

Теория вероятности 1 модуль.

Андрей Тищенко БПИ231 @AndrewTGk

2024/2025

Лекция 6 сентября.

Формула оценки

$random() \% 11$

Накоп = $0.1 \text{ИДЗ} + 0.15 \text{РС} + 0.25 \text{КР} + 0.5 \text{Экзамен}$

ИДЗ = индивидуальное домашнее задание (выдаётся через вики курса).

РС = работа на семинарах.

КР = контрольные работы.

Учебник:

Кибзун А. К., Горяинова Е. Р., Наумов А. В. “Теория вероятности и математическая статистика. Базовый курс с примерами и задачами” 2013 или 2014 года.

История

Наука появилась из-за азартных игр. Кавалер Демире захотел составить математическую базу для расчётов в азартных играх. Перечисление многих известных математиков, работавших в этой области. Колмогоров легенда теорвера, придумал определение вероятности, основал СУНЦ, ездил на лыжах.

Основные понятия

Определения

Теория вероятности — раздел математики, изучающий математические модели массовых случайных явлений.

Массовость — за n повторений эксперимента, вероятность каждого исхода стабилизируется возле какого-то значения p_i .

Всякое случайное событие обладает массовостью.

Обозначения

$\omega_1, \dots, \omega_n$ — элементарные случайные события.

$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ — пространство элементарных событий.

$\forall \Omega \forall A \quad A \subset \Omega \Leftrightarrow A$ — случайное событие.

$\forall A \forall \Omega \quad \Omega \subseteq A \Leftrightarrow A$ — достоверное событие.

$\forall A \forall \Omega \quad \Omega \cap A = \emptyset \Leftrightarrow A$ — невозможное событие.

Операции с событиями

$$A, B \subset \Omega$$

Произведение

Произведением случайных событий A, B называется событие $A \cdot B = A \cap B$

Сумма

Сумма $A + B$ есть событие $A \cup B$.

Разность

Разность множеств $A \setminus B$.

Дополнение

$$\overline{A} = \Omega \setminus A.$$

Свойства операций

1. $A + A = A$
2. $A \cdot A = A$
3. $A \cdot \Omega = A$
4. $A + \Omega = \Omega$
5. $A + B = B + A$
6. $A \cdot B = B \cdot A$
7. $A + (B + C) = (A + B) + C$
8. $\overline{\overline{A}} = A$
9. $\overline{\overline{\overline{A}}} = \overline{A}$
10. $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

Определение

Класс подмножеств \mathcal{A} на пространстве событий Ω называется σ -алгеброй событий, если:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. $\forall A \subset \Omega \quad A \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$
3. $\forall A_i \quad A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{A} \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A} \wedge \prod_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

Классическое определение вероятности

Исход = элементарное случайное событие.

1. Конечное число исходов эксперимента.
2. Исходы взаимно исключающие.
3. Исходы равновозможны.

Тогда $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

$|A|$ - мощность множества исходов, принадлежащих A .

1. $P(A) \geq 0$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $A \cdot B = \emptyset \Rightarrow P(A + B) = P(A) + P(B)$

Задача

В коробке 10 красных и 20 чёрных шаров.

Событие $A = \{\text{вытащить красный шар}\} \Rightarrow P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$

Лекция 13 сентября.

Геометрическое определение вероятности

Ω является подмножеством конечной меры в \mathbb{R} или \mathbb{R}^2 , или ... или \mathbb{R}^n .

$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$, μ - мера (длина, площадь, n-мерный объём).

Свойства:

1. $P(A) \geq 0 \quad \forall A \subseteq \Omega$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $A \cdot B = \emptyset \Rightarrow P(A + B) = P(A) + P(B)$

Задача

Ромео и Джульетта хотят встретиться между полуночью и часом ночи, но не могут договориться о времени, поэтому они приходят в произвольный момент времени на этом отрезке и ждут 15 минут, после чего уходят. С какой вероятностью они не встретятся? x - время прихода Дж.

y - время прихода Ромео.

Тут должен быть балдёжный график, но писать это долго.

$x, y \in [0, 1]$, в часах.

$$|x - y| \leq \frac{1}{4}$$

$$P(\bar{A}) = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}}{1} = \frac{9}{16} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}.$$

В этом определении мы избавились от конечности множества исходов.

