А3-Н6-1.

Блуменау М.И.
БФЗ 191

$$U(x) = -\frac{\hbar^2 \varkappa_0}{m}\left[\delta(x+a) + \delta(x-a)\right]$$

а) $E<0$

$x < -a$

$$\psi'' + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi = 0, \quad K = \sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}} = \sqrt{\frac{2m|E|}{\hbar^2}}$$

$$\psi(x) = C_1 e^{Kx} + C_2 e^{-Kx}$$

С уч. усл. $\psi(-\infty) = 0$: $C_2 = 0$; $\psi(x) = C_1 e^{Kx}$

$-a < x < a$

Аналогичное УШ

$$\psi(x) = C_2 e^{Kx} + C_3 e^{-Kx}$$

не ноль, переменная уже свободна

$x > a$

Аналогичное УШ

$$\psi(x) = C_4 e^{-Kx}$$

(сразу с учётом $\psi(\infty) = 0$)

С учётом гран. условий в т. $-a$ и a:

$$\begin{cases} \psi(-a+0) = \psi(-a-0) \\ \psi'(-a+0) - \psi'(-a-0) + 2\varkappa_0 \psi(-a) = 0 \\ \psi(a+0) = \psi(a-0) \\ \psi'(a+0) - \psi'(a-0) + 2\varkappa_0 \psi(a) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 e^{-Ka} = C_2 e^{-Ka} + C_3 e^{Ka} \\ -KC_1 e^{-Ka} + K(C_2 e^{-Ka} - C_3 e^{Ka}) + 2\varkappa_0 C_1 e^{-Ka} = 0 \\ C_4 e^{-Ka} = C_2 e^{Ka} + C_3 e^{-Ka} \\ -KC_4 e^{-Ka} - K(C_2 e^{Ka} - C_3 e^{-Ka}) + 2\varkappa_0 C_4 e^{-Ka} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2\varkappa_0 - K) C_1 e^{-Ka} + K(C_2 e^{-Ka} - C_3 e^{Ka}) = 0 \\ (2\varkappa_0 - K) C_4 e^{-Ka} - K(C_2 e^{Ka} - C_3 e^{-Ka}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2\varkappa_0 - K)(C_2 e^{-Ka} + C_3 e^{Ka}) = -K(C_2 e^{-Ka} - C_3 e^{Ka}) \\ (2\varkappa_0 - K)(C_2 e^{Ka} + C_3 e^{-Ka}) = K(C_2 e^{Ka} - C_3 e^{-Ka}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\varkappa_0 C_2 e^{-Ka} = 2(K - \varkappa_0) C_3 e^{Ka} \\ 2\varkappa_0 C_2 e^{Ka} - 2K e^{Ka} C_2 = -2\varkappa_0 C_3 e^{-Ka} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{C_2}{C_3} = \dfrac{C_3}{C_2} \end{cases} \to C_2^2 = C_3^2 \quad C_2 \to +C_3 \ (\mathrm{I}), \ \to -C_3 \ (\mathrm{II})$$

I. $C_2 = C_3$

$$C_4 = C_2(e^{2Ka} + 1)$$

$$\cancel{C_2}(2\varkappa_0 - K)(e^{2Ka} + 1) - K(\cancel{C_2}(e^{2Ka} - 1)) = 0$$

$$2\varkappa_0 e^{2Ka} - K e^{2Ka} + 2\varkappa_0 - \cancel{K} - K e^{2Ka} + \cancel{K} = 0$$

$$\cancel{2} K e^{2Ka} = \cancel{2} \varkappa_0 (1 + e^{2Ka})$$

$$K = \varkappa_0 (1 + e^{-2Ka})$$

II: $C_2 = -C_3$

Очевидным образом, повторив действия слева будет:

$$K = \varkappa_0 (1 - e^{-2Ka})$$

$$K = \sqrt{\frac{2m|E|}{\hbar^2}} \Rightarrow K^2 = \frac{2m|E|}{\hbar^2} \Rightarrow$$

$$K_\pm = \varkappa_0 (1 \pm e^{-2K_\pm a})$$

$$\Rightarrow E^\pm = -\frac{\hbar^2 \varkappa_0^2}{2m}\left(1 \pm e^{-2a\sqrt{\frac{2m|E|}{\hbar^2}}}\right)^2$$

