

# Лекции по дискретной математике 4 МОДУЛЬ.

Андрей Тищенко

2023/2024

**Лекция 12 апреля.**

Деревья

$\forall T$   $T$  -  $(m, n)$  граф тогда:

$T$  дерево  $\Leftrightarrow T$  связный ациклический

$\Leftrightarrow T$  минимально связан

$\Leftrightarrow T$  связан  $m = n - 1$

$\Leftrightarrow$  в  $T$  любые 2 вершины соединены ровно 1 простым путём.

Определение: граф называется минимально связным если из него нельзя удалить ребро без потери связности.

Определение: Пусть  $G = (V, E)$  - связный граф. Любое дерево  $T = (V, E')$ , такое что  $E' \subseteq E$ , (то есть  $T$  - подграф) называется остовным.

Теорема: В любом связном  $(n, m)$  графе  $G = (V, E)$  есть остовное дерево  $T$

Доказательство: Индукция по  $m$

$m = 0$ :  $n = 1$ ,  $T = G$ .

$m > 0$ : 1.  $G$  - дерево, тогда  $T = G$

2.  $G$  не дерево  $\Rightarrow$  не минимально связный  $\Rightarrow \exists x, y \quad xEy \wedge$   
ребро  $xy$  можно удалить без потери связности.  
 $G'$  - результат удаления ребра  $xy$   
 $G'$  -  $(n, m-1)$  связный граф  $\Rightarrow$  в  $G'$  есть остовное дерево  
 $T'$   
 $G = (V, E), G' = (V, E \setminus \{xy, yx\})$ . То есть  $T'$  подграф  $G'$ ,  
а  $G'$  подграф  $G \Rightarrow T := T'$

### Двудольные графы

Определение: граф  $G = (V, E)$  двудольный  $\Leftrightarrow \exists V_1, V_2 :$

$$\begin{cases} V_1 \cap V_2 = \emptyset \\ V_1 \cup V_2 = V \\ V_1, V_2 \neq \emptyset \\ x, y \in V_i \Rightarrow xy \notin E \end{cases}$$

Определение: граф  $G = (V, E)$  раскрашиваем в  $k$  цветов  $\Leftrightarrow \exists c : V \rightarrow \underline{k}$   
 $\forall x, y \quad (c(x) = c(y) \Rightarrow xy \in E)$

Утверждение:  $G$   $k$ -дольный  $\Rightarrow \forall l \geq k, G$  можно раскрасить в  $l$  цветов.

Теорема 2: (Кёнинга).

$\forall$  графа  $G = (V, E), |V| \geq 2$  следующие условия равносильны:

- (a)  $G$  двудольный
- (b) в  $G$  нет циклов нечётной длины
- (c) в  $G$  нет простого цикла нечётной длины

Доказательство:  $a \Rightarrow b$  допустим есть цикл нечётной длины:

$$x_1 x_2 x_3 x_4 \dots x_{2n} x_{2n+1} x_1$$

Без ограничения общности:

$$x_1 \in V_1 \Rightarrow x_2 \in V_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow x_{2n} \in V_2 \Rightarrow x_{2n+1} \in V_1 \Rightarrow x_1 \in V_2 \perp$$

$b \Rightarrow c$ . Если нет никакого цикла нечётной длины, то простого также не будет.  $c \Rightarrow a$ .

Лемма\* если граф  $G$  связан и  $|V| \geq 2$  и в  $G$  нет простых циклов нечётной длины, то  $G$  двудольный.

$$G = G_1 \sqcup G_2 \sqcup \dots \sqcup G_n$$

Ещё не может быть компонент порядка 1.

$G' = (V', E)$  связен,  $|V'| \geq 2$ , в  $G'$  нет простого цикла нечётной длины.

Рассмотрим произвольную  $z \in V$ , тогда  $\exists y \ zEy$

$d(u, w) :=$  длина кратчайшего пути между  $u, w$  в  $G'$

$$d(z, z) = 0, \ d(z, y) = 1$$

$$V_1 = \{x \in V' \mid d(z, x) \equiv 1(2)\}$$

$$V_2 = \{x \in V' \mid d(z, x) \equiv 0(2)\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_1 \cap V_2 = \emptyset \\ V_1 \cup V_2 = V' \\ y \in V_1 \neq \emptyset \wedge z \in V_2 \neq \emptyset \end{cases}$$

Предположим  $\exists u, w \in V_i \quad uEw \Rightarrow u \neq w$

$$d(z, u) \equiv d(z, w)(2)$$

Рассмотрим кратчайшие ( $\rightarrow$  простые) пути  $z \xrightarrow{p} u \wedge z \xrightarrow{q} w$

Пусть  $t :=$  самая правая общая точка  $z \xrightarrow{p} u, z \xrightarrow{q} w$  (самая правая - такая, что путь до  $u$  и  $w$  минимален).

$$z \xrightarrow{p} w = z \xrightarrow{p_1} t \xrightarrow{p_2} w$$

$$z \xrightarrow{q} u = z \xrightarrow{q_1} t \xrightarrow{q_2} u$$

$$\text{Утверждение: } \left| z \xrightarrow{p_1} t \right| = \left| z \xrightarrow{q_1} t \right|$$

Доказательство: Иначе без ограничения общности:

$$\begin{aligned} \left| z \xrightarrow{p_1} t \right| &> \left| z \xrightarrow{q_1} t \right| \\ \left| z \xrightarrow{q_1} t \xrightarrow{p_2} \right| &< \left| z \xrightarrow{p} w \right| \perp \left| z \xrightarrow{p} w \right| = d(z, w) = d(z, u) \\ \left| z \xrightarrow{p_1} t \right| + \left| t \xrightarrow{p_2} w \right| &\equiv \left| z \xrightarrow{q_1} t \right| + \left| t \xrightarrow{q_2} u \right| \\ \left| t \xrightarrow{p_2} w \right| &\equiv \left| t \xrightarrow{q_2} u \right| \end{aligned}$$

Рассмотрим цикл  $twu$ , он является простым, его длина будет равна:

$$\left| t \xrightarrow{p_2} w \right| + \left| t \xrightarrow{q_2} u \right| + 1 \equiv 1(2)$$

Но простых циклов длины 2 тут быть не может  $\perp$ .

Лемма 4. Если  $(n, m)$  граф  $G = (V, E)$  двудольный с долями  $V_1$  и  $V_2$ , то

$$\sum_{x \in V_1} d(x) = m = \sum_{x \in V_2} d(x)$$

Доказательство: Индукция по количеству рёбер.

$$m = 0: \forall x \, d(x) = 0$$

$m > 0$ : есть ребро  $uw$ , удалим его и получим  $G'$

Без ограничения общности:

$$uw \in E \Rightarrow u \in V_1, \, w \in V_2$$

$G'$  - двудольный  $(n, \, m - 1)$  граф с долями  $V - 1, \, V_2$

$$\sum_{x \in V_1} d(x) = \sum_{x \in V_1 \setminus \{u\}} (d_{G'}(x) + 1) = \sum_{x \in V_1} d_{G'}(x) + 1 = (m - 1) + 1 = m$$

Задача о свадьбах

Определение: граф  $G$  называется паросочетанием

$$\Leftrightarrow \forall x \, d(x) = 1$$

Условие для выдачи женщин замуж  $\forall S \subseteq V_1 \quad |E[S]| \geq |S|$

$T = \{t_1, \, t_2, \dots, \, t_n\}$ . Хотим построить инъекцию  $T \xrightarrow{f} \bigcup T = t_1 \cup \dots \cup t_n$ , также хотим  $\forall t \in T \, f(t) \in t$ .

