

# Теория вероятностей.

Андрей Тищенко @AndrewTGk

2024/2025

Лекция 6 сентября.

## Формула оценки

$random() \% 11$

Накоп =  $0.1 \text{ИДЗ} + 0.15 \text{РС} + 0.25 \text{КР} + 0.5 \text{Экзамен}$

ИДЗ = индивидуальное домашнее задание (выдаётся через вики курса). РС = работа на семинарах.

КР = контрольные работы.

Учебник:

Кибзун А. К., Горяинова Е. Р., Наумов А. В. “Теория вероятности и математическая статистика. Базовый курс с примерами и задачами” 2013 или 2014 года.

## История

Наука появилась из-за азартных игр. Кавалер Демире захотел составить математическую базу для расчётов в азартных играх. Перечисление многих известных математиков, работавших в этой области. Колмогоров легенда теорвера, придумал определение вероятности, основал СУНЦ, ездил на лыжах.

## Основные понятия

### Определения

*Теория вероятности* — раздел математики, изучающий математические модели массовых случайных явлений.

*Массовость* — за  $n$  повторений эксперимента, вероятность каждого исхода стабилизируется возле какого-то значения  $p_i$ .

Всякое случайное событие обладает массовостью.

### Обозначения

$\omega_1, \dots, \omega_n$  — элементарные случайные события.

$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  — пространство элементарных событий.

$\forall \Omega \forall A \quad A \subset \Omega \Leftrightarrow A$  — случайное событие.

$\forall A \forall \Omega \quad \Omega \subseteq A \Leftrightarrow A$  — достоверное событие.

$\forall A \forall \Omega \quad \Omega \cap A = \emptyset \Leftrightarrow A$  — невозможное событие.

## Операции с событиями

$A, B \subset \Omega$

## Произведение

Произведением случайных событий  $A$ ,  $B$  называется событие  $A \cdot B = A \cap B$

## Сумма

Сумма  $A + B$  есть событие  $A \cup B$ .

## Разность

Разность множеств  $A \setminus B$ .

## Дополнение

$\bar{A} = \Omega \setminus A$ .

## Свойства операций

1.  $A + A = A$
2.  $A \cdot A = A$
3.  $A \cdot \Omega = A$
4.  $A + \Omega = \Omega$
5.  $A + B = B + A$
6.  $A \cdot B = B \cdot A$
7.  $A + (B + C) = (A + B) + C$
8.  $\overline{\bar{A}} = A$
9.  $\overline{\overline{\bar{A}}} = \bar{A}$
10.  $\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$

## Определение

Класс подмножеств  $\mathcal{A}$  на пространстве событий  $\Omega$  называется  $\sigma$ -алгеброй событий, если:

1.  $\Omega \in \mathcal{A}$
2.  $\forall A \subset \Omega \quad A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$
3.  $\forall A_i \quad A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{A} \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A} \wedge \prod_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

## Классическое определение вероятности

Исход = элементарное случайное событие.

1. Конечное число исходов эксперимента.
2. Исходы взаимно исключающие.
3. Исходы равновозможны.

Тогда  $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

$|A|$  - мощность множества исходов, принадлежащих  $A$ .

1.  $P(A) \geq 0$
2.  $P(\Omega) = 1$
3.  $A \cdot B = \emptyset \Rightarrow P(A + B) = P(A) + P(B)$

### Задача

В коробке 10 красных и 20 чёрных шаров.

Событие  $A = \{\text{вытащить красный шар}\} \Rightarrow P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$

Лекция 13 сентября.

## Геометрическое определение вероятности

$\Omega$  является подмножеством конечной меры в  $\mathbb{R}$  или  $\mathbb{R}^2$ , или ... или  $\mathbb{R}^n$ .  $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$ ,  $\mu$  - мера (длина, площадь, n-мерный объём).

Свойства:

1.  $P(A) \geq 0 \quad \forall A \subseteq \Omega$
2.  $P(\Omega) = 1$
3.  $A \cdot B = \emptyset \Rightarrow P(A + B) = P(A) + P(B)$

### Задача

Ромео и Джульетта хотят встретиться между полуночью и часом ночи, но не могут договориться о времени, поэтому они приходят в произвольный момент времени на этом отрезке и ждут 15 минут, после чего уходят. С какой вероятностью они не встретятся?  $x$  - время прихода Дж.

$y$  - время прихода Ромео.

Тут должен быть балдёжный график, но писать это долго.

$x, y \in [0, 1]$ , в часах.

$$|x - y| \leq \frac{1}{4}$$

$$P(\bar{A}) = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}}{1} = \frac{9}{16} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}.$$

В этом определении мы избавились от конечности множества исходов.

## Частотное (статистическое) определение вероятности

### Определение

Пусть опыт проведён  $N$  раз, а событие  $A$  произошло  $n_A$  раз. Тогда  $\frac{n_A}{N}$  называется частотой события  $A$ .

Тогда вероятность  $P(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_A}{N}$

## Аксиоматическое определение А. Н. Колмогорова (легенды, миллионера, плебоя и филантропа)

### Определение

Пусть  $\mathcal{A}$  —  $\sigma$  алгебра событий на пространстве  $\Omega$ . Назовём вероятностью числовую функцию  $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^1$ , удовлетворяющую следующим аксиомам:

1.  $\forall A \in \mathcal{A} \quad P(A) \geq 0$
2.  $P(\Omega) = 1$

$$3. \forall A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \quad (\forall i, j \in \mathbb{N} \ A_i \cap A_j \neq \emptyset \Rightarrow i = j) \Rightarrow P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

## Определение

Число  $P(A)$ ,  $A \in \mathcal{A}$  называется вероятностью события  $A$ .

## Определение

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$  называется вероятностным пространством.

## Свойства $P(A)$

1.  $P(A) = 1 - P(\overline{A})$ .  
 $\Omega = A + \overline{A} \wedge A \cap \overline{A} = \emptyset$   
 $P(\Omega) = P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) \Rightarrow P(A) = 1 - P(\overline{A})$
2.  $P(\emptyset) = 0$   
 $\overline{\Omega} = \emptyset \Rightarrow P(\Omega) + P(\emptyset) = 1 \Rightarrow P(\emptyset) = 1 - 1 = 0$
3.  $A \subseteq \Omega \wedge B \subseteq \Omega \wedge A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$   
 $B = A + (B \setminus A) \Rightarrow P(B) = P(A + (B \setminus A)) = P(A) + \underbrace{P(B \setminus A)}_{\geq 0} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow P(A) \leq P(B)$
4.  $0 \leq P(A) \leq 1$   
По первой аксиоме  $P(A) \geq 0$   
Из третьего  $A \subseteq \Omega \wedge \Omega \subseteq \Omega \wedge A \subseteq \Omega \Rightarrow P(A) \leq P(\Omega) = 1$
5. Формула (теорема) сложения вероятностей:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$$

$$\begin{cases} A = A \cdot \Omega = A \cdot (B + \overline{B}) = AB + A\overline{B} \Rightarrow P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB) \\ B = B \cdot \Omega = B \cdot (A + \overline{A}) = BA + B\overline{A} \Rightarrow P(B\overline{A}) = P(B) - P(AB) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A + B = AB + A\overline{B} + B\overline{A} \Rightarrow P(A + B) =$$

$$= P(AB) + P(A) - P(AB) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Замечание: тут не было  $2(AB)$ , потому что сложение по определению есть объединение, поэтому одного экземпляра достаточно.

Для трёх слагаемых:

$$P((A + B) + C) = P(A + B) + P(C) - P((A + B) \cdot C) =$$

$$= P(A) + P(B) - P(AB) + P(C) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

$$P(A_1 + \dots + A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i \leq j} P(A_i A_j) + \sum_{i \leq j \leq k} P(A_i A_j A_k) + \dots$$

$$\dots + (-1)^{n-1} P(A_1, \dots, A_n)$$

## Задача

$$A_1 = \{\text{Решка при 1-ом броске}\}, A_2 = \{\text{Решка при 2-ом броске}\}$$

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

## Определение

Пусть  $P(B) \neq 0$ , тогда условная вероятность события  $A$  при условии  $B$

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

## Определение

События  $A, B$  называются независимыми, если  $P(A/B) = P(A)$

Отсюда следует:  $\frac{P(AB)}{P(B)} = P(A) \Rightarrow P(AB) = P(A)P(B)$

## Определение

События  $A_1, A_2, \dots, A_n$  называются независимыми в совокупности, если:

$$\forall k = 2, \dots, n \quad \forall i_1, \dots, i_k \quad (1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n) \Rightarrow P(A_{i_1}, \dots, A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})$$

Лекция 20 сентября.