Частотное (статистическое) определение вероятности

Определение

Пусть опыт проведён N раз, а событие A произошло n_A раз. Тогда $\frac{n_A}{N}$ называется частотой события A .

Тогда вероятность $P(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_A}{N}$

Аксиоматическое определение А. Н. Колмогорова (легенды, миллионера, плейбоя и филантропа)

Определение

Пусть \mathcal{A} – σ алгебра событий на пространстве Ω . Назовём вероятностью числовую функцию $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^1$, удовлетворяющую следующим аксиомам:

1. $\forall A \in \mathcal{A} \quad P(A) \geq 0$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $\forall A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \quad (\forall i, j \in \mathbb{N} \quad A_i \cap A_j = \emptyset \Rightarrow i = j) \Rightarrow P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Определение

Число $P(A)$, $A \in \mathcal{A}$ называется вероятностью события A .

Определение

(Ω, \mathcal{A}, P) называется вероятностным пространством.

Свойства $P(A)$

1. $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.
 $\Omega = A + \bar{A} \wedge A \cap \bar{A} = \emptyset$
 $P(\Omega) = P(A + \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) \Rightarrow P(A) = 1 - P(\bar{A})$
2. $P(\emptyset) = 0$
 $\bar{\Omega} = \emptyset \Rightarrow P(\Omega) + P(\emptyset) = 1 \Rightarrow P(\emptyset) = 1 - 1 = 0$

$$\begin{aligned}
3. \quad & A \subseteq \Omega \wedge B \subseteq \Omega \wedge A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B) \\
& B = A + (B \setminus A) \Rightarrow P(B) = P(A + (B \setminus A)) = P(A) + \underbrace{P(B \setminus A)}_{\geq 0} \Rightarrow \\
& \Rightarrow P(A) \leq P(B)
\end{aligned}$$

$$4. \quad 0 \leq P(A) \leq 1$$

По первой аксиоме $P(A) \geq 0$

Из третьего $A \subseteq \Omega \wedge \Omega \subseteq \Omega \wedge A \subseteq \Omega \Rightarrow P(A) \leq P(\Omega) = 1$

5. Формула (теорема) сложения вероятностей:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$$

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} A = A \cdot \Omega = A \cdot (B + \overline{B}) = AB + A\overline{B} \Rightarrow P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB) \\ B = B \cdot \Omega = B \cdot (A + \overline{A}) = BA + B\overline{A} \Rightarrow P(B\overline{A}) = P(B) - P(AB) \end{cases} \Rightarrow \\
& \Rightarrow A + B = AB + A\overline{B} + B\overline{A} \Rightarrow P(A + B) = \\
& = P(AB) + P(A) - P(AB) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(AB)
\end{aligned}$$

Замечание: тут не было $2(AB)$, потому что сложение по определению есть объединение, поэтому одного экземпляра достаточно.

Для трёх слагаемых:

$$\begin{aligned}
P((A + B) + C) &= P(A + B) + P(C) - P((A + B) \cdot C) = \\
&= P(A) + P(B) - P(AB) + P(C) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(A_1 + \dots + A_n) &= \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i \leq j} P(A_i A_j) + \sum_{i \leq j \leq k} P(A_i A_j A_k) + \dots \\
&\dots + (-1)^{n-1} P(A_1, \dots, A_n)
\end{aligned}$$

Задача

$A_1 = \{\text{Решка при 1-ом броске}\}$, $A_2 = \{\text{Решка при 2-ом броске}\}$

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Определение

Пусть $P(B) \neq 0$, тогда условная вероятность события A при условии B

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Определение

События A , B называются независимыми, если $P(A/B) = P(A)$

Отсюда следует: $\frac{P(AB)}{P(B)} = P(A) \Rightarrow P(AB) = P(A)P(B)$

Определение

События A_1, A_2, \dots, A_n называются независимыми в совокупности, если:

$$\forall k = 2, \dots, n \quad \forall i_1, \dots, i_k \quad (1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n) \Rightarrow P(A_{i_1}, \dots, A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})$$

Лекция 20 сентября.

