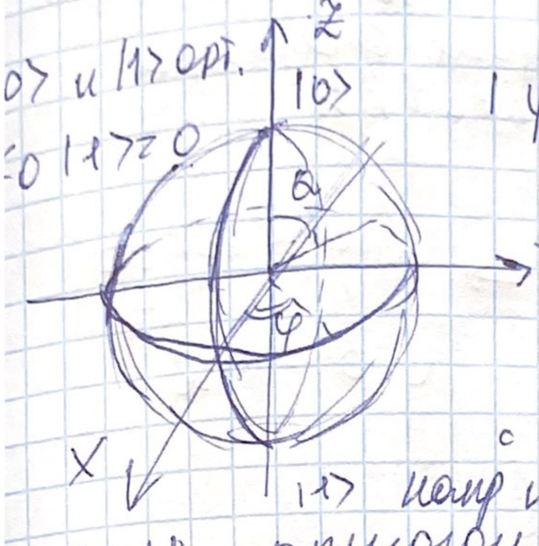
ДЗ №5. Баштова Лера

№1

У семинара: $\theta \in [0; \pi]$
$\varphi \in [0; 2\pi]$

$|0\rangle$ и $|1\rangle$ орт.
$\langle 0|1\rangle = 0$



$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$$

Примером получит кв. состояние $\uparrow\uparrow|\psi\rangle$ при $\theta = 0, \varphi = 0$

· При $\varphi = 0$ и $\theta = \pi$ $|\psi\rangle$ напр против оси z, то есть ортогон. вектором — вектор противопол. направления

Получ., что пары диаметрал. противопол. точек на сфере Блоха соответств. ортогональным векторам кв. сост.

т.е. $|a\rangle$ и $|b\rangle$ орт $\Leftrightarrow$ $\theta_a = \theta_b$, $|\varphi_a - \varphi_b| = \pi$ либо $|\theta_a - \theta_b| = \pi$, $\varphi_a = \varphi_b$

№2

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} E_0 & 0 \\ 0 & -E_0 \end{pmatrix}$$ в нач. м. $\Psi(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

а) $\Psi(t) = ?$

· Собств. знач. гамильт. $\hat{H}$: $\pm E_0$

· Собств. вект. гамильт. $\hat{H}$: $|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Из лекц.: $\Psi(t) = C_+ e^{-iE_+ t/\hbar}\cdot|\psi_+\rangle + C_- e^{-iE_- t/\hbar}|\psi_-\rangle$

$C_+ = \langle\psi_+|\Psi(0)\rangle = (1\ 0)\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$C_- = \langle \varphi_- | \psi(0) \rangle = 1/\sqrt{2}$

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-iE_0 t/\hbar} |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{iE_0 t/\hbar} |1\rangle$$

можно искл. общим фазовым множителем $e^{-iE_0 t/\hbar}$ →

$$\begin{cases} \sin\theta/2 = 1/\sqrt{2} \\ \cos\theta/2 = 1/\sqrt{2} \\ e^{i\varphi} = e^{2iE_0 t/\hbar} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \varphi = \frac{2E_0 t}{\hbar} \\ \theta = \pi/2 \end{cases}$$

в нач. м $t=0$: $\theta = \frac{\pi}{2}$

$\varphi = 0$

Со временем угол $\theta = \frac{\pi}{2}$ → постоянен

угол φ → растет

Тогда траектория окружность

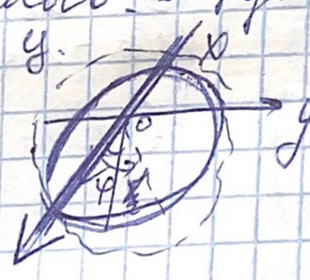
(будет описыв. окруж. в плоскости ty с y :