Тогда нужно  $\forall S \subseteq T \quad |\bigcup S| \geq |S|$

## Лекция 19 апреля

### Теорема Холла:

Дано: двудольный граф  $G \, (W(\text{женщины}), \, M(\text{мужчины}), \, E), \, k = |W|$

Требуется выдать всех женщин замуж по любви без многоженства и многомужества

### Формально:

$$\exists f : W \rightarrow M$$

1.  $f$  - инъективно

2.  $\forall t \in E \, f(t)$

$$\exists f \text{ удовлетворяющее условию } \underset{\text{т. Холла}}{\Leftrightarrow} \forall S \subseteq W \quad |S| \leq |E[S]| \quad (*)$$

**Доказательство:**

”  $\Leftarrow$  ”

$\forall S \subseteq W \quad f$  - инъективно

$$S \sim f[S] \subseteq E[S]$$

$$S \lesssim E[S] \Rightarrow |S| \leq |E[S]|$$

”  $\Rightarrow$  ”

Индукция по  $m$

$$\forall t \ 1 = |\{t\}| \leq |E[\{t\}]| \Rightarrow \forall t \in W \ \exists x \ tEx \Rightarrow E \text{ - тотально для } W$$

**1й случай: E - инъективно**

$f(x) :=$  любой  $x \in E[\{x\}]$ . Тогда мы в шоколаде

**2й случай: E - не инъективно**

а.  $\exists S_0 \ (S_0 \neq \emptyset \wedge |S_0| = |E[S_0]|)$  Рассмотрим подграф  $G$ , индуцированный множеством  $S_0$

$$\begin{aligned} S_0 \neq W &\Rightarrow |S_0| < |W| \\ \Rightarrow |W \setminus S_0| \neq \emptyset &\Rightarrow \text{не все ребра в } G_0 \\ \Rightarrow \text{размер}(G_0) &< m \end{aligned}$$

Допустим для  $G_0$  выполнено условие (\*)

$$S' \subseteq S_0 \Rightarrow E[S'] \subseteq E[S_0] \Rightarrow |S'| \leq |E[S']|$$

Вывод: по предположению индукции для  $G_0$  есть соответствующая функция  $f_0 : S_0 \rightarrow E[S_0]$

$G_1$  = это те вершины и ребра, которые не вошли в  $G_0$ .

Утверждение: Для  $G_1$  выполнено (\*).

Пусть  $S' \subseteq W \setminus S_0$

$$|E[S_0]| + |S'| = |S_0| + |S'| = |S_0 \cup S'| \leq |E[S_0 \cup S']| = |E[S_0] \cup E[S']| =$$

$$= |(E[S'] \setminus E[S_0]) \cup E[S_0]| = |E[S'] \setminus E[S_0]| + |E[S_0]|$$

Получаем сокращением  $|S'| = |E[S'] \setminus E[S_0]|$

Так как  $|S_0| \neq 0$ , то размер  $(G_0) > 0 \Rightarrow \text{размер}(G_1) < m$ .

По принципу индукции для  $G_1$ , есть  $f_1 : W \setminus S_0 \rightarrow E_{G_1}[W \setminus S_0]$

$$f := f_0 \cup f_1$$

$$6. \forall S (S \neq W \wedge S \neq \emptyset \Rightarrow |S| < |E[S]|)$$

так как  $E$  - не инъекция, то:

$$\exists x \in M \exists t_1, t_2 \in W (t_1 \neq t_2 \wedge t_1 E x \wedge t_2 E x) \Rightarrow \text{размер}(G_1) < 1$$

$$|E_{G_1}[S]| \geq |E[S]| - 1$$

$$\Rightarrow |S| < |E[S]| \leq |E_{G_1}[S]| + 1 \Rightarrow |S| \leq |E_{G_1}[S]|$$

По предположению индукции для  $G_1$ , есть  $f_1 : S \rightarrow E_{G_1}[S] \subseteq E_G[S]$

$$f := f_1$$

## Теорем Холла о "представителях"

Дано  $U$  - конечное (не обязательно):

$$T = \{t_1, \dots, t_k\} \subseteq \mathcal{P}(U)$$

тогда в конкретном  $t$  можно инъективно выбрать по элементу  $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \forall S \subseteq T |S| \leq \left| \bigcup_{=t_{i_1} \cup \dots \cup t_{i_q}} S \right|$$

Строим граф  $(T, U, E)$

$$t E x :\Leftrightarrow x \in t$$

$$E[\{t_{i_1} \cup \dots \cup t_{i_q}\}] = t_{i_1} \cup \dots \cup t_{i_q}$$

**т. Дилуорса  $\Rightarrow$  т. Холла**

тут идут рисуночки, сам нарисуешь (демонстрация без доказательства).

Понял, Вова. Скиньте рисуночки, пожалуйста

## Ориентированные графы

### Определение:

Ориентированный граф (орграф) - это пара  $(V, A)$ , где  $V \neq \emptyset$ ,  $A \subseteq V^2$

$$N_+(x) := A[\{x\}]$$

$$N_-(x) := A^{-1}[\{x\}]$$

Показатель исхода

$$d_+(x) = |N_+(x)|$$

Показатель захода

$$d_-(x) = |N_-(x)|$$

### Утверждение:

$$\sum_{x \in V} d_+(x) = |A| = \sum_{x \in V} d_-(x)$$

### Определение:

Турнир - это орграф, такой, что

$$1 \quad \forall x \neg xAx$$

$$2 \quad \forall x, y (x \neq y \Rightarrow (xAy \Leftrightarrow \neg yAx))$$

## Беспредельный анализ

Рассматриваем последовательности:  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ,  $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$

$$f'(x) = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x}$$

Перефразируем в терминах "бесконечно малых"

$$f'(x) = \frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x}, \text{ где } \delta x \text{ бесконечно малая}$$

Для последовательностей зададим

$$\Delta a_n := a_{n+1} - a_n$$

Вторая производная

$$\begin{aligned} f'' &= \frac{f'(x + \delta x) - f'(x)}{\delta x} = \frac{1}{\delta x} \left( \frac{f(x + 2\delta x) - 2f(x + \delta x) + f(x)}{\delta x} \right) = \\ &= \frac{f(x + 2\delta x) - 2f(x + \delta x) + f(x)}{(\delta x)^2} \end{aligned}$$

чем то похоже на  $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

Для последовательностей

$$\Delta^2 a_n = \Delta a_{n+1} - \Delta a_n = a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n$$

$$\Delta^3 a_n = \Delta^2 a_{n+1} - \Delta^2 a_n = a_{n+3} - 3a_{n+2} + 3a_{n+1} - a_n$$

Зададим  $S$ :

$$S : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \quad S a_n = a_{n+1}$$

Тогда получаем дельту

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n = S a_n - a_n = (S - 1)a_n$$

Получаем  $\Delta = S - 1 \Rightarrow S = \Delta + 1 \Rightarrow S^k = (\Delta + 1)^k$  Веселый результат

$$a_{n+k} = S^k a_n = (\Delta + 1)^k a_n = \sum_{t=0}^k C_k^t \Delta^t a_n = \sum_{t=0}^k \frac{\Delta^t a_n}{t!} k^{(t)}$$

где  $k^{(t)} = k \cdot (k - 1) \cdot \dots \cdot (k - t + 1)$

## Лекция 26 апреля

Линейное пространство (Seq)

**Носитель:**  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ni \vec{a} = (a_0, a_1, \dots) = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad \vec{a} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$

**Скаляр:**  $\mathbb{R}$

$$\alpha \in \mathbb{R} : \alpha \vec{a} = (\alpha a_0, \alpha a_1, \dots), \quad (\alpha \vec{a})_n = \alpha a_n$$

**Сложение:**

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots), \quad (\vec{a} + \vec{b})_n = a_n + b_n$$

**Утверждение 1:** При этом выполняются все аксиомы линейного пространства.



**Проверим дистрибутивность:**

$$\begin{aligned}\left(\alpha(\vec{a} + \vec{b})\right)_n &= \alpha(a_n + b_n) = \alpha a_n + \alpha b_n = (\alpha \vec{a})_n + (\alpha \vec{b})_n = (\alpha \vec{a} + \alpha \vec{b})_n \\ ((\alpha + \beta)\vec{a})_n &= (\alpha + \beta)a_n = \alpha a_n + \beta a_n = (\alpha \vec{a} + \beta \vec{a})_n\end{aligned}$$

