

# Лекции по алгебре 4 модуль.

Андрей Тищенко

2023/2024 гг.

## Лекция 3 апреля

### Квадратичные формы

#### Определение:

Многочлен второй степени от  $n$  переменных, то есть выражение вида

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j$$

Где  $a_{ij} \in \mathbb{R}$ , называют квадратичной формой.

#### Замечание:

Многочлен  $q(x)$  называется однородным степени  $k$ , если

$$\forall \alpha \quad q(\alpha x) = \alpha^k q(x)$$

#### Замечание:

Квадратичная форма - это отображение  $q : V \longrightarrow \mathbb{R}$  (вектор в число)

Рассмотрим  $n$ -мерное векторное пространство  $V$  над  $\mathbb{R}$ . Зафиксируем в нём базис  $e_1, \dots, e_n$ :

Тогда у любого  $x \in V$  есть набор координат в этом базисе  $x_1, \dots, x_n$ .

То есть  $\forall x \in V : x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

Пусть  $x^e = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow q(x)$  можно представить в виде  $q(x) = (x^e)^T A x^e$ , где

$A = (a_{ij})$  матрица квадратичной формы  $q(x)$  в базисе  $e_1, \dots, e_n$ ,

$a_{ij}$  - коэффициенты квадратичной формы.

**Пример:**

В  $\mathbb{R}^3$

$$q(x) = x_1^2 + 8x_1x_3 = x_1^2 + 4x_1x_3 + 4x_3x_1 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

**Замечание:**

Матрица квадратичной формы всегда симметрическая. То есть

$$A^T = A$$

**Замечание:**

По любой билинейной форме можно построить квадратичную форму, взяв  $q(x) = b(x, x)$ . Тогда  $a_{ij} = \frac{b_{ij} + b_{ji}}{2}$

**Пример:**

$$b(x, y) = x_1y_1 + ex_1y_3 + 5x_3y_1 \Rightarrow q(x) = b(x, x) = x_1^2 + 8x_1x_3$$

**Определение:**

Билинейная форма называется симметрической, если

$$b(x, y) = b(y, x), \text{ например, скалярное произведение}$$

Называется кососимметрической, если

$$b(x, y) = -b(y, x)$$

**Пример:**

$$\text{Кососимметрическая билинейная форма с матрицей } B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow B^T = -B$$

**Замечание:**

По любой квадратичной форме можно построить симметрическую билинейную форму. Это называется поляризацией квадратичной формы.

$$b(x, y) = \frac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)]$$

Полярная билинейная форма к  $q(x)$  (имеет ту же матрицу, что и  $q(x)$ ,  $b(x, x) = q(x)$ )

**Утверждение:**

При переходе от базиса  $e$  к базису  $e'$  в линейном пространстве  $V$  матрица квадратичной формы меняется так:

$$A' = C^T \cdot A \cdot C, \text{ "Стас" без рофлов, реально Стасямба конкретная}$$

$A'$  - матрица квадратичной формы в новом базисе  $e'$

$C$  - матрица перехода от базиса  $e$  к базису  $e'$

**Доказательство:**

Связь координат вектора:

$x = Cx'$ , так как  $x' = C^{-1}x$  - формула изменения координат вектора при замене базиса.

Тогда  $\forall x \quad q(x) = x^T A x = (Cx')^T A (Cx') = (x')^T C^T A C x' = (x')^T A' x'$ , значит  $A' = C^T A C$  (Можно в качестве  $x$  брать все векторы канонического базиса  $(0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0)$  и показать совпадение матричных элементов)

**Определение:**

Если квадратичная форма в некотором базисе записана в виде  $q(x) = x^T A x$ , то есть если  $A$  - матрица квадратичной формы в некотором базисе, то  $\text{Rg } A$  называется рангом квадратичной формы  $q(x)$ . Почему это определение корректно? То есть почему  $\text{Rg } A$  не зависит от базиса.

**Лемма:**

Пусть  $A, U \in M_n(\mathbb{R})$ ,  $\det U \neq 0$ . Тогда  $\text{Rg } A \cdot U = \text{Rg } A = \text{Rg } U \cdot A$ , то есть при умножении на невырожденную матрицу ранг не меняется.

**Доказательство:**

$\text{Rg } A \cdot U \leq \text{Rg } A$ , так как столбцы матрицы  $AU$  есть линейные комбинации столбцов матрицы  $A$ .

Ранг матрицы по теореме о ранге матрицы равен максимальному числу линейно независимых столбцов не могло вырасти, так как все столбцы  $AU$  линейно выражаются через столбцы исходной матрицы.

Покажем  $\text{Rg } A \cdot U \geq \text{Rg } A$ .

$$\text{Rg } A = \text{Rg } A(U \cdot U^{-1}) = \text{Rg}(AU)U^{-1} \leq \text{Rg}(AU)$$

$$\text{Rg } U \cdot A = \text{Rg}(UA)^T = \text{Rg } A^T U^T = \text{Rg } A^T = \text{Rg } A = \text{Rg } AU$$

**Утверждение:** (об инвариантности ранга квадратичной формы)

Пусть  $q(x)$  - квадратичная форма на линейном пространстве  $V$ .  
Пусть  $a = (a_1, \dots, a_n)$  и  $b = (b_1, \dots, b_n)$  - базисы в  $V$ .  
Пусть  $A$  - матрица квадратичной формы в базисе  $a$   
Пусть  $B$  - матрица квадратичной формы в базисе  $b$   
Тогда  $\text{Rg } A = \text{Rg } B$  и ранг квадратичной формы корректно определен.

**Доказательство:**

Было доказано, что  $B = C^T A C \Rightarrow$  по лемме, так как мы умножаем матрицу  $A$  на матрицы  $C^T$  слева и на  $C$  справа, то  $\text{Rg } B = \text{Rg } A$ , ч.т.д.

**Определение:**

квадратичную форму  $q(x)$  будем называть положительно определённой, если

$$\forall x \neq 0 \quad q(x) > 0$$

отрицательно определённой, если

$$\forall x \neq 0 \quad q(x) < 0$$

знакопеременной, если

$$\exists x, y \in V : q(x) < 0 < q(y)$$

**Пример:**

$q_1(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2$  на  $\mathbb{R}^3$  - положительно определена

$q_2(x) = x_1^2 - x_3^2$  - знакопеременная ( $y = (1 \ 0 \ 0)$ ,  $x = (0 \ 0 \ 1) \Rightarrow q(x) < 0 < q(y)$ ).

$q_3(x) = -x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2$  - отрицательно определена на  $\mathbb{R}^3$ ,

но  $q'_3(x) = -x_1^2 - 3x_3^2$  - не является отрицательно определённой, так как

$q'_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$  - это неположительно определённая квадратная форма.

**Теорема:** (Критерий Сильвестра положительной определённости)

Пусть  $A$  - матрица квадратичной формы  $q(x)$  в некотором базисе. Тогда

$q(x)$  положительно определена  $\Leftrightarrow$  последовательность главных угловых миноров в  $A$  строго положительна

$$\text{То есть } \begin{cases} \Delta_1 = a_{11} > 0 \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0 \\ \dots \\ \Delta_n = \det A > 0 \end{cases}$$

**Следствие:**

$$\text{Квадратичная форма отрицательно определена} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_1 < 0 \\ \Delta_2 > 0 \\ \dots \\ (-1)^n \Delta_n > 0 \end{cases}$$

То есть знаки главных угловых миноров чередуются, начиная с минуса.

**Доказательство:**

Так как  $A$  - отрицательно определена  $\Leftrightarrow -A$  положительно определена  
 $\det(-A) = (-1)^n \det A$ , ч.т.д.

**Пример:**

$$q(x) = -x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2 \text{ - отрицательно определённая}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}$$

**Определение:**

Квадратичную форму  $q(x) = \alpha_1 x_1^2 + \dots + \alpha_n x_n^2$ , где  $\alpha_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = \overline{1, n}$ , то есть в квадратичной форме нет попарных произведений вида  $Cx_i x_j$ , называют квадратичной формой канонического вида.

Если  $\alpha_i \in \{-1, 0, 1\}$ , то канонический вид называют нормальным.

### Замечание:

Матрица квадратичной формы в каноническом виде является диагональной.

### Лекция 10 апреля

$x \in V \quad q(x) = \alpha_1 x_1^2 + \dots + \alpha_n x_n^2 \quad (\alpha_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n})$  - канонический вид.  
Если все коэффициенты  $\alpha_i$  являются элементами множества  $\{-1, 0, 1\}$ ,  
то это называется нормальным видом.

Утверждение. Любую квадратичную форму можно привести к каноническому и к нормальному виду.

### Методы приведения

#### 1. Метод Лагранжа.

Главная идея состоит в последовательном выделении полных квадратов.  
При этом на каждом шаге под квадрат полностью уходит одна переменная  
(невыполнение этого условия является частой ошибкой при решении задач).  
Получается, что не более чем за  $n$  шагов алгоритм даст канонический вид.

Если на некотором этапе переменных в квадрате не осталось, но есть выражение вида  $c \cdot x_i \cdot x_j \quad (i \neq j)$ , то делают замену переменных:

$$\begin{cases} x_i = x'_i - x'_j \\ x_j = x'_i + x'_j \end{cases} \Rightarrow c x_i x_j = c ((x'_i)^2 - (x'_j)^2)$$

Получили новые квадраты, продолжаем выполнение метода (то есть выделяем полный квадрат при необходимости).

$$\alpha_i x_i^2 + 2x_i \underbrace{(\beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n)}_{\text{нет } x_i} = \alpha_i \left( x_i^2 + 2x_i \frac{\beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n}{\alpha_i} + \left( \frac{\beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n}{\alpha_i} \right)^2 \right) - \underbrace{\frac{(\beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n)^2}{\alpha_i}}_{\text{уже без } x_i}$$
$$= \alpha_i \underbrace{\left( x_i + \frac{\beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n}{\alpha_i} \right)}_{\text{заменяем на } y_i}$$

То есть  $x_i$  полностью ушла под квадрат.

#### 2. Метод Якоби. (может быть пройдем на семинаре)

3. Симметричный Гаусс. (может быть пройдем на семинаре)
4. Метод приведения к главным осям (только для канонического).  
(может быть пройдем на семинаре)

Теорема. Закон инерции квадратичной формы

Для любых двух канонических видов одной квадратичной формы.  $q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_k x_k^2$ ,  $\lambda_i \neq 0$ ,  $i = \overline{1, k}$   
 $q(y) = \mu_1 y_1^2 + \dots + \mu_m y_m^2$ ,  $\mu_j \neq 0$ ,  $j = \overline{1, m}$   
 где  $x, y \in V$

То есть это запись одной и той же квадратичной формы в разных базисах.

1.  $k = m = \text{Rg } A \leftarrow$  равно рангу квадратичной формы. При этом  $k = m$  может быть меньше размерности  $V$ , то есть  $k = m \leq n = \dim V$
2. Количество положительных  $\lambda_i$  совпадает с количеством положительных  $\mu_j$ . Это называется положительный индекс инерции квадратичной формы.

Обозначение:  $i_+$

3. Количество отрицательных  $\lambda_i$  совпадает с количеством отрицательных  $\mu_i$  и называется отрицательным индексом инерции.

Обозначение:  $i_-$

Определение: Сигнатурой квадратичной формы называют два числа  $(i_+, i_-)$ .

Замечание: Если у двух квадратичных форм совпадают сигнатуры, то существует невырожденная линейное преобразование (=замена координат, =замена базиса), которое одну квадратичную форму переводит в другую.  
 Сначала обе в нормальный вид, он совпадает, так как одинаковое количество  $+1$  и  $-1$ , и для одной преобразование в обратную сторону.

Замечание: Если у двух квадратичных форм разные сигнатуры  $(i_+, i_-)$ , то одну нельзя перевести в другую невырожденным линейным преобразованием.  
 То есть квадратичные формы разные.

Замечание:  $\text{Rg } A = i_+ + i_-$ . Иногда вводят величину  $S = i_+ - i_-$ . Знание  $\text{Rg } A$  и  $S$  эквивалентно знанию  $i_+$  и  $i_-$ , и поэтому число  $S$  иногда называют сигнатурой.

## Линейные отображения и линейные операторы

Пусть  $V_1$  и  $V_2$  - два линейных пространства над полем  $F$

Определение: Отображение  $\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$  называется линейным, если

1.  $\forall x, y \in V_1, \varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$
2.  $\forall x \in V_1, \forall \alpha \in F \varphi(\alpha x) = \alpha \varphi(x)$

Замечание: эти два условия равносильны  $\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha \varphi(x) + \beta \varphi(y)$

Замечание: Линейное отображение это гомоморфизм линейных пространств, и есть обозначение  $\varphi \in \text{Hom}(V_1, V_2)$

Определение: Если  $V_1 = V_2 = V$  (пространства совпадают), то линейное отображение  $\varphi$  называется линейным оператором (л. о.)