## Воспоминания

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \quad P(AB) = P(B)P(A/B) = P(A)P(B/A)$$

## Теорема об умножении вероятностей

Пусть  $(P(A_1, \dots, A_n)) > 0$ , тогда:

$$P(A_1, \dots, A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2) \dots P(A_n/A_1 \dots A_{n-1})$$

## Доказательство

$$\begin{aligned} & \begin{cases} B_{n-1} = A_1 \dots A_{n-1} \\ B_{n-2} = A_1 \dots A_{n-2} \\ \dots \\ B_1 = A_1 \end{cases} \Rightarrow P(\underbrace{A_1 \dots A_{n-1}}_{B_{n-1}} A_n) = P(\underbrace{B_{n-1}}_{B_{n-2} A_{n-1}}) P(A_n/B_{n-1}) = \\ & = P(B_{n-2} A_{n-1}) P(A_n/A_1 \dots A_{n-1}) = P(B_{n-2}) P(A_{n-1}/B_{n-2}) P(A_n/A_1 \dots A_{n-1}) = \\ & = P(A_1) P(A_2/A_1) P(A_3/A_1 A_2) \dots P(A_n/A_1 \dots A_{n-1}) \end{aligned}$$

## Схема Бернулли (Биномиальная схема)

Последовательность испытаний, такая что:

1. Исход любого испытания двоичен  $\forall A \quad A \vee \bar{A} \equiv 1$
2. Испытания независимы в совокупности.
3.  $P(A) = p$  не изменяется от опыта к опыту.

Например, подбрасывание монеты.

Положим У - успех, Н - неудача.

В таком случае  $k$  успехов можно получить  $P_n(k) C_n^k p^k \underbrace{(1-p)^{n-k}}_{=q}$  способами

## Доказательство

$$\begin{aligned}P(\underbrace{Y \dots Y}_k \underbrace{H \dots H}_{n-k}) &= p^k q^{n-k} \\P(\{\underbrace{Y \dots Y}_k \underbrace{H \dots H}_{n-k}\}) + P(\underbrace{H Y \dots Y}_k \underbrace{H \dots H}_{n-k}) + \dots + P(\underbrace{H \dots H}_{n-k} \underbrace{Y Y \dots Y}_k) &= \\= C_n^k p^k q^{n-k} \\ \sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k} &= 1\end{aligned}$$

## Следствие

$$\text{При } k_1 \leq k \leq k_2: \quad P_n(k) = \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k q^{n-k}$$

## Обозначение

Если максимальная вероятность достигается при  $k = m$ , то есть

$$C_n^m p^m q^{n-m} = \max_{0 \leq k \leq n} C_n^k p^k q^{n-k}$$

Тогда можно сказать  $m = \operatorname{argmax}_{0 \leq k \leq n} P_n(k)$

Можно посчитать без вычисления всех значений:

$$m = \begin{cases} [(n+1)p], & \text{если } (n+1)p - \text{нецелое число} \\ (n+1)p \wedge (n+1)p - 1, & \text{иначе} \end{cases}$$

## Полиномиальная схема испытаний

1. Проводится  $n$  независимых опытов
2. В каждом опыте  $m$  взаимноисключающих исходов  $(n_1, \dots, n_m)$
3.  $P(n_1) = p_1, P(n_2) = p_2, \dots, P(n_m) = p_m, \quad p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1$

$$\sum_{i=1}^m n_i = n$$

$$P_n(n_1, n_2, \dots, n_m) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_m!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_m^{n_m}$$

## Определение

Пусть  $H_1, \dots, H_n \subset \Omega$ , события  $H_1, \dots, H_n$  называются полной группой событий (гипотезами), если

1.  $\forall i, j \quad i \neq j \Rightarrow H_i \cdot H_j = \emptyset$
2.  $H_1 + \dots + H_n = \Omega$

## Формула полной вероятности

Пусть  $H_1, \dots, H_n$  — полный граф событий,  $A \subset \Omega$

$P(A) = P(A \cdot \Omega) = P(A \cdot (H_1 + \dots + H_n)) = P(AH_1 + \dots + AH_n)$ , так как события  $H_1, \dots, H_n$  независимы, можно сделать переход:

$$P(AH_1 + \dots + AH_n) = P(AH_1) + \dots + P(AH_n) = P(H_1)P(A/H_1) + \dots + P(H_n)P(A/H_n)$$

$$\text{Получаем } P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + \dots + P(H_n)P(A/H_n)$$

## Задача

Студент выучил  $m$  билетов из  $n$ . Посчитать вероятность вытянуть выученный билет при заходе первым, вторым.

$A = \{\text{студент вытащит выученный билет}\}$

$H_1 = \{\text{Другой студент вытащит выученный нашим студентом билетом}\}$

$H_2 = \{\text{Наш студент вытащит невыученный билет}\}$

$$P(H_1) = \frac{m}{n}, \quad P(H_2) = \frac{n-m}{n}$$

$$P(A/H_1) = \frac{m-1}{n-1}, \quad P(A/H_2) = \frac{m}{n-1}$$

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) = \frac{m}{n} \frac{m-1}{n-1} + \frac{n-m}{n} \frac{m}{n-1} = \frac{m}{n}$$

## Формула Байеса

$H_1, \dots, H_n$  — гипотезы

$P(H_1), \dots, P(H_n)$  — априорные вероятности.

Произошло событие  $A$

$P(H_1/A), \dots, P(H_n/A)$  — апостериорные вероятности.

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i A)}{P(A)} = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{k=1}^n P(H_k)P(A/H_k)}$$

$$\sum_{i=1}^n P(H_i/A) = 1$$

Лекция 27 сентября

$H_1, \dots, H_n$  — ПГС

$P(H_1), \dots, P(H_n)$  — априорные вероятности.

Произошло событие  $A$ .

$P(H_1/A), \dots, P(H_n/A)$  — апостериорные вероятности.

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i)}$$

## Задача

Завод 1 поставляет 65% продукции. При этом 90% его продукции не имеет дефектов.

Завод 2 поставляет 35% продукции. При этом 80% его продукции не имеет дефектов.

Какой завод более вероятно поставит продукт с дефектом?

$A = \{\text{Произведён дефектный продукт}\}$

$H_1 = \{\text{Прибор изготовил завод 1}\}, P(H_1) = 0.65, P(A/H_1) = 0.1$

$H_2 = \{\text{Прибор изготовил завод 2}\}, P(H_2) = 0.35, P(A/H_2) = 0.2$

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2)} = \frac{0.1 \cdot 0.65}{0.1 \cdot 0.65 + 0.2 \cdot 0.35} = \frac{65}{135}$$

$P(H_2/A) = \frac{70}{135} > P(H_1/A)$ , получается деталь с дефектом с большей вероятностью поступила со второго завода.

## Случайные величины

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6\}$$

$$\xi = \{1, 2, \dots, 6\}$$

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots\}$$

$$\xi = \{1, 2, 3, \dots\}$$

Я понятия не имею, что значат эти множества, но на доске мы их написали со словами: "Давайте покидаем монетку".

Случайная величина  $\xi : \Omega \longrightarrow R^1$

## Определение

Случайной величиной  $\xi$  называется числовая функция  $\xi : \Omega \longrightarrow R^1$ , которая удовлетворяет условию:

$$\forall x \{ \omega; \xi(\omega) \leq x \} \in \mathcal{A}$$

## Определение

Функцией распределения (вероятностей) случайной величины  $\xi$  называется

$$F_{\xi}(x) = P(\omega; \xi(\omega) \leq x) = P(\xi \leq x)$$

Свойства  $F(x)$

1.  $F(+\infty) = 1, F(-\infty) = 0 \Rightarrow 0 \leq F(x) \leq 1$ . На самом деле аргумент  $F(x)$  принадлежит  $R^1$ , но видимо бесконечность теперь число.

2. Пусть  $x_1 < x_2$ , тогда  $F(x_1) \leq F(x_2)$ .

Доказательство:

$$F(x_2) = P(\xi \leq x_2), C = \{\omega : \xi(\omega) \leq x_2\}, A = \{\omega : \xi(\omega) \leq x_1\},$$

$$B = \{\omega : x_1 < \xi(\omega) \leq x_2\}. C = A + B, P(C) = P(A) + P(B)$$

$$F(x_2) = P(\xi \leq x_2) = P(\underbrace{\xi \leq x_1}_A) + P(B) = F(x_1) + P(B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(x_2) \geq F(x_1)$$

3.  $F(x_0) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} F(x_0 + \varepsilon)$

## Определение

Дискретная случайная величина (тут реально ничего не было даже на лекции).

## Определение

Пусть случайная величина  $\xi$  — дискретная. Рядом распределения  $\xi$  называется

$\xi$	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_n$
P	$p_1$	$p_2$	$\dots$	$p_n$

$$\sum_{k=1}^n p_k = 1, p_k = P(\omega : \xi(\omega) = x_k)$$

## Пример

$\xi$	-1	0	2
P	0.3	0.5	0.2

Если  $x < -1$ , то  $F(x) = 0$

Если  $-1 \leq x < 0$ , то  $F(x) = 0.3$

Если  $0 \leq x < 2$ , то  $F(x) = 0.8$

Если  $2 \leq x$ , то  $F(x) = 1$

## Определение

Математическим ожиданием (средним значением) дискретной случайной величины с конечным числом значений  $x_1, \dots, x_n$  называется число

$$E\xi = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$



Если у дискретной случайной величины счётное количество значений, тогда

$$E\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i, \text{ если ряд } \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i \text{ сходится}$$

Сходимость к  $\infty$  считают неопределённой, а с  $+\infty$ ,  $-\infty$  проблем нет.

