Теория вероятностей.

Андрей Тищенко @AndrewTGk

2024/2025

Лекция 6 сентября.

Формула оценки

Накоп = $0.1 \cdot$ ИДЗ $+ 0.15 \cdot$ РС $+ 0.25 \cdot$ КР $+ 0.5 \cdot$ Экзамен
ИДЗ = индивидуальное домашнее задание (можно будет посмотреть на википедии курса).
РС = работа на семинарах.
КР = контрольные работы.

Учебник

Кибзун А. К., Горяинова Е. Р., Наумов А. В. "Теория вероятности и математическая статистика. Базовый курс с примерами и задачами" 2013 или 2014 года. Рекомендуется взять (или найти электронную версию), так как в учебнике будут домашние задачи.

История науки

Кавалер Демире захотел составить математическую базу для расчётов в азартных играх. Перечесление многих известных математиков, работавших в этой области. Колмогоров — легенда теорвера, придумал определение вероятности, основал СУНЦ, ездил на лыжах (я фанат).

Основные понятия

Определения

Теория вероятности — раздел математики, изучающий математические модели массовых случайных явлений.
Массовость — за n повторений эксперимента, вероятность каждого исхода стабилизируется возле какого-то значения p_i.

Замечание

Всякое случайное событие обладает массовостью.

Обозначения

$\omega_1, \ldots, \omega_n$ — элементарные случайные события.
$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ — пространство элементарных событий.
$\forall \Omega\ \forall A \quad A \subset \Omega \Leftrightarrow A$ — случайное событие.
$\forall A\ \forall \Omega \quad \Omega \subseteq A \Leftrightarrow A$ — достоверное событие.
$\forall A\ \forall \Omega \quad \Omega \cap A = \varnothing \Leftrightarrow A$ — невозможное событие.

Операции с событиями

Пусть $A,\ B \subset \Omega$

Произведение

Произведением случайных событий $A,\ B$ называется событие $A \cdot B = A \cap B$

Сумма

Суммой $A + B$ является событие $A \cup B$.

Разность

Разностью событий называется событие $A \backslash B$.

Дополнение

Дополенение случайного события до пространства Ω называется $\overline{A} = \Omega \backslash A$.

Свойства операций

1. $A + A = A$
2. $A \cdot A = A$
3. $A \cdot \Omega = A$
4. $A + \Omega = \Omega$
5. $A + B = B + A$
6. $A \cdot B = B \cdot A$
7. $A + (B + C) = (A + B) + C$
8. $\overline{\overline{A}} = A$
9. $\overline{\overline{\overline{A}}} = \overline{A}$
10. $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

Определение

Класс подмножнеств $\mathcal{A}$ на пространстве событий Ω называется <u>σ-алгеброй</u> событий, если:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. $\forall A \subset \Omega \quad A \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$
3. $\forall A_i\ A_1, \dots,\ A_n, \dots \in \mathcal{A} \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A} \wedge \prod\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

Классическое определение вероятности

Определение

<u>Исходом</u> называют элементарное случайное событие.

Требования

1. Конечное число исходов эксперимента.
2. Исходы взаимно исключающие.
3. Исходы равновозможны.

Тогда вероятностью события A называют величину:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

$|A|$ - мощность множества исходов, принадлежащих A.

Свойства вероятности

1. $P(A) \geqslant 0$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $A \cdot B = \varnothing \Rightarrow P(A + B) = P(A) + P(B)$

Пример задачи

В коробке 10 красных и 20 чёрных шаров.
Событие $A = \{\text{вытащить красный шар}\} \Rightarrow P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$

Лекция 13 сентября.

Геометрическое определение вероятности

Ω является подмножеством конечной меры в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{R}^2, \ldots$ или в $\mathbb{R}^n$. Тогда вероятность события A может быть посчитана как

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)},\ \mu \text{ - мера (длина, площадь, n-мерный объём)}$$

Свойства

1. $P(A) \geqslant 0 \quad \forall A \subseteq \Omega$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $A \cdot B = \varnothing \Rightarrow P(A + B) = P(A) + P(B)$

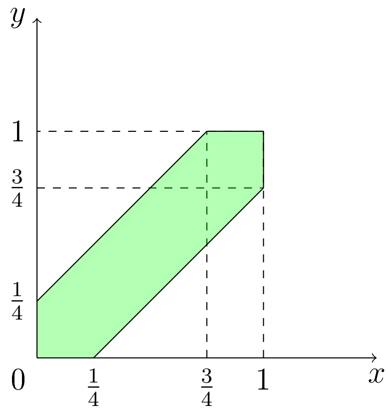
Задача

Ромео и Джульетта хотят встретиться между полуночью и часом ночи, но не могут договориться о времени, поэтому они приходят в произвольный момент времени на этом отрезке и ждут 15 минут, после чего уходят. С какой вероятностью они не встретятся?

Решение

x — время прихода Дж.
y — время прихода Ромео.
Условие задаёт следующие ограничения: $x,\ y \in [0,\ 1]$, в часах. Встретятся они, если попадут в зелёную область, задаваемую уравнением:

$$|x - y| \leqslant \frac{1}{4}$$



Посчитать искомую вероятность напрямую тяжелее, чем посчитать вероятность дополнения искомого события:

$$P(\overline{A}) = 2S_\Delta = 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{16} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$$

Где S_Δ — площадь белого треугольника на графике выше.

Замечание

Это определение не требует конечности множества исходов.

Частотное (статистическое) определение вероятности

Определение

Пусть опыт проведён N раз, а событие A произошло n_A раз. Тогда $\frac{n_A}{N}$ называется частотой события A. Тогда вероятность $P(A) = \lim\limits_{N\to\infty} \frac{n_A}{N}$

Аксиоматическое определение А. Н. Колмогорова (легенды, миллионера, плейбоя и филантропа)

Определение

Пусть $\mathcal{A} - \sigma$ алгебра событий на пространстве Ω. Назовём вероятностью числовую функцию $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^1$, удовлетворяющую следующим аксиомам:

1. $\forall A \in \mathcal{A} \quad P(A) \geqslant 0$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $\forall A_1, \ldots,\ A_n \in \mathcal{A} \quad (\forall i,\ j \in \mathbb{N}\ A_i \cap A_j \neq \varnothing \Rightarrow i = j) \Rightarrow P\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) =$
   $= \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Определение

Число $P(A),\ A \in \mathcal{A}$ называется вероятностью события A.

Определение

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ называется вероятностным пространством.

Свойства P(A)

1. $P(A) = 1 - P(\overline{A})$.
   $\Omega = A + \overline{A} \wedge A \cap \overline{A} = \varnothing$
   $P(\Omega) = P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) \Rightarrow P(A) = 1 - P(\overline{A})$

2. $P(\varnothing) = 0$
   $\overline{\Omega} = \varnothing \Rightarrow P(\Omega) + P(\varnothing) = 1 \Rightarrow P(\varnothing) = 1 - 1 = 0$

3. $A \subseteq \Omega \wedge B \subseteq \Omega \wedge A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leqslant P(B)$
   $B = A + (B \backslash A) \Rightarrow P(B) = P\big(A + (B \backslash A)\big) = P(A) + \underbrace{P(B \backslash A)}_{\geqslant 0} \Rightarrow$

   $\Rightarrow P(A) \leqslant P(B)$

4. $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$
   По первой аксиоме $P(A) \geqslant 0$
   Из третьего $A \subseteq \Omega \wedge \Omega \subseteq \Omega \wedge A \subseteq \Omega \Rightarrow P(A) \leqslant P(\Omega) = 1$

5. Формула (теорема) сложения вероятностей:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$$

$$\begin{cases} A = A \cdot \Omega = A \cdot (B + \overline{B}) = AB + A\overline{B} \Rightarrow P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB) \\ B = B \cdot \Omega = B \cdot (A + \overline{A}) = BA + B\overline{A} \Rightarrow P(B\overline{A}) = P(B) - P(AB) \end{cases} \Rightarrow$$

   $\Rightarrow A + B = AB + A\overline{B} + B\overline{A} \Rightarrow P(A + B) =$
   $= P(AB) + P(A) - P(AB) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(AB)$
   Замечание: тут не было $2(AB)$, потому что сложение по определению есть объединение, поэтому одного экземпляра достаточно.
   Для трёх слагаемых:
   $P((A + B) + C) = P(A + B) + P(C) - P\big((A + B) \cdot C\big) =$
   $= P(A) + P(B) - P(AB) + P(C) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$
   $P(A_1 + \dots + A_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum\limits_{i \leqslant j} P(A_i A_j) + \sum\limits_{i \leqslant j \leqslant k} P(A_i A_j A_k) + \dots$
   $\dots + (-1)^{n-1} P(A_1, \dots,\ A_n)$

Задача

$A_1 = \{\text{Решка при 1-ом броске}\},\ A_2 = \{\text{Решка при 2-ом броске}\}$
$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Определение

Пусть $P(B) \neq 0$, тогда условная вероятность события A при условии B

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Определение

События $A,\ B$ называются независимыми, если $P(A/B) = P(A)$
Отсюда следует: $\frac{P(AB)}{P(B)} = P(A) \Rightarrow P(AB) = P(A)P(B)$

Определение

События $A_1,\ A_2, \dots,\ A_n$ называются независимы в совокупности, если:

$$\forall k = 2, \dots,\ n\ \forall i_1, \dots,\ i_k \quad (1 \leqslant i_1 \leqslant \dots \leqslant i_k \leqslant n) \Rightarrow P(A_{i_1}, \dots,\ A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot_{\dots} \cdot P(A_{i_k})$$

Лекция 20 сентября.

Воспоминания

$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \quad P(AB) = P(B)P(A/B) = P(A)P(B/A)$

Теорема об умножении вероятностей

Пусть $(P(A_1, \dots,\ A_n)) > 0$, тогда:

$$P(A_1, \dots,\ A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)\dots P(A_n/A_1\dots A_{n-1})$$

Доказательство

$\begin{cases} B_{n-1} = A_1 \dots A_{n-1} \\ B_{n-2} = A_1 \dots A_{n-2} \\ \dots \\ B_1 = A_1 \end{cases} \Rightarrow P(\underbrace{A_1 \dots A_{n-1}}_{B_{n-1}} A_n) = P(\underbrace{B_{n-1}}_{B_{n-2}A_{n-1}})P(A_n/B_{n-1}) =$
$= P(B_{n-2}A_{n-1})P(A_n/A_1\dots A_{n-1}) = P(B_{n-2})P(A_{n-1}/B_{n-2})P(A_n/A_1\dots A_{n-1}) =$
$= P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)\dots P(A_n/A_1\dots A_{n-1})$

Схема Бернулли (Биномиальная схема)

Последовательность испытаний, такая что:

1. Исход любого испытания двоичен $\forall A\ A \vee \overline{A} \equiv 1$
2. Испытания независимы в совокупности.
3. $P(A) = p$ не изменяется от опыта к опыту.

