Лекции по алгебре 4 модуль.

Андрей Тищенко

2023/2024 гг.

Лекция 3 апреля

Квадратичные формы

Определение: Многочлен второй степени от n переменных, то есть выражение вида

$$q(x_1, \overset{x\in\mathbb{R}^n}{\ldots}, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{i\,i}x_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{i\,j}x_ix_j$$

Где $a_{i\,j} \in \mathbb{R}$, называют квадратичной формой.

Замечание: Многочлен $q(x)$ называется однородным степени k, если

$$\forall\alpha \quad q(\alpha x) = \alpha^k q(x)$$

Замечание: Квадратичная форма - это отображение $q : V \longrightarrow \mathbb{R}$ (вектор в число)

Рассмотрим n-мерное вектороное пространство V над $\mathbb{R}$. Зафиксируем в нём базис $e_1, \ldots, e_n$:
Тогда у любого $x \in V$ есть набор координат в этом базисе $x_1, \ldots, x_n$.
То есть $\forall x \in V : x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$
Пусть $x^e = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow q(x)$ можно представить в виде $q(x) = (x^e)^T A x^e$, где
$A = (a_{i\,j})$ матрица квадратичной формы $q(x)$ в базисе $e_1, \ldots, e_n$,
$a_{i\,j}$ - коэффициенты квадратичной формы.

Пример: В $\mathbb{R}^3$

$$q(x) = x_1^2+8x_1x_3 = x_1^2+4x_1x_3+4x_3x_1 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Замечание: Матрица квадратичной формы всегда симметрическая. То есть

$$A^T = A$$

Замечание: По любой билинейной форме можно построить квадратичную форму, взяв $q(x) = b(x,\ x)$. Тогда $a_{i\,j} = \dfrac{b_{i\,j} + b_{j\,i}}{2}$

Пример: $b(x,\ y) = x_1y_1 + ex_1y_3 + 5x_3y_1 \Rightarrow q(x) = b(x,\ x) = x_1^2 + 8x_1x_3$

Определение: Билинейная форма называется симметрической, если

$$b(x,\ y) = b(y,\ x),\ \text{например, скалярное произведение}$$

Называется кососиметрической, если

$$b(x,\ y) = -b(y,\ x)$$

Пример: Кососиметрическая билинейная форма с матрицей $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow B^T = -B$

Замечание: По любой квадратичной форме можно построить симметрическую билинейную форму. Это называется поляризацией квадратичной формы.

$$b(x,\ y) = \frac{1}{2}\big[q(x+y) - q(x) - q(y)\big]$$

Полярная билинейная форма к $q(x)$ $\big($имеет ту же матрицу, что и $q(x)$, $b(x,\ x) = q(x)\big)$

Утверждение: При переходе от базиса e к базису e' в линейном пространстве V матрица квадратичной формы меняется так:

$A' = C^T \cdot A \cdot C,$ "Стас" без рофлов, реально Стасямба конкретная

A' - матрица квадартичной формы в новом базисе e'
C - матрица перехода от базиса e к базису e'

Доказательство: Свзять координат вектора:
$x = Cx'$, так как $x' = C^{-1}x$ - формула изменения координат вектора при замене базиса.
Тогда $\forall x \quad q(x) = x^T Ax = (Cx')^T A(Cx') = (x')^T C^T ACx' = (x')^T A'x'$,
значит $A' = C^T AC$ $\big($Можно в качестве x брать все векторы канонического базиса $(0, \ldots 0, \underset{i}{1}, 0, \ldots, 0)$ и показать совпадение матричных элементов$\big)$

Определение: Если квадратичная форма в некотором базисе записана в виде $q(x) = x^T Ax$, то есть если A - матрица квадратичной формы в некотором базисе, то $\operatorname{Rg} A$ называется рангом квадратичной формы $q(x)$.

Почему это определение корректно? То есть почему $\operatorname{Rg} A$ не зависит от базиса.

Лемма: Пусть $A, U \in M_n(\mathbb{R})$, $\det U \neq 0$. Тогда $\operatorname{Rg} A \cdot U = \mathrm{RgA} = \operatorname{Rg} U \cdot A$, то есть при умножении на невырожденную матрицу ранг не меняется.

Доказательство: $\operatorname{Rg} A \cdot U \leqslant \operatorname{Rg} A$, так как столбцы матрицы AU есть линейные комбинации столбцов матрицы A.
Ранг матрицы по теореме о ранге матрицы равен максимальному числу линейно независимых столбцов не могло вырасти, так как все столбцы AU линейно выражаются через столбцы исходной матрицы.
Покажем $\operatorname{Rg} A \cdot U \geqslant \operatorname{Rg} A$.

$$\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg} A(U \cdot U^{-1}) = \operatorname{Rg}(AU)U^{-1} \leqslant \operatorname{Rg}(AU)$$

$$\operatorname{Rg} U \cdot A = \operatorname{Rg}(UA)^T = \operatorname{Rg} A^T U^T = \operatorname{Rg} A^T = \operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg} AU$$

Утверждение: (об инвариантности ранга квадратичной формы)
Пусть $q(x)$ - квадратичная форам на линейном пространстве V.
Пусть $a = (a_1, \ldots, a_n)$ и $b = (b_1, \ldots, b_n)$ - базисы в V.
Пусть A - матрица квадратичной формы в базисе a
Пусть B - матрицы квадратичной формы в базисе b
Тогда $\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg} B$ и ранг квадратичной формы корректно определен.

