

Семинары по дискретной математике

модуль 4

Андрей Тищенко

2023/2024 гг.

Семинар 4 апреля

Графы

$$G = (V, E); \begin{cases} 1. E \subseteq V^2 \\ 2. E \text{ иррефлексивно} \\ \forall x \neg xEx \\ 3. E \text{ симметрично} \\ \forall x, y (xEy \Rightarrow yEx) \end{cases}$$

Вопрос 1. $V = \underline{n}$. Сколько существует различных графов на V ?

Для графа размера 3.

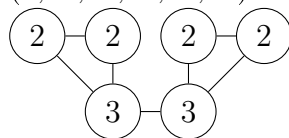
Количество неупорядоченных пар различных вершин $= |\mathcal{P}_2(V)| = C_3^2 = 3$

Количество способов выбрать ребра $= |\mathcal{P}(\mathcal{P}_2(V))| = 2$

$\{x, y\}$ - ребро $\Leftrightarrow xEy \wedge yEx$

Степенная последовательность

2. $(3, 3, 2, 2, 2, 2)$



Лемма о рукопожатиях

(n, m) - граф $G = (V, E)$
 $\sum_{x \in V} d_G(x) = 2m = |E|$

3. $(4, 4, 4, 4, 2)$ не является степенной.

4. Задача

Дано: (n, m) граф, $G = (V, E)$, $n \geq 2$

Хотим: $\exists x, y \in V (x \neq y \wedge d(x) = d(y))$
 $\forall x \ 0 \leq d(x) \leq n - 1 \quad d(x) \in \underline{n}$

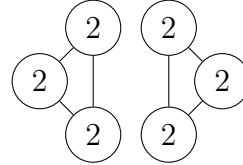
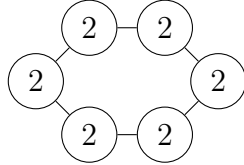
Пусть не так: $\Rightarrow d$ инъективна.

$$\underline{n} \sim V \stackrel{d}{\lesssim} \underline{n} \Rightarrow d \text{ сюръективна} \Rightarrow \begin{cases} \exists x_0 \ d(x_0) = 0 \\ \exists x_{n-1} \ d(x_{n-1}) = n - 1 \end{cases}$$

$$\neg x_0 E x_{n-1}$$

$$\forall y (y \neq x_{n-1}) \Rightarrow x_{n-1} E y \Rightarrow x_{n-1} E x_0 \Rightarrow \perp$$

5. Хотим построить граф со степенной последовательностью $(2, 2, \dots, 2)$



Граф $C_6 \not\cong C_3 \sqcup C_3$

Пусть в G ровно k компонент связности. Одна компонента порядка $n_i \leq n$, $n_i = 5$

$(\underbrace{2, 2, \dots, 2}_{n_i}) \Rightarrow G \cong C_{n_1} \sqcup \dots \sqcup C_{n_k}$, где $\forall i \ n_i \geq 3$, $n_1 + \dots + n_k = n$

$$1 \leq k \leq \frac{n}{3} \text{ (округлить вверх)}$$

7. $(100, 800)$ граф $G = (V, E)$

а. $\forall x \ d_G(x) < 16$? Неверно по лемме о рукопожатиях.

б. $\forall x \ d_G(x) = 16$.

Определение: граф называют r -регулярным $\Leftrightarrow \forall x \ d(x) = r$. Размер r -регулярного графа на n вершинах есть $\frac{rn}{2}$.

K_{t+1} - заведомо t -регулярный граф (полный граф на $t + 1$ вершине).

Для нашей задачи возьмём K_{17} . В нём будет $\frac{17 \cdot 16}{2} = 136$ рёбер.

$$800 = 136 \cdot 5 + 120$$

$G \stackrel{?}{=} 5K_{17} + G'$, где G' 16-регулярный (15, 120) граф (такого не бывает, так как одна из 15 вершин должна быть соседом с 16 другими \perp). Запрашиваю продолжение конспекта, тяжело.

Семинар 11 апреля

7. 6. 16 регулярный граф на 100 вершинах.

$$V = 100, xEy \Leftrightarrow \exists z \in \{\pm 8, \pm 7, \dots, \pm 1\} = U \quad (x - y \equiv z \pmod{100}).$$

E иррефлексивно.

$$xE x \Rightarrow x - x = 0 \equiv z \pmod{100} \Rightarrow \perp$$

Симметричность.

$$xE y \Rightarrow yE x$$

$$\exists z \in U \quad x - y \equiv z \pmod{100} \Rightarrow \begin{cases} y - x \equiv -z \pmod{100} \\ -z \in U \end{cases} \Rightarrow yE x$$

$$x \in \underline{100}. N(x) = \{(x - 8), (x - 7), \dots, (x - 1), (x + 1), \dots, (x + 8)\}$$

Почему среди них нет одинаковых? Пусть есть:

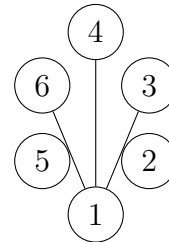
$$(x + d_1) \% 100 = (x + d_2) \% 100, |N(x)| \leq 16$$

$$\Leftrightarrow x + d_1 \equiv x + d_2 \pmod{100}$$

$$\Leftrightarrow d_1 \equiv d_2 \pmod{100} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad |d_1 - d_2| = 16k \wedge d_2 - d_1 \leq 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_1 = d_2 = 0.$$

8. Среди любых шестерых людей есть хотя бы трое незнакомых или хотя бы трое знакомых.



Пусть есть такая вершина, что у него есть три соседа.

Между вершинами 3, 4, 6 может быть ребро, тогда есть три попарно знакомых, может не быть рёбер, тогда есть три попарно незнакомых.