Пусть  $e_1, \dots, e_n$  - базис в  $V_1$ ,  $\dim V_1 = n$

$f_1, \dots, f_m$  - базис в  $V_2$ ,  $\dim V_2 = m$

Рассмотрим векторы  $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n) \in V_2$  (образы базисных векторов первого пространства под действием  $\varphi$ ), и разложим их по базису второго пространства  $f_1, \dots, f_m$ :

$$\begin{cases} \varphi(e_1) = a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + \dots + a_{m1}f_m \\ \vdots \\ \varphi(e_n) = a_{1n}f_1 + a_{2n}f_2 + \dots + a_{mn}f_m \end{cases}$$

Определение: Матрица линейного отображения в паре базисов  $(e_1, \dots, e_n)$  и  $(f_1, \dots, f_m)$  это матрица:

$$[\varphi]_{ef} = A_{ef} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\dim V_1} \Bigg\} \dim V_2$$

По столбцам стоят координаты образов векторов первого базиса при разложении по второму базису.



Определение: Пусть  $\varphi : V_1 \longrightarrow V$  - линейный оператор и  $e_1, \dots, e_n$  - базис.

$$\text{Пусть } \begin{cases} \varphi(e_1) = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \dots + a_{n1}e_n \\ \vdots \\ \varphi(e_n) = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \dots + a_{nn}e_n \end{cases}$$

То есть образы базисных векторов под действием  $\varphi$  разложим по тому же базису.

Тогда:

$$A_e = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Называется матрицей линейного оператора

Пример:  $\varphi(x) = \text{Пр}_L x$ , где  $L = \mathcal{L}(\bar{i})$  в  $V_3$ , где  $\bar{i}$  - ось абсцисс.

Рассмотрим стандартный базис  $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$  в  $V_3$ .

$$\begin{cases} \varphi(i) = i = 1 \cdot i + 0 \cdot j + 0 \cdot k \\ \varphi(j) = 0 \\ \varphi(k) = 0 \end{cases} \Rightarrow A_{\{i, j, k\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Теорема: (о том, что действие линейного оператора полностью определяется его матрицей)

Пусть  $\varphi$  - линейный оператор в пространстве  $V$

$e = (e_1, \dots, e_n)$  - базис в  $V$ ,  $x \in V$  - вектор.

$$x^e = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \text{столбец координат вектора } x \text{ в базисе } e, \text{ то есть } x =$$

$$x_1e_1 + \dots + x_ne_n$$

Пусть  $A_e$  - матрица линейного оператора  $\varphi$  в базисе  $e$ , тогда:

$$(\varphi(x))^e = A_e \cdot x^e, \text{ (матричное произведение)}$$

Доказательство:  $\varphi(x) = \varphi(x_1e_1 + \dots + x_ne_1) \overset{\text{по линейности}}{=} x_1\varphi(e_1) + \dots + x_n\varphi(e_n) \overset{\text{определение матрицы л.о.}}{=} x_1(a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \dots + a_{n1}e_n) + \dots + x_n(a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \dots + a_{nn}e_n) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)e_1 + \dots + (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n)e_n$  - получили разложение  $\varphi(x)$  по базису  $e$

$$\Rightarrow (\varphi(x))^e = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{pmatrix}$$

$$\text{Но это результат умножения } A_e \text{ на } \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x^e, \text{ то есть } (\varphi(x))^e =$$

$$A_e \cdot x^e, \text{ ч.т.д.}$$

Замечание: Для линейных отображений аналогично

$$(\varphi(x))^f = A_{ef}x^e$$

Замечание: При фиксированном базисе есть биекция между линейными операторами (линейными отображениями) и матрицами  $n \times n$ ,  $(m \times n)$ .

### Лекция 17 апреля.

#### Линейные операторы

(Напоминание) Пусть  $\varphi : V \longrightarrow V$  - линейный оператор в пространстве  $V$ , фиксируем базис  $e = \{e_1, \dots, e_n\}$  в  $V$ .

Тогда  $\exists!$  матрица линейного оператора  $A_e$  в базисе  $e$ , что

$$\forall x \in V \quad (\varphi(x))_{n \times 1}^e = A_e \cdot x_{n \times 1}^e$$

Для линейного отображения  $\phi : V_1 \longrightarrow V_2$  в фиксированной паре базисов  $e, f$

$$(\phi(x))_{m \times 1}^f = A_{ef} \cdot x_{n \times 1}^e$$

Утверждение: Пусть  $A$  - матрица линейного оператора  $\varphi$  в базисе  $e$ .

$A'$  - матрица линейного оператора  $\varphi$  в базисе  $e'$

Пусть  $T$  - матрица перехода в  $V$  от базиса  $e$  к базису  $e'$ .

Тогда  $A' = T^{-1} \cdot A \cdot T$

Доказательство: По доказанному:

$$y = A \cdot x, \quad y = (\varphi(x))^e \tag{1}$$

$$y' = A' \cdot x', \quad y' = (\varphi(x))^{e'} \tag{2}$$

$y = T \cdot y'$  (так как  $y' = T^{-1}y$ ) и  $x = Tx'$  - формула изменения координат вектора при замене базиса.

Подставляем в (1):  $T \cdot y' = A \cdot T \cdot x'$ , но  $T$  - невырожденная матрица (так как она является матрицей перехода), домножим слева на  $T^{-1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow y' = \underbrace{T^{-1} \cdot A \cdot T}_{A'} \cdot x', \text{ сравним с (2)} \Rightarrow A' = T^{-1} \cdot A \cdot T, \text{ так как}$$

матрица линейного оператора в заданном базисе единственная.

Утверждение: Пусть  $\varphi$  - линейное отображение линейного пространства  $V_1$  ( $\dim V_1 = n$ ) в линейное пространство  $V_2$ , ( $\dim V_2 = m$ ).

Пусть  $A_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}$  - матрица линейного отображения в паре базисов  $\varepsilon_1$  в пространстве  $V_1$  и  $\varepsilon_2$  в пространстве  $V_2$ .

Тогда, если  $T_1$  - Это матрица перехода в  $V_1$  от базиса  $\varepsilon_1$  к базису  $\varepsilon'_1$ .

$T_2$  - матрица перехода в  $V_2$  от  $\varepsilon_2$  к  $\varepsilon'_2$ .

Тогда имеет место следующее равенство:

$$A_{\varepsilon'_1 \varepsilon'_2} = \underbrace{T_2^{-1}}_{m \times m} \cdot \underbrace{A_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}}_{m \times n} \cdot \underbrace{T_1}_{n \times n}$$

Доказательство: Пусть  $y$  - образ  $x$  под действием  $\varphi$  (то есть  $y = \varphi(x)$ ), тогда:

$$(1) \quad y^{\varepsilon_2} = A_{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \cdot x^{\varepsilon_1} \leftarrow \text{в старом базисе}$$

$$(2) \quad y^{\varepsilon'_2} = A_{\varepsilon'_1 \varepsilon'_2} \cdot x^{\varepsilon'_1} \leftarrow \text{в новом базисе}$$

$$x^{\varepsilon_1} = T_1 \cdot x^{\varepsilon'_1}$$

$$y^{\varepsilon_2} = T_2 \cdot y^{\varepsilon'_2} \leftarrow \text{формула изменения координат вектора}$$

Подставим в (1), получим:

$$T_2 y^{\varepsilon'_2} = A_{\varepsilon_1 \varepsilon_2} T_1 x^{\varepsilon'_1}. \text{ Домножим на } T_2^{-1} \text{ слева, так как } T_2 \text{ - невырожденная} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^{\varepsilon'_2} = \underbrace{T_2^{-1} A_{\varepsilon_1 \varepsilon_2} T_1}_{A_{\varepsilon'_1 \varepsilon'_2}} x^{\varepsilon'_1}, \text{ сравнивая с (2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_{\varepsilon'_1 \varepsilon'_2} = T_2^{-1} \cdot A_{\varepsilon_1 \varepsilon_2} T_1$$

Определение: Квадратные матрицы  $A$  и  $B$  называются подобными, если существует невырожденная матрица  $C$ :

$$B = C^{-1}AC \quad (\det C \neq 0)$$

Замечание: Матрицы линейных операторов в разных базисах подобны между собой.

Утверждение: Определители подобных матриц равны.

Доказательство: Пусть  $A$  и  $B$  подобны, то есть  $B = C^{-1}AC \Rightarrow$

$$\det B = \det (C^{-1}AC) = \det C^{-1} \det A \det C = \frac{\det C}{\det C} \det A = \det A$$

Замечание: Это означает, что  $\det A$  - определитель матрицы линейного оператора не зависит от выбора базиса, то есть является инвариантом замены координат (и  $\text{Rg } A$  - тоже инвариант)

Определение: Ядром линейного отображения  $\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$  называется множество:

$$\ker \varphi = \{x \in V_1 \mid \varphi(x) = 0\} = \varphi^{-1}(0) \subseteq V_1$$

Образом линейного отображения  $\varphi$  называется множество

$$\text{Im } \varphi = \{x \in V_2 \mid \exists y \in V_1 : \varphi(y) = x\} = \varphi(V_1) \subseteq V_2$$

Замечание:  $\ker \varphi$  и  $\text{Im } \varphi$  являются линейными подпространствами в  $V_1$  и  $V_2$  соответственно (проверить замкнутость по операциям).

Утверждение: Пусть  $\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$  - линейное отображение.

Тогда  $\dim \ker \varphi + \dim \text{Im } \varphi = n = \dim V_1$

Доказательство: Зафиксируем базис  $e = \{e_1, \dots, e_n\}$  в  $V_1$

$\forall x \in V_1$  можно представить в виде  $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

$\varphi(x) = x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n)$ , но  $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$  - столбцы матрицы линейного отображения (если фиксировать базис и в  $V_2$ ).

$\text{Im } \varphi = \mathcal{L}(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$  (линейная оболочка).  $\Rightarrow$

$\Rightarrow \dim \text{Im } \varphi = \text{Rg } A$  - ранг матрицы линейного отображения.

Ядро  $\varphi$  описывается однородной СЛАУ  $Ax = 0$ , размерность пространства её решений (то есть число векторов ФСР) равна  $k = n - \text{Rg } A$ , где

$k$  - размерность ядра,

$n$  - размерность образа.

Итак,  $\dim \ker \varphi + \dim \text{Im } \varphi = n$ , где  $n = \dim V_1$ .

Замечание: Если  $\varphi : V \longrightarrow V$  - линейный оператор (то есть  $\ker \varphi, \text{Im } \varphi \subseteq V$ ), то вообще говоря,

$V \neq \ker \varphi + \text{Im } \varphi$ , хотя и  $\dim \ker \varphi + \dim \text{Im } \varphi = \dim V$

Пример: Рассмотрим линейное пространство  $\mathbb{R}_n[x]$  - пространство многочленов от  $x$ ,  $\deg f \leq n$  с вещественными коэффициентами и оператор  $\mathcal{D} : f \mapsto f' \leftarrow$  производная,  $\mathcal{D} : \mathbb{R}_n[x] \rightarrow \mathbb{R}_n[x]$   
 $\dim \mathbb{R}_n[x] = n + 1$ , так как  $\mathbb{R}_n[x] = \mathcal{L}\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$   
 $\text{Im } \mathcal{D} = \mathbb{R}_{n-1}[x]$ ,  $\dim \text{Im } \mathcal{D} = n$   
 $\ker \mathcal{D} = \mathcal{L}(1)$  - константы,  $\dim \ker \mathcal{D} = 1$ ,  
но  $\ker \mathcal{D} \subseteq \text{Im } \mathcal{D}$ , но  
 $\dim \ker \mathcal{D} + \dim \text{Im } \mathcal{D} = n + 1 = \dim \mathbb{R}_n[x]$

Действия с линейными операторами и их матрицами

Пусть  $A$  и  $B$  - линейные операторы на линейном пространстве  $V$  над полем  $F$ , тогда

Определение:  $(A + B)(x) = A(x) + B(x)$   
 $(\lambda A)(x) = \lambda A(x)$  - умножение на число  $\lambda \in F$   
 $(A \cdot B)(x) = A(B(x))$  - умножение линейного оператора (композиция)

Замечание:  $A+B$ ,  $\lambda \cdot A$ ,  $A \cdot B$  - снова линейные операторы (провека по определению)

Утверждение: Пусть фиксирован базис  $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ . Тогда:

$$\begin{cases} (1) (A + B)_e = A_e + B_e \\ (2) (\lambda A)_e = \lambda A_e \\ (3) (A \cdot B)_e = A_e \cdot B_e \end{cases}$$

Доказательство (3):  $\left((A \cdot B)(x)\right)^e = A_e \cdot (B(x))^e = A_e \cdot B_e x^e = (AB)_e x^e \Rightarrow$   
 $\Rightarrow (AB)_e = A_e B_e$ , так как матрица линейных операторов в фиксированном базисе единственна.