Воспоминания

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \quad P(AB) = P(B)P(A/B) = P(A)P(B/A)$$

Теорема об умножении вероятностей

Пусть $(P(A_1, \dots, A_n)) > 0$, тогда:

$$P(A_1, \dots, A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2) \dots P(A_n/A_1 \dots A_{n-1})$$

Доказательство

$$\begin{aligned} & \begin{cases} B_{n-1} = A_1 \dots A_{n-1} \\ B_{n-2} = A_1 \dots A_{n-2} \\ \dots \\ B_1 = A_1 \end{cases} \Rightarrow P(\underbrace{A_1 \dots A_{n-1}}_{B_{n-1}} A_n) = P(\underbrace{B_{n-1}}_{B_{n-2} A_{n-1}}) P(A_n/B_{n-1}) = \\ & = P(B_{n-2} A_{n-1}) P(A_n/A_1 \dots A_{n-1}) = P(B_{n-2}) P(A_{n-1}/B_{n-2}) P(A_n/A_1 \dots A_{n-1}) = \\ & = P(A_1) P(A_2/A_1) P(A_3/A_1 A_2) \dots P(A_n/A_1 \dots A_{n-1}) \end{aligned}$$

Схема Бернулли (Биномиальная схема)

Последовательность испытаний, такая что:

1. Исход любого испытания двоичен $\forall A \quad A \vee \bar{A} \equiv 1$
2. Испытания независимы в совокупности.
3. $P(A) = p$ не изменяется от опыта к опыту.

Например, подбрасывание монеты.

Положим У - успех, Н - неудача.

В таком случае k успехов можно получить $P_n(k) C_n^k p^k \underbrace{(1-p)^{n-k}}_{=q}$ способами

Доказательство

$$\begin{aligned} P(\underbrace{Y \dots Y}_k \underbrace{H \dots H}_{n-k}) &= p^k q^{n-k} \\ P(\{\underbrace{Y \dots Y}_k \underbrace{H \dots H}_{n-k}\}) + P(\underbrace{H Y \dots Y}_k \underbrace{H \dots H}_{n-k}) + \dots + P(\underbrace{H \dots H}_{n-k} \underbrace{Y \dots Y}_k) &= \\ = C_n^k p^k q^{n-k} & \\ \sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k} &= 1 \end{aligned}$$

Следствие

$$\text{При } k_1 \leq k \leq k_2 : \quad P_n(k) = \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k q^{n-k}$$

Обозначение

Если максимальная вероятность достигается при $k = m$, то есть

$$C_n^m p^m q^{n-m} = \max_{0 \leq k \leq n} C_n^k p^k q^{n-k}$$

Тогда можно сказать $m = \operatorname{argmax}_{0 \leq k \leq n} P_n(k)$

Можно посчитать без вычисления всех значений:

$$m = \begin{cases} [(n+1)p], & \text{если } (n+1)p - \text{нецелое число} \\ (n+1)p \wedge (n+1)p - 1, & \text{иначе} \end{cases}$$

Полиномиальная схема испытаний

1. Проводится n независимых опытов
2. В каждом опыте m взаимноисключающих исходов (n_1, \dots, n_m)
3. $P(n_1) = p_1, P(n_2) = p_2, \dots, P(n_m) = p_m, \quad p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1$

$$\sum_{i=1}^m n_i = n$$

$$P_n(n_1, n_2, \dots, n_m) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_m!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_m^{n_m}$$

Определение

Пусть $H_1, \dots, H_n \subset \Omega$, события H_1, \dots, H_n называются полной группой событий (гипотезами), если

1. $\forall i, j \quad i \neq j \Rightarrow H_i \cdot H_j = \emptyset$
2. $H_1 + \dots + H_n = \Omega$

Формула полной вероятности

Пусть H_1, \dots, H_n — полный граф событий, $A \subset \Omega$

$P(A) = P(A \cdot \Omega) = P(A \cdot (H_1 + \dots + H_n)) = P(AH_1 + \dots + AH_n)$, так как события H_1, \dots, H_n независимы, можно сделать переход:

$$P(AH_1 + \dots + AH_n) = P(AH_1) + \dots + P(AH_n) = P(H_1)P(A/H_1) + \dots + P(H_n)P(A/H_n)$$

Получаем $P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + \dots + P(H_n)P(A/H_n)$

Задача

Студент выучил m билетов из n . Посчитать вероятность вытянуть выученный билет при заходе первым, вторым.