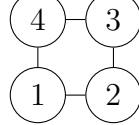
9. Булев куб:

$$x_1, \dots, x_n E y_1, \dots, y_n \Leftrightarrow \exists i (x_i \neq y_i \wedge \forall j \neq i x_j = y_j)$$

$n = 1$



$n = 2$



$n = 3$. Тут куб, поверьте, пожалуйста.

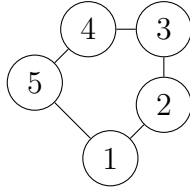
а. $|V_n| = 2^n$

б. Число рёбер графа $B_n = 2^n \cdot \frac{n}{2} = 2^{n-1}n$

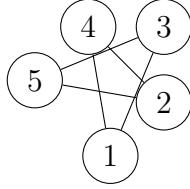
с. $2^n \cdot C_n^2$

Дополнение графа.

$G = (V, E)$, $\overline{G} = (V, (V^2 \setminus \text{id}_V) \setminus E)$ Нарисуем дополнение:



Дополнением к такому графу будет граф



Докажем G не связан $\Rightarrow \overline{G}$ связан.

Рассмотрим произвольные вершины x, y ($x \neq y$) $\in V$.

Первый случай: $x \not\sim_G y \Rightarrow \neg x E y \Rightarrow x \overline{E} y$

Второй случай: $x \sim_G y$, так как G не связан, то $\exists w : \begin{cases} x \not\sim_G w \\ y \not\sim_G w \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow xw, yw \notin E \Rightarrow xw, yw \in \overline{E} \Rightarrow x \sim_{\overline{G}} y$

11. Доказать:

$$\left. \begin{array}{l} (n, m) - \text{граф } G \\ n = 15 \\ \forall x \, d(x) \geq 7 \end{array} \right| \Rightarrow G \text{ связен}$$

Рассмотрим произвольные x и y и допустим $x \neq y \Rightarrow (xy \notin E)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \notin N(x) \cup N(y) \\ y \notin N(x) \cup N(y) \end{cases}$$

$$N(x) \cup N(y) \subseteq V \setminus \{x, y\}$$

$$|N(x)| + |N(y)| = |N(x) \cup N(y)| \leq 15 - 2 = 13$$

$$\begin{aligned} \text{Так как } |N(x)| \geq 7 \wedge |N(y)| \geq 7 &\Rightarrow 7 + 7 - |N(x) \cap N(y)| \leq 13 \Rightarrow \\ &\Rightarrow N(x) \cap N(y) \neq \emptyset \end{aligned}$$

Семинар 18 апреля

Задача 12. Уединённая \Rightarrow степень не больше 3. Каждая вершина соединена хотя бы с тремя уединёнными.

Возьмём любую вершину x . У неё должно быть хотя бы 3 уединённых соседа, пусть среди них есть уединённая вершина y . У любой уединённой вершины степень не больше 3 и она имеет хотя бы 3 уединённых соседа, значит все её соседи являются уединёнными, то есть вершина x является уединённой. Получается, что любая вершина является уединённой.

Построим такой граф на 100 вершинах. Можно привести в пример 25 полных графов на 4 вершинах

Задача 13. 1 случай. Если граф полный, то очевидно 2 случай. Граф не полный $G \not\cong K_n$, $n \geq 4 \Rightarrow \exists x, y \neg xEy$

$$|N(x)| \geq \frac{n}{2}; |N(y)| \geq \frac{n}{2}$$

$$|N(x) \cup N(y)| \leq n - 2, \text{ так как } x, y \notin N(x) \wedge x, y \notin N(y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x, y \notin N(x) \cup N(y) \quad |N(x) \cup N(y)| = |N(x)| + |N(y)| - |N(x) \cap N(y)|$$

$$|N(x)| + |N(y)| \geq n \Rightarrow n - 2 \geq n - |N(x) \cap N(y)| \Rightarrow |N(x) \cap N(y)| \geq$$

$$2 \Rightarrow \exists u, v \text{ (вершины), такие что:}$$

$$xEv \wedge vEy \wedge yEu \wedge uEx \cong C_4, \text{ ч.т.д.}$$

Утверждение 1: если (n, m) - граф G связен, то $m \geq n - 1$

Утверждение 2: $\forall (n, m)$ - графа G , $m \leq C_n^2$

Утверждение 3: Если G не связен, то \overline{G} связен (см. задачу 10)

Утверждение 4: $\forall (n, m)$ - графа G . \overline{G} есть $(m, C_n^2 - m)$ - граф

Задача 14. Допустим есть несвязный (n, m) - граф G . Тогда связно его дополнение, являющееся $(n, C_n^2 - m)$ граф \overline{G} , значит для него выполняются

$$\begin{aligned} C_n^2 - m \geq n - 1 &\Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} - m \geq n - 1 \Rightarrow m \leq (n-1)\left(\frac{n}{2} - 1\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow m \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2} = C_{n-1}^2 \end{aligned}$$

Утверждение 5: Если (n, m) - граф G не связан, то $m \leq C_{n-1}^2 < C_n^2$. Эта оценка неулучшаема (оптимальна). Это означает, что:
 $\forall n \geq 2 \exists$ несвязный (n, C_{n-1}^2) - граф G

Задача 15. Пусть есть две вершины $x \neq y$ степени 5.

1 случай. Пусть они смежные (то есть xEy). Рассмотрим вершины, с которыми они связаны. Рассмотрим $(N(x) \setminus \{y\}) \cap (N(y) \setminus \{x\})$
 $|N'(x)| = |N(x) \setminus \{y\}| = |N(y) \setminus \{x\}| = N'(y) = 5 - 1 = 4 \Rightarrow$
 $\Rightarrow |N'(x) \cup N'(y)| \leq |V_G| - 2 = 9 - 2 = 7 \Rightarrow |N'(x) \cap N'(y)| \geq 1 \Rightarrow$
 есть цикл. Противоречие.