Собственные векторы и собственные числа

Определение: Число  $\lambda$  называется собственным числом (или собственным значением, то есть с. з.) линейного оператора  $\varphi : V \rightarrow V$ , где  $V$  - линейное пространство, если  $\exists$  вектор  $x \in V$ ,  $x \neq 0$ , такой что  $\varphi(x) = \lambda \cdot x$ . При этом  $x$  называется собственным вектором (с. в.), отвечающим собственному значению  $\lambda$ .

Замечание: Если  $x$  - собственный вектор, отвечающих собственному значению  $\lambda$ , то  $\forall \alpha \in F$ ,  $\alpha \neq 0$ ,  $\alpha x$  - тоже собственный вектор, отвечающий собственному значению  $\lambda$   $\varphi(\alpha x) = \alpha \varphi(x) = \alpha \lambda x = \lambda(\alpha x) \Rightarrow \alpha x$  - собственный вектор.

Замечание: Другими словами, собственный вектор - ненулевой вектор, остающийся коллинеарным (либо равным 0) самому себе под действием линейного оператора  $\varphi$

Пример 1: Пусть  $\text{Пр}_{Ox} : V_2 \longrightarrow V_1$  ( $V_2 \cong \mathbb{R}^2$ ) - линейный оператор проекции на  $Ox$  в плоскости  $V_2$ . Все векторы  $\in Ox$ , отличные от 0 - собственные векторы.

Например,  $\vec{i} = (1, 0)$

$\varphi(\vec{i}) = i$  - собственный вектор, отвечающий собственному значению  $\lambda_1 = 1$

$\varphi(\vec{j}) = 0 \Rightarrow j$  - собственный вектор, отвечающий собственному значению  $\lambda_2 = 0$

В базисе  $\{i, j\}$  - базис из собственных векторов. Матрица линейного оператора  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  - диагональная матрица.

$V_2 = Ox \oplus Oy$

Бывает, что нет собственных значений и собственных векторов для линейного оператора

## Лекция 24 апреля

### Задача:

Есть 10000 человек.

Каждый день 15% здоровых заболевают и 10% больных выздоравливают (можно болеть повторно).

В первый день заболело 100 человек.

$A$  - линейный оператор ежедневной динамики.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = A^n(x_0), \quad x_0 = \begin{pmatrix} 9900 \\ 100 \end{pmatrix}$$

$A^n - ?$

### Определение:

Для произвольной квадратной матрицы  $A$  определитель

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$$

Называется характеристическим многочленом матрицы  $A$ , а уравнение  $\chi_A(\lambda) = 0$  - многочлен степени  $n$

### Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \chi_A(\lambda) = \det \left( \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2)$$

### Утверждение:

Характеристические уравнения подобных матриц совпадают.

### Доказательство:

$A$  и  $A'$  подобны, если существует  $T$ ,  $\det T \neq 0$ :  $A' = T^{-1}AT$

$$\begin{aligned} \chi_{A'}(\lambda) &= \det(A' - \lambda E) = \det(T^{-1}AT - \lambda T^{-1}ET) = \det(T^{-1}(A - \lambda E)T) = \\ &= \det T^{-1} \det(A - \lambda E) \det T = \det(A - \lambda E) = \chi_A \end{aligned}$$

**Следствие:**

Характеристические многочлены для матриц линейных операторов в разных базисах совпадают (сами матрицы могут различаться).

То есть корректно говорить о характеристическом многочлене для линейного оператора (то есть он инвариантен при замене базиса).

**Определение:**

Множество всех собственных значений линейного оператора называют спектром линейного оператора.

**Теорема:**

$\lambda$  - собственное значение линейного оператора  $\Leftrightarrow \lambda$  - корень характеристического уравнения линейного оператора (над алгебраически замкнутым полем (например  $\mathbb{C}$ ) или в случае, когда корни характеристического уравнения лежат в том же поле, над которым рассматривается линейный оператор).

**Доказательство:**

Необходимость :

Дано:  $\lambda$  - собственное значение линейного оператора  $A$

Доказать:  $\lambda$  - корень  $\chi_A(\lambda) = 0$

По определению  $\exists x \neq 0$   $A(x) = \lambda \cdot x$ , то есть  $A(x) = \lambda \cdot I(x)$ , где  $I(x)$  - тождественный линейный оператор.

$$(A - \lambda I)(x) = 0 \quad (*)$$

Запишем равенство  $(*)$  в некотором базисе  $e$ :

$$(A_e - \lambda E) \cdot x^e = 0$$

Это однородное СЛАУ с ненулевым решением, то есть по критерию существования ненулевых решений  $\det(A_e - \lambda E) = 0$ , а это и есть

$$\chi_A(\lambda) = 0$$



Достаточность :

Дано:  $\lambda$  - корень  $\chi_A(\lambda) = 0$

Доказать:  $\lambda$  - собственное значение линейного оператора  $A$

Если  $\lambda$  - корень, то в заданном базисе  $e$  выполнено равенство

$$\det(A_e - \lambda E) = 0$$

То есть однородное СЛАУ  $(A_e - \lambda E)x^e = 0$  имеет ненулевое решение (по тому же критерию) и соответственно выполняется (\*)

$$(A - \lambda I)(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = \lambda x \quad (x \neq 0)$$

То есть  $x$  - собственный вектор, отвечающий собственному значению  $\lambda$ , ч.т.д.

**Пример:**

$$\chi_A(\lambda) = \lambda(\lambda - 2) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases} \text{ - спектр линейного оператора } A$$

**Определение:**

Алгебраической кратностью собственного значения  $\lambda$  называется его кратность как корня характеристического уравнения.

**Обозначение:**

$m_i$  - алгебраическая кратность собственного значения  $\lambda_i$

**Пример:**

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - 5)^3(\lambda - 2)^2$$

Тогда будет верно:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 5 \leftarrow m_1 = 3 \\ \lambda_2 = 2 \leftarrow m_2 = 2 \end{cases}$$

**Определение:**

Пусть  $A : V \rightarrow V$  - линейный оператор  $\lambda$  - собственное значение линейного оператора  $A$ . Тогда множество

$$V_\lambda = \{x \in V \mid Ax = \lambda x\}$$

называется собственным подпространством отвечающим собственному значению  $\lambda$ .

**Замечание:**

$V_\lambda$  является линейным подпространством в  $V$  (состоящим из собственных векторов, отвечающих собственным значениям  $\lambda$ , и нулевого вектора).

**Доказательство:**

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow (A - \lambda E) \cdot x = 0$$

То есть  $V_\lambda = \ker(A - \lambda I)$  линейный оператор с матрицей  $(A - \lambda E)$   
 $\ker B$  любого линейного оператора  $B$  является подпространством в  $V$   
(проверить замкнутость).

**Определение:**

Размерность собственного подпространства  $V_\lambda$  называется геометрической кратностью собственного значения  $\lambda$

**Обозначение:**

$s_i$  - геометрическая кратность собственного значения  $\lambda$

**Замечание:**

Геометрическая кратность собственного значения  $\lambda$  всегда  $\geq 1$  ( $s_i \geq 1$ ).

**Теорема:** без доказательства

Геометрическая кратность собственного значения  $\lambda$  всегда  $\leq$  его алгебраической кратности ( $s_i \leq m_i$ )

**Определение:**

Следом матрицы  $A \in M_n(F)$  называется сумма е диагональных элементов

$$\text{tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

**Утверждение:**

$$\forall A, B \in M_n(F) \quad \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$$

**Утверждение:**

Пусть  $A$  - линейный оператор в базисе  $e$ . Тогда  $\text{tr } A_e$  не зависит от выбора базиса.

**Доказательство:**

$A_{e'} = T^{-1}A_eT$ , где  $A_{e'}$  - матрица линейного оператора  $A$  в базисе  $e'$ .  
Тогда  $\text{tr } A_{e'} = \text{tr}((T^{-1}A_e)T) = \text{tr}(T(T^{-1}A_e)) = \text{tr } A_e$ .

**Итого:**

$\text{Rg } A, \det A, \text{tr } A, \chi_A(\lambda)$  - инварианты линейного оператора при замене базиса.

**Замечание:**

$$A \in M_n(\mathbb{R}), \chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = (-1)^n \lambda^n \neq (-1)^{n-1} \text{tr } A \lambda^{n-1} + \dots \dots + \det A$$

Критерий диагональности линейного оператора

**Утверждение:**

Пусть  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  - собственные значения линейного оператора и пусть  $\lambda_i \neq \lambda_j$  при  $i \neq j$ .

Пусть  $v_1, \dots, v_k$  - соответствующие собственные векторы

Тогда  $v_1, \dots, v_k$  - линейно независимы.

То есть собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям являются линейно независимыми.

**Доказательство:**

Применим принцип математической индукции.

При  $k = 1$  - утверждение верно, так как собственный вектор по определению  $\neq 0$  и соответственно образует линейно независимую систему.

Пусть утверждение верно при  $k = m$ .

Добавим ещё 1 собственный вектор  $v_{m+1}$ , отвечающий собственному значению  $\lambda_{m+1}$ . Докажем, что система собственных векторов  $v_1, \dots, v_{m+1}$  останется линейно независимой.

Рассмотрим равенство:

$$1. \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m + \alpha_{m+1} v_{m+1} = 0$$

Применим к 1. линейный оператор  $A$ , тогда по линейности:

$$\alpha_1 A(v_1) + \dots + \alpha_m A(v_m) + \alpha_{m+1} A(v_{m+1}) = 0$$

Вспомним, что  $v_i$  - собственный вектор для собственного значения  $\lambda_i$

$$2. \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_m \lambda_m v_m + \alpha_{m+1} \lambda_{m+1} v_{m+1}$$

Умножим 1. на  $\lambda_{m+1}$  и вычтем из 2.

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{m+1})v_1 + \dots + \alpha_m(\lambda_m - \lambda_{m+1})v_m = 0$$

По предположению индукции  $v_1, \dots, v_m$  - линейно независимы:

$$\begin{cases} \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{m+1}) = 0 \\ \dots \\ \alpha_m(\lambda_m - \lambda_{m+1}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \dots \\ \alpha_m = 0 \end{cases}$$

Теперь 1. можно записать в виде:

$$0 + \alpha_{m+1}v_{m+1} = 0$$

Но  $v_{m+1} \neq 0$  (собственный вектор), значит  $\alpha_{m+1} = 0 \Rightarrow$  по определению система  $v_1, \dots, v_{m+1}$  является линейно независимой.

**Утверждение:** Критерий диагональности матрицы линейного оператора  $A$

Матрица линейного оператора  $A$  является диагональной в данном базисе  $\Leftrightarrow$  все векторы этого базиса являются собственными векторами для линейного оператора  $A$ .

**Доказательство:**

Необходимость :

Дано:  $A_e$  - диагональная матрица

Доказать:  $e$  состоит из собственных векторов по  $A$

По определению матрицы линейного оператора в  $j$ -м столбце стоят координаты вектора  $A(e_j)$  в базисе  $e_1, \dots, e_n$

Если  $A_e$  - диагональна, то  $j$ -й столбец имеет вид  $(0, \dots, 0, \lambda_j, 0, \dots, 0) \Rightarrow$

$\Rightarrow A(e_j) = 0 + \dots + 0 + \lambda_j e_j + 0 + \dots + 0$ , то есть  $A(e_j) = \lambda_j e_j$ ,  $e_j \neq 0 \Rightarrow$  по определению  $e_j$  - собственный вектор, отвечающий собственному значению  $\lambda_j$  (на диагонали матрицы  $A_e$  - собственное значение).

Достаточность :

Дано:  $e$  состоит из собственных векторов по  $A$

Доказать:  $A_e$  - диагональная матрица

$$A(e_j) = \lambda_j e_j,$$

$\forall j = \overline{1, n} \Rightarrow$  по определению матрицы линейного оператора, все элементы кроме диагональных равны нулю в каждом столбце (на диагонали собственные значения  $\lambda_i$ ), ч.т.д.

**Определение:**

Линейный оператор, для которого в линейном пространстве  $V$  существует базис из собственных векторов, называется диагонализируемым.