Доказательство: Было доказано, что $B = C^T AC \Rightarrow$ по лемме, так как мы умножаем матрицу A на матрицы C^T слева и на C справа, то $\operatorname{Rg} B = \operatorname{Rg} A$, ч.т.д.

Определение: квадратичную форму $q(x)$ будем назвать <u>положительно определённой</u>, если

$$\forall x \neq 0 \quad q(x) > 0$$

<u>отрицательно определённой</u>, если

$$\forall x \neq 0 \quad q(x) < 0$$

<u>знакопеременной</u>, если

$$\exists x,\ y \in V : q(x) < 0 < q(y)$$

Пример: $q_1(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2$ на $\mathbb{R}^3$ - положительно определена
$q_2(x) = x_1^2 - x_3^2$ - знакопеременна $\Big(y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow q(x) < 0 < q(y)\Big)$.
$q_3(x) = -x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2$ - отрицательно определена на $\mathbb{R}^3$,
но $q_3'(x) = -x_1^2 - 3x_3^2$ - не является отрицательно определённой, так как $q_3' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ - это неположительно определённая квадратная форма.

Теорема: (Критерий Сильвестра положительной определённости)
Пусть A - матрица квадратичной формы $q(x)$ в некотором базисе.
Тогда

$q(x)$ положительно определена $\Leftrightarrow$ последовательность главных угловых миноров в A строго положительна

То есть $\begin{cases} \Delta_1 = a_{1\,1} > 0 \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} \end{vmatrix} > 0 \\ \dots \\ \Delta_n = \det A > 0 \end{cases}$

Следствие:

Квадратичная форма отрицательно определена $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_1 < 0 \\ \Delta_2 > 0 \\ \dots \\ (-1)^n \Delta_n > 0 \end{cases}$

То есть знаки главных угловых миноров чередуются, начиная с минуса.

Доказательство: Так как A - отрицательно определена $\Leftrightarrow -A$ положительно определена $\det(-A) = (-1)^n \det A$, ч.т.д.

Пример: $q(x) = -x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2$ - отрицательно определённая

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}$$

Определение: Квадратичную форму $q(x) = \alpha_1 x_1^2 + \dots + \alpha_n x_n^2$, где $\alpha_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{1,\ n}$, то есть в квадратичной форме нет попарных произведений вида Cx_ix_j, называют квадратичной формой каноничесмкого вида. Если $\alpha_i \in \{-1,\ 0,\ 1\}$, то канонический вид называют нормальным.

Замечание: Матрица квадратичной формы в каноническом виде является диагональной.

Лекция 10 апреля

$x \in V \quad q(x) = \alpha_1 x_1^2 + \dots + \alpha_n x_n^2$ $(\alpha_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{1,\ n})$ - канонический вид. Если все коэффициенты α_i являются элементами множества $\{-1,\ 0,\ 1\}$, то это называется нормальным видом.

Утверждение. Любую квадратичную форму можно привести к каноническому и к нормальному виду.

Методы приведения

1. Метод Лагранжа.
   Главная идея состоит в последовательном выделении полных квадратов. При этом на каждом шаге под квадрат полностью уходит одна переменная (невыполнение этого условия является частой ошибкой при решении задач). Получается, что не более чем за n шагов алгоритм даст канонический вид.
   Если на некотором этапе переменных в квадрате не осталось, но есть выражение вида $c \cdot x_i \cdot x_j$ $(i \neq j)$, то делают замену переменных:

$$\begin{cases} x_i = x_i' - x_j' \\ x_j = x_i' + x_j' \end{cases} \Rightarrow cx_ix_j = c\left((x_i')^2 - (x_j')^2\right)$$

Получили новые квадраты, продолжаем выполнение метода (то есть выделяем полный квадрат при необходимости).

$$\alpha_i x_i^2 + 2x_i \underbrace{(\beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n)}_{\text{нет } x_i} = \alpha_i \left(x_i^2 + 2x_i \frac{\beta_i x_1 + \dots + \beta_n x_n}{\alpha_i} + \left(\frac{\beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n}{\alpha_i} \right)^2 \right.$$

$$- \frac{\beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n}{\alpha_i} = \alpha_i \underbrace{\left(x_i + \frac{\beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n}{\alpha_i} \right)}_{\text{заменяем на } y_i} - \underbrace{\frac{(\beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n)^2}{\alpha_i}}_{\text{уже без } x_i}$$

То есть x_i полностью ушла под квадрат.

