Семинары по дискретной математике модуль 4

Андрей Тищенко

2023/2024 гг.

Семинар 4 апреля

Графы

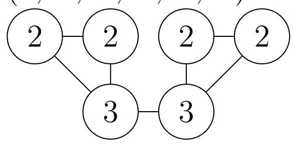
$$G = (\underset{\neq\varnothing}{V},\ E);\ \begin{cases} 1. E \subseteq V^2 \\ 2. E \text{ иррефлексивно} \\ \forall x \neg\ xEx \\ 3. E \text{ симметрично} \\ \forall x,\ y(xEy \Rightarrow yEx) \end{cases}$$

Вопрос 1. $V = \underline{n}$. Сколько существует различных графов на V?
Для графа размера 3.
Количество неупорядоченных пар различных вершин $= |\mathcal{P}_2(V)| = C_3^2 = 3$
Количество способов выбрать ребра $= |\mathcal{P}(\mathcal{P}_2(V))| = 2$

$\{x,\ y\}$ - ребро $\Leftrightarrow xEy \wedge yEx$

Степенная последовательность

2. $(3,\ 3,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2)$



Лемма о рукопожатиях

$(n,\ m)$ - граф $G = (V,\ E)$

$$\sum_{x \in V} d_G(x) = 2m = |E|$$

3. $(4,\ 4,\ 4,\ 4,\ 2)$ не является степенной.

4. Задача

Дано: $(n,\ m)$ граф, $G = (V,\ E),\ n \geqslant 2$

Хотим: $\exists x,\ y \in V\ \big(x \neq y \wedge d(x) = d(y)\big)$

$\forall x\ 0 \leqslant d(x) \leqslant n - 1 \quad d(x) \in \underline{n}$

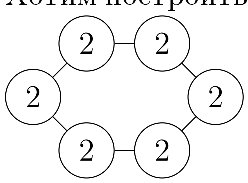
Псуть не так: $\Rightarrow d$ инъективна.

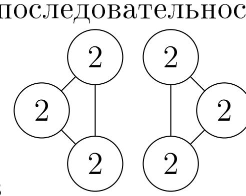
$$\underline{n} \sim V \overset{d}{\lesssim} \underline{n} \Rightarrow d \text{ сюръективна} \Rightarrow \begin{cases} \exists x_0\ d(x_0) = 0 \\ \exists x_{n-1}\ d(x_{n-1}) = n - 1 \end{cases}$$

$\neg x_0 E x_{n-1}$

$\forall y\ (y \neq x_{n-1}) \Rightarrow x_{n-1} E y \Rightarrow x_{n-1} E x_0 \Rightarrow \bot$

5. Хотим построить граф со степенной последовательностью $(2,\ 2, \ldots,\ 2)$





Граф $C_6 \ncong C_3 \sqcup C_3$

Пусть в G ровно k компонент связности. Одна компонента порядка $n_i \leqslant n,\ n_i = 5$

$(\underbrace{2,\ 2, \ldots,\ 2}_{n_i}) \Rightarrow G \cong C_{n_1} \sqcup \cdots \sqcup C_{n_k}$, где $\forall i\ n_i \geqslant 3,\ n_1 + \cdots + n_k = n$

$1 \leqslant k \leqslant \dfrac{n}{3}$ (округлить вверх)

7. $(100,\ 800)$ граф $G = (V,\ E)$

   а. $\forall x\ d_G(x) < 16$? Неверно по лемме о рукопожатиях.

   б. $\forall x\ d_G(x) = 16$.

Определение: граф называют <u>r-регулярным</u> $\Leftrightarrow \forall x\ d(x) = r$. Размер r-регулярного графа на n вершинах есть $\dfrac{rn}{2}$.

K_{t+1} - заведомо t-регулярный граф (полный граф на $t+1$ вершине).

Для нашей задачи возьмём K_{17}. В нём будет $\dfrac{17 \cdot 16}{2} = 136$ рёбер.

$800 = 136 \cdot 5 + 120$

$G \overset{?}{=} 5K_{17} + G'$, где G' 16-регулярный $(15,\ 120)$ граф (такого не бывает, так как одна из 15 вершин должна быть соседом с 16 другими $\perp$). Запрашиваю продолжение конспекта, тяжело.