## Определение

Дисперсией случайной величины  $\xi$  называют

$$\mathcal{D}\xi = E(\xi - E\xi)^2$$

Квадрат отклонения от среднего.

## Определение

Среднеквадратическим отклонением случайной величины  $\xi$  называют

$$\sigma_1 = \sqrt{\mathcal{D}\xi}$$

Свойства математического ожидания

$$1. \forall c \in \mathbb{R} \quad Ec = c$$

$$2. E(c \cdot \xi) = \sum_{i=1}^n c x_i p_i = c E\xi$$

$$3. \forall a, b \in \mathbb{R} \quad a \leq \xi \leq b \Rightarrow a \leq E\xi \leq b$$

Доказательство:

$$a \leq \sum_{i=1}^n a p_i \leq E\xi = \sum_{i=1}^n x_i p_i \leq \sum_{i=1}^n b p_i = b$$

$$4. E(\xi_1 + \xi_2) = E\xi_1 + E\xi_2$$

Лекция 4 октября.

Воспоминания:

$\xi$	$x_1$	$\dots$	$x_n$
$p$	$p_1$	$\dots$	$p_n$

$$E\xi = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

Свойства математического ожидания (продолжение)

5. Пусть  $\eta = \varphi(\xi)$ ,  $\varphi(x)$  - детерминированная функция.

$$E\xi = \sum_{i=1}^n \varphi(x_i) p_i$$

Свойства дисперсии.

$$1. \mathcal{D}c = 0$$

$$2. \mathcal{D}(c\xi) = E(c\xi - cE\xi)^2 = Ec^2(\xi - E\xi)^2 = c^2 \mathcal{D}\xi$$

$$3. \forall \xi \text{ случайная величина}(\xi) \Rightarrow \mathcal{D}\xi \geq 0$$

$$4. \mathcal{D}\xi = E(\xi^2 - 2\xi E\xi + (E\xi)^2) = E\xi^2 - 2(E\xi)^2 + (E\xi)^2 = E\xi^2 - (E\xi)^2$$

$$\begin{aligned} 5. \mathcal{D}(\xi_1 + \xi_2) &= E(\xi_1 + \xi_2)^2 - (E(\xi_1 + \xi_2))^2 = \\ &= E\xi_1^2 + 2E(\xi_1 \xi_2) + E\xi_2^2 - ((E\xi_1)^2 + 2E\xi_1 E\xi_2 + (E\xi_2)^2) = \\ &= (E\xi_1^2 - (E\xi_1)^2) + (E\xi_2^2 - (E\xi_2)^2) + 2(E(\xi_1 \xi_2) - E\xi_1 E\xi_2) = \\ &= \mathcal{D}\xi_1 + \mathcal{D}\xi_2 + 2 \underbrace{(E(\xi_1 \xi_2) - E\xi_1 E\xi_2)}_{\text{Ковариация } \xi_1 \text{ и } \xi_2} \end{aligned}$$

Если  $\xi_1, \xi_2$  независимы, то  $\text{cov}(\xi_1, \xi_2) = 0$  (ковариация нулевая).

## Определение

Начальным моментом k-го порядка случайной величины  $\xi$  называется

$$\mu_k = E\xi^k, \quad k = 1, 2, \dots$$

## Определение

Центральным моментом k-го порядка случайной величины  $\xi$  называется

$$\nu_k = E(\xi - E\xi)^k, \quad k = 2, 3, \dots$$

$$\nu_2 = \mathcal{D}\xi$$

## Определение

Случайная величина  $\overset{\circ}{\xi} = \xi - E\xi$  называется центрированной случайной величиной

$$E\overset{\circ}{\xi} = 0$$

## Определение

Случайная величина  $\xi^* = \frac{\overset{\circ}{\xi}}{\sigma}$  называют нормированной случайной величиной.

$$D\xi^* = 1$$

Распределения:

### 1. Распределение Бернулли

$$\xi \sim \text{Ber}(p), \quad 0 < p < 1$$

$$\begin{array}{c|c|c} \xi & 0 & 1 \\ \hline p & 1-p & p \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c} \xi^2 & 0 & 1 \\ \hline p & 1-p & p \end{array}$$

$$E\xi = p, \quad \mathcal{D}\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq$$

### 2. Биномиальное распределение

$$\xi \sim \text{Bi}(n, p), \quad 0 < p < 1$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} \xi & 0 & 1 & k & n \\ \hline p & \dots & \dots & C_n^k p^k q^{n-k} & \dots \end{array}$$

$$\begin{aligned} E\xi &= \sum_{k=0}^n k C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^n k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} = \\ &= np \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} q^{n-k} = \left\langle j = k-1 \atop k = j+1 \right\rangle = \\ &= np \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{j!(n-1-j)!} p^j q^{n-1-j} = np(p+q)^{n-1} = np \end{aligned}$$

Можно посчитать математическое ожидание иначе:

$$\xi = \xi_1 + \dots + \xi_n, \quad \begin{array}{c|c|c} \xi_i & 0 & 1 \\ \hline p & q & p \end{array} \Rightarrow E\xi = E\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right) = \sum_{i=1}^n E\xi_i = np$$

$$\mathcal{D}\xi = \sum_{k=0}^n k^2 C_n^k p^k q^{n-k} - (np)^2 = \dots = npq$$

Так как  $\xi_1, \dots, \xi_n$  независимы:

$$\mathcal{D}\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathcal{D}\xi_i = npq$$

### 3. Распределение Пуассона

$$\xi \sim \Pi(\lambda), \quad \lambda > 0$$

$$\xi = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$P(\xi = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

$$E\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$

$$\begin{aligned} D\xi &= E\xi^2 - (E\xi)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} - \lambda^2 = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{e^{-\lambda} \lambda^{k-1}}{(k-1)!} - \lambda^2 = \\ &= \lambda \sum_{k=1}^{\infty} (k-1+1) \frac{e^{-\lambda} \lambda^{k-1}}{(k-1)!} - \lambda^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda \end{aligned}$$

### Теорема Пуассона

Пусть в схеме испытаний Бернулли:  $n \rightarrow \infty$ ,  $p \rightarrow 0$ ,  $np \rightarrow \lambda$ . Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

### Доказательство

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} C_n^k p^k q^{n-k} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{n^k} \frac{(1 - \frac{\lambda}{n})^n}{(1 - \frac{\lambda}{n})^k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \end{aligned}$$

Погрешность такой аппроксимации:

$$\left| C_n^k p^k q^{n-k} - \frac{e^{-np} (np)^k}{k!} \right| \leq np^2$$

### Задача

Завод поставяет 1000 бутылок воды. Каждая бутлка может быть повреждена в пути с вероятностью 0.002. Какое среднее количество бутылок будет повреждено? Какова вероятность повреждения не более 2 бутылок? Случайная величина  $\xi$  — количество повреждённых бутылок.

$$\xi \sim \text{Bi}(1000, 0.002) \Rightarrow E\xi = 1000 \cdot 0.002 = 2$$

Погрешность при аппроксимации Пуассоновским распределением будет  $\leq np^2 = 0.004$ , что нас устраивает по точности.

$$P(\xi \leq 2) = p(\xi = 0) + p(\xi = 1) + p(\xi = 2) = e^{-2}(1 + 2 + 2) = \frac{5}{e^2}$$

Ещё распределения

### 4. Геометрическое распределение

$$\xi \sim G(p), \quad 0 < p < 1$$

$\xi = \{1, 2, \dots\}$ ,  $P(\xi = k) = q^{k-1}p$ . После первого успеха эксперименты прекращаются.

$$E\xi = \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} p = p \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} (q^k)' = p \left( \sum_{k=1}^{\infty} q^k \right)' = p \left( \frac{q}{1-q} \right)' =$$

$$\frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

## Задача

Студент выучил 80% билетов. Преподаватель спрашивает его, пока не обнаружит незнание. Сколько в среднем билетов спросит преподаватель?

$$\xi \sim G(0.2) \quad E\xi = \frac{1}{0.2} = 5$$

Лекция 11 октября.

