

Андрей Тищенко @AndrewTGk

2024/2025

Лекция 10 января

## Преамбула

*Статистика.* Мнения о появлении этого слова:

1. Статистиками в Германии назывались люди, собирающие данные о населении и передающие их государству.
2. В определённый день в Венеции народ выстаивался для выплаты налогов (строго фиксированных, в зависимости от рода действий). Государство собирало данные обо всём населении. Это происходило до появления статистиков в Германии, поэтому мы будем считать, что статистика пошла из Венеции.

*Задача статистики* — по результатам наблюдений построить вероятностную модель наблюдаемой случайной величины.

## Основные определения

### Определение

Однородной выборкой объёма  $n$  называется случайный вектор  $X = (X_1, \dots, X_n)$ , компоненты которого являются независимыми и одинаково распределёнными. Элементы вектора  $X$  называются элементами выборки.

### Определение

Если элементы выборки имеют распределение  $F_\xi(x)$ , то говорят, что выборка соответствует распределению  $F_\xi(x)$  или порождена случайной величиной  $\xi$  с распределением  $F_\xi(x)$ .

### Определение

Детерминированный вектор  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , компоненты которого  $x_i$  являются реализациями соответствующих случайных величин  $X_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ), называется реализацией выборки.

### Уточнение

Если  $X$  — однородная выборка объёма  $n$ , то его реализацией будет вектор  $x$ , каждый элемент  $x_i$  которого является значением соответствующей ему случайной величины (элемента выборки)  $X_i$ .

### Определение

Выборочным пространством называется множество всех возможных реализаций выборки

$$X = (X_1, \dots, X_n)$$

## Пример

У вектора  $X = (X_1, \dots, X_{10})$  каждый элемент  $X_i$  которой порождён случайной величиной  $\xi \sim U(0, 1)$ , выборочным пространством является  $\mathbb{R}^{10}$  (так как  $X_i$  может принять любое значение на  $\mathbb{R}$ )

## Определение

Обозначим  $x_{(i)}$  —  $i$ -ый по возрастанию элемент, тогда будет справедливо:

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$$

Обозначим  $X_{(k)}$  случайную величину, реализация которой при каждой реализации  $x$  выборки  $X$  принимает значение  $x_{(k)}$ . Тогда последовательность  $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$  называется вариационным рядом выборки.

## Определение

Случайная величина  $X_{(k)}$  называется  $k$ -ой порядковой статистикой выборки.

## Определение

Случайные величины  $X_{(1)}, X_{(n)}$  называются эстремальными порядковыми статистиками.

## Определение

Порядковая статистика  $X_{([n \cdot p])}$  называется выборочной квантилью уровня  $p$ , где  $p \in [0, 1]$

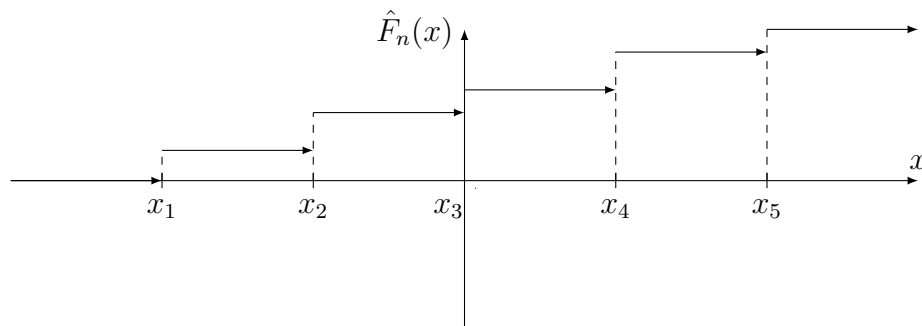
## Определение

Пусть каждый элемент выборки  $X$  объёма  $n$  имеет распределение  $F_\xi(x)$ . Эмпирической функцией распределения такой выборки называется

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n I(X_k \leq x)$$

$I$  — индикаторная функция.  $I = \begin{cases} 1, & \text{если аргумент верен} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

Пусть  $x_1, \dots, x_n$  — реализация выборки  $X_1, \dots, X_n$



Свойства  $\hat{F}_n(x)$

$$1. \forall x \in \mathbb{R} \quad E\hat{F}_n(x) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n I(X_k \leq x)\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n EI(X_k \leq x) = P(X_1 \leq x) = F_\xi(x)$$

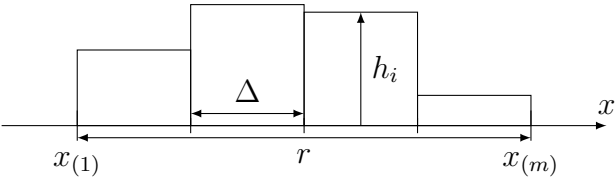
2. По усиленному закону больших чисел (УЗБЧ)

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n I(X_k \leq x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п. н.}} EI(X_k \leq x) = F_\xi(x)$$

# Гистограмма

Разбить  $\mathbb{R}$  на  $(m + 2)$  непересекающихся интервала. Рассматриваются  $x_{(1)}, \dots, x_{(m)}$

Название	Обозначение	Формула
Количество интервалов	$m$	—
Размах выборки	$r$	$r = x_{(m)} - x_{(1)}$
Ширина интервала	$\Delta$	$\Delta = \frac{r}{m}$
Количество попаданий на $i$ -ый интервал	$\nu_i$	—
Частота попаданий на $i$ -ый интервал	$h_i$	$h_i = \frac{\nu_i}{\Delta}$



Лекция 17 января

## Определение

Пусть  $X_1, \dots, X_n \sim F(x, \theta)$ .  $k$ -ым начальным выборочным моментом называется

$$\hat{\mu}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k, \quad k \in \mathbb{N}$$

Выборочным средним называется:

$$\hat{\mu}_1 = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

## Определение

$k$ -ым центральным выборочным моментом называется

$$\hat{\nu}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^k, \quad k = 2, 3, \dots$$

$\hat{\nu}_2 = S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$  называется выборочной дисперсией

Пусть  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  соответствует распределению  $F(x, y, \theta)$

## Определение

Выборочной ковариацией называется

$$\hat{K}_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

## Определение

Выборочным коэффициентом корреляции называется

$$\hat{\rho}_{xy} = \frac{\hat{K}_{xy}}{\sqrt{S_x^2 S_y^2}}$$

## Свойства выборочных моментов

1.  $E\hat{\mu}_k = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n EX_i^k = EX_1^k = \mu_k$
2.  $E\bar{X} = m_x$
3.  $\mathcal{D}\hat{\mu}_k = \mathcal{D}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \mathcal{D}X_i^k = \frac{1}{n} \mathcal{D}X_1^k = \frac{1}{n} (EX_1^{2k} - (EX_1^k)^2) = \frac{1}{n} (\mu_{2k} - \mu_k^2)$
4.  $\mathcal{D}\bar{x} = \frac{\sigma_{x_1}^2}{n}$
5. По УЗБЧ

$$\hat{\mu}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п. н.}} E\hat{\mu}_k = \mu_k$$

$$\hat{\nu}_k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п. н.}} \nu_k$$

6. По ЦПТ

$$\frac{\hat{\mu}_k - \mu_k}{\sqrt{\frac{\mu_{2k} - \mu_k^2}{n}}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} U, U \sim N(0, 1)$$

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{x} - m_{x_1})}{\sigma} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} U$$

$$\begin{aligned} 7. ES^2 &= E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2\right) = \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2)\right) = E(x^2) - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n E(x_i\bar{x}) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E\bar{x}^2 = \\ &= E(x^2) - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n E x_i \sum_{j=1}^n x_j + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E\left(\sum_{j=1}^n x_j\right)^2 = E(x^2) - \frac{2}{n} E \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n x_j + \frac{n-1}{n} \sigma^2 \end{aligned}$$

$$8. E\hat{K}_{xy} = \frac{n-1}{n} \text{cov}(x, y)$$

## Определение

Оценкой  $\hat{\theta}$  параметра  $\theta$ , называется функция:

$$\hat{\theta} = T(x_1, \dots, x_n), \text{ не зависящая от } \theta$$

Например, отвратительная оценка среднего роста людей в аудитории.

$$\hat{m} = \frac{2x_2 + 5x_5 + 10x_{10}}{3}$$

## Определение

Оценка  $\hat{\theta}$  называется несмещённой, если  $E\hat{\theta} = \theta$  для любых возможных значений этого параметра.