2 случай. $x, y \notin N(x) \cup N(y)$
 $|N(x) \cup N(y)| \leq 9 - 2 = 7$
 $2|N(x)| - |N(x) \cap N(y)|$
 $\stackrel{=10}{=} |N(x) \cap N(y)| \geq 3 \Rightarrow$ найдётся цикл.

Задача 16. $n \geq 2 \wedge m = n - 1$

Лемма о рукопожатиях: $2(n-1) = \sum_{x \in V} d(x)$

Пусть $t :=$ число вершин степени 1.

Тогда $2(n-1) = \sum_{x \in V \wedge d(x) \geq 2} d(x) + t$. Хотим $t \geq 2$

Заметим $\sum_{x \in V} d(x) \geq 2(n-t)$. То есть

$$\begin{aligned} 2(n-1) &\geq 2(n-t) + t \\ 2n - 2(n-1) &\leq t \Rightarrow 2 \leq t \text{ ч.т.д.} \end{aligned}$$

Задача 17. Число вершин степени 2 = 0, степени 1 = t

$$\begin{aligned} 2(n-1) &= \sum_{x \in V} d(x) = t + \sum_{x \in V \wedge d(x) \geq 3} d(x) \\ 2(n-1) &\geq t + 3(n-t) \Rightarrow 2n - 2 \geq t + 3n - 3t \Rightarrow \\ &\Rightarrow -n - 2 \geq -2t \Rightarrow t \geq \frac{n+2}{2} = \frac{n}{2} + 1 > \frac{n}{2}, \text{ ч.т.д.} \end{aligned}$$

Задача 18. Возьмём остовное дерево в нашем графе. В любом дереве с количеством вершин более 2 есть хотя бы две вершины степени 1, можно удалить любую из них. Если вершина одна, то связность при удалении не потеряется.

Семинар 25 апреля

Задача 19. Проверить какой-нибудь граф на двудольность.

В двудольном графе нет циклов нечётной длины. Разбиваем множество вершин на:

$$V_1 = \{x \in V \mid d(z, x) \equiv 1 \pmod{2}\}, V_2 = \{x \in V \mid d(z, x) \equiv 0 \pmod{2}\}$$

Разбирали на доске. Делали *BFS* по всем покомпонентам связности.

Задача 20. Доказать, что всякое дерева порядка ≥ 2 двудольно. Сколько различных (правильных) раскрасок в 2 цвета есть у дерева? А у произвольного графа?

По определению дерево является связным графом без циклов, значит в нём нет циклов нечётной длины, оно является двудольным.

Одну раскраску получаем из двудольности, будет вторая - её инверсия. То есть таких раскрасок не меньше 2. Зафиксируем вершину z , возьмём произвольную вершину $x \neq z$. Пусть существуют две раскраски такие, что цвет z в них одинаков, а x меняется. Тогда рассмотрим простой путь между z и x , такой путь единственный, так как это вершины дерева. Цвет каждой вершины на пути должен чередоваться, иначе раскраска некорректна. Получается, что вершина, являющаяся соседом x имеет определённый цвет, зависящий от цвета z , тогда и цвет вершины x задан однозначно. Получается, что цвет одной вершины однозначно задаёт раскраску всего графа. Так как цветов всего 2, то столько раскрасок и будет.

Допустим G k -связен и G двудольный. Пусть $\nu(G) := \# \text{раскрасок } G \text{ в 2 цвета}$
Тогда G не двудольный и

$$|V_G| > 1 \Rightarrow \nu(G) = 0$$

$$|V_G| = 1 \Rightarrow \nu(G) = 2$$

$$\nu(G) = \nu(G_1) \cdot \nu(G_2) \dots \nu(G_k)$$

В каждой компоненте связности можно выделить остовное дерево. Каждая раскраска графа как-то раскрашивает дерево, а у дерева есть всего две

расраски.

Вывод: у каждой связной компоненты ровно две раскарски.

Тогда $\nu(G) = 2^k$

Ответ: $\nu(G) = \begin{cases} 0, & |V_G| > 1 \wedge G \text{ не двудольный} \\ 2^k, & k = \# \text{компонент связности} \end{cases}$

Задача 21. У каждого члена клуба есть ровно один друг и ровно один враг. Можно ли разбить участников на две комнаты так, чтобы в каждой комнате не было ни друзей, ни врагов.

v = члены клуба.

$xEy \Leftrightarrow xE_1y \vee xE_2y$, то есть они друзья или враги.

$E = E_1 \sqcup E_2$

$\forall x \ d(x) = d_1(x) + d_2(x) = 1 + 1 = 2$

Пусть в таком графе есть цикл нечётной длины:

$$x_1E_1x_2 \wedge x_2E_2x_3 \dots x_{n-1}E_2x_n \wedge x_nE_1x_1$$

Получается, что у вершины x_1 два друга или два врага, что противоречит условию, значит наш граф двудольный и требуемое разбиение существует.

Задача 22.

Рассмотрим двудольный граф. В первой доли находятся ученики класса "А", во второй - ученики класса "Б".

$xEy \leftrightarrow x, y$ подрались.

$\forall x \in A \ d(x) = 6$

Допустим $\exists k \ \forall y \in G \ d(y) = k$, хотим противоречие.

$$\# \text{ребёр} = \sum_{x \in A} d(x) = \sum_{x \in B} d(x)$$

$$\text{Однако } \sum_{x \in A} d(x) = 6 \cdot 22 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11$$

$$\sum_{y \in B} d(y) = 21k = 3 \cdot 7 \cdot k. \text{ Семейки нет в сумме степеней вершин } A, \text{ значит}$$

такие суммы совпасть никак не могут. Противоречие.