2. Метод Якоби. (может быть пройдём на семинаре)

3. Симметичный Гаусс. (может быть пройдём на семинаре)

4. Метод приведения к главным осям (только для канонического). (может быть пройдём на семинаре)

Теорема. Закон инерции квадратичной формы

Для любых двух канонических видов одной квадратичной формы. $q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_k x_k^2,\ \lambda_i \neq 0,\ i = \overline{1,\ k}$
$q(y) = \mu_1 y_1^2 + \dots + \mu_m y_m^2,\ \mu_j \neq 0,\ j = \overline{1,\ m}$
где $x,\ y \in V$
То есть это запись одной и той же квадратичной формы в разных базисах.

1. $k = m = \operatorname{Rg} A \leftarrow$ равно рангу квадратичной формы. При этом $k = m$ может быть меньше размерности V, то есть $k = m \leqslant n = \dim V$

2. Количество положительных λ_i совпадает с количество положительных μ_j. Это называется положительный индекс инерции квадратичной формы.

Обозначение: i_+

3. Количество отрицательных λ_i совпадает с количеством отрицательрных μ_i и называется отрицательным индексом инерции.

Обозначение: i_-

Определение: Сигнатурой квадратичной формы называют два числа $(i_+,\ i_-)$.

Замечание: Если у двух квадратичных форм совпадают сигнатуры, то существует невырожденная линейное преобразование (=замена координат, =замена базиса), которое одну квадратичную форму переводит в другую. Сначала обе в нормальный вид, он совпадает, так как одинаковое количество $+1$ и -1, и для одной преобразование в обратную сторону.

Замечание: Если у двух квадратичных форм разные сигнатуры $(i_+,\ i_-)$, то одну нельзя перевести в другую невырожденным линейным преобразованием. То есть квадратичные формы разные.

Замечание: $\operatorname{Rg} A = i_+ + i_-$. Иногда вводят величину $S = i_+ - i_-$. Знание $\operatorname{Rg} A$ и S эквивалентно знанию i_+ и i_-, и поэтому число S иногда называют сигнатурой.

Линейные отображения и линейные операторы

Пусть V_1 и V_2 - два линейных пространства над полем F

Определение: Отображение $\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$ называется линейным, если

1. $\forall x,\ y \in V_1,\ \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$
2. $\forall x \in V_1,\ \forall \alpha \in F\ \varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x)$

Замечание: эти два условия равносильны $\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y)$

Замечание: Линейное отображение это гомоморфизм линейных пространств, и есть обозначение $\varphi \in \operatorname{Hom}(V_1,\ V_2)$

Определение: Если $V_1 = V_2 = V$ (пространства совпадают), то линейное отображение φ называется линейным оператором (л. о.)

Пусть $e_1, \dots,\ e_n$ - базис в V_1, $\dim V_1 = n$
$f_1, \dots,\ f_m$ - базис в V_2, $\dim V_2 = m$
Рассмотрим векторы $\varphi(e_1), \dots,\ \varphi(e_n) \in V_2$ (образы базисных векторов первого пространства под действием φ), и разложим их по базису второго пространства $f_1, \dots,\ f_m$:

$$\begin{cases} \varphi(e_1) = a_{1\,1}f_1 + a_{2\,1}f_2 + \dots + a_{m\,1}f_m \\ \vdots \\ \varphi(e_n) = a_{1\,n}f_1 + a_{2\,n}f_2 + \dots + a_{m\,n}f_m \end{cases}$$

Определение: <u>Матрица линейного отображения</u> в паре базисов $(e_1, \dots, e_n)$ и $(f_1, \dots, f_m)$ это матрица:

$$[\varphi]_{e\,f} = A_{e\,f} = \left.\underbrace{\begin{pmatrix} a_{1\,1} & \dots & a_{1\,n} \\ a_{2\,1} & \dots & a_{2\,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m\,1} & \dots & a_{m\,n} \end{pmatrix}_{m\times n}}_{\dim V_1}\right\} \dim V_2$$

По столбцам стоят координаты образов векторов первого базиса при разложении по второму базису.

Определение: Пусть $\varphi : V_1 \longrightarrow V$ - линейный оператор и $e_1, \dots, e_n$ - базис.

Пусть $\begin{cases} \varphi(e_1) = a_{1\,1}e_1 + a_{2\,1}e_2 + \dots + a_{n\,1}e_n \\ \vdots \\ \varphi(e_n) = a_{1\,n}e_1 + a_{2\,n}e_2 + \dots + a_{n\,n}e_n \end{cases}$

То есть образы базисных векторов под дейсвтием φ разложим по тому же базису.