**Ещё факты:**

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{0} &= \vec{a} \\ \vec{0} &= (0, 0, 0, \dots) \\ \vec{a} + \vec{b} &= \vec{b} + \vec{a} \\ \vec{a} + (-\vec{a}) &= \vec{0} \\ (-\vec{a})_n &= -a_n\end{aligned}$$

**Определение:**  $F : Seq \longrightarrow Seq$  линейная

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \forall \vec{a}, \vec{b} \in Seq \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\ F(\alpha \vec{a} + \beta \vec{b}) &= \alpha F(\vec{a}) + \beta F(\vec{b})\end{aligned}$$

**Утверждение 2:**

Каждый скаляр  $\alpha \in \mathbb{R}$  можно рассматривать как линейный оператор:

$$\begin{aligned}\alpha : Seq \rightarrow Seq \quad \alpha(\vec{a}) &= (\alpha a_0, \alpha a_1, \dots) \\ \alpha(\alpha' \vec{a} + \beta' \vec{b}) &= \alpha(\alpha' \vec{a}) + \alpha(\beta' \vec{b}) = \alpha'(\alpha \vec{a}) + \beta'(\alpha \vec{b})\end{aligned}$$

Ещё линейные операторы

**Сдвиг:**  $S : Seq \longrightarrow Seq$

$$\begin{aligned}S(a_0, a_1, a_2, \dots) &= (a_1, a_2, a_3, \dots) \\ (S\vec{a})_n &= a_{n+1} \\ &= Sa_n \\ S(\alpha a_n + \beta b_n) &= (\alpha \vec{a} + \beta \vec{b})_{n+1} = \alpha a_{n+1} + \beta b_{n+1} = \alpha Sa_n + \beta Sb_n\end{aligned}$$

**Разность:**  $\Delta : Seq \longrightarrow Seq$

$$\begin{aligned}(\Delta \vec{a})_n &= a_{n+1} - a_n \\ &= \Delta a_n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\Delta\left(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}\right)\right)_n &= \left(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}\right)_{n+1}-\left(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}\right)_n = \alpha a_{n+1}+\beta b_{n+1}-\alpha a_n-\beta b_n = \\
&= \alpha(a_{n+1}-a_n)+\beta(b_{n+1}-b_n)=\alpha\Delta a_n+\beta\Delta b_n=\left(\alpha\Delta\vec{a}+\beta\Delta\vec{b}\right)_n
\end{aligned}$$

### Утверждение 3:

Линейные операторы  $Seq \longrightarrow Seq$  образуют кольцо, то есть их можно "разумным образом" складывать и умножать друг на друга.

Допустим  $F, G \in L(Seq)$ :

$$(F+G)(\vec{a}) = F(\vec{a}) + G(\vec{a})$$

$$F \cdot G = F \circ G \text{ ассоциативно}$$

### Есть нулевой элемент

$$F+0 = F, \quad 0 \in L(Seq)$$

$$(F+0)(\vec{a}) = F(\vec{a}) + 0(\vec{a}) = F(\vec{a})$$

### Обратный по сложению

$$F+(-F) = 0, \quad -F = -1 \circ F$$

### Нейтральный по умножению

$$F \cdot 1 = F = 1 \cdot F, \quad 1(\vec{a}) = \vec{a}$$

### Дистрибутивность

$$F(G+H) = FG + FH$$

Применим это к  $\vec{a}$ :

$$\begin{aligned}
(F(G+H))(\vec{a}) &= (F \circ (G+H))(\vec{a}) = F((G+H)\vec{a}) = F(G(\vec{a}))+F(H(\vec{a})) = \\
&= (FG+FH)(\vec{a}) = (G+H)(F(\vec{a})) = G(F(\vec{a})) + H(F(\vec{a})) = (GF+HF)(\vec{a})
\end{aligned}$$

**Утверждение 4:**

Скаляр коммутирует с любым линейным оператором:

**Доказательство:** пользуемся линейностью  $F$

$$(\alpha F)(\vec{a}) = \alpha(F(\vec{a})) = F(\alpha\vec{a}) = (F\alpha)(\vec{a})$$

**Уточнение:**

$$\Delta_n = Sa_n - 1a_n = ((S - 1)\vec{a})_n \Rightarrow \Delta = S - 1 \Rightarrow S = \Delta + 1$$

Вспомним биномиальную теорему:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (x + 1)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k 1^{n-k}$$

**Лемма 5:**

$$\forall F \in L(Seq) \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (F + \alpha)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k F^k (\alpha)^{n-k}$$

**Доказательство:** индукция по  $n$

База:

$$(F + \alpha)^0 = 1 = \sum_{k=0}^0 C_0^0 F^0 \alpha^{0-0} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

Шаг: пользуемся предположением индукции, дистрибутивностью

$$\begin{aligned} (F + \alpha)^{n+1} &= (F + \alpha)(F + \alpha)^n = (F + \alpha) \sum_{k=0}^n C_n^k F^k \alpha^{n-k} = \sum_{k=0}^n F C_n^k F^k \alpha^{n-k} + \\ &+ \sum_{k=0}^n \alpha C_n^k F^k \alpha^{n-k} \stackrel{\text{YTB}^4}{=} \sum_{k=0}^n C_n^k F^{k+1} \alpha^{n-k} + \sum_{k=0}^n C_n^k F^k \alpha^{n+1-k} = \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} F^k \alpha^{n+1-k} + \\ &+ \sum_{k=0}^n C_n^k F^k \alpha^{n+1-k} = \underbrace{C_n^0}_{C_{n+1}^0} F^0 \alpha^{n+1} + \sum_{k=1}^n \underbrace{(C_n^{k+1} + C_n^k)}_{=C_{n+1}^k} F^k \alpha^{n+1-k} + \underbrace{C_n^n}_{=C_{n+1}^{n+1}} F^{n+1} \alpha^0 = \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k F^k \alpha^{n+1-k} \end{aligned}$$

**Следствие 6:** разность порядка  $t$

$$\begin{aligned}\Delta^t &= (s-1)^t = \sum_{k=0}^t C_t^k S^k (-1)^{t-k} = \sum_{k=0}^t C_t^k S^{t-k} (-1)^k = \\ &= \sum_{k=0}^t (-1)^k C_t^k S^{t-k}\end{aligned}$$

**Следствие 7:**

$$\begin{aligned}\Delta^t a_n &= \sum_{k=0}^t (-1)^k C_t^k S^{t-k} a_n = \sum_{k=0}^t (-1)^k C_t^k a_{n+t-k} \\ \Delta^2 a_n &= C_2^0 a_{n+2} - 1C_2^1 a_{n+1} + C_2^2 a_n = a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n \\ \Delta^3 a_n &= a_{n+3} - 3a_{n+2} + 3a_{n+1} - a_n\end{aligned}$$

**Пример:**

Первая степень

$$\begin{aligned}a_n &= a + dn \\ \Delta a_n &= a_{n+1} - a_n = a + d(n+1) - a - dn = d \\ \Delta^2 a_n &= \Delta d = d - d = 0\end{aligned}$$

Вторая степень

$$\begin{aligned}a_n &= a + bn + cn^2 \\ \Delta a_n &= a_{n+1} - a_n \\ &= c(n+1)^2 + b(n+1) - cn^2 - bn \\ &= 2cn + c + b \\ \Delta^2 a_n &= 2c(n+1) - 2cn = 2c \\ \Delta^3 a_n &= 0\end{aligned}$$

**Лемма 8:**

Если  $P(n)$  - многочлен степени  $m > 0$ , то  
 $\Delta P(n)$  - многочлен степени  $m - 1$ , а  $\Delta^{m+1}P(n) = 0$

**Доказательство:** индукция по  $m$

База:

Шаг:

$$P(n) = \overset{\neq 0}{\alpha} n^m + \overset{\deg \leq m-1}{Q(n)}$$

$$\Delta P(n) = P(n+1) - P(n) = \alpha(n+1)^m + Q(n+1) - \alpha n^m - Q(n) =$$

$$= \alpha((n+1)^m - n^m) + \Delta Q(n) = \alpha(C_m^1 n^{m-1} + C_m^2 n^{m-2} + \dots) + \overset{\text{по ПИ } \deg \leq m-2}{Q'(n)}$$

Итак, степень  $m - 1$ .