Семинар 11 апреля

7. б. 16 регулярный граф на 100 вершинах.
$V = 100,\ xEy \Leftrightarrow \exists z \in \{\pm 8,\ \pm 7, \ldots,\ \pm 1\} = U \quad \big(x - y \equiv z\ (100)\big)$.
E иррефлексивно.

$$xEx \Rightarrow x - x = 0 \equiv z(100) \Rightarrow \perp$$

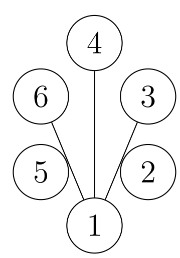
Симметричность.

$$xEy \Rightarrow yEx$$

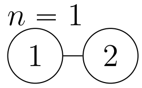
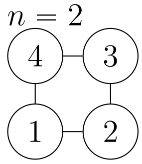
$$\exists z \in U \quad x - y \equiv z\ (100) \Rightarrow \begin{cases} y - x \equiv -z(100) \\ -z \in U \end{cases} \Rightarrow yEx$$

$x \in \underline{100}$. $N(x) = \{(x-8),\ (x-7), \ldots,\ (x-1),\ (x+1), \ldots,\ (x+8)\}$
Почему среди них нет одинаковых? Пусть есть:
$(x + d_1)\%100 = (x + d_2)\%100,\ |N(x)| \leqslant 16$
$\Leftrightarrow x + d_1 \equiv x + d_2\ (100)$
$\Leftrightarrow d_1 \equiv d_2\ (100) \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad |d_1 - d_2| = 16k \wedge d_2 - d_1 \leqslant 16 \Rightarrow$
$\Rightarrow d_1 = d_2 = 0$.

8. Среди любых шестерых людей есть хотя бы трое незнакомых или хотя бы трое знакомых.



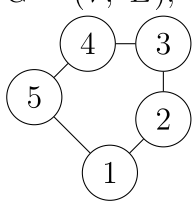
Пусть есть такая вершина, что у него есть три соседа.
Между вершинами $3,\ 4,\ 6$ может быть ребро, тогда есть три попарно знакомых, может не быть рёбер, тогда есть три попарно незнакомых.

9. Булев куб:
   $x_1, \ldots,\ x_n E y_1, \ldots,\ y_n \Leftrightarrow \exists i\ (x_i \neq y_i \wedge \forall j \neq 1\ x_j = y_j)$
   $n = 1$
   
   $n = 2$
   
   $n = 3$. Тут куб, поверьте, пожалуйста.

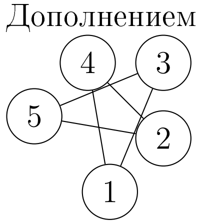
   a. $|V_n| = 2^n$
   b. Число рёбер графа $B_n = 2^n \cdot \frac{n}{2} = 2^{n-1} n$
   c. $2^n \cdot C_n^2$

Дополнение графа.

$G = (V,\ E), \quad \overline{G} = \big(V,\ (V^2 \setminus \mathrm{id}_V) \setminus E\big)$ Нарисуем дополнение:



Дополнением к такому графу будет граф



Докажем G не связен $\Rightarrow \overline{G}$ связен.
Рассмотрим произвольные вершины $x,\ y\ (x \neq y) \in V$.
Первый случай: $x \nsim_G y \Rightarrow \neg xEy \Rightarrow x\overline{E}y$
Второй случай: $x \sim_G y$, так как G не связен, то $\exists w : \begin{cases} x \nsim_G w \\ y \nsim_G w \end{cases} \Rightarrow$
$\Rightarrow xw,\ yw \notin E \Rightarrow xw,\ yw \in \overline{E} \Rightarrow x \sim_{\overline{G}} y$

11. Доказать:

$$\left.\begin{array}{c}(n,\ m)\text{ - граф }G\\ n=15\\ \forall x\ d(x)\geqslant 7\end{array}\right|\Rightarrow G\text{ связен}$$

Рассмотрим произвольные x и y и допустим $x \not\sim y \Rightarrow (xy \notin E)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \notin N(x) \cup N(y) \\ y \notin N(x) \cup N(y) \end{cases}$$

$N(x) \cup N(y) \subseteq V \backslash \{x,\ y\}$

$|N(x)| + |N(y)| = |N(x) \cup N(y)| \leqslant 15 - 2 = 13$

Так как $|N(x)| \geqslant 7 \wedge |N(y)| \geqslant 7 \Rightarrow 7 + 7 - |N(x) \cap N(y)| \leqslant 13 \Rightarrow$

$\Rightarrow N(x) \cap N(y) \neq \varnothing$

Семинар 18 апреля

Задача 12. Уединённая $\Rightarrow$ степень не больше 3. Каждая вершина соединена хотя бы с тремя уединёнными.

Возьмём любую вершину x. У неё должно быть хотя бы 3 уединённых соседа, пусть среди них есть уединённая вершина y. У любой уединённой вершины степень не больше 3 и она имеет хотя бы 3 уединённых соседа, значит все её соседи являются уединёнными, то есть вершина x является уединённой. Получается, что любая вершина является уединённой.