**Теорема:** Критерий диагонализируемости линейного оператора.

(Без доказательства) Линейный оператор диагонализируем  $\Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow$  для любых его собственных значений  $\lambda_i$  алгебраическая кратность  
равна геометрической кратности ( $m_i = s_i$ )

**Теорема:**

Если характеристическое уравнение линейного оператора, действующего в пространстве  $V$ , где  $\dim V = n$  имеет ровно  $n$  попарно различных корней, то оператор диагонализируем (корни лежат в поле, над которым рассматривается линейное пространство  $V$ )

**Доказательство:**

Если собственное значение  $\lambda_i \in F$ , то ему можно сопоставить хотя бы один собственный вектор  $v_i$ . Система  $v_1, \dots, v_n$  - линейно независимы, так как по условию  $\lambda_i \neq \lambda_j$ , при  $i \neq j$  (доказали ранее), их число равно  $\dim V \Rightarrow$  они образуют базис в  $V$  из собственных векторов  $\Rightarrow$  линейный оператор диагонализируем

## Лекция 15 мая

### Евклидовы пространства

В этом разделе всякое поле будет полем вещественных чисел:

$$\forall F \text{ } F \text{ - поле} \Rightarrow F = \mathbb{R}$$

#### Определение:

Евклидово пространство  $\mathcal{E}$  - это пара  $(V, g(x, y))$ , где

$V$  - линейное пространство,

$g(x, y)$  - скалярное произведение, то есть симметрическая, положительно определённая билинейная форма.

То есть для  $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  выполняются свойства (аксиомы скалярного произведения):

1.  $\forall x, y \in \mathcal{E} \quad g(x, y) = g(y, x)$  - симметричность

2.  $\forall x, y, z \in \mathcal{E} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$g(\alpha x + \beta y, z) = \alpha g(x, z) + \beta g(y, z), \text{ линейность}$$

3.  $\forall x \in \mathcal{E} \quad g(x, x) \geq 0 \wedge g(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$  нулевой вектор

#### Пример:

1.  $\mathcal{E} = (V_3, g(x, y) = |x| \cdot |y| \cos(\widehat{x, y}))$  - евклидово пространство

2.  $V = C[a, b]$  - функции, непрерывные на отрезке  $[a, b]$

$$g(f_1(x), f_2(x)) = \int_a^b f_1(x) f_2(x) dx - \text{скалярное произведение} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{E} = (C[a, b], g(x, y)) - \text{евклидово пространство}$$

#### Определение:

Пусть  $\mathcal{E}$  - евклидово пространство. Тогда величина  $\|v\| = \sqrt{g(v, v)}$  (может обозначаться как  $|v|$ ) называется нормой (длиной) вектора  $v$ .

**Определение:**

$\forall v_1, v_2 \in \mathcal{E}, v_1, v_2 \neq 0$ :

$$\cos \varphi = \frac{g(v_1, v_2)}{\|v_1\| \cdot \|v_2\|} = \frac{g(v_1, v_2)}{\sqrt{g(v_1, v_1)}\sqrt{g(v_2, v_2)}}$$

Где  $\varphi$  - угол между  $v_1, v_2$ .

Это определение угла между векторами (берём  $\varphi \in [0, \pi]$ )

**Определение:**

$\forall x, y \in \mathcal{E}$ :

$$\rho(x, y) = \|x - y\| - \text{расстояние между векторами } x, y$$

**Утверждение (Неравенство Коши-Буняковского)**

$\forall x, y \in \mathcal{E}$ :

$$|g(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

**Доказательство:**

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$ :

$$0 \leq g(\lambda x - y, \lambda x - y) = \lambda g(x, \lambda x - y) - g(y, \lambda x - y) =$$

$$= \lambda^2 g(x, x) - \lambda g(x, y) - \lambda g(y, x) + g(y, y) = \|x\|^2 \lambda^2 - 2g(x, y)\lambda + \|y\|^2$$

Квадратное уравнение относительно  $\lambda$ , которое  $\geq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$\Rightarrow D \leq 0, \quad D = 4(g(x, y))^2 - 4\|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \leq 0 \Rightarrow |g(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|,$$

ч.т.д.

**Утверждение (неравенство треугольника):**

$\forall x, y \in \mathcal{E}$ :

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

**Доказательство:**

$\|x+y\|^2 = g(x+y, x+y) = \|x\|^2 + 2g(x, y) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 =$   
 $= (\|x+y\|)^2$ . Тут было применено неравенство Коши-Буняковского. Так как норма вектора всегда  $\geq 0$ , То

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

**Определение:**

Два вектора  $x, y \in \mathcal{E}$  называются ортогональными, если  $g(x, y) = 0$ .

**Определение:**

Система векторов  $a_1, \dots, a_k$  называется:

- а. Ортогональной, если  $g(a_i, a_j) = 0, \forall i, j = \overline{1, k}, i \neq j$
- б. Ортонормированной, если она ортогональна и  $g(a_i, a_i) = 1, \forall i = \overline{1, k}$

**Лемма 1.**

Пусть  $a_1, \dots, a_k$  - ортогональная система векторов, и  $a_i \neq 0, i = \overline{1, k}$ . Тогда эта система линейно независима.

**Доказательство:**

Приравняем к нулю линейную комбинацию

$$\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k = 0$$

Домножим скалярно на  $a_i$  для каждого  $i = \overline{1, k}$

$$(\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k, a_i) = (0, a_i) = 0$$

$$\alpha_1 (a_1, a_i) + \dots + \alpha_i (a_i, a_i) + \dots + \alpha_k (a_k, a_i) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \alpha_i (a_i, a_i) = 0$ , но  $a_i \neq 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \Rightarrow$  по определению система  $a_1, \dots, a_k$  линейно независима.



**Замечание:**

Если  $\dim \mathcal{E} = n$  и  $k = n$ , то  $a_1, \dots, a_n$ , ( $a_i \neq 0, \forall i$ ) образует ортогональный базис. Если рассмотреть  $e_i = \frac{a_i}{\|a_i\|}$ ,  $i = \overline{1, n}$  (то есть нормировать), то получим ортонормированный базис.

**Лемма 2.**

Пусть  $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ , то есть  $x_i$  - коэффициенты вектора  $x$  в ортонормированном базисе.  $e_1, \dots, e_n$ , тогда  $x_i = (x, e_i)$ ,  $\forall i = \overline{1, n}$   
Если базис не является ортонормированным, но ортогонален, то  $x_i = \frac{(x, e_i)}{(e_i, e_i)}$ ,  $i = \overline{1, n}$

**Доказательство:**

$= x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \leftarrow$  умножим скалярно на  $e_i, e = \overline{1, n}$

$$(x, e_i) = x_1 \cdot g(e_1, e_i) + \dots + x_i \cdot g(e_i, e_i) + \dots + x_n \cdot g(e_n, e_i) = x_i \cdot g(e_i, e_i) = x_i$$

**Замечание:**

Пусть  $a_1, \dots, a_n$  - базис в  $\mathcal{E}$ . Тогда  $g(x, y) = x^T \Gamma Y$ , где  $x, Y$  - столбцы координат векторов  $x, y$  в базисе  $a_1, \dots, a_n$ ,

$$\Gamma = \begin{pmatrix} g(a_1, a_1) & \dots & g(a_1, a_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g(a_1, a_n) & \dots & g(a_n, a_n) \end{pmatrix}$$

Матрица Грамма (она же матрица билинейной формы).

Свойства Грамма

1.  $\Gamma$  - симметрическая, то есть  $\Gamma^T = \Gamma$  (из симметричности скалярного произведения). Более того  $\forall x \neq 0 \quad x^T \Gamma x \underset{=g(x, x)}{> 0}$  (из положительной определённости)
2. Матрицы Грамма двух базисов  $e, e'$  связаны соотношением

$$\Gamma' = U^T \Gamma U$$

Где  $U$  - матрица перехода  $e \rightarrow e'$  (так как это верно для всех билинейных форм).

3.  $\det \Gamma = \text{Gr}(a_1, \dots, a_n) > 0$  если  $a_1, \dots, a_n$  - базис ( $\det \Gamma$  называется граммианом и обозначается  $\text{Gr}$ )

**Доказательство пункта 3.**

По свойству 2  $\det \Gamma' = \det(U^T \Gamma U) = \det U^T \det \Gamma \det U = (\det U)^2 \det \Gamma$   
 Перейдём к ортонормированному базису (далее докажем, что это всегда возможно). В ортонормированном базисе

$$\Gamma' = E, \det \Gamma' = \det E = 1 \Rightarrow \det \Gamma = \frac{1}{(\det U)^2} > 0$$

**Утверждение (Метод ортогонализации Грамма-Шмидта):**

Если  $\mathcal{E}$  - евклидово пространство, то в нём существует ортонормированный базис.

**Доказательство:**

Предъявим алгоритм, который по произвольному базису  $a_1, \dots, a_n$  строит ортогональный  $b_1, \dots, b_n$  (из него можно получить ортонормированный  $e_i = \frac{b_i}{\|b_i\|}$ ).

1. Так как  $a_1 \neq 0$  (вектор базиса), можно взять  $b_1 = a_1$ .
2. Будем считать  $b_2$  в виде:

$$b_2 = a_2 - \alpha b_1, \alpha \in \mathbb{R}$$

Ищем  $\alpha$  из условия  $(b_1, b_2) = 0$ . То есть:

$$(a_2 - \alpha b_1, b_1) = 0 \Rightarrow (a_2, b_1) - \alpha(b_1, b_1) = 0 \Rightarrow$$

Так как  $(b_1, b_1) \neq 0$  можем на него поделить

$$\Rightarrow \alpha = \frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)}$$

То есть  $\alpha$  - проекция вектора  $a_2$  на  $a_1$ ,  $b_2 = a_2 - \frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1$

Векторы  $b_1, b_2$  линейно выражаются через  $a_1, a_2 \Rightarrow$  они принадлежат  $\mathcal{E}$  (это может быть подпространство). При этом  $a_1, a_2$  могут быть выражены через  $b_1, b_2 \Rightarrow b_1, b_2$  - линейно независимы.

3. Пусть  $b_1, \dots, b_k$ ,  $k \geq 2$ , уже построены. Будем искать  $b_{k+1}$  в виде:

$$b_{k+1} = a_{k+1} - c_{k+1, 1}b_1 - c_{k+1, 2}b_2 - \dots - c_{k+1, k}b_k$$

Коэффициент  $c_{k+1, i}$ ,  $i = \overline{1, k}$ , найдём из условия ортогональности с  $b_i$ , домножим выражение скалярно на  $b_i$ .

$$0 = (b_{k+1}, b_i) = (a_{k+1}, b_i) - 0 - \dots - c_{k+1, i}(b_i, b_i) - \dots - 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_{k+1, i} = \frac{(a_{k+1}, b_i)}{(b_i, b_i)} \Rightarrow b_{k+1} = a_{k+1} - \sum_{i=1}^k \frac{(a_{k+1}, b_i)}{(b_i, b_i)} b_i$$

Продолжаем так делать, пока не получим ортогональную линейно независимую систему векторов  $b_1, \dots, b_n$ , где  $n = \dim \mathcal{E} \Rightarrow$  ортонормальный базис.

**Утверждение (четвёртое свойство матрицы Грамма):**

Определитель матрицы Грамма не меняется в процессе ортогонализации Грамма-Шмидта.

$$\text{Gr}(a_1, \dots, a_n) = \det \Gamma = \det \Gamma' = \text{Gr}(b_1, \dots, b_n) = \|b_1\|^2 \cdot \dots \cdot \|b_n\|^2$$

Так как матрица Грамма ортогонального базиса является диагональной.

**Доказательство:**

Рассмотрим матрицу перехода от  $a$  к  $b$ :

$$U_{a \rightarrow b} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \dots & * & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & * \\ \vdots & 0 & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Получилась верхнетреугольная матрица, определитель которой равен 1.

И участвуют только векторы  $b_i$  с  $i \leq k$ , которые выражаются через  $a_j$ , где  $a_j \leq a_i$

$$\Rightarrow \det U_{a \rightarrow b} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Gr}(b_1, \dots, b_n) = \det \Gamma' = (\det U)^2 \det \Gamma = 1 \det \Gamma = \text{Gr}(a_1, \dots, a_n)$$

## Лекция 22 мая

### Свойства матрицы Грамма

1.  $F$  - симметрическая и положительно определённая.

2.  $\Gamma' = U^T \Gamma U$

3. Если  $a_1, \dots, a_n$  - базис, то

$$\det \Gamma(a_1, \dots, a_n) = \text{Gr}(a_1, \dots, a_n) > 0$$

4. Метод ортогонализации Грамма-Шмидта не меняет  $\det \Gamma$

$$\text{Gr}(a_1, \dots, a_n) = \text{Gr}(b_1, \dots, b_n) = \|b_1\|^2 \dots \|b_n\|^2$$

### Утверждение (5 свойство матрицы Грамма).

Пусть  $a_1, \dots, a_n$  - некоторые векторы (необязательно базис). Тогда:

$$a_1, \dots, a_k \Leftrightarrow \text{Gr}(a_1, \dots, a_k) = \det \Gamma \neq 0$$

л.н.з.