Например, подбрасывание монеты.
Положим У - успех, Н - неудача.
В таком случае k успехов можно получить $P_n(k)C_n^k p^k (\underbrace{1-p}_{=q})^{n-k}$ способами

Доказательство

$P(\underbrace{\text{У}\dots\text{У}}_{k}\underbrace{\text{Н}\dots\text{Н}}_{n-k}) = p^k q^{n-k}$

$P(\{\underbrace{\text{У}\dots\text{У}}_{k}\text{Н}\dots\text{Н}\}) + P(\text{Н}\underbrace{\text{У}\dots\text{У}}_{k}\text{Н}\dots\text{Н}) + \dots + P(\text{Н}\dots\text{Н}\underbrace{\text{У}\dots\text{У}}_{k}) =$
$= C_n^k p^k q^{n-k}$
$\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = 1$

Следствие

При $k_1 \leqslant k \leqslant k_2: \quad P_n(k) = \sum\limits_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k q^{n-k}$

Обозначение

Если максимальная вероятность достигается при $k = m$, то есть

$$C_n^m p^m q^{n-m} = \max_{0 \leqslant k \leqslant n} C_n^k p^k q^{n-k}$$

Тогда можно сказать $m = \underset{0 \leqslant k \leqslant n}{\text{argmax}} P_n(k)$
Можно посчитать без вычисления всех значений:
$m = \begin{cases} [(n+1)p], \text{ если } (n+1)p \text{ - нецелое число} \\ (n+1)p \wedge (n+1)p - 1, \text{ иначе} \end{cases}$

Полиномиальная схема испытаний

1. Проводится n независимых опытов
2. В каждом опыте m взаимноисключающих исходов $(n_1, \ldots,\ n_m)$
3. $P(n_1) = p_1,\ P(n_2) = p_2, \ldots,\ P(n_m) = p_m, \quad p_1 + p_2 + \cdots + p_m = 1$

$\sum\limits_{i=1}^{m} n_i = n$
$P_n(n_1,\ n_2, \ldots,\ n_m) = \dfrac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_m!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_m^{n_m}$

Определение

Пусть $H_1, \ldots,\ H_n \subset \Omega$, события $H_1, \ldots,\ H_n$ называются полной группой событий (гипотезами), если

1. $\forall i,\ j \quad i \neq j \Rightarrow H_i \cdot H_j = \varnothing$
2. $H_1 + \cdots + H_n = \Omega$

Формула полной вероятности

Пусть $H_1, \ldots,\ H_n$ — полный граф событий, $A \subset \Omega$
$P(A) = P(A \cdot \Omega) = P\big(A \cdot (H_1 + \cdots + H_n)\big) = P(AH_1 + \cdots + AH_n)$, так как события $H_1, \ldots,\ H_n$ независимы, можно сделать переход:
$P(AH_1 + \cdots + AH_n) = P(AH_1) + \cdots + P(AH_n) = P(H_1)P(A/H_1) + \cdots + P(H_n)P(A/H_n)$
Получаем $P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + \cdots + P(H_n)P(A/H_n)$

Задача

Студент выучил m билетов из n. Посчитать вероятность вытянуть выученный билет при заходе первым, вторым.
$A = \{$студент вытащит выученный билет$\}$
$H_1 = \{$Другой студент вытащит выученный нашим студентом билетом$\}$
$H_2 = \{$Наш студен вытащит невыученный билет$\}$
$P(H_1) = \frac{m}{n}, \quad P(H_2) = \frac{n-m}{n}$
$P(A/H_1) = \frac{m-1}{n-1}, \quad P(A/H_2) = \frac{m}{n-1}$
$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) = \frac{m}{n}\frac{m-1}{n-1} + \frac{n-m}{n}\frac{m}{n-1} = \frac{m}{n}$

Формула Байеса

$H_1, \dots H_n$ — гипотезы
$P(H_1), \dots,\ P(H_n)$ — априорные вероятности.
Произошло событие A
$P(H_1/A), \dots,\ P(H_n/A)$ — апосториорные вероятности.

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i A)}{P(A)} = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n} P(H_k)P(A/H_k)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} P(H_i/A) = 1$$

Лекция 27 сентября

$H_1, \dots,\ H_n$ — ПГС
$P(H_1), \dots,\ P(H_n)$ — априорные вероятности.
Произошло событие A.
$P(H_1/A), \dots,\ P(H_n/A)$ — апостериорные вероятности.
$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_n)P(A/H_k)}$

Задача

Завод 1 поставляет 65% продукции. При этом 90% его продукции не имеет дефектов.
Завод 2 поставляет 35% продукции. При этом 80% его продукции не имеет дефектов.
Какой завод более вероятно поставит продукт с дефектом?
$A = \{$Произведён дефектный продукт$\}$
$H_1 = \{$Прибор изготовил завод 1$\},\ P(H_1) = 0.65,\ P(A/H_1) = 0.1$
$H_2 = \{$Прибор изготовил завод 2$\},\ P(H_2) = 0.35,\ P(A/H_2) = 0.2$
$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)} = \frac{0.1 \cdot 0.65}{0.1 \cdot 0.65 + 0.2 \cdot 0.35} = \frac{65}{135}$
$P(H_2/A) = \frac{70}{135} > P(H_1/A)$, получается деталь с дефектом с большей вероятностью поступила со второго завода.

Случайные величины

$\Omega = \{\omega_1,\ \omega_2, \dots,\ \omega_6\}$
$\xi = \{1,\ 2, \dots,\ 6\}$
$\Omega = \{\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3, \dots\}$
$\xi = \{1,\ 2,\ 3, \dots\}$
Я понятия не имею, что значат эти множества, но на доске мы их написали со словами: "Давайте покидаем монетку".
Случайная величина $\xi : \Omega \longrightarrow R^1$

Определение

Случайной величиной ξ называется числовая функция $\xi : \Omega \longrightarrow R^1$, которая удовлетворяет условию:

$$\forall x\ \{\omega;\ \xi(\omega) \leqslant x\} \in \mathcal{A}$$

Определение

Функцией распределения (вероятностей) случайной величины ξ называется

$$F_\xi(x) = P(\omega;\ \xi(\omega) \leqslant x) = P(\xi \leqslant x)$$

Свойства $F(x)$

1. $F(+\infty) = 1,\ F(-\infty) = 0 \Rightarrow 0 \leqslant F(x) \leqslant 1$. На самом деле аргумент $F(x)$ принадлежит R^1, но видимо бесконечность теперь число.

2. Пусть $x_1 < x_2$, тогда $F(x_1) \leqslant F(x_2)$.
   Доказательство:
   $F(x_2) = P(\xi \leqslant x_2),\ C = \{\omega:\ \xi(\omega) \leqslant x_2\},\ A = \{\omega : \xi(\omega) \leqslant x_1\},$
   $B = \{\omega : x_1 < \xi(\omega) \leqslant x_2\}.\ C = A + B,\ P(C) = P(A) + P(B)$
   $F(x_2) = P(\xi \leqslant x_2) = P(\underbrace{\xi \leqslant x_1}_{A}) + P(B) = F(x_1) + P(B) \Rightarrow$

   $\Rightarrow F(x_2) \geqslant F(x_1)$

3. $F(x_0) = \lim\limits_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} F(x_0 + \varepsilon)$

Определение

Дискретная случайная величина (тут реально ничего не было даже на лекции).

Определение

Пусть случайная величина ξ — дискретная. Рядом распределения ξ называется

ξ	x_1	x_2	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

$\sum\limits_{k=1}^{n} p_k = 1,\ p_k = P(\omega : \xi(\omega) = x_k)$

Пример

ξ	-1	0	2
P	0.3	0.5	0.2

Если $x < -1$, то $F(x) = 0$
Если $-1 \leqslant x < 0$, то $F(x) = 0.3$
Если $0 \leqslant x < 2$, то $F(x) = 0.8$
Если $2 \leqslant x$, то $F(x) = 1$

Определение

Математическим ожиданием (средним значением) дискретной случайной величины с конечным числом значений $x_1, \dots,\ x_n$ называется число

$$E\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Если у дискретной случайной величины счётное количество значений, тогда

$$E\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i,\ \text{если ряд} \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i \text{ сходится}$$

Сходимость к ∞ считают неопределённой, а с $+\infty,\ -\infty$ проблем нет.

Определение

Дисперсией случайной велиины ξ называют

$$\mathcal{D}\xi = E(\xi - E\xi)^2$$

Квадрат отклонения от среднего.

Определение

Среднеквадратическим отклонением случайной величины ξ называют

$$\sigma_1 = \sqrt{\mathcal{D}\xi}$$

Свойства математического ожидания

1. $\forall c \in \mathbb{R} \quad Ec = c$
2. $E(c \cdot \xi) = \sum\limits_{i=1}^{n} cx_i p_i = cE\xi$
3. $\forall a,\ b \in \mathbb{R} \quad a \leqslant \xi \leqslant b \Rightarrow a \leqslant E\xi \leqslant b$
   Доказательство:
   $a \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} ap_i \leqslant E\xi = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i p_i \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} bp_i = b$
4. $E(\xi_1 + \xi_2) = E\xi_1 + E\xi_2$

Лекция 4 октября.

Воспоминания:

ξ	x_1	$\dots$	x_n
p	p_1	$\dots$	p_n

$E\xi = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i p_i$

Свойства математического ожидания (продолжение)

5. Пусть $\eta = \varphi(\xi),\ \varphi(x)$ - детерминированная функция.
   $E\xi = \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi(x_i) p_i$

Свойства дисперсии.

1. $\mathcal{D}c = 0$
2. $\mathcal{D}(c\xi) = E(c\xi - cE\xi)^2 = Ec^2(\xi - E\xi)^2 = c^2\mathcal{D}\xi$
3. $\forall \xi \quad$ случайная величина$(\xi) \Rightarrow \mathcal{D}\xi \geqslant 0$
4. $\mathcal{D}\xi = E\big(\xi^2 - 2\xi E\xi + (E\xi)^2\big) = E\xi^2 - 2(E\xi)^2 + (E\xi)^2 = E\xi^2 - (E\xi)^2$
5. $\mathcal{D}(\xi_1 + \xi_2) = E(\xi_1 + \xi_2)^2 - \big(E(\xi_1 + \xi - 2)\big)^2 =$
   $= E\xi_1^2 + 2E(\xi_1\xi_2) + E\xi_2^2 - \big((E\xi_1)^2 + 2E\xi_1 E\xi_2 + (E\xi_2)^2\big) =$
   $= \big(E\xi_1^2 - (E\xi_1)^2\big) + \big(E\xi_2^2 - (E\xi_2)^2\big) + 2\big(E(\xi_1\xi_2) - E\xi_1 E\xi_2\big) =$
   $= \mathcal{D}\xi_1 + \mathcal{D}\xi_2 + 2\underbrace{\big(E(\xi_1\xi_2) - E\xi_1 E\xi_2\big)}_{\text{Ковариация } \xi_1 \text{ и } \xi_2}$

Если $\xi_1,\ \xi_2$ независимы, то $\operatorname{cov}(\xi_1,\ \xi_2) = 0$ (ковариация нулевая).