— ур-е на уровни энергии

Поскольку наши в.ф. чётные / нечётные отн. 0,
можем переписать в виде: (учтя и сдвиги δ-ям на $-a$ и a)

$$\psi_+ = \tilde C \left(e^{-K_+|x+a|} + e^{-K_+|x-a|}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_+|^2 dx = \tilde C^2 \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\underbrace{e^{-2K_+|x+a|}}_{1} + \underbrace{2e^{-K_+(|x+a|+|x-a|)}}_{2} + \underbrace{e^{-2K|x-a|}}_{3}\Big) dx$$

1: $= \int_{-\infty}^{-a} e^{-2K_+|x+a|} dx + \int_{-a}^{\infty} e^{-2K_+|x+a|} dx = \frac{1}{2K_+} + \frac{1}{2K_+} = \frac{1}{K_+}$

2: $= \int_{-\infty}^{-a} 2e^{-K_+(|x+a|+|x-a|)} dx + \int_{-a}^{a} 2e^{-K_+(|x+a|+|x-a|)} dx + \int_{a}^{\infty} 2e^{-K_+(|x+a|+|x-a|)} dx =$

$= 4a e^{-2K_+ a} + \frac{2e^{-2K_+ a}}{\varkappa_0}$

3: $= \int_{-\infty}^{a} e^{-K_+|x-a|} dx + \int_{a}^{\infty} e^{-K_+|x-a|} dx = \frac{1}{K_+}$

$$\tilde C^2 \left(\frac{2}{K_+} + 2e^{-2K_+ a}\left(2a + \frac{1}{K_+}\right)\right) = 1 \Rightarrow \tilde C = \sqrt{\frac{K_+}{2 + 2(2aK_+ + 1)e^{-2K_+ a}}}$$

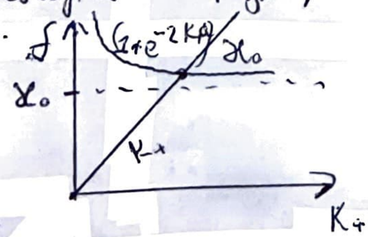
Для ψ_-:

$$\tilde C = \sqrt{\frac{K_-}{2 - 2(2aK_- + 1)e^{-2K_- a}}}$$

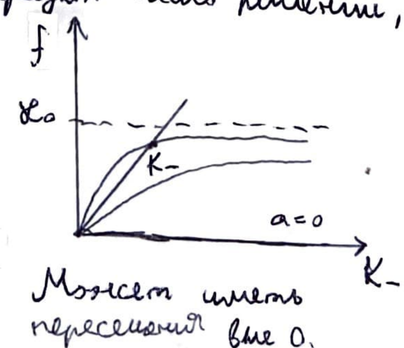
$$\psi_\pm = \sqrt{\frac{K_\pm}{2 \pm 2(2aK_\pm + 1)e^{-2K_\pm a}}} \left[e^{-K_\pm|x+a|} \pm e^{-K_\pm|x-a|}\right]$$

б) Рассм. уравнения на K: $K_\pm = \varkappa_0(1 \pm e^{-2aK_\pm})$

Очевидным образом, нас интересует число решений, а тогда:



Есть пересечение при $\forall a$



Может иметь пересечения вне 0, а может не иметь

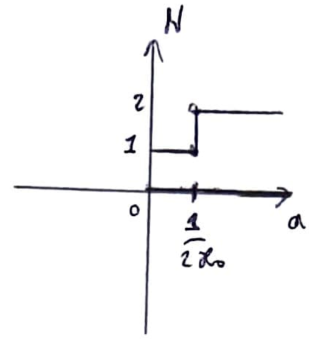
$K_- = \varkappa_0(1 - e^{-2aK_-}) = \{$предполагая что пересечение пропадает при малых $a\} \approx$