Тогда:

$$A_e = \begin{pmatrix} a_{1\,1} & \dots & a_{1\,n} \\ a_{2\,1} & \dots & a_{2\,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n\,1} & \dots & a_{n\,n} \end{pmatrix}$$

Называется <u>матрицей линейного оператора</u>

Пример: $\varphi(x) = \text{Пр}_L\, x$, где $L = \mathcal{L}(\bar{i})$ в V_3, где $\bar{i}$ - ось абсцисс.

Рассмотрим стандартный базис $\{\bar{i},\ \bar{j},\ \bar{k}\}$ в V_3.

$$\begin{cases} \varphi(i) = i = 1\cdot i + 0\cdot j + 0\cdot k \\ \varphi(j) = 0 \\ \varphi(k) = 0 \end{cases} \Rightarrow A_{\{i,\ j,\ k\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Теорема: (о том, что действие линейного оператора полностью определяется его матрицей)

Пусть φ - линейный оператор в пространстве V

$e = (e_1, \dots,\ e_n)$ - базис в $V,\ x \in V$ - вектор.

$x^e = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ - столбец координат вектора x в базисе e, то есть $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

Пусть A_e - матрица линейного оператора φ в базисе e, тогда:

$$\big(\varphi(x)\big)^e = A_e \cdot x^e,\ \text{(матричное произведение)}$$

Доказательство: $\varphi(x) = \varphi(x_1 e_1 + \dots + x_1 e_1) \overset{\text{по линейности}}{=} x_1\varphi(e_1) + \dots + x_n\varphi(e_n) \overset{\text{определение}}{=}$ $\overset{\text{матрицы л.о.}}{=} x_1(a_{1\,1}e_1 + a_{2\,1}e_2 + \dots + a_{n\,1}e_n) + \dots + x_1(a_{1\,n}e_1 + a_{2\,1}e_2 + \dots + a_{n\,n}e_n) = (a_{1\,1}x_1 + a_{1\,2}x_2 + \dots + a_{1\,n}x_n)e_1 + \dots + (a_{n\,1}x_1 + a_{n\,2}x_2 + \dots + a_{n\,n}x_n)e_n$ - получили разложение $\varphi(x)$ по базису e

$\Rightarrow \big(\varphi(x)\big)^e = \begin{pmatrix} a_{1\,1}x_1 + a_{1\,2}x_2 + \dots a_{1\,n}x_n \\ \vdots\ \vdots\ \vdots \\ a_{n\,1}x_1 + a_{n\,2}x_2 + \dots + a_{n\,n}x_n \end{pmatrix}$

Но это результат умножения A_e на $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x^e$, то есть $\big(\varphi(x)\big)^e = A_e \cdot x^e$, ч.т.д.

Замечание: Для линейных отображений аналогично

$$\big(\varphi(x)\big)^f = A_{e\,f} x^e$$

Замечание: При фиксированном базисе есть биекция между линейными операторами (линейными отображениями) и матрицами $n \times n,\ (m \times n)$.

Лекция 17 апреля.

Линейные операторы

(Напоминание) Пусть $\varphi : V \longrightarrow V$ - линейный оператор в пространстве V, фиксируем базис $e = \{e_1, \dots,\ e_n\}$ в V.

Тогда $\exists!$ матрица линейного оператора A_e в базисе e, что

$$\forall x \in V\ \big(\varphi(x)\big)^e_{n\times 1} = \underset{n\times n}{A_e} \cdot x^e_{n\times 1}$$

Для линейного отображения $\phi : V_1 \longrightarrow V_2$ в фиксированной паре базисов $e,\ f$

$$\big(\phi(x)\big)^f_{m\times 1} = \underset{m\times n}{A_{e\,f}} \cdot x^e_{n\times 1}$$

Утверждение: Пусть A - матрица линейного оператора φ в базисе e.
A' - матрица линейного оператора φ в базисе e'
Пусть T - матрица перехода в V от базисе e к базису e'.
Тогда $A' = T^{-1} \cdot A \cdot T$

Доказательство: По доказанному:

$$y = A \cdot x,\ y = \big(\varphi(x)\big)^e \tag{1}$$

$$y' = A' \cdot x',\ y' = \big(\varphi(x)\big)^{e'} \tag{2}$$

$y = T \cdot y'$ (так как $y' = T^{-1}y$) и $x = Tx'$ - формула зименения координат вектора при замене базиса.

Подставляем в (1): $T \cdot y' = A \cdot T \cdot x'$, но T - невырожденная матрица (так как она является матрицей перехода), домножим слева на $T^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow y' = \underbrace{T^{-1} \cdot A \cdot T}_{A'} \cdot x'$, сравним с (2) $\Rightarrow A' = T^{-1} \cdot A \cdot T$, так как матрица линейного оператора в заданном базисе единственная.