Определение

Начальным моментом k-го порядка случайной величины ξ называется

$$\mu_k = E\xi^k,\ k = 1,\ 2, \dots$$

Определение

Центральным моментом k-го порядка случайной величины ξ называется

$$\nu_k = E(\xi - E\xi)^k,\ k = 2,\ 3, \ldots$$

$$\nu_2 = \mathcal{D}\xi$$

Определение

Случайная величина $\overset{\circ}{\xi} = \xi - E\xi$ называется центрированной случайной величиной

$$E\overset{\circ}{\xi} = 0$$

Определение

Случайная величина $\xi^* = \frac{\overset{\circ}{\xi}}{\sigma}$ называют нормированной случайной величиной.

$$D\xi^* = 1$$

Распределения:

1. Распределение Бернулли

$$\xi \sim \mathrm{Ber}(p), \quad 0 < p < 1$$

ξ	0	1
p	$1-p$	p

ξ^2	0	1
p	$1-p$	p

$$E\xi = p, \quad \mathcal{D}\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq$$

2. Биномиальное распределение

$$\xi \sim \mathrm{Bi}(n,\ p), \quad 0 < p < 1$$

ξ	0	1	k	n
p	$\ldots$	$\ldots$	$C_n^k p^k q^{n-k}$	$\ldots$

$$E\xi = \sum_{k=0}^{n} k C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} =$$

$$= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} q^{n-k} = \left\langle \begin{matrix} j = k-1 \\ k = j+1 \end{matrix} \right\rangle =$$

$$= np \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{j!(n-1-j)!} p^j q^{n-1-j} = np(p+q)^{n-1} = np$$

Можно посчитать математическое ожидание иначе:

$$\xi = \xi_1 + \cdots + \xi_n, \quad \begin{array}{c|c|c} \xi_i & 0 & 1 \\ \hline \mathrm{p} & q & p \end{array} \Rightarrow E\xi = E\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E\xi_i = np$$

$$\mathcal{D}\xi = \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k p^k q^{n-k} - (np)^2 = \cdots = npq$$

Так как $\xi_1, \ldots,\ x_n$ независимы:

$$\mathcal{D}\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{D}\xi_i = npq$$

3. Распределение Пуассона

$$\xi \sim \Pi(\lambda), \quad \lambda > 0$$

$$\xi = \{0,\ 1,\ 2, \dots\}$$

$$P(\xi = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

$$E\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$

$$\mathcal{D}\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} - \lambda^2 = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k-1}}{(k-1)!} - \lambda^2 =$$

$$= \lambda \sum_{k=1}^{\infty} (k-1+1) \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k-1}}{(k-1)!} - \lambda^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

Теорема Пуассона

Пусть в схеме испытаний Бернулли: $n \to \infty,\ p \to 0,\ np \to \lambda$. Тогда

$$\lim_{n \to \infty} C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

Доказательство

$$\lim_{n \to \infty} C_n^k p^k q^{n-k} = \lim_{n \to \infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n \to \infty} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \frac{(1-\frac{\lambda}{n})^n}{(1-\frac{\lambda}{n})^k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Погрешность такой апроксимации:

$$\left| C_n^k p^k q^{n-k} - \frac{e^{-np}(np)^k}{k!} \right| \leqslant np^2$$

Задача

Завод поставляет 1000 бутылок воды. Каждая бутлка может быть повреждена в пути с вероятностью 0.002. Какое среднее количество бутылок будет повреждено? Какова вероятность повреждения не более 2 бутылок?
Случайная величина ξ — количество повреждённых бутылок.
$\xi \sim \mathrm{Bi}(1000, 0.002) \Rightarrow E\xi = 1000 \cdot 0.002 = 2$
Погрешность при апроксимации Пуассоновским распределением будет $\leqslant np^2 = 0.004$, что нас устраивает по точности.
$P(\xi \leqslant 2) = p(\xi = 0) + p(\xi = 1) + p(\xi = 2) = e^{-2}(1 + 2 + 2) = \frac{5}{e^2}$

Ещё распределения

4. Геометрическое распределение

$$\xi \sim G(p), \quad 0 < p < 1$$

$\xi = \{1,\ 2, \dots\}, \quad P(\xi = k) = q^{k-1}p$. После первого успеха эксперименты прекращаюся.

$$E\xi = \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}p = p \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} \left(q^k\right)' = p \left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k\right)' = p \left(\frac{q}{1-q}\right)' =$$

$$\frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

Задача

Студент выучил 80% билетов. Преподаватель спрашивает его, пока не обнаружит незнание. Сколько в среднем билетов спросит преподаватель?
$\xi \sim G(0.2) \quad E\xi = \frac{1}{0.2} = 5$

Лекция 11 октября.

Воспоминания: $F_\xi(x) = P(\xi \leqslant x)$

Непрерывные случайные величины

Определение

Неотрицательная кусочно-непрерывная функция $f_\xi(x)$ называется <u>плотностью</u> <u>распределения</u> случайной величины ξ, если

$$F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\,dt$$

Прикол про Канторову лестницу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ x \leqslant 0 \\ \frac{1}{2}F(3x), \ 0 \leqslant x < \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2}, \ \frac{1}{2} \leqslant x < \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}F(3x-2), \ \frac{2}{3} \leqslant x < 1 \\ 1, \ x \geqslant 1 \end{cases} \qquad \text{непрерывна, но не имеет плотности.}$$

$P(\xi = x) = F(x) - \lim\limits_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} F(x - \varepsilon) = 0$

$f(x) = F'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{P(x < \xi \leqslant x + \Delta x)}{\Delta x}$

$f(x)\Delta x \underset{\Delta x \to 0}{=} P(x < \xi \leqslant x + \Delta x)$

Свойства $f_\xi(x)$

1. $\forall x \in \mathbb{R}^1 \quad f_\xi(x) \geqslant 0$
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)\,dx = F(+\infty) = 1$
3. $\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 < \xi \leqslant x_2)$
4. В точках дифференцируемости функции $F(x)$
$$f(x) = F'(x)$$
5. Пусть случайная величина ξ имеет плотность распределения $f_\xi(x)$. Детерминированная функция $\varphi(x)$ является монотонной и дифференцируемой.
$$\text{СВ } \eta = \varphi(\xi) \quad f_\eta(y) - ?$$
   a. Пусть $\varphi(x)$ — монотонно возрастающая функция:
$$F_\eta(y) = P(\eta \leqslant y) = P(\varphi(\xi) \leqslant y) = P\big(\xi \leqslant \varphi^{-1}(y)\big) = F_\xi\big(\varphi^{-1}(y)\big)$$
$$f_\eta(y) = \frac{d}{dy}F_\eta(y) = f_\xi\big(\varphi^{-1}(y)\big) \cdot (\varphi^{-1}(y))'$$

b. Пусть $\varphi(x)$ — монотонно убывающая функция.

$$F_\eta(y) = P(\eta \leqslant y) = P\big(\varphi(\xi) \leqslant y\big) = P\big(\xi \geqslant \varphi^{-1}(y)\big) = 1 - F_\xi\big(\varphi^{-1}(y)\big)$$

$$f_\eta(y) = \frac{d}{dy} F_\eta(y) = -f_\xi\big(\varphi^{-1}(y)\big)\big(\varphi^{-1}(y)\big)'$$

Минус возникает для компенсации отрицательности производной обратной функции.

c. Пусть $\varphi(x)$ — монотонная функция:

$$f_\eta(y) = f_\xi\big(\varphi^{-1}(y)\big)\Big|\big(\varphi^{-1}(x)\big)'\Big|$$

d. Если $\varphi(x)$ — немонотонная функция. Разбиваем на интервалы монотонности:

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x), \ldots,\ \varphi_n(x)$$

Найдём: $\varphi_1^{-1}(y),\ \varphi_2^{-1}(y), \ldots,\ \varphi_n^{-1}(y)$. Тогда:

$$f_\eta(y) = \sum_{i=1}^{k} f\big(\varphi_i^{-1}(y)\big)\Big|\big(\varphi_i^{-1}(y)\big)'\Big|$$

Определение

Математическое ожидание непрерывной случайной величины ξ с плотностью $f_\xi(x)$ называется число:

$$E\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)\, dx$$

если сходится $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x| f_\xi(x)\, dx$

Замечание

1. Если $f_\xi(x) > 0$ только при $x > 0$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)\, dx$ расходится, то $E\xi = +\infty$
2. Если $f_\xi(x) > 0$ только при $x < 0$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)\, dx$ расходится, то $E\xi = -\infty$
3. Распределение Коши: $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx$$

Совйства математического ожидания

1. $Ec = c$
2. $E(c\xi) = cE(\xi)$
3. $a \leqslant \xi \leqslant b \Rightarrow a \leqslant E\xi \leqslant b$
4. $E(\xi_1 + \xi_2) = E\xi_1 + E\xi_2$
5. Пусть случайная величина $\eta = \varphi(\xi)$, φ — детерминированная функция.

$$E\eta = \int\limits_{\infty}^{\infty} \varphi(x) f_\xi(x)\, dx$$

Определение

Дисперсией называется:

$$\mathcal{D}\xi = E(\xi - E\xi)^2 = E\xi^2 - (E\xi)^2$$

Кванти́ль.

Определение

Число $\underline{Z_\gamma}$ $0 < \gamma < 1$, называется <u>γ-квантилью</u> непрерывного строго монотонного распределения $F_\xi(x)$, если:

$$F_\xi(Z_\gamma) = \gamma = P(\xi \leqslant Z_\gamma) = \int\limits_{-\infty}^{Z_\gamma} f(x)\, dx$$

Были примеры с графиками, я их очень люблю.

Определение

Квантиль $Z_{0,5}$ называется <u>медианой</u>. Не всегда совпадает с математическим ожиданием.

Лекция 25 октября

Равномерное распределение

$$\xi \sim R(a,\ b)$$

$f(x) = \begin{cases} 0,\ x \notin (a,\ b) \\ \frac{1}{b-a}, x \in (a,\ b) \end{cases}$
$E\xi = \frac{a+b}{2}$
$\mathcal{D}\xi = \frac{(b-a)^2}{12}$
$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\, dt \Rightarrow F(x) = \begin{cases} 0,\ x \leqslant a \\ \frac{x-a}{b-a},\ x \in (a,\ b) \\ 1,\ x \geqslant b \end{cases}$

Экспоненциальное (показательное) распределение

$$\xi \sim E(\lambda),\ \lambda > 0$$

$f(x) = \begin{cases} 0,\ x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x},\ x \geqslant 0 \end{cases}$
$E\xi = \frac{1}{\lambda}$
$\mathcal{D}\xi = \frac{1}{\lambda^2}$
$F(x) = \begin{cases} 0,\ x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x},\ x \geqslant 0 \end{cases}$

Свойства

Пусть $\xi \sim E(\lambda)$, тогда:

$$\forall t,\ \tau \quad P(\xi > t+\tau/\xi > t) = P(\xi > \tau),\ \text{условная вероятность}$$

Доказательство

$$P(\xi > t+\tau/\xi > t) = \frac{P(\xi > t+\tau)}{P(\xi > t)} = \frac{1-F(t+\tau)}{1-F(t)} = \frac{e^{-\lambda(t+\tau)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda\tau} =$$
$$= 1 - F(\tau) = P(\xi > \tau)$$

Нормальное (гауссовское) распределение

$$\xi \sim N(m,\ \sigma^2)$$

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$
$E\xi = m$
$\mathcal{D}\xi = \sigma^2$

Определение

Функция $\Phi_0(x) = \int\limits_0^x \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ называется <u>функцией Лапласа</u>

Свойства

$\Phi_0(+\infty) = 0.5$
$\Phi_0(-x) = -\Phi_0(x)$
Правило трёх сигм

$$P(|\xi - m| < 3\sigma) = 2\Phi_0\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi_0(3) = 0.997$$

