Лекции по математическому анализу 4 модуль.

Андрей Тищенко

2023/2024

Лекция 12 апреля.

Сходимость функциональных рядов

$f_n(x),\ n \in \mathbb{N},\ x \in E \subseteq \mathbb{R}$
$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$

Определение: $f_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows} f(x) \Leftrightarrow \sup\limits_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[b\to\infty]{} 0$

Пример: Закон больших чисел. $\eta_n(\omega) = \frac{\xi_1(\omega)+\dots+\xi_n(\omega)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} E\xi_1 = a$ почти наверное. $P\{\omega :\ \eta_n(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} a\} = 1$

Вопрос: можно ли переставлять операторы $\lim\limits_{n\to\infty},\ \lim\limits_{x\to x_0},\ \dfrac{d}{dx},\ \displaystyle\int dx$?

То есть $\lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) \overset{?}{=} \lim\limits_{x\to x_0} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{d}{dx} f_n(x) \overset{?}{=} \dfrac{d}{dx} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$

$\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int f_n(x)dx \overset{?}{=} \int \left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx$

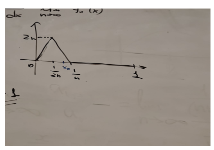
Нет, нельзя.

Пример 1. $f_n(x) = x^n,\ E = [0;\ 1],\ x_0 = 1$
$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to 1^-} x^n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$
$\lim_{x\to 1^-} \lim_{n\to\infty} x^n = \lim_{x\to 1^-} \begin{pmatrix} 0, & x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{pmatrix} = 0$

Теорема: $f_n(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in E$ и $f_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows} f(x)$, то
$f(x)$ непрерывна в точке x_0

Пример 2. $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n},\ x \in \mathbb{R},\ x_0 = 0$
$f(x) \equiv 0 \quad f'(0) = 0$
$f'_n(x) = \frac{\cos nx}{n} \cdot n = \cos nx|_{n_0=0} \equiv 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

Теорема: $f_n(x)$ непрерывна и дифференцируема на $[a;\ b]$
$\exists c \in [a;\ b]:\ f_n(c)$ сходится
$f'_n(x) \overset{[a;\ b]}{\rightrightarrows}$, тогда
$f_n(x) \overset{[a;\ b]}{\rightrightarrows}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{d}{dx} f_n(x) = \dfrac{d}{dx} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$

Пример 3. $f_n(x) =$ 
$\forall x \in [0;\ 1]\ f_n(x) \longrightarrow 0$
$\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx = 1,\ \lim_{n\to\infty} 1 = 1$
$\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = 0 \neq 1$

Теорема: $f_n(x) \overset{[a;\ b]}{\rightrightarrows} f(x)$, то
$\displaystyle\forall c \int_c^x f_n(t)dt \underset{n\to\infty}{\overset{[a;\ b]}{\rightrightarrows}} \int_c^x f(t)dt$

Сходимость функциональных рядов

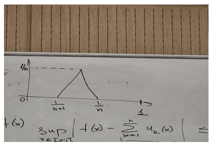
$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x),\ x \in E$$

Ряд сходится равномерно:

$$\sup_{x\in E} \left| \sum_{k=1}^{n} u_k(x) - S(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Теорема: (признак Вейерштрасса) если последовательность $u_n(x)$ мажорируется числовой последовательностью $a_n:\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in E\, |u_n(x)| \leqslant a_n$.

Тогда из сходимости $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ следует сходимость $u_n(x)$ на E.

Пример: $u_n(x) =$ 

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_n(x) = f(x)$$

$$\sup_{x\in[0;\ 1]} \left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \right| \leqslant \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\sup_{x\in[0;\ 1]} |u_n(x)| = \frac{1}{n} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \text{ расходится.}$$

То есть мы имеем равномерную сходимость, но найти мажорирующую последовательность нельзя.

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \stackrel{?}{=} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} x^n\right)' = \left(\frac{x}{1-x}\right)'$

Степенные ряды

$$\sum_{n=0}^{+\infty} C_n \cdot (x-a)^n \quad \sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n$$

Лемма. (Абеля)

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n$ сходится при $x = x_1$, то $\forall x_0 : |(| x_0) < |x_1|$ ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n$ сходится
2. $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n$ расиходится при $x = x_2$, то $\forall x_0 : |(| x_0) > |x_2|$ ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n$ расходится

$C_n \cdot x_1^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow$ ограниченна $\Rightarrow \exists M\ \forall n\ |C_n \cdot x_1^n| < M$

Доказательство: 1. $\sum_{n=0}^{+\infty} |C_n \cdot x_0^n| = \sum_{n=0}^{+\infty} \left| C_n \cdot x_1^n \cdot \left(\frac{x_0}{x_1}\right)^n \right| \leqslant M \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} q^n}_{\text{сходится}} \Rightarrow$ сходится абсолютно

2. Пусть сходится при $x = x_0 \underset{\text{п. 1}}{\Rightarrow}$ сходится при $x = x_2 \Rightarrow \perp$

Вывод: Возможен один из трёх вариантов

(a) $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n$ сходится $\forall x \in \mathbb{R}$
(b) $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n$ сходится только при $x = 0$
(c) $\exists R: \ \sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n$ сходится на $(-R;\ R)$ (<u>множество сходимости</u>), а на $(-\infty,\ -R) \cup (R,\ +\infty)$ расходится. Это R называется <u>радиусом сходимости</u> степенного ряда.