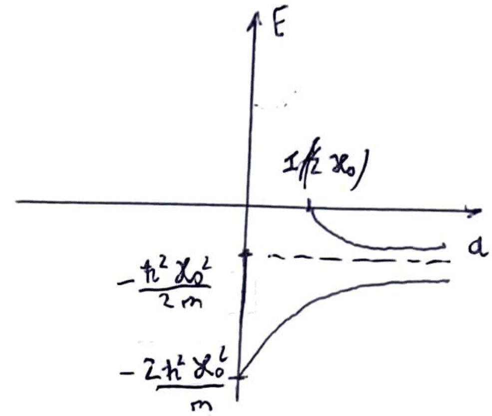
$\approx \varkappa_0\left(2aK_- - \frac{2^{\cancel{4}} a^2 K_-^2}{\cancel{2}}\right) \Rightarrow K_-(2a\varkappa_0 - 1) = 2a^2 K_-^2$ $\quad K_- = 0$ или

$K_- = \frac{2a\varkappa_0 - 1}{2a^2\varkappa_0}$, чтобы найти точку где происходит „перелом":

$$0 = \frac{2a\varkappa_0 - 1}{2a^2\varkappa_0} \Rightarrow a = \frac{1}{2\varkappa_0}$$

$(K_- = K_-)$





Итого:

$$N(a) = \begin{cases} 1, & 0 \le a < \frac{1}{2\varkappa_0} \\ 2, & \text{ост. } a \end{cases}$$

Симметрия гамильтониана – коммут. с инв., т.е. мои в.ф. либо чётные, либо нечётные

$\psi_+(x) = \psi_+(-x)$

$\psi_-(x) = -\psi_-(-x)$

$$\psi_\pm = \sqrt{Const_\pm}\left(e^{-K_\pm|x+a|} \pm e^{-K_\pm|x-a|}\right)$$

Осц. теорема говорит что число нулей в.ф. = номеру уровня (или номер − 1, смотря с 0 или с 1 считать)

$n = 0$ (нулевой уровень): ψ_+

$\psi_+(x) \neq 0$ – нет нулей

$n = 1$ (1 уровень): ψ_-

$\psi_-(x) = 0$ – решение $x = 0$

и равно 1 ноль

в) $\varkappa_0 a \gg 1$

Нахожу реш. $K_\pm = \varkappa_0\left(1 \pm e^{-2aK_\pm}\right)$

Методом итераций:

$K_{+_0} = \varkappa_0$

$K_{+_1} = \varkappa_0(1 + e^{-2a\varkappa_0})$

$$|K_{+1} - K_{+0}| = |\varkappa_0 e^{-2a\varkappa_0}| \ll \varkappa_0 = K_{+0}$$

(т.к. $a\varkappa_0 \gg 1$ и $e^{\dots} \to 0$)

$\Downarrow$

Останавливаюсь

$$K_+ = \varkappa_0(1 + e^{-2a\varkappa_0})$$

Аналогичным образом для K_-

$$K_- = \varkappa_0(1 - e^{-2a\varkappa_0})$$

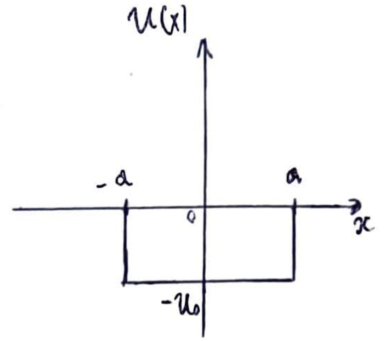
$$E^\pm = -\frac{\hbar^2}{2m}K_\pm^2 = -\frac{\hbar^2\varkappa_0^2}{2m}(1 \pm e^{-2a\varkappa_0})^2$$

$$\psi^\pm = \sqrt{\frac{\varkappa_0(1 \pm e^{-2a\varkappa_0})}{2 \pm 2(2a(\varkappa_0(1 \pm e^{-2a\varkappa_0})) + 1)\, e^{-2(\varkappa_0(1 \pm e^{-2a\varkappa_0})}}}\left[e^{-\varkappa_0(1 \pm e^{-2a\varkappa_0})|x+a|} \pm e^{-\varkappa_0(1 \pm e^{-2a\varkappa_0})|x-a|}\right]$$

