

Лекции по алгебре 4 модуль.

Андрей Тищенко

2023/2024 гг.

Лекция 3 апреля

Квадратичные формы

Определение:

Многочлен второй степени от n переменных, то есть выражение вида

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j$$

Где $a_{ij} \in \mathbb{R}$, называют квадратичной формой.

Замечание:

Многочлен $q(x)$ называется однородным степени k , если

$$\forall \alpha \quad q(\alpha x) = \alpha^k q(x)$$

Замечание:

Квадратичная форма - это отображение $q : V \longrightarrow \mathbb{R}$ (вектор в число)

Рассмотрим n -мерное векторное пространство V над \mathbb{R} . Зафиксируем в нём базис e_1, \dots, e_n :

Тогда у любого $x \in V$ есть набор координат в этом базисе x_1, \dots, x_n .

То есть $\forall x \in V : x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

Пусть $x^e = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow q(x)$ можно представить в виде $q(x) = (x^e)^T A x^e$, где

$A = (a_{ij})$ матрица квадратичной формы $q(x)$ в базисе e_1, \dots, e_n ,

a_{ij} - коэффициенты квадратичной формы.

Пример:

В \mathbb{R}^3

$$q(x) = x_1^2 + 8x_1x_3 = x_1^2 + 4x_1x_3 + 4x_3x_1 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Замечание:

Матрица квадратичной формы всегда симметрическая. То есть

$$A^T = A$$

Замечание:

По любой билинейной форме можно построить квадратичную форму, взяв $q(x) = b(x, x)$. Тогда $a_{ij} = \frac{b_{ij} + b_{ji}}{2}$

Пример:

$$b(x, y) = x_1y_1 + ex_1y_3 + 5x_3y_1 \Rightarrow q(x) = b(x, x) = x_1^2 + 8x_1x_3$$

Определение:

Билинейная форма называется симметрической, если

$$b(x, y) = b(y, x), \text{ например, скалярное произведение}$$

Называется кососимметрической, если

$$b(x, y) = -b(y, x)$$

Пример:

$$\text{Кососимметрическая билинейная форма с матрицей } B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow B^T = -B$$

Замечание:

По любой квадратичной форме можно построить симметрическую билинейную форму. Это называется поляризацией квадратичной формы.

$$b(x, y) = \frac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)]$$

Полярная билинейная форма к $q(x)$ (имеет ту же матрицу, что и $q(x)$), $b(x, x) = q(x)$

Утверждение:

При переходе от базиса e к базису e' в линейном пространстве V матрица квадратичной формы меняется так:

$$A' = C^T \cdot A \cdot C, \text{ "Стас"}$$

A' - матрица квадратичной формы в новом базисе e'

C - матрица перехода от базиса e к базису e'

Доказательство:

Связь координат вектора:

$x = Cx'$, так как $x' = C^{-1}x$ - формула изменения координат вектора при замене базиса.

Тогда $\forall x \quad q(x) = x^T A x = (Cx')^T A (Cx') = (x')^T C^T A C x' = (x')^T A' x'$, значит $A' = C^T A C$ (Можно в качестве x брать все векторы канонического базиса $(0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0)$ и показать совпадение матричных элементов)

Определение:

Если квадратичная форма в некотором базисе записана в виде $q(x) = x^T A x$, то есть если A - матрица квадратичной формы в некотором базисе, то $\text{Rg } A$ называется рангом квадратичной формы $q(x)$. Почему это определение корректно? То есть почему $\text{Rg } A$ не зависит от базиса.

Лемма:

Пусть $A, U \in M_n(\mathbb{R})$, $\det U \neq 0$. Тогда $\text{Rg } A \cdot U = \text{Rg } A = \text{Rg } U \cdot A$, то есть при умножении на невырожденную матрицу ранг не меняется.

Доказательство:

$\text{Rg } A \cdot U \leq \text{Rg } A$, так как столбцы матрицы AU есть линейные комбинации столбцов матрицы A .

Ранг матрицы по теореме о ранге матрицы равен максимальному числу линейно независимых столбцов не могло вырасти, так как все столбцы AU линейно выражаются через столбцы исходной матрицы.

Покажем $\text{Rg } A \cdot U \geq \text{Rg } A$.

$$\text{Rg } A = \text{Rg } A(U \cdot U^{-1}) = \text{Rg}(AU)U^{-1} \leq \text{Rg}(AU)$$

$$\text{Rg } U \cdot A = \text{Rg}(UA)^T = \text{Rg } A^T U^T = \text{Rg } A^T = \text{Rg } A = \text{Rg } AU$$

Утверждение: (об инвариантности ранга квадратичной формы)

Пусть $q(x)$ - квадратичная форма на линейном пространстве V .
Пусть $a = (a_1, \dots, a_n)$ и $b = (b_1, \dots, b_n)$ - базисы в V .
Пусть A - матрица квадратичной формы в базисе a
Пусть B - матрица квадратичной формы в базисе b
Тогда $\text{Rg } A = \text{Rg } B$ и ранг квадратичной формы корректно определен.

Доказательство:

Было доказано, что $B = C^T A C \Rightarrow$ по лемме, так как мы умножаем матрицу A на матрицы C^T слева и на C справа, то $\text{Rg } B = \text{Rg } A$, ч.т.д.

Определение:

квадратичную форму $q(x)$ будем называть положительно определённой, если

$$\forall x \neq 0 \quad q(x) > 0$$

отрицательно определённой, если

$$\forall x \neq 0 \quad q(x) < 0$$

знакопеременной, если

$$\exists x, y \in V : q(x) < 0 < q(y)$$

Пример:

$q_1(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2$ на \mathbb{R}^3 - положительно определена

$q_2(x) = x_1^2 - x_3^2$ - знакопеременная ($y = (1 \ 0 \ 0)$, $x = (0 \ 0 \ 1) \Rightarrow q(x) < 0 < q(y)$).

$q_3(x) = -x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2$ - отрицательно определена на \mathbb{R}^3 ,

но $q'_3(x) = -x_1^2 - 3x_3^2$ - не является отрицательно определённой, так как

$q'_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ - это неположительно определённая квадратная форма.

Теорема: (Критерий Сильвестра положительной определённости)

Пусть A - матрица квадратичной формы $q(x)$ в некотором базисе. Тогда

$q(x)$ положительно определена \Leftrightarrow последовательность главных угловых миноров в A строго положительна

$$\text{То есть } \begin{cases} \Delta_1 = a_{11} > 0 \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0 \\ \dots \\ \Delta_n = \det A > 0 \end{cases}$$

Следствие:

$$\text{Квадратичная форма отрицательно определена} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_1 < 0 \\ \Delta_2 > 0 \\ \dots \\ (-1)^n \Delta_n > 0 \end{cases}$$

То есть знаки главных угловых миноров чередуются, начиная с минуса.

Доказательство:

Так как A - отрицательно определена $\Leftrightarrow -A$ положительно определена
 $\det(-A) = (-1)^n \det A$, ч.т.д.

Пример:

$$q(x) = -x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2 \text{ - отрицательно определённая}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}$$

Определение:

Квадратичную форму $q(x) = \alpha_1 x_1^2 + \dots + \alpha_n x_n^2$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$, то есть в квадратичной форме нет попарных произведений вида $Cx_i x_j$, называют квадратичной формой канонического вида.

Если $\alpha_i \in \{-1, 0, 1\}$, то канонический вид называют нормальным.

Замечание:

Матрица квадратичной формы в каноническом виде является диагональной.

Лекция 10 апреля

$x \in V \quad q(x) = \alpha_1 x_1^2 + \dots + \alpha_n x_n^2 \quad (\alpha_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n})$ - канонический вид.
Если все коэффициенты α_i являются элементами множества $\{-1, 0, 1\}$,
то это называется нормальным видом.

Утверждение. Любую квадратичную форму можно привести к каноническому и к нормальному виду.

Методы приведения

1. Метод Лагранжа.

Главная идея состоит в последовательном выделении полных квадратов.
При этом на каждом шаге под квадрат полностью уходит одна переменная
(невыполнение этого условия является частой ошибкой при решении задач).
Получается, что не более чем за n шагов алгоритм даст канонический вид.

Если на некотором этапе переменных в квадрате не осталось, но есть выражение вида $c \cdot x_i \cdot x_j \quad (i \neq j)$, то делают замену переменных:

$$\begin{cases} x_i = x'_i - x'_j \\ x_j = x'_i + x'_j \end{cases} \Rightarrow c x_i x_j = c ((x'_i)^2 - (x'_j)^2)$$

Получили новые квадраты, продолжаем выполнение метода (то есть выделяем полный квадрат при необходимости).

$$\alpha_i x_i^2 + 2x_i \underbrace{(\beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n)}_{\text{нет } x_i} = \alpha_i \left(x_i^2 + 2x_i \frac{\beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n}{\alpha_i} + \left(\frac{\beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n}{\alpha_i} \right)^2 \right) - \underbrace{\frac{(\beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n)^2}{\alpha_i}}_{\text{уже без } x_i}$$
$$= \alpha_i \underbrace{\left(x_i + \frac{\beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n}{\alpha_i} \right)}_{\text{заменяем на } y_i}$$

То есть x_i полностью ушла под квадрат.

2. Метод Якоби. (может быть пройдем на семинаре)

3. Симметричный Гаусс. (может быть пройдем на семинаре)
4. Метод приведения к главным осям (только для канонического).
(может быть пройдем на семинаре)

Теорема. Закон инерции квадратичной формы

Для любых двух канонических видов одной квадратичной формы. $q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_k x_k^2$, $\lambda_i \neq 0$, $i = \overline{1, k}$
 $q(y) = \mu_1 y_1^2 + \dots + \mu_m y_m^2$, $\mu_j \neq 0$, $j = \overline{1, m}$
 где $x, y \in V$

То есть это запись одной и той же квадратичной формы в разных базисах.

1. $k = m = \text{Rg } A \leftarrow$ равно рангу квадратичной формы. При этом $k = m$ может быть меньше размерности V , то есть $k = m \leq n = \dim V$
2. Количество положительных λ_i совпадает с количеством положительных μ_j . Это называется положительный индекс инерции квадратичной формы.

Обозначение: i_+

3. Количество отрицательных λ_i совпадает с количеством отрицательных μ_i и называется отрицательным индексом инерции.

Обозначение: i_-

Определение: Сигнатурой квадратичной формы называют два числа (i_+, i_-) .

Замечание: Если у двух квадратичных форм совпадают сигнатуры, то существует невырожденная линейное преобразование (=замена координат, =замена базиса), которое одну квадратичную форму переводит в другую.
 Сначала обе в нормальный вид, он совпадает, так как одинаковое количество $+1$ и -1 , и для одной преобразование в обратную сторону.

Замечание: Если у двух квадратичных форм разные сигнатуры (i_+, i_-) , то одну нельзя перевести в другую невырожденным линейным преобразованием.
 То есть квадратичные формы разные.

Замечание: $\text{Rg } A = i_+ + i_-$. Иногда вводят величину $S = i_+ - i_-$. Знание $\text{Rg } A$ и S эквивалентно знанию i_+ и i_- , и поэтому число S иногда называют сигнатурой.

Линейные отображения и линейные операторы

Пусть V_1 и V_2 - два линейных пространства над полем F

Определение: Отображение $\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$ называется линейным, если

1. $\forall x, y \in V_1, \varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$
2. $\forall x \in V_1, \forall \alpha \in F \varphi(\alpha x) = \alpha \varphi(x)$

Замечание: эти два условия равносильны $\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha \varphi(x) + \beta \varphi(y)$

Замечание: Линейное отображение это гомоморфизм линейных пространств, и есть обозначение $\varphi \in \text{Hom}(V_1, V_2)$

Определение: Если $V_1 = V_2 = V$ (пространства совпадают), то линейное отображение φ называется линейным оператором (л. о.)