Теорема: $\forall r: \ 0 < r < R$ ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n$ сходится равномерно на $[-r,\ r]$

Доказательство: $\sup\limits_{[-r;\ r]} \left| \sum\limits_{k=0}^{n} C_k x^k - \sum\limits_{k=1}^{+\infty} C_k x^k \right| = \sup\limits_{[-r;\ r]} \left| \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} C_k x^k \right| \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \left| C_k r^k \right|$, так как r находится в множестве сходимости, значит $\underbrace{\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} C_k r^k}_{\text{числовой ряд}}$ сходится абсолютно.

Утверждение: Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ сходится и $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k x^k$ имеет радиус сходимости $R = 1$ и $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ существует, то $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$.

Теорема: 1. Если $\lim\limits_{n \to \infty} \left| \dfrac{C_n}{C_{n+1}} \right| = A$, то $R = A$

2. Если $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|C_n|} = B$, то $R = \frac{1}{B}$

Доказательство: 1. $0 < A < +\infty \quad \sum\limits_{n=0}^{+\infty} C_n \cdot x^n$

$\lim\limits_{n \to \infty} \left| \dfrac{c_{n+1} x^{n+1}}{C_n x^n} \right| = |x| \cdot \lim\limits_{n \to \infty} \left| \dfrac{C_{n+1}}{C_n} \right| = |x| \dfrac{1}{A}$

$|x| < A$ сходится по Даламберу

$|x| > A$ расходится по Даламберу, значит $R = A$

2. $A = +\infty \quad \lim\limits_{n \to \infty} \left| \dfrac{C_{n+1} x^{n+1}}{C_n x^n} \right| = 0 \Rightarrow \forall x$ по Даламберу сходится $R = +\infty$

3. $A = 0 \quad \lim\limits_{n \to \infty} \left| \dfrac{C_{n+1} x^{n+1}}{C_n x^n} \right| = +\infty \Rightarrow \forall x \neq 0$ расходится.

Лекция 17 апреля

Степенные ряды

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$. Выполняется одно из трёх.

1. Сходится только при $x = 0$
2. Сходится абсолютно $\forall x$
3. Сходится абсолютно на $(-R;\ R)$, расходится на $(-\infty;\ -R)\cup(R;\ +\infty)$.
   R - радиус сходимости.

Теорема: $\forall r: \quad 0 < r < R_{\text{сх}}$ ряд сходится равномерно на $[-r;\ r]$

Теорема (Абеля): Если рдя сходится при $x = R$ абсолютно, то на отрезке $[0;\ R]$ ряд сходится равномерно.

Теорема: Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|C_{n+1}|}{|c_n|}$ $(\exists \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|c_n|}) = A \in \overline{\mathbb{R}}$, то $R_{\text{сх}} = \dfrac{1}{A}$

Доказательство: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|c_{n+1}x^{n+1}|}{|c_n x^n|} = |x| \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = |x| \cdot A \quad (*)$

1 случай. $A = 0$, $(*) < 1$, то есть сходимость при любом x,
то есть $R_{\text{сх}} = +\infty$

2 случай. $A = +\infty$ $(*) = +\infty > 1$, то есть расходимость при любом $x \neq 0$,
то есть $R_{\text{сх}} = 0$

3 случай. $A \in \mathbb{R}^+$ $|x|A < 1$ сходится, то есть $|x| < \dfrac{1}{A}$,
$|x|\,A > 1$ расходится, то есть $|x| > \dfrac{1}{A}$
То есть $R_{\text{сх}} = \dfrac{1}{A}$

Теорема: (Формула Коши-Адамара)

$$R_{\text{сх}} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}}$$

Доказывательства не будет.

Вопрос:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x) \stackrel{?}{=} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right)'$$

Это не всегда верно, стоит запомнить данный факт.

1. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n x \quad R_1$

2. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n n x^{n-1} = \dfrac{1}{x}\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n n x^n \quad R_2$

3. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{c_n}{n+1} x^{n+1} = x\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{c_n}{n+1} x^n \quad R_3$

Теорема: $R_1 = R_2 = R_3$

Доказательство:

1. $R_2 \leqslant R_1 \leqslant R_3$ (очевидно из коэффициентов, так как $c_n n \geqslant c_n \geqslant \dfrac{c_n}{n+1}$)

   Пусть x_1 - точка сходимости 2. то есть сходится $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |c_n| \cdot |x_1|^n \cdot n$, тогда по признаку сравнения

   $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left|\dfrac{c_n}{n+1}\right| |x_1|^n \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |c_n|\,|x_1|^n \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |c_n| \cdot |x_1|^n \cdot n$

   Все остальные ряды сойдутся.