Лекция 1 ноября

Неравенства Чебышёва

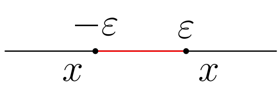
Пусть $E|\xi|^r < \infty$. Тогда:

$$\forall\varepsilon > 0 \quad P(|\xi| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{E|\xi|^r}{\varepsilon^r}$$

Доказательство

$$E|\xi|^r = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x|^r f(x)\,dx$$

$$x \in (-\infty,\ -\varepsilon] \cup [\varepsilon,\ +\infty),\ \text{то есть}$$



Тогда:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x|^r f(x)\,dx \geqslant \int\limits_{|x|\geqslant\varepsilon}^{+\infty} |x|^r f(x)\,dx \geqslant \varepsilon^r \int\limits_{|x|>\varepsilon}^{+\infty} f(x)\,dx = \varepsilon^r P(|\xi| \geqslant \varepsilon) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{E|\xi|^r}{\varepsilon^r} \geqslant P(|\xi| \geqslant \varepsilon),\ \text{ч.т.д.}$$

Частные случаи

1. $r = 1 \wedge P(\xi \geqslant 0) = 1$
$$P(\xi \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{E\xi}{\varepsilon}$$
2. Пусть $r = 2$
$$P(|\xi| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{E\xi^2}{\varepsilon^2}$$
3. Пусть $r = 2, \quad \eta = \xi - E\xi$
$$P(|\xi = E\xi| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathcal{D}\xi}{\varepsilon^2}$$

Задача

Случайная величина ξ — расход электрической энергии в месяц. Известно $E\xi = 4\,000$. Оценить $P(\xi \geqslant 10\,000)$.
Применяя неравенство Чебышёва может прикинуть эту вероятность:
$$P(\xi \geqslant 10\,000) \leqslant \frac{4\,000}{10\,000} = 0.4$$

Неравенство не находит вероятность точно, используется только для получения грубой оценки!

Определение

Вектор $\xi = (\xi_1, \ldots,\ \xi_n)$, компоненты которого $\xi_1, \ldots,\ \xi_n$, являющиеся случайными величинами, называется случайным вектором.

Определение

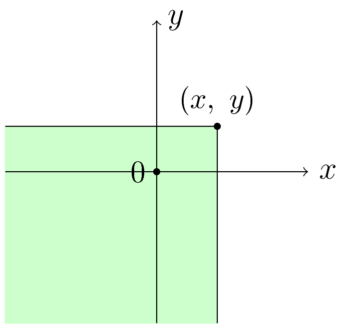
Функцией распределения случайного вектора $\xi = (\xi_1, \ldots,\ \xi_n)$ называется
$$F_\xi(x_1, \ldots,\ x_n) = P(\xi_1 \leqslant x_1, \ldots,\ \xi_n \leqslant x_n)$$

Замечание

$\{\xi_1 \leqslant x_1, \ldots,\ \xi_n \leqslant x_n\} = \{(\xi_1 \leqslant x_1) \cap (\xi_2 \leqslant x_2) \cap \cdots \cap (\xi_n \leqslant x_n)\}$

Пример

Пусть $n = 2$. $F_\xi(x,\ y) = P(\xi_1 \leqslant x,\ \xi_2 \leqslant y)$



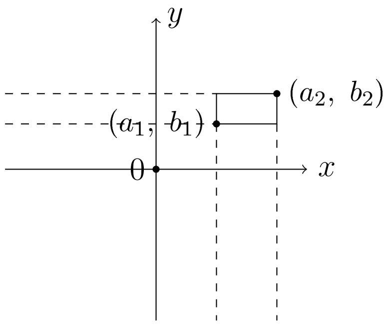
Свойства $F(x,\ y)$

1. $\forall x,\ y \quad 0 \leqslant F(x,\ y) \leqslant 1$

2. $F(-\infty,\ -\infty) = 0 = F(x,\ -\infty) = F(-\infty,\ y)$

3. $F(+\infty,\ +\infty) = 1$

4. $F(+\infty,\ y) = P(\xi_2 \leqslant y) = F_{\xi_2}(y)$ Рассмотрим вероятность попадания в квадрат:



5. $P(a_1 \leqslant \xi \leqslant a_2,\ b_1 \leqslant \xi_2 \leqslant b_2) =$
   $= F(a_2,\ b_2) - F(a_2,\ b_1) - F(a_1,\ b_2) + F(a_1,\ b_1)$

6. $F(x,\ y)$ монотонно неубывающая функция по каждому аргументу.
   Доказательство: $\forall \Delta x > 0 \quad F(x + \Delta x,\ y) \geqslant F(x,\ y)$
   $F_\xi(x + \Delta x,\ y) = P(\xi \leqslant x + \Delta x,\ \xi_2 \leqslant y) = P(\xi_1 \leqslant x,\ \xi_2 \leqslant y) +$
   $+ \underbrace{P(x < \xi_1 \leqslant x + \Delta x,\ \xi_2 \leqslant y)}_{\alpha \geqslant 0} = F(x,\ y) + \alpha \geqslant F(x,\ y)$

Определение

Компоненты ξ_1 и ξ_2 случайного вектора $\xi = (\xi_1,\ \xi_2)$ называются <u>независимыми</u>, если верно:

$$\forall x,\ y \quad F_\xi(x,\ y) = F_{\xi_1}(x) F_{\xi_2}(y)$$

Определение

Дискретный случайный вектор:

$\xi_1,\ \xi_2$	$y_1 \ldots y_k$
x_1	$p_{1\,1} \ldots p_{1\,k}$
x_2	$p_{2\,1} \ldots p_{2\,k}$
$\vdots$	$\vdots$
x_n	$p_{n\,1} \ldots p_{n\,k}$

$p_{i\,j} = P(\xi_1 = x_i,\ \xi_2 = y_j)$

$\sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{k} p_{i\,j} = 1$

ξ_1	x_1	x_2	$\ldots$	x_m
p	$p_{1\bullet}$	$p_{2\bullet}$	$\ldots$	$p_{m\bullet}$

$p_{i\bullet} = \sum\limits_{j=1}^{k} p_{i\,j}$

Утверждение

Компоненты $\xi_1,\ \xi_2$ дискретного случайного вектора $\xi = (x_1,\ x_2)$ независимы тогда и только тогда, когда

$$\forall i = \overline{1,\ m},\ j = \overline{1,\ k} \quad p_{i\,j} = p_{i\bullet} \cdot p_{\bullet j}$$

Определение

Неотрицательная кусочно-непрерывная функция $f_\xi(x,\ y)$ называется плотностью распределения случайного вектора $\xi = (\xi_1,\ \xi_2)$, если

$$F_\xi(x,\ y) = \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f(t_1,\ t_2)\,dt_2\,dt_1$$

Замечание

В точках дифференцируемости $F(x,\ y)$

$$f(x,\ y) = \frac{\delta^2 F(x,\ y)}{\delta x\,\delta y},\ \delta \text{ частная производная}$$

Свойства $f(x,\ y)$

1. $\forall x,\ y \quad f(x,\ y) \geqslant 0$
2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,\ y)\,dx\,dy = F(+\infty, +\infty) = 1$
3. $\int\limits_{a_1}^{a_2}\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x,\ y)\,dy\,dx = F(a_2\,b_2) - F(a_2,\ b_1) - \big(F(a_1,\ b_2) - F(a_1,\ b_1)\big) =$
   $= P(a_1 < \xi_1 \leqslant a_2,\ b_1 < \xi_2 \leqslant b_2)$
4. На доске нарисована клякса D, разбитая на много маленьких прямоугольников $f(\tilde{x},\ \tilde{y}),\ \Delta x,\ \Delta y, \quad \tilde{x} \in (x,\ x + \Delta x),\ \tilde{y} \in (y,\ y + \Delta y)$. Тогда
   $$P(\xi \in D) = \iint\limits_D f(x,\ y)\,dx\,dy, \text{ вспоминаем матан.}$$
5. $F_{\xi_1}(x) = F_\xi(x,\ +\infty) = \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t,\ y)\,dy\,dt$
   $$f_{\xi_1}(x) = \frac{d}{dx}F_{\xi_1}(x) = \frac{d}{dx}\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t,\ y)\,dy\,dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,\ y)\,dy$$
   $$f_{\xi_2}(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,\ y)\,dx$$

Лекция 8 ноября

Определение

Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \ldots,\ \xi_n)$ имеет равномерное распределение в области $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^n$, если

$$f_\xi(x_1, \ldots,\ x_n) = \begin{cases} c, \text{ если } (x_1, \ldots,\ x_n) \in \mathcal{D} \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}, \text{где } c \text{ — константа}$$

Частный случай

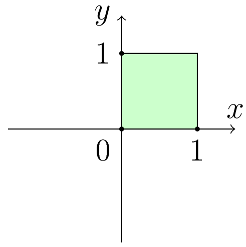
При $n = 2$ случайный вектор $\xi = (\xi_1, \ldots,\ \xi_n)$ распределён равномерно в области $\mathcal{D}$, если

$$f_\xi(x,\ y) = \begin{cases} \frac{1}{S}, \text{ если } (x,\ y) \in \mathcal{D} \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}, \text{ где } S \text{ — площадь } \mathcal{D}$$

Пример 1

Пусть $\xi = (\xi_1,\ \xi_2)$ распределён равномерно в области

$$f_\xi(x,\ y) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \in (0,\ 1) \wedge y \in (0,\ 1) \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$



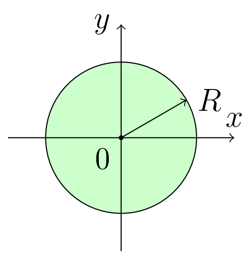
$$f_{\xi_1}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x,\ y)\, dy = \begin{cases} \int\limits_0^1 1\, dy, \text{ если } x \in (0,\ 1) \\ 0, \text{ если } x \notin (0,\ 1) \end{cases} = \begin{cases} 1, \text{ если } x \in (0,\ 1) \\ 0, \text{ если } x \notin (0,\ 1) \end{cases}$$

$$f_{\xi_2}(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x,\ y)\, dx = \begin{cases} \int\limits_0^1 1\, dx, \text{ если } y \in (0,\ 1) \\ 0, \text{ если } y \notin (0,\ 1) \end{cases} = \begin{cases} 1, \text{ если } y \in (0,\ 1) \\ 0, \text{ если } y \notin (0,\ 1) \end{cases}$$

Получаем $\forall x,\ y \in \mathbb{R}^2 \quad f_\xi(x,\ y) = f_{\xi_1}(x) \cdot f_{\xi_2}(y) \Rightarrow$ случайные величины зависимы.

Пример 2

Пусть $\xi = (\xi_1,\ \xi_2)$ распределён равномерно в круге радиуса R



$$f_\xi(x,\ y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi R^2}, \text{ если } x^2 + y^2 \leqslant R \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

$$f_{\xi_1}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,\ y)\, dy = \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2}} \frac{1}{\pi R^2}\, dy = \begin{cases} \frac{2\sqrt{R^2-x^2}}{\pi R^2}, \text{ если } |x| \leqslant R \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

$$f_{\xi_1}(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,\ y)\, dx = \int\limits_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{+\sqrt{R^2-y^2}} \frac{1}{\pi R^2}\, dx = \begin{cases} \frac{2\sqrt{R^2-y^2}}{\pi R^2}, \text{ если } |y| \leqslant R \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

Получаем $\exists x,\ y \quad f_\xi(x,\ y) \neq f_{\xi_1}(x) \cdot f_{\xi_2}(y) \Rightarrow$ случайные величины зависимы.