Пусть e_1, \dots, e_n - базис в V_1 , $\dim V_1 = n$

f_1, \dots, f_m - базис в V_2 , $\dim V_2 = m$

Рассмотрим векторы $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n) \in V_2$ (образы базисных векторов первого пространства под действием φ), и разложим их по базису второго пространства f_1, \dots, f_m :

$$\begin{cases} \varphi(e_1) = a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + \dots + a_{m1}f_m \\ \vdots \\ \varphi(e_n) = a_{1n}f_1 + a_{2n}f_2 + \dots + a_{mn}f_m \end{cases}$$

Определение: Матрица линейного отображения в паре базисов (e_1, \dots, e_n) и (f_1, \dots, f_m) это матрица:

$$[\varphi]_{ef} = A_{ef} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\dim V_1} \Bigg\} \dim V_2$$

По столбцам стоят координаты образов векторов первого базиса при разложении по второму базису.

Определение: Пусть $\varphi : V_1 \longrightarrow V$ - линейный оператор и e_1, \dots, e_n - базис.

$$\text{Пусть } \begin{cases} \varphi(e_1) = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \dots + a_{n1}e_n \\ \vdots \\ \varphi(e_n) = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \dots + a_{nn}e_n \end{cases}$$

То есть образы базисных векторов под действием φ разложим по тому же базису.

Тогда:

$$A_e = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Называется матрицей линейного оператора

Пример: $\varphi(x) = \text{Пр}_L x$, где $L = \mathcal{L}(\bar{i})$ в V_3 , где \bar{i} - ось абсцисс.

Рассмотрим стандартный базис $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ в V_3 .

$$\begin{cases} \varphi(i) = i = 1 \cdot i + 0 \cdot j + 0 \cdot k \\ \varphi(j) = 0 \\ \varphi(k) = 0 \end{cases} \Rightarrow A_{\{i, j, k\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Теорема: (о том, что действие линейного оператора полностью определяется его матрицей)

Пусть φ - линейный оператор в пространстве V

$e = (e_1, \dots, e_n)$ - базис в V , $x \in V$ - вектор.

$$x^e = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \text{столбец координат вектора } x \text{ в базисе } e, \text{ то есть } x =$$

$$x_1e_1 + \dots + x_ne_n$$

Пусть A_e - матрица линейного оператора φ в базисе e , тогда:

$$(\varphi(x))^e = A_e \cdot x^e, \text{ (матричное произведение)}$$

Доказательство: $\varphi(x) = \varphi(x_1e_1 + \dots + x_ne_1) \overset{\text{по линейности}}{=} x_1\varphi(e_1) + \dots + x_n\varphi(e_n) \overset{\text{определение матрицы л.о.}}{=} x_1(a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \dots + a_{n1}e_n) + \dots + x_n(a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \dots + a_{nn}e_n) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)e_1 + \dots + (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n)e_n$ - получили разложение $\varphi(x)$ по базису e

$$\Rightarrow (\varphi(x))^e = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{pmatrix}$$

Но это результат умножения A_e на $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x^e$, то есть $(\varphi(x))^e =$

$A_e \cdot x^e$, ч.т.д.

Замечание: Для линейных отображений аналогично

$$(\varphi(x))^f = A_{ef}x^e$$

Замечание: При фиксированном базисе есть биекция между линейными операторами (линейными отображениями) и матрицами $n \times n$, $(m \times n)$.

Лекция 17 апреля.

Линейные операторы

(Напоминание) Пусть $\varphi : V \longrightarrow V$ - линейный оператор в пространстве V , фиксируем базис $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ в V .

Тогда $\exists!$ матрица линейного оператора A_e в базисе e , что

$$\forall x \in V \quad (\varphi(x))_{n \times 1}^e = A_e \cdot x_{n \times 1}^e$$

Для линейного отображения $\phi : V_1 \longrightarrow V_2$ в фиксированной паре базисов e, f

$$(\phi(x))_{m \times 1}^f = A_{ef} \cdot x_{n \times 1}^e$$

Утверждение: Пусть A - матрица линейного оператора φ в базисе e .

A' - матрица линейного оператора φ в базисе e'

Пусть T - матрица перехода в V от базиса e к базису e' .

Тогда $A' = T^{-1} \cdot A \cdot T$

Доказательство: По доказанному:

$$y = A \cdot x, \quad y = (\varphi(x))^e \tag{1}$$

$$y' = A' \cdot x', \quad y' = (\varphi(x))^{e'} \tag{2}$$

$y = T \cdot y'$ (так как $y' = T^{-1}y$) и $x = Tx'$ - формула изменения координат вектора при замене базиса.

Подставляем в (1): $T \cdot y' = A \cdot T \cdot x'$, но T - невырожденная матрица (так как она является матрицей перехода), домножим слева на $T^{-1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow y' = \underbrace{T^{-1} \cdot A \cdot T}_{A'} \cdot x', \text{ сравним с (2)} \Rightarrow A' = T^{-1} \cdot A \cdot T, \text{ так как}$$

матрица линейного оператора в заданном базисе единственная.

Утверждение: Пусть φ - линейное отображение линейного пространства V_1 ($\dim V_1 = n$) в линейное пространство V_2 , ($\dim V_2 = m$).

Пусть $A_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}$ - матрица линейного отображения в паре базисов ε_1 в пространстве V_1 и ε_2 в пространстве V_2 .

Тогда, если T_1 - Это матрица перехода в V_1 от базиса ε_1 к базису ε'_1 .

T_2 - матрица перехода в V_2 от ε_2 к ε'_2 .

Тогда имеет место следующее равенство:

$$A_{\varepsilon'_1 \varepsilon'_2} = \underbrace{T_2^{-1}}_{m \times m} \cdot \underbrace{A_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}}_{m \times n} \cdot \underbrace{T_1}_{n \times n}$$

Доказательство: Пусть y - образ x под действием φ (то есть $y = \varphi(x)$), тогда:

$$(1) \quad y^{\varepsilon_2} = A_{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \cdot x^{\varepsilon_1} \leftarrow \text{в старом базисе}$$

$$(2) \quad y^{\varepsilon'_2} = A_{\varepsilon'_1 \varepsilon'_2} \cdot x^{\varepsilon'_1} \leftarrow \text{в новом базисе}$$

$$x^{\varepsilon_1} = T_1 \cdot x^{\varepsilon'_1}$$

$$y^{\varepsilon_2} = T_2 \cdot y^{\varepsilon'_2} \leftarrow \text{формула изменения координат вектора}$$

Подставим в (1), получим:

$$T_2 y^{\varepsilon'_2} = A_{\varepsilon_1 \varepsilon_2} T_1 x^{\varepsilon'_1}. \text{ Домножим на } T_2^{-1} \text{ слева, так как } T_2 \text{ - невырожденная} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^{\varepsilon'_2} = \underbrace{T_2^{-1} A_{\varepsilon_1 \varepsilon_2} T_1}_{A_{\varepsilon'_1 \varepsilon'_2}} x^{\varepsilon'_1}, \text{ сравнивая с (2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_{\varepsilon'_1 \varepsilon'_2} = T_2^{-1} \cdot A_{\varepsilon_1 \varepsilon_2} T_1$$

Определение: Квадратные матрицы A и B называются подобными, если существует невырожденная матрица C :

$$B = C^{-1}AC \quad (\det C \neq 0)$$

Замечание: Матрицы линейных операторов в разных базисах подобны между собой.

Утверждение: Определители подобных матриц равны.

Доказательство: Пусть A и B подобны, то есть $B = C^{-1}AC \Rightarrow$

$$\det B = \det (C^{-1}AC) = \det C^{-1} \det A \det C = \frac{\det C}{\det C} \det A = \det A$$

Замечание: Это означает, что $\det A$ - определитель матрицы линейного оператора не зависит от выбора базиса, то есть является инвариантом замены координат (и $\text{Rg } A$ - тоже инвариант)

Определение: Ядром линейного отображения $\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$ называется множество:

$$\ker \varphi = \{x \in V_1 \mid \varphi(x) = 0\} = \varphi^{-1}(0) \subseteq V_1$$

Образом линейного отображения φ называется множество

$$\text{Im } \varphi = \{x \in V_2 \mid \exists y \in V_1 : \varphi(y) = x\} = \varphi(V_1) \subseteq V_2$$

Замечание: $\ker \varphi$ и $\text{Im } \varphi$ являются линейными подпространствами в V_1 и V_2 соответственно (проверить замкнутость по оперициям).

Утверждение: Пусть $\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$ - линейное отображение.

Тогда $\dim \ker \varphi + \dim \text{Im } \varphi = n = \dim V_1$

Доказательство: Зафиксируем базис $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ в V_1

$\forall x \in V_1$ можно представить в виде $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

$\varphi(x) = x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n)$, но $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ - столбцы матрицы линейного отображения (если фиксировать базис и в V_2).

$\text{Im } \varphi = \mathcal{L}(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$ (линейная оболочка). \Rightarrow

$\Rightarrow \dim \text{Im } \varphi = \text{Rg } A$ - ранг матрицы линейного отображения.

Ядро φ описывается однородной СЛАУ $Ax = 0$, размерность пространства её решений (то есть число векторов ФСР) равна $k = n - \text{Rg } A$, где

k - размерность ядра,

n - размерность образа.

Итак, $\dim \ker \varphi + \dim \text{Im } \varphi = n$, где $n = \dim V_1$.

Замечание: Если $\varphi : V \longrightarrow V$ - линейный оператор (то есть $\ker \varphi, \text{Im } \varphi \subseteq V$), то вообще говоря,

$V \neq \ker \varphi + \text{Im } \varphi$, хотя и $\dim \ker \varphi + \dim \text{Im } \varphi = \dim V$

Пример: Рассмотрим линейное пространство $\mathbb{R}_n[x]$ - пространство многочленов от x , $\deg f \leq n$ с вещественными коэффициентами и оператор $\mathcal{D} : f \mapsto f' \leftarrow$ производная, $\mathcal{D} : \mathbb{R}_n[x] \rightarrow \mathbb{R}_n[x]$
 $\dim \mathbb{R}_n[x] = n + 1$, так как $\mathbb{R}_n[x] = \mathcal{L}\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$
 $\text{Im } \mathcal{D} = \mathbb{R}_{n-1}[x]$, $\dim \text{Im } \mathcal{D} = n$
 $\ker \mathcal{D} = \mathcal{L}(1)$ - константы, $\dim \ker \mathcal{D} = 1$,
но $\ker \mathcal{D} \subseteq \text{Im } \mathcal{D}$, но
 $\dim \ker \mathcal{D} + \dim \text{Im } \mathcal{D} = n + 1 = \dim \mathbb{R}_n[x]$

Действия с линейными операторами и их матрицами

Пусть A и B - линейные операторы на линейном пространстве V над полем F , тогда

Определение: $(A + B)(x) = A(x) + B(x)$
 $(\lambda A)(x) = \lambda A(x)$ - умножение на число $\lambda \in F$
 $(A \cdot B)(x) = A(B(x))$ - умножение линейного оператора (композиция)

Замечание: $A+B$, $\lambda \cdot A$, $A \cdot B$ - снова линейные операторы (провека по определению)

Утверждение: Пусть фиксирован базис $e = \{e_1, \dots, e_n\}$. Тогда:

$$\begin{cases} (1) (A + B)_e = A_e + B_e \\ (2) (\lambda A)_e = \lambda A_e \\ (3) (A \cdot B)_e = A_e \cdot B_e \end{cases}$$

Доказательство (3): $\left((A \cdot B)(x)\right)^e = A_e \cdot (B(x))^e = A_e \cdot B_e x^e = (AB)_e x^e \Rightarrow$
 $\Rightarrow (AB)_e = A_e B_e$, так как матрица линейных операторов в фиксированном базисе единственна.