### Доказательство:

Составим линейную комбинацию  $a_1, \dots, a_k$  и приравняем к нулю:

$$\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k = 0 \quad (1)$$

Умножим (1) скалярно последовательно на  $a_1, \dots, a_k$

$$\begin{cases} \alpha_1(a_1, a_1) + \alpha_2(a_1, a_2) + \dots + \alpha_k(a_1, a_k) = 0 \\ \vdots \\ \alpha_1(a_k, a_1) + \alpha_2(a_k, a_2) + \dots + \alpha_k(a_k, a_k) = 0 \end{cases}$$

Это СЛАУ относительно неизвестных  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  вида

$$\Gamma(a_1, \dots, a_k) \alpha = 0, \text{ где } \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix}$$

Однородная СЛАУ с квадратной матрицей  $\Rightarrow$  по критерию существования ненулевого решения, существуют нетривиальные коэффициенты  $\alpha$ , такие что:

$$\alpha_1, \dots, \alpha_k \Leftrightarrow \det \Gamma(a_1, \dots, a_k) = 0$$

то есть векторы  $a_1, \dots, a_k$  линейно независимы из (1).

**Замечание:**

В  $V_3$  если  $a_1, a_2, a_3$  - линейно независимые столбцы координат в некотором ортонормированном базисе, тогда

$$\Gamma(a_1, a_2, a_3) = A^T E A^T = A^T A, \text{ где } A = [a_1, a_2, a_3], \text{ матрица по столбцам}$$

Равенство верно, так как матрица  $A$  является матрицей перехода от ортонормированного базиса к базису  $a$  (а в ОНБ  $\Gamma = E$ ).

Получается  $\text{Gr}(a_1, a_2, a_3) = (\det A)^2$ .

При этом  $\det A = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle = V(a_1, a_2, a_3)$  - ориентированный объём параллелипипеда, построенного на векторах  $a_1, a_2, a_3$ .

То есть  $|V(a_1, a_2, a_3)| = \sqrt{\text{Gr}(a_1, a_2, a_3)}$

**Замечание:**

В  $n$ -мерном случае положим

$$V(a_1, \dots, a_n) = \sqrt{\text{Gr}(a_1, \dots, a_n)}$$

Объём  $n$ -мерного параллелипипеда, построенного на векторах  $a_1, \dots, a_n$ .

Ортогональные дополнения**Определение:**

Пусть  $H$  - подпространство в евклидовом пространстве  $\mathcal{E}$ , тогда множество:

$$H^\perp = \{x \in \mathcal{E} | \forall h \in H \ (x, h) = 0\}$$

называется ортогональным дополнением к пространству  $H$ .

**Утверждение:**

$H^\perp$  является линейным подпространством в  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{E} = H \oplus H^\perp$

Следствие:

$$\dim \mathcal{E} = \dim H + \dim H^\perp$$

**Доказательство:**

Проверим замкнутость операции сложения:

$$\forall h \in H \forall x_1, x_2 \in H^\perp (x_1 + x_2, h) = (x_1, h) + (x_2, h) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 \in H^\perp$$

Умножения на скаляр:

$$\forall h \in H, \forall x \in H^\perp, \forall \alpha \in \mathbb{R} (\alpha x, h) = \alpha(x, h) = \alpha \cdot 0 = 0$$

То есть  $H^\perp$  - подпространство в  $\mathcal{E} \Rightarrow$

$\Rightarrow$  можно рассмотреть сумму подпространств  $H + H^\perp$

Докажем, что сумма  $H + H^\perp$  прямая.

$$\forall x \in H \cap H^\perp (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow H \cap H^\perp = \{0\} \Rightarrow \text{сумма прямая}$$

Покажем, что  $H \oplus H^\perp = \mathcal{E}$

Пусть  $f_1, \dots, f_m$  - ортонормированный базис в  $H$  (существует по теореме о методе Грамма-Шмидта)

Дополним его до базиса в  $\mathcal{E}$  векторами  $f_{m+1}, \dots, f_n$

Применим процесс ортогонализации Грамма-Шмидта, получим векторы

$$\underbrace{f_1, \dots, f_m}_{\text{уже ОНБ}}, e_{m+1}, \dots, e_n$$

Тогда  $e_{m+1}, \dots, e_n$  по построению ортогональны каждому вектору  $f_1, \dots, f_m$ , то есть ортогональны всему  $H$ , так как  $H = \mathcal{L}(f_1, \dots, f_m) \leftarrow$  линейная оболочка, тогда  $e_{m+1}, \dots, e_n \in H^\perp$  по определению.

То есть  $\forall x \in \mathcal{E}$ :

$$x = \underbrace{x_1 h_1 + \dots + x_m h_m}_{h \in H} + \underbrace{x_{m+1} e_{m+1} + \dots + e_n}_{h^\perp \in H^\perp}$$

То есть все  $x \in \mathcal{E}$  представимы в виде  $x = h + h^\perp$ , где  $h \in H, h^\perp \in H^\perp$ , что и означает, что  $\mathcal{E} = H \oplus H^\perp$

**Определение:**

Пусть  $x = h + h^\perp$ , где  $h \in H, h^\perp \in H^\perp$ , тогда - ортогональная проекция на  $H$ , а  $h^\perp$  - ортогональная составляющая  $x$  относительно  $H$

**Обозначение:**

$$h = \text{Pr}_H x$$

**Замечание:**

$$\forall x \in \mathcal{E} \forall H \exists! h, h^\perp x = h + h^\perp, \text{ так как } \mathcal{E} = H \oplus H^\perp$$

**Утверждение:**

$$(H^\perp)^\perp = H$$

**Доказательство:**

$$\forall h^\perp \in H^\perp \forall x \in H, h^\perp \text{ ортогональны} \Rightarrow H \subseteq (H^\perp)^\perp$$

По предыдущему утверждению  $\mathcal{E} = H \oplus H^\perp$  и  $\mathcal{E} = H^\perp \oplus (H^\perp)^\perp \Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  размерности  $H$  и  $(H^\perp)^\perp$  одинаковы  $\Rightarrow H = (H^\perp)^\perp$

**Утверждение:**

Пусть  $H = \mathcal{L}(a_1, \dots, a_k)$  и  $a_1, \dots, a_k$  - линейно независимы (то есть базис в  $H$ ), тогда  $\forall x \in \mathcal{E}$ :

$$\text{Pr}_H x = \underset{n \times k}{A} \cdot \underset{k \times k}{(A^T \cdot A)^{-1}} \cdot \underset{k \times n}{A^T} \cdot \underset{n \times 1}{x}$$

где  $A = [a_1, \dots, a_k]$  - матрица  $n \times k$ , составленная из столбцов  $a_1, \dots, a_k$ , (координаты в некотором ортонормированном базисе).

**Замечание:**

$$h^\perp = x - h = (E - A(A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T)x$$

**Доказательство:**

По утверждению, доказанному выше:

$$\forall x \in \mathcal{E} x = h + h^\perp, h \in H, h^\perp \in H^\perp$$

$$\text{При этом } a_1, \dots, a_k \text{ - базис в } H \Rightarrow x = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k + h^\perp \quad (2)$$

То есть если мы знаем коэффициенты  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ , то мы знаем

$$h = \text{Пр}_H x = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k$$

Равенство (2) последовательно скалярно умножим на  $a_1, \dots, a_k$

$$\begin{cases} \alpha_1(a_1, a_1) + \alpha_2(a_1, a_2) + \dots + \alpha_k(a_1, a_k) = (a_1, x) \\ \vdots \\ \alpha_2(a_k, a_1) + \alpha_2(a_k, a_2) + \dots + \alpha_k(a_k, a_k) = (a_k, x) \end{cases} \quad (3)$$

В  $i$ -м уравнении слагаемые  $(a_i, h^\perp) = 0$ , так как  $h^\perp \in H^\perp$ . Перепишем (3) в матричном виде (все координаты векторов даны в ортонормированном базисе).

$$(3) \Leftrightarrow A^T \cdot A \cdot \alpha = A^T x, \quad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A = [a_1, \dots, a_k]$$

То есть  $\Gamma(a_1, \dots, a_k) = A^T A$ , поскольку  $(a_i, a_j) = a_i^T E a_j = a_i^T a_j$ .  $E$  - матрица Грамма в ортонормированном базисе.

Таким образом  $\Gamma(a_1, \dots, a_k) = A^T A$  невырождена по свойству 5 матрицы Грамма (векторы  $a_1, \dots, a_k$  линейно независимы), значит существует  $\Gamma^{-1} = (A^T A)^{-1}$ .

Тогда (3)  $\Rightarrow \alpha = (A^T A)^{-1} A^T x$

$$\text{Пр}_H x = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k = [a_1, \dots, a_k] \alpha = A \alpha = A(A^T A)^{-1} A^T x.$$

### Определение:

Множество решений неоднородной СЛАУ  $Ax = b$  называется линейным алгебраическим многообразием

### Замечание:

По теореме о структуре общего решения неоднородной СЛАУ: общее решение НСЛАУ (то есть произвольный элемент многообразия) равен частному решению НСЛАУ + общее решение ОСЛАУ. Это означает, что линейное многообразие  $P = x_0 + L$ , где  $x_0 \in P$  (частное решение НСЛАУ  $Ax = b$ ), а  $L$  - множество решений ОСЛАУ  $Ax = 0$ , то есть подпространство, являющееся линейной оболочкой ФСР ОСЛАУ.

Таким образом  $L$  всегда содержит  $\{0\}$  (начало координат), а  $x_0 \in P$  - вектор сдвига. Любое линейное многообразие можно получить (параллельным) сдвигом некоторого подпространства  $L$  на вектор  $x_0 \in P$



**Определение:**

Расстоянием от точки  $M$ , заданной радиус-вектором  $x$  до линейного многообразия  $P$  называется

$$\rho(M, P) = \inf_{u \in P} \rho(x, u) = \inf_{u \in P} \|x - u\|$$

Заметим, что в конечномерном евклидовом пространстве  $\inf$  всегда достигается (это  $\min$ ), то есть

$$\rho(M, P) = \rho(x, P) = \min_{u \in P} \|x - u\|$$

**Замечание:**

$\rho(x, P)$  = длине ортогональной составляющей вектора  $x - x_0$  относительно пространства  $L$ , где  $P = x_0 + L$ , то есть

$$\rho(x, P) = \|(x - x_0)^\perp\|$$

**Доказательство:**

$$\forall u \in P \quad x - u = x - (x_0 + l) = \text{Pr}_L(x - x_0 - l) + (x - x_0 - l)^\perp$$

Где  $l \in L \Rightarrow l^\perp = 0 \Rightarrow x - u = \underbrace{\text{Pr}_L(x - x_0) - l}_{\in L} + \underbrace{(x - x_0)^\perp}_{\in L^\perp}$ . Проекцию можем уменьшать, варьируя  $L$ . Тогда из геометрии получим:

$$\forall u \in P \quad \|(x - x_0)^\perp\| \leq \|x - u\|, \quad (\text{катет не больше гипотенузы})$$

При  $l = \text{Pr}_L(x - x_0)$ , то есть  $u = x_0 + \text{Pr}_L(x - x_0)$  достигается равенство  $\Rightarrow$

$$\rho(x, P) = \min_{u \in P} \|x - u\| = \|(x - x_0)^\perp\|$$

**Лекция 29 мая**

**Утверждение:**

Расстояние  $\rho(M, P)$  между точкой  $M$  с радиус вектором  $X$  и линейным многообразием  $P = x_0 + L$ , где  $L = \mathcal{L}(a_1, \dots, a_k)$  и  $a_1, \dots, a_k$  - линейно независимые (то есть базис  $\mathcal{L}$ ), вычисляется по формуле:

$$\rho(M, P) = \sqrt{\frac{\text{Gr}(a_1, \dots, a_k, x - x_0)}{\text{Gr}(a_1, \dots, a_k)}}$$

1 способ:  $\rho(M, P) = \|(x - x_0)_L^\perp\|$

**Доказательство:**

Применим к  $a_1, \dots, a_k, x - x_0$  процесс ортогонализации Грамма-Шмидта.

$$\underbrace{a_1, \dots, a_k}_{\text{базис } L}, x - x_0 \longmapsto \underbrace{b_1, \dots, b_k}_{\text{базис } L}, (x - x_0)^\perp$$

$(x - x_0)^\perp$ , так как он ортогонален  $L = h(b_1, \dots, b_k)$  и при ортогонализации мы вычитаем из  $x - x_0$  его проекцию на  $L$

По свойству 4 матрицы Грамма определитель не меняется в процессе ортогонализации, тогда:

$$\text{Gr}(a_1, \dots, a_k, x - x_0) = \text{Gr}(b_1, \dots, b_k, (x - x_0)^\perp) = \underbrace{\|b_1\|^2 \dots \|b_k\|^2}_{\text{Gr}(a_1, \dots, a_k)} \cdot \|(x - x_0)^\perp\|^2$$