Воспоминания:  $F_\xi(x) = P(\xi \leq x)$

## Непрерывные случайные величины

### Определение

Неотрицательная кусочно-непрерывная функция  $f_\xi(x)$  называется плотностью распределения случайной величины  $\xi$ , если

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^x f_\xi(t) dt$$

Прикол про Канторову лестницу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{2}F(3x), & 0 \leq x < \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}F(3x-2), & \frac{2}{3} \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

непрерывна, но не имеет плотности.

$$P(\xi = x) = F(x) - \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} F(x - \varepsilon) = 0$$

$$f(x) = F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x < \xi \leq x + \Delta x)}{\Delta x}$$
$$f(x)\Delta x \underset{\Delta x \rightarrow 0}{=} P(x < \xi \leq x + \Delta x)$$

Свойства  $f_\xi(x)$

1.  $\forall x \in \mathbb{R}^1 \quad f_\xi(x) \geq 0$

2.  $\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x) dx = F(+\infty) = 1$

3.  $\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 < \xi \leq x_2)$

4. В точках дифференцируемости функции  $F(x)$

$$f(x) = F'(x)$$

5. Пусть случайная величина  $\xi$  имеет плотность распределения  $f_\xi(x)$ . Детерминированная функция  $\varphi(x)$  является монотонной и дифференцируемой.

$$\text{СВ } \eta = \varphi(\xi) \quad f_\eta(y) = ?$$

а. Пусть  $\varphi(x)$  — монотонно возрастающая функция:

$$F_\eta(y) = P(\eta \leq y) = P(\varphi(\xi) \leq y) = P(\xi \leq \varphi^{-1}(y)) = F_\xi(\varphi^{-1}(y))$$

$$f_\eta(y) = \frac{d}{dy} F_\eta(y) = f_\xi(\varphi^{-1}(y)) \cdot (\varphi^{-1}(y))'$$

b. Пусть  $\varphi(x)$  — монотонно убывающая функция.

$$F_{\eta}(y) = P(\eta \leq y) = P(\varphi(\xi) \leq y) = P(\xi \geq \varphi^{-1}(y)) = 1 - F_{\xi}(\varphi^{-1}(y))$$

$$f_{\eta}(y) = \frac{d}{dy} F_{\eta}(y) = -f_{\xi}(\varphi^{-1}(y)) (\varphi^{-1}(y))'$$

Минус возникает для компенсации отрицательности производной обратной функции.

c. Пусть  $\varphi(x)$  — монотонная функция:

$$f_{\eta}(y) = f_{\xi}(\varphi^{-1}(y)) \left| (\varphi^{-1}(y))' \right|$$

d. Если  $\varphi(x)$  — немонотонная функция. Разбиваем на интервалы монотонности:

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$$

Найдём:  $\varphi_1^{-1}(y), \varphi_2^{-1}(y), \dots, \varphi_n^{-1}(y)$ . Тогда:

$$f_{\eta}(y) = \sum_{i=1}^k f(\varphi_i^{-1}(y)) \left| (\varphi_i^{-1}(y))' \right|$$

## Определение

Математическое ожидание непрерывной случайной величины  $\xi$  с плотностью  $f_{\xi}(x)$  называется числом:

$$E\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\xi}(x) dx$$

если сходится  $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_{\xi}(x) dx$

## Замечание

1. Если  $f_{\xi}(x) > 0$  только при  $x > 0$  и  $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\xi}(x) dx$  расходится, то  $E\xi = +\infty$

2. Если  $f_{\xi}(x) > 0$  только при  $x < 0$  и  $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\xi}(x) dx$  расходится, то  $E\xi = -\infty$

3. Распределение Коши:  $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx$$

1.  $Ec = c$
2.  $E(c\xi) = cE(\xi)$
3.  $a \leq \xi \leq b \Rightarrow a \leq E\xi \leq b$
4.  $E(\xi_1 + \xi_2) = E\xi_1 + E\xi_2$
5. Пусть случайная величина  $\eta = \varphi(\xi)$ ,  $\varphi$  — детерминированная функция.

$$E\eta = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f_{\xi}(x) dx$$

## Определение

Дисперсией называется:

$$\mathcal{D}\xi = E(\xi - E\xi)^2 = E\xi^2 - (E\xi)^2$$

Квантиль.

## Определение

Число  $\underline{Z}_{\gamma}$   $0 < \gamma < 1$ , называется  $\gamma$ -квантилью непрерывного строго монотонного распределения  $F_{\xi}(x)$ , если:

$$F_{\xi}(Z_{\gamma}) = \gamma = P(\xi \leq Z_{\gamma}) = \int_{-\infty}^{Z_{\gamma}} f(x) dx$$

Были примеры с графиками, я их очень люблю.

## Определение

Квантиль  $Z_{0,5}$  называется медианой. Не всегда совпадает с математическим ожиданием.

Лекция 25 октября

## Равномерное распределение

$$\xi \sim R(a, b)$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (a, b) \\ \frac{1}{b-a}, & x \in (a, b) \end{cases}$$

$$E\xi = \frac{a+b}{2}$$

$$\mathcal{D}\xi = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \Rightarrow F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & x \in (a, b) \\ 1, & x \geq b \end{cases}$$

## Экспоненциальное (показательное) распределение

$$\xi \sim E(\lambda), \lambda > 0$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$E\xi = \frac{1}{\lambda}$$

$$\mathcal{D}\xi = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

## Свойства

Пусть  $\xi \sim E(\lambda)$ , тогда:

$$\forall t, \tau \quad P(\xi > t + \tau / \xi > t) = P(\xi > \tau), \text{ условная вероятность}$$

## Доказательство

$$\begin{aligned} P(\xi > t + \tau / \xi > t) &= \frac{P(\xi > t + \tau)}{P(\xi > t)} = \frac{1 - F(t + \tau)}{1 - F(t)} = \frac{e^{-\lambda(t+\tau)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda \tau} = \\ &= 1 - F(\tau) = P(\xi > \tau) \end{aligned}$$

## Нормальное (гауссовское) распределение

$$\xi \sim N(m, \sigma^2)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

$$E\xi = m$$

$$D\xi = \sigma^2$$

## Определение

Функция  $\Phi_0(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$  называется функцией Лапласа

## Свойства

$$\Phi_0(+\infty) = 0.5$$

$$\Phi_0(-x) = -\Phi_0(x)$$

Правило трёх сигм

$$P(|\xi - m| < 3\sigma) = 2\Phi_0\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi_0(3) = 0.997$$

Лекция 1 ноября

## Неравенства Чебникова

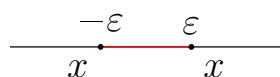
Пусть  $E|\xi|^r < \infty$ . Тогда:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P(|\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{E|\xi|^r}{\varepsilon^r}$$

## Доказательство

$$E|\xi|^r = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^r f(x) dx$$

$x \in (-\infty, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, +\infty)$ , то есть



Тогда:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^r f(x) dx &\geq \int_{|x| \geq \varepsilon} |x|^r f(x) dx \geq \varepsilon^r \int_{|x| \geq \varepsilon} f(x) dx = \varepsilon^r P(|\xi| \geq \varepsilon) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{E|\xi|^r}{\varepsilon^r} &\geq P(|\xi| \geq \varepsilon), \text{ ч.т.д.} \end{aligned}$$

### Частные случаи

1.  $r = 1 \wedge P(\xi \geq 0) = 1$

$$P(\xi \geq \varepsilon) \leq \frac{E\xi}{\varepsilon}$$

2. Пусть  $r = 2$

$$P(|\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{E\xi^2}{\varepsilon^2}$$

3. Пусть  $r = 2$ ,  $\eta = \xi - E\xi$

$$P(|\xi - E\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$$

### Задача

Случайная величина  $\xi$  — расход электрической энергии в месяц. Известно  $E\xi = 4\,000$ . Оценить  $P(\xi \geq 10\,000)$ .

Применяя неравенство Чебышёва может прикинуть эту вероятность:

$$P(\xi \geq 10\,000) \leq \frac{4\,000}{10\,000} = 0.4$$

**Неравенство не находит вероятность точно, используется только для получения грубой оценки!**

### Определение

Вектор  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ , компоненты которого  $\xi_1, \dots, \xi_n$ , являющиеся случайными величинами, называется случайным вектором.

### Определение

Функцией распределения случайного вектора  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  называется

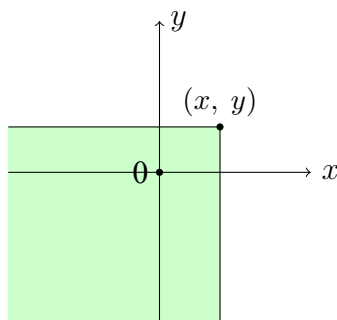
$$F_\xi(x_1, \dots, x_n) = P(\xi_1 \leq x_1, \dots, \xi_n \leq x_n)$$

### Замечание

$$\{\xi_1 \leq x_1, \dots, \xi_n \leq x_n\} = \{(\xi_1 \leq x_1) \cap (\xi_2 \leq x_2) \cap \dots \cap (\xi_n \leq x_n)\}$$

### Пример

Пусть  $n = 2$ .  $F_\xi(x, y) = P(\xi_1 \leq x, \xi_2 \leq y)$



### Свойства $F(x, y)$

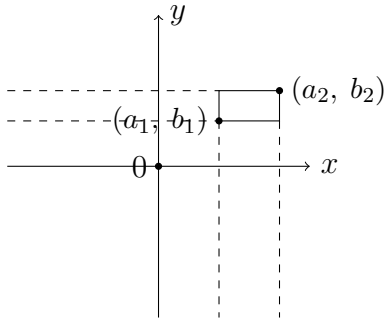
1.  $\forall x, y \quad 0 \leq F(x, y) \leq 1$