(наверное можно „причесать", но этого не требовалось)

$$U(x)=\begin{cases}-U_0, & |x|<a\\ 0, & |x|>a\end{cases}$$

$N3-\text{н}6-2$



а)

$E<0$:

$x<-a$:

$$\psi''+\frac{2mE}{\hbar^2}\psi=0;\ K=\sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}}=\sqrt{\frac{2m|E|}{\hbar^2}}$$

$$\psi(x)=C_1e^{Kx}\quad (\text{с уч. } \psi(-\infty)=0 \text{ и } E<0)$$

$-a<x<a$:

$$\psi''+\frac{2m(E+U_0)}{\hbar^2}\psi=0;\ \tilde K=\sqrt{\frac{2m(E+U_0)}{\hbar^2}}$$

$$\psi(x)=C_2e^{-i\tilde Kx}+C_3e^{i\tilde Kx}$$

$x>a$:

$$\psi''+\frac{2mE}{\hbar^2}\psi=0;\ K=\sqrt{\frac{2m|E|}{\hbar^2}}$$

$$\psi(x)=C_4e^{-Kx}\quad (\text{с уч. } \psi(\infty)=0 \text{ и } E<0)$$

С учётом гран. условий:

$$\begin{cases}\psi(-a-0)=\psi(-a+0)\\ \psi'(-a-0)=\psi'(-a+0)\\ \psi(a-0)=\psi(a+0)\\ \psi'(a-0)=\psi'(a+0)\end{cases}\longrightarrow
\begin{cases}1\ \ C_1e^{-Ka}=C_2e^{i\tilde Ka}+C_3e^{-i\tilde Ka}\\ 2\ \ KC_1e^{-Ka}=i\tilde K(C_3e^{-i\tilde Ka}-C_2e^{i\tilde Ka})\\ 3\ \ C_4e^{-Ka}=C_2e^{-i\tilde Ka}+C_3e^{i\tilde Ka}\\ 4\ \ -KC_4e^{-Ka}=i\tilde K(C_3e^{i\tilde Ka}-C_2e^{-i\tilde Ka})\end{cases}\ \xrightarrow[3\to 4]{1\to 2}$$

$$\longrightarrow\begin{cases}KC_2e^{i\tilde Ka}+i\tilde KC_2e^{i\tilde Ka}=C_3e^{-i\tilde Ka}\cdot i\tilde K-KC_3e^{-i\tilde Ka}\\ -KC_2e^{-i\tilde Ka}+i\tilde KC_2e^{-i\tilde Ka}=C_3Ke^{i\tilde Ka}+iC_3\tilde Ke^{i\tilde Ka}\end{cases}\longrightarrow$$

$$\begin{cases}e^{i\tilde Ka}C_2(K+i\tilde K)=C_3(i\tilde K-K)e^{-i\tilde Ka}\\ e^{-i\tilde Ka}C_2(i\tilde K-K)=C_3(K+i\tilde K)e^{i\tilde Ka}\end{cases}\rightarrow C_2^2=C_3^2\ \begin{matrix}\nearrow C_2=C_3\ (\text{I})\\ \searrow C_2=-C_3\ (\text{II})\end{matrix}$$

I: $C_2=C_3$

$$C_1e^{-Ka}=C_2\cdot 2\cos(\tilde Ka)$$

$$KC_1e^{-Ka}=-i\tilde K\cdot 2i\sin(\tilde Ka)C_2$$

$$2K\cos(\tilde Ka)=2\tilde K\sin(\tilde Ka)$$

$$\operatorname{tg}\tilde Ka=\frac{K}{\tilde K}$$

$$\operatorname{tg}\sqrt{\frac{2m(E+U_0)}{\hbar^2}}a=\frac{\sqrt{\frac{2m|E|}{\hbar^2}}}{\sqrt{\frac{2m(E+U_0)}{\hbar^2}}}$$

$$\operatorname{tg}\sqrt{\frac{2m(E+U_0)a^2}{\hbar^2}}=\sqrt{\frac{|E|}{E+U_0}}$$