Построим такой граф на 100 вершинах. Можно привести в приимер 25 полных графов на 4 вершинах

Задача 13. 1 случай. Если граф полный, то очевидно 2 случай. Граф не полный $G \ncong K_n,\ n \geqslant 4 \Rightarrow \exists x,\ y\ \neg xEy$

$|N(x)| \geqslant \frac{n}{2};\ |N(y)| \geqslant \frac{n}{2}$

$|N(x) \cup N(y)| \leqslant n - 2$, так как $x,\ y \notin N(x) \wedge x,\ y \notin N(y) \Rightarrow$

$\Rightarrow x,\ y \notin N(x) \cup N(y)\ |N(x) \cup N(y)| = |N(x)| + |N(y)| - |N(x) \cap N(y)|$

$|N(x)| + |N(y)| \geqslant n \Rightarrow n - 2 \geqslant n - |N(x) \cap N(y)| \Rightarrow |N(x) \cap N(y)| \geqslant 2 \Rightarrow \exists u,\ v$ (вершины), такие что:

$xEv \wedge vEy \wedge yEu \wedge uEx \cong C_4$, ч.т.д.

Утверждение 1: если $(n,\ m)$ - граф G связен, то $m \geqslant n - 1$

Утверждение 2: $\forall (n,\ m)$ - графа G, $m \leqslant C_n^2$

Утверждение 3: Если G не связен, то $\overline{G}$ связен (см. задачу 10)

Утверждение 4: $\forall (n,\ m)$ - графа G. $\overline{G}$ есть $(m,\ C_n^2 - m)$ - граф

Задача 14. Допустим есть несвязный $(n,\ m)$ - граф G. Тогда связно его дополнение, являющееся $(n,\ C_n^2 - m)$ граф $\overline{G}$, значит для него выполнятеся $C_n^2 - m \geqslant n-1 \Rightarrow \dfrac{n(n-1)}{2} - m \geqslant n-1 \Rightarrow m \leqslant (n-1)(\frac{n}{2}-1) \Rightarrow$
$\Rightarrow m \leqslant \dfrac{(n-1)(n-2)}{2} = C_{n-1}^2$

Утверждение 5: Если $(n,\ m)$ - граф G не связен, то $m \leqslant C_{n-1}^2 < C_n^2$. Эта оценка неулучшаема (оптимальна). Это означает, что:
$\forall n \geqslant 2\ \exists$ несвязный $(n,\ C_{n-1}^2)$ - граф G

Задача 15. Пусть есть две вершины $x \neq y$ степени 5.
1 случай. Пусть они смежные (то есть xEy). Рассмотрим вершины, с которыми они связаны. Рассмотрим $\big(N(x)\backslash\{y\}\big) \cap \big(N(y)\backslash\{x\}\big)$
$|N'(x)| = |N(x)\backslash\{y\}| = |N(y)\backslash\{x\}| = N'(y) = 5-1 = 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow |N'(x) \cup N'(y)| \leqslant |V_G| - 2 = 9-2 = 7 \Rightarrow |N'(x) \cap N'(y)| \geqslant 1 \Rightarrow$
есть цикл. Противоречие.
2 случай. $x,\ y \notin N(x) \cup N(y)$
$|N(x) \cup N(y)| \leqslant 9-2 = 7$
$\underbrace{2|N(x)|}_{=10} - |N(x) \cap N(y)|$
$|N(x) \cap N(y)| \geqslant 3 \Rightarrow$ найдётся цикл.

Задача 16. $n \geqslant 2 \wedge m = n-1$
Лемма о рукопожатиях: $2(n-1) = \sum\limits_{x \in V} d(x)$
Пусть $t :=$ число вершин степени 1.
Тогда $2(n-1) = \sum\limits_{x \in V \wedge d(x) \geqslant 2} d(x) + t$. Хотим $t \geqslant 2$
Заметим $\sum\limits_{x \in V} d(x) \geqslant 2(n-t)$. То есть
$2(n-1) \geqslant 2(n-t) + t$
$2n - 2(n-1) \leqslant t \Rightarrow 2 \leqslant t$ ч.т.д.

Задача 17. Число вершин степени $2 = 0$, степени $1 = t$
$2(n-1) = \sum\limits_{x \in V} d(x) = t + \sum\limits_{x \in V \wedge d(x) \geqslant 3} d(x)$
$2(n-1) \geqslant t + 3(n-t) \Rightarrow 2n-2 \geqslant t + 3n - 3t \Rightarrow$
$\Rightarrow -n-2 \geqslant -2t \Rightarrow t \geqslant \dfrac{n+2}{2} = \dfrac{n}{2} + 1 > \dfrac{n}{2}$, ч.т.д.