Собственные векторы и собственные числа

Определение: Число λ называется собственным числом (или собственным значением, то есть с. з.) линейного оператора $\varphi : V \rightarrow V$, где V - линейное пространство, если \exists вектор $x \in V$, $x \neq 0$, такой что $\varphi(x) = \lambda \cdot x$. При этом x называется собственным вектором (с. в.), отвечающим собственному значению λ .

Замечание: Если x - собственный вектор, отвечающих собственному значению λ , то $\forall \alpha \in F$, $\alpha \neq 0$, αx - тоже собственный вектор, отвечающий собственному значению λ $\varphi(\alpha x) = \alpha \varphi(x) = \alpha \lambda x = \lambda(\alpha x) \Rightarrow \alpha x$ - собственный вектор.

Замечание: Другими словами, собственный вектор - ненулевой вектор, остающийся коллинеарным (либо равным 0) самому себе под действием линейного оператора φ

Пример 1: Пусть $\text{Пр}_{Ox} : V_2 \longrightarrow V_1$ ($V_2 \cong \mathbb{R}^2$) - линейный оператор проекции на Ox в плоскости V_2 . Все векторы $\in Ox$, отличные от 0 - собственные векторы.

Например, $\vec{i} = (1, 0)$

$\varphi(\vec{i}) = i$ - собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda_1 = 1$

$\varphi(\vec{j}) = 0 \Rightarrow j$ - собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda_2 = 0$

В базисе $\{i, j\}$ - базис из собственных векторов. Матрица линейного оператора $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ - диагональная матрица.

$V_2 = Ox \oplus Oy$

Бывает, что нет собственных значений и собственных векторов для линейного оператора

Лекция 24 апреля

Задача:

Есть 10000 человек.

Каждый день 15% здоровых заболевают и 10% больных выздоравливают (можно болеть повторно).

В первый день заболело 100 человек.

A - линейный оператор ежедневной динамики.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = A^n(x_0), \quad x_0 = \begin{pmatrix} 9900 \\ 100 \end{pmatrix}$$

$A^n - ?$

Определение:

Для произвольной квадратной матрицы A определитель

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$$

Называется характеристическим многочленом матрицы A , а уравнение $\chi_A(\lambda) = 0$ - многочлен степени n

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \chi_A(\lambda) = \det \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2)$$

Утверждение:

Характеристические уравнения подобных матриц совпадают.

Доказательство:

A и A' подобны, если существует T , $\det T \neq 0$: $A' = T^{-1}AT$

$$\begin{aligned} \chi_{A'}(\lambda) &= \det(A' - \lambda E) = \det(T^{-1}AT - \lambda T^{-1}ET) = \det(T^{-1}(A - \lambda E)T) = \\ &= \det T^{-1} \det(A - \lambda E) \det T = \det(A - \lambda E) = \chi_A \end{aligned}$$

Следствие:

Характеристические многочлены для матриц линейных операторов в разных базисах совпадают (сами матрицы могут различаться).

То есть корректно говорить о характеристическом многочлене для линейного оператора (то есть он инвариантен при замене базиса).

Определение:

Множество всех собственных значений линейного оператора называют спектром линейного оператора.

Теорема:

λ - собственное значение линейного оператора $\Leftrightarrow \lambda$ - корень характеристического уравнения линейного оператора (над алгебраически замкнутым полем (например \mathbb{C}) или в случае, когда корни характеристического уравнения лежат в том же поле, над которым рассматривается линейный оператор).

Доказательство:

Необходимость :

Дано: λ - собственное значение линейного оператора A

Доказать: λ - корень $\chi_A(\lambda) = 0$

По определению $\exists x \neq 0$ $A(x) = \lambda \cdot x$, то есть $A(x) = \lambda \cdot I(x)$, где $I(x)$ - тождественный линейный оператор.

$$(A - \lambda I)(x) = 0 \quad (*)$$

Запишем равенство $(*)$ в некотором базисе e :

$$(A_e - \lambda E) \cdot x^e = 0$$

Это однородное СЛАУ с ненулевым решением, то есть по критерию существования ненулевых решений $\det(A_e - \lambda E) = 0$, а это и есть $\chi_A(\lambda) = 0$

Достаточность :

Дано: λ - корень $\chi_A(\lambda) = 0$

Доказать: λ - собственное значение линейного оператора A

Если λ - корень, то в заданном базисе e выполнено равенство

$$\det(A_e - \lambda E) = 0$$

То есть однородное СЛАУ $(A_e - \lambda E)x^e = 0$ имеет ненулевое решение (по тому же критерию) и соответственно выполняется (*)

$$(A - \lambda I)(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = \lambda x \quad (x \neq 0)$$

То есть x - собственный вектор, отвечающий собственному значению λ , ч.т.д.

Пример:

$$\chi_A(\lambda) = \lambda(\lambda - 2) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases} \text{ - спектр линейного оператора } A$$

Определение:

Алгебраической кратностью собственного значения λ называется его кратность как корня характеристического уравнения.

Обозначение:

m_i - алгебраическая кратность собственного значения λ_i

Пример:

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - 5)^3(\lambda - 2)^2$$

Тогда будет верно:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 5 \leftarrow m_1 = 3 \\ \lambda_2 = 2 \leftarrow m_2 = 2 \end{cases}$$

Определение:

Пусть $A : V \rightarrow V$ - линейный оператор λ - собственное значение линейного оператора A . Тогда множество

$$V_\lambda = \{x \in V \mid Ax = \lambda x\}$$

называется собственным подпространством отвечающим собственному значению λ .

Замечание:

V_λ является линейным подпространством в V (состоящим из собственных векторов, отвечающих собственным значениям λ , и нулевого вектора).

Доказательство:

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow (A - \lambda E) \cdot x = 0$$

То есть $V_\lambda = \ker(A - \lambda I)$ линейный оператор с матрицей $(A - \lambda E)$
 $\ker B$ любого линейного оператора B является подпространством в V
(проверить замкнутость).

Определение:

Размерность собственного подпространства V_λ называется геометрической кратностью собственного значения λ

Обозначение:

s_i - геометрическая кратность собственного значения λ

Замечание:

Геометрическая кратность собственного значения λ всегда ≥ 1 ($s_i \geq 1$).

Теорема: без доказательства

Геометрическая кратность собственного значения λ всегда \leq его алгебраической кратности ($s_i \leq m_i$)

Определение:

Следом матрицы $A \in M_n(F)$ называется сумма е диагональных элементов

$$\text{tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

Утверждение:

$$\forall A, B \in M_n(F) \quad \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$$

Утверждение:

Пусть A - линейный оператор в базисе e . Тогда $\text{tr } A_e$ не зависит от выбора базиса.

Доказательство:

$A_{e'} = T^{-1}A_eT$, где $A_{e'}$ - матрица линейного оператора A в базисе e' .
Тогда $\text{tr } A_{e'} = \text{tr}((T^{-1}A_e)T) = \text{tr}(T(T^{-1}A_e)) = \text{tr } A_e$.

Итого:

$\text{Rg } A, \det A, \text{tr } A, \chi_A(\lambda)$ - инварианты линейного оператора при замене базиса.

Замечание:

$$A \in M_n(\mathbb{R}), \chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = (-1)^n \lambda^n \neq (-1)^{n-1} \text{tr } A \lambda^{n-1} + \dots \dots + \det A$$

Критерий диагональности линейного оператора

Утверждение:

Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ - собственные значения линейного оператора и пусть $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$.

Пусть v_1, \dots, v_k - соответствующие собственные векторы

Тогда v_1, \dots, v_k - линейно независимы.

То есть собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям являются линейно независимыми.

Доказательство:

Применим принцип математической индукции.

При $k = 1$ - утверждение верно, так как собственный вектор по определению $\neq 0$ и соответственно образует линейно независимую систему.

Пусть утверждение верно при $k = m$.

Добавим ещё 1 собственный вектор v_{m+1} , отвечающий собственному значению λ_{m+1} . Докажем, что система собственных векторов v_1, \dots, v_{m+1} останется линейно независимой.

Рассмотрим равенство:

$$1. \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m + \alpha_{m+1} v_{m+1} = 0$$

Применим к 1. линейный оператор A , тогда по линейности:

$$\alpha_1 A(v_1) + \dots + \alpha_m A(v_m) + \alpha_{m+1} A(v_{m+1}) = 0$$

Вспомним, что v_i - собственный вектор для собственного значения λ_i

$$2. \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_m \lambda_m v_m + \alpha_{m+1} \lambda_{m+1} v_{m+1}$$

Умножим 1. на λ_{m+1} и вычтем из 2.

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{m+1})v_1 + \dots + \alpha_m(\lambda_m - \lambda_{m+1})v_m = 0$$

По предположению индукции v_1, \dots, v_m - линейно независимы:

$$\begin{cases} \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{m+1}) = 0 \\ \dots \\ \alpha_m(\lambda_m - \lambda_{m+1}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \dots \\ \alpha_m = 0 \end{cases}$$

Теперь 1. можно записать в виде:

$$0 + \alpha_{m+1}v_{m+1} = 0$$

Но $v_{m+1} \neq 0$ (собственный вектор), значит $\alpha_{m+1} = 0 \Rightarrow$ по определению система v_1, \dots, v_{m+1} является линейно независимой.

Утверждение: Критерий диагональности матрицы линейного оператора A

Матрица линейного оператора A является диагональной в данном базисе \Leftrightarrow все векторы этого базиса являются собственными векторами для линейного оператора A .

Доказательство:

Необходимость :

Дано: A_e - диагональная матрица

Доказать: e состоит из собственных векторов по A

По определению матрицы линейного оператора в j -м столбце стоят координаты вектора $A(e_j)$ в базисе e_1, \dots, e_n

Если A_e - диагональна, то j -й столбец имеет вид $(0, \dots, 0, \lambda_j, 0, \dots, 0) \Rightarrow$

$\Rightarrow A(e_j) = 0 + \dots + 0 + \lambda_j e_j + 0 + \dots + 0$, то есть $A(e_j) = \lambda_j e_j$, $e_j \neq 0 \Rightarrow$ по определению e_j - собственный вектор, отвечающий собственному значению λ_j (на диагонали матрицы A_e - собственное значение).

Достаточность :

Дано: e состоит из собственных векторов по A

Доказать: A_e - диагональная матрица

$$A(e_j) = \lambda_j e_j,$$

$\forall j = \overline{1, n} \Rightarrow$ по определению матрицы линейного оператора, все элементы кроме диагональных равны нулю в каждом столбце (на диагонали собственные значения λ_i), ч.т.д.

Определение:

Линейный оператор, для которого в линейном пространстве V существует базис из собственных векторов, называется диагонализируемым.

Теорема: Критерий диагонализируемости линейного оператора.

(Без доказательства) Линейный оператор диагонализируем \Leftrightarrow
 \Leftrightarrow для любых его собственных значений λ_i алгебраическая кратность
равна геометрической кратности ($m_i = s_i$)

Теорема:

Если характеристическое уравнение линейного оператора, действующего в пространстве V , где $\dim V = n$ имеет ровно n попарно различных корней, то оператор диагонализируем (корни лежат в поле, над которым рассматривается линейное пространство V)

Доказательство:

Если собственное значение $\lambda_i \in F$, то ему можно сопоставить хотя бы один собственный вектор v_i . Система v_1, \dots, v_n - линейно независимы, так как по условию $\lambda_i \neq \lambda_j$, при $i \neq j$ (доказали ранее), их число равно $\dim V \Rightarrow$ они образуют базис в V из собственных векторов \Rightarrow линейный оператор диагонализируем

Лекция 15 мая

Евклидовы пространства

В этом разделе всякое поле будет полем вещественных чисел:

$$\forall F \text{ } F \text{ - поле} \Rightarrow F = \mathbb{R}$$

Определение:

Евклидово пространство \mathcal{E} - это пара $(V, g(x, y))$, где

V - линейное пространство,

$g(x, y)$ - скалярное произведение, то есть симметрическая, положительно определённая билинейная форма.