2. $R_3 \leqslant R_2$

   Если при x_0 сходится (абсолютно) 3., то при x_0 сходится 2.

   $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left|\dfrac{c_n}{n+1} x_1^n\right|$ - сходится $\Rightarrow$

   $\Rightarrow \exists M \forall n \ \left|\frac{c_n}{n+1} x_1^n\right| \leqslant M$

   $\exists x_1 : \quad |x_0| < |x_1| < R_3$

   $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |c_n n x_0^n| = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\left|\dfrac{c_n}{n+1} x_1^n\right|}_{\leqslant M} \cdot (n+1)n \cdot \left|\underbrace{\dfrac{x_0}{x_1}}_{q^n}\right|^n \leqslant$

   $\leqslant M \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n(n+1)q^n$ сходится по Даламберу $(0 < q < 1)$

Выводы:

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = f(x), \quad D_f = (-R;\ R)$
$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n n x^{n+1} = f'(x)$
$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{c_n}{n+1} x^{n+1} = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$
$f(x)$ - бесконечно число раз дифференцируем.
$f^{(k)}(0) = c_k \cdot k!$

Вывод: Если $f(x)$ раскладывается в степенной ряд, то $c_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$

Пример: $f(x) \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}},\ x = 0 \\ 0,\ x = 0 \end{cases}$

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} - 0}{x - 0} = 0$$

Утверждение: $e^{-\frac{1}{x^2}} \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

$f^{(k)}(0) = \lim_{x\to 0} \dfrac{f^{(k+1)}(x) - f^{(k-1)}(0)}{x - 0} = 0$
$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \equiv 0 \neq f(x)$, хотя функция бесконечное число раз дифференцируема.

Ряды Тейлора

Определение: Рядом Тейлора функции бесконечное число раз дифференцируемой в точке $x = a$ называется

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad (*)$$

Теорема: (Достаточное условие) Если $f^{(k)}(x)$ ограничена в совокупности на интервале $(a - R;\ a + R)$, то $(*)$ верно на $(a - R;\ a + R)$

Доказательство: ограничена в совокупности означает:

$$\exists M\ \forall k\ \forall x \in U_R(a) :\ \left|f^{(k)}\right| \leqslant M$$

$$\left|\underbrace{\sum_{n=0}^{k}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}_{T_k(x)}-f(x)\right|=\left|\frac{f^{(k+1)}(\xi)\cdot(x-n)^{k+1}}{(k+1)!}\right|\leqslant$$
$$\leqslant \tfrac{M\cdot R^{k+1}}{(k+1)!}\xrightarrow[k\to+\infty]{}0$$

1. $y=e^x$
   $\left|f^{(k)}(x)\right|=|e^x|\leqslant e^R$
   $\forall x\ e^x=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n!}$

2. $y=\sin x$
   $\left|f^{(k)}(x)\right|\leqslant 1$
   $\forall x\sin x=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$

3. $y=\cos x$
   $\forall x\ \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$

В комплексных числах $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}c_nz^n$ аналитические функции (для них радиус сходимости выглядит так $|z|<R$)

4. $y=\ln(1+x), a=0$
   $y'=\dfrac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^nx^n,\ |x|<1$
   $\displaystyle\int_0^x\frac{1}{1+t}\,dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^x(-1)^nt^n\,dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$
   Но $\ln(1+x):x\in(-1;\ +\infty)$, а $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}:x\in(-1;\ 1]$

5. $(1+x)^\alpha=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}c_n^\alpha x^n\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)$

Лекция 19 апреля

Многомерный анализ

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; \quad f(\vec{x}); \quad \vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$$

Определение: (Коши)

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 \forall\vec{x} : \vec{x} \in U \circ_\delta (\vec{x_0})$$

$$|f(\vec{x} - A)| < \varepsilon$$

Определение:

$$\vec{x} \in U \circ_\delta (\vec{x_0}) \Leftrightarrow 0 < \rho(\vec{x}, \vec{x}_0) < \delta$$

Определение:

метрическим пространством называется (M, ρ): $\forall x, y$

1 $\rho(x, y) = \rho(y, x) \geqslant 0$

2 $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

3 $\forall x, y, z \quad \rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(z, y)$

Классическая метрика на $\mathbb{R}_n$

$$\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

Определение: (Гейне)

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = A \Leftrightarrow \forall\vec{x_k} : \ \vec{x_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \vec{x_0} \ \vec{x_k} \neq \vec{x_0} \Rightarrow f(\vec{x_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} A$$

Определение 1: $\vec{x}_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \vec{x_0} \Leftrightarrow \forall i : 1 \leqslant i \leqslant n \quad x_{i,k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x_{i,0}$

Определение 2: $\vec{x}_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \vec{x_0} \Leftrightarrow \rho(\vec{x_k}, \vec{x_0}) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

Теорема: Определение 1 $\Leftrightarrow$ Определение 2

$1 \Rightarrow 2$

$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_{i,k} - x_{i,0})^2} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ по арифметике пределов последовательнотей

$1 \Leftarrow 2$

$$|x_{i,k} - x_{i,0}| \leqslant \rho(\vec{x_k}, \vec{x_0}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Замечание 1:

Наследуется вся арифметика пределов

Замечание 2:

Тяжело доказывается сходимость

Там далее примеры были, но нам пофигу, сам там напишешь. ОК, спасибо, Вова.