Утверждение: Пусть φ - линейное отображение линейного пространства V_1 ($\dim V_1 = n$) в линейное пространство V_2, ($\dim V_2 = m$).
Пусть $A_{\varepsilon_1\,\varepsilon_2}$ - матрица линейного отображения в паре базисов ε_1 в пространстве V_1 и ε_2 в пространстве V_2.
Тогда, если T_1 - Это матрица перехода в V_1 от базиса ε_1 к базису ε_1'.
T_2 - матрица перехода в V_2 от ε_2 к ε_2'.
Тогда имеет место следующее равенство:

$$\underset{m\times n}{A_{\varepsilon_1'\,\varepsilon_2'}} = \underset{m\times m}{T_2^{-1}} \cdot \underset{m\times n}{A_{\varepsilon_1\varepsilon_2}} \cdot \underset{n\times n}{T_1}$$

Доказательство: Пусть y - образ x под действием φ $\big($то есть $y = \varphi(x)\big)$, тогда:
(1) $\quad y^{\varepsilon_2} = A_{\varepsilon_1\,\varepsilon_2} \cdot x^{\varepsilon_1} \leftarrow$ в старом базисе
(2) $\quad y_{\varepsilon_2'} = A_{\varepsilon_1'\varepsilon_2'} \cdot x^{\varepsilon_1'} \leftarrow$ в новом базисе

$$\left.\begin{aligned} x^{\varepsilon_1} &= T_1 \cdot x^{\varepsilon_1'} \\ y^{\varepsilon_2} &= T_2 \cdot y^{\varepsilon_2'} \end{aligned}\right. \leftarrow \text{формула изменения координат вектора}$$

Подставим в (1), получим:
$T_2 y^{\varepsilon_2'} = A_{\varepsilon_1\,\varepsilon_2} T_1 x^{\varepsilon_1'}$. Домножим на T_2^{-1} слева, так как T_2 - невырожденная$\Rightarrow$

$\Rightarrow y^{\varepsilon_2'} = \underbrace{T_2^{-1} A_{\varepsilon_1\,\varepsilon_2} T_1}_{A_{\varepsilon_1'}\,A_{\varepsilon_2'}} x^{\varepsilon_1'}$, сравнивая с (2) $\Rightarrow$

$\Rightarrow A_{\varepsilon_1'\,\varepsilon_2'} = T_2^{-1} \cdot A_{\varepsilon_1\,\varepsilon_2} T_1$

Определение: Квадратные матрицы A и B называются подобными, если существует невырожденная матрица C:

$$B = C^{-1} A C \quad (\det C \neq 0)$$

Замечание: Матрицы линейных операторов в разных базисах подобнымежду собой.

Утверждение: Определители подобных матриц равны.

Доказательство: Пусть A и B подобны, то есть $B = C^{-1}AC \Rightarrow$

$$\det B = \det\left(C^{-1}AC\right) = \det C^{-1} \det A \det C = \frac{\det C}{\det C} \det A = \det A$$

Замечание: Это означает, что $\det A$ - определитель матрицы линейного оператора не зависит от выбора базиса, то есть является инвариантом замены координат (и $\operatorname{Rg} A$ - тоже инвариант)

Определение: Ядром линейного отображения $\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$назыается множество:

$$\ker \varphi = \left\{ x \in V_1 \middle|\, \varphi(x) = 0 \right\} = \varphi^{-1}(0) \subseteq V_1$$

Образом линейного отображения φ называется множество

$$\operatorname{Im} \varphi = \left\{ x \in V_2 \;\middle|\; \exists y \in V_1 : \;\varphi(y) = x \right\} = \varphi(V_1) \subseteq V_2$$

Замечание: $\ker \varphi$ и $\operatorname{Im} \varphi$ являются линейными подпространствами в V_1 и V_2 соответственно (проверить замкнутость по оперицаям).

Утверждение: Пусть $\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$ - линейное отображение.
Тогда $\dim \ker \varphi + \dim \operatorname{Im} \varphi = n = \dim V_1$

Доказательство: Зафиксируем базис $e = \{e_1, \dots,\ e_n\}$ в V_1
$\forall x \in V_1$ можно представить в виде $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$
$\varphi(x) = x_1\varphi(e_1) + \dots + x_n\varphi(e_n)$, но $\varphi(e_1), \dots,\ \varphi(e_n)$ - столбцы матрицы линейного отображения (если фиксировать базис и в V_2).
$\operatorname{Im}\varphi = \mathcal{L}\big(\varphi(e_1), \dots,\ \varphi(e_2)\big)$ (линейная оболочка). $\Rightarrow$
$\Rightarrow \dim\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Rg} A$ - ранг матрицы линейного отображения.
Ядро φ описывается однородной СЛАУ $Ax = 0$, размерность пространства её решений (то есть число векторов ФСР) равна $k = n - \operatorname{Rg} A$, где
k - размерность ядра,
n - размерность образа.
Итак, $\dim\ker\varphi + \dim\operatorname{Im}\varphi = n$, где $n = \dim V_1$.