Следствие:

$\deg(\Delta^m P(n)) = 0 \Rightarrow \Delta^m P(n) = \text{const} \Rightarrow \Delta^{m+1}P(n) = 0$ . Отсюда рассмотрим:

$$0 = \Delta^{m+1}a_n = \sum_{k=0}^{m+1} (-1)^k C_{m+1}^k a_{n+m+1-k}$$

$$a_{n+m+1} = \sum_{k=1}^{m+1} (-1)^{k-1} C_{m+1}^k a_{n+m+1-k}$$

**Следствие 9:**

Если  $a_n = P(n)$ , многочлен степени  $m > 0$ , то

$$a_{n+m+1} = \sum_{k=1}^{m+1} (-1)^{k-1} C_{m+1}^k a_{n+m+1-k}$$

**Пример:**

$$\deg a_n = 1 \Rightarrow a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$$

$$\deg a_n = 2 \Rightarrow a_{n+3} = 3a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n$$

**Следствие 10:**

$$S^t = (\Delta + 1)^t = \sum_{k=0}^t C_t^k \Delta^k$$

$$\begin{aligned}
a_{n+t} &= S^t a_n = \sum_{k=0}^t C_t^k \Delta^k a_n = \sum_{k=0}^t \frac{\overbrace{t(t-1)\dots(t-k+1)}^{t^{(k)}}}{k!} \Delta^k a_n = \\
&= a_n + \frac{\Delta a_n}{1!} t^{(1)} + \frac{\Delta^2 a_n}{2!} t^{(2)} + \dots + \frac{\Delta^t a_n}{t!} t^{(t)}
\end{aligned}$$

**Лекция 10 мая.**

Воспоминания:

$$(1). \Delta^t a_n = \sum_{k=0}^t (-1)^k C_t^k a_{n+t-k}$$

$$\Delta^3 a_n = a_{n+3} - 3a_{n+2} + 3a_{n+1} - a_n$$

(2). если  $a_n$  - многочлен степени  $m > 0$ , то  $\Delta^{m+1} a_n = 0$ .

Из этих фактов:

$$\begin{aligned}
0 &= \Delta^{m+1} a_n = \sum_{k=0}^{m+1} (-1)^k C_{m+1}^k a_{n+m+1-k} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \sum_{k=1}^{m+1} (-1)^{k-1} C_{m+1}^k a_{n+m+1-k} = a_{n+m+1}
\end{aligned}$$

При  $m = 2$  получим рекуррентное соотношение:

$$a_{n+3} = 3a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n$$

Определение:

Пусть  $\vec{a} = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  удовлетворяет рекуррентному соотношению  $\varphi$  порядка  $k > 0$ , тогда

$$\varphi : \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R} \wedge \forall n \ a_{n+k} = \varphi(a_{n+k-1}, a_{n+k-2}, \dots, a_n, n)$$

Определение:

Если  $\varphi$  не зависит от  $n$ , ( $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^k \ \forall n, m \ \varphi(\vec{x}, n) = \varphi(\vec{x}, m)$ ), то такое рекуррентное соотношение называется стационарным.

Попробуем привести нестационарное к стационарному, выразим факториал.

$$\begin{cases} a_{n+1} = (n+1)a_n \\ a_{n+2} = (n+2)a_{n+1} \end{cases} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} + 1 = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{n+2} = \frac{a_{n+1}^2 + a_{n+1}a_n}{a_n}$$

Получили стационарное рекуррентное соотношение порядка 2.

Рассмотрим последовательность  $a_{n+1} = a_n$ . Ему удовлетворяют все константы (и только они).

Добавим условие:

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n \\ a_0 = \alpha \end{cases} \Rightarrow \exists! \text{последовательность : } \forall n \ a_n = \alpha$$

Теорема 1:

Пусть  $\varphi$  - рекуррентное соотношение порядка  $k$  и  $\forall i \ \alpha_i \in \mathbb{R}$ , тогда рекуррентная задача

$$\begin{cases} \forall n \ a_{n+k} = \varphi(a_{n+k-1}, \dots, a_n, n) \\ a_0 = \alpha_0, \dots, a_{k-1} = \alpha_{k-1} \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

Доказательство:

Существование очевидно (по первым  $k$  членам последовательность восстанавливается), то есть  $\varphi$  даёт "рецепт" вычисления последовательности  $a_n$ .

Пусть  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  удовлетворяют условию. Допустим  $\vec{a} \neq \vec{b} \Rightarrow \exists n \ a_n \neq b_n \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists n \ (a_n \neq b_n \wedge \forall m < n \ a_m = b_m)$

1 случай.  $n < k$

$a_n = \alpha_n = b_n \Rightarrow \perp$

2 случай.  $n \geq k$

$a_{n+k} = \varphi(a_{n+k-1}, \dots, a_n, n)$

$a_{n+k} = \varphi(b_{n+k-1}, \dots, b_n, n)$

По предположению индукции все аргументы функции равны, значит равны  $a_{n+k}$  и  $b_{n+k}$

Линейное стационарное рекуррентное соотношение

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \dots + c_k a_n + c_0$$

Если  $c_0 = 0$ , то соотношение однородное.

Теорема 2:

$$\exists c'_1, \dots, c'_{k+1} \in \mathbb{R}, \exists \beta_0, \dots, \beta_k \in \mathbb{R}$$

$$(*) \begin{cases} a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + \dots + c_k a_n + c_0 \\ a_0 = \alpha_0, \dots, a_{k-1} = \alpha_{k-1} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\#) \begin{cases} a_{n+k+1} = c'_1 a_{n+k} + \dots + c'_{k+1} a_n \\ a_0 = \beta_0, \dots, a_{k-1} = \beta_{k-1}, a_k = \beta_k \end{cases}$$

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \dots + c_k a_n + c_0$$

$$a_{n+k+1} = a_{(n+1)+k} = c_1 a_{n+k} + c_2 a_{n+k-1} + \dots + c_k a_{n+1} + c_0$$

Домножим первое на  $-1$ , сложим со вторым:

$$\begin{aligned} a_{n+k+1} &= \overbrace{(c_1 + 1)a_{n+k}}^{c'_1} + \overbrace{(c_2 - c_1)a_{n+k-1}}^{c'_2} + \overbrace{(c_3 - c_2)a_{n+k-2}}^{c'_3} + \dots \\ &\dots + \underbrace{(c_k - c_{k-1})a_{n+1}}_{c'_k} - \underbrace{c_k a_n}_{c'_{k+1}} + 0 \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } \beta_0 := \alpha_0, \dots, \beta_{k-1} = \alpha_{k-1}, \beta_k = c_1 \alpha_{k-1} + c_2 \alpha_{k-2} + \dots + c_k \alpha_0 + c_0$$

У  $(\#)$  не может быть других решений, так как у неё может быть не более одного решения, а решение  $(*)$  является решением  $(\#)$ , значит их решения совпадают.

Пример:

$$\begin{cases} a_{n+1} = ca_n \\ a_0 = \alpha \end{cases} \Rightarrow a_1 = c\alpha, a_2 = c^2\alpha, a_3 = c^3\alpha, \dots$$

Видно, что  $a_n = c^n \alpha$  - это решение, по теореме 1 других решений нет.

В терминах линейных операторов

$$a_{n+1} - ca_n = 0 \Leftrightarrow \exists u \ a_n = c^n u$$

$$Sa_n - ca_n = 0$$

$$\forall n \ (S - c)a_n = 0$$

$$(S - c)\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \in \ker(S - c)$$

$$\ker(S - c) = \{u, (1, c, c^2, c^3, \dots) \mid u \in \mathbb{R}\} = \langle (1, c, c^2, \dots) \rangle,$$

то есть в ядре находятся всевозможные геометрические последовательности.

