Математическая статистика.

Андрей Тищенко @AndrewTGk

2024/2025

Семинар 10 января

Задача 1

$x_1, \ldots, x_n \sim F_\xi(x)$, найти функцию распределения для $X_{(n)},\ X_{(1)}$
$F_{X_{(n)}}(x) = P(X_{(n)} \leqslant x) = P(X_{(1)} \leqslant x, \ldots,\ X_{(n)} \leqslant x) = P(X_1 \leqslant x, \ldots,\ X_n \leqslant x) =$
$= P(X_1 \leqslant x) \ldots P(X_n \leqslant x) = (F_\xi(x))^n$
$F_{X_{(1)}}(x) = P(X_{(1)} \leqslant x) = 1 - P(X_{(1)} > x) = 1 - P(X_{(1)} > x, \ldots,\ X_{(n)} > x) =$
$= 1 - P(X_1 > x, \ldots,\ X_n > x) = 1 - P(X_1 > x) \ldots P(X_n > x) = 1 - \big(1 - F_\xi(x)\big)^n$

Задача 2

$x_1, \ldots, x_n \sim R(0,\ 1)$. Найти $EX_{(n)},\ EX_{(1)}$.
$F_{X_{(n)}}(x) = \big(F_\xi(x)\big)^n$
$f_{X_{(n)}}(x) = \big(F_{X_{(n)}}(x)\big)' = n\big(F_\xi(x)\big)^{n-1} \cdot f_\xi(x)$
$F_\xi(x) = \begin{cases} 0,\ x < 0 \\ x,\ x \in [0,\ 1] \\ 1,\ x > 1 \end{cases}$
Подставим в предыдущее уравнение:

$$f_{X_{(n)}} = \begin{cases} 0,\ x < 0 \\ nx^{n-1},\ x \in [0,\ 1] \\ 0,\ x > 1 \end{cases}$$

$EX_{(n)} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_{X_{(n)}}(x)\,dx = \int\limits_0^1 xnx^{n-1}\,dx = n\int\limits_0^1 x^n\,dx = \dfrac{n}{n+1}$
Посчитаем для $X_{(1)}$:
$F_{X_{(1)}}(x) = 1 - (1 - F_\xi(x))^n$
$f_{X_{(1)}}(x) = \big(F_{X_{(1)}}(x)\big)' = n(1 - F_\xi(x))^{n-1}\big(F_\xi(x)\big)' = n(1 - F_\xi(x))^{n-1} f_\xi(x) = \begin{cases} 0,\ x < 0 \\ n(1-x)^{n-1},\ 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0,\ x > 1 \end{cases}$
$EX_{(1)} = \int\limits_0^1 xn(1-x)^{n-1}\,dx = n\int\limits_0^1 x(1-x)^{n-1}\,dx = \left\langle \begin{matrix} t = 1 - x \\ x = 1 - t \end{matrix} \right\rangle = -n\int\limits_1^0 (1-t)t^{n-1}\,dt = n\int\limits_0^1 (1-t)t^{n-1}\,dt =$
$= n\int\limits_0^1 t^{n-1}\,dt - n\int\limits_0^1 t^n\,dt = 1 - \dfrac{n}{n+1}$

Задача 3

$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$
$E\overline{x} = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E(x_i) = Ex_i$

$\mathcal{D}(\overline{x}) = \mathcal{D}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \mathcal{D}x_i = \frac{\mathcal{D}x_i}{n}$
Посчитаем выборочную дисперсию:

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

$ES^2 = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E(x_i - \overline{x})^2 = \mathcal{D}(x_1 - \overline{x}) = \mathcal{D}(x_1) + \mathcal{D}(\overline{x}) - 2\operatorname{cov}(x_1,\ \overline{x}) = \frac{(n+1)\mathcal{D}(x_1)}{n} -$
$- 2\operatorname{cov}(x_1,\ \overline{x})$
$\operatorname{cov}(x_1,\ \overline{x}) = \operatorname{cov}(x_1,\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i) = \frac{1}{n}\operatorname{cov}(x_1,\ \sum_{i=1}^n x_i) = \frac{1}{n}\operatorname{cov}(x_1,\ x_1) = \frac{\mathcal{D}(x_1)}{n}$
Тогда

$$ES^2 = \frac{(n+1)\mathcal{D}(x_1)}{n} - \frac{2\mathcal{D}(x_1)}{n} = \mathcal{D}(x_1)\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