в м. 0

~~точки силы~~

~~соотв.~~ $\varphi = 0$

$\theta = \frac{\pi}{2}$



в) $\hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

$$\langle \hat{\sigma}_y \rangle = \langle \psi(t) | \hat{\sigma}_y | \psi(t) \rangle =$$

$$= \frac{1}{2} \left(e^{iE_0 t/\hbar}, e^{-iE_0 t/\hbar} \right) \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\frac{iE_0 t}{\hbar}} \\ e^{iE_0 t/\hbar} \end{pmatrix}$$

$$\langle \hat{\sigma}_y \rangle = \frac{1}{2}\left(i e^{-2iE_0 t/\hbar} - e^{-2iE_0 t/\hbar} \right) =$$

$$= \sin\left(\frac{2E_0 t}{\hbar}\right) \qquad \frac{1}{2i}\left(e^{2iE_0 t/\hbar} - e^{-2iE_0 t/\hbar}\right)$$

б) В. $\sigma_y = 1$

$$\langle \hat{\sigma}_y \rangle = 1$$

$$\sin\left(\frac{2E_0 t}{\hbar}\right) = 1 \iff \frac{2E_0 t}{\hbar} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

$$t = \frac{\hbar \pi}{4E_0} + \frac{\pi n \hbar}{E_0}$$

Миним. вр: $t_{мин} = \dfrac{\pi \hbar}{4E_0}$

г) $\hat{\sigma}_y(t) = e^{i\hat{H}t/\hbar}\, \hat{\sigma}_y\, e^{-i\hat{H}t/\hbar} =$

$$= \begin{pmatrix} e^{iE_0 t/\hbar} & 0 \\ 0 & e^{-iE_0 t/\hbar} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-iE_0 t/\hbar} & 0 \\ 0 & e^{iE_0 t/\hbar} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & e^{iE_0 t/\hbar} \cdot (-i) \\ i e^{-iE_0 t/\hbar} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-iE_0 t/\hbar} & 0 \\ 0 & e^{iE_0 t/\hbar} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -i e^{2iE_0 t/\hbar} \\ i e^{-2iE_0 t/\hbar} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\langle \hat{\sigma}_y \rangle = \langle \psi(0) | \hat{\sigma}_y(t) | \psi(0) \rangle = \frac{1}{2}(1\ 1) \begin{pmatrix} 0 & -i e^{\frac{2iE_0 t}{\hbar}} \\ i e^{\frac{-2iE_0 t}{\hbar}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$= \frac{1}{2}\left(i e^{-\frac{2iE_0 t}{\hbar}} - i e^{\frac{2iE_0}{\hbar}} \right) = \sin\left(\frac{2E_0 t}{\hbar}\right)$

Получилось, что $\langle \psi(t) | \hat{\sigma}_y | \psi(t) \rangle =$

$\langle \psi(0) | \sigma_y | \psi(0) \rangle$

№3 $H = \begin{pmatrix} E + \varepsilon d & \Delta \\ \Delta & E - \varepsilon d \end{pmatrix}$

$\alpha = -\frac{\partial^2 E_0}{\partial \varepsilon^2}\Big|_{\varepsilon=0} = ?$

$\begin{vmatrix} E + \varepsilon d - E_0 & \Delta \\ \Delta & E - \varepsilon d - E_0 \end{vmatrix} = 0 \iff$

$(E + \varepsilon d - E_0)(E - \varepsilon d - E_0) - \Delta^2 = 0$

$(E - E_0)^2 - (\varepsilon d)^2 - \Delta^2 = 0$

$E - E_0 = \pm\sqrt{\Delta^2 + \varepsilon^2 d^2} \Rightarrow$

$E_0 = E \mp \sqrt{\Delta^2 + (\varepsilon d)^2}$

Минимум энергии - энерг. основного состояния $\Rightarrow$

$E_0 = E - \sqrt{\Delta^2 + (\varepsilon d)^2}$

$\alpha = -\frac{\partial^2 E_0}{\partial \varepsilon^2}\Big|_{\varepsilon=0} = \frac{(\Delta d)^2}{(\Delta^2 + (d\varepsilon)^2)^{3/2}}\Big|_{\varepsilon=0} = \frac{d^2}{\Delta}$

$\frac{\partial^2 E_0}{\partial \varepsilon^2} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left(\frac{-2\varepsilon d^2}{2\sqrt{\Delta^2 + (\varepsilon d)^2}} \right) = -\Delta^2 d^2 / (\Delta^2 + d^2\varepsilon^2)^{3/2}$