$A = \{\text{студент вытащит выученный билет}\}$

$H_1 = \{\text{Другой студент вытащит выученный нашим студентом билетом}\}$

$H_2 = \{\text{Наш студент вытащит невыученный билет}\}$

$$P(H_1) = \frac{m}{n}, \quad P(H_2) = \frac{n-m}{n}$$

$$P(A/H_1) = \frac{m-1}{n-1}, \quad P(A/H_2) = \frac{m}{n-1}$$

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) = \frac{m}{n} \frac{m-1}{n-1} + \frac{n-m}{n} \frac{m}{n-1} = \frac{m}{n}$$

Формула Байеса

H_1, \dots, H_n — гипотезы

$P(H_1), \dots, P(H_n)$ — априорные вероятности.

Произошло событие A

$P(H_1/A), \dots, P(H_n/A)$ — апостериорные вероятности.

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i A)}{P(A)} = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{k=1}^n P(H_k)P(A/H_k)}$$

$$\sum_{i=1}^n P(H_i/A) = 1$$

Лекция 27 сентября

H_1, \dots, H_n — ПГС

$P(H_1), \dots, P(H_n)$ — априорные вероятности.

Произошло событие A .

$P(H_1/A), \dots, P(H_n/A)$ — апостериорные вероятности.

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{k=1}^n P(H_k)P(A/H_k)}$$

Задача

Завод 1 поставляет 65% продукции. При этом 90% его продукции не имеет дефектов.

Завод 2 поставляет 35% продукции. При этом 80% его продукции не имеет дефектов.

Какой завод более вероятно поставит продукт с дефектом?

$A = \{\text{Произведён дефектный продукт}\}$

$H_1 = \{\text{Прибор изготовил завод 1}\}, P(H_1) = 0.65, P(A/H_1) = 0.1$

$H_2 = \{\text{Прибор изготовил завод 2}\}, P(H_2) = 0.35, P(A/H_2) = 0.2$

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2)} = \frac{0.1 \cdot 0.65}{0.1 \cdot 0.65 + 0.2 \cdot 0.35} = \frac{65}{135}$$

$P(H_2/A) = \frac{70}{135} > P(H_1/A)$, получается деталь с дефектом с большей вероятностью поступила со второго завода.

Случайные величины

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6\}$$

$$\xi = \{1, 2, \dots, 6\}$$

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots\}$$

$$\xi = \{1, 2, 3, \dots\}$$

Я понятия не имею, что значат эти множества, но на доске мы их написали со словами: "Давайте покидаем монетку".

Случайная величина $\xi : \Omega \longrightarrow R^1$

Определение

Случайной величиной ξ называется числовая функция $\xi : \Omega \longrightarrow R^1$, которая удовлетворяет условию:

$$\forall x \{ \omega; \xi(\omega) \leq x \} \in \mathcal{A}$$

Определение

Функцией распределения (вероятностей) случайной величины ξ называется

$$F_{\xi}(x) = P(\omega; \xi(\omega) \leq x) = P(\xi \leq x)$$

Свойства $F(x)$

1. $F(+\infty) = 1, F(-\infty) = 0 \Rightarrow 0 \leq F(x) \leq 1$. На самом деле аргумент $F(x)$ принадлежит R^1 , но видимо бесконечность теперь число.

2. Пусть $x_1 < x_2$, тогда $F(x_1) \leq F(x_2)$.

Доказательство:

$$F(x_2) = P(\xi \leq x_2), C = \{\omega : \xi(\omega) \leq x_2\}, A = \{\omega : \xi(\omega) \leq x_1\},$$

$$B = \{\omega : x_1 < \xi(\omega) \leq x_2\}. C = A + B, P(C) = P(A) + P(B)$$

$$F(x_2) = P(\xi \leq x_2) = P(\underbrace{\xi \leq x_1}_A) + P(B) = F(x_1) + P(B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(x_2) \geq F(x_1)$$

3. $F(x_0) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} F(x_0 + \varepsilon)$

Определение

Дискретная случайная величина (тут реально ничего не было даже на лекции).