Замечание: Если $\varphi :\ V \longrightarrow V$ - линейный оператор (то есть $\ker\varphi,\ \operatorname{Im}\varphi \subseteq V$), то вообще говоря,
$V \neq \ker\varphi + \operatorname{Im}\varphi$, хотя и $\dim\ker\varphi + \dim\operatorname{Im}\varphi = \dim V$

Пример: Рассмотрим линейное пространство $\mathbb{R}_n[x]$ - пространство многочленов от x, $\deg f \leqslant n$ с вещественными коэффициентами и оператор
$\mathcal{D} : f \mapsto f' \leftarrow$ производная, $\mathcal{D} :\ \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$
$\dim\mathbb{R}_n[x] = n + 1$, так как $\mathbb{R}_n[x] = \mathcal{L}\{1,\ x,\ x^2, \dots,\ x^n\}$
$\operatorname{Im}\mathcal{D} = \mathbb{R}_{n-1}[x],\ \dim\operatorname{Im}\mathcal{D} = n$
$\ker\mathcal{D} = \mathcal{L}(1)$ - константы, $\dim\ker\mathcal{D} = 1$,
но $\ker\mathcal{D} \subseteq \operatorname{Im}\mathcal{D}$, но
$\dim\ker\mathcal{D} + \dim\operatorname{Im}\mathcal{D} = n + 1 = \dim\mathbb{R}_n[x]$

Действия с линейными операторами и их матрицами

Пусть A и B - линейные операторы на линейном пространстве V над полем F, тогда

Определение: $(A + B)\,(x) = A(x) + B(x)$
$(\lambda A)\,(x) = \lambda A(x)$ - умножение на число $\lambda \in F$
$(A \cdot B)\,(x) = A\big(B(x)\big)$ - умножение линейного оператора (композиция)

Замечание: $A{+}B,\ \lambda{\cdot}A,\ A{\cdot}B$ - снова линейные операторы (провека по определению)

Утверждение: Пусть фиксирован базис $e = \{e_1, \dots,\ e_n\}$. Тогда:

$$\begin{cases} (1)\ \big(A + B\big)_e = A_e + B_e \\ (2)\ \big(\lambda A\big)_e = \lambda A_e \\ (3)\ \big(A \cdot B\big)_e = A_e \cdot B_e \end{cases}$$

Доказательство (3): $\Big((A\cdot B)(x)\Big)^e = A_e \cdot \big(B(x)\big)^e = A_e \cdot B_e x^e = (AB)_e x^e \Rightarrow$
$\Rightarrow (AB)_e = A_e B_e$, так как матрица линейных операторов в фиксированном базисе единственна.

Собственные векторы и собственные числа

Определение: Число λ называется <u>собственным числом</u> (или <u>собственным значением</u>, то есть <u>с. з.</u>) линейного оператора $\varphi : V \longrightarrow V$, где V - линейное прострасртво, если $\exists$ вектор $x \in V,\ x \neq 0$, такой что $\varphi(x) = \lambda \cdot x$. При этом x называется <u>собственным вектором</u> (<u>с. в.</u>), отвечающим собственному значению λ.

Замечание: Если x - собственный вектор, отвечающих собственному значению λ, то $\forall \alpha \in F,\ \alpha \neq 0,\ \alpha x$ - тоже собственный вектор, отвечающий собственному значению λ $\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x) = \alpha\lambda x = \lambda(\alpha x) \Rightarrow \alpha x$ - собственный вектор.

Замечание: Дригими словами, собственный вектор - ненулевой вектор, остающийся коллинеарным (либо равным 0) самому себе под действием линейного оператора φ

Пример 1: Пусть $\text{Пр}_{Ox} : V_2 \longrightarrow V_1$ ($V_2 \cong \mathbb{R}^2$) - линейный оператор проекции на Ox в плоскости V_2. Все векторы $\in Ox$, отличные от 0 - собственные векторы.
Например, $\vec{i} = (1,\ 0)$
$\varphi(\vec{i}) = i$ - собтсвенный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda_1 = 1$
$\varphi(\vec{j}) = 0 \Rightarrow j$ - собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda_2 = 0$
В базисе $\{i,\ j\}$ - базис из собственных векторов. Матрица линейного оператора $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ - диагональная матрица.
$V_2 = Ox \oplus Oy$
Бывает, что нет собственных значений и собственных векторов для линейного оператора

Лекция 24 апреля

Задача:

Есть 10000 человек.
Каждый день 15% здоровых заболевают и 10% больных выздоравливают (можно болеть повторно).
В первый день заболело 100 человек.
A - линейный оператор ежедневной динамики.
$\lim\limits_{n\to\infty} = A^n(x_0),\ x_0 = \begin{pmatrix} 9900 \\ 100 \end{pmatrix}$
A^n–?

Определение:

Для произвольной квадратной матрицы A определитель

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$$

Называется <u>характеристическим многочленом</u> матрицы A, а уравнение $\chi_A(\lambda)$ - многочлен степени n

Пример:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ \chi_A(\lambda) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2)$

Утверждение:

Характеристические уравнения подобных матриц совпадают.