## Определение

Оценка  $\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n)$  называется асимптотически несмещённой оценкой  $\theta$ , если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n) = \theta$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ES^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} \sigma^2 = \sigma^2$$

## Определение

Несмещённой выборочной (или исправленной) выборочной дисперсией называется

$$\tilde{S}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

Оценки

$$\hat{m}_1 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$\hat{m}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{10}$$

$$\hat{m}_3 = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

Являются несмещёнными.

## Определение

Оценка  $\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n)$  называется:

Состоятельной оценкой  $\theta$ , если

$$\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} \theta$$

Сильно состоятельной оценкой, если

$$\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п. н.}} \theta$$

## Определение

Пусть  $\hat{\theta}$  — несмещённая оценка параметра  $\theta$ . Если  $\mathcal{D}\hat{\theta} \leq \mathcal{D}\theta^*$ , где  $\theta^*$  — любая несмещённая оценка параметра  $\theta$ . Тогда  $\hat{\theta}$  называется эффективной оценкой параметра  $\theta$ .

### $R$ -эффективные оценки

Рассматриваем выборку  $X_1, \dots, X_n \sim f(x, \theta)$ ,  $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^1$ . Назовём модель  $(S, f(x, \theta))$  регулярной, если она удовлетворяет следующим условиям:

1.  $\forall x \in S$  функция  $f(x, \theta) = f(x_1, \dots, x_n, \theta) > 0$  и дифференцируема по  $\theta$ .

$$2. \begin{cases} \frac{\delta}{\delta\theta} \int_S f(x, \theta) dx = \int_S \frac{\delta}{\delta\theta} f(x, \theta) dx \\ \frac{\delta}{\delta\theta} \int_S T(x) f(x, \theta) dx = \int_S \frac{\delta}{\delta\theta} T(x) f(x, \theta) dx \end{cases}$$

Пусть  $\hat{\theta} = T(x) = T(x_1, \dots, x_n)$  — несмещённая оценка параметра  $\theta$ :

$$\int_S \frac{\delta}{\delta\theta} f(x, \theta) dx = \frac{\delta}{\delta\theta} \int_S f(x, \theta) dx = \frac{\delta}{\delta\theta} 1 = 0$$

$$\int_S \frac{\delta}{\delta\theta} T(x) f(x, \theta) dx = \frac{\delta}{\delta\theta} \int_S T(x) f(x, \theta) dx = \frac{\delta}{\delta\theta} ET(x) = \frac{\delta}{\delta\theta} \theta = 1$$

## Определение

Информацией Фишера о параметре  $\theta$ , содержащейся в выборке  $X_1, \dots, X_n$  называется величина

$$I_n(\theta) = E \left( \frac{\delta \ln(f(x, \theta))}{\delta\theta} \right)^2 = \int_S \left( \frac{\delta \ln(f(x, \theta))}{\delta\theta} \right)^2 f(x, \theta) dx$$

## Неравенство Рао-Крамера

Если  $S$ ,  $f(x, \theta)$  — регулярная модель и  $\hat{\theta}$  — несмещённая оценка  $\theta$ , то

$$\mathcal{D}(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{I_n(\theta)}$$

### Доказательство

Выпишем некоторые равенства (пригодятся в доказательстве):

$$\int_S \frac{\delta}{\delta \theta} f(x, \theta) dx = \int_S \frac{\delta f(x, \theta)}{\delta \theta} \frac{f(x, \theta)}{f(x, \theta)} dx \stackrel{*}{=} \int_S \frac{\delta \ln f(x, \theta)}{\delta \theta} f(x, \theta) dx = 0$$

Пояснение  $\stackrel{*}{=}$ . Логарифм — сложная функция. По правилу дифференцирования сложной функции:

$$\frac{\delta \ln f(x, \theta)}{\delta \theta} = \frac{1}{f(x, \theta)} \cdot \frac{\delta f(x, \theta)}{\delta \theta}$$
$$\int_S \frac{\delta}{\delta \theta} T(x) f(x, \theta) dx = \int_S T(x) \frac{\delta}{\delta \theta} f(x, \theta) \frac{f(x, \theta)}{f(x, \theta)} dx = \int_S T(x) \frac{\delta \ln f(x, \theta)}{\delta \theta} f(x, \theta) dx = 1$$

Чуть преобразуем последнее полученное равенство:

$$\int_S T(x) \frac{\delta \ln f(x, \theta)}{\delta \theta} f(x, \theta) dx = \int_S T(x) \frac{\delta \ln f(x, \theta)}{\delta \theta} f(x, \theta) dx - \underbrace{\theta \int_S \frac{\delta \ln f(x, \theta)}{\delta \theta} f(x, \theta) dx}_{=0} =$$
$$= \int_S (T(x) - \theta) \frac{\delta \ln f(x, \theta)}{\delta \theta} f(x, \theta) dx = 1 \Rightarrow 1 = 1^2 = \left( \int_S (T(x) - \theta) \frac{\delta \ln f(x, \theta)}{\delta \theta} f(x, \theta) dx \right)^2$$

Далее нам понадобится неравенство Коши-Буняковского, которое выглядит так:

$$\left( \int \varphi_1(x) \varphi_2(x) dx \right)^2 \leq \int \varphi_1^2(x) dx \int \varphi_2^2(x) dx$$

Подгоним полученное равенство ( $f(x, \theta) > 0 \Rightarrow f(x, \theta) = \sqrt{f(x, \theta)^2}$ ):

$$\left( \int_S (T(x) - \theta) \frac{\delta \ln f(x, \theta)}{\delta \theta} f(x, \theta) dx \right)^2 = \left( \int_S \underbrace{(T(x) - \theta) \sqrt{f(x, \theta)}}_{\varphi_1(x)} \cdot \underbrace{\frac{\delta \ln f(x, \theta)}{\delta \theta} \sqrt{f(x, \theta)}}_{\varphi_2(x)} dx \right)^2 = 1$$

И применим неравенство Коши-Буняковского:

$$1 = \left( \int_S \underbrace{(T(x) - \theta) \sqrt{f(x, \theta)}}_{\varphi_1(x)} \cdot \underbrace{\frac{\delta \ln f(x, \theta)}{\delta \theta} \sqrt{f(x, \theta)}}_{\varphi_2(x)} dx \right)^2 \leq$$
$$\leq \int_S \left( (T(x) - \theta) \sqrt{f(x, \theta)} \right)^2 dx \cdot \int_S \left( \frac{\delta \ln f(x, \theta)}{\delta \theta} \sqrt{f(x, \theta)} \right)^2 dx =$$
$$= \underbrace{\int_S (T(x) - \theta)^2 f(x, \theta) dx}_{=\mathcal{D}\hat{\theta}} \cdot \underbrace{\int_S \left( \frac{\delta \ln f(x, \theta)}{\delta \theta} \right)^2 f(x, \theta) dx}_{=I_n(\theta)}$$

Получаем:

$$1 \leq \mathcal{D}(\theta) \cdot I_n(\theta) \Rightarrow \mathcal{D}(\theta) \geq \frac{1}{I_n(\theta)}$$

## Определение

Оценка  $\hat{\theta}$  называется R-эффективной, если  $E\hat{\theta} = \theta$  и  $\mathcal{D}\hat{\theta} = \frac{1}{I_n(\theta)}$

Лекция 24 января

### Замечание 1

$$I_n(\theta) = \mathcal{D} \left( \frac{\delta \ln f(x, \theta)}{\delta \theta} \right)$$

### Замечание 2

$$I_n(\theta) = nI_1(\theta)$$

$$f(x, \theta) = f(x_1, \dots, x_n, \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta)$$

$$\begin{aligned} E \left( \frac{\delta \ln f(x, \theta)}{\delta \theta} \right)^2 &= E \left( \sum_{i=1}^n \frac{\delta \ln f(x_i, \theta)}{\delta \theta} \right)^2 = \sum_{i \neq j} E \left( \frac{\delta \ln f(x_i, \theta)}{\delta \theta} \cdot \frac{\delta \ln f(x_j, \theta)}{\delta \theta} \right) + nE \left( \frac{\delta \ln f(x_1, \theta)}{\delta \theta} \right)^2 = \\ &= \sum_{i \neq j} \left( \underbrace{E \left( \frac{\delta \ln f(x_i, \theta)}{\delta \theta} \right)}_{=0} \cdot \underbrace{E \left( \frac{\delta \ln f(x_j, \theta)}{\delta \theta} \right)}_{=0} \right) + nE \left( \frac{\delta \ln f(x_1, \theta)}{\delta \theta} \right)^2 = nE \left( \frac{\delta \ln f(x_1, \theta)}{\delta \theta} \right)^2 = nI_1(\theta) \end{aligned}$$