Определение

Пусть случайная величина ξ — дискретная. Рядом распределения ξ называется

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} \xi & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \hline P & p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{array}$$

$$\sum_{k=1}^n p_k = 1, p_k = P(\omega : \xi(\omega) = x_k)$$

Пример

$$\begin{array}{c|c|c|c} \xi & -1 & 0 & 2 \\ \hline P & 0.3 & 0.5 & 0.2 \end{array}$$

Если $x < -1$, то $F(x) = 0$

Если $-1 \leq x < 0$, то $F(x) = 0.3$

Если $0 \leq x < 2$, то $F(x) = 0.8$

Если $2 \leq x$, то $F(x) = 1$

Определение

Математическим ожиданием (средним значением) дискретной случайной величины с конечным числом значений x_1, \dots, x_n называется число

$$E\xi = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

Если у дискретной случайной величины счётное количество значений, тогда

$$E\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i, \text{ если ряд } \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i \text{ сходится}$$

Сходимость к ∞ считают неопределённой, а с $+\infty, -\infty$ проблем нет.

Определение

Дисперсией случайной величины ξ называют

$$\mathcal{D}\xi = E(\xi - E\xi)^2$$

Квадрат отклонения от среднего.

Определение

Среднеквадратическим отклонением случайной величины ξ называют

$$\sigma_1 = \sqrt{\mathcal{D}\xi}$$

Свойства математического ожидания

1. $\forall c \in \mathbb{R} \quad Ec = c$
2. $E(c \cdot \xi) = \sum_{i=1}^n c x_i p_i = c E\xi$
3. $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad a \leq \xi \leq b \Rightarrow a \leq E\xi \leq b$
Доказательство:
$$a \leq \sum_{i=1}^n a p_i \leq E\xi = \sum_{i=1}^n x_i p_i \leq \sum_{i=1}^n b p_i = b$$
4. $E(\xi_1 + \xi_2) = E\xi_1 + E\xi_2$

Лекция 4 октября.

Воспоминания:

$$\begin{array}{c|c|c|c} \xi & x_1 & \dots & x_n \\ \hline p & p_1 & \dots & p_n \end{array}$$

$$E\xi = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

Свойства математического ожидания (продолжение)

5. Пусть $\eta = \varphi(\xi)$, $\varphi(x)$ - детерминированная функция.

$$E\xi = \sum_{i=1}^n \varphi(x_i) p_i$$

Свойства дисперсии.

$$1. \mathcal{D}c = 0$$

$$2. \mathcal{D}(c\xi) = E(c\xi - cE\xi)^2 = Ec^2(\xi - E\xi)^2 = c^2\mathcal{D}\xi$$

$$3. \forall \xi \text{ случайная величина}(\xi) \Rightarrow \mathcal{D}\xi \geq 0$$

$$4. \mathcal{D}\xi = E(\xi^2 - 2\xi E\xi + (E\xi)^2) = E\xi^2 - 2(E\xi)^2 + (E\xi)^2 = E\xi^2 - (E\xi)^2$$

$$\begin{aligned} 5. \mathcal{D}(\xi_1 + \xi_2) &= E(\xi_1 + \xi_2)^2 - (E(\xi_1 + \xi_2))^2 = \\ &= E\xi_1^2 + 2E(\xi_1\xi_2) + E\xi_2^2 - ((E\xi_1)^2 + 2E\xi_1E\xi_2 + (E\xi_2)^2) = \\ &= (E\xi_1^2 - (E\xi_1)^2) + (E\xi_2^2 - (E\xi_2)^2) + 2(E(\xi_1\xi_2) - E\xi_1E\xi_2) = \\ &= \mathcal{D}\xi_1 + \mathcal{D}\xi_2 + 2\underbrace{(E(\xi_1\xi_2) - E\xi_1E\xi_2)}_{\text{Ковариация } \xi_1 \text{ и } \xi_2} \end{aligned}$$

Если ξ_1, ξ_2 независимы, то $\text{cov}(\xi_1, \xi_2) = 0$ (ковариация нулевая).

Определение

Начальным моментом k-го порядка случайной величины ξ называется

$$\mu_k = E\xi^k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Определение

Центральным моментом k-го порядка случайной величины ξ называется

$$\nu_k = E(\xi - E\xi)^k, \quad k = 2, 3, \dots$$

$$\nu_2 = \mathcal{D}\xi$$

Определение

Случайная величина $\overset{0}{\xi} = \xi - E\xi$ называется центрированной случайной величиной

$$E\overset{0}{\xi} = 0$$

Определение

Случайная величина $\xi^* = \frac{\overset{0}{\xi}}{\sigma}$ называют нормированной случайной величиной.

$$D\xi^* = 1$$

Распределения:

1. Распределение Бернулли

$$\xi \sim \text{Ber}(p), \quad 0 < p < 1$$

$$\begin{array}{c|c|c} \xi & 0 & 1 \\ \hline p & 1-p & p \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c} \xi^2 & 0 & 1 \\ \hline p & 1-p & p \end{array}$$

$$E\xi = p, \quad D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq$$

2. Биномиальное распределение

$$\xi \sim \text{Bi}(n, p), \quad 0 < p < 1$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} \xi & 0 & 1 & k & n \\ \hline p & \dots & \dots & C_n^k p^k q^{n-k} & \dots \end{array}$$

$$\begin{aligned} E\xi &= \sum_{k=0}^n k C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^n k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} = \\ &= np \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} q^{n-k} = \left\langle j = k-1 \atop k = j+1 \right\rangle = \\ &= np \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{j!(n-1-j)!} p^j q^{n-1-j} = np(p+q)^{n-1} = np \end{aligned}$$

Можно посчитать математическое ожидание иначе:

$$\xi = \xi_1 + \dots + \xi_n, \quad \begin{array}{c|c|c} \xi_i & 0 & 1 \\ \hline p & q & p \end{array} \Rightarrow E\xi = E\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right) = \sum_{i=1}^n E\xi_i = np$$

$$\mathcal{D}\xi = \sum_{k=0}^n k^2 C_n^k p^k q^{n-k} - (np)^2 = \dots = npq$$

Так как ξ_1, \dots, x_n независимы:

$$\mathcal{D}\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathcal{D}\xi_i = npq$$

3. Распределение Пуассона

$$\xi \sim \Pi(\lambda), \quad \lambda > 0$$

$$\xi = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$P(\xi = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

$$E\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\xi &= E\xi^2 - (E\xi)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} - \lambda^2 = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{e^{-\lambda} \lambda^{k-1}}{(k-1)!} - \lambda^2 = \\ &= \lambda \sum_{k=1}^{\infty} (k-1+1) \frac{e^{-\lambda} \lambda^{k-1}}{(k-1)!} - \lambda^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda \end{aligned}$$

Теорема Пуассона

Пусть в схеме испытаний Бернулли: $n \rightarrow \infty$, $p \rightarrow 0$, $np \rightarrow \lambda$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

Доказательство

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} C_n^k p^k q^{n-k} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{n^k} \frac{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \end{aligned}$$

Погрешность такой аппроксимации:

$$\left| C_n^k p^k q^{n-k} - \frac{e^{-np} (np)^k}{k!} \right| \leq np^2$$

Задача

Завод поставляет 1000 бутылок воды. Каждая бутылка может быть повреждена в пути с вероятностью 0.002. Какое среднее количество бутылок будет повреждено? Какова вероятность повреждения не более 2 бутылок?

Случайная величина ξ — количество повреждённых бутылок.

$$\xi \sim \text{Bi}(1000, 0.002) \Rightarrow E\xi = 1000 \cdot 0.002 = 2$$

Погрешность при аппроксимации Пуассоновским распределением будет $\leq np^2 = 0.004$, что нас устраивает по точности.

$$P(\xi \leq 2) = p(\xi = 0) + p(\xi = 1) + p(\xi = 2) = e^{-2}(1 + 2 + 2) = \frac{5}{e^2}$$

Ещё распределения

4. Геометрическое распределение

$$\xi \sim G(p), \quad 0 < p < 1$$

$\xi = \{1, 2, \dots\}$, $P(\xi = k) = q^{k-1}p$. После первого успеха эксперименты прекращаются.

$$E\xi = \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}p = p \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} (q^k)' = p \left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k \right)' = p \left(\frac{q}{1-q} \right)' = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

Задача

Студент выучил 80% билетов. Преподаватель спрашивает его, пока не обнаружит незнание. Сколько в среднем билетов спросит преподаватель?

$$\xi \sim G(0.2) \quad E\xi = \frac{1}{0.2} = 5$$

Лекция 11 октября.