II: $C_2=-C_3$

$$C_1e^{-Ka}=2i\sin(\tilde Ka)C_2$$

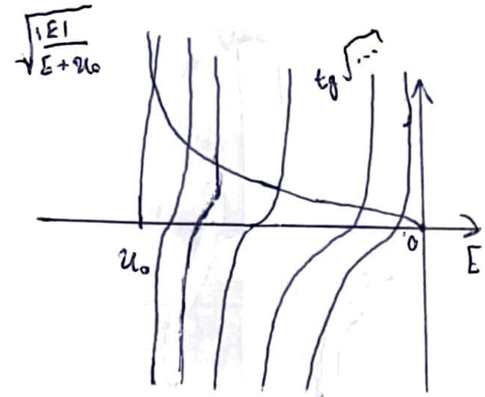
$$-KC_1e^{-Ka}=i\tilde K\cdot 2\cos(\tilde Ka)C_2$$

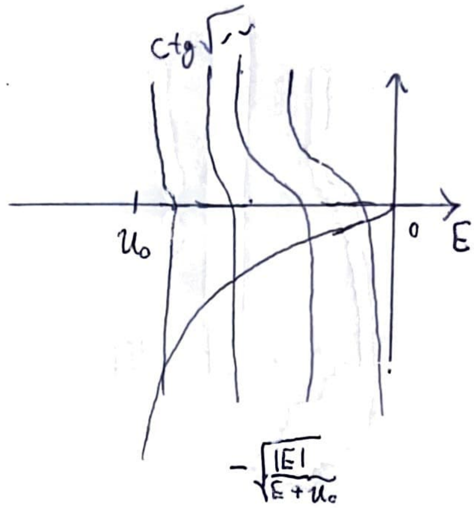
$$-2K\sin(\tilde Ka)=\tilde K\cdot 2\cos(\tilde Ka)$$

$$\operatorname{tg}\tilde Ka=-\frac{\tilde K}{K}$$

$$\operatorname{tg}\sqrt{\frac{2m(E+U_0)a^2}{\hbar^2}}=-\sqrt{\frac{E+U_0}{|E|}}$$

$$\operatorname{ctg}\sqrt{\frac{2m(E+U_0)a^2}{\hbar^2}}=-\sqrt{\frac{|E|}{E+U_0}}$$





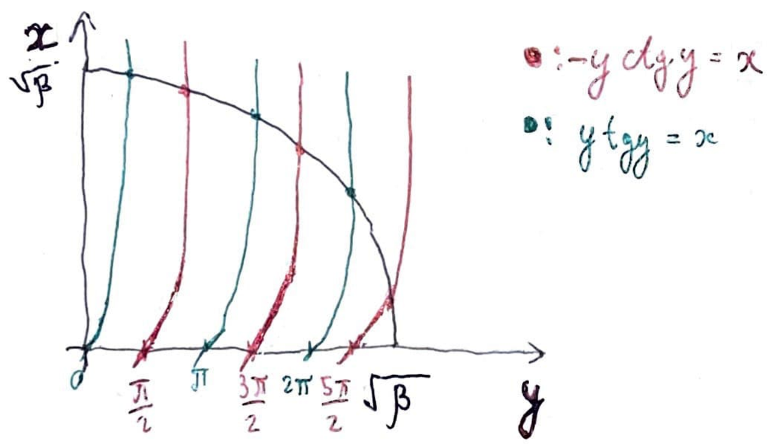
Для упрощения восприятия:

$x = ka$

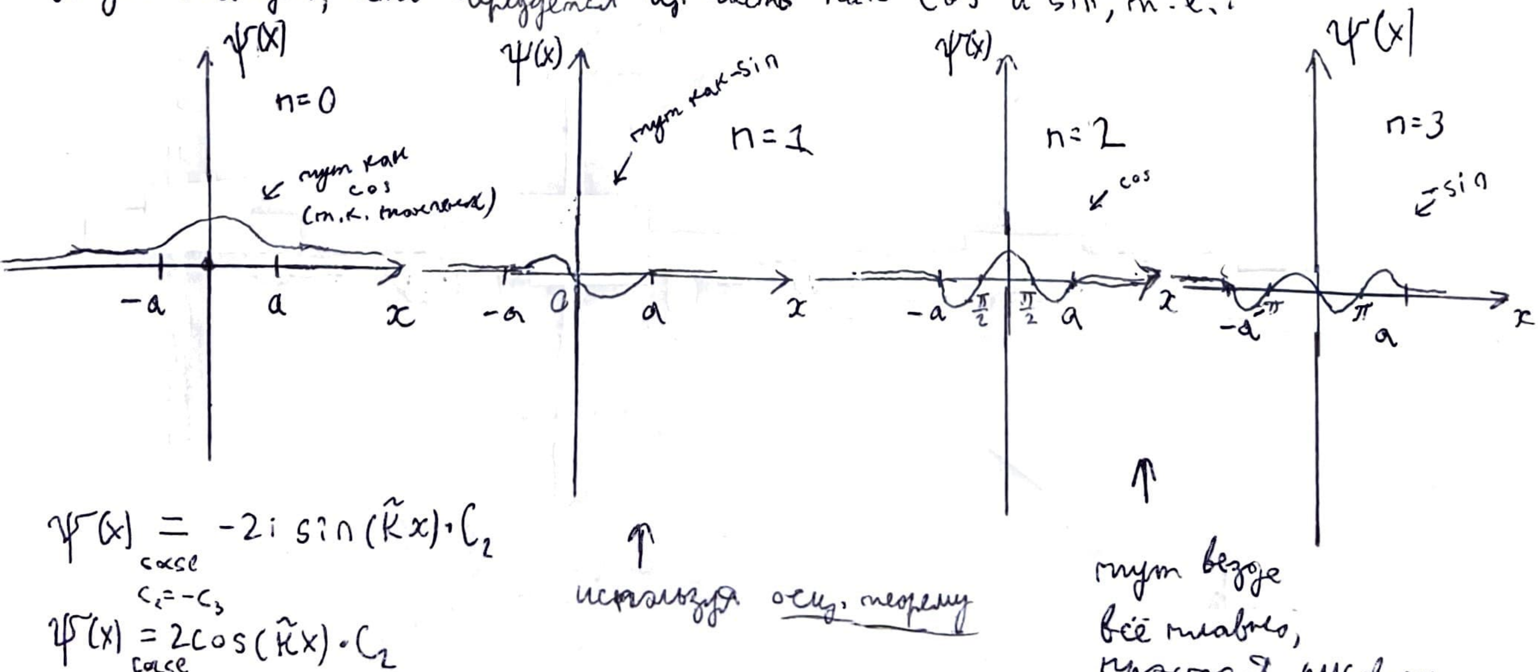
$y = \tilde{k}a$ тогда $x^2+y^2 = a^2\left(-\frac{2m\cancel{E}}{\hbar^2} + \frac{2m(\cancel{E}+U_0)}{\hbar^2}\right) = \frac{2mU_0a^2}{\hbar^2} = \beta$ (3)

И: $ctg\, y = \frac{-x}{y}$ $\quad tg\, y = \frac{x}{y}$:

*:



Тут очевидно, что чередуется ц. часть как cos и sin, т.е.:



$\psi(x) \underset{\substack{case\\ C_2=-C_3}}{=} -2i\sin(\tilde{k}x)\cdot C_2$

$\psi(x) \underset{\substack{case\\ C_2=C_3}}{=} 2\cos(\tilde{k}x)\cdot C_2$

↑ используя осц. теорему

↑ тут везде всё плавно, просто я рисовать не умею

б) $U_0 \gg \hbar^2/ma^2$

Внимательно посмотрим на ж. На картинке видно, что U_0 определяет радиус четверти окр-ти, а тогда, с учётом, что новый уровень получается каждые $\pi/2$, получим:

$$N \simeq \sqrt{\beta} \cdot \frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{2ma^2U_0}{\hbar^2}} \cdot \frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{8ma^2U_0}{\pi^2\hbar^2}}$$