### Замечание 3

Пример:  $X_1, \dots, X_n \sim N(\theta, \sigma^2)$

Рассмотрим оценку  $\hat{\theta} = \bar{X}$ , её дисперсия  $\mathcal{D}\bar{X} = \frac{\sigma^2}{n}$ . Посчитаем информацию Фишера:

$$\begin{aligned} I_1(\theta) &= E \left( \frac{\delta \ln f(x, \theta)}{\delta \theta} \right)^2 = E \left( \frac{\delta}{\delta \theta} \ln \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}} \right) \right)^2 = E \left( \frac{\delta}{\delta \theta} \ln \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} - \frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2} \right) \right)^2 = E \left( \frac{x-\theta}{\sigma^2} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{\sigma^4} E(x-\theta)^2 = \frac{\sigma^2}{\sigma^4} = \frac{1}{\sigma^2} \Rightarrow I_n(\theta) = \frac{n}{\sigma^2} \end{aligned}$$

Знаем, что  $\mathcal{D}\hat{\theta} \geq \frac{1}{nI_1(\theta)} = \frac{\sigma^2}{n} = \mathcal{D}(\bar{X}) \Rightarrow$  оценка  $\hat{\theta} = \bar{X}$  является R-эффективной.

Критерий эффективности  $X_1, \dots, X_n \sim F_\xi(x, \theta)$ ,  $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^1$  выполнены условия регулярности, то есть

$$\int T(x) \frac{\delta f(x, \theta)}{\delta \theta} dx = \frac{\delta}{\delta \theta} \int T(x) f(x, \theta) dx = E\hat{\theta}$$

## Определение

Функцией вклада выборки  $X_1, \dots, X_n$  называется

$$U(x, \theta) = \sum_{i=1}^n \frac{\delta \ln f(x_i, \theta)}{\delta \theta}$$

Пусть  $0 < U(x, \theta) < \infty$ .

$\hat{\theta} = T(x_1, \dots, x_n)$  — R-эффективная оценка  $\theta \Leftrightarrow \hat{\theta} - \theta = a(\theta)U(x, \theta)$ , где  $a(\theta) = \mathcal{D}\hat{\theta}$

**Доказательство  $\Rightarrow$ :**

Пусть  $\hat{\theta} - \theta = a(\theta)U(x, \theta) \Rightarrow \hat{\theta}$  — R-эффективная оценка  $\theta$ .

Посчитаем математическое ожидание частей равенства:

$$E(\hat{\theta} - \theta) = a(\theta)EU(x, \theta) = a(\theta) \int \frac{\delta \ln f(x, \theta)}{\delta \theta} f(x, \theta) dx = 0$$

Посчитаем дисперсию частей:

$$\mathcal{D}(\hat{\theta} - \theta) = a^2(\theta)\mathcal{D}U(x, \theta) = \underbrace{a^2(\theta)}_{=(\mathcal{D}(\hat{\theta}))^2} I_n(\theta) \Rightarrow \mathcal{D}(\hat{\theta}) = (\mathcal{D}(\hat{\theta}))^2 I_n(\theta) \Rightarrow 1 = \mathcal{D}(\theta) I_n(\theta)$$

Значит оценка является R-эффективной.

*Доказательство*  $\Leftarrow$ :

Пусть  $\hat{\theta}$  — R-эффективная оценка  $\Rightarrow \hat{\theta} - \theta = a(\theta)U(x, \theta)$ . Хотим доказать, что  $\rho(\hat{\theta}, U(x, \theta)) = 1$ .

Для подсчёта корреляции нужно посчитать ковариацию:

$$\text{cov}(\hat{\theta}, U(x, \theta)) = E(\hat{\theta} - \theta)U(x, \theta) = E\hat{\theta}U(x, \theta) - \underbrace{\theta EU(x, \theta)}_{=0} =$$

$$= \int_S T(x)U(x, \theta)f(x, \theta) dx = \int_S T(x) \frac{\delta \ln f(x, \theta)}{\delta \theta} f(x, \theta) dx = 1$$

Так как  $\hat{\theta}$  — R-эффективная оценка, то  $\mathcal{D}\hat{\theta} = \frac{1}{I_n(\theta)}$ . Знаем, что  $\mathcal{D}U(x, \theta) = I_n(\theta)$ , тогда:

$$\rho(\hat{\theta}, U(x, \theta)) = \frac{\text{cov}(\hat{\theta}, U(x, \theta))}{\sqrt{\mathcal{D}\hat{\theta}\mathcal{D}U(x, \theta)}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{I_n(\theta)}{I_n(\theta)}}} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{\theta} = c_1 + c_2 U(x, \theta)$$

$E\hat{\theta} = c_1 + Ec_2 U(x, \theta) = c_1 + 0 = \theta$ , так как оценка эффективная

$$\mathcal{D}\hat{\theta} = c_2^2 I_n(\theta) = \frac{1}{I_n(\theta)} \Rightarrow c_2^2 = \frac{1}{I_n^2} \Rightarrow c_2 = \frac{1}{I_n} = \mathcal{D}\hat{\theta} = a(\theta).$$

Итак,  $\hat{\theta} = \theta + a(\theta)U(x, \theta) \Rightarrow \hat{\theta} - \theta = U(x, \theta)$ .

## Метод моментов

$X_1, \dots, X_n \sim F_\xi(x, \theta)$ ,  $\theta \in \Theta \subset R^k$

$$\exists \mu_j < \infty, j = \overline{1, k} \quad \underbrace{\mu_j}_{=\mu_j(\theta)} = E\xi^j = \int_{-\infty}^{+\infty} x^j f(x, \theta) dx = 1$$

Тогда можно получить систему уравнений:

$$\begin{cases} \hat{\mu}_1 = \mu_1(\theta) \\ \vdots \\ \hat{\mu}_k = \mu_k(\theta) \end{cases} \quad (1)$$

Если система уравнений (1) однозначно разрешима относительно  $\theta_1, \dots, \theta_k$ , то решения  $\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_k$  называется равной  $\theta_1, \dots, \theta_k$  по методу моментов.

## Пример

$X_1, \dots, X_n \sim N(\theta_1, \theta_2^2)$ ,  $\theta = (\theta_1, \theta_2^2)$ , тогда:

$$\begin{cases} \hat{\mu}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \theta_1 \Rightarrow \hat{\theta}_1 = \overline{X} \\ \hat{\mu}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 = \theta_2^2 + \theta_1^2, (E\xi^2 = \mathcal{D}\xi + (E\xi)^2) \Rightarrow \hat{\theta}_2^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \overline{X}^2 \end{cases}$$

## Метод максимального правдоподобия (ММП)

### Определение

Функцией правдоподобия для  $X_1, \dots, X_n$ , порождённых случайной величиной  $\xi$ , называется функция

$$L(x_1, \dots, x_n, \theta) = \begin{cases} \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta), & \text{если } \xi \text{ — непрерывная случайная величина} \\ \prod_{i=1}^n P(\xi = x_i, \theta), & \text{если } \xi \text{ — дискретная случайная величина} \end{cases}$$



## Определение

Реализацией оценки максимального правдоподобия (ОМП) называется значение  $\hat{\theta} \in \Theta$ , такое что:

$$\hat{\theta} = \operatorname{argmax} L(x_1, \dots, x_n, \theta), \text{ где } \theta \in \Theta$$

Для нахождения точки максимума нужно взять частные производные по всем составляющим  $\theta$  от функции правдоподобия. Однако считать производную произведения нам впадлу, поэтому мы введём следующую вещь:

## Определение

Функция  $\ln L(x_1, \dots, x_n, \theta)$  называется логарифмической функцией правдоподобия.

Итак, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\delta \ln L(x_1, \dots, x_n, \theta)}{\delta \theta_1} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\delta \ln L(x_1, \dots, x_n, \theta)}{\delta \theta_k} = 0 \end{cases}$$

Логарифм монотонный, поэтому его  $\operatorname{argmax}$  совпадёт с  $\operatorname{argmax}$  функции  $L(x_1, \dots, x_n, \theta)$  (НАУКА!).