Задача 23.

Полустепень исхода: $d_+(x) = |\{y \in V \mid xAy\}|$

Пусть x_0 - вершина с наибольшей степенью исхода. $d_+(x_0) = k$

То в вершины y_1, \dots, y_k ведут стрелки из x_0 .

Рассмотрим произвольное z :

1. x_0Az , тогда всё хорошо.
2. zAx_0 . Сравним каждый y_i с этим z .
 - 2.1. $\forall i \ zAy_i \Rightarrow d_+(z) \geq k+1 > d(x_0) \Rightarrow \perp$
 - 2.2. $\exists j \ y_jAz \Rightarrow \text{dist}(x_0, z) \leq 2$

Семинар 23 мая

Задача 14*.

Последовательность $a_n = \ln(210 + n)$.

Знаем:

$$\ln(210) \approx a_0 = 5,347108$$

$$\ln(212) \approx a_2 = 5,356586$$

$$\ln(213) \approx a_3 = 5,361292$$

$$\ln(214) \approx a_4 = 5,365976$$

Также знаем:

$$0 = \Delta^4 a_n = a_{n+4} - 4a_{n+3} + 6a_{n+2} - 4a_{n+1} + a_n$$

Подставим $n = 0$:

$$\Delta^4 a_0 = a_4 - 4a_3 + 6a_2 - 4a_1 + a_0 = 0 \Rightarrow a_1 = \frac{a_4 - 4a_3 + 6a_2 + a_0}{4} \approx 5,351858$$

Задача 15. а.

$$\forall n \ a_n = \frac{1}{n+1} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{1}{n+2}$$

$$n = \frac{1}{a_n} - 1, \ a_{n+2} = \frac{1}{\frac{1}{a_n} + 1} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 1}$$

Задача 15. б.

$$\forall n \ a_n = \sqrt{n}$$

$$n = a_n^2$$

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + 1}$$

Задача 15. в.

$$\begin{aligned} \forall n \ a_n &= P(n), \ \deg P = 3 \\ 0 &= \Delta^4 a_n = a_{n+4} - 4a_{n+3} + 6a_{n+2} - 4a_{n+1} + a_n \Rightarrow \\ \Rightarrow a_{n+4} &= 4a_{n+3} - 6a_{n+2} + 4a_{n+1} - a_n \end{aligned}$$

Задача 15. г.

$$\begin{aligned} 3a_{n+2} &= 6a_{n+1} - 3a_n + Q(n), \ \deg Q(n) = 2 \\ 3(a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n) &= Q(n) \\ 3(\Delta^2 a_n) &= Q(n) \\ \Delta^3(\Delta^2 a_n) &= \Delta^3 Q(n) = 0 \\ \Delta^5 a_n = 0 &\Rightarrow 0 = a_{n+5} - 5a_{n+4} + 10a_{n+3} - 10a_{n+2} + 5a_{n+1} - a_n \end{aligned}$$

Задача 15. д.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n}{n+1} \\ (n+1)a_n &= n \\ a_n = n(1-a_n) &\Rightarrow n = \frac{a_n}{1-a_n} \\ a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2} &= \frac{\frac{a_n}{1-a_n} + 1}{\frac{a_n}{1-a_n} + 2} = \frac{\frac{1}{1-a_n}}{\frac{2-a_n}{1-a_n}} = \frac{1}{2-a_n} \end{aligned}$$

Задача 16.

$$\begin{aligned} \forall n \ a_{n+2} &= 7a_{n+1} - 2a_n + 4 \Rightarrow a_{n+3} = 7a_{n+2} - 2a_{n+1} + 4 \\ a_{n+3} - a_{n+2} &= -7a_{n+1} + 2a_n - 4 + 7a_{n+2} - 2a_{n+1} + 4 \\ a_{n+3} &= 8a_{n+2} - 9a_{n+1} + 2a_n \end{aligned}$$

$$\text{Добавим начальные условия: } \begin{cases} a_{n+2} = 7a_{n+1} - 2a_n + 4 \\ a_0 = -3, \ a_1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{n+3} = 8a_{n+2} - 9a_{n+1} + 2a_n \\ a_0 = -3 \\ a_1 = 5 \\ a_2 = 7a_1 - 2a_0 + 4 = 45 \end{cases}$$

Задача 17.

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{\phi^n - (-\phi)^{-n}}{\sqrt{5}}, \text{ где } \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ k \leq n &\Rightarrow F_n^2 - F_{n-k}F_{n+k} = (-1)^{n+k}F_k^2 \end{aligned}$$

Распишем левую часть:

$$\begin{aligned}
& \frac{(\phi^n - (-\phi)^{-n})^2}{5} - \frac{(\phi^{n-k} - (-\phi)^{-n+k})(\phi^{n+k} - (-\phi)^{-n-k})}{5} = \\
& = \frac{\phi^{2n} - 2\phi^n(-\phi)^{-n} + (-\phi)^{-2n} - \phi^{n-k}(-\phi)^{n+k} + \phi^{n-k}(-\phi)^{-n-k} -}{5} \\
& \quad + \frac{\phi^{n+k}(-\phi)^{-n+k} - (-\phi)^{-n+k}(-\phi)^{-n-k}}{5} = \\
& = \frac{-2(-1)^n + (-1)^{n-k}\phi^{2k} + (-1)^{n-k}(-\phi)^{-2k}}{5} = \\
& = \frac{-2(-1)^n + (-1)^{n-k}(\phi^{2k} + (-\phi)^{2k})}{5} = (-1)^{n-k}F_k^2
\end{aligned}$$