То есть для $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ выполняются свойства (аксиомы скалярного произведения):

1. $\forall x, y \in \mathcal{E} \quad g(x, y) = g(y, x)$ - симметричность

2. $\forall x, y, z \in \mathcal{E} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$g(\alpha x + \beta y, z) = \alpha g(x, z) + \beta g(y, z), \text{ линейность}$$

3. $\forall x \in \mathcal{E} \quad g(x, x) \geq 0 \wedge g(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ нулевой вектор

Пример:

1. $\mathcal{E} = (V_3, g(x, y) = |x| \cdot |y| \cos(\widehat{x, y}))$ - евклидово пространство

2. $V = C[a, b]$ - функции, непрерывные на отрезке $[a, b]$

$$g(f_1(x), f_2(x)) = \int_a^b f_1(x) f_2(x) dx - \text{скалярное произведение} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{E} = (C[a, b], g(x, y)) - \text{евклидово пространство}$$

Определение:

Пусть \mathcal{E} - евклидово пространство. Тогда величина $\|v\| = \sqrt{g(v, v)}$ (может обозначаться как $|v|$) называется нормой (длиной) вектора v .

Определение:

$\forall v_1, v_2 \in \mathcal{E}, v_1, v_2 \neq 0$:

$$\cos \varphi = \frac{g(v_1, v_2)}{\|v_1\| \cdot \|v_2\|} = \frac{g(v_1, v_2)}{\sqrt{g(v_1, v_1)}\sqrt{g(v_2, v_2)}}$$

Где φ - угол между v_1, v_2 .

Это определение угла между векторами (берём $\varphi \in [0, \pi]$)

Определение:

$\forall x, y \in \mathcal{E}$:

$$\rho(x, y) = \|x - y\| - \text{расстояние между векторами } x, y$$

Утверждение (Неравенство Коши-Буняковского)

$\forall x, y \in \mathcal{E}$:

$$|g(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Доказательство:

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq g(\lambda x - y, \lambda x - y) = \lambda g(x, \lambda x - y) - g(y, \lambda x - y) =$$

$$= \lambda^2 g(x, x) - \lambda g(x, y) - \lambda g(y, x) + g(y, y) = \|x\|^2 \lambda^2 - 2g(x, y)\lambda + \|y\|^2$$

Квадратное уравнение относительно λ , которое $\geq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$\Rightarrow D \leq 0, \quad D = 4(g(x, y))^2 - 4\|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \leq 0 \Rightarrow |g(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|,$$

ч.т.д.

Утверждение (неравенство треугольника):

$\forall x, y \in \mathcal{E}$:

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Доказательство:

$\|x+y\|^2 = g(x+y, x+y) = \|x\|^2 + 2g(x, y) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 =$
 $= (\|x+y\|)^2$. Тут было применено неравенство Коши-Буняковского. Так как норма вектора всегда ≥ 0 , То

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Определение:

Два вектора $x, y \in \mathcal{E}$ называются ортогональными, если $g(x, y) = 0$.

Определение:

Система векторов a_1, \dots, a_k называется:

- а. Ортогональной, если $g(a_i, a_j) = 0, \forall i, j = \overline{1, k}, i \neq j$
- б. Ортонормированной, если она ортогональна и $g(a_i, a_i) = 1, \forall i = \overline{1, k}$

Лемма 1.

Пусть a_1, \dots, a_k - ортогональная система векторов, и $a_i \neq 0, i = \overline{1, k}$. Тогда эта система линейно независима.

Доказательство:

Приравняем к нулю линейную комбинацию

$$\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k = 0$$

Домножим скалярно на a_i для каждого $i = \overline{1, k}$

$$(\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k, a_i) = (0, a_i) = 0$$

$$\alpha_1 (a_1, a_i) + \dots + \alpha_i (a_i, a_i) + \dots + \alpha_k (a_k, a_i) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \alpha_i (a_i, a_i) = 0$, но $a_i \neq 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \Rightarrow$ по определению система a_1, \dots, a_k линейно независима.

Замечание:

Если $\dim \mathcal{E} = n$ и $k = n$, то a_1, \dots, a_n , ($a_i \neq 0, \forall i$) образует ортогональный базис. Если рассмотреть $e_i = \frac{a_i}{\|a_i\|}$, $i = \overline{1, n}$ (то есть нормировать), то получим ортонормированный базис.

Лемма 2.

Пусть $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, то есть x_i - коэффициенты вектора x в ортонормированном базисе. e_1, \dots, e_n , тогда $x_i = (x, e_i)$, $\forall i = \overline{1, n}$
 Если базис не является ортонормированным, но ортогонален, то $x_i = \frac{(x, e_i)}{(e_i, e_i)}$, $i = \overline{1, n}$

Доказательство:

$= x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \leftarrow$ умножим скалярно на $e_i, e = \overline{1, n}$

$$(x, e_i) = x_1 \cdot g(e_1, e_i) + \dots + x_i \cdot g(e_i, e_i) + \dots + x_n \cdot g(e_n, e_i) = x_i \cdot g(e_i, e_i) = x_i$$

Замечание:

Пусть a_1, \dots, a_n - базис в \mathcal{E} . Тогда $g(x, y) = x^T \Gamma Y$, где x, Y - столбцы координат векторов x, y в базисе a_1, \dots, a_n ,

$$\Gamma = \begin{pmatrix} g(a_1, a_1) & \dots & g(a_1, a_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g(a_1, a_n) & \dots & g(a_n, a_n) \end{pmatrix}$$

Матрица Грамма (она же матрица билинейной формы).

Свойства Грамма

1. Γ - симметрическая, то есть $\Gamma^T = \Gamma$ (из симметричности скалярного произведения). Более того $\forall x \neq 0 \quad x^T \Gamma x \underset{=g(x, x)}{> 0}$ (из положительной определённости)
2. Матрицы Грамма двух базисов e, e' связаны соотношением

$$\Gamma' = U^T \Gamma U$$

Где U - матрица перехода $e \rightarrow e'$ (так как это верно для всех билинейных форм).

3. $\det \Gamma = \text{Gr}(a_1, \dots, a_n) > 0$ если a_1, \dots, a_n - базис ($\det \Gamma$ называется граммианом и обозначается Gr)

Доказательство пункта 3.

По свойству 2 $\det \Gamma' = \det(U^T \Gamma U) = \det U^T \det \Gamma \det U = (\det U)^2 \det \Gamma$
 Перейдём к ортонормированному базису (далее докажем, что это всегда возможно). В ортонормированном базисе

$$\Gamma' = E, \det \Gamma' = \det E = 1 \Rightarrow \det \Gamma = \frac{1}{(\det U)^2} > 0$$

Утверждение (Метод ортогонализации Грамма-Шмидта):

Если \mathcal{E} - евклидово пространство, то в нём существует ортонормированный базис.

Доказательство:

Предъявим алгоритм, который по произвольному базису a_1, \dots, a_n строит ортогональный b_1, \dots, b_n (из него можно получить ортонормированный $e_i = \frac{b_i}{\|b_i\|}$).

1. Так как $a_1 \neq 0$ (вектор базиса), можно взять $b_1 = a_1$.
2. Будем считать b_2 в виде:

$$b_2 = a_2 - \alpha b_1, \alpha \in \mathbb{R}$$

Ищем α из условия $(b_1, b_2) = 0$. То есть:

$$(a_2 - \alpha b_1, b_1) = 0 \Rightarrow (a_2, b_1) - \alpha(b_1, b_1) = 0 \Rightarrow$$

Так как $(b_1, b_1) \neq 0$ можем на него поделить

$$\Rightarrow \alpha = \frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)}$$

То есть α - проекция вектора a_2 на a_1 , $b_2 = a_2 - \frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1$

Векторы b_1, b_2 линейно выражаются через $a_1, a_2 \Rightarrow$ они принадлежат \mathcal{E} (это может быть подпространство). При этом a_1, a_2 могут быть выражены через $b_1, b_2 \Rightarrow b_1, b_2$ - линейно независимы.

3. Пусть b_1, \dots, b_k , $k \geq 2$, уже построены. Будем искать b_{k+1} в виде:

$$b_{k+1} = a_{k+1} - c_{k+1, 1}b_1 - c_{k+1, 2}b_2 - \dots - c_{k+1, k}b_k$$

Коэффициент $c_{k+1, i}$, $i = \overline{1, k}$, найдём из условия ортогональности с b_i , домножим выражение скалярно на b_i .

$$0 = (b_{k+1}, b_i) = (a_{k+1}, b_i) - 0 - \dots - c_{k+1, i}(b_i, b_i) - \dots - 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_{k+1, i} = \frac{(a_{k+1}, b_i)}{(b_i, b_i)} \Rightarrow b_{k+1} = a_{k+1} - \sum_{i=1}^k \frac{(a_{k+1}, b_i)}{(b_i, b_i)} b_i$$

Продолжаем так делать, пока не получим ортогональную линейно независимую систему векторов b_1, \dots, b_n , где $n = \dim \mathcal{E} \Rightarrow$ ортонормальный базис.

Утверждение (четвёртое свойство матрицы Грамма):

Определитель матрицы Грамма не меняется в процессе ортогонализации Грамма-Шмидта.

$$\text{Gr}(a_1, \dots, a_n) = \det \Gamma = \det \Gamma' = \text{Gr}(b_1, \dots, b_n) = \|b_1\|^2 \cdot \dots \cdot \|b_n\|^2$$

Так как матрица Грамма ортогонального базиса является диагональной.

Доказательство:

Рассмотрим матрицу перехода от a к b :

$$U_{a \rightarrow b} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \dots & * & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & * \\ \vdots & 0 & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Получилась верхнетреугольная матрица, определитель которой равен 1.

И участвуют только векторы b_i с $i \leq k$, которые выражаются через a_j , где $a_j \leq a_i$

$$\Rightarrow \det U_{a \rightarrow b} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Gr}(b_1, \dots, b_n) = \det \Gamma' = (\det U)^2 \det \Gamma = 1 \det \Gamma = \text{Gr}(a_1, \dots, a_n)$$

Лекция 22 мая

Свойства матрицы Грамма

1. F - симметрическая и положительно определённая.

2. $\Gamma' = U^T \Gamma U$

3. Если a_1, \dots, a_n - базис, то

$$\det \Gamma(a_1, \dots, a_n) = \text{Gr}(a_1, \dots, a_n) > 0$$

4. Метод ортогонализации Грамма-Шмидта не меняет $\det \Gamma$

$$\text{Gr}(a_1, \dots, a_n) = \text{Gr}(b_1, \dots, b_n) = \|b_1\|^2 \dots \|b_n\|^2$$

Утверждение (5 свойство матрицы Грамма).

Пусть a_1, \dots, a_n - некоторые векторы (необязательно базис). Тогда:

$$a_1, \dots, a_k \Leftrightarrow \text{Gr}(a_1, \dots, a_k) = \det \Gamma \neq 0$$

л.н.з.

Доказательство:

Составим линейную комбинацию a_1, \dots, a_k и приравняем к нулю:

$$\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k = 0 \quad (1)$$

Умножим (1) скалярно последовательно на a_1, \dots, a_k

$$\begin{cases} \alpha_1(a_1, a_1) + \alpha_2(a_1, a_2) + \dots + \alpha_k(a_1, a_k) = 0 \\ \vdots \\ \alpha_1(a_k, a_1) + \alpha_2(a_k, a_2) + \dots + \alpha_k(a_k, a_k) = 0 \end{cases}$$

Это СЛАУ относительно неизвестных $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ вида

$$\Gamma(a_1, \dots, a_k) \alpha = 0, \text{ где } \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix}$$

Однородная СЛАУ с квадратной матрицей \Rightarrow по критерию существования ненулевого решения, существуют нетривиальные коэффициенты α , такие что:

$$\alpha_1, \dots, \alpha_k \Leftrightarrow \det \Gamma(a_1, \dots, a_k) = 0$$

то есть векторы a_1, \dots, a_k линейно независимы из (1).