## Пример

Для Гауссовской величины  $N(\theta_1, \theta_2^2)$ :

$$L(x_1, \dots, x_n, \theta) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} e^{-\frac{(x_i - \theta_1)^2}{2\theta_2^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \left(\frac{1}{\theta_2}\right)^n e^{-\frac{(x - \theta_1)^2}{2\theta_2^2}}$$

Логарифмируем:

$$\ln L(x_1, \dots, x_n, \theta) = \ln \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n - n \ln \theta_2 - \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \theta_1)^2}{2\theta_2^2}$$

Возьмём частные производные:

$$\begin{cases} \frac{\delta \ln L(x_1, \dots, x_n, \theta)}{\delta \theta_1} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\theta}_1)}{\hat{\theta}_2^2} \\ \frac{\delta \ln L(x_1, \dots, x_n, \theta)}{\delta \theta_2} = -\frac{n}{\hat{\theta}_2} + \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\theta}_1)^2}{\hat{\theta}_2^3} \end{cases}$$

Посчитаем  $\theta_1, \theta_2$ :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\theta}_1) = 0 \Rightarrow \hat{\theta}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{X} \\ -n\hat{\theta}_2^2 + \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = 0 \Rightarrow \hat{\theta}_2^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \end{cases}$$

**Лекция 31 января.**

## Робастные оценки

От слова robust.

## Определение

Пусть оценка  $\hat{\theta}_n$  построена по выборке  $X_1, \dots, X_n$ . Затем добавлено наблюдение  $x$  и построена оценка  $\hat{\theta}_{n+1}$ , тогда кривой чувствительности, изучающей влияние наблюдения  $x$  на оценку  $\hat{\theta}$  называется функция:

$$SC_n(x) = \frac{\hat{\theta}_{n+1} - \hat{\theta}_n}{\frac{1}{n+1}} = (n+1) (\hat{\theta}_{n+1} - \hat{\theta}_n)$$

## Определение

Оценка  $\hat{\theta}$  называется  $B$ -робастной, если  $SC_n(x)$  ограничена.

## Пример

Пусть  $\hat{\theta} = \bar{X}$

$$SC_n(x) = (n+1) \left( \frac{1}{n+1} \left( \sum_{i=1}^n (x_i) + x \right) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right) = \sum_{i=1}^n x_i + x - \left( \sum_{i=1}^n x_i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right) = x - \bar{X}$$

Это линейная функция от  $x$ , то есть кривая чувствительности неограничена.

Пусть  $\hat{\theta} = \hat{\mu}$  (выборочная медиана)

$$\hat{\mu} = \begin{cases} X_{(k+1)}, & n = 2k + 1 \\ \frac{X_{(k)} + X_{(k+1)}}{2}, & n = 2k \end{cases}$$

## Определение

Пороговой точкой (BP)  $\varepsilon_n^*$  оценки  $\hat{\theta}$ , построенной на выборке  $X_1, \dots, X_n$  называется:

$$\varepsilon_n^* = \frac{1}{n} \max \left\{ m : \max_{i_1, \dots, i_m} \sup_{y_1, \dots, y_m} |\hat{\theta}(z_1, \dots, z_m)| < \infty \right\}$$

Где выборка  $z_1, \dots, z_m$  получена заменой значений  $X_{i_1}, \dots, X_{i_m}$  на произвольные значения  $y_1, \dots, y_m$

## Доверительные интервалы

### Определение

Пусть для  $X_1, \dots, X_n \sim F(x, \theta)$ ,  $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^1$  построены статистики  $T_1(x_1, \dots, x_n)$  и  $T_2(x_1, \dots, x_n)$ , такие что

$$\begin{cases} T_1(x) < T_2(x) \\ P(T_1(x) < \theta < T_2(x)) = 1 - \alpha, \quad 0 < \alpha < 1 \end{cases}$$

Тогда интервал  $(T_1(x), T_2(x))$  называется доверительным интервалом уровня надёжности (доверия)  $1 - \alpha$  параметра  $\theta$ .

### Определение

Случайная функция  $G(x_1, \dots, x_n, \theta) = G(x, \theta)$  называется центральной (опорной) статистикой, если

1.  $G(x, \theta)$  непрерывна и монотонна по  $\theta$
2.  $F_G(x)$  не зависит от  $\theta$

Односторонние доверительные интервалы:

$$P(G(x, \theta) < Z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$$

$$P(Z_\alpha < G(x, \theta)) = 1 - \alpha$$

Квантили не зависят от  $\theta$ , с их помощью можно выразить односторонние доверительные интервалы. Центральным доверительным интервалом будет:

$$P(Z_{\frac{\alpha}{2}} < G(x, \theta) < Z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$$

### Определение

Пусть случайные величины  $\xi_1, \dots, \xi_m \sim N(0, 1)$  и независимы.

Тогда случайная величина  $\eta = \sum_{i=1}^m \xi_i^2 \sim \chi^2(m)$  (удовлетворяет распределению хи-квадрат ( $\chi^2$ ) с  $m$  степенями свободы).

## Определение

Пусть  $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m \sim N(0, 1)$  и независимы.

Тогда случайная величина  $\zeta = \frac{\xi_0}{\sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \xi_i^2}} \sim t(m)$  (распределение Стьюдента с  $m$  степенями свободы)

## Определение

Пусть случайная величина  $\xi_1 \sim \chi^2(m)$ ,  $\xi_2 \sim \chi^2(n)$  и  $\xi_1$  и  $\xi_2$  — независимы. Тогда случайная величина  $F = \frac{\frac{1}{m}\xi_1}{\frac{1}{n}\xi_2} \sim F(m, n)$  (распределение Фишера со степенями свободы  $n, m$ )

## Теорема Фишера

Пусть  $X_1, \dots, X_n$  порождены случайной величиной  $X \sim N(m, \sigma^2)$ , тогда:

1.  $\frac{nS^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma} \right)^2 \sim \chi^2(n-1)$  (так как мы знаем  $\bar{X}$ , и все наблюдения, а по  $n-1$  наблюдению и  $\bar{X}$  можно восстановить последнее наблюдение)
2.  $\bar{X}$  и  $S^2$  — независимые случайные величины.

## Пример 1

$X_1, \dots, X_n \sim N(\theta, \sigma^2)$ ,  $\sigma^2$  — известно. Построить доверительный интервал для  $\theta$

$$\hat{\theta} = \bar{X} \sim N\left(\theta, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \theta)}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

$$P\left(Z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \theta)}{\sigma} < Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

Поскольку по середине стоит стандартное гауссовское распределение:  $Z_{\frac{\alpha}{2}} = -Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

$$P\left(-\frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma}{\sqrt{n}} - \bar{X} < -\theta < \frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma}{\sqrt{n}} - \bar{X}\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\bar{X} - \frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma}{\sqrt{n}} < \theta < \bar{X} + \frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

Итак, доверительный интервал:  $\left(\bar{X} - \frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

## Пример 2

$X_1, \dots, X_n \sim N(m, \theta_2^2)$ . Построить доверительный интервал для  $\theta_2^2$

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i - m}{\theta_2} \right)^2 \sim \chi^2(n)$$

$$P\left(\chi_{n, \frac{\alpha}{2}}^2 < \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - m)^2}{\theta_2^2} < \chi_{n, 1-\frac{\alpha}{2}}^2\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - m)^2}{\chi_{n, 1-\frac{\alpha}{2}}^2} < \theta_2^2 < \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - m)^2}{\chi_{n, \frac{\alpha}{2}}^2}\right) = 1 - \alpha$$

Здесь  $\chi_{n, \alpha}^2$  — квантиль уровня  $\alpha$  распределения  $\chi^2(n)$

### Пример 3

Если нам неизвестны оба параметра  $N(\theta_1, \theta_2^2)$ . Заменяем  $m$  на  $\bar{X}$ : Доверительный интервал для  $\theta_2$ :

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}{\chi_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}^2} < \theta_2^2 < \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}{\chi_{n, \frac{\alpha}{2}}^2}\right) = 1 - \alpha$$

Доверительный интервал для  $\theta_1$ :

$$\frac{\sqrt{n} \left( \frac{\bar{X} - \theta}{\sigma} \right)}{\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum \left( \frac{x_i - \bar{X}}{\sigma} \right)^2}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \theta_1)}{\tilde{S}} \sim t(n-1)$$

Обозначим  $t_{n, \alpha}$  квантиль уровня  $\alpha$  распределения  $t(n)$ , заметим, что  $t_{n, 1-\alpha} = t_{n, 1-\frac{\alpha}{2}}$

$$P(t_{n, 1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \theta_1)}{\tilde{S}} < t_{n, \frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\bar{X} - \frac{\tilde{S} \cdot t_{n, 1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} < \theta_1 < \bar{X} + \frac{\tilde{S} \cdot t_{n, 1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

Лекция 7 февраля

### Задача

$X_1, \dots, X_{n_1} \sim N(m_1, \sigma_1^2)$  и  $Y_1, \dots, Y_{n_2} \sim N(m_2, \sigma_2^2)$ .  $\sigma$  известны,  $m$  — неизвестны.  
 $X_1, \dots, X_n$  и  $Y_1, \dots, Y_n$  независимы. Доверительный интервал для  $\theta = m_1 - m_2$

$$T(x, y) = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \theta}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

### Задача

Пусть  $X_1, \dots, X_{n_1} \sim N(m_1, \sigma^2)$ ,  $Y_1, \dots, Y_{n_2} \sim N(m_2, \sigma^2)$ .  $\sigma$  неизвестна. Выборки независимы.