Задача 18.

$$S\vec{a} = \lambda\vec{a} \Rightarrow (S - \lambda)\vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \in \ker(S - \lambda) \Leftrightarrow \langle (1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, \dots) \rangle$$

$$(S - \lambda)a_n = 0$$

$$a_{n+1} = \lambda a_n \Leftrightarrow \vec{a} = (c, \lambda c, \lambda^2 c, \dots) \quad \Delta\vec{a} = \lambda\vec{a}$$

$$(S - 1)\vec{a} = \lambda\vec{a}$$

$$(S - (\lambda + 1))\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \in \langle (1, \lambda + 1, (\lambda + 1)^2, \dots) \rangle$$

$$\sum \vec{a} = \lambda\vec{a}$$

$$\sum \vec{a} = (0, a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2) \Rightarrow \begin{cases} 0 = \lambda a_0 \\ a_0 = \lambda a_1 \\ a_0 + a_1 = \lambda a_2 \\ a_0 + a_1 + a_2 = \lambda a_3 \\ \dots \end{cases}$$

$$\text{Допустим } \lambda = 0 \Rightarrow \forall i \ a_i = 0$$

$$\text{Пусть } \lambda \neq 0 \Rightarrow \lambda a_0 = 0 \Rightarrow a_0 = 0 \Rightarrow \lambda a_1 = 0 \Rightarrow a_1 \text{ и т.д.}$$

$$\text{Получаем } \forall \lambda \ \vec{a} = \vec{0}$$

Семинар 30 мая

Задача 19. а.

$$\begin{cases} a_{n+2} = 3a_{n+1} + 4a_n \\ a_0 = 5 \\ a_1 = -2 \end{cases}$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 = c_1 + c_2 = 5 \\ a_1 = c_1 z_1 + c_2 z_2 = 4c_1 - c_2 = -2 \end{cases}$$

$$4c_1 + 4c_2 = 20 \Rightarrow 5c_2 = 22, \quad c_2 = \frac{22}{5}, \quad c_1 = 5 - c_2 = \frac{25 - 22}{5} = \frac{3}{5}$$

Итак, ответом является $a_n = \frac{3}{5}4^n + \frac{22}{5}(-1)^n$

Задача 19. б.

$$\begin{cases} a_{n+2} = -6a_{n+1} - 9a_n \\ a_0 = 5 \\ a_1 = 2 \end{cases}$$

$x^2 + 6x + 9 = 0 \Rightarrow x = -3$. Домножим многочлен на x^{n+1} , получаем

$$\begin{cases} x^{n+3} + 6x^{n+2} + 9x^{n+1} = 0 \\ \text{корень } -3 \text{ кратности } 2 \\ \text{корень } 0 \text{ кратности } n + 1 \end{cases}$$

Продифференцируем уравнение:

$$(n + 3)x^{n+2} + 6(n + 2)x^{n+1} + 9(n + 1)x^n = 0$$

Такое уравнение имеет корень -3 кратности 1

$$\begin{cases} u + v = 5 \\ ux_1 + v(n + 1)x_1 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u + v = 5 \\ ux_1 + 2vx_1 = -2 \\ -3u - 6v = -2 \end{cases}$$

Не успел дальше

Задача 19. с.

$$\begin{cases} a_{n+2} = 2a_{n+1} - 3a_n \\ a_0 = 5 \\ a_1 = -2 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2x + 3 = 0, \quad D = 4 - 12 = -8 = (i2\sqrt{2})^2 \Rightarrow \\
 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + i\sqrt{2} \\ x_2 = 1 - i\sqrt{2} \end{cases} \\
 a_n = ux_1^n + vx_2^n \Rightarrow \begin{cases} a_0 = u + v = 5 \\ a_1 = u(1 + i\sqrt{2}) + v(1 - i\sqrt{2}) = -2 \end{cases} \\
 \begin{cases} u + v = 5 \\ u + v + i\sqrt{2}(u - v) = -2 \end{cases} \Rightarrow i\sqrt{2}(u - v) = -7 \Rightarrow u - v = i\frac{7}{\sqrt{2}} \Rightarrow \\
 \Rightarrow u = \frac{10 + 7i\sqrt{2}}{4}, \quad v = \frac{10 - 7i\sqrt{2}}{4}$$

Задача 20.

$$\begin{cases} a_{n+3} = 3a_{n+2} + a_n \\ a_0 = 1 \\ a_1 = 2 \\ a_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 4 = 0 \\
 (x + 1)(x - 2)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

Домножим на x^{n+1} :

$$x^{n+4} = 3x^{n+3} - 4x^{n+1} \xrightarrow{\frac{d}{dx}} (n+4)x^{n+3} = 3(n+3)x^{n+2} - 4(n+1)x^n \\
 ux_1^n + vx_2^n + w(n+1)x_2^n \Rightarrow \begin{cases} 1 = a_0 = u + v + w \\ 2 = a_1 = ux_1 + vx_2 + 2wx_2 \\ 3 = a_2 = ux_1^2 + vx_2^2 + 3wx_2^2 \end{cases} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \begin{cases} 1 = a_0 = u + v + w \\ 2 = a_1 = -u + 2v + 4w \\ 3 = a_2 = u + 4v + 12w \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ -1 & 2 & 4 & | & 2 \\ 1 & 4 & 12 & | & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 3 & 5 & | & 3 \\ 0 & 3 & 11 & | & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 3 & 5 & | & 3 \\ 0 & 0 & 6 & | & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -\frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 0 & | & \frac{23}{18} \\ 0 & 0 & 0 & | & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = -\frac{1}{9} \\ v = \frac{23}{18} \\ w = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