Замечание:

В V_3 если a_1, a_2, a_3 - линейно независимые столбцы координат в некотором ортонормированном базисе, тогда

$$\Gamma(a_1, a_2, a_3) = A^T E A^T = A^T A, \text{ где } A = [a_1, a_2, a_3], \text{ матрица по столбцам}$$

Равенство верно, так как матрица A является матрицей перехода от ортонормированного базиса к базису a (а в ОНБ $\Gamma = E$).

Получается $\text{Gr}(a_1, a_2, a_3) = (\det A)^2$.

При этом $\det A = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle = V(a_1, a_2, a_3)$ - ориентированный объём параллелипипеда, построенного на векторах a_1, a_2, a_3 .

То есть $|V(a_1, a_2, a_3)| = \sqrt{\text{Gr}(a_1, a_2, a_3)}$

Замечание:

В n -мерном случае положим

$$V(a_1, \dots, a_n) = \sqrt{\text{Gr}(a_1, \dots, a_n)}$$

Объём n -мерного параллелипипеда, построенного на векторах a_1, \dots, a_n .

Ортогональные дополнения**Определение:**

Пусть H - подпространство в евклидовом пространстве \mathcal{E} , тогда множество:

$$H^\perp = \{x \in \mathcal{E} | \forall h \in H \ (x, h) = 0\}$$

называется ортогональным дополнением к пространству H .

Утверждение:

H^\perp является линейным подпространством в \mathcal{E} и $\mathcal{E} = H \oplus H^\perp$

Следствие:

$$\dim \mathcal{E} = \dim H + \dim H^\perp$$

Доказательство:

Проверим замкнутость операции сложения:

$$\forall h \in H \forall x_1, x_2 \in H^\perp (x_1 + x_2, h) = (x_1, h) + (x_2, h) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 \in H^\perp$$

Умножения на скаляр:

$$\forall h \in H, \forall x \in H^\perp, \forall \alpha \in \mathbb{R} (\alpha x, h) = \alpha(x, h) = \alpha \cdot 0 = 0$$

То есть H^\perp - подпространство в $\mathcal{E} \Rightarrow$

\Rightarrow можно рассмотреть сумму подпространств $H + H^\perp$

Докажем, что сумма $H + H^\perp$ прямая.

$$\forall x \in H \cap H^\perp (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow H \cap H^\perp = \{0\} \Rightarrow \text{сумма прямая}$$

Покажем, что $H \oplus H^\perp = \mathcal{E}$

Пусть f_1, \dots, f_m - ортонормированный базис в H (существует по теореме о методе Грамма-Шмидта)

Дополним его до базиса в \mathcal{E} векторами f_{m+1}, \dots, f_n

Применим процесс ортогонализации Грамма-Шмидта, получим векторы

$$\underbrace{f_1, \dots, f_m}_{\text{уже ОНБ}}, e_{m+1}, \dots, e_n$$

Тогда e_{m+1}, \dots, e_n по построению ортогональны каждому вектору f_1, \dots, f_m , то есть ортогональны всему H , так как $H = \mathcal{L}(f_1, \dots, f_m) \leftarrow$ линейная оболочка, тогда $e_{m+1}, \dots, e_n \in H^\perp$ по определению.

То есть $\forall x \in \mathcal{E}$:

$$x = \underbrace{x_1 h_1 + \dots + x_m h_m}_{h \in H} + \underbrace{x_{m+1} e_{m+1} + \dots + e_n}_{h^\perp \in H^\perp}$$

То есть все $x \in \mathcal{E}$ представимы в виде $x = h + h^\perp$, где $h \in H, h^\perp \in H^\perp$, что и означает, что $\mathcal{E} = H \oplus H^\perp$

Определение:

Пусть $x = h + h^\perp$, где $h \in H, h^\perp \in H^\perp$, тогда - ортогональная проекция на H , а h^\perp - ортогональная составляющая x относительно H

Обозначение:

$$h = \text{Pr}_H x$$

Замечание:

$$\forall x \in \mathcal{E} \forall H \exists! h, h^\perp x = h + h^\perp, \text{ так как } \mathcal{E} = H \oplus H^\perp$$

Утверждение:

$$(H^\perp)^\perp = H$$

Доказательство:

$$\forall h^\perp \in H^\perp \forall x \in H, h^\perp \text{ ортогональны} \Rightarrow H \subseteq (H^\perp)^\perp$$

По предыдущему утверждению $\mathcal{E} = H \oplus H^\perp$ и $\mathcal{E} = H^\perp \oplus (H^\perp)^\perp \Rightarrow$
 \Rightarrow размерности H и $(H^\perp)^\perp$ одинаковы $\Rightarrow H = (H^\perp)^\perp$

Утверждение:

Пусть $H = \mathcal{L}(a_1, \dots, a_k)$ и a_1, \dots, a_k - линейно независимы (то есть базис в H), тогда $\forall x \in \mathcal{E}$:

$$\text{Pr}_H x = \underset{n \times k}{A} \cdot \underset{k \times k}{(A^T \cdot A)^{-1}} \cdot \underset{k \times n}{A^T} \cdot \underset{n \times 1}{x}$$

где $A = [a_1, \dots, a_k]$ - матрица $n \times k$, составленная из столбцов a_1, \dots, a_k , (координаты в некотором ортонормированном базисе).

Замечание:

$$h^\perp = x - h = (E - A(A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T)x$$

Доказательство:

По утверждению, доказанному выше:

$$\forall x \in \mathcal{E} x = h + h^\perp, h \in H, h^\perp \in H^\perp$$

$$\text{При этом } a_1, \dots, a_k \text{ - базис в } H \Rightarrow x = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k + h^\perp \quad (2)$$

То есть если мы знаем коэффициенты $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, то мы знаем

$$h = \text{Пр}_H x = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k$$

Равенство (2) последовательно скалярно умножим на a_1, \dots, a_k

$$\begin{cases} \alpha_1(a_1, a_1) + \alpha_2(a_1, a_2) + \dots + \alpha_k(a_1, a_k) = (a_1, x) \\ \vdots \\ \alpha_2(a_k, a_1) + \alpha_2(a_k, a_2) + \dots + \alpha_k(a_k, a_k) = (a_k, x) \end{cases} \quad (3)$$

В i -м уравнении слагаемые $(a_i, h^\perp) = 0$, так как $h^\perp \in H^\perp$. Перепишем (3) в матричном виде (все координаты векторов даны в ортонормированном базисе).

$$(3) \Leftrightarrow A^T \cdot A \cdot \alpha = A^T x, \quad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A = [a_1, \dots, a_k]$$

То есть $\Gamma(a_1, \dots, a_k) = A^T A$, поскольку $(a_i, a_j) = a_i^T E a_j = a_i^T a_j$. E - матрица Грамма в ортонормированном базисе.

Таким образом $\Gamma(a_1, \dots, a_k) = A^T A$ невырождена по свойству 5 матрицы Грамма (векторы a_1, \dots, a_k линейно независимы), значит существует $\Gamma^{-1} = (A^T A)^{-1}$.

Тогда (3) $\Rightarrow \alpha = (A^T A)^{-1} A^T x$

$$\text{Пр}_H x = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k = [a_1, \dots, a_k] \alpha = A \alpha = A(A^T A)^{-1} A^T x.$$

Определение:

Множество решений неоднородной СЛАУ $Ax = b$ называется линейным алгебраическим многообразием

Замечание:

По теореме о структуре общего решения неоднородной СЛАУ: общее решение НСЛАУ (то есть произвольный элемент многообразия) равен частному решению НСЛАУ + общее решение ОСЛАУ. Это означает, что линейное многообразие $P = x_0 + L$, где $x_0 \in P$ (частное решение НСЛАУ $Ax = b$), а L - множество решений ОСЛАУ $Ax = 0$, то есть подпространство, являющееся линейной оболочкой ФСР ОСЛАУ.

Таким образом L всегда содержит $\{0\}$ (начало координат), а $x_0 \in P$ - вектор сдвига. Любое линейное многообразие можно получить (параллельным) сдвигом некоторого подпространства L на вектор $x_0 \in P$

Определение:

Расстоянием от точки M , заданной радиус-вектором x до линейного многообразия P называется

$$\rho(M, P) = \inf_{u \in P} \rho(x, u) = \inf_{u \in P} \|x - u\|$$

Заметим, что в конечномерном евклидовом пространстве \inf всегда достигается (это \min), то есть

$$\rho(M, P) = \rho(x, P) = \min_{u \in P} \|x - u\|$$

Замечание:

$\rho(x, P)$ = длине ортогональной составляющей вектора $x - x_0$ относительно пространства L , где $P = x_0 + L$, то есть

$$\rho(x, P) = \|(x - x_0)^\perp\|$$

Доказательство:

$$\forall u \in P \quad x - u = x - (x_0 + l) = \text{Pr}_L(x - x_0 - l) + (x - x_0 - l)^\perp$$

Где $l \in L \Rightarrow l^\perp = 0 \Rightarrow x - u = \underbrace{\text{Pr}_L(x - x_0) - l}_{\in L} + \underbrace{(x - x_0)^\perp}_{\in L^\perp}$. Проекцию можем уменьшать, варьируя L . Тогда из геометрии получим:

$$\forall u \in P \quad \|(x - x_0)^\perp\| \leq \|x - u\|, \quad (\text{катет не больше гипотенузы})$$

При $l = \text{Pr}_L(x - x_0)$, то есть $u = x_0 + \text{Pr}_L(x - x_0)$ достигается равенство \Rightarrow

$$\rho(x, P) = \min_{u \in P} \|x - u\| = \|(x - x_0)^\perp\|$$

Лекция 29 мая

Утверждение:

Расстояние $\rho(M, P)$ между точкой M с радиус вектором X и линейным многообразием $P = x_0 + L$, где $L = \mathcal{L}(a_1, \dots, a_k)$ и a_1, \dots, a_k - линейно независимые (то есть базис \mathcal{L}), вычисляется по формуле:

$$\rho(M, P) = \sqrt{\frac{\text{Gr}(a_1, \dots, a_k, x - x_0)}{\text{Gr}(a_1, \dots, a_k)}}$$

1 способ: $\rho(M, P) = \|(x - x_0)_L^\perp\|$

Доказательство:

Применим к $a_1, \dots, a_k, x - x_0$ процесс ортогонализации Грамма-Шмидта.

$$\underbrace{a_1, \dots, a_k}_{\text{базис } L}, x - x_0 \longmapsto \underbrace{b_1, \dots, b_k}_{\text{базис } L}, (x - x_0)^\perp$$

$(x - x_0)^\perp$, так как он ортогонален $L = h(b_1, \dots, b_k)$ и при ортогонализации мы вычитаем из $x - x_0$ его проекцию на L

По свойству 4 матрицы Грамма определитель не меняется в процессе ортогонализации, тогда:

$$\text{Gr}(a_1, \dots, a_k, x - x_0) = \text{Gr}(b_1, \dots, b_k, (x - x_0)^\perp) = \underbrace{\|b_1\|^2 \dots \|b_k\|^2}_{\text{Gr}(a_1, \dots, a_k)} \cdot \|(x - x_0)^\perp\|^2$$