Определение:

$f(\vec{x})$ называется непрерывной в точке $\vec{x_0} \Leftrightarrow \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x_0}} f(\vec{x}) = f(\vec{x_0})$

Теорема:

Функция непрерывна на компакте

1 ограничена на нём

2 достигаются наибольшее и наименьшее значение

3 принимает все промежуточные значения

Определение:

Множество называется компактом, если для любого покрытия открытыми множествами существует конечное подпокрытие.

$$K \subset \bigcup_{\alpha} A_\alpha \ \exists \text{ конечный набор } A_{\alpha_1}, \ldots, A_{\alpha_m} :$$

$$K \subset \bigcup_{\alpha}^{m} A_{\alpha_i}$$

Определение:

В $\mathbb{R}^n$ компактами являются ограниченные и замкнутые множества.

$$U_\delta(\vec{x_0}) = \{\vec{x} :\ \rho(\vec{x}, \vec{x_0}) < \delta\}$$

Определение:

множество A называется открытым $\Leftrightarrow \forall \vec{x} \in A\ \exists \delta > 0 :\ U_\delta(\vec{x}) \subset A$

Пример:

$$A \subseteq \mathbb{R} \quad A \text{ открыты} \Leftrightarrow A = \bigsqcup_{k=1}^{(n)+\infty} (a_k, b_k), \quad a_i, b_i \in \overline{\mathbb{R}}$$

Определение:

множество B называется замкнутым, если $\overline{B}$ - открыто

Теорема:

A_i - открыто, B_i - замкнуто

1 $\bigcup\limits_i A_i$ - открыто

2 $\bigcap\limits_i A_i$ - открыто

3 $\bigcap\limits_i B_i$ - замкнуто

4 $\bigcup\limits_i B_i$ - замкнуто

Пример (2):

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left(0 - \frac{1}{2^n}; 1 + \frac{1}{2^n}\right) = [0, 1]$$

Пример (4):

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{n};1-\frac{1}{n}\right]=(0,1)$$

Доказательство:

1 $\bigcup\limits_i A_i = A$

$$\vec{x}\in A \Rightarrow \exists i\ \vec{x}\in A_i \Rightarrow \exists\delta : U_\delta(\vec{x})\subset A_i \Rightarrow U_\delta(\vec{y_0})\subset A$$

3 $\bigcap\limits_i B_i = \overline{\bigcup\limits_i \overline{B_i}}$ - замкнуто

4 $\bigcup\limits_{i=1}^{k} B_i$
Возьмем $\forall \vec{x_n}\in B$ и $\vec{x_n}\underset{n\in\infty}{\longrightarrow}\vec{x_0}\quad \exists i$ и $\exists n_k$

$$\forall k\ \vec{x_{n_k}}\in B_i \wedge \vec{x_{n_k}}\underset{n\in\infty}{\longrightarrow}\vec{x_0}\Rightarrow \vec{x_0}\in B_i \Rightarrow \vec{x_0}\in B$$

Теорема:

множество B замкнуто $\Leftrightarrow$

$$\forall \vec{x_k}\in B:\ \vec{x_k}\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}\vec{x_0}\Rightarrow \vec{x_0}\in B$$

Доказательство:

$"\Rightarrow"$

Предположим противное, то есть B замкнуто, но $\exists \vec{x_k}\in B:\ \vec{x_k}\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}\vec{x_0}\wedge \vec{x_0}\notin B$, то есть $\vec{x_0}\in\overline{B}$ – открытое

$$\exists\delta:\ U_\delta(\vec{x_0})\subset\overline{B}$$

так как $\vec{x_k}\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}\vec{x_0}\Rightarrow \exists N=N(\delta):\ \forall k>N\ \vec{x_k}\in U_\delta(\vec{x_0})\subset\overline{B}$ - противоречие.

$"\Leftarrow"$

B - замкнуто $\Leftrightarrow$ $\overline{B}$ - открыто. $\quad \vec{y_0}\in\overline{B}\ \exists\delta:\ U_\delta(\vec{y_0})\subset\overline{B}$
Предположим противное, то есть $\delta_n=\dfrac{1}{n}$, то $\exists y_n\in U_\delta(\vec{y_0})\wedge\vec{y_n}\notin\overline{B}$ (то есть $\vec{y_n}\in B$) Получаем $\vec{y_n}\underset{n\in\infty}{\longrightarrow}\vec{y_0}\Rightarrow\vec{y_0}\in B$ - противоречие

Лекция 26 апреля

Дифференцируемость функции многих переменных.

n = 1

$$\underbrace{f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\text{производная}} \Leftrightarrow f(x) = f(x_0) + \underbrace{A(x-x_0)}_{\text{дифференциал}} + \overline{o}\big((x-x_0)\big)$$

n > 1

Частные производные:

$$\frac{\vartheta f(x;\ y)}{\vartheta x} := \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x;\ y) - f(x;\ y)}{\Delta x}$$