Если же графический метод не устраивает:

$$tg\sqrt{\ldots} \simeq 0 \quad \text{при } U_0 \to \infty$$

$$\sqrt{\frac{2mU_0a^2}{\hbar^2}} = \pi n \Rightarrow n = \sqrt{\frac{2ma^2U_0}{\pi^2\hbar^2}}$$, теперь учтём, что ещё был отд. и уровней в 2 раза больше:

$$N = 2\sqrt{\frac{2ma^2U_0}{\pi^2\hbar^2}} = \sqrt{\frac{8ma^2U_0}{\pi^2\hbar^2}}$$

в) U_0 - 1 уровень

Из той же ж: $\sqrt{\beta} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow U_0 < \frac{\pi^2\hbar^2}{8ma^2}$

$$U_0 \ll \frac{\hbar^2}{ma^2}$$

Соотн. $|E|$ и U_0

В пределе $U_0 \ll \frac{\hbar^2}{ma^2}$:

$$\frac{ma^2U_0}{\hbar^2} \ll 1 \text{, тогда (ж):}$$

$$x^2 + y^2 \ll 1$$

В таком случае исходя из графика очевидно, что $x \simeq y^2$

$$\sqrt{\frac{2m|E|a^2}{\hbar^2}} \simeq \frac{2ma^2(E+U_0)}{\hbar^2}$$

$$|E| = \frac{2ma^2(E+U_0)^2}{\hbar^2}$$

$$E = -\frac{2ma^2(E+U_0)^2}{\hbar^2}$$

Из того же графика вд, что

$$\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \ll \sqrt{\frac{2mU_0a^2}{\hbar^2}} \Rightarrow E \ll U_0 \text{, а тогда:}$$

$(x \ll \sqrt{\beta})$

$$E = -\frac{2ma^2U_0^2}{\hbar^2} \qquad |E|/U_0 = \frac{2ma^2U_0}{\hbar^2} \ll 1$$

или $|E| \ll U_0$

Д3 - н6 - 3:

$$U(x) = -\frac{\hbar^2 \varkappa_0 \delta(x)}{m}; \quad E > 0$$

$$\psi''(x) + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U(x))\psi = 0$$

$$K = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

Решение имеет вид:

$$\psi(x) = C_1 \cos(Kx) + C_2 \sin(Kx), \quad x < 0$$

$$\psi(x) = C_3 \cos(Kx) + C_4 \sin(Kx), \quad x > 0$$

Сшивание на границе (в т. 0):

$$\begin{cases} \psi(+0) = \psi(-0) \\ \psi'(+0) - \psi'(-0) + 2\varkappa_0 \psi(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = C_3 \\ K(C_4 - C_2) = -2\varkappa_0 C_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} K(C_2 - C_4) = 2\varkappa_0 C_1 \\ C_1 = C_3 \end{cases}$$

Также в силу симметрии потенциала отн. 0, если $\psi(x)$ - решение, то $\psi(-x)$ - тоже.

$$\begin{cases} \psi(-x) = -C_2 \sin(Kx) + C_1 \cos(Kx) \\ \psi(-x) = -C_4 \sin(Kx) + C_1 \cos(Kx) \end{cases}$$

Но спектр у нас и так двухкратновырожденный, поэтому нельзя что-то сказать.

Тогда ответ: (если бы не было вырождения, то $C_2 = -C_4$ и всё решается)

$$\begin{cases} \psi(x) = C_1 \cos(Kx) + C_2 \sin(Kx), & x < 0 \\ \psi(x) = C_1 \cos(Kx) + C_4 \sin(Kx), & x > 0 \end{cases}$$

при усл: $K(C_2 - C_4) = 2\varkappa_0 C_1$