2.  $F(-\infty, -\infty) = 0 = F(x, -\infty) = F(-\infty, y)$



$$3. F(+\infty, +\infty) = 1$$

$$4. F(+\infty, y) = P(\xi_2 \leq y) = F_{\xi_2}(y) \text{ Рассмотрим вероятность попадания в квадрат:}$$



$$5. P(a_1 \leq \xi \leq a_2, b_1 \leq \xi_2 \leq b_2) = F(a_2, b_2) - F(a_2, b_1) - F(a_1, b_2) + F(a_1, b_1)$$

$$6. F(x, y) \text{ монотонно неубывающая функция по каждому аргументу.}$$

$$\text{Доказательство: } \forall \Delta x > 0 \quad F(x + \Delta x, y) \geq F(x, y)$$

$$F_{\xi}(x + \Delta x, y) = P(\xi \leq x + \Delta x, \xi_2 \leq y) = P(\xi_1 \leq x, \xi_2 \leq y) + \underbrace{P(x < \xi_1 \leq x + \Delta x, \xi_2 \leq y)}_{\alpha \geq 0} = F(x, y) + \alpha \geq F(x, y)$$

## Определение

Компоненты  $\xi_1$  и  $\xi_2$  случайного вектора  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$  называются независимыми, если верно:

$$\forall x, y \quad F_{\xi}(x, y) = F_{\xi_1}(x)F_{\xi_2}(y)$$

## Определение

Дискретный случайный вектор:

$\xi_1, \xi_2$	$y_1 \dots y_k$
$x_1$	$p_{11} \dots p_{1k}$
$x_2$	$p_{21} \dots p_{2k}$
$\vdots$	$\vdots$
$x_n$	$p_{n1} \dots p_{nk}$

$$p_{ij} = P(\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j)$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k p_{ij} = 1$$

$\xi_1$	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_m$
$p$	$p_{1\bullet}$	$p_{2\bullet}$	$\dots$	$p_{m\bullet}$

$$p_{i\bullet} = \sum_{j=1}^k p_{ij}$$

## Утверждение

Компоненты  $\xi_1, \xi_2$  дискретного случайного вектора  $\xi = (x_1, x_2)$  независимы тогда и только тогда, когда

$$\forall i = \overline{1, m}, j = \overline{1, k} \quad p_{ij} = p_{i\bullet} \cdot p_{\bullet j}$$

## Определение

Неотрицательная кусочно-непрерывная функция  $f_{\xi}(x, y)$  называется плотностью распределения случайного вектора  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ , если

$$F_{\xi}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(t_1, t_2) dt_2 dt_1$$

## Замечание

В точках дифференцируемости  $F(x, y)$

$$f(x, y) = \frac{\delta^2 F(x, y)}{\delta x \delta y}, \quad \delta \text{ частная производная}$$

### Свойства $f(x, y)$

1.  $\forall x, y \quad f(x, y) \geq 0$

2. 
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = F(+\infty, +\infty) = 1$$

3. 
$$\int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} f(x, y) dy dx = F(a_2, b_2) - F(a_2, b_1) - (F(a_1, b_2) - F(a_1, b_1)) =$$
  
$$= P(a_1 < \xi_1 \leq a_2, b_1 < \xi_2 \leq b_2)$$

4. На доске нарисована клякса  $D$ , разбитая на много маленьких прямоугольников  $f(\tilde{x}, \tilde{y}), \Delta x, \Delta y, \quad \tilde{x} \in (x, x + \Delta x), \tilde{y} \in (y, y + \Delta y)$ . Тогда

$$P(\xi \in D) = \iint_D f(x, y) dx dy, \text{ вспоминаем матан.}$$

5. 
$$F_{\xi_1}(x) = F_{\xi}(x, +\infty) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, y) dy dt$$

$$f_{\xi_1}(x) = \frac{d}{dx} F_{\xi_1}(x) = \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, y) dy dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$$

$$f_{\xi_2}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$$

Лекция 8 ноября

## Определение

Случайный вектор  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  имеет равномерное распределение в области  $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^n$ , если

$$f_{\xi}(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} c, & \text{если } (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{D} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \text{ где } c \text{ — константа}$$

## Частный случай

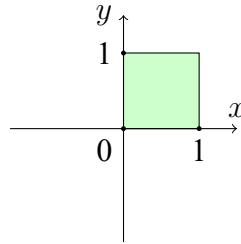
При  $n = 2$  случайный вектор  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  распределён равномерно в области  $\mathcal{D}$ , если

$$f_{\xi}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{S}, & \text{если } (x, y) \in \mathcal{D} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \text{ где } S \text{ — площадь } \mathcal{D}$$

## Пример 1

Пусть  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$  распределён равномерно в области

$$f_{\xi}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in (0, 1) \wedge y \in (0, 1) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$



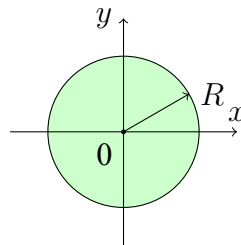
$$f_{\xi_1}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi}(x, y) dy = \begin{cases} \int_0^1 1 dy, & \text{если } x \in (0, 1) \\ 0, & \text{если } x \notin (0, 1) \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in (0, 1) \\ 0, & \text{если } x \notin (0, 1) \end{cases}$$

$$f_{\xi_2}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi}(x, y) dx = \begin{cases} \int_0^1 1 dx, & \text{если } y \in (0, 1) \\ 0, & \text{если } y \notin (0, 1) \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{если } y \in (0, 1) \\ 0, & \text{если } y \notin (0, 1) \end{cases}$$

Получаем  $\forall x, y \in \mathbb{R}^2 \quad f_{\xi}(x, y) = f_{\xi_1}(x) \cdot f_{\xi_2}(y) \Rightarrow$  случайные величины независимы.

## Пример 2

Пусть  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$  распределён равномерно в круге радиуса  $R$



$$f_{\xi}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi R^2}, & \text{если } x^2 + y^2 \leq R^2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$f_{\xi_1}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi}(x, y) dy = \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2}} \frac{1}{\pi R^2} dy = \begin{cases} \frac{2\sqrt{R^2-x^2}}{\pi R^2}, & \text{если } |x| \leq R \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$f_{\xi_2}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi}(x, y) dx = \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{+\sqrt{R^2-y^2}} \frac{1}{\pi R^2} dx = \begin{cases} \frac{2\sqrt{R^2-y^2}}{\pi R^2}, & \text{если } |y| \leq R \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Получаем  $\exists x, y \quad f_{\xi}(x, y) \neq f_{\xi_1}(x) \cdot f_{\xi_2}(y) \Rightarrow$  случайные величины зависимы.

## Утверждение

Пусть  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$  — непрерывный случайный вектор, тогда  $\xi_1$  и  $\xi_2$  — независимы тогда и только тогда, когда

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad f_{\xi}(x, y) = f_{\xi_1}(x)f_{\xi_2}(y)$$

## Доказательство

“ $\Rightarrow$ ”

Пусть  $\xi_1$  и  $\xi_2$  независимы, тогда:

$$f_{\xi}(x, y) = \frac{\delta^2 F(x, y)}{\delta x \cdot \delta y} = \frac{\delta^2 F_{\xi_1}(x) F_{\xi_2}(y)}{\delta x \delta y} = \frac{dF_{\xi_1}(x)}{dx} \cdot \frac{dF_{\xi_2}(y)}{dy} = f_{\xi_1}(x) \cdot f_{\xi_2}(y)$$

“ $\Leftarrow$ ”

Пусть  $f_{\xi}(x, y) = f_{\xi_1}(x) \cdot f_{\xi_2}(y)$ , тогда:

$$\begin{aligned} F_{\xi}(x, y) &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{\xi}(t, s) ds dt = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{\xi_1}(t) f_{\xi_2}(s) ds dt = \int_{-\infty}^x f_{\xi_1}(t) \left( \int_{-\infty}^y f_{\xi_2}(s) ds \right) dt = \\ &= F_{\xi_1}(x) F_{\xi_2}(y) \Rightarrow \xi_1, \xi_2 \text{ независимы.} \end{aligned}$$

## Определение

Математическим ожиданием вектора  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  называют вектор  $E\xi = (m_1, \dots, m_n)$ , где  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} m_i = E\xi_i$

### Свойства математического ожидания

1.  $E(\xi_1 + \xi_2) = E\xi_1 + E\xi_2$

*Доказательство:*  $E(\xi_1 + \xi_2) = \sum_i \sum_j (x_i + y_j) p_{ij} =$   
 $= \sum_i \sum_j x_i p_{ij} + \sum_i \sum_j y_j p_{ij} = \sum_i x_i p_{i\bullet} + \sum_j y_j p_{\bullet j} = E\xi_1 + E\xi_2$

2.  $\xi_1, \xi_2$  независимы  $\Rightarrow E(\xi_1 \xi_2) = E\xi_1 \cdot E\xi_2$

*Доказательство:*  $E(\xi_1 \xi_2) = \int \int xy f(x, y) dx dy = \left\langle \begin{array}{l} \text{компоненты } \xi_1, \xi_2 \\ \text{независимы} \end{array} \right\rangle =$   
 $= \int \int xy f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{\xi_2}(y) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\xi_1}(x) dx \right) dy =$   
 $= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\xi_1}(x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{\xi_2}(y) dy = E\xi_1 \cdot E\xi_2$

## Определение

Ковариацией случайных величин  $\xi_1, \xi_2$  называют величину

$$\text{cov}(\xi_1, \xi_2) = k_{\xi_1 \xi_2} = E(\overset{\circ}{\xi_1} - E\xi_1)(\overset{\circ}{\xi_2} - E\xi_2) = E\overset{\circ}{\xi_1} \overset{\circ}{\xi_2}$$

*Напоминание:*  $\overset{\circ}{\xi}$  обозначает центрированную случайную величину.