Задача 18. Возьмём остовное дерево в нашем графе. В любом дереве с количеством вершин более 2 есть хотя бы две вершины степени 1, можно удалить любую из них. Если вершина одна, то связность при удалении не потеряется.

Задача 19. Проверить какой-нибудь граф на двудольность.

В двудольном графе нет циклов нечётной длины. Разбиваем множество вершин на:

$$V_1 = \{x \in V \mid d(z,\ x) \equiv 1 \pmod 2),\ V_2 = \{x \in V \mid d(z,\ x) \equiv 0 \pmod 2)\}\}$$

Разбирали на доске. Делали BFS по всем покомпонентам связности.

Задача 20. Доказать, что всякое дерева порядка $\geqslant 2$ двудольно. Сколько различных (правильных) раскрасок в 2 цвета есть у дерева? А у произвольного графа?

По определению дерево является связным графом без циклов, значит в нём нет циклов нечётной длины, оно является двудольным.

Одну раскраску получаем из двудольности, будет вторая - её инверсия. То есть таких раскрасок не меньше 2. Зафиксируем вершину z, возьмём произвольную вершину $x \neq z$. Пусть существуют две раскраски такие, что цвет z в них одинаков, а x меняется. Тогда рассмотрим простой путь между z и x, такой путь единственный, так как это вершины дерева. Цвет каждой вершины на пути должен чередоваться, иначе раскраска некорректна. Получается, что вершина, являющаяся соседом x имеет определённый цвет, зависящий от цвета z, тогда и цвет вершины x задан однозначно. Получается, что цвет одной вершины однозначно задаёт раскраску всего графа. Так как цветов всего 2, то столько раскрасок и будет.

Допустим G k-связен и G двудольный. Пусть $\nu(G) :=$ #раскрасок G в 2 цвета
Тогда G не двудольный и
$|V_G| > 1 \Rightarrow \nu(G) = 0$
$|V_G| = 1 \Rightarrow \nu(G) = 2$
$\nu(G) = \nu(G_1) \cdot \nu(G_2) \dots \nu(G_k)$
В каждой компоненте связности можно выделить остовное дерево. Каждая раскраска графа как-то раскрашивает дерево, а у дерева есть всего две расраски.

Вывод: у каждой связной компоненты ровно две раскарски.
Тогда $\nu(G) = 2^k$
Ответ: $\nu(G) = \begin{cases} 0, & |V_G| > 1 \wedge G \text{ не двудольный} \\ 2^k, & k = \#\text{компонент связности} \end{cases}$

Задача 21. У каждого члена клуба есть ровно один друг и ровно один враг. Можно ли разбить участников на две комнаты так, чтобы в каждой комнате не было ни друзей, ни врагов.

$v =$ члены клуба.
$xEy \Leftrightarrow xE_1y \vee xE_2y$, то есть они друзья или враги.
$E = E_1 \sqcup E_2$
$\forall x\ d(x) = d_1(x) + d_2(x) = 1 + 1 = 2$
Пусть в таком графе есть цикл нечётной длины:

$$x_1E_1x_2 \wedge x_2E_2x_3 \dots x_{n-1}E_2x_n \wedge x_nE_1x_1$$

Получается, что у вершины x_1 два друга или два врага, что противоречит условию, значит наш граф двудольный и требуемое разбиение существует.

Задача 22.

Рассмотрим двудольный граф. В первой доли находятся ученики класса "А", во второй - ученики класса "Б".
$xEy \leftrightarrow x,\ y$ подрались.
$\forall x \in A\ d(x) = 6$
Допустим $\exists k\ \forall y \in G\ d(y) = k$, хотим противоречие.
$\#\text{ребёр} = \sum\limits_{x \in A} d(x) = \sum\limits_{x \in B} d(x)$
Однако $\sum\limits_{x \in A} d(x) = 6 \cdot 22 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11$
$\sum\limits_{y \in B} = 21k = 3 \cdot 7 \cdot k$. Семеёрки нет в сумме степеней вершин A, значит такие суммы совпасть никак не могут. Противоречие.

Задача 23.

Полустепень исхода: $d_+(x) = \Big|\{y \in V \mid xAy\}\Big|$
Пусть x_0 - вершина с наибольшей степенью исхода. $d_+(x_0) = k$
То в вершины $y_1, \dots,\ y_k$ ведут стрелки из x_0.
Рассмотрим произвольное z:

1. $x_0 A z$, тогда всё хорошо.

2. zAx_0. Сравним каждый y_i с этим z.

   2.1. $\forall i \; zAy_i \Rightarrow d_+(z) \geqslant k + 1 > d(x_0) \Rightarrow \perp$

   2.2. $\exists j \; y_j A z \Rightarrow \mathrm{dist}(x_0,\ z) \leqslant 2$