И так как  $\rho(M, P) = \|(x - x_0)^\perp\|$ , то

$$\rho(M, P)^2 = \frac{\text{Gr}(a_1, \dots, a_k, x - x_0)}{\text{Gr}(a_1, \dots, a_k)}, \text{ ч.т.д.}$$

**Линейные операторы в евклидовых пространствах****Определение:**

Линейный оператор  $\mathcal{A}^* : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$  называется сопряжённым к линейному оператору  $\mathcal{A} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ , если:

$$\forall x, y \in \mathcal{E} \quad (\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^*y)$$

**Определение:**

Линейный оператор  $\mathcal{A} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$  называется самосопряжённым, если:

$$\forall x, y \in \mathcal{E} \quad (\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}y) \Rightarrow \mathcal{A} = \mathcal{A}^*$$

**Лемма:**

Пусть  $M, N \in M_n(\mathbb{R})$ , тогда:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad x^T M y = x^T N y \Rightarrow M = N$$

**Доказательство:**

$x, y$  - любые, возьмём элементы канонического базиса:  $e_i \begin{pmatrix} 0_1 \\ 0_2 \\ \vdots \\ 1_i \\ \vdots \\ 0_n \end{pmatrix}, \dots, e_j =$

$$\begin{pmatrix} 0_1 \\ 0_2 \\ \vdots \\ 1_j \\ \vdots \\ 0_n \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e_i M e_j = [M]_{ij} = [N]_{ij} = e_i N e_j \Rightarrow \forall i, j = \overline{1, n} \quad M = N, \text{ ч.т.д.}$$

**Теорема (о существовании сопряжённого):**

Пусть  $\mathcal{A} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ . Тогда существует единственный сопряжённый линейный оператор  $\mathcal{A}^* : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ , причём его матрица в любом базисе  $e$  имеет вид:

$$(\mathcal{A}^*)_e = \Gamma^{-1}(\mathcal{A}_e)^T \Gamma$$

**Замечание:**

Если базис  $e$  - ортонормированный, то  $\mathcal{A}_e^* = \mathcal{A}_e^T$

**Доказательство:**

Запишем равенство (1) :  $(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^*y)$  в базисе  $e$ .  
Пусть  $x^e, y^e$  - столбцы координат векторов  $x, y$  в базисе  $e$

$$(\mathcal{A}x)^e = \mathcal{A}_e x^e, \quad (x, y) = (x^e)^T \Gamma y^e$$

Тогда в матричной записи равенство (1) имеет вид:

$$\begin{aligned} ((\mathcal{A}x)^e)^T \Gamma y^e &= (x^e)^T \Gamma (\mathcal{A}^*y)^e \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x^e)^T \underbrace{\mathcal{A}_e^T \Gamma}_M y^e &= (x^e)^T \underbrace{\Gamma \mathcal{A}_e^*}_N y^e \Rightarrow \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  так как верно для всех  $x, y$ , то по лемме  $M = N$ , то есть  $\Gamma \mathcal{A}_e^* = \mathcal{A}_e^T = \Gamma \Rightarrow$  так как  $e$  базис, то по свойству 5 матрицы Грамма, существует  $\Gamma^{-1}$ , то есть:

$$\mathcal{A}_e^* = \Gamma^{-1} \mathcal{A}_e^T \mathcal{A}$$

То есть в любом базисе сопряжённый линейный оператор задаётся матрицей  $\mathcal{A}_e^*$  и действие линейного оператора полностью определяется его матрицей  $\Rightarrow$  существует единственный сопряжённый линейный оператор.

**Следствие (критерий самосопряжённости):**

Линейный оператор самосопряжён  $\Leftrightarrow$  матрица линейного оператора  $\mathcal{A}$  в ортонормированном базисе симметрическая.

**Доказательство:**

$\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$ . В ортонормированном базисе  $e$  выглядит так:

$$\mathcal{A}_e^* = \mathcal{A}_e^T \wedge \forall \text{ базиса } \mathcal{A}_e^* = \mathcal{A}_e \Leftrightarrow \text{в ОНБ } \mathcal{A}_e = \mathcal{A}_e^T$$

**Теорема:**

Все корни характеристического многочлена самосопряжённого линейного оператора являются вещественными числами.

### Доказательство:

Пусть  $\lambda_i \in \mathbb{C}$  - корень характеристического уравнения  $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = 0$  и  $\mathcal{A}$  - самосопряжённый линейный оператор, значит в некотором ортонормированном базисе  $\det(\mathcal{A} - \lambda_i E) = 0 \Rightarrow$  СЛАУ  $(\mathcal{A} - \lambda_i E)x = 0$  (2) имеет ненулевое решение (это координаты собственного вектора, соответствующего собственному значению  $\lambda_i$ )

Пусть  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq 0$  - решение. Вообще говоря  $\forall k = \overline{1, n} \ x_k \in \mathbb{C}$ .

Рассмотрим  $\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} \neq 0$  (комплексные сопряжённые чисел).

Умножим (2) слева на  $(\bar{x})^T$ :  $(\bar{x})^T(\mathcal{A} - \lambda_i E)x = 0 \Leftrightarrow \bar{x}^T \mathcal{A}x - \lambda_i \bar{x}^T x = 0$ , где  $\bar{x}^T x = \bar{x}_1 x_1 + \dots + \bar{x}_n x_n = \underbrace{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}_{\in \mathbb{R}} > 0$ .

Тогда  $\lambda_i = \frac{\bar{x}^T \mathcal{A}x}{\bar{x}^T x}$  - отношение Рэлея (Rayleigh).

Покажем, что  $\omega = \bar{x}^T \mathcal{A}x$  - вещественное число, то есть  $\bar{\omega} = \omega$ :

$$\omega = \omega^T, \text{ (так как это число)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega = (\bar{x}^T \mathcal{A}x)^T = x^T \mathcal{A}^T (\bar{x}^T)^T = x^T \mathcal{A} \bar{x}$$

Так как  $\mathcal{A} = \mathcal{A}^T$  в ортонормированном базисе.  $\bar{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$ , так как  $\mathcal{A} \in M_n(\mathbb{R})$

Но  $\bar{\omega} = \overline{(\bar{x}^T \mathcal{A}x)} = (\overline{\bar{x}^T}) \bar{\mathcal{A}} \bar{x} = x^T \mathcal{A} \cdot \bar{x} \Rightarrow \bar{\omega} = \omega \Rightarrow$  собственное значение  $\lambda_i$  - тоже является вещественным, ч.т.д.

### Теорема (без доказательства):

Пусть  $\lambda_i$  - собственное значение самосопряжённого линейного оператора  $\mathcal{A}$ . Тогда алгебраическая кратность  $\lambda_i$  всегда равна геометрической кратности  $\lambda_i$  ( $m(\lambda_i) = s(\lambda_i)$ )

### Следствие:

Самосопряжённый линейный оператор всегда является диагонализируемым.

**Утверждение:**

Собственные векторы самосопряжённого линейного оператора, отвечающие различным собственным значениям, являются ортогональными.

**Доказательство:**

Пусть  $\lambda_1, \lambda_2$  такие собственные значения, что:

$$\begin{cases} \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ \exists x_1 \neq 0 : \mathcal{A}x_1 = \lambda_1 x_1 \\ \exists x_2 \neq 0 : \mathcal{A}x_2 = \lambda_2 x_2 \end{cases}$$

$(\mathcal{A}x_1, x_2) = (\lambda_1 x_1, x_2) = \lambda_1(x_1, x_2)$ . Из самосопряжённости получим:

$$(\mathcal{A}x_1, x_2) = (x_1, \mathcal{A}x_2) = (x_1, \lambda_2 x_2) = \lambda_2(x_1, x_2)$$

То есть  $\underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0}(x_1, x_2) = 0 \Rightarrow (x_1, x_2) = 0$ , то есть  $x_1, x_2$  - ортогональны.

**Теорема (без доказательства):**

Для всех самосопряжённых линейных операторов  $\mathcal{A}$  существует ортонормированный базис из собственных векторов, его матрица  $\mathcal{A}_e$  в этом базисе диагональна, на диагонали стоят собственные значения, повторяющиеся столько раз, какова их кратность.

**Теорема (частный случай):**

Если собственные значения  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  - самосопряжённого линейного оператора  $\mathcal{A} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ ,  $\dim \mathcal{E} = n$ , попарно различны ( $i \neq j \Rightarrow \lambda_i \neq \lambda_j$ ), то в  $\mathcal{E}$  существует ортонормированный базис (из собственных векторов), в котором матрица линейного оператора  $\mathcal{A}$  имеет диагональный вид.

**Доказательство:**

Если собственные значения  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  - попарно различны, то, выбрав для каждого  $\lambda_i$  соответствующий ему собственный вектор  $b_i$ , мы получим  $n$  ненулевых векторов, они будут линейно независимы по доказанному ранее и, так как  $\mathcal{A}$  - самосопряжённый линейный оператор, то система

$b_1, \dots, b_n$  будет ортогональна  $\Rightarrow$  ортогональный базис. Нормируя его, получим ортонормированный базис из собственных векторов  $e_i = \frac{b_i}{\|b_i\|}$ , в нём матрица линейного оператора диагональна.

Ортогональные матрицы и ортогональные линейные операторы

### Определение:

Квадратную матрицу  $U = M_n(\mathbb{R})$  называют ортогональной, если

$$U^T \cdot U = E$$

### Пример:

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} - \text{матрица поворота}$$

Свойства ортогональных матриц

$$1. |\det U| = 1$$

$$\det(U^T \cdot U) = \det E = 1 \Rightarrow (\det U)^2 = 1 \Rightarrow |\det U| = 1$$

### Замечание:

Ортогональная матрица всегда невырождена.

$$2. U^{-1} = U^T$$

По замечанию  $U^{-1}$  всегда существует, равенство  $U^T U = E$  умножим справа на  $U^{-1}$ :

$$(U^T U) \cdot U^{-1} = E U^{-1}$$

$$U^T (U \cdot U^{-1}) = U^{-1} \Rightarrow U^T = U^{-1}$$

3.  $U^T$  тоже ортогональная матрица

$$(U^T)^T U^T = U \cdot U^{-1} = E$$

#### 4. Произведение ортогональных матриц одинакового размера - ортогональная матрица

**Доказательство:**

$$(U_1 U_2)^T (U_1 U_2) = U_2^T \underbrace{U_1^T U_1}_E U_2 = \underbrace{U_2^T U_2}_E = E$$

**Замечание:**

Все ортогональные матрицы  $n \times n$  над  $\mathbb{R}$  с операцией умножения матриц образуют группу  $O_n(\mathbb{R})$

**Определение:**

Линейный оператор  $\mathcal{A} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$  называется ортогональным, если

$$\forall x, y \in \mathcal{E} \quad (\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (x, y)$$

То есть говорят, что  $\mathcal{A}$  "сохраняет скалярное произведение".

**Замечание:**

Ортогональный оператор сохраняет норму вектора и угол между векторами.

**Доказательство:**

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}x\|^2 &= (\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) = (x, x) = \|x\|^2 \\ \cos(\widehat{\mathcal{A}x, \mathcal{A}y}) &= \frac{(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y)}{\|\mathcal{A}x\| \cdot \|\mathcal{A}y\|} = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|} = \cos(\widehat{x, y}) \end{aligned}$$

**Теорема (критерий ортогональности линейного оператора с помощью матрицы):**

$\mathcal{A}$  - ортогональный линейный оператор  $\Leftrightarrow$  его матрица в ортонормированном базисе ортогональна.



**Доказательство:**

**Необходимость**

Дано:  $\mathcal{A}_e$  - ортогональный линейный оператор.

Доказать:  $\mathcal{A}_e$  - ортогональная матрица в ортонормированном базисе  $e$ .

$$(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (x, y) \Rightarrow (\mathcal{A}_e x)^T \Gamma(\mathcal{A}_e y) = x^T E y \Leftrightarrow$$

$E$  - матрица грамма в ортонормированном базисе

$$\Leftrightarrow \forall x, y \in \mathcal{E} \quad x^T \underbrace{\mathcal{A}_e^T \mathcal{A}_e}_M y = x^T E y$$

Тогда по лемме  $\mathcal{A}_e^T \mathcal{A}_e = E$ , то есть по определению  $\mathcal{A}_e$  - ортогональная матрица.

**Достаточность**

Дано:  $\mathcal{A}_e$  - ортогональная матрица в ортонормированном базисе

Доказать:  $\mathcal{A}$  - ортогональный линейный оператор.

$$\mathcal{A}_e^T \mathcal{A}_e = E \Rightarrow \forall x, y \in \mathcal{E} \quad x^T (\mathcal{A}_e^T \mathcal{A}_e) y = x^T E y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\mathcal{A}_e x)^T \Gamma(\mathcal{A}_e y) = x^T E y$$

$\mathcal{A}$  это матричная запись скалярного произведения в ортонормированном базисе. То есть

$$\forall x, y \in \mathcal{E} \quad (\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (x, y) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \mathcal{A}$  ортогональный линейный оператор, ч.т.д.