### Утверждение

$$\frac{\sum_{i=1}^{n_1} (x_i - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^{n_2} (y_i - \bar{Y})^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$$
$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (m_1 - m_2)}{\sqrt{\hat{\mathcal{D}}(\bar{X} - \bar{Y})}}$$

Посчитаем дисперсию в знаменателе:

$$\mathcal{D}(\bar{X} - \bar{Y}) = \mathcal{D}\bar{X} + \mathcal{D}\bar{Y} = \frac{\sigma^2}{n_1} + \frac{\sigma^2}{n_2} = \sigma^2 \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)$$
$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (x_i - \bar{X})^2 + \sum_{i=1}^{n_2} (y_i - \bar{Y})^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

Тогда

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (m_1 - m_2)}{\sqrt{\hat{\mathcal{D}}(\bar{X} - \bar{Y})}} = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (m_1 - m_2)}{S \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$$

Теперь можно построить доверительный интервал:

$$P \left( -t_{1-\alpha/2, n_1+n_2-2} < \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \theta}{S \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} < t_{1-\alpha/2, n_1+n_2-2} \right) = 1 - \alpha$$

$$P \left( -t_{1-\alpha/2, n_1+n_2-2} \cdot S \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} - (\bar{X} - \bar{Y}) < -\theta < t_{1-\alpha/2, n_1+n_2-2} \cdot S \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} - (\bar{X} - \bar{Y}) \right) = 1 - \alpha$$

$$P \left( (\bar{X} - \bar{Y}) - t_{1-\alpha/2, n_1+n_2-2} \cdot S \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} < \theta < t_{1-\alpha/2, n_1+n_2-2} \cdot S \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} + (\bar{X} - \bar{Y}) \right) = 1 - \alpha$$

## Асимптотические доверительные интервалы

Пусть  $X_1, \dots, X_n \sim F(x, \theta)$ ,  $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^1$

$\hat{\theta}$  — состоятельная оценка  $\theta$ .

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} U, U \sim N(0, \sigma^2(\theta))$$

И  $\sigma^2(\theta)$  непрерывна по  $\theta$ .

$$P \left( Z_{\alpha/2} < \frac{\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)}{\sigma(\hat{\theta}_n)} < Z_{1-\alpha/2} \right) \rightarrow 1 - \alpha$$

$$P \left( \hat{\theta}_n - \frac{\sigma(\hat{\theta}_n) Z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} < \theta < \frac{\sigma(\hat{\theta}_n) Z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} + \hat{\theta}_n \right)$$

Если  $\exists$  R-эффективная оценка  $\hat{\theta}_n$ , то выбирая её  $\mathcal{D}\hat{\theta}_n = \frac{1}{I_n(\theta)}$ , тогда  $\frac{\sigma(\hat{\theta}_n)}{\sqrt{n}} = \sqrt{\mathcal{D}\hat{\theta}_n} = \frac{1}{\sqrt{n I_1(\hat{\theta}_n)}}$

$$P \left( \hat{\theta}_n - \frac{Z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n I_1(\hat{\theta}_n)}} < \theta < \hat{\theta}_n + \frac{Z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n I_1(\hat{\theta}_n)}} \right) \rightarrow 1 - \alpha$$

## Пример

$X_1, \dots, X_n \sim Bi(1, \theta)$

АДИ для  $\theta$ :

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \text{ — несмещённая, состоятельная, R-эффективная}$$

$\mathcal{D}x_i = \theta(1 - \theta)$ .

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} U, U \sim N(0, \theta(1 - \theta))$$

$$P \left( \hat{\theta} - Z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{\theta}(1 - \hat{\theta})}{n}} < \theta < \hat{\theta} + Z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{\theta}(1 - \hat{\theta})}{n}} \right) \rightarrow 1 - \alpha$$

## Определение

Основная (или нулевая) гипотеза  $H_0$ , с ней конкурируют  $H_1, H_2, \dots, H_A$  (альтернативные гипотезы).

## Определение

Сложной гипотезой называют гипотезу, которая не определяет параметры распределения или само распределение однозначно.

Например

$$H_1 : \xi \sim N(m, \sigma^2)$$

$$H_2 : \xi \sim N(5, \sigma^2)$$

Простая гипотеза определяет распределение однозначно, например:

$$H_3 : \xi \sim N(5, 36)$$

Односторонние гипотезы выглядят так:

$$H_4 : \xi m < 5$$

$$H_5 : \xi m > 5$$

Двусторонние:

$$H_6 : n \neq 5$$

$$H_7 : m \in [1, 3]$$

А гипотеза  $H_8 : \{ \text{“Сегодня хорошая погода”} \}$  не является статистической, ведь не относится к распределению и параметрам.

## Определение

Статистическим критерием называют правило, руководствуясь которым, на основании реализации  $x_1, \dots, x_n$  выборки  $X_1, \dots, X_n$  принимается решение о справедливости/несправедливости гипотезы  $H_0$ .

Делим множество реализаций выборки  $S$  на два множества  $S_0, S_1$ , такие что

$$S_0 \cdot S_1 = \emptyset$$

$$S_0 + S_1 = S$$

Назовём  $S_0$  доверительной областью, а  $S_1$  — критической областью. Если реализация попала в  $S_0$ , то мы принимаем  $H_0$ , иначе принимает альтернативную гипотезу.

Тогда ошибкой первого рода (уровнем значимости критерия) называется

$$P(X \in S_1 \mid \text{верна } H_0) = \alpha$$

Ошибкой второго рода называется

$$P(X \in S_0 \wedge \text{верна } H_1) = 1 - \beta$$

## Определение

Пусть критерий предназначен для проверки  $H_0 : \theta = \theta_0$  против альтернативы  $H_1 : \theta \neq \theta_0$ , тогда функцией мощности критерия называется

$$\beta(\theta) = P(X \in S_1, \theta)$$

Критерий называется состоятельным, если при отдалении от  $\theta_0$  его функция мощности стремится к 1.

## Лекция 13 февраля

## Проверка статистических гипотез

Если  $\beta$  — функция мощности критерия проверки гипотезы  $H_0 : \theta = \theta_0$ , тогда  $\beta(\theta) = P(X \in S_1, \theta)$  и  $\beta(\theta_0) = \alpha$ , где  $\alpha$  — вероятность ошибки первого рода.

## Задача

$H_0 : \theta = \theta_0$  и  $H_1 : \theta \in \Theta_1, \theta_0 \notin \Theta_1$ . Пусть зафиксировано  $\alpha > 0$ , тогда критерий называется несмещённым, если:

$$\beta(\theta) \leq \alpha, \text{ если } \theta = \theta_0$$

$$\beta(\theta) > \alpha, \text{ если } \theta \in \Theta_1$$

## Определение

Критерий, предназначенный для проверки  $H_0 : \theta = \theta_0$  против  $H_1 : \theta \in \Theta_1$  называется состоятельным, если

$$\forall \theta \in \Theta_1 \quad \beta(\theta) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1, \text{ где } n — \text{ количество испытаний}$$

## Определение

Критерий  $\beta_0$  называется равномерно наиболее мощным, если среди всех критериев  $\beta$ :

$$\forall \theta \in \Theta \quad \beta_0(\theta) \geq \beta(\theta)$$

Локально наиболее мощным, если

$$\forall \theta \in \Theta_1 \subseteq \Theta \quad \beta_0(\theta) \geq \beta(\theta)$$

## Алгоритм проверки параметрических гипотез

1. Сформулировать проверяемую гипотезу  $H_0$  и альтернативную к ней  $H_1$ .
2. Выбрать уровень значимости  $\alpha$
3. Выбрать статистику  $T$  для проверки гипотезы  $H_0$
4. Найти распределение  $F(z | H_0)$  статистики  $T$ , при условии  $\{“H_0 \text{ верна}”\}$
5. Построить, в зависимости от формулировки гипотезы  $H_1$  и уровня значимости  $\alpha$ , критическую область  $\bar{G}$
6. Получить реализацию выборки наблюдений  $x_1, \dots, x_n$  и вычислить реализацию  $t = \varphi(x_1, \dots, x_n)$  статистики  $T$  критерия
7. Принять статистическое решение на уровне доверия  $1 - \alpha$ : если  $t \in \bar{G}$ , то отклонить гипотезу  $H_0$  как не согласующуюся с результатами наблюдений, а если  $t \in G$ , то принять гипотезу  $H_0$  как не противоречащую результатам наблюдений.

