ДЗ #2.

N4

$$\underset{n\times m}{X} \qquad \underset{m\times m}{\Omega} \qquad \underset{n\times n}{\Delta}$$

$$f(A) = A^{-1}X(X^TA^{-1}X)^{-1}$$

$$f(X\Omega X^T+\Delta) = (X\Omega X^T+\Delta)^{-1}X(X^T(X\Omega X^T+\Delta)^{-1}X)^{-1} = (\Delta^{-1}-\Delta^{-1}X(\Omega^{-1}+X^T\Delta^{-1}X)^{-1}X^T\Delta^{-1})X(X^T(\Delta^{-1}-\Delta^{-1}X(\Omega^{-1}+X^T\Delta^{-1}X)^{-1}X^T\Delta^{-1})X)^{-1} = (\Delta^{-1}X-\Delta^{-1}X(\Omega^{-1}+X^T\Delta^{-1}X)^{-1}X^T\Delta^{-1}X)\underbrace{(\overbrace{X^T\Delta^{-1}X}^{K}-X^T\Delta^{-1}X(\Omega^{-1}+X^T\Delta^{-1}X)^{-1}X^T\Delta^{-1}X)^{-1}}_{T} \ominus$$

$$T = [K-K(\Omega^{-1}+K)^{-1}K]^{-1} = [\underset{\text{единичная матрица}}{\hat{E}}-(\Omega^{-1}+K)^{-1}K]^{-1}K^{-1}$$

$$\ominus\ \Delta^{-1}X(\hat{E}-(\Omega^{-1}+X^T\Delta^{-1}X)^{-1}X^T\Delta^{-1}X)(\hat{E}-(\Omega^{-1}+X^T\Delta^{-1}X)^{-1}(X^T\Delta^{-1}X))^{-1}(X^T\Delta^{-1}X)^{-1} = \Delta^{-1}X(X^T\Delta^{-1}X)^{-1} = f(\Delta)$$

№2

а) $\hat{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \mapsto \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = -2 \end{array} \right.$$

Найдем собственные векторы

$\lambda_1 = 3$: $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x \text{ - любой} \\ y = 0 \end{cases}$ $\quad \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = -2$: $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\begin{cases} 3x = -2x \\ y = y \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x = 0 \\ y = \text{любой} \end{cases}$

$\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\hat{A} = \hat{P} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \hat{P}^T$ - для квадрат. симм. матрицы

$\hat{P} = [a_1 | a_2]$

собств. векторы (единичн. длины)

Проверка:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

в) $\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ - неквадратная матрица

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \mapsto \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 4 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{array} \right.$$

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 0 \\ 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \mapsto \left[\begin{array}{l} \tilde{\lambda}_1 = 4 \\ \tilde{\lambda}_2 = 0 \end{array} \right.$$

$$\vec{\tilde{a}}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{\tilde{a}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ортонормиров. собств. вект. $A^T A$

Сингулярные числа $\hat{A}$:

$$\left[\begin{array}{l} \sigma_1 = 2 \\ \sigma_2 = 0 \end{array} \right. \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{n}_{m}$$

$$\hat{U} = [\vec{a}_1 ; \vec{a}_2 ; \vec{a}_3] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \hat{a}^T$$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) $\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ – квадратичная матрица.
сим. собств. числа

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)^2 - 1 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 0 \end{array} \right.$$

Найдем собств. вектора

$\lambda_1 = 2$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$x = y \Rightarrow \vec{v_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 0$: $x + y = 0 \Rightarrow \vec{v_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\hat{A} = \frac{1}{2} \begin{array}{cc} \text{для } \lambda_1 & \text{для } \lambda_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

N 1

$$\|x\|_2 \leq \sqrt{m}\,\|x\|_\infty$$

$$\|x\|_2 = \sqrt[2]{x_1^2 + \ldots + x_m^2} \leq \sqrt{m(\max_i x_i)^2} =$$

$$= \sqrt{m}\,\max_i |x_i| = \sqrt{m}\,\|x\|_\infty$$

Пример: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\|x\|_2 = \sqrt{1^2 + \ldots + 1^2} = \sqrt{m}$$

$$\sqrt{m}\,\|x\|_\infty = \sqrt{m}\,\max_i |x_i| = \sqrt{m}$$

$$\|A\|_\infty \leq \sqrt{n}\,\|A\|_2$$

$$\|A\|_2 = \max \|Ax\|_2$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \leq \sqrt{n \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2} = \quad \|x\|_2 = 1$$

$$= \sqrt{n}\,\|A\|_2$$

сумма по строкам

сумма кол-ва элементов

Пример: $\hat{A} = \begin{array}{c} n \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} m \end{array}$ $\quad \|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} (2, 0) = 2$

$$\sqrt{n}\,\|A\|_2 = \sqrt{2}\sqrt{1+1} = 2$$