Утверждение

Пусть $\xi = (\xi_1,\ \xi_2)$ — непрерывный случайный вектор, тогда ξ_1 и ξ_2 — независимы тогда и только тогда, когда

$$\forall x,\ y \in \mathbb{R} \quad f_\xi(x,\ y) = f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(y)$$

Доказательство

“$\Rightarrow$”

Пусть ξ_1 и ξ_2 независимы, тогда:

$$f_\xi(x,\ y) = \frac{\delta^2 F(x,\ y)}{\delta x \cdot \delta y} = \frac{\delta^2 F_{\xi_1}(x) F_{\xi_2}(y)}{\delta x \delta y} = \frac{dF_{\xi_1}(x)}{dx} \cdot \frac{dF_{\xi_2}(y)}{dy} = f_{\xi_1}(x) \cdot f_{\xi_2}(y)$$

“$\Leftarrow$”

Пусть $f_\xi(x,\ y) = f_{\xi_1}(x) \cdot f_{\xi_2}(y)$, тогда:

$$F_\xi(x,\ y) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} f_\xi(t,\ s)\, ds\, dt = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} f_{\xi_1}(t) f_{\xi_2}(s)\, ds\, dt = \int\limits_{-\infty}^{x} f_{\xi_1}(t) \left(\int\limits_{-\infty}^{y} f_{\xi_2}(s)\, ds \right) dt =$$

$$= F_{\xi_1}(x) F_{\xi_2}(y) \Rightarrow \xi_1,\ \xi_2 \text{ независимы.}$$

Определение

Математическим ожиданием вектора $\xi = (\xi_1, \ldots,\ \xi_n)$ называют вектор $E\xi = (m_1, \ldots,\ m_n)$, где $\forall i \in \{1,\ 2, \ldots n\}$ $m_i = E\xi_i$

Свойства математического ожидания

1. $E(\xi_1 + \xi_2) = E\xi_1 + E\xi_2$
   Доказательство: $E(\xi_1 + \xi_2) = \sum\limits_i \sum\limits_j (x_i + y_j) p_{i\,j} =$
   $= \sum\limits_i \sum\limits_j x_i p_{i\,j} + \sum\limits_i \sum\limits_j y_j p_{i\,j} = \sum\limits_i x_i p_{i\,\bullet} + \sum\limits_j y_j p_{\bullet\,j} = E\xi_1 + E\xi_2$
2. $\xi_1,\ \xi_2$ независимы $\Rightarrow E(\xi_1 \xi_2) = E\xi_1 \cdot E\xi_2$
   Доказательство: $E(\xi_1\xi_2) = \int\int xy f(x,\ y)\, dx\, dy = \left\langle \begin{matrix}\text{компоненты } \xi_1,\ \xi_2 \\ \text{независимы}\end{matrix} \right\rangle =$
   $= \int\int xy f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(y)\, dx\, dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y f_{\xi_2}(y) \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_{\xi_1}(x)\, dx \right) dy =$
   $= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_{\xi_1}(x)\, dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y f_{\xi_2}(y)\, dy = E\xi_1 \cdot E\xi_2$

Определение

Ковариацией случайных величин $\xi_1,\ \xi_2$ называют величину

$$\operatorname{cov}(\xi_1,\ \xi_2) = k_{\xi_1\,\xi_2} = E(\xi_1 - E\xi_1)(\xi_2 - E\xi_2) = E\overset{\circ}{\xi}_1\overset{\circ}{\xi}_2$$

Напоминание: $\overset{\circ}{\xi}$ обозначает центрированную случайную величину.

Определение

Коэффициентом корреляции случайных величин $\xi_1,\ \xi_2$ называется

$$\rho_{\xi_1\,\xi_2} = \frac{\operatorname{cov}(\xi_1,\ \xi_2)}{\sqrt{\mathcal{D}\xi_1 \mathcal{D}\xi_2}} = \operatorname{cov}(\xi_1^*,\ \xi_2^*)$$

Напоминание: $\xi^* = \frac{\xi - E\xi}{\sqrt{\mathcal{D}\xi}}$

Определение

Случайные величины $\xi_1,\ \xi_2$ называются <u>некоррелированными</u>, если

$$\rho_{\xi_1,\ \xi_2} = 0$$

<u>Положительно коррелированными</u>, если

$$\rho_{\xi_1,\ \xi_2} > 0$$

<u>Отрицительно коррелированными</u>, если

$$\rho_{\xi_1,\ \xi_2} < 0$$

Свойства $\operatorname{cov}(\xi_1,\ \xi_2)$

1. $\operatorname{cov}(\xi,\ \xi) = \mathcal{D}\xi$
2. $\mathcal{D}(\xi + \eta) = \mathcal{D}\xi + \mathcal{D}\eta + 2\operatorname{cov}(\xi,\ \eta)$
3. $\operatorname{cov}(\xi,\ \eta) = \operatorname{cov}(\eta,\ \xi)$
4. $\operatorname{cov}(\xi,\ \eta) = E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta) = E(\xi\eta) - E\xi \cdot E\eta$
5. $\operatorname{cov}(a\xi + b,\ c\eta + d) = E(a\xi + b - aE\xi - b)(c\eta + d - cE\eta - d) = a \cdot c\operatorname{cov}(\xi,\ \eta)$
6. $|\rho_{\xi\,\eta}| = \frac{|\operatorname{cov}(\xi,\ \eta)|}{\sigma_\xi\sigma_\eta} \leqslant 1 \Rightarrow |\operatorname{cov}(\xi,\ \eta)| \leqslant \sigma_\xi\sigma_\eta$
   Доказательство:

   $0 \leqslant \mathcal{D}(\xi^* + \eta^*) = \mathcal{D}\xi * + \mathcal{D}\eta^* + 2\overbrace{\operatorname{cov}(\xi^*,\ \eta^*)}^{=\rho_{\xi^*\,\eta^*}} = 1 + 1 + 2\rho_{\xi^*\,\eta^*} =$
   $= 2(1 + \rho_{\xi^*\,\eta^*}) \geqslant 0 \Rightarrow \rho_{\xi^*\,\eta^*} \geqslant -1$
   $0 \leqslant \mathcal{D}(\xi^* - \eta^*) = \mathcal{D}\xi * + \mathcal{D}\eta^* - 2\underbrace{\operatorname{cov}(\xi^*,\ \eta^*)}_{=\rho_{\xi^*\,\eta^*}} = 1 + 1 - 2\rho_{\xi^*\,\eta^*} =$

   $= 2(1 - \rho_{\xi^*\,\eta^*}) \geqslant 0 \Rightarrow \rho_{\xi^*\,\eta^*} \leqslant 1$

7. $\xi,\ \eta$ — независимые случайные величины и $\mathcal{D}\xi,\ \mathcal{D}\eta \in \mathbb{R} \Rightarrow$
   $\Rightarrow \operatorname{cov}(\xi,\ \eta) = 0$
   Доказательство:

   $$\operatorname{cov}(\xi,\ \eta) = E\mathring{\xi}\mathring{\eta} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x - m_\xi)(y - m_\eta)f(x,\ y)\,dx\,dy = \left\langle \begin{matrix}\text{компоненты } \xi,\ \eta \\ \text{независимы}\end{matrix} \right\rangle =$$

   $$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x - m_\xi)f(x)(y - m_\eta)f(y)\,dx\,dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x - m_\xi)f(x)\,dx\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(y - m_\eta)f(y)\,dy = 0$$

   0 получается, потому что
   $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x - m_\xi)f(x)\,dx = \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\,dx}_{=E\xi} - m_\xi\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx}_{=1} = E\xi - E\xi = 0$

Лекция 15 ноября

Свойства $\rho_{\xi,\eta}$

1. $|\rho_{\xi\,\eta}| \leqslant 1$
2. $\rho_{\xi\,\xi} = 1$

3. Если случайная величина $\eta = a\xi + b,\ a \neq 0$, то

$$\rho_{\xi\,\eta} = \begin{cases} 1, \text{ если } a > 0 \\ -1, \text{ если } a < 0 \end{cases}$$

Доказательство:

$$\rho_{\xi\,\eta} = \frac{\operatorname{cov}(\xi,\ \eta)}{\sqrt{\mathcal{D}\xi \cdot \mathcal{D}\eta}} = \frac{E\xi\eta - E\xi E\eta}{\sqrt{\mathcal{D}\xi \cdot \mathcal{D}\eta}} = \frac{E\xi(a\xi + b) - E\xi E(a\xi + b)}{\sqrt{\mathcal{D}\xi \cdot \mathcal{D}(a\xi + b)}} =$$

$$= \frac{aE\xi^2 + bE\xi - a(E\xi)^2 - bE\xi}{\sqrt{a^2(\mathcal{D}\xi)^2}} = \frac{a(E\xi^2 - (E\xi)^2)}{|a|\mathcal{D}\xi} = \frac{a\mathcal{D}\xi}{|a|\mathcal{D}\xi} = \begin{cases} 1, \text{ если } a > 0 \\ -1, \text{ если } a < 0 \end{cases}$$

4. Пусть $|\rho_{\xi\,\eta}| = 1 \Rightarrow \eta = a\xi + b$

   а) $\rho_{\xi\,\eta} = 1 = \rho_{\xi^*\,\eta^*}$

$$\mathcal{D}(\xi^* - \eta^*) = \mathcal{D}\xi^* + \mathcal{D}\eta^* + 2\operatorname{cov}(\xi^*,\ -\eta^*) = \mathcal{D}\xi^* + \mathcal{D}\eta^* - 2\operatorname{cov}(\xi^*,\ \eta^*) =$$
$$= 2 - 2\rho_{\xi\,\eta} = 2(1 - \rho_{\xi\,\eta}) = 0$$

   Итак, получаем:

$$\mathcal{D}(\xi^* - \eta^*) = 0 \Rightarrow \xi^* - \eta^* = c \Rightarrow \frac{\xi - m_\xi}{\sigma_\xi} - \frac{\eta - m_\eta}{\sigma_\eta} = c \Rightarrow \text{ линейно зависимы}$$

   б) $\rho_{\xi\,\eta} = -1$:

$$\mathcal{D}(\xi^* + \eta^*) = \mathcal{D}\xi^* + \mathcal{D}\eta^* + 2\operatorname{cov}(\xi^*\,\eta^*) = 2(1 + \rho_{\xi\,\eta}) = 0$$

Пример

Пусть $\xi \sim R(-a, a)$, $\eta = \xi^2$. Посчитаем коэффициент корреляции:

$$\operatorname{cov}(\xi,\ \eta) = E\xi\eta - \underbrace{E\xi}_{=0} E\eta = E\xi^3 = \int\limits_{-a}^{a} x^3 \frac{1}{2a}\, dx = 0 \Rightarrow \rho_{\xi\,\eta} = 0$$

Итого, величины зависимы, но не коррелированы (так как корреляция показывает линейную зависимость, а η зависит от ξ квадратично).