## Задача

Дамы оценивают чай. Могут ли из двух чашек выбрать чашку с хорошим чаем?

Проводятся наблюдения  $X_1, \dots, X_n \sim Bi(1, p)$

1.  $H_0 : p = p_0 = 0.5$ ,  $H_1 : p > 0.5$ . То есть  $H_0$  — дамы не могут выбрать (просто пытаются угадать).
2.  $\alpha = 0.05$ . Так как специально указано не было, берём стандартное значение.
3.  $T(x) = \sum_{i=1}^n x_i$
4.  $T(x | H_0) \sim Bi(n, \frac{1}{2})$ . Если  $n$  велико:

$$\frac{T(x) - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} = \tilde{T}(x) \sim N(0, 1)$$

5. Доверительная область:  $[0, Z_{0,95}] = [0, 1.65]$ . Критическая область:  $(1.65, +\infty)$
6. Пусть у нас есть данные  $n = 30$ ,  $\sum_{i=1}^{30} x_i = 20 = T(x)$

$$\tilde{T}(x) = \frac{20 - 30 \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{30 \cdot 0.5 \cdot 0.5}} \approx 1.82574$$

7. Попали в критическую область, значит принимаем  $H_1$  на уровне доверия  $1 - \alpha = 0.95$

## Задача

А если у нас есть две серии различных испытаний Бернулли?

Пусть  $\xi_1 \sim Bi(n_1, p_1)$  и  $\xi_2 \sim Bi(n_2, p_2)$ . Хотим проверить  $H_0 : p_1 = p_2$  против альтернатив  $H_1 : p_1 < p_2$ ,  $H_2 : p_1 > p_2$ ,  $H_3 : p_1 \neq p_2$ .

Введём обозначение  $\hat{p}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} x_{i1}}{n_1}$ ,  $\hat{p}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_2} x_{i2}}{n_2}$ , тогда:

$$\frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\mathcal{D}(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)}} \sim N(0, 1)$$

$$\text{Посчитаем } \mathcal{D}(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) = \mathcal{D}(\hat{p}_1) + \mathcal{D}(\hat{p}_2) - \underbrace{2\text{cov}(\hat{p}_1, \hat{p}_2)}_{=0} = \frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2} = pq \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right).$$

Оценим  $p$ :

$$\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} x_{i1} + \sum_{i=1}^{n_2} x_{i2}}{n_1 + n_2}$$

Тогда  $\tilde{T}(x) = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$ . По этой статистике уже можем принимать решения.

## Лекция 21 февраля

### Лемма Неймана-Пирсона

Пусть  $X_1, \dots, X_n \sim f(x, \theta)$ , параметр  $\theta$  неизвестен. Проверяется простая гипотеза  $H_0 : \theta = \theta_0$  против простой альтернативной гипотезы  $H_1 : \theta = \theta_1$  (БОО  $\theta_1 > \theta_0$ ).

Существует наиболее мощный критерий для проверки  $H_0$  против  $H_1$  с критической областью  $S_{1\alpha}^* = \{(x_1, \dots, x_n) \mid T(x_1, \dots, x_n) \geq c_\alpha\}$ , где  $T(x_1, \dots, x_n) = \frac{L(x_1, \dots, x_n, \theta_1)}{L(x_1, \dots, x_n, \theta_0)} = \frac{\prod_{i=1}^n f(x_i, \theta_1)}{\prod_{i=1}^n f(x_i, \theta_0)}$ , а  $c_\alpha$  такое что  $P_{\theta_0}(T(x) \geq c_\alpha) = \alpha$

### Доказательство

Пусть есть критерий с критической областью  $S_{1\alpha}$  лучше (более мощный) предложенного нашей леммой. Тогда (под  $x$  далее понимается вектор  $(x_1, \dots, x_n)$ ):

$$\beta(\theta_1, S_{1\alpha}) = \int \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta_1) dx_1 \dots dx_n = \int_{S_{1\alpha}} L(x, \theta_1) dx = \int_{S_{1\alpha} S_{1\alpha}^*} L(x, \theta_1) dx + \int_{S_{1\alpha} \bar{S}_{1\alpha}^*} L(x, \theta_1) dx =$$

По определению функции  $T(x)$ :

$$T(x) = \frac{L(x, \theta_1)}{L(x, \theta_0)} \Rightarrow T(x)L(x, \theta_0) = L(x, \theta_1)$$

Подставим это в сумму:

$$= \int_{S_{1\alpha} S_{1\alpha}^*} T(x)L(x, \theta_0) dx + \int_{S_{1\alpha} \bar{S}_{1\alpha}^*} T(x)L(x, \theta_0) dx$$

По определению  $\beta(\theta, S_1) = P(X \in S_1, \theta)$  то есть правдоподобие попадания случайной величины в критическую область при заданном параметре.

$$\begin{aligned} \beta(\theta_1, S_{1\alpha}^*) &= \int_{S_{1\alpha}^*} L(x, \theta_1) dx = \int_{S_{1\alpha} S_{1\alpha}^*} L(x, \theta_1) dx + \int_{\bar{S}_{1\alpha} S_{1\alpha}^*} L(x, \theta_1) dx = \\ &= \int_{S_{1\alpha} S_{1\alpha}^*} T(x)L(x, \theta_0) dx + \int_{\bar{S}_{1\alpha} S_{1\alpha}^*} T(x)L(x, \theta_0) dx \end{aligned}$$



Чуток пошаманим с выведенными формулами:

$$\begin{aligned}\beta(\theta_1, S_{1\alpha}) - \beta(\theta_1, S_{1\alpha}^*) &= \left( \int_{S_{1\alpha} S_{1\alpha}^*} T(x) L(x, \theta_0) dx + \int_{S_{1\alpha} \bar{S}_{1\alpha}^*} T(x) L(x, \theta_0) dx \right) - \\ &\quad - \left( \int_{S_{1\alpha} S_{1\alpha}^*} T(x) L(x, \theta_0) dx + \int_{\bar{S}_{1\alpha} S_{1\alpha}^*} T(x) L(x, \theta_0) dx \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \beta(\theta_1, S_{1\alpha}) - \beta(\theta_1, S_{1\alpha}^*) &= \int_{S_{1\alpha} \bar{S}_{1\alpha}^*} \underbrace{T(x)}_{< c_\alpha} L(x, \theta_0) dx - \int_{S_{1\alpha}^* \bar{S}_{1\alpha}} \underbrace{T(x)}_{\geq c_\alpha} L(x, \theta_0) dx\end{aligned}$$

Теперь можно составить равенство:

$$\beta(\theta_1, S_{1\alpha}) = \beta(\theta_1, S_{1\alpha}^*) + \int_{S_{1\alpha} \bar{S}_{1\alpha}^*} \underbrace{T(x)}_{< c_\alpha} L(x, \theta_0) dx - \int_{S_{1\alpha}^* \bar{S}_{1\alpha}} \underbrace{T(x)}_{\geq c_\alpha} L(x, \theta_0) dx$$

Правый интеграл содержит область  $S_{1\alpha}^*$ , по заданию это множество таких точек, в которых  $T(x) \geq c_\alpha$ . Левый интеграл, наоборот, содержит  $\bar{S}_{1\alpha}^*$ , то есть все точки, в которых  $T(x) < c_\alpha$ .