Пример: порядок 2.



$$\begin{cases} a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n \\ a_0 = \pi, \quad a_1 = e \end{cases}$$

Рассмотрим характеристический многочлен  $x^2 - 5x + 6$ , то  $\forall n \quad x^{n+2} = 5x^{n+1} - 6x^n$ , то есть  $a_n = x^n$  удовлетворяет рекуррентному соотношению  $x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = 3, 2$

Итак, последовательности  $2^n, 3^n$  удовлетворяют рекуррентному соотношению. Легко видеть, что  $\forall u, v \in \mathbb{C} \quad a_n = u2^n + v3^n$  также удовлетворяет рекуррентному соотношению.

$$a_{n+2} = u2^{n+2} + v3^{n+2} = u(6 \cdot 2^{n+1} - 6 \cdot 2^n) + v(5 \cdot 3^{n+1} - 6 \cdot 3^n) = 5(u \cdot 2^{n+1} + v \cdot 3^{n+1}) - 6(u \cdot 2^n + v \cdot 3^n) = 5a_{n+1} - 6a_n$$

Подберём  $u, v$  так, что

$$\begin{cases} u + v = u2^0 + v3^0 = a_0 = \pi \\ 2u + 3v = u2^1 + v3^1 = a_1 = e \end{cases}$$

$$\det = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 \neq 0, \quad 2u + 3(\pi - u) = e \Rightarrow \begin{cases} u = 3\pi - e \\ v = e - 2\pi \end{cases}$$

Ответ:  $a_n = (3\pi - e)2^n + (e - 2\pi)3^n$

В терминах операторов:

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$$

$$S^2 a_n - 5S a_n + 6a_n = 0$$

$$(S^2 - 5S + 6)\vec{a} = \vec{0}$$

$$\begin{aligned} (S-3)(S-2)\vec{a} &\Rightarrow \begin{cases} \ker(S-2)(S-3) \supseteq \ker(S-3) = \langle (1, 3, 3^2, \dots) \rangle \\ \ker(S-3)(S-2) \supseteq \ker(S-2) = \langle (1, 2, 2^2, \dots) \rangle \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \langle (1, 2, 2^2, \dots), (1, 3, 3^2, \dots) \rangle \subseteq \ker(S-2)(S-3) \end{aligned}$$

### Лекция 17 мая.

$a_{n+2} = c_1 a_{n+1} + c_2 a_n$ . Характеристический многочлен  $x^2 = c_1 x + c_2$

$$a_{n+2} - c_1 a_{n+1} - c_2 a_n = 0 \Leftrightarrow (S^2 - c_1 S - c_2)\vec{a} = \vec{a}$$

$$\begin{cases} a_{n+2} = a_{n+1} + a_n & (*) \\ a_1 = 1; a_0 = 0 \end{cases}$$
 - числа Фибоначчи. Рассмотрим характеристический многочлен:

$$x^2 = x + 1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618 = \phi \\ x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \approx -0,618 \end{cases}$$

$x_2 = -\frac{1}{x_1} = (-\phi)^{-1}$ ,  $|x_2| < 1$   
 $x_i^2 = x_i + 1 \Rightarrow x_i^{n+2} = x_i^{n+1} + x_i$ . Тогда последовательность  $x_i^n$  будет удовлетворять (\*). Из линейности:

$$\forall u, v \in \mathbb{R} \quad ux_1^n + vx_2^n \text{ удовлетворяет } (*)$$

Хотим выбрать  $u, v$  такие, чтобы удовлетворять начальным условиям:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 0 = a_0 = ux_1^0 + vx_2^0 = u + v \\ 1 = a_1 = ux_1 + vx_2 = u\phi - \frac{v}{\phi} \end{cases}, \det = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \phi & \frac{1}{\phi} \end{vmatrix} = \frac{1}{\phi} - \phi \neq 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow v = -u, \quad 1 = u\phi + \frac{u}{\phi} = u \left( \phi + \frac{1}{\phi} \right) \Rightarrow u = \frac{\phi}{\phi^2 + 1} = \frac{\phi}{\phi + 2} = \frac{1}{1 + \frac{2}{\phi}} = \\ & = \frac{1}{1 + \frac{4}{1 + \sqrt{5}}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{5 + \sqrt{5}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{\sqrt{5}(1 + \sqrt{5})} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow v = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

Пользовались соотношением  $x^2 = x + 1 \Rightarrow x^2 + 1 = x + 2 \Rightarrow \phi^2 + 1 = \phi + 2$

$$\text{Тогда } a_n = \frac{x_1^n}{\sqrt{5}} - \frac{x_2^n}{\sqrt{5}} = \frac{\phi^n - (-\phi)^n}{\sqrt{5}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\phi^n}{\sqrt{5}}$$

Рассмотрим систему:  $\begin{cases} a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n & (*) \\ a_1 = 1; a_0 = 2 \end{cases}$ ,  $x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow (x - 3)^2 = 0$ ,  $x_1, x_2 = 3$  Нужно ещё одно линейно независимое решение, иначе  $\det$  обнулится. Домножим характеристический многочлен на  $x^{n+1}$ :

$$x^{n+1}(x - 3)^2 = x^{n+3} - 6x^{n+2} + 9x^{n+1} = 0$$

Корни: 0 кратности  $n + 1$  и 3 кратности 2.

**Утверждение:**

Если  $x_0$  - корень многочлена  $P(x)$  кратности  $\geq 2$ , то  $x_0$  - корень  $P'(x)$ .

**Доказательство:**

$P(x) = (x-x_0)^2 Q(x) \Rightarrow P'(x) = 2(x-x_0)Q(x) + (x-x_0)^2 Q'(x) \Rightarrow P'(x_0) = 0$   
Вернёмся к нашей задаче:

$$P'(x) = (n+3)x^{n+2} - 6(n+2)x^{n+1} + 9(n+1)x^n, \quad P'(3) = 0$$

$$\underbrace{(n+3)3^{n+2}}_{a_{n+2}} = 6\underbrace{(n+2)3^{n+1}}_{a_{n+1}} - 9\underbrace{(n+1)3^n}_{a_n}$$

Итак,  $a_n = (n+1)3^n$  удовлетворяет (\*)

$$\forall u, v : u3^n + v(n+1)3^n, \text{ удовлетворяет } (*)$$

Получаем систему:  $\begin{cases} 2 = a_0 = u + v \\ 1 = a_1 = 3u + 6v \end{cases}, \det = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 3 = 3 \neq 0$

$$v = 2 - u$$

$$1 = 3u + 6(2 - u) = -3u + 12$$

$$u = \frac{11}{3}$$

$$v = -\frac{5}{3}$$

Рассмотрим для комплексных чисел (изначальное рекуррентное соотношение поменяется):

$$x^2 + 5x + 9 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{-11}}{2} = \frac{-5 \pm i\sqrt{11}}{2}, \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 = u + v \\ 1 = ux_1 + vx_2 \end{cases} \cdot 2 \Rightarrow \begin{cases} v = 2 - u \\ 2 = u(-5 + i\sqrt{11}) + (2 - u)(-5 - i\sqrt{11}) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v = 2 - u \\ 2 = 2ui\sqrt{11} - 10 - 2i\sqrt{11} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = 2 - u \\ 12 + i2\sqrt{11} = ui2\sqrt{11} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v = 2 - u \\ 12i - 2\sqrt{11} = -2u\sqrt{11} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = 1 + \frac{6i}{\sqrt{11}} \\ u = 1 - \frac{6i}{\sqrt{11}} \end{cases}$$

$$a_n = \left(1 - \frac{6i}{\sqrt{11}}\right) \left(\frac{-5 + i\sqrt{11}}{2}\right)^n + \left(1 + \frac{6i}{\sqrt{11}}\right) \left(\frac{-5 - i\sqrt{11}}{2}\right)^n$$

### Теорема 1:

Рассмотрим рекуррентную задачу

$$\begin{cases} a_{n+2} = c_1 a_{n+1} + c_2 a_n \\ a_0 = \alpha, a_1 = \beta \end{cases}, \text{ где } c_2 \neq 0$$

Тогда:

1. Если  $D = c_1^2 + 4c_2 \neq 0$  (определитель характеристического многочлена), то

$$\exists u, v \ a_n = ux_1^n + vx_2^n, \text{ где } x_1, x_2 - \text{корни } P(x) = x^2 - c_1x - c_2$$

2. Если  $D = 0$ , то

$$\exists u, v \ a_n = ux_1^n + v(n+1)x_1^n$$

### Доказательство:

1.