Определение

Ковариационной матрицей вектора $\xi = \{\xi_1, \ldots,\ \xi_n\}$ называется матрица $K_\xi = \left(k_{i\,j}\right)$, где $k_{i\,j} = \operatorname{cov}(\xi_i,\ \xi_j),\ i,\ j = \overline{1,\ n}$

Свойства K_ξ

1. $k_{i\,j} = k_{j\,i} \Rightarrow K_\xi$ симметричная

2. $k_{i\,i} = \mathcal{D}\xi_i,\ i = \overline{1,\ n}$

3. K_ξ неотрицательно определённая, то есть

$$\forall \lambda_1, \ldots,\ \lambda_n \in \mathbb{R} \quad \sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j k_{i\,j} \geqslant 0$$

Доказательство:

$$0 \leqslant E\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i i \overset{\circ}{\xi}_i\right)^2 = E\left(\sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j \overset{\circ}{\xi}_i \overset{\circ}{\xi}_j\right) = \sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j \underbrace{E\overset{\circ}{\xi}_i \overset{\circ}{\xi}_j}_{k_{i\,j}}$$

Определение

Корреляционной матрицей случайного вектора $\xi = (\xi_1, \ldots,\ \xi_n)$ называется матрица $R_\xi = \big(\rho_{i\,j}\big)$, где $\rho_{i\,j} = \rho_{\xi_1\,\xi_2}$

1. $\forall i,\ j = \overline{1,\ n} \quad \rho_{i\,j} = \rho_{j\,i}$
2. $\forall i = \overline{1,\ n} \quad \rho_{i\,i} = 1$

Формула свёртки

Пусть случайные величины ξ_1 и ξ_2 — независимы, $\xi_1 \sim f_{\xi_1}(x),\ \xi_2 \sim f_{\xi_2}(y)$
Случайная величина $\eta = \xi_1 + \xi_2$.
Найти: $f_\eta(z)$–?

$$F_\eta(z) = P(\eta \leqslant z) = P(\xi_1 + \xi_2 \leqslant z) = \iint\limits_{x+y\leqslant z} f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(y)\,dy\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{z-x} f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(y)\,dy\,dx$$

$$f_\eta(z) = \frac{d}{dz} F_\eta(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(z-x)\,dx$$

Пример

$\xi_1 \sim N(0,\ 1),\ \xi_2 \sim N(0,\ 1)$
ξ_1 и ξ_2 — независимы.
$\eta = \xi_1 + \xi_2,\ f_\eta(z)$–?

$$f_\eta(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-x)^2}{2}}\,dx = \int \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2} - \left(\frac{z^2}{2} - xz + \frac{x^2}{2}\right)} =$$

$$= \frac{e^{-\frac{z^2}{4}}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{1}{2}}} e^{-x^2 + xz - \frac{z^2}{4}} = \frac{e^{-\frac{z^2}{4}}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}} \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{1}{2}}} e^{-(x-\frac{z}{2})^2}}_{=1}$$

Равно 1, потому что это гауссовская плотность, тогда оставшаяся часть и будет плотностью распределения.
Итак, $\eta \sim N(0, 2)$.

Утверждение

Пусть $\xi_1, \ldots,\ \xi_n$ — независимые случайные величины, такие что $\xi_i \sim N(m_i,\ \sigma_i^2),\ i = \overline{1,\ n}$
Тогда случайная величина $\eta = \xi_1 + \cdots + \xi_n \sim N(m_\eta,\ \mathcal{D}\eta)$,
где $m_\eta = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i,\ \mathcal{D}\eta = \sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_i^2$

Лекция 22 ноября.

Условное распределение

$(\xi,\ \eta)$ — дискретный случайный вектор.

$\xi\backslash\eta$	$y_1 \ldots y_k$
x_1	$p_{1\,1} \ldots p_{1\,k}$
$\vdots$	
x_m	$p_{m\,1} \ldots p_{m\,k}$

Тогда по формуле условной вероятности:

$$p(\xi = x_i \mid \eta = y_j) = \frac{p(\xi = x_i,\ \eta = y_j)}{(\eta = y_j)} = \frac{p_{i\,j}}{p_{\bullet\,j}}$$

Определение

Набор вероятностей $\forall i = \overline{1,\ m}$ $\quad \frac{p_{i\,j}}{p_{\bullet\,j}}$ называется условным распределением случайной величины ξ при условии $\{\eta = y_j\}$.

Определение

Условной функцией распределения случайной величины ξ при условии $\{\eta = y_j\}$ таком, что $P(\eta = y_j) > 0$, называется:

$$F_\xi(x \mid y_j) = P(\xi \leqslant x \mid \eta = y_j) = \sum_{x_i \leqslant x} \frac{p_{i\,j}}{p_{\bullet\,j}}$$

Определение

Условным математическим ожиданием случайной величины ξ:
При условии $\{\eta = y_j\}$ называется:

$$E(\xi \mid \eta = y_j) = \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot p(\xi = x_i \mid \eta = y_j) = \sum_{i=1}^{m} x_i \frac{p_{i\,j}}{p_{\bullet\,j}}$$

При условии $\{\eta\}$:

$$E(\xi \mid \eta) = g(\eta)$$

То есть это некоторая функция от случайного аргумента (значит она является случайной величиной). Распишем таблицу значений:

$E(\xi \mid \eta)$	$E(\xi \mid \eta = y_1)$	$\ldots$	$E(\xi \mid \eta = y_k)$
p	$p_{\bullet\,1}$	$\ldots$	$p_{\bullet\,k}$

Рассмотрим $E\big(g(\eta)\big)$, заодно докажем формулу полного математического ожидания:

$$E\big(E(\xi \mid \eta)\big) = E\xi$$

Доказательство

$$E\big(E(\xi \mid \eta)\big) = \sum_{j=1}^{n} E(\xi \mid \eta = y_j) p_{\bullet\,j} = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot \frac{p_{i\,j}}{p_{\bullet\,j}} p_{\bullet\,j} = \sum_{i=1}^{m} x_i \sum_{j=1}^{k} p_{i\,j} = \sum_{i=1}^{m} x_i p_{i\,\bullet} = E\xi$$

Для непрерывных случайных величин:

Определение

Пусть $f(x,\ y)$ и $f_\eta(y)$ — непрерывны в точке y_0 и $f_\eta(y_0) > 0$. Тогда условной функцией распределения случайной величины ξ при условии $\{\eta = y_0\}$ называется функция:

$$F_\xi(x \mid y_0) = \lim_{\Delta y \to +0} P(\xi \leqslant x \mid y_0 < \eta \leqslant y_0 + \Delta y)$$

Корректность определения:

$$F_\xi(x \mid y_0) = \lim_{\Delta y \to +0} P(\xi \leqslant x \mid y_0 < \eta \leqslant y_0 + \Delta y) = \lim_{\Delta y \to +0} \frac{P(\xi \leqslant x,\ y_0 < \eta \leqslant y_0 + \Delta y)}{P(y_0 < \eta \leqslant y_0 + \Delta y)} =$$

$$= \lim_{\Delta y \to +0} \frac{\int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{y_0}^{y_0+\Delta y} f(t,\ s)\, ds\, dt}{\int\limits_{y_0}^{y_0+\Delta y} f_\eta(s)\, ds} = \left\langle \begin{array}{l} \text{По теореме о} \\ \text{среднем значении} \end{array} \right\rangle = \lim_{\Delta y \to +0} \frac{\Delta y \int\limits_{-\infty}^{x} f(t,\ \tilde{s})\, dt}{\Delta y f_\eta\left(\tilde{\tilde{s}}\right)} =$$

$$= \frac{\int\limits_{\infty}^{x} f(t,\ y_0)}{f_\eta(y_0)}$$

Определение

Пусть $f(x,\ y),\ f_\eta(y)$ — непрерывны в точке y_0 и $f_\eta(y_0) > 0$. Функция $f_\xi(x \mid y_0)$ называется условной плотностью случайной величины ξ при условии $\eta = y$, если:

$$F_\xi(x \mid y_0) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(t \mid y)\,dt$$

Замечание

В точке дифференцируемости $F_\xi(x \mid y_0)$:

$$f_\xi(x \mid y_0) = \frac{\delta F_\xi(x \mid y_0)}{\delta x} \Rightarrow f_\xi(x \mid y_0) = \frac{\delta}{\delta x} \cdot \frac{\int\limits_{-\infty}^{x} f(t,\ y_0)\,dt}{f_\eta(y_0)} = \frac{f(x,\ y_0)}{f_\eta(y_0)}$$

Критерий независимости непрервных случайных величин

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \quad (f_\eta(y) > 0) \Rightarrow f_\xi(x \mid y) = \frac{f(x,\ y)}{f_\eta(y)}$$

Если ξ и η независимы, тогда:

$$f(x,\ y) = f_\xi(x) f_\eta(y) \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad f_\xi(x \mid y) = f_\xi(x)$$

Пример

Пусть случайный вектор $(\xi,\ \eta)$ распределён равномерно в круге радиуса R с центор в начале координат:

$$f(x,\ y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi R^2}, & x^2 + y^2 \leqslant R^2 \\ 0, & x^2 + y^2 > R^2 \end{cases}$$

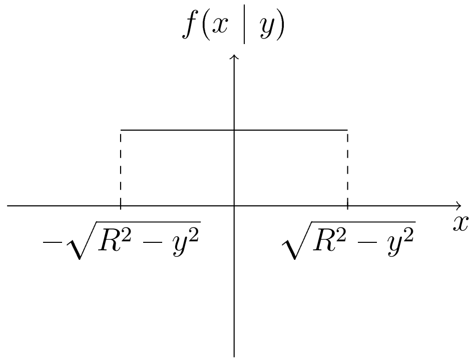
$$f_\eta(y) = \int\limits_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} \frac{dx}{\pi R^2} = \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{R^2-y^2}}{\pi R^2}, & |y| < R \\ 0, & |y| > R \end{cases}$$

Теперь мы можем посчитать условную вероятность:

$$\forall y \quad |y| < R \Rightarrow f_\xi(x \mid y) = \frac{f(x,\ y)}{f_\eta(y)} = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi R^2} \cdot \dfrac{\pi R^2}{2\sqrt{R^2-y^2}}, \text{ при } -\sqrt{R^2-y^2} \leqslant x \leqslant \sqrt{R^2-y^2} \\ 0, \text{ иначе} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{R^2-y^2}}, \text{ при } -\sqrt{R^2-y^2} \leqslant x \leqslant \sqrt{R^2-y^2} \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

Поскольку y фиксированый, получаем равномерное распределение:



Стоит заметить, что $E(\xi \mid \eta = y) = 0$, так как плотность распределения симметрична.

Свойства $E(\xi \mid \eta)$

1. $E(c \mid \eta) = c$
2. $E(c\xi \mid \eta) = cE(\xi \mid \eta)$
3. $E\big(\varphi(\xi)\cdot\psi(\eta) \mid \eta\big) = \psi(\eta)E(\varphi(\xi) \mid \eta)$, так как η фиксирована и $\varphi(\eta)$ является константой.
4. ξ и η — независимы $\Rightarrow E(\xi \mid \eta) = E\xi$
5. $E\big(E(\xi \mid \eta)\big) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x \mid y)\,dx\right) f_\eta(y)\,dy =$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\cdot\frac{f(x,\ y)}{f_\eta y} f_\eta(y)\,dx\right) dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)\,dx = E\xi$$

Лекция 29 ноября.