Доказательство:

A и A' подобны, если существует $T,\ \det T \neq 0:\ A' = A' = T^{-1}AT$

$$\chi_{A'}(\lambda) = \det(A' - \lambda' E) = \det(T^{-1}AT - \lambda T^{-1}ET) = \det\left(T^{-1}(A - \lambda E)T\right) =$$

$$= \det T^{-1} \det(A - \lambda E) \det T = \det(A - \lambda E) = \chi_A$$

Следствие:

Характеристические многочлены для матриц линейных операторов в разных базисах совпадают (сами матрицы могут различаться).

То есть корректно говорить о характеристическом многочлене для линейного оператора (то есть он инвариантен при замене базиса).

Определение:

Множество всех собственных значений линейного оператора называют спектром линейного оператора.

Теорема:

λ - собственное значение линейного оператора $\Leftrightarrow$ λ - корень характеристического уравнения линейного оператора (над алгебраически замкнутым полем (например $\mathbb{C}$) или в случае, когда корни характеристического уравнения лежат в том же поле, над которым рассматривается линейный оператор).

Доказательство:

Необходимость :

Дано: λ - собственное значение линейного оператора A

Доказать: λ - корень $\chi_A(\lambda) = 0$

По определению $\exists x \neq 0$ $A(x) = \lambda \cdot x$, то есть $A(x) = \lambda \cdot I(x)$, где $I(x)$ - тождественный линейный оператор.

$$(A - \lambda I)(x) = 0 \quad (*)$$

Запишем равенство $(*)$ в некотором базисе e:

$$(A_e - \lambda E) \cdot x^e = 0$$

Это однородное СЛАУ с ненулевым решением, то есть по критерию существования ненулевых решений $\det(A_e - \lambda E) = 0$, а это и есть $\chi_A(\lambda) = 0$

Достаточность :

Дано: λ - корень $\chi_A(\lambda) = 0$

Доказать: λ - собственное значение линейного оператора A

Если λ - корень, то в заданном базисе e выполнено равенство

$$\det(A_e - \lambda E) = 0$$

То есть однородное СЛАУ $(A_e - \lambda E)x^e = 0$ имеет ненулевое решение (по тому же критерию) и соответственно выполняется $(*)$

$$(A - \lambda I)(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = \lambda x \quad (x \neq 0)$$

То есть x - собственный вектор, отвечающий собственному значению λ, ч.т.д.

Пример:

$$\chi_A = (\lambda) = \lambda(\lambda - 2) \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 2\end{array}\right. \text{ - спектр линейного оператора } A$$

Определение:

Алгебраической кратностью собственного значения λ называется его кратность как корня характеристического уравнения.

Обозначение:

m_i - алгебраическая кратность собственного значения λ_i

Пример:

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - 5)^3(\lambda - 2)^2$$

Тогда будет верно:

$$\begin{cases}\lambda_1 = 5 \leftarrow m_1 = 3 \\ \lambda_2 = 2 \leftarrow m_2 = 2\end{cases}$$

Определение:

Пусть $A : V \to V$ - линейный оператор λ - собственное значение линейного оператора A. Тогда множество

$$V_\lambda = \{x \in V \mid Ax = \lambda x\}$$

называется собственным подпространством отвечающим собственному значению λ.

Замечание:

V_λ является линейным подпространством в V (состоящим из собственных векторов, отвечающих собственным значениям λ, и нулевого вектора).

Доказательство:

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow (A - \lambda E) \cdot x = 0$$

То есть $V_\lambda = \ker(A - \lambda I)$ линейный оператор с матрицей $(A - \lambda E)$

$\ker B$ любого линейного оператора B является подпространством в V (проверить замкнутость).

Определение:

Размерность собственного подпространства V_λ называется <u>геометрической кратностью</u> собственного значения λ

Обозначение:

s_i - геометрическая кратность собственного значения λ

Замечание:

Геометрическая кратность собственного значения λ всегда $\geqslant 1$ ($s_i \geqslant 1$).

Теорема: без доказательства

Геометрическая кратность собственного значения λ всегда $\leqslant$ его алгебраической кратности ($s_i \leqslant m_i$)

Определение:

<u>Следом матрицы</u> $A \in M_n(F)$ называется сумма е диагональных элементов

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{i\,i}$$

Утверждение:

$\forall A,\ B \in M_n(F) \quad \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$

Утверждение:

Пусть A - линейный оператор в базисе e. Тогда $\operatorname{tr} A_e$ не зависит от выбора базиса.

Доказательство:

$A_{e'} = T^{-1} A_e T$, где $A_{e'}$ - матрица линейного оператора A в базисе e'. Тогда $\operatorname{tr} A_{e'} = \operatorname{tr}\big((T^{-1}A_e)T\big) = \operatorname{tr}\big(T(T^{-1}A_e)\big) = \operatorname{tr} A_e$.

Итого:

$\operatorname{Rg} A,\ \det A,\ \operatorname{tr} A,\ \chi_A(\lambda)$ - инварианты линейного оператора при замене базиса.