И так как $\rho(M, P) = \|(x - x_0)_L^\perp\|$, то

$$\rho(M, P)^2 = \frac{\text{Gr}(a_1, \dots, a_k, x - x_0)}{\text{Gr}(a_1, \dots, a_k)}, \text{ ч.т.д.}$$

Линейные операторы в евклидовых пространствах**Определение:**

Линейный оператор $\mathcal{A}^* : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ называется сопряжённым к линейному оператору $\mathcal{A} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$, если:

$$\forall x, y \in \mathcal{E} \quad (\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^*y)$$

Определение:

Линейный оператор $\mathcal{A} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ называется самосопряжённым, если:

$$\forall x, y \in \mathcal{E} \quad (\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}y) \Rightarrow \mathcal{A} = \mathcal{A}^*$$

Лемма:

Пусть $M, N \in M_n(\mathbb{R})$, тогда:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad x^T M y = x^T N y \Rightarrow M = N$$

Доказательство:

x, y - любые, возьмём элементы канонического базиса: $e_i \begin{pmatrix} 0_1 \\ 0_2 \\ \vdots \\ 1_i \\ \vdots \\ 0_n \end{pmatrix}, \dots, e_j =$

$$\begin{pmatrix} 0_1 \\ 0_2 \\ \vdots \\ 1_j \\ \vdots \\ 0_n \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e_i M e_j = [M]_{ij} = [N]_{ij} = e_i N e_j \Rightarrow \forall i, j = \overline{1, n} \quad M = N, \text{ ч.т.д.}$$

Теорема (о существовании сопряжённого):

Пусть $\mathcal{A} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$. Тогда существует единственный сопряжённый линейный оператор $\mathcal{A}^* : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$, причём его матрица в любом базисе e имеет вид:

$$(\mathcal{A}^*)_e = \Gamma^{-1}(\mathcal{A}_e)^T \Gamma$$

Замечание:

Если базис e - ортонормированный, то $\mathcal{A}_e^* = \mathcal{A}_e^T$

Доказательство:

Запишем равенство (1) : $(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^*y)$ в базисе e .
Пусть x^e, y^e - столбцы координат векторов x, y в базисе e

$$(\mathcal{A}x)^e = \mathcal{A}_e x^e, \quad (x, y) = (x^e)^T \Gamma y^e$$

Тогда в матричной записи равенство (1) имеет вид:

$$\begin{aligned} ((\mathcal{A}x)^e)^T \Gamma y^e &= (x^e)^T \Gamma (\mathcal{A}^*y)^e \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x^e)^T \underbrace{\mathcal{A}_e^T \Gamma}_M y^e &= (x^e)^T \underbrace{\Gamma \mathcal{A}_e^*}_N y^e \Rightarrow \end{aligned}$$

\Rightarrow так как верно для всех x, y , то по лемме $M = N$, то есть $\Gamma \mathcal{A}_e^* = \mathcal{A}_e^T = \Gamma \Rightarrow$ так как e базис, то по свойству 5 матрицы Грамма, существует Γ^{-1} , то есть:

$$\mathcal{A}_e^* = \Gamma^{-1} \mathcal{A}_e^T \mathcal{A}$$

То есть в любом базисе сопряжённый линейный оператор задаётся матрицей \mathcal{A}_e^* и действие линейного оператора полностью определяется его матрицей \Rightarrow существует единственный сопряжённый линейный оператор.

Следствие (критерий самосопряжённости):

Линейный оператор самосопряжён \Leftrightarrow матрица линейного оператора \mathcal{A} в ортонормированном базисе симметрическая.

Доказательство:

$\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$. В ортонормированном базисе e выглядит так:

$$\mathcal{A}_e^* = \mathcal{A}_e^T \wedge \forall \text{ базиса } \mathcal{A}_e^* = \mathcal{A}_e \Leftrightarrow \text{в ОНБ } \mathcal{A}_e = \mathcal{A}_e^T$$

Теорема:

Все корни характеристического многочлена самосопряжённого линейного оператора являются вещественными числами.

Доказательство:

Пусть $\lambda_i \in \mathbb{C}$ - корень характеристического уравнения $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = 0$ и \mathcal{A} - самосопряжённый линейный оператор, значит в некотором ортонормированном базисе $\det(\mathcal{A} - \lambda_i E) = 0 \Rightarrow$ СЛАУ $(\mathcal{A} - \lambda_i E)x = 0$ (2) имеет ненулевое решение (это координаты собственного вектора, соответствующего собственному значению λ_i)

Пусть $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq 0$ - решение. Вообще говоря $\forall k = \overline{1, n} \ x_k \in \mathbb{C}$.

Рассмотрим $\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} \neq 0$ (комплексные сопряжённые чисел).

Умножим (2) слева на $(\bar{x})^T$: $(\bar{x})^T(\mathcal{A} - \lambda_i E)x = 0 \Leftrightarrow \bar{x}^T \mathcal{A}x - \lambda_i \bar{x}^T x = 0$, где $\bar{x}^T x = \bar{x}_1 x_1 + \dots + \bar{x}_n x_n = \underbrace{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}_{\in \mathbb{R}} > 0$.

Тогда $\lambda_i = \frac{\bar{x}^T \mathcal{A}x}{\bar{x}^T x}$ - отношение Рэлея (Rayleigh).

Покажем, что $\omega = \bar{x}^T \mathcal{A}x$ - вещественное число, то есть $\bar{\omega} = \omega$:

$$\omega = \omega^T, \text{ (так как это число)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega = (\bar{x}^T \mathcal{A}x)^T = x^T \mathcal{A}^T (\bar{x}^T)^T = x^T \mathcal{A} \bar{x}$$

Так как $\mathcal{A} = \mathcal{A}^T$ в ортонормированном базисе. $\bar{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$, так как $\mathcal{A} \in M_n(\mathbb{R})$

Но $\bar{\omega} = \overline{(\bar{x}^T \mathcal{A}x)} = (\overline{\bar{x}^T}) \bar{\mathcal{A}} \bar{x} = x^T \mathcal{A} \cdot \bar{x} \Rightarrow \bar{\omega} = \omega \Rightarrow$ собственное значение λ_i - тоже является вещественным, ч.т.д.

Теорема (без доказательства):

Пусть λ_i - собственное значение самосопряжённого линейного оператора \mathcal{A} . Тогда алгебраическая кратность λ_i всегда равна геометрической кратности λ_i ($m(\lambda_i) = s(\lambda_i)$)

Следствие:

Самосопряжённый линейный оператор всегда является диагонализируемым.

Утверждение:

Собственные векторы самосопряжённого линейного оператора, отвечающие различным собственным значениям, являются ортогональными.

Доказательство:

Пусть λ_1, λ_2 такие собственные значения, что:

$$\begin{cases} \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ \exists x_1 \neq 0 : \mathcal{A}x_1 = \lambda_1 x_1 \\ \exists x_2 \neq 0 : \mathcal{A}x_2 = \lambda_2 x_2 \end{cases}$$

$(\mathcal{A}x_1, x_2) = (\lambda_1 x_1, x_2) = \lambda_1(x_1, x_2)$. Из самосопряжённости получим:

$$(\mathcal{A}x_1, x_2) = (x_1, \mathcal{A}x_2) = (x_1, \lambda_2 x_2) = \lambda_2(x_1, x_2)$$

То есть $\underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0}(x_1, x_2) = 0 \Rightarrow (x_1, x_2) = 0$, то есть x_1, x_2 - ортогональны.

Теорема (без доказательства):

Для всех самосопряжённых линейных операторов \mathcal{A} существует ортонормированный базис из собственных векторов, его матрица \mathcal{A}_e в этом базисе диагональна, на диагонали стоят собственные значения, повторяющиеся столько раз, какова их кратность.

Теорема (частный случай):

Если собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ - самосопряжённого линейного оператора $\mathcal{A} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$, $\dim \mathcal{E} = n$, попарно различны ($i \neq j \Rightarrow \lambda_i \neq \lambda_j$), то в \mathcal{E} существует ортонормированный базис (из собственных векторов), в котором матрица линейного оператора \mathcal{A} имеет диагональный вид.

Доказательство:

Если собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ - попарно различны, то, выбрав для каждого λ_i соответствующий ему собственный вектор b_i , мы получим n ненулевых векторов, они будут линейно независимы по доказанному ранее и, так как \mathcal{A} - самосопряжённый линейный оператор, то система

b_1, \dots, b_n будет ортогональна \Rightarrow ортогональный базис. Нормируя его, получим ортонормированный базис из собственных векторов $e_i = \frac{b_i}{\|b_i\|}$, в нём матрица линейного оператора диагональна.

Ортогональные матрицы и ортогональные линейные операторы

Определение:

Квадратную матрицу $U = M_n(\mathbb{R})$ называют ортогональной, если

$$U^T \cdot U = E$$

Пример:

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} - \text{матрица поворота}$$

Свойства ортогональных матриц

$$1. |\det U| = 1$$

$$\det(U^T \cdot U) = \det E = 1 \Rightarrow (\det U)^2 = 1 \Rightarrow |\det U| = 1$$

Замечание:

Ортогональная матрица всегда невырождена.

$$2. U^{-1} = U^T$$

По замечанию U^{-1} всегда существует, равенство $U^T U = E$ умножим справа на U^{-1} :

$$(U^T U) \cdot U^{-1} = E U^{-1}$$

$$U^T (U \cdot U^{-1}) = U^{-1} \Rightarrow U^T = U^{-1}$$

3. U^T тоже ортогональная матрица

$$(U^T)^T U^T = U \cdot U^{-1} = E$$

4. Произведение ортогональных матриц одинакового размера - ортогональная матрица

Доказательство:

$$(U_1 U_2)^T (U_1 U_2) = U_2^T \underbrace{U_1^T U_1}_E U_2 = \underbrace{U_2^T U_2}_E = E$$

Замечание:

Все ортогональные матрицы $n \times n$ над \mathbb{R} с операцией умножения матриц образуют группу $O_n(\mathbb{R})$

Определение:

Линейный оператор $\mathcal{A} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ называется ортогональным, если

$$\forall x, y \in \mathcal{E} \quad (\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (x, y)$$

То есть говорят, что \mathcal{A} "сохраняет скалярное произведение".

Замечание:

Ортогональный оператор сохраняет норму вектора и угол между векторами.

Доказательство:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}x\|^2 &= (\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) = (x, x) = \|x\|^2 \\ \cos(\widehat{\mathcal{A}x, \mathcal{A}y}) &= \frac{(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y)}{\|\mathcal{A}x\| \cdot \|\mathcal{A}y\|} = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|} = \cos(\widehat{x, y}) \end{aligned}$$

Теорема (критерий ортогональности линейного оператора с помощью матрицы):

\mathcal{A} - ортогональный линейный оператор \Leftrightarrow его матрица в ортонормированном базисе ортогональна.

Доказательство:

Необходимость

Дано: \mathcal{A}_e - ортогональный линейный оператор.

Доказать: \mathcal{A}_e - ортогональная матрица в ортонормированном базисе e .

$$(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (x, y) \Rightarrow (\mathcal{A}_e x)^T \Gamma(\mathcal{A}_e y) = x^T E y \Leftrightarrow$$

E - матрица грамма в ортонормированном базисе

$$\Leftrightarrow \forall x, y \in \mathcal{E} \quad x^T \underbrace{\mathcal{A}_e^T \mathcal{A}_e}_M y = x^T E y$$

Тогда по лемме $\mathcal{A}_e^T \mathcal{A}_e = E$, то есть по определению \mathcal{A}_e - ортогональная матрица.