Определение

Условной дисперсией дискретной случайной величины ξ при условии $\{\eta = y_j\}$ называют величину:

$$\mathcal{D}(\xi \mid \eta = y_j) = \sum (x_i - E(\xi \mid \eta = y_j))^2\,\frac{p_{i\,j}}{i_{\bullet\,j}}$$

Условным математическим ожиданием непрерывной случайной величины ξ называется:

$$E(\xi \mid \eta = y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f_\xi(x \mid y)\,dx$$

Условной дисперсией непрерывной случайной величины ξ называется:

$$\mathcal{D}(\xi \mid \eta = y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(x - E(\xi \mid \eta = y)\big)^2 f_\xi(x \mid y)\,dx$$

Проверка нормировки

Пусть $\xi_1,\ \xi_2$ независимы и имеют нормальное распределение на интервале $(0,\ 1)$. То есть $\xi_1,\ \xi_2 \sim N(0,\ 1)$. Тогда $\xi = (\xi_1,\ \xi_2)$ называется Гауссовским вектором.

$$f_{\xi_1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$f_\xi(x,\ y) = f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x,\ y)\,dx\,dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1}(x)\,dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_2}(y)\,dy$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,\ y)\,dx\,dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dx\,dy = \left\langle \begin{matrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ |J| = r \end{matrix} \right\rangle = \int\limits_{0}^{+2\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{r}{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}}\,dr\,d\varphi =$$

$$= \int\limits_{0}^{+\infty} r e^{-\frac{r^2}{2}}\,dt = \int\limits_{0}^{+\infty} -e^{-\frac{r^2}{2}}\,d\frac{r^2}{2} = -e^{-\frac{r^2}{2}}\Big|_0^{+\infty} = 1$$

Определение

Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \ldots,\ \xi_n)$ имеет нормальное (гауссовское) распределение $\xi \sim N(m,\ K)$, если плотность распределения имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det K}} e^{-\frac{1}{2}\left((x-m)^T K^{-1}(x-m)\right)}$$

Замечание

Здесь K — ковариационная матрица.

$$x = (x_1, \ldots,\ x_n),\ m = (m_1, \ldots,\ m_n),\ K = \left(k_{i\,j}\right),\ k_{i\,j} = \mathrm{cov}(\xi_i,\ \xi_j)$$

$$f(x_1, \ldots,\ x_n) = \frac{\sqrt{\det C}}{\sqrt{(2\pi)^n}} e^{-\frac{1}{2}\left(\sum_i \sum_j c_{i\,j}(x_i - m_i)(x_j - m_j)\right)}$$

$C = K^{-1}$

Свойства многомерного гауссовского распределения.

1. $E\xi = m, \quad K_\xi = K$
2. Любой подвектор гауссовского вектора имеет гауссовское распределение.
3. Пусть $\eta = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i$ и все $a_i = 0$, тогда случайная величина η имеет гауссовское распределение.
4. Пусть $\eta = A\xi + B$, где A — матрица размера $k \times n$, а B — вектор, размера k, тогда:
$$\eta \sim N(Am_\xi + B,\ AK_\xi A^T)$$
5. Пусть компоненты $\xi_1, \ldots,\ \xi_n$ вектора ξ попарно некоррелированы, тогда $\xi_1, \ldots,\ \xi_n$ независимы. *Доказательство:*

   Пусть $\rho_{\xi_i,\ \xi_j} = 0$ при $i \neq j \Rightarrow \mathrm{cov}(\xi_i,\ \xi_j) = 0 \Rightarrow K = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \Rightarrow C = K^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \frac{1}{\sigma_n^2} \end{pmatrix} \Rightarrow$

   $\Rightarrow f(x_1, \ldots,\ x_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}\sigma_1 \ldots \sigma_n} e^{-\frac{1}{2}\sum_i c_{i\,i}(x_i - m_i)^2} = \prod\limits_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} e^{-\frac{(x_i - m_i)^2}{2\sigma_i^2}}}_{f_{\xi_i}(x_i)} = \prod\limits_{i=1}^{n} f_{\xi_i}(x_i) \Rightarrow$ величины $\xi_1, \ldots,\ \xi_n$ независимы.

Теорема о нормальной корреляции

Пусть $\xi = (\xi_1, \ldots,\ \xi_n) \sim N(m,\ K)$

$$\mathcal{L}\Big(\underbrace{(\xi_1, \ldots,\ \xi_l)}_{\eta_1} \mid \underbrace{(\xi_{l+1}, \ldots,\ \xi_n)}_{\eta_2} = x\Big) \sim N(E(\eta_1 \mid \eta_2 = x),\ K_{\eta_1 | \eta_2 = x})$$

$$m = (\underbrace{m_1, \ldots,\ m_l}_{E\eta_1} \mid \underbrace{m_{l+1}, \ldots,\ m_n}_{E\eta_2}),\ K_\xi = \begin{pmatrix} K_{1\,1} & K_{1\,2} \\ K_{2\,1} & K_{2\,2} \end{pmatrix}$$

$$E(\eta_1 \mid \eta_2 = x) = E\eta_1 + K_{1\,2}K_{2\,2}^{-1}(x - E\eta_2)$$

$$K_{\eta_1 \ \mid \ \eta_2 = x} = K_{1\,1} = K_{1\,2}K_{2\,2}^{-1}K_{1\,2}^T$$

Пусть $n = 2,\ \xi = (\xi_1, \ldots,\ \xi_2),\ K_\xi = \begin{pmatrix} \mathcal{D}\xi_1 & \mathrm{cov}(\xi_1,\ \xi_2) \\ \mathrm{cov}(\xi_2,\ \xi_1) & \mathcal{D}\xi_2 \end{pmatrix}$

$$E(\xi_1 \mid \xi_2 = x) = E\xi_1 + \frac{\mathrm{cov}(\xi_1,\ \xi_2)}{\mathcal{D}\xi_2}(x - E\xi_2)$$

$$\mathcal{D}(\xi_1 \mid \xi_2 = x) = \mathcal{D}\xi_1 - \frac{\left(\mathrm{cov}(\xi_1,\ \xi_2)\right)^2}{\mathcal{D}\xi_2}$$

Пример

$(\xi_A,\ \xi_B) \sim N(m,\ K),\ m = \begin{pmatrix}10\\12\end{pmatrix},\ K = \begin{pmatrix}4 & 3,6\\3,6 & 9\end{pmatrix}$

1. $P(\xi_A > \xi_B)$ — ?

2. $\xi_B = 14:\ E(\xi_A \mid \xi_B = 14),\ \mathcal{D}(\xi_A \mid \xi_B = 14)$ — ?.

Решим первый пункт: $P(\xi_A > \xi_B) = P(\xi_A - \xi_B > 0),\ \xi_A - \xi_B \sim N(-2,\ (2,4)^2)$
$\xi_\mathcal{A} - \xi_\mathcal{B} = \mathcal{D}\xi_A + \mathcal{D}\xi_B + 2\operatorname{cov}(\xi_A - \xi_B) = 4 + 9 - 2\cdot 3,6 = 5,8 \approx (2,4)^2$
Тогда можем посчитать $P(\xi_A - \xi_B > 0) = \Phi_0(+\infty) - \Phi_0(\frac{0+2}{2,4}) = 0,5 - \Phi_0(\frac{1}{1,2}) \approx 0,5 - 0,297 = 0,203$
Решим второй пункт: $E(\xi_A \mid \xi_B = 14) = 10 + \frac{3,6}{9}(14-12) = 10 + \frac{7,2}{9} = 10,8$
$\mathcal{D}(\xi_A \mid \xi_B = 14) = 4 - \frac{3,6^2}{9} = 2,56$

Виды сходимости случайных последовательностей

Обычное определение сходимости последовательности:

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \geqslant N \quad |x_n - x| < \varepsilon$$

Здесь не подходит, так как оно работает для детерменированных последовательностей, поэтому нужно вводить новые определения:

Определение

Последовательность случайных величин $\xi_1, \ldots,\ \xi_n, \ldots$, определённых на одном вероятностном пространстве Ω, называется случайной последовательностью $\{\xi_n\}$

Определение

Случайная последовательность $\{\xi_n\}$ сходится по вероятности к случайной величине ξ ($\xi_n \xrightarrow{p} \xi$), если

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \begin{cases} P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\\ P(|\xi_n - \xi| < \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1\end{cases}$$

Доказать, что $\xi_n \xrightarrow{p} 0$:

$$P(|\xi_n - 0| < \varepsilon) = 2\int_0^\varepsilon \frac{1}{n\pi(x^2 + \frac{1}{n^2})}\,dx = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x \cdot n|_0^\varepsilon = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\varepsilon\cdot n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Лекция 6 декабря.

Определение

Случайная последовательность $\{\xi_n\}$ сходится к случайной величине ξ в среднеквадратическом ($\xi_n \xrightarrow{\text{с. к.}} \xi$), если:

$$\lim_{n\to\infty} E(\xi_n - \xi)^2 = 0$$

Пример

ξ_n	0	1
p	$1 - \frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$

Докажем, что $\xi_n \xrightarrow{\text{с.к.}} 0$:

$$E(\xi_n - 0)^2 = 0 + 1\cdot\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Замечание

Докажем, что $\xi_n \xrightarrow{\text{с. к.}} \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{p} \xi$:

$$\text{По неравенсту Чебышёва: } \forall\varepsilon > 0 \quad P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) \leqslant \frac{E(\xi_n - \xi)^2}{\varepsilon^2}$$

Числитель сходится к нулю, так как есть среднеквадратическая сходимость, значит:

$$\forall\varepsilon > 0 \quad P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) \leqslant 0$$

Замечание

В обратную сторону это неверно, вот пример: $\begin{array}{c|c|c} \xi_n & 0 & \sqrt{n} \\ \hline \text{p} & 1 - \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \end{array}$ $\quad P(|\xi_n - 0| > \varepsilon) = P(\xi_n = \sqrt{n}) = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Однако среднеквадратически она не сойдётся к нулю: $E(\xi_n - 0)^2 = E\xi_n^2 = 0 + n \cdot \frac{1}{n} = 1 \to 1 \neq 0$

Определение

Случайная последовательность $\{\xi_n\}$ сходится к случайной величине ξ почти наверное ($\xi_n \xrightarrow{\text{п. н.}} \xi$), если:

$$P\Big(\omega : \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega)\Big) = 1$$

или

$$P\Big(\omega : \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega) \nrightarrow \xi(\omega)\Big) = 0$$

Поработаем с этим определением

По определению Коши: $\xi_n(\omega) \to \xi(\omega)$ означает:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n:\ \forall k \geqslant n \quad |\xi_k(\omega) - \xi(\omega)| < \varepsilon$$

Тогда отрицание этого предела:

$$\exists\varepsilon > 0\ \forall n:\ \exists k \geqslant n \quad |\xi_k(\omega) - \xi(\omega)| \geqslant \varepsilon$$

Рассмотрим события $A_k^\varepsilon = \{\omega : |\xi_k(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon\}$
Также рассмотрим $B^\varepsilon = \bigcap\limits_{n\geqslant 1} \bigcup\limits_{k\geqslant n} A_k^\varepsilon$ (по сути тут переписано отрицание определения Коши).
Если $B^\varepsilon = 0$, то сходимость почти наверное имеется.