**Теорема (критерий ортогональности линейного оператора):**

Пусть линейный оператор  $\mathcal{A} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ , тогда:

$\mathcal{A}$  - ортогональный линейный оператор  $\Leftrightarrow \mathcal{A}$  переводит любой ортонормированный базис  $e_1, \dots, e_n$  в ортонормированный  $\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n$

**Лекция 5 июня**

ОНБ = ортонормированный базис.

### Теорема (2<sup>ой</sup> Критерий ортогональности линейного оператора)

Пусть линейный оператор  $\mathcal{A} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ , тогда  $\mathcal{A}$  - ортогональный линейный оператор  $\Leftrightarrow \mathcal{A}$  переводит ОНБ  $e_1, \dots, e_n$  в ОНБ  $\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n$ .

#### Доказательство

##### Необходимость:

$$(\mathcal{A}e_1, \mathcal{A}e_j) = (e_i, e_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} = \delta_j^i$$

##### Достаточность:

Дано:  $e_1, \dots, e_n$  - ОНБ,  $\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n$  - тоже ОНБ

Доказать:  $\mathcal{A}$  - ортогональный линейный оператор.

$\forall x \in \mathcal{E} \ x \longmapsto (x_1, \dots, x_n)^T$  - координаты в базисе  $e$ , то есть  $x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$ .

Тогда  $\mathcal{A}x = \mathcal{A}(x_1e_1 + \dots + x_ne_n) = x_1\mathcal{A}e_1 + \dots + x_n\mathcal{A}e_n$ , то есть

$$\mathcal{A}x \longmapsto (x_1, \dots, x_n)^T - \text{координаты вектора в базисе } \mathcal{A}e$$

$$\forall x, y \in \mathcal{E}$$

$$(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = \underbrace{(\mathcal{A}x)_{\mathcal{A}e}^T}_{=x_e^T} \underbrace{\Gamma_{\mathcal{A}e}}_{=E} \underbrace{(\mathcal{A}y)_{\mathcal{A}e}}_{=y_e} = x_e^T y_e = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$$

$$(x, y) = x_e^T \underbrace{\Gamma_e}_{=E} y_e = x_e^T y_e = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$$

Значит  $\mathcal{A}$  - ортогональный линейный оператор.

##### Утверждение:

Матрица перехода от одного ОНБ к другому ОНБ в евклидовом пространстве всегда ортогональна.

### Доказательство:

Пусть  $U$  - матрица перехода от ОНБ  $e = (e_1, \dots, e_n)$  к ОНБ  $b = (b_1, \dots, b_n)$  тогда

$\Gamma_e = U^T \Gamma_e U = U^T U = E \Rightarrow U$  — ортогональная матрица по определению  
5 разложений матриц

### 1 разложение.

#### Теорема (о каноническом виде ортогонального оператора)

Для любого ортогонального линейного оператора существует ОНБ, в котором его матрица имеет блочно-диагональный вид.

$$A = \begin{pmatrix} A_{\varphi_1} & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & A_{\varphi_n} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & \dots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \dots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}$$

$A_{\varphi_i}$  - матрица (блок)  $2 \times 2$  вида  $A_{\varphi_i} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_i & -\sin \varphi_i \\ \sin \varphi_i & \cos \varphi_i \end{pmatrix}$

То есть существует ОНБ, в котором ортогональный линейный оператор является либо набором вращений, либо набором вращений и отражений.  
(без доказательства)

### Теорема Эйлера

Любое ортогональное преобразование в  $\mathbb{R}^3$  обладает ОНБ, в котором его матрица имеет вид

$$A = \left( \begin{array}{cc|c} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ \hline 0 & 0 & \pm 1 \end{array} \right)_{3 \times 3}$$

То есть любое ортогональное преобразование в  $\mathbb{R}^3$  является или поворотом на некоторый угол  $\varphi$  (вокруг заданной оси - прямой, проходящей через 0) либо композицией такого поворота и отражения (относительно заданной плоскости)

## 2 разложение:

### Теорема (о спектральном разложении)

Для любой симметрической матрицы  $A$  существует такая ортогональная матрица  $U$ , что  $A = U\Lambda U^T$ , где

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

С собственными значениями оператора с матрицей  $A$  на диагонали, повторяющимися соответственно их кратности.

То есть любая симметрическая матрица ортогональными преобразованиями приводится к диагональному виду.

### Доказательство:

Рассмотрим матрицу  $A$  как матрицу самосопряжённую линейному оператору в ОНБ  $e = \{e_1, \dots, e_n\}$

Для самосопряжённого линейного оператора существует ОНБ (из собственных векторов)  $f = \{f_1, \dots, f_n\}$ , котором его матрица диагональна

$$\Lambda = C_{e \rightarrow f}^{-1} A_e C_{e \rightarrow f}$$

где  $C_{e \rightarrow f}$  - матрица перехода от ОНБ  $e$  к ОНБ  $f \Rightarrow$  она ортогональна

То есть  $C_{e \rightarrow f}^{-1} = C_{e \rightarrow f}^T$  возьмём  $U = C_{e \rightarrow f}$ , тогда  $\Lambda = U^T A U \Rightarrow A = U \Lambda U^T$

## 3 разложение:

### Теорема (о сингулярном разложении)

(Может встречаться как  $SVD$  = singular value decomposition).

Для любой (прямоугольной) матрицы  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  имеет место разложение  $A_{m \times n} = V_{m \times m} \Sigma_{m \times n} U_{n \times n}^T$ , где  $U \in O_n(\mathbb{R})$ ,  $V \in O_m(\mathbb{R})$

$\Sigma$  - диагональна с неотрицательными числами  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r \geq \sigma_{r+1} = \dots = \sigma_{\min(m \times n)} = 0$  на главной диагонали (они называются сингулярными числами и расположены по невозрастанию).

То есть  $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \sigma_r & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}_{m \times n}$  - того же ранга, что и  $A$

### Доказательство:

Рассмотрим матрицу  $A^T A_{n \times n}$

Это матрица линейного оператора  $A^* A$  в некотором ОНБ. Он самосопряжён, так как матрица  $A^T A$  является симметрической:

$$(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$$

При этом все его собственные значения  $\lambda_i$  неотрицательны, так как если  $A^* A u = \lambda u$ , то  $\lambda(u, u) = (u, \lambda u) = (u, A^* A u) = (A u, A u) = \|A u\|^2 \geq 0 \Rightarrow \lambda \geq 0$

Тогда эти собственные значения  $\lambda_i$  можно записать в виде  $\sigma_i^2$ , то есть  $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ , где  $i = 1, \min(m, n)$ .

Числа  $\sigma_i$  принято называть сингулярными числами и сортировать по невозрастанию

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r \geq \sigma_{r+1} = \dots = \sigma_{\min(m \times n)} = 0$$

Где  $r = \text{Rg } \Sigma = \text{Rg } A^T A$ . Покажем, что  $r = \text{Rg } A$ . Заметим, что  $A^T A = \Gamma(a_1, \dots, a_n)$

Зафиксируем базисный минор в матрице  $A$ . В матрице  $\Gamma(a_1, \dots, a_n)$  базисный минор будет в тех же столбцах (и строках) по свойству 5 матрицы Грама. Тогда  $\text{Rg } A = \text{Rg } \Gamma(a_1, \dots, a_n) = \text{Rg } A^T A = \text{Rg } A A^T$

Пусть  $U_1, \dots, U_n$  - ОНБ из собственных векторов  $A^T A$ , то есть

$$A^T A u_i = \begin{cases} \sigma_i^2 u_i, & 1 \leq i \leq r \\ 0, & r+1 \leq i \leq n \end{cases}$$

Положим  $v_i = \frac{Au_i}{\sigma_i}, i \leq i \leq r$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } (v_i, v_j) &= \frac{(Au_i)^T}{\sigma_i} E \frac{Au_j}{\sigma_j} = \frac{u_i^T (A^T Au_j)}{\sigma_i \sigma_j} = \frac{u_i^T \sigma_j^2 u_j}{\sigma_i \sigma_j} = \frac{\sigma_j}{\sigma_i} u_i^T u_j = \\ &= \frac{\sigma_j}{\sigma_i} (u_i, u_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} = \delta_i^j, \text{ где } 1 \leq i, j \leq r, \text{ где } r = \text{Rg } A \leq \end{aligned}$$

$\min(m, n)$

Дополним систему  $v_1, \dots, v_r$  векторами  $v_{r+1}, \dots, v_m$  до ОНБ в  $\mathbb{R}^m$  произвольным образом. Заметим, что при  $j = r+1, \dots, n$ ,  $Au_j = 0$ , так как  $A^T Au_j = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (A^* Au_j, u_j) = (0, u_j) = 0 \text{ Также это равно } (Au_j, Au_j) = \|Au_j\|^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow Au_j = 0 \text{ при } j = r+1, \dots, n$$

$$A_{m \times n} [u_1, \dots, u_n]_{n \times n} = [\sigma_1 v_1, \dots, \sigma_r v_r, 0, \dots, 0] =$$

$$= \underbrace{[v_1, \dots, v_n]}_{=V} \begin{matrix} m \times m \\ \left[ \begin{array}{ccccccc} \sigma_1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & \sigma_r & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ 0 & & & & & & 0 \end{array} \right] \end{matrix}$$

векторы  $v_{r+1}, \dots, v_m$  не влияют на разложение, умножаясь на 0 на диагонали.

А матрицы  $U, V$  являются ортогональными, так как столбцы  $U$  - ОНБ из собственных векторов в  $A^T A \Rightarrow U, V$  - матрицы перехода от ОНБ к ОНБ, то есть по утверждению ортогональной матрицы

$$AU = U\Sigma \mid \cdot U^T \text{ справа}$$

Получаем  $A = V\Sigma U^T$  - сингулярное разложение

#### 4 разложение:

##### Утверждение (о полярном разложении)

Любой линейный оператор в евклидовом пространстве представляется в виде композиции самосопряжённых линейных операторов с неотрицательными собственными значениями и ортогонального линейного оператора.

То есть для любой квадратной матрицы  $A$  существует разложение

$$A = S \cdot O$$

Где  $S$  - симметрическая матрица (неотрицательно определённая),  $O$  - ортогональная матрица. (это матрицы соответствующих линейных операторов в ОНБ).

**Замечание:**

Это аналог формулы для комплексных чисел  $z = re^{i\varphi} = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$

**Доказательство:**

Возьмём сингулярное разложение матрицы  $A$

$$A_{n \times n} = V_{n \times n} \Sigma_{n \times n} U_{n \times n}^T$$

Где  $U$ ,  $V$  - ортогональные,  $\Sigma$  - диагональная матрица с неотрицательными числами на диагонали.

$$A = V \Sigma U^T = \underbrace{(V \Sigma V^T)}_{=S} \underbrace{(V U^T)}_{=O} = S \cdot O$$

Где  $O$  - ортогональная матрица, как произведение двух ортогональных матриц

$S$  - симметрическая ( $S^T = (V \Sigma V^T)^T = (V^T)^T \Sigma^T V^T = V \Sigma V^T$ )

и у неё неотрицательные собственные значения - сингулярные числа, так как  $\Sigma$  - её диагональный вид в спектральном разложении

**Замечание:**

Можно и в обратном порядке представить (в виде композиции ортогонального линейного оператора и самосопряжённого линейного оператора):

$$A = V \Sigma U^T = (V U^T) \cdot (U \Sigma U^T) = \hat{O} \hat{S}$$

**Лекция 10 июня.**

Вспомним пройденные разложения:

1. Спектральное разложение:  $A = U \Lambda U^T$ , где  $A$  - симметрическая,  $U$  - ортогональная,  $\Lambda$  - диагональная.
2. Канонический вид ортогонального оператора в ОНБ

3. *SVD* (сингулярное) для любых матриц:  $A_{m \times n} = V \Sigma U^T$ ,  $V$ ,  $U$  - ортогональная.

4. Полярное  $A = SO$  (или  $A = O'S'$ ),  $A$  - квадратная матрица

## 5 разложение:

### Утверждение (о QR разложении):

Пусть  $A \in M_n(\mathbb{R})$ ,  $\det A \neq 0$  - квадратная невырожденная матрица. Тогда существуют матрицы  $Q$ ,  $R$ :  $A = QR$ ,  $Q$  - ортогональная,  $R$  - верхнетреугольная с положительными элементами на главной диагонали. ( $R = Q^T A$ )

### Доказательство:

Пусть  $A_1, \dots, A_n$  - столбцы матрицы  $A$ , они линейно независимы по условию (так как матрица невырождена).

