Семинары по алгебре 4 модуль.

Андрей Тищенко

Семинар 4 апреля

Номер 1. $a_1 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\end{pmatrix},\ a_3 = \begin{pmatrix}1 & 3 & 3\end{pmatrix}, L_1 = \langle a_1,\ a_2,\ a_3\rangle$
$b_1 = \begin{pmatrix}2 & 3 & -1\end{pmatrix},\ b_2 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 2\end{pmatrix},\ b_3 = \begin{pmatrix}1 & 1 & -3\end{pmatrix},\ L_2 = \langle b_1,\ b_2,\ b_3\rangle$
Найти размерности и какие-нибудь базисы $L_1 + L_2$ и $L_1 \cap L_2$.

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 3 & 3\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 4\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\ \dim L_1 = 2$$

$$B = \begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & 1 & -3\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}0 & 1 & 5\\ 0 & 1 & 5\\ 1 & 1 & -3\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & -3\\ 0 & 1 & 5\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\ \dim L_2 = 2$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & -3\\ 0 & 1 & 5\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \dim(L_1 + L_2) = 3 \Rightarrow$$

$\dim(L_1 \cap L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 + L_2) = 1$

Так как L_1 базис, через него выражается любой вектор, в том числе $\vec{X} = (x_1,\ x_2,\ x_3)$

Значит $\mathrm{Rg}\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$

Аналогично для L_2:

$\mathrm{Rg}\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ 1 & 1 & -3\\ 0 & 1 & 5\end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ 1 & 1 & -3\\ 0 & 1 & 5\end{vmatrix} = 8x_1 - 5x_2 + x_3 = 0$

$L_1 \cap L_2 : \begin{cases}3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\\ 8x_1 - 5x_2 + x_3 = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1 = 3x_2\\ x_2 = 5x_3\end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix}3\\ 5\\ 1\end{pmatrix}$ - пример базиса объединения.

Номер 2. Доказать, что $\mathbb{R}^4$ является прямой суммой $L_1 = \langle a_1,\ a_2\rangle,\ L_2 = \langle b_1,\ b_2\rangle$ и разложить вектор $x = \begin{pmatrix}2 & -2 & 3 & -3\end{pmatrix}^T$ в сумму проекций на эти подпространства, где:
$a_1 = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$
$b_1 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix},\ b_2 = \begin{pmatrix}0 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$
$\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2)$
$\dim L_1 = \dim L_2 = 2$, так как есть БМ порядка 2.

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$\dim(L_1 + L_2) = 4 \Rightarrow \dim(L_1 \cap L_2) = 0 \Rightarrow L_1 + L_2$

$$x = x_1 + x_2 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}2\\ -2\\ 3\\ -3\end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\\ 1\end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\\ 0\end{pmatrix} + \beta_1 \begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\\ 1\end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & -1 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 0 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3\\ 1 & 0 & 1 & 1 & -3\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{c|c} & 1\\ E & 1\\ & 0\\ & -2\end{array}\right)$$

$$x_1 = a_1 + a_2 = \begin{pmatrix}2\\ 0\\ 1\\ 1\end{pmatrix} \in L_1 \quad x_2 = \begin{pmatrix}0\\ 2\\ 2\\ -2\end{pmatrix} = -2b_2$$

$x = x_1 + x_2$ - ответ.

Номер 3. Доказать, что $M_n(\mathbb{R})$ есть прямая сумма подпространства всех симметрических матриц и L_2 всех кососимметрических матриц $(A^T = A)$

Утверждение: Сумма $L_1 + L_2$ прямая $\Leftrightarrow \forall x \in L_1 + L_2\ \exists!$ разложение $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in L_1,\ x_2 \in L_2$

Решение: Пусть $A = S+K$, где S - симметрическая матрица, K - кососимметрическая

$A^T = S^T + K^T = S - K \Rightarrow \begin{cases} S = \dfrac{A + A^T}{2} \\ K == \dfrac{A - A^T}{2} \end{cases}$ - единственное разложение

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Билинейные формы

Определение: в $V \times V \longrightarrow R$ называется билинейной формой, если

$\begin{cases} b(\alpha x + \beta y,\ z) = \alpha b(x,\ z) + \beta b(y,\ z) \\ b(x,\ \alpha y + \beta z) = \alpha b(x,\ y) + \beta b(x,\ z) \end{cases}$, то есть линейность по каждому аргументу.

$b(x,\ y) = x_e^T B_e y_e$, переход к другому базису $(e \to e')$

$B' = C^T B C$

Номер 4. Я решал у доски, скиньте пж запись.

Номер 5. Найти $f(x,\ y)$, если $F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ - матрица билинейной формы

f, $x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}^T,\ y = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}^T$

$$f(x,\ y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = -43$$

Номер 6. Найти матрицу билинейной формы в базисе e', если

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 - e_2 \\ e'_2 = e_1 + e_3 \\ e'_3 = e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$$

$$B_e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_{e'} = C^T B_e C = \begin{pmatrix} 0 & -6 & -9 \\ -2 & 20 & 30 \\ -3 & 30 & 45 \end{pmatrix} \text{ - ответ.}$$

Номер 7. $q(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3 - x_3^2$ - квадратичная форма

Построить ассоциированую (или полярную) симметричную билинейную форму

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} = B \Rightarrow$$

$\Rightarrow b(x,\ y) = x_1y_1 + x_1y_2 - 3x_1y_3 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + 2x_2y_3 - 3x_3y_1 + 2x_3y_2 -$
$- x_3y_3$ - ответ

$b(x,\ y) = \frac{1}{2}\big[q(x+y) - q(x) - q(y)\big]$

Пример: $q(x) = x_1x_2 + x_1x_3$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$q(x) = x^T A x,\ A' = C^T A C$

Критерий Сильвестра

Исследовать на положительную и отрицательную определённость при различных $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda & 3 \\ \lambda & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \Delta_1 = 2 > 0 \\ \Delta_2 = 4 - \lambda^2 = (2-\lambda)(2+\lambda) \\ \Delta_3 = \lambda^2 + 6\lambda - 16 < 0 \end{cases}$$

Ответ: не является положительно определённой и не является отрицательно определённой.