Замечание:

$A \in M_n(\mathbb{R}),\ \chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = (-1)^n\lambda^n \neq (-1)^{n-1} \operatorname{tr} A\lambda^{n-1} + \dots$
$\dots + \det A$

<u>Критерий диагональности линейного оператора</u>

Утверждение:

Пусть $\lambda_1, \dots,\ \lambda_k$ - собственные значения линейного оператора и пусть $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$.
Пусть $v_1, \dots,\ v_k$ - соответствующие собственные векторы
Тогда $v_1, \dots,\ v_k$ - линейно независимы.
То есть собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям являются линейно независимыми.

Доказательство:

Применим принцип математической индукции.
При $k = 1$ - утверждение верно, так как собственный вектор по определению $\neq 0$ и соответсвенно образует линейно независимую систему.
Пусть утверждение верно при $k = m$.
Добавим ещё 1 собтвенный вектор v_{m+1}, отвечающий собственному значению λ_{m+1}. Докажем, что система собственных векторов $v_1, \dots,\ v_{m+1}$ останется линейно независимой.
Рассмотрим равенство:

$$1.\ \alpha_1 v_1 + \dots \alpha_m v_m + \alpha_{m+1} v_{m+1} = 0$$

Применим к 1. линейный оператор A, тогда по линейности:

$$\alpha_1 A(v_1) + \dots + \alpha_m A(v_m) + \alpha_{m+1} A(v_{m+1}) = 0$$

Вспомним, что v_i - собственный вектор для собственного значения λ_i

$$2.\ \alpha_1\lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_m\lambda_m v_m + \alpha_{m+1}\lambda_{m+1} v_{m+1}$$

Умножим 1. на λ_{m+1} и вычтем из 2.

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{m+1})v_1 + \dots + \alpha_m(\lambda_m - \lambda_{m+1})v_m = 0$$

По предположению индукции $v_1, \dots,\ v_m$ - линейно независимы:

$$\begin{cases} \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{m+1}) = 0 \\ \dots \\ \alpha_m(\lambda_m - \lambda_{m+1}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \dots \\ \alpha_m = 0 \end{cases}$$

Теперь 1. можно записать в виде:

$$0 + \alpha_{m+1}v_{m+1} = 0$$

Но $v_{m+1} \neq 0$ (собственный вектор), значит $\alpha_{m+1} = 0 \Rightarrow$ по определению система $v_1, \dots,\ v_{m+1}$ является линейно независимой.

Утверждение: Критерий диагональности матрицы линейного оператора A

Матрица линейного оператора A является диагональной в данном базисе $\Leftrightarrow$ все векторы этого базиса являются собственными векторами для линейного оператора A.

Доказательство:

Необходимость :

Дано: A_e - диагональная матрица

Доказать: e состоит из собственных векторов по A

По определению матрицы линейного оператора в j-м столбце стоят координаты вектора $A(e_j)$ в базисе $e_1, \dots,\ e_n$
Если A_e - диагональна, то j-й столбей имеет вид $(0, \dots,\ 0,\ \lambda_j,\ 0, \dots,\ 0) \Rightarrow$

$\Rightarrow A(e_j) = 0 + \dots + 0 + \lambda_j e_j + 0 + \dots + 0$, то есть $A(e_j) = \lambda_j e_j,\ e_j \neq 0 \Rightarrow$ по определению e_j - собственный вектор, отвечающий собственному значению λ_j (на диагонали матрицы A_e - собственное значение).

Достаточность :

Дано: e состоит из собственных векторов по A

Доказать: A_e - диагональная матрица

$A(e_j) = \lambda_j e_j$,
$\forall j = \overline{1,\ n} \Rightarrow$ по определению матрицы линейного оператора, все элементы кроме диагональных равны нулю в каждом столбце (на диагонали собственные значения λ_i), ч.т.д.

Определение:

Линейный оператор, для которого в линейном пространстве V существует базис из собственных векторов, называется диагонализируемым.

Теорема: Критерий диагонализируемости линейного оператора.

(Без доказательства) Линейный оператор диагонализируем $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ для любых его собственных значений λ_i алгебраическая кратность равна геометрической кратности $(m_i = s_i)$

Теорема:

Если характеристическое уравнение линейного оператора, действующего в пространстве V, где $\dim V = n$ имеет ровно n попарно различных корней, то оператор диагонилизируеем (корни лежат в поле, над которым рассматривается линейное пространство V)

Доказательство:

Если собственное значение $\lambda_i \in F$, то ему можно сопоставить хотя бы один собственный вектор v_i. Система $v_1, \ldots,\ v_n$ - линейно независимы, так как по условию $\lambda_i \neq \lambda_j$, при $i \neq j$ (доказали ранее), их число равно $\dim V \Rightarrow$ они образуют базис в V из собственных векторов $\Rightarrow$ линейный оператор диагонализируем