Лемма Бореля-Кантелли

Пусть $A_1, \ldots,\ A_k$ — случайные события, а $B = \bigcap\limits_{n\geqslant 1} \bigcup\limits_{k\geqslant n} A_k$. Тогда:

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) < \infty \Rightarrow P(B) = 0$$

Также есть вторая часть этой леммы:

$$A_1, \ldots,\ A_n \text{ независимы} \wedge \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) < \infty \Rightarrow P(B) = 0$$

Из сходимости почти наверное следует сходимость по вероятности, то есть

$$\xi_n \xrightarrow{\text{п. н.}} \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{p} \xi$$

Если интересно, могу написать доказательство

Пример:

ξ_n	0	n
p	$1-\frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{n^2}$

Исследуем эту последовательность на сходимости:
$\xi_n \xrightarrow{\text{п. н.}} 0$?

$$A_k^\varepsilon = \{\omega : |\xi_k(\omega) - 0| > \varepsilon\} = \{\omega : \xi_k(\omega) = k\}$$

$P(A_k^\varepsilon) = \frac{1}{k^2}, \quad \sum\limits_{k=1}^{\infty} P(A_k^\varepsilon) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2} \to 0 \Rightarrow P(B) = 0 \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{\text{п. н.}} 0$

Проверим на среднеквадратическую сходимость:

$$E\xi_n^2 = n^2 \cdot \frac{1}{n^2} + 0 = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \neq 0$$

Пример

Рассмотрим одну из предыдущих последовательностей, мы доказали, что она среднеквадратически сходится к 0.

ξ_n	0	1
p	$1-\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$

$A_k^\varepsilon = \{\omega : |\xi_k(\omega) - 0| > \varepsilon\} = \{\omega : \xi_k(\omega) = 1\}$, отсюда получаем:

$$P(A_k^\varepsilon) = \frac{1}{k} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k^\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ гармонический ряд расходится} \Rightarrow \xi_n \text{ не сходится п.н. к } 0$$

Определение

Пусть $F_1(x), \ldots,\ F_n(x), \ldots$ — функции распределения случайных величин $\xi_1, \ldots,\ \xi_n, \ldots$ соответственно, а $F(x)$ — функция распределения случайной величины ξ. Случайная последовательность $\xi_1, \ldots,\ \xi_n, \ldots$ сходится по распределению (distribution) (слабо сходится) к случайной величине ξ ($\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ или $\xi_n \xrightarrow{w} \xi$), если:

$$\forall x \in \mathbb{C}(F) \lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

Здесь $\mathbb{C}(F)$ обозначает множество точек, в которых $F(x)$ непрерывна.
Сходимости относятся друг к другу следующим образом:

$$\left.\begin{matrix} \xi_n \xrightarrow{\text{п. н.}} \xi \\ \xi_n \xrightarrow{\text{с. к.}} \xi \end{matrix}\right] \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{p} \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{d} \xi$$

Центральная Предельная Теорема (ЦПТ)

Говорят, что для последовательности случайных величин $\{\xi_n\}$ выполнена (или выполняется) ЦПТ, если:

$$\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i - E\sum_{i=1}^n \xi_i}{\sqrt{\mathcal{D}\sum_{i=1}^n \xi_i}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} U \sim N(0,\ 1)$$

Можно записать по-другому:

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i - E\sum_{i=1}^n \xi_i}{\sqrt{\mathcal{D}\sum_{i=1}^n \xi_i}}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

Теорема

Пусть случайные величины $\xi_1, \ldots,\ \xi_n$ независимы, одинаково распределены и $\mathcal{D}\xi_1 < \infty$ (величины распределены одинаково, поэтому их дисперсии одинаковы), тогда:

$$\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i - n \cdot m_{\xi_1}}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{d} U \sim N(0,\ 1)$$

Теорема Муавра-Лапласа

Является частным случаем предыдущей теоремы.
Пусть ξ_n — количество успехов в схеме из n испытаний Бернулли с вероятностью успеха равной p. Тогда:

$$\frac{\xi_n - np}{\sqrt{npq}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} U \sim N(0,\ 1)$$

Заметим, что η_i — количество успехов в i-м испытании (все η_i независимы), тогда:

$$\begin{array}{c|c|c} \eta_i & 0 & 1 \\ \hline \text{P} & 1-p & p \end{array} \Rightarrow E\eta_i = p \Rightarrow \mathcal{D}\eta_i = pq = p(1-p),\ \xi_k = \sum_i^n \eta_i$$

Тогда мы попадаем под условия предыдущей теорема и $\{\eta_n\}$ попадает под условия ЦПТ

Интегральная теорема Муавра-Лапласа

Пусть $\xi_n \sim Bi(n,\ p)$ и $n \to \infty$:

$$P(k_1 \leqslant \xi_n \leqslant k_2) = \Phi_0\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi_0\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

Локальная теорема Муавра-Лапласа

$P(\xi_n = k) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{npq}} e^{-\frac{(k-np)^2}{\sqrt{npq}}}$

Неравенство Берри-Эссеена

$$\sup_x \left| P\left(\frac{\xi_n - np}{\sqrt{npq}} \leqslant x\right) - \Phi(x)\right| \leqslant \frac{p^2+q^2}{\sqrt{npq}}$$

Заметим, что апроксимация распределением Пуассона с погрешностью np^2 может быть лучше. Если np^2 большое, то Берри-Эссеен даёт маленькую погрешность и наоборот.

Лекция 13 декабря

Неравенство Берри-Эссеена общего вида

Пусть $\xi_1, \ldots,\ \xi_n$ независимы, одинаково распределены и $\forall i \quad \mathcal{D}\xi_i < \infty$, $\eta_n = \dfrac{\sum_{i=1}^n \xi_i - E\sum_{i=1}^n \xi_i}{\sqrt{\mathcal{D}\sum_{i=1}^n \xi_n}}$:

$$\sup_x |F_{\eta_n}(x) - \Phi(x)| \leqslant \frac{c \cdot E|\xi_1 - m_1|^3}{\sqrt{n}\sigma^3}$$

c — некая константа, находящаяся в полуинтервале $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \leqslant c < 0.478$ (данный промежуток регулярно уменьшают).
То есть сходимость к Гауссовскому распределению достаточно быстрая.

История из ан(н)алов ЦПТ

Кого-то приняли на работу за знание ЦПТ и попросили передать привет преподавателю (интересные истории от лектора, надо было ходить). Немного спойлеров про математическую статистику.

Закон больших чисел (ЗБЧ)

Определение

Говорят, что случайная последовательность $\xi_1, \ldots,\ \xi_n$ удовлетворяет закону больших чисел (или к ней применим ЗБЧ), если

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \xi_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E\xi_i \xrightarrow[n\to\infty]{p} 0$$

Теорема Чебышёва

Пусть случайные величины $\xi_1, \ldots,\ \xi_n$ некоррелированы и $\mathcal{D}\xi_1, \ldots,\ \mathcal{D}\xi_n$ ограничены в совокупности (то есть $\exists C : \forall k\ \mathcal{D}\xi_k \leqslant C$). Тогда к последовательности $\xi_1, \ldots,\ \xi_n$ применим закон больших чисел.

Доказательство

Применим неравенство Чебышёва:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\xi_i\right| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathcal{D}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right|\right)}{\varepsilon^2} = \frac{1}{n^2}\cdot\frac{\mathcal{D}(\sum_{i=1}^{n}\xi_i)}{\varepsilon^2}$$

Так как величины некоррелированы, дисперсия их суммы равна сумме дисперсий:

$$\frac{1}{n^2}\cdot\frac{\mathcal{D}(\sum_{i=1}^{n}\xi_i)}{\varepsilon^2} = \frac{1}{n^2}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n}\mathcal{D}(\xi_i)}{\varepsilon^2}$$

Так как дисперсии ограничены в совокупности, можно сказать:

$$\frac{1}{n^2}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n}\mathcal{D}(\xi_i)}{\varepsilon^2} \leqslant \frac{1}{n^2}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n}C}{\varepsilon^2} \leqslant \frac{c}{n^2\varepsilon^2}$$

Итого:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\xi_i\right| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{c}{n^2\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Теорема

Путь $\xi_1, \ldots,\ \xi_n$ — одинаково распределены и $\forall i : \mathcal{D}\xi_i < \infty$. Тогда $\xi_1, \ldots,\ \xi_n$ удовлетворяет ЗБЧ.

Доказательство

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\xi_i\right| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathcal{D}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right)}{\varepsilon^2} = \frac{n\sigma^2}{n^2\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Доказательство частотного определения вероятности

Пусть ξ_n — количество успехов в испытаниях Бернулли с вероятностью успеха в одном опыте p.
Тогда случайная величина $\hat{p} = \frac{\xi_n}{n}$ — частота успеха.
Тогда $\eta_i \sim Bi(1,\ p)$, где η_i — один опыт в системе.
$\xi_n = \eta_1 + \cdots + \eta_n$
$\hat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\eta_i \Rightarrow E\hat{p} = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\eta_i\right) = p$
$\mathcal{D}\eta_i = pq < \infty$
Тогда по закону больших чисел:

$$\hat{p} = \frac{1}{n}\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{p} p$$

Усиленный закон больших чисел (УЗБЧ)

Определение

Говорят, что случайная последовательность $\xi_1, \ldots,\ \xi_n$ удовлетворяет усиленному закону больших чисел (или к ней применим УЗБЧ), если

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\xi_i \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п. н.}} 0$$

Теорема Колмогорова

Какой же он крутой, это просто невероятно.
Пусть случайная величина $\xi_1, \ldots,\ \xi_n, \ldots$ независимы, одинаково распределены и $\forall i : E\xi_i < \infty$. Тогда последовательность $\xi_1, \ldots,\ \xi_n, \ldots$ удовлетворяет УЗБЧ:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п. н.}} m$$

m — матожидание в распределения.
Теорема непростая (Колмогоров сигма, гений и чемпион теорвера), поэтому доказательства не будет.

Метод Монте-Карло

Для подсчёта $\int\limits_0^1 g(x)\,dx$ статистическим методом Монте-Карло введём последовательность независимых величин $\xi_1, \ldots,\ \xi_n \sim R(0,\ 1)$. По УЗБЧ:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п. н.}} Eg(\xi_1) = \int\limits_0^1 g(x)\cdot \underbrace{f_\xi(x)}_{=1}\,dx$$

В общем случае нужно посчитать $\int\limits_a^b g(x)\,dx = I$:

$$\hat{I} = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п. н.}} Eg(\xi_1) = \int\limits_a^b g(x)\cdot \underbrace{f_\xi(x)}_{=\frac{1}{b-a}}\,dx = \int\limits_a^b \frac{g(x)}{b-a}\,dx$$

Оценим $P(|\hat{I} - I| < \delta) = p$. По ЦПТ:

$$\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(\xi_n) - I}{\sqrt{\mathcal{D}\big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\big)}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} U(0,\ 1)$$

Тогда:

$$P(|\hat{I} - I| < \delta) = 2\Phi_0\left(\frac{\delta}{\sqrt{\mathcal{D}\big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\big)}}\right) = p$$

Посчитаем дисперсию в знаменателе:

$$\mathcal{D}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Big) = \frac{n}{n^2}\mathcal{D}\big(g(\xi_i)\big) = \frac{\mathcal{D}g(\xi_i)}{n}$$

$$p = 2\Phi_0\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sqrt{\mathcal{D}g(\xi_i)}}\right)$$

Где $\mathcal{D}g(\xi_i) = E(g(\xi_i))^2 - (Eg(\xi_i))^2$. Можно оценить это сверху.