Пример:

$$f(x,\ y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2},\ x^2+y^2 \neq 0 \\ 0,\ \text{иначе} \end{cases}$$

$$\left.\frac{\vartheta f(x,\ y)}{\vartheta x}\right|_{\substack{x=0\\ y=0}} = (0)'_x = 0$$

$$\left.\frac{\vartheta f(x,\ y)}{\vartheta x}\right|_{\substack{x=0\\ y=0}} = 0$$

Δf = линейная функция от $(\Delta x_1, \ldots,\ \Delta x_n) + \overline{o}\big(\rho(\vec{x},\ \vec{x}_0)\big)$

Определение: $(n = 2)$

Функции $f(x)$ называется дифференцируемой в точке $(x_0,\ y_0)$, если

$$f(x,\ y) = f(x_0,\ y_0) + A(x-x_0) + B(y-y_0) + \overline{o}\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)$$

Теорема:

Если $f(x,\ y)$ дифференцируема в точке $(x_0,\ y_0)$, то

$$\exists\ \frac{\vartheta f(x,\ y)}{\vartheta y}\bigg|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$$

и $A = \dfrac{\vartheta f}{\vartheta x},\ B = \dfrac{\vartheta f}{\vartheta y}\quad (x_0,\ y_0)$ и $f(x,\ y)$ непрерывна в $(x_0,\ y_0)$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix},\ \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0\\ y_0\end{pmatrix}$

Доказательство:

$f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) = A(\underset{\to 0}{x - x_0}) + B(\underset{\to 0}{y - y_0}) + \overline{o}\big(\underset{\to 0}{\rho(\vec{x},\ \vec{x}_0)}\big)$

$f(x,\ y_0) = f(x_0,\ y_0) + A(x - x_0) + \overline{o}\big(|x - x_0|\big)$

Из курса матанализа можно сказать $\exists \dfrac{\vartheta f}{\vartheta x}$ и A равен ему.

Теорема: (достаточное условие дифференцируемости функции)

Если $\dfrac{\vartheta f}{\vartheta x},\ \dfrac{\vartheta f}{\vartheta y}$ существует в некоторой окрестности точки $(x_0,\ y_0)$ и непрерывна в точке $(x_0,\ y_0)$, то функция дифференцируема в точке $(x_0,\ y_0)$

Пример:

$$f(x,\ y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2},\ x^2 + y^2 \neq 0\\ 0,\ \text{иначе}\end{cases}$$

$\dfrac{\vartheta f}{\vartheta x} = \dfrac{y(x^2 + y^2) - 2x(xy)}{(x^2 + y^2)^2} = \dfrac{y^3 - x^2 y}{(x^2 + y^2)^2} \Rightarrow \neg\exists \lim$

$\dfrac{\vartheta f}{\vartheta y} = \dfrac{x^3 - xy^2}{(x^2 + y^2)^2} \Rightarrow \neg\exists \lim$

Доказательство:

$f(x_0 + \Delta x;\ y_0 + \Delta y) - f(x_0;\ y_0) = \underbrace{f(x_0 + \Delta x;\ y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x;\ y_0)}_{= \frac{\vartheta f}{\vartheta y}(x_0 + \Delta x;\ y_0 + \Delta y\Theta 1)\Delta y} +$

$+ \underbrace{f(x_0 + \Delta x;\ y_0) - f(x_0;\ y_0)}_{= \frac{\vartheta f}{\vartheta x}(x_0 + \Theta 2\Delta x; y_0\ )\Delta x} = \dfrac{\vartheta f}{\vartheta y}(x_0;\ y_0)\Delta y + \dfrac{\vartheta f}{\vartheta x}(x_0;\ y_0)\Delta x + \overline{o}(1) +$

$+ \Delta y \overline{o}(1) + \Delta x \overline{o}(1)$, здесь $0 < \Theta_1,\ \Theta_2 < 1$
Докажем, что $\Delta x \cdot \overline{o}(1) = \overline{o}(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) \Rightarrow$
$\Rightarrow \dfrac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \cdot \overline{o}(1) \xrightarrow[\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}]{} 0$
Итак, мы нашли нужные коэффициенты и представили функцию как сумму с нужным порядком малости.

1. Производная сложной функции.