Несмещённая выборачная дисперсия (её математическое ожидание равняется дисперсии x_1):

$$\tilde{S}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

Посчитаем дисперсию S^2:

$$\mathcal{D}\left(x_1 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \mathcal{D}\left(\frac{(n-1)x_1}{n}\right) + \mathcal{D}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n} x_i\right) = \frac{(n-1)^2}{n^2}\mathcal{D}(x_1) + \frac{n-1}{n^2}\mathcal{D}(x_1) =$$

$$= \mathcal{D}(x_1)\left(\frac{(n-1)(n-1+1)}{n^2}\right) = \mathcal{D}(x_1)\frac{n-1}{n}$$

Семинар 17 января.

$T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i - m|,\ x_i \sim N(m, \theta^2)$

$$ET(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E|x_i - m| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\ E|x_1 - m| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|x - m|\frac{1}{\sqrt{2\pi}\theta}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\theta^2}}dx$$

Заменим $\frac{x-m}{\theta}$ на y

$$\frac{\theta}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|y| \cdot e^{\frac{-y^2}{2}}dy = \theta\int\limits_{0}^{+\infty} y \cdot e^{\frac{-y^2}{2}}dy = \theta(1-0) = \theta$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\ |x_i - m| \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{п. н.}} E\sqrt{\frac{\pi}{2}}\ |x_i - m|$$

Задача

$X = (X_1, \ldots,\ X_n),\ X_i \sim R(0,\ \theta)$
$\hat{\theta} = X_{(n)}$, доказать $\lim\limits_{n\to\infty} EX_{(n)} = \theta$
$F_{X_{(n)}}(x) = (F_{X_i}(x))^n = \left(\frac{x}{\theta}\right)^n$
$f_{X_{(n)}}(x) = \frac{dF_{X_{(n)}}}{dx} = \frac{nx^{n-1}}{\theta}$
$EX_{(n)} = \int\limits_0^\theta \frac{nx^n}{\theta^n}\,dx = \left.\frac{nx^{n+1}}{(n+1)\theta^n}\right|_0^\theta = \frac{n}{n+1}\theta \xrightarrow[n\to\infty]{} \theta$. То есть смещённая, но асимптотически несмещённая.
Докажем состоятельность, хотим:

$$\forall\varepsilon > 0 \quad P(|\hat{\theta} - \theta| < \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

$$P(-\varepsilon < X_{(n)} - \theta < \varepsilon) = F_{X(n)}(\varepsilon + \theta) - F_{X_{(n)}}(\theta - \varepsilon) = 1 - \left(\frac{\theta - \varepsilon}{\theta}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Задача

$I_n(\theta) = E\left(\frac{\delta \ln f(x,\, \theta)}{\delta\theta}\right)^2,\ I_n(\theta) = nI_1(\theta),\ x_1, \ldots,\ x_n \sim N(\theta,\ \sigma^2).$

$f(x,\ \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}}$

$\ln f(x,\ \theta) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}}\right) = -\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2} + \ln\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$

$\frac{\delta \ln f(x,\, \theta)}{\delta\theta} = -\frac{2(x-\theta)}{2\sigma^2} \cdot (-1) = \frac{x-\theta}{\sigma^2}$

$E\left(\frac{x-\theta}{\sigma^2}\right)^2 = \frac{1}{\sigma^4} E(x-\theta)^2 = \frac{1}{\sigma^4}\sigma^2 = \frac{1}{\sigma^2} = I_1(\theta)$

$\mathcal{D}\hat{\theta} \geqslant \frac{1}{nI_1(\theta)} = \frac{\sigma^2}{n} = \mathcal{D}\overline{x}$