## Определение

Коэффициентом корреляции случайных величин  $\xi_1, \xi_2$  называется

$$\rho_{\xi_1 \xi_2} = \frac{\text{cov}(\xi_1, \xi_2)}{\sqrt{\mathcal{D}\xi_1 \mathcal{D}\xi_2}} = \text{cov}(\xi_1^*, \xi_2^*)$$

*Напоминание:*  $\xi^* = \frac{\xi - E\xi}{\sqrt{\mathcal{D}\xi}}$

## Определение

Случайные величины  $\xi_1, \xi_2$  называются некоррелированными, если

$$\rho_{\xi_1, \xi_2} = 0$$

Положительно коррелированными, если

$$\rho_{\xi_1, \xi_2} > 0$$

Отрицательно коррелированными, если

$$\rho_{\xi_1, \xi_2} < 0$$

Свойства  $\text{cov}(\xi_1, \xi_2)$

1.  $\text{cov}(\xi, \xi) = \mathcal{D}\xi$
2.  $\mathcal{D}(\xi + \eta) = \mathcal{D}\xi + \mathcal{D}\eta + 2\text{cov}(\xi, \eta)$
3.  $\text{cov}(\xi, \eta) = \text{cov}(\eta, \xi)$
4.  $\text{cov}(\xi, \eta) = E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta) = E(\xi\eta) - E\xi \cdot E\eta$
5.  $\text{cov}(a\xi + b, c\eta + d) = E(a\xi + b - aE\xi - b)(c\eta + d - cE\eta - d) = a \cdot c \text{cov}(\xi, \eta)$

6.  $|\rho_{\xi\eta}| = \frac{|\text{cov}(\xi, \eta)|}{\sigma_\xi \sigma_\eta} \leq 1 \Rightarrow |\text{cov}(\xi, \eta)| \leq \sigma_\xi \sigma_\eta$

Доказательство:

$$\begin{aligned} 0 \leq \mathcal{D}(\xi^* + \eta^*) &= \mathcal{D}\xi^* + \mathcal{D}\eta^* + 2\overbrace{\text{cov}(\xi^*, \eta^*)}^{=\rho_{\xi^* \eta^*}} = 1 + 1 + 2\rho_{\xi^* \eta^*} = \\ &= 2(1 + \rho_{\xi^* \eta^*}) \geq 0 \Rightarrow \rho_{\xi^* \eta^*} \geq -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 \leq \mathcal{D}(\xi^* - \eta^*) &= \mathcal{D}\xi^* + \mathcal{D}\eta^* - 2\overbrace{\text{cov}(\xi^*, \eta^*)}^{=\rho_{\xi^* \eta^*}} = 1 + 1 - 2\rho_{\xi^* \eta^*} = \\ &= 2(1 - \rho_{\xi^* \eta^*}) \geq 0 \Rightarrow \rho_{\xi^* \eta^*} \leq 1 \end{aligned}$$

7.  $\xi, \eta$  — независимые случайные величины и  $\mathcal{D}\xi, \mathcal{D}\eta \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{cov}(\xi, \eta) = 0$

Доказательство:

$$\begin{aligned} \text{cov}(\xi, \eta) &= E\xi\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_\xi)(y - m_\eta) f(x, y) dx dy = \left\langle \begin{array}{l} \text{компоненты } \xi, \eta \\ \text{независимы} \end{array} \right\rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_\xi) f(x) (y - m_\eta) f(y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_\xi) f(x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} (y - m_\eta) f(y) dy = 0 \end{aligned}$$

0 получается, потому что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_\xi) f(x) dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx}_{=E\xi} - m_\xi \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx}_{=1} = E\xi - E\xi = 0$$

Лекция 15 ноября

Свойства  $\rho_{\xi, \eta}$

1.  $|\rho_{\xi\eta}| \leq 1$
2.  $\rho_{\xi\xi} = 1$

3. Если случайная величина  $\eta = a\xi + b$ ,  $a \neq 0$ , то

$$\rho_{\xi\eta} = \begin{cases} 1, & \text{если } a > 0 \\ -1, & \text{если } a < 0 \end{cases}$$

*Доказательство:*

$$\begin{aligned} \rho_{\xi\eta} &= \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{\mathcal{D}\xi \cdot \mathcal{D}\eta}} = \frac{E\xi\eta - E\xi E\eta}{\sqrt{\mathcal{D}\xi \cdot \mathcal{D}\eta}} = \frac{E\xi(a\xi + b) - E\xi E(a\xi + b)}{\sqrt{\mathcal{D}\xi \cdot \mathcal{D}(a\xi + b)}} = \\ &= \frac{aE\xi^2 + bE\xi - a(E\xi)^2 - bE\xi}{\sqrt{a^2(\mathcal{D}\xi)^2}} = \frac{a(E\xi^2 - (E\xi)^2)}{|a|\mathcal{D}\xi} = \frac{a\mathcal{D}\xi}{|a|\mathcal{D}\xi} = \begin{cases} 1, & \text{если } a > 0 \\ -1, & \text{если } a < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

4. Пусть  $|\rho_{\xi\eta}| = 1 \Rightarrow \eta = a\xi + b$

а)  $\rho_{\xi\eta} = 1 = \rho_{\xi^*\eta^*}$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\xi^* - \eta^*) &= \mathcal{D}\xi^* + \mathcal{D}\eta^* + 2\text{cov}(\xi^*, -\eta^*) = \mathcal{D}\xi^* + \mathcal{D}\eta^* - 2\text{cov}(\xi^*, \eta^*) = \\ &= 2 - 2\rho_{\xi\eta} = 2(1 - \rho_{\xi\eta}) = 0 \end{aligned}$$

Итак, получаем:

$$\mathcal{D}(\xi^* - \eta^*) = 0 \Rightarrow \xi^* - \eta^* = c \Rightarrow \frac{\xi - m_\xi}{\sigma_\xi} - \frac{\eta - m_\eta}{\sigma_\eta} = c \Rightarrow \text{линейно зависимы}$$

б)  $\rho_{\xi\eta} = -1$ :

$$\mathcal{D}(\xi^* + \eta^*) = \mathcal{D}\xi^* + \mathcal{D}\eta^* + 2\text{cov}(\xi^*, \eta^*) = 2(1 + \rho_{\xi\eta}) = 0$$

## Пример

Пусть  $\xi \sim R(-a, a)$ ,  $\eta = \xi^2$ . Посчитаем коэффициент корреляции:

$$\text{cov}(\xi, \eta) = E\xi\eta - \underbrace{E\xi}_{=0} E\eta = E\xi^3 = \int_{-a}^a x^3 \frac{1}{2a} dx = 0 \Rightarrow \rho_{\xi\eta} = 0$$

Итого, величины зависимы, но не коррелированы (так как корреляция показывает линейную зависимость, а  $\eta$  зависит от  $\xi$  квадратично).

## Определение

Ковариационной матрицей вектора  $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  называется матрица  $K_\xi = (k_{ij})$ , где  $k_{ij} = \text{cov}(\xi_i, \xi_j)$ ,  $i, j = \overline{1, n}$

Свойства  $K_\xi$

1.  $k_{ij} = k_{ji} \Rightarrow K_\xi$  симметричная
2.  $k_{ii} = \mathcal{D}\xi_i$ ,  $i = \overline{1, n}$
3.  $K_\xi$  неотрицательно определённая, то есть

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \quad \sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j k_{ij} \geq 0$$

*Доказательство:*

$$0 \leq E \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i \overset{\circ}{\xi}_i \right)^2 = E \left( \sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j \overset{\circ}{\xi}_i \overset{\circ}{\xi}_j \right) = \sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j \underbrace{E \overset{\circ}{\xi}_i \overset{\circ}{\xi}_j}_{k_{ij}}$$

## Определение

Корреляционной матрицей случайного вектора  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  называется матрица  $R_\xi = (\rho_{ij})$ , где  $\rho_{ij} = \rho_{\xi_1 \xi_2}$

1.  $\forall i, j = \overline{1, n} \quad \rho_{ij} = \rho_{ji}$
2.  $\forall i = \overline{1, n} \quad \rho_{ii} = 1$

## Формула свёртки

Пусть случайные величины  $\xi_1$  и  $\xi_2$  — независимы,  $\xi_1 \sim f_{\xi_1}(x)$ ,  $\xi_2 \sim f_{\xi_2}(y)$

Случайная величина  $\eta = \xi_1 + \xi_2$ .