Достаточность

Дано: \mathcal{A}_e - ортогональная матрица в ортонормированном базисе

Доказать: \mathcal{A} - ортогональный линейный оператор.

$$\mathcal{A}_e^T \mathcal{A}_e = E \Rightarrow \forall x, y \in \mathcal{E} \quad x^T (\mathcal{A}_e^T \mathcal{A}_e) y = x^T E y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\mathcal{A}_e x)^T \Gamma(\mathcal{A}_e y) = x^T E y$$

\mathcal{A} это матричная запись скалярного произведения в ортонормированном базисе. То есть

$$\forall x, y \in \mathcal{E} \quad (\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (x, y) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \mathcal{A}$ ортогональный линейный оператор, ч.т.д.

Теорема (критерий ортогональности линейного оператора):

Пусть линейный оператор $\mathcal{A} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$, тогда:

\mathcal{A} - ортогональный линейный оператор $\Leftrightarrow \mathcal{A}$ переводит любой ортонормированный базис e_1, \dots, e_n в ортонормированный $\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n$

Лекция 5 июня

ОНБ = ортонормированный базис.

Теорема (2^{ой} Критерий ортогональности линейного оператора)

Пусть линейный оператор $\mathcal{A} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$, тогда \mathcal{A} - ортогональный линейный оператор $\Leftrightarrow \mathcal{A}$ переводит ОНБ e_1, \dots, e_n в ОНБ $\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n$.

Доказательство

Необходимость:

$$(\mathcal{A}e_1, \mathcal{A}e_j) = (e_i, e_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} = \delta_j^i$$

Достаточность:

Дано: e_1, \dots, e_n - ОНБ, $\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n$ - тоже ОНБ

Доказать: \mathcal{A} - ортогональный линейный оператор.

$\forall x \in \mathcal{E} \ x \longmapsto (x_1, \dots, x_n)^T$ - координаты в базисе e , то есть $x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$.

Тогда $\mathcal{A}x = \mathcal{A}(x_1e_1 + \dots + x_ne_n) = x_1\mathcal{A}e_1 + \dots + x_n\mathcal{A}e_n$, то есть

$$\mathcal{A}x \longmapsto (x_1, \dots, x_n)^T - \text{координаты вектора в базисе } \mathcal{A}e$$

$$\forall x, y \in \mathcal{E}$$

$$(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = \underbrace{(\mathcal{A}x)_{\mathcal{A}e}^T}_{=x_e^T} \underbrace{\Gamma_{\mathcal{A}e}}_{=E} \underbrace{(\mathcal{A}y)_{\mathcal{A}e}}_{=y_e} = x_e^T y_e = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$$

$$(x, y) = x_e^T \underbrace{\Gamma_e}_{=E} y_e = x_e^T y_e = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$$

Значит \mathcal{A} - ортогональный линейный оператор.

Утверждение:

Матрица перехода от одного ОНБ к другому ОНБ в евклидовом пространстве всегда ортогональна.

Доказательство:

Пусть U - матрица перехода от ОНБ $e = (e_1, \dots, e_n)$ к ОНБ $b = (b_1, \dots, b_n)$ тогда

$\Gamma_e = U^T \Gamma_e U = U^T U = E \Rightarrow U$ — ортогональная матрица по определению
5 разложений матриц

1 разложение.

Теорема (о каноническом виде ортогонального оператора)

Для любого ортогонального линейного оператора существует ОНБ, в котором его матрица имеет блочно-диагональный вид.

$$A = \begin{pmatrix} A_{\varphi_1} & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & A_{\varphi_n} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & \dots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \dots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}$$

A_{φ_i} - матрица (блок) 2×2 вида $A_{\varphi_i} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_i & -\sin \varphi_i \\ \sin \varphi_i & \cos \varphi_i \end{pmatrix}$

То есть существует ОНБ, в котором ортогональный линейный оператор является либо набором вращений, либо набором вращений и отражений.
(без доказательства)

Теорема Эйлера

Любое ортогональное преобразование в \mathbb{R}^3 обладает ОНБ, в котором его матрица имеет вид

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ \hline 0 & 0 & \pm 1 \end{array} \right)_{3 \times 3}$$

То есть любое ортогональное преобразование в \mathbb{R}^3 является или поворотом на некоторый угол φ (вокруг заданной оси - прямой, проходящей через 0) либо композицией такого поворота и отражения (относительно заданной плоскости)

2 разложение:

Теорема (о спектральном разложении)

Для любой симметрической матрицы A существует такая ортогональная матрица U , что $A = U\Lambda U^T$, где

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

С собственными значениями оператора с матрицей A на диагонали, повторяющимися соответственно их кратности.

То есть любая симметрическая матрица ортогональными преобразованиями приводится к диагональному виду.

Доказательство:

Рассмотрим матрицу A как матрицу самосопряжённую линейному оператору в ОНБ $e = \{e_1, \dots, e_n\}$

Для самосопряжённого линейного оператора существует ОНБ (из собственных векторов) $f = \{f_1, \dots, f_n\}$, котором его матрица диагональна

$$\Lambda = C_{e \rightarrow f}^{-1} A_e C_{e \rightarrow f}$$

где $C_{e \rightarrow f}$ - матрица перехода от ОНБ e к ОНБ $f \Rightarrow$ она ортогональна

То есть $C_{e \rightarrow f}^{-1} = C_{e \rightarrow f}^T$ возьмём $U = C_{e \rightarrow f}$, тогда $\Lambda = U^T A U \Rightarrow A = U \Lambda U^T$

3 разложение:

Теорема (о сингулярном разложении)

(Может встречаться как SVD = singular value decomposition).

Для любой (прямоугольной) матрицы $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ имеет место разложение $A_{m \times n} = V_{m \times m} \Sigma_{m \times n} U_{n \times n}^T$, где $U \in O_n(\mathbb{R})$, $V \in O_m(\mathbb{R})$

Σ - диагональна с неотрицательными числами $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r \geq \sigma_{r+1} = \dots = \sigma_{\min(m \times n)} = 0$ на главной диагонали (они называются сингулярными числами и расположены по невозрастанию).

То есть $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \sigma_r & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}_{m \times n}$ - того же ранга, что и A

Доказательство:

Рассмотрим матрицу $A^T A_{n \times n}$

Это матрица линейного оператора $A^* A$ в некотором ОНБ. Он самосопряжён, так как матрица $A^T A$ является симметрической:

$$(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$$

При этом все его собственные значения λ_i неотрицательны, так как если $A^* A u = \lambda u$, то $\lambda(u, u) = (u, \lambda u) = (u, A^* A u) = (A u, A u) = \|A u\|^2 \geq 0 \Rightarrow \lambda \geq 0$

Тогда эти собственные значения λ_i можно записать в виде σ_i^2 , то есть $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$, где $i = 1, \min(m, n)$.

Числа σ_i принято называть сингулярными числами и сортировать по невозрастанию

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r \geq \sigma_{r+1} = \dots = \sigma_{\min(m \times n)} = 0$$

Где $r = \text{Rg } \Sigma = \text{Rg } A^T A$. Покажем, что $r = \text{Rg } A$. Заметим, что $A^T A = \Gamma(a_1, \dots, a_n)$

Зафиксируем базисный минор в матрице A . В матрице $\Gamma(a_1, \dots, a_n)$ базисный минор будет в тех же столбцах (и строках) по свойству 5 матрицы Грама. Тогда $\text{Rg } A = \text{Rg } \Gamma(a_1, \dots, a_n) = \text{Rg } A^T A = \text{Rg } A A^T$

Пусть U_1, \dots, U_n - ОНБ из собственных векторов $A^T A$, то есть

$$A^T A u_i = \begin{cases} \sigma_i^2 u_i, & 1 \leq i \leq r \\ 0, & r+1 \leq i \leq n \end{cases}$$

Положим $v_i = \frac{Au_i}{\sigma_i}, i \leq i \leq r$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } (v_i, v_j) &= \frac{(Au_i)^T}{\sigma_i} E \frac{Au_j}{\sigma_j} = \frac{u_i^T (A^T Au_j)}{\sigma_i \sigma_j} = \frac{u_i^T \sigma_j^2 u_j}{\sigma_i \sigma_j} = \frac{\sigma_j}{\sigma_i} u_i^T u_j = \\ &= \frac{\sigma_j}{\sigma_i} (u_i, u_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} = \delta_i^j, \text{ где } 1 \leq i, j \leq r, \text{ где } r = \text{Rg } A \leq \end{aligned}$$

$\min(m, n)$

Дополним систему v_1, \dots, v_r векторами v_{r+1}, \dots, v_m до ОНБ в \mathbb{R}^m произвольным образом. Заметим, что при $j = r+1, \dots, n$, $Au_j = 0$, так как $A^T Au_j = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (A^* Au_j, u_j) = (0, u_j) = 0 \text{ Также это равно } (Au_j, Au_j) = \|Au_j\|^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow Au_j = 0 \text{ при } j = r+1, \dots, n$$

$$A_{m \times n} [u_1, \dots, u_n]_{n \times n} = [\sigma_1 v_1, \dots, \sigma_r v_r, 0, \dots, 0] =$$

$$= \underbrace{[v_1, \dots, v_n]}_{=V}_{m \times m} \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \sigma_r & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

векторы v_{r+1}, \dots, v_m не влияют на разложение, умножаясь на 0 на диагонали.

А матрицы U, V являются ортогональными, так как столбцы U - ОНБ из собственных векторов в $A^T A \Rightarrow U, V$ - матрицы перехода от ОНБ к ОНБ, то есть по утверждению ортогональной матрицы

$$AU = U\Sigma \mid \cdot U^T \text{ справа}$$

Получаем $A = V\Sigma U^T$ - сингулярное разложение

4 разложение:

Утверждение (о полярном разложении)

Любой линейный оператор в евклидовом пространстве представляется в виде композиции самосопряжённых линейных операторов с неотрицательными собственными значениями и ортогонального линейного оператора.

То есть для любой квадратной матрицы A существует разложение

$$A = S \cdot O$$

Где S - симметрическая матрица (неотрицательно определённая), O - ортогональная матрица. (это матрицы соответствующих линейных операторов в ОНБ).

Замечание:

Это аналог формулы для комплексных чисел $z = re^{i\varphi} = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$

Доказательство:

Возьмём сингулярное разложение матрицы A

$$A_{n \times n} = V_{n \times n} \Sigma_{n \times n} U_{n \times n}^T$$

Где U , V - ортогональные, Σ - диагональная матрица с неотрицательными числами на диагонали.

$$A = V \Sigma U^T = \underbrace{(V \Sigma V^T)}_{=S} \underbrace{(V U^T)}_{=O} = S \cdot O$$

Где O - ортогональная матрица, как произведение двух ортогональных матриц

S - симметрическая ($S^T = (V \Sigma V^T)^T = (V^T)^T \Sigma^T V^T = V \Sigma V^T$)

и у неё неотрицательные собственные значения - сингулярные числа, так как Σ - её диагональный вид в спектральном разложении

Замечание:

Можно и в обратном порядке представить (в виде композиции ортогонального линейного оператора и самосопряжённого линейного оператора):

$$A = V \Sigma U^T = (V U^T) \cdot (U \Sigma U^T) = \hat{O} \hat{S}$$

Лекция 10 июня.

Вспомним пройденные разложения:

1. Спектральное разложение: $A = U \Lambda U^T$, где A - симметрическая, U - ортогональная, Λ - диагональная.
2. Канонический вид ортогонального оператора в ОНБ

3. *SVD* (сингулярное) для любых матриц: $A_{m \times n} = V \Sigma U^T$, V , U - ортогональная.

4. Полярное $A = SO$ (или $A = O'S'$), A - квадратная матрица

5 разложение:

Утверждение (о QR разложении):

Пусть $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\det A \neq 0$ - квадратная невырожденная матрица. Тогда существуют матрицы Q , R : $A = QR$, Q - ортогональная, R - верхнетреугольная с положительными элементами на главной диагонали. ($R = Q^T A$)

Доказательство:

Пусть A_1, \dots, A_n - столбцы матрицы A , они линейно независимы по условию (так как матрица невырождена).