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) \oplus \vec{x}(t) =& \big(x_1(t), \dots,\ x_n(t)\big) \\ f\big(\vec{x}(t)\big) =& g(x) \end{aligned}$$

Теорема: $(n = 2)$

Если $f(x;\ y)$ дифференцируема в точке $(x_0,\ y_0)$, $\begin{matrix} x = x(t) \\ y = y(t) \end{matrix}$ дифференцируема в точке t_0: $\begin{matrix} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{matrix}$, то

$$g'(t) = \frac{dg(t)}{dt} = \frac{\vartheta t}{\vartheta x}(x_0,\ y_0) \cdot \frac{dx(t)}{dt}\bigg|_{t=t_0} + \frac{\vartheta t}{\vartheta y}(x_0;\ y_0) \cdot \frac{dy(t)}{dt}\bigg|_{t=t_0} = f'_x x'_t + f'_y y'_t$$

Доказательство:

$$f(x,\ y) = f(x_0,\ y_0) + f'_x(x-x_0) + f'_y(y-y_0) + \overline{o}\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right) \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} =$$
$$\frac{f\big(x(t),\ y(t)\big) - f(x_0,\ y_0)}{t - t_0} = f'_x \underbrace{\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}}_{x'_t} + f'(y) \underbrace{\frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0}}_{y'_t} + \sqrt{\left(\tfrac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\tfrac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} +$$

$+ \overline{o}(1)$
$\sqrt{\left(\tfrac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\tfrac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} \xrightarrow[t \to t_0]{} \sqrt{\left(x'_t\right)^2 + \left(y'_t\right)^2}$

2. Производная по направлению.

$\vec{e}\ |\vec{e}| = 1$
$\vec{e} = \{e_1,\ e_2, \dots,\ e_n\}$
$\dfrac{\vartheta f}{\vartheta \vec{e}} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(x_1 + e_1 t,\ x_2 + e_2 t, \dots,\ x_n + e_n t) - f(x_1, \dots,\ x_n)}{t}$

$$\frac{dg(t)}{dt} = \frac{\vartheta t}{\vartheta x}(x_0,\ y_0) \cdot \left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=t_0} + \frac{\vartheta t}{\vartheta y}(x_0;\ y_0) \cdot \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=t_0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\vartheta f}{\vartheta x_i} \cdot e_i =$$
$= (\bigtriangledown \vec{f},\ \vec{e}) \in \mathbb{R}$

При этом $\bigtriangledown \vec{f}$ называется <u>градиентом</u> функции f

Получается, что наибольшее значение производной по направлению получается, когда вектор $\vec{e}$ сонаправлен с вектором $\bigtriangledown \vec{f}$

Лекция 10 мая.

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

1. Предел + непрерывность + свойства непрерывности.
2. Дифференцируемость $\to$ не понятно.

   $f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \sum\limits_{i=1}^{n} A_i(x^i - x_0^i) + \overline{o}\big(\rho(\vec{x};\ \vec{x}_0)\big)$

Производная по направлению:

$$\frac{\vartheta f}{\vartheta \vec{l}} = \lim_{t\to 0} \frac{f(\vec{x}_0 + t\vec{l}) + f(\vec{x}_0)}{t},\ \left|\vec{l}\right| = 1$$

$\dfrac{\vartheta f}{\vartheta \vec{l}} \to max$, если $\vec{l}$ - градиент.

$\dfrac{\vartheta f}{\vartheta \vec{l}} = \dfrac{dg(t)}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\vec{f}(\vec{x}_0 + t\vec{l})\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\vartheta f}{\vartheta x_i} \cdot \dfrac{d(x_i)}{dt}$, где $x_i = x_i^0 + tl_i$, тогда это равно:

$$\sum_{i=1}^{n} f'_{x_i} l_i = \left\langle grad\ \vec{f},\ \vec{l}\right\rangle = \mathrm{proj}_{\vec{e}}\ grad\ \vec{f}$$

proj - проекция.

Итак, $\dfrac{\vartheta f}{\vartheta \vec{l}} \to max \Leftrightarrow \vec{e} \upuparrows grad\ \vec{f}, \quad \max \dfrac{\vartheta f}{\vartheta \vec{e}} = \left|grad\ \vec{f}\right|$

Вывод:

Определение:

Линией уровня функции $y = f(\vec{x})$ называется множество точек $\in \mathbb{R}^n$ таких, что

$$f(\vec{x}) = c,\ \forall c \in \mathbb{R}$$

Утверждение:

$grad\ \vec{f}\Big|_{\vec{x}_0}$ перпендикулярен линии уровня $f(\vec{x}) = \underbrace{f(\vec{x}_0)}_{c}$

$f\big(\vec{x}(t)\big) = c\ \forall t$
Запараметризуем линию уровня:

$$\frac{d}{dt}f\big(\vec{x}(t)\big) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\vartheta f}{\vartheta x_i}\cdot\frac{dx_i}{dt} = 0 \Rightarrow (grad\ \vec{f};\ \vec{v}) = 0 \Rightarrow \text{ Перпендикулярно.}$$

Неявно заданные функции

$y = f(x)$
$F(x,\ y) = 0$
Хотим найти $y = f(x):\ \forall x\ F(x,\ f(x)) = 0$

Пример:

$$y = \pm\sqrt{1-x^2} \Rightarrow f(x) = \begin{cases}\sqrt{1-x^2},\ -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\\ -\sqrt{1-x^2},\ \frac{1}{2<|x|\leqslant 1}\end{cases}$$

Определение:

Функция $F(x,\ y) = 0$, заданная на $A \subseteq \mathbb{R}^2$
$\exists y = f(x) \quad D_f = B \subseteq \text{proj}_x A$
$\forall x \in B: \quad F\big(x,\ f(x)\big) = 0$, то
$y = f(x)$ называется неявной функцией, определяемой $F(x,\ y) = 0$