Найти:  $f_\eta(z)$  —?

$$F_\eta(z) = P(\eta \leq z) = P(\xi_1 + \xi_2 \leq z) = \iint_{x+y \leq z} f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(y) dy dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{z-x} f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(y) dy dx$$
$$f_\eta(z) = \frac{d}{dz} F_\eta(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(z-x) dx$$

## Пример

$\xi_1 \sim N(0, 1)$ ,  $\xi_2 \sim N(0, 1)$

$\xi_1$  и  $\xi_2$  — независимы.

$\eta = \xi_1 + \xi_2$ ,  $f_\eta(z)$  —?

$$f_\eta(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-x)^2}{2}} dx = \int \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2} - \left(\frac{z^2}{2} - xz + \frac{x^2}{2}\right)} dx =$$
$$= \frac{e^{-\frac{z^2}{4}}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{1}{2}}} e^{-x^2 + xz - \frac{z^2}{4}} dx = \frac{e^{-\frac{z^2}{4}}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{1}{2}}} e^{-(x-\frac{z}{2})^2} dx}_{=1}$$

Равно 1, потому что это гауссовская плотность, тогда оставшаяся часть и будет плотностью распределения. Итак,  $\eta \sim N(0, 2)$ .

## Утверждение

Пусть  $\xi_1, \dots, \xi_n$  — независимые случайные величины, такие что  $\xi_i \sim N(m_i, \sigma_i^2)$ ,  $i = \overline{1, n}$

Тогда случайная величина  $\eta = \xi_1 + \dots + \xi_n \sim N(m_\eta, \mathcal{D}\eta)$ ,

где  $m_\eta = \sum_{i=1}^n m_i$ ,  $\mathcal{D}\eta = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$

Лекция 22 ноября.

## Условное распределение

$(\xi, \eta)$  — дискретный случайный вектор.

$\xi \backslash \eta$	$y_1 \dots y_k$
$x_1$	$p_{11} \dots p_{1k}$
$\vdots$	
$x_m$	$p_{m1} \dots p_{mk}$

Тогда по формуле условной вероятности:

$$p(\xi = x_i \mid \eta = y_j) = \frac{p(\xi = x_i, \eta = y_j)}{p(\eta = y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}}$$

## Определение

Набор вероятностей  $\forall i = \overline{1, m} \quad \frac{p_{i,j}}{p_{\bullet,j}}$  называется условным распределением случайной величины  $\xi$  при условии  $\{\eta = y_j\}$ .

## Определение

Условной функцией распределения случайной величины  $\xi$  при условии  $\{\eta = y_j\}$  таком, что  $P(\eta = y_j) > 0$ , называется:

$$F_{\xi}(x | y_j) = P(\xi \leq x | \eta = y_j) = \sum_{x_i \leq x} \frac{p_{i,j}}{p_{\bullet,j}}$$

## Определение

Условным математическим ожиданием случайной величины  $\xi$ :

При условии  $\{\eta = y_j\}$  называется:

$$E(\xi | \eta = y_j) = \sum_{i=1}^m x_i \cdot p(\xi = x_i | \eta = y_j) = \sum_{i=1}^m x_i \frac{p_{i,j}}{p_{\bullet,j}}$$

При условии  $\{\eta\}$ :

$$E(\xi | \eta) = g(\eta)$$

То есть это некоторая функция от случайного аргумента (значит она является случайной величиной). Распишем таблицу значений:

$E(\xi   \eta)$	$E(\xi   \eta = y_1)$	$\dots$	$E(\xi   \eta = y_k)$
$p$	$p_{\bullet,1}$	$\dots$	$p_{\bullet,k}$

Рассмотрим  $E(g(\eta))$ , заодно докажем формулу полного математического ожидания:

$$E(E(\xi | \eta)) = E\xi$$

## Доказательство

$$E(E(\xi | \eta)) = \sum_{j=1}^n E(\xi | \eta = y_j) p_{\bullet,j} = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^m x_i \cdot \frac{p_{i,j}}{p_{\bullet,j}} p_{\bullet,j} = \sum_{i=1}^m x_i \sum_{j=1}^k p_{i,j} = \sum_{i=1}^m x_i p_{i\bullet} = E\xi$$

Для непрерывных случайных величин:

## Определение

Пусть  $f(x, y)$  и  $f_{\eta}(y)$  — непрерывны в точке  $y_0$  и  $f_{\eta}(y_0) > 0$ . Тогда условной функцией распределения случайной величины  $\xi$  при условии  $\{\eta = y_0\}$  называется функция:

$$F_{\xi}(x | y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow +0} P(\xi \leq x | y_0 < \eta \leq y_0 + \Delta y)$$

Корректность определения:

$$\begin{aligned} F_{\xi}(x | y_0) &= \lim_{\Delta y \rightarrow +0} P(\xi \leq x | y_0 < \eta \leq y_0 + \Delta y) = \lim_{\Delta y \rightarrow +0} \frac{P(\xi \leq x, y_0 < \eta \leq y_0 + \Delta y)}{P(y_0 < \eta \leq y_0 + \Delta y)} = \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow +0} \frac{\int_{-\infty}^x \int_{y_0}^{y_0 + \Delta y} f(t, s) ds dt}{\int_{y_0}^{y_0 + \Delta y} f_{\eta}(s) ds} = \left\langle \begin{array}{c} \text{По теореме о} \\ \text{среднем значении} \end{array} \right\rangle = \lim_{\Delta y \rightarrow +0} \frac{\Delta y \int_{-\infty}^x f(t, \tilde{s}) dt}{\Delta y f_{\eta}(\tilde{s})} = \\ &= \frac{\int_{-\infty}^x f(t, y_0) dt}{f_{\eta}(y_0)} \end{aligned}$$



## Определение

Пусть  $f(x, y)$ ,  $f_\eta(y)$  — непрерывны в точке  $y_0$  и  $f_\eta(y_0) > 0$ . Функция  $f_\xi(x | y_0)$  называется условной плотностью случайной величины  $\xi$  при условии  $\eta = y$ , если:

$$F_\xi(x | y_0) = \int_{-\infty}^x f_\xi(t | y) dt$$

## Замечание

В точке дифференцируемости  $F_\xi(x | y_0)$ :

$$f_\xi(x | y_0) = \frac{\delta F_\xi(x | y_0)}{\delta x} \Rightarrow f_\xi(x | y_0) = \frac{\delta}{\delta x} \cdot \frac{\int_{-\infty}^x f(t, y_0) dt}{f_\eta(y_0)} = \frac{f(x, y_0)}{f_\eta(y_0)}$$

## Критерий независимости непрерывных случайных величин

$$\forall x \in \mathbb{R} \forall y \quad (f_\eta(y) > 0) \Rightarrow f_\xi(x | y) = \frac{f(x, y)}{f_\eta(y)}$$

Если  $\xi$  и  $\eta$  независимы, тогда:

$$f(x, y) = f_\xi(x)f_\eta(y) \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad f_\xi(x | y) = f_\xi(x)$$

## Пример

Пусть случайный вектор  $(\xi, \eta)$  распределён равномерно в круге радиуса  $R$  с центром в начале координат:

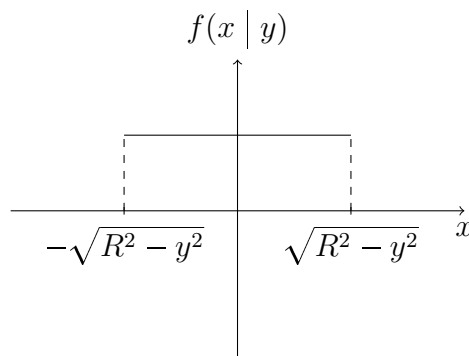
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi R^2}, & x^2 + y^2 \leq R^2 \\ 0, & x^2 + y^2 > R^2 \end{cases}$$

$$f_\eta(y) = \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} \frac{dx}{\pi R^2} = \begin{cases} \frac{2\sqrt{R^2-y^2}}{\pi R^2}, & |y| < R \\ 0, & |y| > R \end{cases}$$

Теперь мы можем посчитать условную вероятность:

$$\begin{aligned} \forall y \quad |y| < R \Rightarrow f_\xi(x | y) = \frac{f(x, y)}{f_\eta(y)} &= \begin{cases} \frac{1}{\pi R^2} \cdot \frac{\pi R^2}{2\sqrt{R^2-y^2}}, & \text{при } -\sqrt{R^2-y^2} \leq x \leq \sqrt{R^2-y^2} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{R^2-y^2}}, & \text{при } -\sqrt{R^2-y^2} \leq x \leq \sqrt{R^2-y^2} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \end{aligned}$$

Поскольку  $y$  фиксированный, получаем равномерное распределение:



Стоит заметить, что  $E(\xi | \eta = y) = 0$ , так как плотность распределения симметрична.