Применим к ним процесс ортогонализации Грамма-Шмидта. Получим:

$$A_1, \dots, A_n \mapsto B_1, \dots, B_n - \text{ортогональный базис}$$

Нормируем его: $Q_i = \frac{B_i}{\|B_i\|}$, $i = \overline{1, n}$, Q_1, \dots, Q_n образуют ОНБ в \mathbb{R}^n .

Тогда исходный k столбец $A_k \in \mathcal{L}(Q_1, \dots, Q_k)$, $k = \overline{1, n}$ (по формулам Грамма Шмидта).

Тогда $A_k = r_{1k}Q_1 + \dots + r_{kk}Q_k$, где $r_{k,k} = \|B_k\| > 0$ (так как $B_k = Q_k \|B_k\|$, а коэффициент при B_k в процессе ортогонализации стал равен 1).

В матричном виде: $A = QR$, где $Q = [Q_1, \dots, Q_n]$ - ортогональная матрица, так как матрица перехода от ОНБ к ОНБ.

Тогда $R = \begin{bmatrix} r_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & r_{nn} \end{bmatrix}$, где $*$ - какие-то элементы, $\forall k \ r_{k,k} = \|B_k\|$ на диагонали.

Приведение квадратичных форм к главным осям

Теорема:

Любую квадратичную форму можно с помощью ортогонального преобразования привести к каноническому виду $q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$, где λ_i - собственное значение линейного оператора с той же матрицей, что и квадратичная форма, в некотором ОНБ.

Доказательство:

Пусть дана квадратичная форма $q(x) = x^T A x$ в некотором ОНБ.

Рассмотрим линейный оператор \mathcal{A} с той же матрицей в том же ОНБ.

\mathcal{A} - самосопряжённый линейный оператор, так как A - симметрическая матрица. Применим теорему о спектральном разложении:

$$A = U \Lambda U^T$$

Где U - ортогональная матрица, Λ - диагональная матрица. Заметим, что если взять U в качестве матрицы перехода к новому базису (ОНБ из собственных векторов оператора \mathcal{A}), то матрица квадратичной формы будет в новом базисе $U^T A U$, то есть Λ (и для оператора \mathcal{A} $\Lambda = U^{-1} A U = U^T A U$, (так как U - ортогональная) - матрица в новом базисе).

То есть в новом базисе матрицы квадратичной формы и линейного оператора снова совпадают и обе равны диагональной матрице Λ (с собственными значениями оператора A на диагонали). Замечание: у квадратичных форм собственных значений не бывает, поэтому на диагонали находятся именно собственные значения оператора.

Замечание:

То есть квадратичную форму можно привести к каноническому виду, не меняя длин и углов (ортогональное преобразование их не меняет). В \mathbb{R}^3 достаточно поворота плоскости.

Алгебра над полем

Определение:

Пусть A - векторное пространство над некоторым полем F , снабжённое дополнительной операцией умножения векторов $*$: $A \times A \longrightarrow A$

A называется алгеброй над полем F , если выполняются условия:

1. $\forall x, y, z \in A \begin{cases} (x + y) * z = x * z + y * z \\ x * (y + z) = x * y + x * z \end{cases}$
2. $\forall \alpha, \beta \in F (\alpha x) * (\beta y) = (\alpha \cdot \beta)(x * y)$

Определение:

Алгебра называется ассоциативной, если операция умножения векторов ассоциативна. И алгеброй с единицей, если есть нейтральный элемент по умножению.

Пример:

1. \mathbb{C} является двумерной алгеброй над \mathbb{R} , $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$
2. $F[x]$ - многочлены над полем F (базис $1, x, x^2, \dots$) с операцией умножения многочленов, $\dim_F F[x] = \infty$ (счётно).
3. $M_n(F)$ - алгебра квадратных матриц над F с дополнительной операцией умножения матриц, $\dim M_n(F) = n^2$.
4. Кватернионы над \mathbb{R}

$$H = \{x_1 1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k \mid x_i \in \mathbb{R}\}$$

$$\dim_{\mathbb{R}} H = 4$$

Коники и квадрики

(то есть кривые и поверхности второго порядка)

Некоторая часть коспекта в [презентации](#) (тут пока что левая ссылка, когда появится, поменяю [если не поменял, напишите]).

Эллипс:

Вывод канонического уравнения эллипса:

$$|F_1M| + |F_2M| = const$$

Побозначим $const = 2a$.

Пусть координаты фокусов соответственно $(c, 0)$, $(-c, 0)$. Тогда

$$\begin{aligned}\sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\ (x+c)^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \\ a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= a^2 - xc \\ (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2)\end{aligned}$$

Знаем, что $a^2 - c^2 = b^2 \Rightarrow$ поделив на a^2b^2 получим каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Для него можно сказать

1. $|x| \leq a, |y| \leq b$.

2. Ox, Oy - оси симметрии $\Rightarrow y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ для $x \geq 0$.

Положим $a \geq b$, тогда: a - большая полуось, а b - малая полуось.

$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow \mathcal{E} = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ - эксцентриситет.

$\mathcal{E} \in [0, 1)$ - мера "сплюснутости" эллипса. d_1, d_2 - прямые, задающиеся соответственно уравнениями $x = \frac{a}{\mathcal{E}}, x = -\frac{a}{\mathcal{E}}$, называются директриссами.

Директрисса обладает свойством $\frac{MF_1}{\rho(M, d)} = \mathcal{E}$.

Гиперболы:

$||MF_1| - |MF_2|| = const$ - определение.

Задаётся уравнением $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, где:

a - действительная полуось

b - мнимая полуось.

$|x| \geq a \Rightarrow$ полоса $|x| < a$ не содержит точек гиперболы.

$y = \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$. При $x \rightarrow \infty$ появляются асимптоты: $y = \pm \frac{b}{a}x$

$c^2 = a^2 + b^2$, $2c$ - фокальное расстояние.

Директрисы d_1, d_2 $x = \pm \frac{a}{\mathcal{E}}$. Где $\mathcal{E} = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$ - эксцентриситет гиперболы, $\mathcal{E} \in (1, \infty)$. Смотри сопряжённая гипербола в презентации.

Парабола:

$\frac{|MF|}{\rho(M, d)} = 1 = \mathcal{E}$ - эксцентриситет параболы.

$y^2 = 2px$ - каноническое уравнение параболы.

Лекция 19 июня.

Половина этой лекции также находится в [презентации](#).

Сопряжённые (двойственные) пространства

Отображение $f : V \longrightarrow F$ (из линейного пространства в поле, над которым оно задано). Называется линейной формой (функционалом), если выполняются условия:

$$1. \forall x, y \in V \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$$

$$2. \forall \alpha \in F \forall x \in V \quad f(\alpha x) = \alpha f(x)$$

Замечание:

Это частный случай линейного отображения при $V_2 = F$.

Пусть в V фиксирован базис $e = (e_1, \dots, e_n)$.

Тогда матрицей линейного отображения f будет матрица $1 \times n$:

$$[f]_e = (f(e_1), \dots, f(e_n))_{1 \times n}$$

Тогда действие f в базисе e можно записать как:

$$\begin{aligned} f(x) &= [f]_e x_e = (f(e_1) \quad \dots \quad f(e_n)) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 f(e_1) + \dots + x_n f(e_n) = \\ &= f(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = f(x) \end{aligned}$$

Что происходит при замене базиса?

Утверждение:

Пусть a, b - базиса в V , тогда:

$$[f]_b = [f]_a T_{a \rightarrow b}$$

$[f]_b$ - строка в новом базисе.

Иногда выражение транспонируют, тогда

$$[f]_b^T = T_{a \rightarrow b}^T [f]_a^T$$

Доказательство:

$f(x) = [f]_a x_a = [f]_b x_b$, тогда верно:

$$x_b = T_{a \rightarrow b}^{-1} x_a \Leftrightarrow x_a = T_{a \rightarrow b} x_b \Rightarrow [f]_b x_b = [f]_a T_{a \rightarrow b} \cdot x_b \Rightarrow [f]_b = [f]_a T_{a \rightarrow b}$$

Определение:

Пространством, сопряжённым к линейному пространству V называется множество всех линейных форм на пространстве V , со следующими операциями:

1. $\forall x \in V \quad (f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$
2. $\forall x \in V \quad \forall \alpha \in F \quad (\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x)$

Обозначение:

$$V^* = \text{Hom } V, F$$

Hom - гомоморфизмы.

Замечание:

Так как координаты линейных форм записывают в строки и преобразуют с помощью $T_{a \rightarrow b}$ (а не $T_{a \rightarrow b}^{-1}$):

$[f]_b = [f]_a \cdot T_{a \rightarrow b}$ (хотя $x_b = T_{a \rightarrow b}^{-1} x_a$), их называют ковекторами, а "обычные" векторы - контрвекторами.

Замечание:

Когда ковекторы и векторы преобразуются одинаково? Когда матрица перехода $U_{a \rightarrow b}$ является ортогональной (то есть удовлетворяет условию $U_{a \rightarrow b}^T = U_{a \rightarrow b}^{-1}$), в частности, если это матрица перехода от ОНБ к ОНБ.

Определение:

Базис $e = (e_1, \dots, e_n)$ в V и базис $f = (f^1, \dots, f^n)$ (здесь e_i обозначает соответственный вектор столбец, а f^i - вектор строку) в сопряжённом пространстве V^* называются взаимными, если:

$$f^i(e_j) = \delta_j^i = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Утверждение:

Пусть $\dim V = n < \infty$. Тогда для любого базиса в V существует единственный взаимный базис в V^* и наоборот.

Доказательство:

Пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ - некоторый базис в V , пусть S - некоторый стандартный (канонический) базис в V . Запишем матрицу перехода $T_{S \rightarrow e} = ([e_1]_S \ \dots \ [e_n]_S)$ - матрица из столбцов координат в базисе S . Для произвольного базиса $f = (f^1 \ \dots \ f^n)$. В V^* тоже составим матрицу

$$F = \begin{pmatrix} [f^1]_s \\ \vdots \\ [f^n]_s \end{pmatrix}.$$

Тогда условие взаимности базисов e, f запишется в виде:

$$F_{f \rightarrow e} \cdot T_{S \rightarrow e} \Rightarrow F = T^{-1}$$

Обратная всегда существует, так как это матрица перехода, обратная матрица единственна, значит взаимный базис тоже единственный.

Пример:

$V = \mathbb{R}^2$, $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = [e_1]_s$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = [e_2]_s \Rightarrow$ матрица перехода:

$$T_{S \rightarrow e} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow F \cdot T = E \Rightarrow F = T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[f^1]_s = (1 \ 0), \ [f^2]_s = (1 \ 1) \Rightarrow f^1(x) = x_1, \ f^2(x) = x_1 + x_2$$

Утверждение:

Любое евклидово пространство \mathcal{E} изоморфно своему сопряжённому пространству, то есть $\mathcal{E} \cong \mathcal{E}^*$.

Доказательство:

Построим этот изоморфизм:

$$a \in \mathcal{E} \mapsto f_a(x) = (a, x) \in \mathcal{E}^*$$

Покажем, что φ - гомоморфизм линейных пространств:

$$\varphi(a_1 + a_2) = (a_1 + a_2, x) = (a_1, x) + (a_2, x) = \varphi(a_1) + \varphi(a_2)$$

$$\varphi(\lambda a) = (\lambda a, x) = \lambda(a, x) = \lambda\varphi(a) \Rightarrow \text{гомоморфизм.}$$

Оно сюръективно, так как любая линейная функция вида $a_1x_1 + \dots + a_nx_n$ может быть записана в некотором ОНБ, как (a, x) , где $a = (a_1, \dots, a_n)$ является прообразом. Оно инъективно по свойству скалярного произведения, значит это изоморфизм.