

РЗ #2.

N4

X
 $n \times m$

Σ
 $m \times m$

Δ
 $n \times n$

$$f(A) = A^{-1} X (X^T A^{-1} X)^{-1}$$

$$\begin{aligned} f(X \Sigma X^T + \Delta) &= (X \Sigma X^T + \Delta)^{-1} X (X^T (X \Sigma X^T + \Delta)^{-1} X)^{-1} \\ &= (\Delta^{-1} - \Delta^{-1} X (\Sigma^{-1} + X^T \Delta^{-1} X) \\ &\quad X^T \Delta^{-1}) X (X^T (\Delta^{-1} - \Delta^{-1} X (\Sigma^{-1} + X^T \Delta^{-1} X) \\ &\quad X^T \Delta^{-1}) X)^{-1} = (\Delta^{-1} X - \Delta^{-1} X (\Sigma^{-1} + \\ &\quad + X^T \Delta^{-1} X)^{-1} X^T \Delta^{-1} X) (X^T \Delta^{-1} X - X^T \Delta^{-1} X \\ &\quad (\Sigma^{-1} + X^T \Delta^{-1} X)^{-1} X^T \Delta^{-1} X)^{-1} \quad \ominus \end{aligned}$$

$$T = \begin{bmatrix} IK & -IK (\Sigma^{-1} + IK)^{-1} IK \\ IK \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{E} & -(\Sigma^{-1} + IK)^{-1} IK \\ IK \end{bmatrix}^{-1}$$

единичная матрица

$$\begin{aligned} &\ominus \Delta^{-1} X (\hat{E} - (\Sigma^{-1} + X^T \Delta^{-1} X)^{-1} X^T \Delta^{-1} X) \\ &(\hat{E} - (\Sigma^{-1} + X^T \Delta^{-1} X)^{-1} (X^T \Delta^{-1} X)^{-1} (X^T \Delta^{-1} X)^{-1} X^T \Delta^{-1} X)^{-1} \\ &= \Delta^{-1} X (X^T \Delta^{-1} X)^{-1} = f(\Delta) \end{aligned}$$

№2

$$a) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}$$

Найдем собственные векторы

$$\lambda_1 = 3: \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x - \text{любой} \\ y = 0 \end{cases} \quad \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -2: \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x = -2x \\ y = y \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y - \text{любой} \end{cases} \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{A} = \vec{p} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \vec{p}^T - \text{диаг. квадрат. симм. матрица}$$

$$\vec{p} = [\vec{a}_1 | \vec{a}_2]$$

собств. векторы

(единичн. длины)

Проверка:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

б) $\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ - неквадратичная матрица

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 4 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 0 \\ 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \tilde{\lambda}_1 = 4 \\ \tilde{\lambda}_2 = 0 \end{cases}$$

$$\vec{\tilde{a}}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\tilde{a}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ортонормиров. собств. вект. $A^T A$

Сингулярными числами \hat{A} :

$$\begin{cases} \sigma_1 = 2 \\ \sigma_2 = 0 \end{cases} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_m$$

$$\hat{U} = [\vec{a}_1; \vec{a}_2; \vec{a}_3] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A^T$$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 00 \\ 00 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

с) $\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ - квадратичная
неопредел. симм. соедств. число

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)^2 - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

найдем соедств. вектора

$$\lambda_1 = 2: \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$x = y \Rightarrow \vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 0: \begin{matrix} \text{для } \lambda_1 & \text{для } \lambda_2 \\ x+y=0 \end{matrix} \Rightarrow \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{A} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

21

$$a) \|x\|_2 \leq \sqrt{m} \|x\|_\infty$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_m^2} \leq \sqrt{m(\max_i |x_i|)^2} =$$

$$= \sqrt{m} \max_i |x_i| = \sqrt{m} \|x\|_\infty$$

пример: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\|x\|_2 = \sqrt{1^2 + \dots + 1^2} = \sqrt{m}$$

$$\sqrt{m} \|x\|_\infty = \sqrt{m} \max_i |x_i| = \sqrt{m}$$