## Свойства $E(\xi \mid \eta)$

1.  $E(c \mid \eta) = c$
2.  $E(c\xi \mid \eta) = cE(\xi \mid \eta)$
3.  $E(\varphi(\xi) \cdot \psi(\eta) \mid \eta) = \psi(\eta)E(\varphi(\xi) \mid \eta)$ , так как  $\eta$  фиксирована и  $\varphi(\eta)$  является константой.
4.  $\xi$  и  $\eta$  — независимы  $\Rightarrow E(\xi \mid \eta) = E\xi$

$$\begin{aligned}
 5. \quad E(E(\xi \mid \eta)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x \mid y) dx \right) f_{\eta}(y) dy = \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{f(x, y)}{f_{\eta}(y)} f_{\eta}(y) dx \right) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\xi}(x) dx = E\xi
 \end{aligned}$$

Лекция 29 ноября.

## Определение

Условной дисперсией дискретной случайной величины  $\xi$  при условии  $\{\eta = y_j\}$  называют величину:

$$\mathcal{D}(\xi \mid \eta = y_j) = \sum (x_i - E(\xi \mid \eta = y_j))^2 \frac{p_{ij}}{i_{\bullet j}}$$

Условным математическим ожиданием непрерывной случайной величины  $\xi$  называется:

$$E(\xi \mid \eta = y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_{\xi}(x \mid y) dx$$

Условной дисперсией непрерывной случайной величины  $\xi$  называется:

$$\mathcal{D}(\xi \mid \eta = y) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(\xi \mid \eta = y))^2 f_{\xi}(x \mid y) dx$$

## Проверка нормировки

Пусть  $\xi_1, \xi_2$  независимы и имеют нормальное распределение на интервале  $(0, 1)$ . То есть  $\xi_1, \xi_2 \sim N(0, 1)$ . Тогда  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$  называется Гауссовским вектором.

$$f_{\xi_1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$f_{\xi}(x, y) = f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi}(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1}(x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_2}(y) dy$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy = \left\langle \begin{matrix} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ |J| = r \end{matrix} \right\rangle = \int_0^{+2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{r}{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} dr d\varphi =$$

$$= \int_0^{+\infty} r e^{-\frac{r^2}{2}} dt = \int_0^{+\infty} -e^{-\frac{r^2}{2}} d\frac{r^2}{2} = -e^{-\frac{r^2}{2}} \Big|_0^{+\infty} = 1$$

## Определение

Случайный вектор  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  имеет нормальное (гауссовское) распределение  $\xi \sim N(m, K)$ , если плотность распределения имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det K}} e^{-\frac{1}{2}((x-m)^T K^{-1}(x-m))}$$

## Замечание

Здесь  $K$  — ковариационная матрица.

$$x = (x_1, \dots, x_n), m = (m_1, \dots, m_n), K = (k_{ij}), k_{ij} = \text{cov}(\xi_i, \xi_j)$$

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{\sqrt{\det C}}{\sqrt{(2\pi)^n}} e^{-\frac{1}{2}(\sum_i \sum_j c_{ij}(x_i - m_i)(x_j - m_j))}$$

$$C = K^{-1}$$

Свойства многомерного гауссовского распределения.

1.  $E\xi = m, K_\xi = K$
2. Любой подвектор гауссовского вектора имеет гауссовское распределение.
3. Пусть  $\eta = \sum_{i=1}^n \alpha_i \xi_i$  и все  $a_i = 0$ , тогда случайная величина  $\eta$  имеет гауссовское распределение.
4. Пусть  $\eta = A\xi + B$ , где  $A$  — матрица размера  $k \times n$ , а  $B$  — вектор, размера  $k$ , тогда:

$$\eta \sim N(Am_\xi + B, AK_\xi A^T)$$

5. Пусть компоненты  $\xi_1, \dots, \xi_n$  вектора  $\xi$  попарно некоррелированы, тогда  $\xi_1, \dots, \xi_n$  независимы. *Доказательство:*

$$\begin{aligned} \text{Пусть } \rho_{\xi_i, \xi_j} = 0 \text{ при } i \neq j \Rightarrow \text{cov}(\xi_i, \xi_j) = 0 \Rightarrow K &= \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \Rightarrow C = K^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{1}{\sigma_n^2} \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow f(x_1, \dots, x_n) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \sigma_1 \dots \sigma_n}} e^{-\frac{1}{2} \sum_i c_{ii}(x_i - m_i)^2} = \prod_{i=1}^n \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i}} e^{-\frac{(x_i - m_i)^2}{2\sigma_i^2}}}_{f_{\xi_i}(x_i)} = \prod_{i=1}^n f_{\xi_i}(x_i) \Rightarrow \text{величины } \xi_1, \dots, \xi_n \\ &\text{независимы.} \end{aligned}$$

## Теорема о нормальной корреляции

Пусть  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \sim N(m, K)$

$$\mathcal{L}(\underbrace{(\xi_1, \dots, \xi_l)}_{\eta_1} \mid \underbrace{(\xi_{l+1}, \dots, \xi_n)}_{\eta_2} = x) \sim N(E(\eta_1 \mid \eta_2 = x), K_{\eta_1 \mid \eta_2 = x})$$

$$m = (\underbrace{m_1, \dots, m_l}_{E\eta_1} \mid \underbrace{m_{l+1}, \dots, m_n}_{E\eta_2}), K_\xi = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix}$$

$$E(\eta_1 \mid \eta_2 = x) = E\eta_1 + K_{12}K_{22}^{-1}(x - E\eta_2)$$

$$K_{\eta_1 \mid \eta_2 = x} = K_{11} - K_{12}K_{22}^{-1}K_{12}^T$$

Пусть  $n = 2, \xi = (\xi_1, \dots, \xi_2), K_\xi = \begin{pmatrix} \mathcal{D}\xi_1 & \text{cov}(\xi_1, \xi_2) \\ \text{cov}(\xi_2, \xi_1) & \mathcal{D}\xi_2 \end{pmatrix}$

$$E(\xi_1 \mid \xi_2 = x) = E\xi_1 + \frac{\text{cov}(\xi_1, \xi_2)}{\mathcal{D}\xi_2}(x - E\xi_2)$$

$$\mathcal{D}(\xi_1 \mid \xi_2 = x) = \mathcal{D}\xi_1 - \frac{(\text{cov}(\xi_1, \xi_2))^2}{\mathcal{D}\xi_2}(x - E\xi_2)$$

## Пример

$$(\xi_A, \xi_B) \sim N(m, K), \quad m = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 4 & 3,6 \\ 3,6 & 9 \end{pmatrix}$$

1.  $P(\xi_A > \xi_B) = ?$

2.  $\xi_B = 14 : E(\xi_A | \xi_B = 14), D(\xi_A | \xi_B = 14) = ?$ .

Решим первый пункт:  $P(\xi_A > \xi_B) = P(\xi_A - \xi_B > 0)$ ,  $\xi_A - \xi_B \sim N(-2, (2, 4)^2)$

$$\xi_A - \xi_B = \mathcal{D}\xi_A + \mathcal{D}\xi_B + 2 \operatorname{cov}(\xi_A - \xi_B) = 4 + 9 - 2 \cdot 3,6 = 5,8 \approx (2, 4)^2$$

Тогда можем посчитать  $P(\xi_A - \xi_B > 0) = \Phi_0(+\infty) - \Phi_0(\frac{0+2}{2,4}) = 0,5 - \Phi_0(\frac{1}{1,2}) \approx 0,5 - 0,297 = 0,203$

Решим второй пункт:  $E(\xi_A | \xi_B = 14) = 10 + \frac{3,6}{9}(14 - 12) = 10 + \frac{7,2}{9} = 10,8$

$$D(\xi_A | \xi_B = 14) = 4 - \frac{3,6^2}{9} = 2,56$$

## Виды сходимости случайных последовательностей

Обычное определение сходимости последовательности:

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \geq N \quad |x_n - x| < \varepsilon$$

Здесь не подходит, так как оно работает для детерминированных последовательностей, поэтому нужно вводить новые определения:

## Определение

Последовательность случайных величин  $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ , определённых на одном вероятностном пространстве  $\Omega$ , называется случайной последовательностью  $\{\xi_n\}$

## Определение

Случайная последовательность  $\xi_n$  сходится по вероятности к случайной величине  $\xi$  ( $\xi_n \xrightarrow{p} \xi$ ), если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \begin{cases} P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \\ P(|\xi_n - \xi| < \varepsilon) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1 \end{cases}$$

Доказать, что  $\xi_n \xrightarrow{p} 0$ :

$$P(|\xi_n - 0| < \varepsilon) = 2 \int_0^\varepsilon \frac{1}{n\pi(x^2 + \frac{1}{n^2})} dx = \frac{2}{\pi} \arctg x \cdot n \Big|_0^\varepsilon = \frac{2}{\pi} \arctg \varepsilon \cdot n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$$