Значит будет справедливо неравенство:

$$\beta(\theta_1, S_{1\alpha}) < \beta(\theta_1, S_{1\alpha}^*) + c_\alpha \left( \int_{S_{1\alpha} \bar{S}_{1\alpha}^*} L(x, \theta_0) dx - \int_{S_{1\alpha}^* \bar{S}_{1\alpha}} L(x, \theta_0) dx \right)$$

Вероятность попадания в критическую область должна быть равна  $\alpha$ , тогда верно:

$$\alpha = \int_{S_{1\alpha}} L(x, \theta_0) dx = \int_{S_{1\alpha}^*} L(x, \theta_0) dx$$

При этом

$$\begin{aligned}\int_{S_{1\alpha}} L(x, \theta_0) dx &= \int_{S_{1\alpha} S_{1\alpha}^*} L(x, \theta_0) dx + \int_{S_{1\alpha} \bar{S}_{1\alpha}^*} L(x, \theta_0) dx \\ \int_{S_{1\alpha}^*} L(x, \theta_0) dx &= \int_{S_{1\alpha}^* S_{1\alpha}} L(x, \theta_0) dx + \int_{S_{1\alpha}^* \bar{S}_{1\alpha}} L(x, \theta_0) dx \\ \int_{S_{1\alpha}} L(x, \theta_0) dx - \int_{S_{1\alpha}^*} L(x, \theta_0) dx &= \int_{S_{1\alpha} \bar{S}_{1\alpha}^*} L(x, \theta_0) dx - \int_{S_{1\alpha}^* \bar{S}_{1\alpha}} L(x, \theta_0) dx = \alpha - \alpha = 0\end{aligned}$$

Тогда в ранее записанном неравенстве:

$$\begin{aligned}c_\alpha \left( \int_{S_{1\alpha} \bar{S}_{1\alpha}^*} L(x, \theta_0) dx - \int_{S_{1\alpha}^* \bar{S}_{1\alpha}} L(x, \theta_0) dx \right) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \beta(\theta_1, S_{1\alpha}) &< \beta(\theta_1, S_{1\alpha}^*) + 0 \Rightarrow \beta(\theta_1, S_{1\alpha}) < \beta(\theta_1, S_{1\alpha}^*)\end{aligned}$$

То есть всякая критическая область, отличная от  $S_{1\alpha}^*$ , будет менее мощной.

## Задача

$X_1, \dots, X_n \sim N(m, \sigma^2)$ , дисперсия известна. Построить наиболее мощный критерий для проверки  $H_0 : m = m_0$  против  $H_1 : m = m_1 > m_0$

## Решение (моё)

По лемме Неймана-Пирсона критическая область необходимого нам критерия должна выглядеть так:

$$S_{1-\alpha}^* = \{(x_1, \dots, x_n) \mid T(x) \geq c_\alpha\}, \quad T(x) = \frac{L(x, m_1)}{L(x, m_0)} \geq c_\alpha, \quad P_{m_0}(T(x) \geq c_\alpha) = \alpha$$

$$L(x, m_1) = \prod_{i=1}^n f(x_i, m_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n e^{-\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - m_1)^2}{2\sigma^2}}$$

$$L(x, m_0) = \prod_{i=1}^n f(x_i, m_0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n e^{-\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - m_0)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\frac{L(x, m_1)}{L(x, m_0)} = e^{\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - m_0)^2 - (x_i - m_1)^2}{2\sigma^2}} = e^{\sum_{i=1}^n \frac{(m_0 - m_1)(2x_i - m_1 - m_0)}{2\sigma^2}}$$

Хотим найти такое  $c_\alpha$ , что  $P(T(x) \geq c_\alpha) = \alpha$ , то есть хотим найти:

$$F_{T(x)}(c_\alpha) = \alpha \Rightarrow \int_{-\infty}^{c_\alpha} e^{\sum_{i=1}^n \frac{(m_0 - m_1)(2x_i - m_1 - m_0)}{2\sigma^2}} dx = \alpha$$

## Ответ с лекции

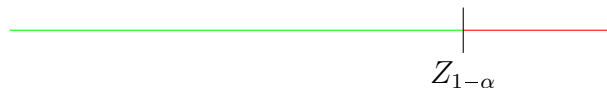
$$S_{1-\alpha}^* \{(x_1, \dots, x_n) \mid \bar{X} \geq m_0 + \frac{Z_{1-\alpha}\sqrt{n}}{\sigma}\} = \{(x_1, \dots, x_n) \mid \frac{(\bar{X} - m_0)\sqrt{n}}{\sigma} \geq Z_{1-\alpha}\}$$

## Задача

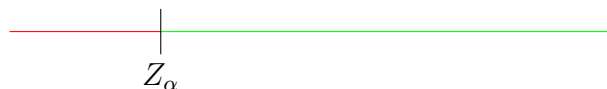
Для проверки гипотезы  $H_0 : m = m_0$

$$T(x) = \frac{(\bar{X} - m_0)\sqrt{n}}{\sigma} \Rightarrow T(x)|_{H_0: m=m_0} \sim N(0, 1)$$

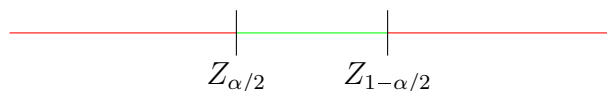
Против гипотезы  $H_1 : m > m_0$



Против гипотезы  $H_2 : m < m_0$



Против гипотезы  $H_3 : m \neq m_0$



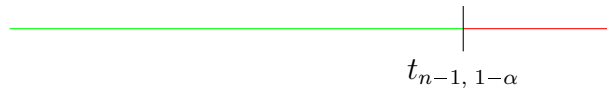
**Пояснение:** на рисунках зелёным обозначена доверительная область, красным обозначена критическая область.

## Задача

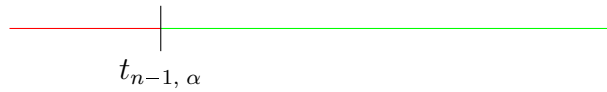
Снова гауссовская выборка, но дисперсия неизвестна. Хотим проверить гипотезу  $H_0 : m = m_0$ . Тогда нужно поменять статистику на:

$$T(x) = \frac{(\bar{X} - m_0)\sqrt{n}}{\tilde{S}} = \frac{(\bar{X} - m_0)\sqrt{n-1}}{S}$$
$$T(x)|_{H_0} \sim t(n-1)$$

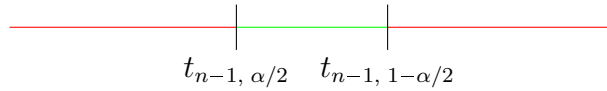
Против гипотезы  $H_1 : m > m_0$



Против гипотезы  $H_2 : m < m_0$



Против гипотезы  $H_3 : m \neq m_0$



Та же самая идея, только разделение идёт по квантилям распределения Стьюдента.

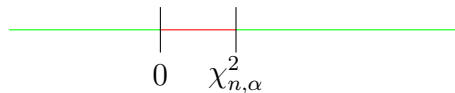
## Задача

Теперь строим критерий для оценки дисперсии при известном математическом ожидании. Проверяем гипотезу  $H_0 : \sigma = \sigma_0$ :

$$T(x) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - m)^2}{\sigma_0^2}$$

$$T(x)|_{H_0: \sigma = \sigma_0} \sim \chi^2(n)$$

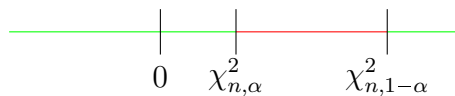
Против гипотезы  $H_1 : \sigma < \sigma_0$



Против гипотезы  $H_2 : \sigma > \sigma_0$



Против гипотезы  $H_3 : \sigma \neq \sigma_0$



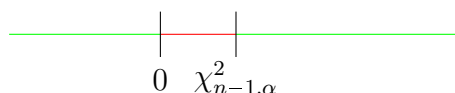
## Задача

Если математическое ожидание неизвестно:

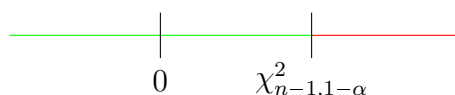
$$T(x) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}{\sigma_0^2}$$

$$T(x)|_{H_0: \sigma = \sigma_0} \sim \chi^2(n-1)$$

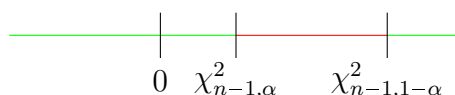
Против гипотезы  $H_1 : \sigma < \sigma_0$



Против гипотезы  $H_2 : \sigma > \sigma_0$



Против гипотезы  $H_3 : \sigma \neq \sigma_0$



## Проверка гипотез о распределении случайных величин

### Критерий Колмогорова (КАКОЙ ЖЕ ОН КРУТОЙ)

$X_1, \dots, X_n \sim F_\xi(x, \theta_0) = F_0(x)$ ,  $\theta_0$  известна. Проверяем гипотезу  $H_0 : \xi \sim F_0(x)$

Колмогоров предложил считать  $D_n = \max_{1 \leq i \leq n} |\hat{F}_n(x_i) - F_0(x_i)|$ .