Задача 21*.

$$\begin{cases} a_n = 3 \\ a_{n+1} = (n+1)a_n + \sqrt{n+1} \end{cases}$$

$$\text{Рассмотрим } b_{n+1} = (n+1)b_n \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = 1b_0 \\ b_2 = 2 \cdot 1b_0 \\ b_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1b_0 \\ \dots \\ b_{n+1} = (n+1)!b_0 \end{cases}$$

Рассмотрим более общий случай: $a_{n+1} = f(n)a_n + g(n) \Rightarrow$

$$\Rightarrow b_{n+1} = f(n)b_n \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = f(0)b_0 \\ b_2 = f(1)f(0)b_0 \\ b_3 = f(2)f(1)f(0)b_0 \\ \dots \\ b_{n+1} = \prod_{k=0}^n f(k) \cdot b_0 \end{cases}$$

Обозначим $\prod_{k=0}^n f(k)$ как $\prod f(n+1)$, при этом $\prod f(0) = 1$

$$b_n = \prod f(n) \cdot \overset{=b_0}{\beta}$$

Вариация постоянной. Ищем решение в виде $a_n = \alpha(n) \prod f(n)$. Тогда

$$\alpha(n+1) \cdot \prod f(n+1) = f(n)\alpha(n) \prod f(n) + g(n)$$

Заметим, что $f(n) \prod f(n) = \prod f(n+1)$. Тогда верно

$$(\alpha(n+1) - \alpha(n)) \prod f(n+1) = g(n) \Rightarrow \Delta\alpha(n) = \frac{g(n)}{\prod f(n+1)}$$

$$\alpha(n) - \alpha(0) = \sum \Delta \alpha(n) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{g(n)}{\prod_{k=0}^m f(k)} \Rightarrow \alpha(n) = \alpha(0) + \sum_{m=0}^{n-1} \frac{g(n)}{\prod_{k=0}^m f(k)}$$

Тогда $a_0 = \alpha_0 \prod f(0) = \alpha_0 \Rightarrow \alpha_0 = a_0$

В нашем случае:

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \prod_{k=0}^{n-1} f(k) \cdot \left(a_0 + \sum_{m=0}^{n-1} \frac{g(m)}{\prod_{k=0}^m f(k)} \right) = n! \left(3 + \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\sqrt{n-1}}{(m+1)!} \right) = \\ &= 3n! + \sum_{m=0}^{n-1} \sqrt{m+1} n^{(n-m+1)} \end{aligned}$$

Семинар 6 июня

Задача 1.

Доказать $A(S), B(S) \neq 0 \Rightarrow A(S)B(S) \neq 0$

Положим $A(S)B(S) = C(S) = \sum_n c_n S^n$, тогда $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = [C(S)](s^n)$

По ПНЧ, возьмём наименьшие такие i, j , что $a_i \neq 0 \wedge b_j \neq 0$

$$c_{i+j} = \sum_{k=0}^{i+j} a_k b_{i+j-k} = \sum_{k=i}^{i+j} a_k b_{i+j-k} = a_i b_j \neq 0$$

Так как при $k < i$ $a_k = 0$, а при $k > i$ $b_{i-k+j} = 0$. Задача решена.

Задача 2.

Доказать $sA(s) = 1 \Rightarrow \perp$

$$sA(s) = s \sum_{n=0}^{+\infty} a_n s^n = \sum_{n=0}^{+\infty} = 1?$$

Распишем полученную последовательность: $(0, a_0, a_1, \dots)$. Чтобы выполнялось равенство, должно выполняться

$$(0, a_0, a_1, \dots) = (1, 0, 0, \dots) \Rightarrow 1 \neq 0 \Rightarrow \perp$$

Задача 3. d.

Доказать $\ln(1+s) = \sum_n (-1)^n \frac{s^{n+1}}{n+1}$

Возьмём такую $B(S)$, что $\ln(\frac{1}{1-B(S)}) = \ln(1+s) \Rightarrow \frac{1}{1-B(S)} = 1+s \Rightarrow$
 $\Rightarrow B(S) = 1 - (1+s)^{-1} = 1 - \sum_n \binom{-1}{n} s^n = 1 - \sum_n (-1)^n s^n = \sum_n (-1)^n s^{n+1}$

Было: $[A(B(S))](s^n) = \sum_{k=0}^n a_k \sum_{\substack{x_1+\dots+x_k=n \\ x_i \geq 1}} b_{x_1} b_{x_2} \dots b_{x_k}$

Тогда после подстановки получим функцию:

$$\sum_n \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k} \sum_{\substack{x_1+\dots+x_k=n \\ x_i > 0}} (-1)^{x_1-1} - \dots (-1)^{x_k-1} \right) s^n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{n-k}}{k} \sum_{\substack{x_1+\dots+x_k=n \\ x_i > 0}} 1$$

По формуле Муавра: $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{n-k}}{k} C_{n-1}^{k-1} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{n-k}}{k} \frac{(n-1)!}{(n-k)!k!} (-1)^{n-k} =$
 $= \frac{1}{n} \sum_n C_n^k (-1)^{n-k}$

Вспоминаем: $(1+(-1))^n = \sum_{k=0}^n C_n^k 1^k (-1)^{n-k} = \sum_{k=1}^n C_n^k (-1)^{n-k} + (-1)^n = 0$

Тогда $\frac{1}{n} \sum_n C_n^k (-1)^{n-k} = \frac{1}{n} (0 - (-1)^n) = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. Это коэффициент при n , какой и требуется формулой.

Задача 4. b.