Как мы видели  $\forall n, v \ ux_1^n + vx_2^n$  удовлетворяют (\*), СЛАУ:

$$\begin{cases} \alpha = u + v \\ \beta = ux_1 + vx_2 \end{cases}, \text{ имеет } \det = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1 \neq 0 \Rightarrow \text{решаема}$$

2.

Как мы видели  $\forall u, v \ ux_1^n + v(n+1)x_1^n$  удовлетворяет (\*), СЛАУ:

$$\begin{cases} \alpha = u + v \\ \beta = ux_1 + 2vx_1 \end{cases}, \text{ имеет } \det = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & 2x_1 \end{vmatrix} = x_1 \neq 0$$

Единственный корень не равен 0, так как свободный член не равен 0 (требовали  $c_2 \neq 0$ ).

### Производящие функции

Рассмотрим конечные последовательности:

$(a_0, a_1, \dots, a_n)$ . Её можно закодировать многочленом:

$$P_{\vec{a}}(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = \sum_{k=0}^n a_kx^k$$

Многочлены мы умеем складывать:

$$P_{\vec{a}}(x) + P_{\vec{b}}(x) = (a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) + (b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m) =$$

Без ограничения общности полагаем  $n \leq m$ :

$$= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_n + b_n)x^n + (0 + b_{n+1})x^{n+1} + \dots + (0 + b_m)x^m = P_{\vec{a} + \vec{b}}(x)$$

Также мы умеем умножать многочлены:

$$P_{\vec{a}}(x) \cdot P_{\vec{b}}(x) = (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n) \cdot (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m) =$$

$$a_0b_0 + x(a_0b_1 + a_1b_0) +$$

$$+ x^2(a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0) + \dots + x^t \sum_{k=0}^t a_k b_{t-k} = P_{\vec{a} \cdot \vec{b}}(x).$$

Раскодировав данный многочлен, получаем определение произведения последовательностей (конечных).

### Определение:

Для последовательностей  $(a_n)$ ,  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$   $n$ -ый элемент их произведения определяется:

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

Мы можем рассматривать данную операцию как умножение "бесконечных многочленов" (формальные степенные ряды).

### Определение:

Формальным рядом называется ряд, о сходимости которого мы не говорим:

$$A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

$A(x)$  - производящая функция последовательности  $\vec{a}$

### Свойства операций с последовательностями:

$$A(S) + B(S) = \sum_n (a_n + b_n) S^n$$

$$A(S) \cdot B(S) = \sum_n \left( \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) S^n$$

## Теорема 2.

1. Сложение коммутативно и ассоциативно.
2. Любой многоЧлен - это производящая функция последовательности, где лишь конечно много ненулевых членов.
3. Умножение коммутативно, ассоциативно и дистрибутивно относительно сложения:

$$A(S)(B(S) + C(S)) = A(S)B(S) + A(S)C(S)$$

### Доказательство:

Коммутативность умножения:

$$(A + B)S^n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \underset{m=n-k}{=} = \sum_{m=0}^n a_{n-m} b_m = \sum_{k=0}^n b_k a_{n-k} = (B + A)S^n$$

Ассоциативность умножения ( $[x](S^n)$  подразумевает, что  $x$  является коэффициентом при  $S^n$ ):

$$\begin{aligned} [(A+B)C](S^n) &= \sum_{k=0}^n \left( \sum_{l=0}^k a_l b_{k-l} \right) c_{n-k} = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^k a_l b_{k-l} c_{n-k} = \sum_{\substack{(x_1, x_2, x_3) \\ x_1+x_2+x_3=n}} a_{x_1} b_{x_2} c_{x_3} = \\ &= [A(B+C)](S^n) \end{aligned}$$

Дистрибутивность умножения:

$$[A(B+C)](S^n) = \sum_{k=0}^n a_k (b_{n-k} + c_{n-k}) = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} + \sum_{k=0}^n a_k c_{n-k} = [AB](S^n) + [AC](S^n)$$

### Определение:

Операция подстановки для  $A(S) = \sum_n a_n S^n$ ,  $B(t) = \sum_n b_n t^n$ ,  $b_0 = 0$ :

$$A(B(t)) = a_0 + \underbrace{a_1 B(t)}_{\deg \geq 1} + \underbrace{a_2 (B(t))^2}_{\deg \geq 2} + \underbrace{(a_3 B(t))^3}_{\deg \geq 3} + \dots$$

Тогда:

$$d_0 = a_0$$

$$d_1 = a_1 b_1$$

$$d_2 = a_1 b_2 + a_2 b_1^2$$

$$d_3 = a_1 b_3 + a_2 (b_1 b_2 + b_2 b_1) + a_3 b_1^3$$

$$d_4 = a_1 b_4 + a_2 (b_1 b_3 + b_2^2 + b_3 b_1) + a_3 (b_1^2 b_2 + b_1 b_2 b_1 + b_2 b_1^2) + a_4 b_1^4$$

**Определение (строгое):**

Операция подстановки  $D(t)$ :

$$\begin{cases} b_0 = 0 \\ D(t) = A(B(t)) \end{cases}, \quad d_n = \sum_{k=1}^n a_k \cdot \sum_{\substack{x_1 + \dots + x_k = n \\ x_i > 1}} b_{x_1} b_{x_2} \dots b_{x_k}$$

**Теорема 3:**

$\forall B$ , где  $b_0 = 0 \wedge b_1 \neq 0$

$$\exists! A, C : \begin{cases} A(B(t)) = t \\ B(C(S)) = S \end{cases}$$

**Лекция 24 мая**

Производящие функции

$$\vec{a} = (a_0, a_1, \dots) \rightsquigarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n S^n = A(S)$$

**Пример.**

$$(-7, 1, 0, 0, 5, 0, \dots) \leftrightsquigarrow 5s^4 + s - 7$$

**Подстановка.**

$$B(t) = b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + \dots, \quad b_0 = 0$$

$$A(B(t)) = a_0 + \underbrace{a_1 B(t)}_{\deg \geq 1} + \underbrace{a_2 B^2(t)}_{\deg \geq 2} + \underbrace{a_3 B^3(t)}_{\deg \geq 3} + \underbrace{a_4 B^4(t)}_{\deg \geq 4} + \dots$$

$$A(B(t)) = a_0 + a_1 b_1 t + t^2 (a_1 b_2 + a_2 b_1^2) + t^3 (a_1 b_3 + a_2 (b_1 b_2 + b_2 b_1) + a_3 b_1^3) + t^4 (a_1 b_4 + a_2 (b_1 b_3 + b_2^2 + b_3 b_1) + a_3 (b_1^2 b_2 + b_1 b_2 b_1 + b_2 b_1^2) + a_4 b_1^4)$$

**Определение.**

$$C(t) = A(B(t)), \text{ если } b_0 = 0$$

$$c_0 = a_0$$

$$n \geq 1 : c_n = \sum_{k=1}^n a_k \sum_{\substack{x_1 + \dots + x_k = n \\ x_i \geq 1}} b_{x_1} b_{x_2} \dots b_{x_k}$$

**Определение.**

Пусть  $b_0 = a_0$ , тогда производящая функция  $D(t) = A(B(t))$  такова:

$$d_0 = a_0, \forall n \geq 1 d_n = \sum_{k=1}^n a_k \sum_{\substack{x_1 + \dots + x_k = n \\ x_i \geq 1}} b_{x_1} b_{x_2} \dots b_{x_k}$$

Таким образом мы можем подставлять аргументы в производящую функцию, то есть:

$$A(0) = a_0, A(1) - \text{ не является производящей, так как } 1_0 \neq 0$$

**Теорема 1. (об обратимости подстановки)**

Пусть производящая функция  $B(t)$  такова, что  $b_0 = 0$  и  $b_1 \neq 0$ , тогда:

$$\exists! A(S) \exists! C(S) : \begin{cases} A(B(t)) = t \\ B(C(S)) = S \end{cases}$$