Лемма:

$F(x,\ y)$ непрерывна на $U_\xi(x_0)\times U_\eta(y_0)$ и $F(x_0,\ y_0) = 0\ \forall x \in U_\xi(x_0) \quad F(x,\ y)$ строго монотонна по y, тогда:

$$\exists\delta,\ \varepsilon\ \forall x \in U_\delta(x_0)\ \exists! y \in U_\epsilon(y_0):\ F(x,\ y) = 0$$

Обозначим $y = f(x) \leftarrow$ непрерывна в точке x_0

Доказательство:

Знаем $F(x_0,\ y_0)=0$. Пусть она возрастает.
Возьмём $\varepsilon<\eta$
$F(x_0,\ y_0+\varepsilon)>0$
$F(x_0,\ y_0-\varepsilon)<0$
$\exists\delta$ в δ-окрестности точки $(x_0,\ y_0+\varepsilon)$ $F(x,\ y)>0$,
в δ-окрестности $(x_0,\ y_0-\varepsilon)$ $F(x,\ y)<0$
Возьмём $x\in U_\delta(x_0):\ F(x,\ y_0-\varepsilon)<0\wedge F(x,\ y_0+\varepsilon)>0\Rightarrow$
$\Rightarrow\exists!y\in(y_0-\varepsilon,\ y_0+\varepsilon):\ F(x,\ y)=0$. Существование из непрерывности, единственность из строгой монотонности.
Из доказательства для любого ε найдётся δ, что для всех x из окрестности найдётся единственное y из окрестности, то есть $y=f(x)$ монотонна.

Теорема: (о неявной функции)

$F(x,\ y)$ непрерывна в некоторой окрестности $(x_0,\ y_0)$ и $\exists F'_y(x,\ y)$ непрерывна в точке $(x_0,\ y_0)$, $F(x_0,\ y_0)=0\quad F'_y(x_0,\ y_0)\neq0$, то

$$\exists\delta\ \exists\varepsilon\ \forall x\in U_\delta(x_0)\ \exists!y\in U_\varepsilon(y_0):\ F(x,\ y)\neq0$$

$y=f(x)$ непрерывна в точке x_0

Бонус:

Если $\exists F'_x(x,\ y)$ в окрестности т. $(x_0,\ y_0)$ и есть непрерывность в точке $(x_0,\ y_0)$, то

$$\exists f'(x_0)=-\frac{F'_x(x_0,\ y_0)}{F'_y(x_0,\ y_0)}$$

Пример:

$\cos xy+x=0$
$y=f(x)\quad x\cos xf(x)+x=0$
$F\big(x,\ f(x)\big)=0$
$\frac{\vartheta F}{\vartheta x}+\frac{\vartheta F}{\vartheta y}\frac{f(x)}{dx}=0$
$\sin xf(x)(f(x)+xf'(x))+1=0$
$f'(x)=\frac{1}{x}\left(\frac{-1}{\sin xf(x)}-f(x)\right)$

Лекция 17 мая.

Неявно заданная функция

$$F(x;\ y) = 0 \longrightarrow F(y;\ \vec{x}) = 0 \longrightarrow \begin{cases} F_1(y_1, \dots,\ y_n,\ \vec{x}) = 0 \\ \dots \\ F_n(y_1, \dots,\ y_n,\ \vec{x}) = 0 \end{cases}$$

Теорема (о неявной функции).

Функция должна быть:

1. непрерывна в окрестности $(x_0,\ y_0)$
2. $\exists F'_y(x,\ y)$ и непрерывна в точке $(x_0,\ y_0)$
3. $F(x_0,\ y_0) = 0$
4. $F'_y(x_0,\ y_0) \neq 0$

$$\exists\delta\ \exists\varepsilon:\ \forall x \in U_\delta(x_0)\ \exists! y \in U_\varepsilon(y_0)\ F(x,\ y) = 0$$

$F(x,\ y) = 0$ то есть $y = f(x):\ F\big(x,\ f(x)\big) = 0,\ x \in U_\delta(x_0)$

Лемма:

$F(x,\ y)$ непрерывна на $U_\xi(x_0) \times U_\eta(y_0)$ и $\forall x \in U_\xi(x_0)$ $F(x,\ y)$ строго монотонна на $(y_0 - \eta,\ y_0 + \eta)$

$$\exists\delta,\ \varepsilon:\ \forall x \in U_\delta(x_0)\ \exists! y \in U_\varepsilon(y_0):\ F(x,\ y) = 0$$

Бонус:

$\exists F'_x(x;\ y)$ в окрестности точки $(x_0,\ y_0)$ и непрерывна в точке $(x_0,\ y_0)$

$$\exists f'(x_0) = -\frac{F_x(x_0;\ y_0)}{F_y(x_0;\ y_0)}$$

Доказательство:

(Разбираемся, откуда взялась формула).
Факт: $\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta y = \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \to 0$
$F(x,\ y) = 0,\ F\big(x,\ f(x)\big) = 0,\ \forall n \in U_\delta(x_0)$

$$\frac{\vartheta F}{\vartheta x} \cdot 1 + \frac{\vartheta F}{\vartheta y}\frac{d\,f(x)}{dx} = 0$$

$F(x_0 + \Delta x;\ y_0 + \Delta y) - F(x_0;\ y_0) = F'_x \Delta x + F'_y \Delta y + \overbrace{\varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y}^{\overline{o}\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right)}$
Положим $y = f(x)$, тогда $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

$$F\big(x_0 + \Delta x;\ f(x_0) + \Delta f\big) - F(x_0,\ y_0) = F'_x \Delta x + F'_y \Delta f + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

$F(x_1, \ldots,\ x_n),\ F\big(x_1(t), \ldots,\ x_n(t)\big) = g(t)$
$\dfrac{d\,g(t)}{dt} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\vartheta F}{\vartheta x} \cdot \frac{d\,g(t)}{d\,t}$

$$\Delta f(F'_y + \varepsilon_2) = -\Delta x(F'_x + \varepsilon_1) \Rightarrow \frac{\Delta f}{\Delta x} = -\frac{F'_x + \varepsilon_1}{F'_y + \varepsilon_2} \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} \frac{F'_x}{F'_y}$$

Теорема о неявной функции:

1. $F_i(y_1, \ldots,\ y_n,\ \vec{x})$ непрерывна, дифференцируема в окрестности точки $(x_0,\ y_0)$

2. $F_i(\vec{y}_0,\ \vec{x}_0) = 0$

3. Якобиан $\neq 0 \to$ определитель матрицы Якоби $A = \{a_{i,\ j}\}_{i,\ j}$

$$a_{i,\ j} = \left.\frac{\vartheta F_i}{\vartheta y_i}\right|_{\vec{x}_0,\ \vec{y}_0}$$

В некоторой окрестности

$$\exists! \begin{matrix} y_1 = f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ y_n = f_n(\vec{x}) \end{matrix},\ \forall \vec{x} \in U_\delta(\vec{x}_0),\ F_i\big(f_1(\vec{x}), \ldots,\ f_n(\vec{x})\big) = 0,\ i = \overline{1,\ n}$$

Пример:

$\begin{cases} F(x,\ y,\ z) = 0 \\ \Phi(x,\ y,\ z) = 0 \end{cases}, \quad \begin{matrix} y = \varphi(x) \\ z = \psi(x) \end{matrix},$
выражаем $z = f(x,\ y) \Rightarrow \Phi\big(x,\ y,\ f(x,\ y)\big) = 0$,
знаем $y = \varphi(x) \Rightarrow z = f\big(x,\ \varphi(x)\big)$. Возьмём производную Φ по y:

$$\frac{\vartheta\Phi}{\vartheta y} \cdot 1 + \frac{\vartheta\Phi}{\vartheta z} \cdot \underbrace{\frac{\vartheta f}{\vartheta y}}_{=-\frac{\frac{\vartheta F}{\vartheta y}}{\frac{\vartheta F}{\vartheta z}}} = 0 \Big| \cdot \frac{\vartheta F}{\vartheta z}$$

$$\frac{\vartheta\Phi}{\vartheta y}\frac{\vartheta F}{\vartheta z} - \frac{\vartheta\Phi}{\vartheta z} \cdot \frac{\vartheta F}{\vartheta y} \neq 0$$

Экстремальные задачи

$y = f(\vec{x})$

Определение:

Точка $\vec{x}_0$ называется точкой <u>строгого локального максимума</u>, если

$$\exists \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) : \ \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) : \ f(x) < f(x_0)$$

Точка $\vec{x}_0$ называется точкой <u>нестрогого локального максимума</u>, если

$$\exists \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) : \ \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) : \ f(x) \leqslant f(x_0)$$

Теорема (необходимое условие экстремума):

Если $\vec{x}_0$ - точка локального экстремума и $\exists \frac{\vartheta f}{\vartheta x_i}\Big|_{\vec{x}_0}$, то

$$\forall i \ \frac{\vartheta f}{\vartheta x_i}\Big|_{\vec{x}_0} = 0$$

Доказательство:

Очевидно, что $\frac{\vartheta f}{\vartheta x_i} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{\overbrace{f(x_0', \ x_0^2, \ldots, \ x_0^n)}^{g(t)} - f(\vec{x}_0)}{\Delta x^i}$
$f(\vec{x})$ - зафиксируем все x^j, кроме x^i
$g(x^i)$ - экстремум в точке $x_0^i \Rightarrow \frac{dg(x^i)}{dx^i} = \frac{\vartheta f(\vec{x})}{\vartheta x^i} = 0$

Теорема:

Если на $E \in \mathbb{R}^n$ матрица Гессе положительно определена, то $f(\vec{x})$ выпукла вниз.

$$\text{матрица Гессе } B = \{a_{i,\ j}\},\ b_{i,\ j} = \frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x_i \vartheta x_j}$$