Доказать, что при $A(0) = B(0) = 0$:

$$\left(\int A \right) (B(t)) = \int (A(B(t)) \cdot B'(t)) \Rightarrow (A(B(t)))' = A'(B(t)) \cdot B'(t)$$

Определение: $(A(s))' = \left(\sum_n a_n s^n \right) = \sum_n (n+1) a_{n+1} s^n$

$$\int A(s) = \sum_n \frac{a_n}{n+1} s^{n+1}$$

Было $\left(\int A(s)\right)' = A(s)$

Утверждение:

Если $A(0) = 0$, то \exists производящая функция $\hat{A}(s)$ $\int \hat{A} = A$

Так как $A(0) = 0$, то $A(s) = \int A'(s)$

Тогда $(A(B(t)))' = ((\int A')(B(t)))' = (\int (A'(B(t))B'(t)))' = A'(B(t))B'(t)$

Задача 6. а.

$$\vec{a} = (1, 2, 3, \dots), \quad A(s) = \sum_n a_n s^n = \sum_n (n+1)s^n$$

Последовательность совпадает с $\left(\sum_n s^n\right)' = \left(\frac{1}{1-s}\right)' = \frac{1}{(1-s)^2}$ - производящая функция натурального ряда.

Задача 6. б.

$$A(s) = \sum_n (n+1)(n+2)s^n = 2 + 6s + 12s^2 + 20s^3 + \dots$$

$$\begin{aligned} (2s + 3s^2 + 4s^3 + \dots + (n+1)s^n)' &= \left(\sum_n (n+2)s^{n+1}\right)' = \left(\sum_n (n+1)s^n\right)' = \\ &= \left(\left(\sum_n s^n\right)'\right)' = \left(\frac{1}{1-s}\right)'' = \frac{2}{(1-s)^3} \end{aligned}$$

Семинар 13 июня

Задача 7.

$$A(s) = \sum_n^{\infty} a_n s^n$$

Задача 7. а.

$$\begin{aligned} \vec{b} &= a_0 + a_1, \quad a_1 + a_2, \quad a_2 + a_3 \dots \\ B(s) &= \sum_n (a_n + a_{n+1})s^n = \sum_n a_n s^n + \sum_n a_{n+1} s^n \end{aligned}$$

$$\sum_n a_{n+1}s^n = a_1 + a_2s + a_3s^2 + \cdots = \frac{A(s) - a_0}{s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B(s) = \frac{A(s)(s+1) - A(0)}{s} = A(s) + \frac{A(s) - A(0)}{s}$$

Задача 7. b.

$$\vec{b} = a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2 \dots$$

$$b_n = \sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^n a_k \cdot 1^{n-k} = [s^n](A(s) \cdot (1 + s + s^2 + \dots)) = [s^n]A(s) \frac{1}{1-s}$$

Воспользовались формулой произведения производящих функций. Тогда:

$$B(s) = \frac{A(s)}{1-s}.$$

Задача 7. c.

$$\vec{b} = a_0, a_1\alpha, a_2\alpha^2 \dots$$

$$B(s) = a_0 + a_1\alpha s + a_2\alpha^2 s^2 + a_3\alpha^3 s^3 + \dots = \sum_n a_n \alpha^n s^n = \sum_n a_n (\alpha s)^n = A(\alpha s)$$

Задача 7. d.

$$\vec{b} = a_0, a_2, a_3 \dots$$

$$A(-s) = a_0 - a_1 s + a_2 s^2 - a_3 s^3 + \dots$$

$$A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + \dots$$

$$A(-s) + A(s) = 2(a_0 + a_2 s^2 + a_4 s^4 + a_6 s^6) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{A(s) + A(-s)}{2} \sim a_0, 0, a_2, 0, a_4, 0, a_6 \dots, \text{ тогда:}$$

$$\frac{A(\sqrt{s}) + A(-\sqrt{s})}{2} = \sum_n a_{2n} (\sqrt{s})^{2n} = \sum_n a_{2n} s^n = a_0 + a_2 s + a_4 s^2 + a_6 s^4.$$

Вообще корень не является производящей функцией, но в данном случае все нецелые степени занулились, поэтому мы можем считать это валидной производящей функцией.

Задача 9.

$$\begin{cases} a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 0 \\ a_{n+3} = -3a_{n+2} - 3a_{n+1} - a_n \end{cases} \Rightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x+1)^3$$

$$-3sA(s) = -3sa_0 - 3a_1 s^2 - 3a_2 s^3 - 3a_3 s^4 - \dots$$

$$-3s^2 A(s) = -3a_0 s^2 - 3a_1 s^3 - 3a_2 s^4 - \dots$$

$$-s^3 A(s) = -a_0 s^3 - a_1 s^4 - \dots$$

$$\text{Получили } M(s) + a_3 s^3 + a_4 s^4 + a_5 s^5$$

$$A(s)(-3s - 3s^2 - s^3) = M(s) + A(s) - a_0 - a_1 s - a_2 s^2$$

$$A(s) = \frac{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 - M(s)}{1 + 3s + 3s^2 + s^3} = \frac{1 + 3s + 3s^2}{1 + 3s + 3s^2 + s^3}$$

Задача 10.

$$a_n := \# \text{решений } (*) \begin{cases} n = 12x + 7y + 5z \\ x, y, z \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$a_n = b_n^{12, 7, 5}; \quad (b_n^{12}) = (1, \overset{0}{1}, \overset{1}{0}, 0, 0, 0, 0, \dots, \overset{10}{0}, \overset{11}{0}, \overset{12}{1}, \dots)$$

$$B^{12}(s) = \sum_n s^{12n} = \frac{1}{1 - s^{12}},$$

$$B^5(s) = \sum_n s^{5n} = \frac{1}{1 - s^5},$$

$$B^7(s) = \sum_n s^{7n} = \frac{1}{1 - s^7}$$

Итак, $b_n^{12, 7, 5} = \sum_{k+l+m=n} b_k^{12} \cdot b_l^7 \cdot b_m^5$

Вспомним формулу произведения $(A(s) \cdot B(s)) [s^n] = \sum_{k=0}^n a_n b_{n-k} = \sum_{k+m=n} a_k b_m$