**Доказательство.**

$$\text{Пусть } D(t) = A(B(t)), \text{ хотим: } \begin{cases} d_0 = 0 \\ d_1 = 1 \\ d_n = 0, (n \geq 2) \end{cases}$$

$$\text{Можно взять } (*) = \begin{cases} a_0 = d_0 = 0 \\ a_1 b_1 = d_1 = 1 \\ \sum_{k=1}^n a_k \sum_{\substack{x_1 + \dots + x_k = n \\ x_i \geq 1}} b_{x_1} b_{x_2} \dots b_{x_k} = d_n = 0 \end{cases}$$



Решаем (\*) относительно  $a_0, a_1, \dots$ :

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = \frac{1}{b_1} \\ a_n = -\frac{1}{b_1^n} \sum_{k=1}^{n-1} a_k \sum_{\substack{x_1+\dots+x_k=n \\ x_i \geq 1}} b_{x_1} b_{x_2} \dots b_{x_k} \end{cases}$$

Пусть  $D(S) = B(C(S))$

$$(\#) \begin{cases} 0 = d_0 = b_0 \\ 1 = d_1 = b_1 c_1 \\ 0 = d_n = \sum_{k=1}^n b_k \sum_{\substack{x_1+\dots+x_k=n \\ x_i \geq 1}} c_{x_1} c_{x_2} \dots c_{x_k} \end{cases}$$

Решаем (#) относительно  $\vec{c}$ :

$$\begin{cases} c_0 = 0, \text{ иначе не определена } B(C(S)) \\ c_1 = \frac{1}{b_1} \\ c_n = -\frac{1}{b_1} \sum_{k=2}^n b_k \sum_{\substack{x_1+\dots+x_k=n \\ x_i \geq 1}} c_{x_1} c_{x_2} \dots c_{x_k} \end{cases} \Rightarrow c_n = f(c_1, \dots, c_{n-1}, n)$$

**Теорема 2. (о делении)**

Пусть производящая функция  $A(S)$  такова, что  $a_0 = A(0) \neq 0$ . Тогда

$$\exists! B(S) \ A(S) \cdot B(S) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 b_0 = 1, \ n = 0 \\ \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = 0, \ n \geq 1 \end{cases}$$

Решаем относительно  $\vec{b}$ :

$$\begin{cases} b_0 = \frac{1}{a_0} \\ a_0 b_n + \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow b_n = -\frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k}, \ n - k < n$$

**Определение. (элементарные производящие функции)**

$\alpha \in \mathbb{R}$

$$1. (1+s)^\alpha = \sum_n \frac{\alpha^{(n)}}{n!} s^n, \text{ где } \alpha^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)$$

**Определение.**

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha^{(n)}}{n!}$$

**Утверждение (1 случай).**

$$\begin{aligned} \text{Если } \alpha \in \mathbb{N} \wedge n \leq \alpha \quad \binom{\alpha}{n} &= C_\alpha^n \\ \alpha \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{\alpha^{(n)}}{n!} &= \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} = C_\alpha^n \end{aligned}$$

**Следствие.**

Если  $\alpha \in \mathbb{N}$ , то:

$$(1+s)^\alpha = \sum_{n \leq \alpha} \binom{\alpha}{n} s^n = \sum_{n=0}^{\alpha} C_\alpha^n s^n$$

$$\text{Проверяем: } (1+s)^1 = C_1^0 + C_1^1 \cdot s = 1+s$$

**Утверждение (2 случай).**

$$n > \alpha: C_\alpha^n = 0 \Rightarrow \frac{\alpha^{(n)}}{n!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-\alpha)\dots(\alpha-n+1)}{n!} = 0$$

**Утверждение (3 случай).**

$\alpha \notin \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} (1+s)^{-1} &= \sum_n \frac{(-1)^{(n)}}{n!} s^n = \sum_n (-1)^n s^n \\ \frac{(-1)^{(n)}}{n!} &= \frac{(-1)(-2)(-3)\dots(-n)}{n!} = (-1)^n \frac{n!}{n!} = (-1)^n \\ (1-s)^{-1} &= \sum_n (-1)^n (-s)^n = \sum_n s^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Рассмотрим } G(s) &= 1 + s + s^2 + s^3 + \dots = \sum_n s^n \\ s(G(s)) &= s + s^2 + s^3 + \dots \Rightarrow G(s) = 1 + sG(s) \\ G(s)(1-s) &= 1 \Rightarrow G(s) = \frac{1}{1-s} = (1-s)^{-1} = \sum_n s^n \end{aligned}$$

**Утверждение.**

$$\forall \alpha, \beta \quad (1+s)^\alpha (1+s)^\beta = (1+s)^{\alpha+\beta}$$

**Доказательство.**

$$[(1+s)^\alpha (1+s)^\beta] (s^n) = \sum_{k=0}^n [(1+s)^\alpha] (s^k) [(1+s)^\beta] (s^{n-k}) = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} \binom{\beta}{n-k} = (*)$$

Здесь  $[\dots](s^n)$  обозначает коэффициент при  $s^n$

Было:  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n C_\alpha^k C_\beta^{n-k} &= C_{\alpha+\beta}^n \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} \binom{\beta}{n-k} &= \binom{\alpha+\beta}{n} \end{aligned}$$

В левой части равенства стоит многочлен от  $\alpha, \beta$ . Из алгебры знаем, что если два многочлена равны на бесконечном количестве точек, то они совпадают всюду (так как у многочлена конечное множество корней, а разность многочленов от  $\alpha$  и  $\beta$  тоже многочлен).

$$(*) = \binom{\alpha+\beta}{n} = [(1+s)^{\alpha+\beta}] (s^n)$$

**Элементарные производящие функции**

$$2. \quad e^s = \sum_n \frac{s^n}{n!} = 1 + s + \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{6} + \dots$$

**Утверждение.**

$$\begin{aligned} e^s \cdot e^{-s} &= 1 \\ [e^s \cdot e^{-s}] (s^n) &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^{n-k} (-1)^k = \frac{1}{n!} (1+(-1))^n = \begin{cases} 0, & n > 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$3. \ln\left(\frac{1}{1-s}\right) = \sum_n \frac{s^{n+1}}{n+1} = s + \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{3} + \dots$$

$$4. \sin s = s - \frac{s^3}{3!} + \frac{s^5}{5!} + \dots = \sum_n (-1)^n \frac{s^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$5. \cos s = 1 - \frac{s^2}{2!} + \frac{s^4}{4!} - \dots = \sum_n (-1)^n \frac{s^{2n}}{(2n)!}$$

**Упражнение.**

Доказать:

$$\sin^2 s + \cos^2 s = 1$$

**Пример.**

$$e^{is} = 1 + is - \frac{s^2}{2} - \frac{is^3}{6} + \frac{s^4}{24} + \dots = \cos s + i \sin s$$

**Определение (производная и первообразная).**

$$\begin{aligned} (A(S))' &= (a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + \dots)' = a_1 + 2a_2 s + 3a_3 s^2 + \dots = \\ &= \sum_n (n+1) a_{n+1} s^n \\ \int A(s) &= \int (a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + \dots) = a_0 s + \frac{a_1}{2} s^2 + \frac{a_2}{3} s^3 + \frac{a_3}{4} s^4 + \dots = \\ &= \sum_n \frac{a_n}{n+1} s^{n+1} \end{aligned}$$

**Утверждение.**

$$\left( \int A(s) \right)' = A(s)$$

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} \text{Пусть } \int A(s) &= B(s) \Rightarrow \\ \Rightarrow B'(s) &= \sum_n (n+1) a_{n+1} s^n = \sum_n (n+1) \frac{a_n}{(n+1)} s^n = A(s) \end{aligned}$$

**Пример.**

$$(e^s)' = 1 + \frac{2}{2}s + \frac{3}{3!}s^2 + \frac{4}{4!}s^3 + \dots = 1 + s + \frac{s^2}{2!} + \frac{s^3}{3!} + \dots = e^s$$

**Лекция 31 мая.**

**Было:**

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}$

$$\binom{\alpha + \beta}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} \binom{\beta}{n-k}$$

Хотим:  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Рассмотрим  $P(\alpha, \beta) = \binom{\alpha + \beta}{n} - \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} \binom{\beta}{n-k}$  - многочлен степени  $n$

Напоминание:  $\binom{x}{n} = \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!}$

Зафиксируем  $\beta_0 \in \mathbb{N}$ :

$P_{\beta_0}(\alpha) = P(\alpha, \beta_0)$  - многочлен степени  $n$  от  $\alpha$

У  $P_{\beta_0}(\alpha)$  - корни во всех  $\alpha \in \mathbb{N} \Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R} P_{\beta_0}(\alpha) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R} \forall \beta \in \mathbb{N} P(\alpha, \beta) = 0$

Рассмотрим  $\hat{P}_{\alpha_0}(\beta) = P(\alpha_0, \beta)$  - многочлен степени  $n$  от  $\beta$ . Получается, что для всех  $\alpha$  у  $\hat{P}_{\alpha_0}(\beta)$  корни во всех  $\beta \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \beta \in \mathbb{R} \hat{P}_{\alpha_0}(\beta) = 0$ .