Воспоминания: $F_\xi(x) = P(\xi \leq x)$

Непрерывные случайные величины

Определение

Неотрицательная кусочно-непрерывная функция $f_\xi(x)$ называется плотностью распределения случайной величины ξ , если

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^x f_\xi(t) dt$$

Прикол про Канторову лестницу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{2}F(3x), & 0 \leq x < \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \leq x < \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}F(3x-2), & \frac{2}{3} \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{непрерывна, но не имеет плотности.}$$

$$P(\xi = x) = F(x) - \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} F(x - \varepsilon) = 0$$

$$f(x) = F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x < \xi \leq x + \Delta x)}{\Delta x}$$

$$f(x)\Delta x \underset{\Delta x \rightarrow 0}{=} P(x < \xi \leq x + \Delta x)$$

Свойства $f_\xi(x)$

$$1. \quad \forall x \in \mathbb{R}^1 \quad f_\xi(x) \geq 0$$

$$2. \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x) dx = F(+\infty) = 1$$

$$3. \quad \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 < \xi \leq x_2)$$

4. В точках дифференцируемости функции $F(x)$

$$f(x) = F'(x)$$

5. Пусть случайная величина ξ имеет плотность распределения $f_\xi(x)$.

Детерминированная функция $\varphi(x)$ является монотонной и дифференцируемой.

$$\text{СВ } \eta = \varphi(\xi) \quad f_\eta(y) = ?$$

а. Пусть $\varphi(x)$ — монотонно возрастающая функция:

$$F_\eta(y) = P(\eta \leq y) = P(\varphi(\xi) \leq y) = P(\xi \leq \varphi^{-1}(y)) = F_\xi(\varphi^{-1}(y))$$

$$f_\eta(y) = \frac{d}{dy} F_\eta(y) = f_\xi(\varphi^{-1}(y)) \cdot (\varphi^{-1}(y))'$$

б. Пусть $\varphi(x)$ — монотонно убывающая функция.

$$F_\eta(y) = P(\eta \leq y) = P(\varphi(\xi) \leq y) = P(\xi \geq \varphi^{-1}(y)) = 1 - F_\xi(\varphi^{-1}(y))$$

$$f_\eta(y) = \frac{d}{dy} F_\eta(y) = -f_\xi(\varphi^{-1}(y)) (\varphi^{-1}(y))'$$

Минус возникает для компенсации отрицательности производной обратной функции.

с. Пусть $\varphi(x)$ — монотонная функция:

$$f_{\eta}(y) = f_{\xi}(\varphi^{-1}(y)) \left| (\varphi^{-1}(x))' \right|$$

д. Если $\varphi(x)$ — немонотонная функция. Разбиваем на интервалы монотонности:

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$$

Найдём: $\varphi_1^{-1}(y), \varphi_2^{-1}(y), \dots, \varphi_n^{-1}(y)$. Тогда:

$$f_{\eta}(y) = \sum_{i=1}^k f(\varphi_i^{-1}(y)) \left| (\varphi_i^{-1}(y))' \right|$$

Определение

Математическое ожидание непрерывной случайной величины ξ с плотностью $f_{\xi}(x)$ называется число:

$$E\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\xi}(x) dx$$

если сходится $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_{\xi}(x) dx$

Замечание

1. Если $f_{\xi}(x) > 0$ только при $x > 0$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\xi}(x) dx$ расходится, то $E\xi = +\infty$

2. Если $f_{\xi}(x) > 0$ только при $x < 0$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\xi}(x) dx$ расходится, то $E\xi = -\infty$

3. Распределение Коши: $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx$$

Свойства математического ожидания

1. $Ec = c$
2. $E(c\xi) = cE(\xi)$
3. $a \leq \xi \leq b \Rightarrow a \leq E\xi \leq b$
4. $E(\xi_1 + \xi_2) = E\xi_1 + E\xi_2$
5. Пусть случайная величина $\eta = \varphi(\xi)$, φ — детерминированная функция.

$$E\eta = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f_{\xi}(x) dx$$

Определение

Дисперсией называется:

$$\mathcal{D}\xi = E(\xi - E\xi)^2 = E\xi^2 - (E\xi)^2$$

Квантиль.

Определение

Число Z_{γ} $0 < \gamma < 1$, называется γ -квантилью непрерывного строго монотонного распределения $F_{\xi}(x)$, если:

$$F_{\xi}(Z_{\gamma}) = \gamma = P(\xi \leq Z_{\gamma}) = \int_{-\infty}^{Z_{\gamma}} f(x) dx$$

Были примеры с графиками, я их очень люблю.

Определение

Квантиль $Z_{0,5}$ называется медианой. Не всегда совпадает с математическим ожиданием.