Тогда $\sum_{k+l+m=n} b_k^{12} \cdot b_l^7 \cdot b_m^5 = [s^n] (B^{12}(s) B^7(s) B^5(s)) \Rightarrow$

$$\Rightarrow A(s) = \frac{1}{(1 - s^{12})(1 - s^7)(1 - s^5)}$$

Семинар 20 июня

Задача 8. а.

$$a_n = \sum_{k=0}^n F_k = F_{n+2} - 1 = b_n$$

$$A(n) = \frac{\text{Fib}(s)}{1 - s}, \quad B(s) = (F_2 - 1) + (F_3 - 1)s + (F_4 - 1)s^2 + \dots$$

$$\sum_n F_{n+2} s^n - \frac{1}{1 - s} = \frac{\text{Fib}(s) - F_1 s - F_0}{s^2} - \frac{1}{1 - s} =$$

$$= \frac{\text{Fib}(s) - 1s - 0}{s^2} - \frac{1}{1 - s}. \text{ Приравняем } A(s) \text{ к } B(s)$$

$$\frac{\text{Fib}(s)}{1 - s} = \frac{\text{Fib}(s) - s}{s^2} - \frac{1}{1 - s} \Rightarrow \text{Fib}(s) = \left(\frac{1 - s}{s^2} \right) (\text{Fib}(s) - s) - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Fib}(s) \left(1 - \frac{1 - s}{s^2} \right) = -\frac{1 - s}{s} - 1 = -\frac{1}{s} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \text{Fib}(s) \frac{s^2 + s - 1}{s^2} = -\frac{1}{s} \Rightarrow \text{Fib}(s) = \frac{s}{1 - s - s^2}$, это действительно является производящей функцией для чисел Фибоначчи, значит и наши последовательности равны.

Задача 8. с.

$$a_n = \sum_{k=0}^n F_k^2 = F_n F_{n+1} = b_n$$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \Leftrightarrow F_{n-1} = F_n - F_{n+1}$$

$$F_{n+2} \cdot F_{n-1} = F_n^2 - F_{n+1}^2$$

$F_{n+2}^2 + F_{n-1}^2 = 2(F_n^2 + F_{n+1}^2)$ - это линейное рекуррентное соотношение для квадратов чисел Фибоначчи.

$$c_n = F_n^2 \Rightarrow c_{n+2} = 2c_{n+1} + 2c_n - c_{n-1} \Rightarrow c_{n+3} = 2c_{n+2} + 2c_{n+1} - c_n$$

$C(s)$ - производящая функция для квадратов чисел Фибоначчи. Домножим её следующим образом:

$$-s^3 C(s) = -c_0 s^3 - c_1 s^4 - c_2 s^5 - \dots$$

$$2s^2 C(s) = 2c_0 s^2 + 2c_1 s^3 + 2c_2 s^4 + 2c_3 s^5 + \dots$$

$$2s C(s) = 2c_0 s + 2c_1 s^2 + 2c_2 s^3 + 2c_3 s^4 + 2c_4 s^5 + \dots$$

Сумма этих трёх будет равна:

$$C(s)(2s + 2s^2 - s^3) = M(s) + \sum_n c_{n+3} s^{n+3} = C(s) + M(s) - (c_0 + c_1 s + c_2 s^2) = (*)$$

Вычислим первые члены последовательности квадратов чисел Фибоначчи вручную:

$c_0 = 0, \quad c_1 = 1, \quad c_2 = 1$, тогда получаем:

$$(*) = C(s) + 2s^2 - s - s^2 = C(s) + s^2 - s = C(s)(2s + 2s^2 - s^3)$$

$$\text{Тогда справедливо выразить } C(s) = \frac{s^2 - s}{(-s^3 s^2 + 2s - 1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(s) = \frac{C(s)}{1 - s}$$

Дальше посчитаем разность квадратов чисел Фибоначчи:

$$F_{n+2}^2 - F_{n-1}^2 = 4F_n F_{n+1}$$

$$\text{Тогда } F_n F_{n+1} = b_n = \frac{1}{4} \left(\underbrace{F_{n+2}^2}_{c_{n+2}} - \underbrace{F_{n-1}^2}_{c_{n-1}} \right)$$

$$\text{Получаем } 4b_n = c_{n+2} - c_{n-1} \Rightarrow 4b_{n+1} = c_{n+3} - c_n = 2c_{n+2} + 2c_{n+1} - c_n - c_n \Rightarrow$$

$\Rightarrow b_{n+1} = \frac{c_{n+2} + c_{n+1} - c_n}{2}$. Знаем $b_0 = 0$, тогда:

$$\begin{cases} b_{n+1} = [s^n] \frac{B(s)-b_0}{s} \\ c_{n+2} + c_{n+1} - c_n = [s^n] \frac{1}{2} \left(\frac{C(s)-c_1s-c_0}{s^2} + \frac{C(s)-c_0}{s} - C(s) \right) \end{cases}$$

Тогда $B(s) = \frac{1}{2} \left(\frac{C(s)-s}{s} + C(s) - sC(s) \right) = \frac{s-2+s^2-s-s^3-s^2}{2(-s^3+2s^2+2s-1)}$

Время семинара закончилось, поэтому придётся наслово поверить, что это равно $\frac{C(s)}{1-s}$.