Итак,  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} P(\alpha, \beta) = 0$

**Было:**

$$(1, 1, 1, \dots) \rightsquigarrow G(S) = 1 + s + s^2 + \dots$$

$$G(S) = 1 + s + s^2 + s^3 + \dots$$

$$sG(S) = s + s^2 + s^3 + s^4 + \dots$$

$$G(S) - sG(S) = 1$$

$$(1-s)G(S) = 1$$

$$G(S) = \frac{1}{1-s}(1-s)^{-1}$$

Возьмём последовательность Фибоначчи

$$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots) \rightsquigarrow Fib(S) := \sum_n f_n s^n$$

$$Fib(s) = s + s^2 + 2s^3 + 3s^4 + 5s^5 + \dots$$

$$s \cdot Fib(s) = f_0 s + f_1 s^2 + f_2 s^3 + f_3 s^4 + 3s^5 + \dots$$

$$s^2 Fib(s) = 0 + 0^2 + f_0 s^3 + f_1 s^4 + f_2 s^5 + \dots$$

$$\begin{aligned} (s + s^2)Fib(s) &= f_0 s + \sum_{n \geq 2} (f_{n-1} + f_{n-2})s^n = f_0 s + \sum_{n \geq 2} f_n s^n = \\ &= f_0 s + (Fib(s) - f_0 - f_1 s) = Fib(S) + (f_0 - f_1)s - f_0 = \\ &= Fib(s) - s \end{aligned}$$

$$Fib(s)(s^2 + s - 1) = -s$$

$$Fib(s) = \frac{-s}{s^2 + s - 1}$$

Числа Фибоначчи задаются следующим образом:

$$\begin{cases} f_0 = 0 \\ f_1 = 1 \\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \end{cases} \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Тогда  $s^2 + s - 1 = (s + x_1)(s + x_2)$  (легко проверить подстановкой)

$$Fib(s) = \frac{-s}{(s + x_1)(s + x_2)} = (*)$$

$$\frac{1}{s + x_1} - \frac{1}{s + x_2} = \frac{x_2 - x_1}{(s + x_1)(s + x_2)} = \frac{-\sqrt{5}}{(s + x_1)(s + x_2)}$$

С этим знанием можно сказать

$$\begin{aligned} (*) &= \frac{s}{\sqrt{5}} \left( \frac{1}{s + x_1} - \frac{1}{s + x_2} \right) = \frac{s}{\sqrt{5}} \left( \frac{1}{x_1(1 + \frac{s}{x_1})} - \frac{1}{x_2(1 + \frac{s}{x_2})} \right) = \\ &= \frac{s}{\sqrt{5}} = \left( \frac{1}{x_1} \left( 1 + \frac{s}{x_1} \right)^{-1} - \frac{1}{x_2} \left( 1 + \frac{s}{x_2} \right)^{-1} \right) = \\ &= \frac{s}{\sqrt{5}} \left( \frac{1}{x_1} \sum_n (-1)^n \frac{s^n}{x_1^n} - \frac{1}{x_2} \sum_n (-1)^n \frac{s^n}{x_2^n} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_n (-1)^{n+1} \left( \frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}} \right) s^{n+1} = Fib(S) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{n+1} &= \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{5}} \left( \frac{1}{x_2^{n+1} - \frac{1}{x_1^{n+1}}} \right) = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{5}} \left( x_2^{-(n+1)} - x_1^{-(n+1)} \right) = \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{5}} \left( (-1)^{-(n+1)} x_1^{n+1} - (-1)^{n+1} x_2^{n+1} \right) = \frac{x_1^{n+1} - x_2^{n+1}}{\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

### Теорема 1.

Пусть  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  удовлетворяет стационарному линейному однородному рекуррентному соотношению порядка  $k$ , то есть

$$\forall n \ a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \dots + c_k a_n$$

Тогда существует многочлен  $P(s)$  такой, что

$$\deg P < k \wedge \sum a_n s^n = A(s) = \frac{P(s)}{1 - c_1 s - c_2 s^2 - \dots - c_k s^k}$$

### Доказательство:

$$c_1 s A(s) = \sum_{n=1}^{k-1} c_1 a_{n-1} s^n + \sum_{n \geq k} c_1 a_{n-1} s^n$$

$$c_2 s^2 A(s) = \sum_{n=2}^{k-1} c_2 a_{n-2} s^n + \sum_{n \geq k} c_2 a_{n-2} s^n$$

.....

$$c_{k-1} s^{k-1} A(s) = \sum_{n=k-1}^{k-1} c_{k-1} a_{n-k+1} s^n + \sum_{n \geq k} c_{k-1} a_{n-k+1} s^n$$

$$c_k s^k A(s) = 0 + \sum_{n \geq k} c_k a_{n-k} s^n$$

$$\text{Тогда } (c_1 s + c_2 s^2 + \dots + c_k s^k) A(s) =$$

$$= R(s) + \sum_{n \geq k} \underbrace{(c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k})}_{=a_n} s^n, \deg R \leq k-1$$

$$R(s) + \sum_{n \geq k} a_n s^n = R(s) + \left( A(s) - \sum_{n=0}^{k-1} a_n s^n \right) = A(s) + \left( R(s) - \sum_{n=0}^{k-1} a_n s^n \right) =$$

$$= A(s) - P(s), \deg P \leq k-1 \Rightarrow P(s) = A(s)(1 - c_1 s - c_2 s^2 - \dots - c_k s^k)$$

$$A(s) = \frac{P(s)}{1 - c_1 s - c_2 s^2 - \dots - c_k s^k}$$

## Числа Каталана

Рассмотрим правильные скобочные последовательности. Введём понятие баланса последовательности

$$b(\sigma) = |\sigma|_(- - |\sigma|_)$$

### Определение:

$\sigma_1, \dots, \sigma_n = \sigma$  правильная  $\Leftrightarrow \begin{cases} b(\sigma) = 0 \\ \forall i (\sigma_1, \dots, \sigma_i) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow p(\sigma)$  (путь) возвращается в 0 и никогда не бывает ниже 0. (см картинку)

### Определение:

$n$ -ое число Каталана  $c_n = \#$ правильных скобочных последовательностей длины  $2n$

$$c_0 = 1, \quad c_1 = 1, \quad c_2 = 2, \quad c_3 = 5, \dots$$

### Утверждение:

$\forall \sigma$  - правильный, если  $\sigma \neq \varepsilon$  (непустое), то  $\exists! (\tau, \rho)$  правильное

$$\sigma = (\tau)\rho$$

### Доказательство:

1.  $\sigma$  начинается с '(' и заканчивается ')'
2.  $\tau :=$  кратчайшее  $\tau'$  такое, что:

$$\tau' \text{ правильный} \wedge \exists \rho \sigma = (\tau')\rho$$

3. Полученное в пункте 2  $\rho$ .

### Утверждение:

$$c_{n+1} = \sum_{k=0}^n C_k C_{n-k}$$