Применим к ним процесс ортогонализации Грамма-Шмидта. Получим:

$$A_1, \dots, A_n \mapsto B_1, \dots, B_n - \text{ортогональный базис}$$

Нормируем его:  $Q_i = \frac{B_i}{\|B_i\|}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $Q_1, \dots, Q_n$  образуют ОНБ в  $\mathbb{R}^n$ .

Тогда исходный  $k$  столбец  $A_k \in \mathcal{L}(Q_1, \dots, Q_k)$ ,  $k = \overline{1, n}$  (по формулам Грамма Шмидта).

Тогда  $A_k = r_{1k}Q_1 + \dots + r_{kk}Q_k$ , где  $r_{k,k} = \|B_k\| > 0$  (так как  $B_k = Q_k \|B_k\|$ , а коэффициент при  $B_k$  в процессе ортогонализации стал равен 1).

В матричном виде:  $A = QR$ , где  $Q = [Q_1, \dots, Q_n]$  - ортогональная матрица, так как матрица перехода от ОНБ к ОНБ.

Тогда  $R = \begin{bmatrix} r_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & r_{nn} \end{bmatrix}$ , где  $*$  - какие-то элементы,  $\forall k \ r_{k,k} = \|B_k\|$  на диагонали.



## Приведение квадратичных форм к главным осям

### Теорема:

Любую квадратичную форму можно с помощью ортогонального преобразования привести к каноническому виду  $q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$ , где  $\lambda_i$  - собственное значение линейного оператора с той же матрицей, что и квадратичная форма, в некотором ОНБ.

### Доказательство:

Пусть дана квадратичная форма  $q(x) = x^T A x$  в некотором ОНБ.

Рассмотрим линейный оператор  $\mathcal{A}$  с той же матрицей в том же ОНБ.

$\mathcal{A}$  - самосопряжённый линейный оператор, так как  $A$  - симметрическая матрица. Применим теорему о спектральном разложении:

$$A = U \Lambda U^T$$

Где  $U$  - ортогональная матрица,  $\Lambda$  - диагональная матрица. Заметим, что если взять  $U$  в качестве матрицы перехода к новому базису (ОНБ из собственных векторов оператора  $\mathcal{A}$ ), то матрица квадратичной формы будет в новом базисе  $U^T A U$ , то есть  $\Lambda$  (и для оператора  $\mathcal{A}$   $\Lambda = U^{-1} A U = U^T A U$ , (так как  $U$  - ортогональная) - матрица в новом базисе).

То есть в новом базисе матрицы квадратичной формы и линейного оператора снова совпадают и обе равны диагональной матрице  $\Lambda$  (с собственными значениями оператора  $A$  на диагонали). Замечание: у квадратичных форм собственных значений не бывает, поэтому на диагонали находятся именно собственные значения оператора.

### Замечание:

То есть квадратичную форму можно привести к каноническому виду, не меняя длин и углов (ортогональное преобразование их не меняет). В  $\mathbb{R}^3$  достаточно поворота плоскости.

## Алгебра над полем

### Определение:

Пусть  $A$  - векторное пространство над некоторым полем  $F$ , снабжённое дополнительной операцией умножения векторов  $*$  :  $A \times A \longrightarrow A$

$A$  называется алгеброй над полем  $F$ , если выполняются условия:

1.  $\forall x, y, z \in A \begin{cases} (x + y) * z = x * z + y * z \\ x * (y + z) = x * y + x * z \end{cases}$
2.  $\forall \alpha, \beta \in F (\alpha x) * (\beta y) = (\alpha \cdot \beta)(x * y)$

### Определение:

Алгебра называется ассоциативной, если операция умножения векторов ассоциативна. И алгеброй с единицей, если есть нейтральный элемент по умножению.

### Пример:

1.  $\mathbb{C}$  является двумерной алгеброй над  $\mathbb{R}$ ,  $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$
2.  $F[x]$  - многочлены над полем  $F$  (базис  $1, x, x^2, \dots$ ) с операцией умножения многочленов,  $\dim_F F[x] = \infty$  (счётно).
3.  $M_n(F)$  - алгебра квадратных матриц над  $F$  с дополнительной операцией умножения матриц,  $\dim M_n(F) = n^2$ .
4. Кватернионы над  $\mathbb{R}$

$$H = \{x_1 1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k \mid x_i \in \mathbb{R}\}$$

$$\dim_{\mathbb{R}} H = 4$$

## Коники и квадрики

(то есть кривые и поверхности второго порядка)

Некоторая часть коспекта в [презентации](#) (тут пока что левая ссылка, когда появится, поменяю [если не поменял, напишите]).

### Эллипс:

Вывод канонического уравнения эллипса:

$$|F_1M| + |F_2M| = const$$

Побозначим  $const = 2a$ .

Пусть координаты фокусов соответственно  $(c, 0)$ ,  $(-c, 0)$ . Тогда

$$\begin{aligned}\sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\ (x+c)^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \\ a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= a^2 - xc \\ (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2)\end{aligned}$$

Знаем, что  $a^2 - c^2 = b^2 \Rightarrow$  поделив на  $a^2b^2$  получим каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Для него можно сказать

1.  $|x| \leq a, |y| \leq b$ .

2.  $Ox, Oy$  - оси симметрии  $\Rightarrow y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$  для  $x \geq 0$ .

Положим  $a \geq b$ , тогда:  $a$  - большая полуось, а  $b$  - малая полуось.

$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow \mathcal{E} = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$  - эксцентриситет.

$\mathcal{E} \in [0, 1)$  - мера "сплюснутости" эллипса.  $d_1, d_2$  - прямые, задающиеся соответственно уравнениями  $x = \frac{a}{\mathcal{E}}, x = -\frac{a}{\mathcal{E}}$ , называются директриссами.

Директрисса обладает свойством  $\frac{MF_1}{\rho(M, d)} = \mathcal{E}$ .

### Гиперболы:

$||MF_1| - |MF_2|| = const$  - определение.

Задаётся уравнением  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ , где:

$a$  - действительная полуось

$b$  - мнимая полуось.

$|x| \geq a \Rightarrow$  полоса  $|x| < a$  не содержит точек гиперболы.

$y = \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$ . При  $x \rightarrow \infty$  появляются асимптоты:  $y = \pm \frac{b}{a}x$

$c^2 = a^2 + b^2$ ,  $2c$  - фокальное расстояние.

Директрисы  $d_1, d_2$   $x = \pm \frac{a}{\mathcal{E}}$ . Где  $\mathcal{E} = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$  - эксцентриситет гиперболы,  $\mathcal{E} \in (1, \infty)$ . Смотри сопряжённая гипербола в презентации.

### Парабола:

$\frac{|MF|}{\rho(M, d)} = 1 = \mathcal{E}$  - эксцентриситет параболы.

$y^2 = 2px$  - каноническое уравнение параболы.

### Лекция 19 июня.

Половина этой лекции также находится в [презентации](#).

#### Сопряжённые (двойственные) пространства

Отображение  $f : V \longrightarrow F$  (из линейного пространства в поле, над которым оно задано). Называется линейной формой (функционалом), если выполняются условия:

$$1. \forall x, y \in V \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$$

$$2. \forall \alpha \in F \forall x \in V \quad f(\alpha x) = \alpha f(x)$$

### Замечание:

Это частный случай линейного отображения при  $V_2 = F$ .

Пусть в  $V$  фиксирован базис  $e = (e_1, \dots, e_n)$ .

Тогда матрицей линейного отображения  $f$  будет матрица  $1 \times n$ :

$$[f]_e = (f(e_1), \dots, f(e_n))_{1 \times n}$$

Тогда действие  $f$  в базисе  $e$  можно записать как:

$$\begin{aligned} f(x) &= [f]_e x_e = (f(e_1) \quad \dots \quad f(e_n)) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 f(e_1) + \dots + x_n f(e_n) = \\ &= f(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = f(x) \end{aligned}$$

Что происходит при замене базиса?

**Утверждение:**

Пусть  $a, b$  - базиса в  $V$ , тогда:

$$[f]_b = [f]_a T_{a \rightarrow b}$$

$[f]_b$  - строка в новом базисе.

Иногда выражение транспонируют, тогда

$$[f]_b^T = T_{a \rightarrow b}^T [f]_a^T$$

**Доказательство:**

$f(x) = [f]_a x_a = [f]_b x_b$ , тогда верно:

$$x_b = T_{a \rightarrow b}^{-1} x_a \Leftrightarrow x_a = T_{a \rightarrow b} x_b \Rightarrow [f]_b x_b = [f]_a T_{a \rightarrow b} \cdot x_b \Rightarrow [f]_b = [f]_a T_{a \rightarrow b}$$

**Определение:**

Пространством, сопряжённым к линейному пространству  $V$  называется множество всех линейных форм на пространстве  $V$ , со следующими операциями:

1.  $\forall x \in V \quad (f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$
2.  $\forall x \in V \quad \forall \alpha \in F \quad (\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x)$

**Обозначение:**

$$V^* = \text{Hom } V, F$$

Hom - гомоморфизмы.

**Замечание:**

Так как координаты линейных форм записывают в строки и преобразуют с помощью  $T_{a \rightarrow b}$  (а не  $T_{a \rightarrow b}^{-1}$ ):

$[f]_b = [f]_a \cdot T_{a \rightarrow b}$  (хотя  $x_b = T_{a \rightarrow b}^{-1} x_a$ ), их называют ковекторами, а "обычные" векторы - контрвекторами.

**Замечание:**

Когда ковекторы и векторы преобразуются одинаково? Когда матрица перехода  $U_{a \rightarrow b}$  является ортогональной (то есть удовлетворяет условию  $U_{a \rightarrow b}^T = U_{a \rightarrow b}^{-1}$ ), в частности, если это матрица перехода от ОНБ к ОНБ.

**Определение:**

Базис  $e = (e_1, \dots, e_n)$  в  $V$  и базис  $f = (f^1, \dots, f^n)$  (здесь  $e_i$  обозначает соответственный вектор столбец, а  $f^i$  - вектор строку) в сопряжённом пространстве  $V^*$  называются взаимными, если:

$$f^i(e_j) = \delta_j^i = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

**Утверждение:**

Пусть  $\dim V = n < \infty$ . Тогда для любого базиса в  $V$  существует единственный взаимный базис в  $V^*$  и наоборот.

**Доказательство:**

Пусть  $e = (e_1, \dots, e_n)$  - некоторый базис в  $V$ , пусть  $S$  - некоторый стандартный (канонический) базис в  $V$ . Запишем матрицу перехода  $T_{S \rightarrow e} = ([e_1]_S \ \dots \ [e_n]_S)$  - матрица из столбцов координат в базисе  $S$ . Для произвольного базиса  $f = (f^1 \ \dots \ f^n)$ . В  $V^*$  тоже составим матрицу

$$F = \begin{pmatrix} [f^1]_s \\ \vdots \\ [f^n]_s \end{pmatrix}.$$

Тогда условие взаимности базисов  $e, f$  запишется в виде:

$$F_{f \rightarrow e} \cdot T_{S \rightarrow e} \Rightarrow F = T^{-1}$$

Обратная всегда существует, так как это матрица перехода, обратная матрица единственна, значит взаимный базис тоже единственный.

**Пример:**

$$V = \mathbb{R}^2, \ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = [e_1]_s, \ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = [e_2]_s \Rightarrow \text{матрица перехода:}$$

$$T_{S \rightarrow e} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow F \cdot T = E \Rightarrow F = T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[f^1]_s = (1 \ 0), \ [f^2]_s = (1 \ 1) \Rightarrow f^1(x) = x_1, \ f^2(x) = x_1 + x_2$$

**Утверждение:**

Любое евклидово пространство  $\mathcal{E}$  изоморфно своему сопряжённому пространству, то есть  $\mathcal{E} \cong \mathcal{E}^*$ .

**Доказательство:**

Построим этот изоморфизм:

$$a \in \mathcal{E} \mapsto f_a(x) = (a, x) \in \mathcal{E}^*$$

Покажем, что  $\varphi$  - гомоморфизм линейных пространств:

$$\varphi(a_1 + a_2) = (a_1 + a_2, x) = (a_1, x) + (a_2, x) = \varphi(a_1) + \varphi(a_2)$$

$$\varphi(\lambda a) = (\lambda a, x) = \lambda(a, x) = \lambda\varphi(a) \Rightarrow \text{гомоморфизм.}$$

Оно сюръективно, так как любая линейная функция вида  $a_1x_1 + \dots + a_nx_n$  может быть записана в некотором ОНБ, как  $(a, x)$ , где  $a = (a_1, \dots, a_n)$  является прообразом. Оно инъективно по свойству скалярного произведения, значит это изоморфизм.