Если  $n \rightarrow \infty$  (начиная с 20 уже хорошая аппроксимация) и при условии верности  $H_0$  получаем

$$\sqrt{n}D_n \sim K(t)$$

Функция распределения Колмогорова

$$K(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (-1)^j \exp\{-j^2 t^2\}$$

### Критерий хи-квадрат

$X_1, \dots, X_n \sim F_\xi(x, \theta_0) = F_0(x)$ ,  $\theta_0$  знаем. Проверяем гипотезу  $H_0 : \xi \sim F_0(x)$ .

Делим  $\mathbb{R}^1$  на  $l+2$  интервала, где  $S_0 = -\infty$ ,  $S_{l+1} = +\infty$  тогда  $\hat{p}_k = \frac{n_k}{n}$ ,  $p_k^{(0)} = F_0(S_k) - F_0(S_{k-1})$ , где  $k = \overline{1, l+1}$ .

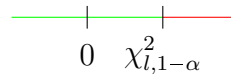
Здесь возникает  $\hat{\chi}^2 = \sum_{k=1}^{l+1} \frac{n}{p_k^{(0)}} \left( \hat{p}_k - p_k^{(0)} \right)^2$

### Утверждение

Если  $0 < p_k^{(0)} < 1$  для  $\forall k = \overline{1, l+1}$ ,  $n \rightarrow \infty$  и справедлива  $H_0$ , то

$$\hat{\chi}^2 \sim \chi^2(l)$$

Тогда график будет выглядеть так



### Задача

Проверяем теории из биологии

	$p_k^{(0)}$	$n_k$	$\hat{p}_k = \frac{n_k}{n}$
AB	$\frac{9}{16}$	315	0.556
Ab	$\frac{3}{16}$	108	0.194
aB	$\frac{3}{16}$	101	0.182
ab	$\frac{1}{16}$	32	0.058

Теперь проверим  $H_0 : \vec{p}^{(0)} = \left( \frac{9}{16}, \frac{3}{16}, \frac{3}{16}, \frac{1}{16} \right)$

Применяя критерий хи-квадрат:

$$\hat{\chi}^2 = 0.49, \text{ посчитали за кадром}$$

$$\hat{\chi}^2|_{H_0} \sim \chi^2(3)$$

Тогда при параметрах  $\alpha = 0.05$ ,  $\chi_{3, 0.95}^2 = 7.81 \Rightarrow$  наш результат лежит в доверительной области.

**Лекция 28 февраля**

### Критерий хи-квадрат Пирсона

Имеется выборка  $X_1, \dots, X_n \sim F_\xi(x, \theta)$ ,  $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^n$ .

Проверяем гипотезу  $H_0 : \xi \sim F_\xi^0(x, \theta)$  (здесь использован верхний индекс для указания на какое-то конкретное распределение).

1. Оценим вектор параметров  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)$  по методу максимального правдоподобия.
2. Разбиваем  $\mathbb{R}^1$  на  $(l + 1)$  непересекающийся интервал.



3. Введём следующие обозначения:

$$\hat{p}_k = \frac{n_k}{n}, \quad k = \overline{1, l-1}$$

$$p_k^{(0)}(\hat{\theta}) = P_{H_0}(\xi \in \Delta_k), \quad k = \overline{0, l}, \quad (\text{вероятность } \xi \text{ попасть в } k\text{-ый интервал при условии } H_0)$$

$$p_k^{(0)}(\hat{\theta}) = F(s_{k+1}, \hat{\theta}) - F(s_k, \hat{\theta})$$

Тогда справедливо

$$\hat{\chi}^2 = \sum_{k=0}^l \frac{n}{p_k^{(0)}(\hat{\theta})} \left( \hat{p}_k - p_k^{(0)}(\hat{\theta}) \right)^2 = np_0^{(0)}(\hat{\theta}) + \sum_{k=1}^{l-1} \frac{n}{p_k^{(0)}(\hat{\theta})} \left( \hat{p}_k - p_k^{(0)}(\hat{\theta}) \right)^2 + np_l^{(0)}(\hat{\theta})$$

## Утверждение

При  $n \rightarrow \infty, p_k^{(0)} > 0, \sum_{k=0}^l p_k^{(0)} = 1$  и соблюдении некоторых условий регулярности (про дифференцируемость и существование вторых производных) выполняется

$$\hat{\chi}^2|_{H_0} \sim \chi^2(l+1-1-m)$$

Здесь  $l+1$  — количество интервалов, а  $m$  — количество оцененных параметров. Доверительным интервалом будет  $(0, \chi_{1-\alpha, l-m}^2)$

## Определение

Выборки  $X_1, \dots, X_m \sim F_x(t)$  и  $Y_1, \dots, Y_m \sim F_y(t)$  называются однородными, если

$$\forall t \in \mathbb{R}^1 \quad F_x(t) \sim F_y(t)$$

Для доказательства однородности выборок следует проверять гипотезу  $H_0 : \forall t \in \mathbb{R}^1 \quad F_x(t) = F_y(t)$

## Пример

Имеется две выборки  $X_1, \dots, X_m \sim F(t)$  и  $Y_1, \dots, Y_n \sim F(t - \theta)$ . Пусть  $|EX| < \infty$ , тогда

$$\begin{aligned} EY_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} t f_y(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_x(t - \theta) dt = \left\langle \begin{matrix} t - \theta = z \\ t = z + \theta \end{matrix} \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (z + \theta) f_x(z) dz = \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} z f_x(z) dz}_{EX} + \theta \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f_x(z) dz}_1 = EX + \theta \end{aligned}$$

Тогда для проверки однородности могут быть использованы гипотезы:

$$H_0 : \theta = m_y - m_x = 0, \text{ против } \begin{cases} H_1 : \theta < 0 (m_y < m_x) \\ H_2 : \theta > 0 (m_y > m_x) \\ H_3 : \theta \neq 0 (m_y \neq m_x) \end{cases}$$

## Критерий Стьюдента

Есть две выборки  $X_1, \dots, X_m \sim N(m_x, \sigma^2)$  и  $Y_1, \dots, Y_n \sim N(m_y, \sigma^2)$ . Выборки независимы и имеют одинаковые (но неизвестные нам) дисперсии.

Тогда для проверки гипотезы  $H_0 : m_y - m_x = 0$  подойдёт статистика:

$$T(x, y) = \frac{\bar{Y} - \bar{X}}{S \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}}$$

Здесь  $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{X})^2 + \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{Y})^2}{m+n-2}$ . При верности гипотезы  $H_0$  получаем

$$T(x, y)|_{H_0} \sim t(n + m - 2)$$

Против гипотезы  $H_1 : \theta < 0$



Против гипотезы  $H_2 : \theta > 0$



Против гипотезы  $H_3 : \theta \neq 0$



## Ранговые критерии

### Определение

Рангом элемента выборки называется его номер в вариационном ряду:

$$R(x_{(k)}) = k$$

Процедура определения рангов элементов выборки называется ранжированием.

### Определение

Связкой размера  $n$  называют  $n$  совпадающих элементов выборки.

Если связке размера  $m$  предшествует  $k$  элементов, то все элементы связки получают один ранг, равный

$$\frac{1}{m} \sum_{i=k+1}^{m+k} i$$

## Ранговый критерий Вилкоксона (1945)

Предполагается  $X_1, \dots, X_m \sim F(t)$  и  $Y_1, \dots, Y_n \sim F(t - \theta)$ . Выборки независимы,  $F(t)$  — непрерывное распределение. Проверяем гипотезу  $H_0 : \theta = 0$ .

Интуитивно понятно, что в случае  $\theta \ll 0$  (математическое ожидание у  $y$  сильно меньше, чем у  $x$ ) элементы располагаются так:

$$y_1, \dots, y_n, x_1, \dots, x_m$$

И в случае  $\theta \gg 0$ :

$$x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n$$

Введём статистику следующую статистику:

$$W_{m, n} = \sum_{i=1}^n R_i, \quad R_i - \text{ранг } Y_i \text{ в объединённой выборке}$$

Тогда для случая  $\theta \ll 0$

$$\min W_{m, n} = \sum_{i=1}^n R_i = (n+1) \frac{n}{2}$$

Для случая  $\theta \gg 0$

$$\max W_{m, n} = \sum_{i=1}^n R_i = (n+2m+1) \frac{n}{2}$$

Если  $\theta = 0$ , то выборка должна быть перемешана, тогда для статистики справедливо.

$$EX_{m, n} \big|_{H_0} = (n+m+1) \frac{n}{2}, \quad \mathcal{D}W_{m, n} = \frac{mn}{12} (m+n+1)$$