Series numériques

Mohamed Gaied

1. Convergence d'une serie numerique

Définition 1.1. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite numerique.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose, $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

S_n est appelé somme partielle d'ordre n de u_n.
La suite numérique $(S_n)_{n\geq 0}$ est appelée serie numerique de terme general u_n et on la note $\sum_{n\geq 0} u_n$

1.1. convergence

Définition 1.2. Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une serie numerique.

• On dit que la serie numerique $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge si la suite somme partielle $(S_n)_{n\geq 0}$ converge et on note $\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$

• On dit que la serie numerique $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge si la suite somme partielle $(S_n)_{n\geq 0}$ diverge.

Exemples. .
1) Nature de $\sum_{n\geq 0} 1$?
Dans ce cas $u_n = 1 \forall n \in \mathbb{N}$.
$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$ et $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty$
donc la serie $\sum_{n\geq 0} 1$ diverge.

2) Somme d'une suite arithmétique:
Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $r = 2$: $u_n = u_0 + nr = 1 + 2n$
Etudier la nature de la serie $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$

$S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k = \sum\limits_{k=0}^{n}(1+2k) = \sum\limits_{k=0}^{n} 1 + 2\sum\limits_{k=0}^{n} k = (n+1) + 2\frac{n(n+1)}{2} = (n+1)^2$
par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)^2 = +\infty$
donc la serie $\sum\limits_{n\geq 0}(1+2n)$ diverge.

3) Somme d'une suite géometrique:
Soit $a \in \mathbb{C} - \{1\}$ et $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite géometrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison a: $u_n = a^n$
Etudier la nature de la serie $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$

$S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k = 1 + a + a^2 + ... + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1-a}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} a^{n+1} = \begin{cases} 0 \text{ si } |a| < 1 \\ \text{n'existe pas ou infinie si } |a| > 1 \end{cases}$

par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1 - a^{n+1}}{1-a} = \begin{cases} \frac{1}{1-a} \text{ si } |a| < 1 \\ +\infty \text{ si } a > 1 \\ \text{n'existe pas ou infinie si } |a| > 1 \end{cases}$.

Conclusion: la serie $\sum\limits_{n\geq 0} a^n$ converge ssi $|a| < 1$ et on a dans ce cas

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}.$$

Cas particulier: $a = \frac{e^{i\theta}}{2}$, $|a| = |\frac{e^{i\theta}}{2}| = \frac{1}{2} < 1$
donc $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{e^{in\theta}}{2^n}$ converge et on a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{in\theta}}{2^n} = \frac{1}{1 - \frac{e^{i\theta}}{2}} = \frac{1 - \frac{e^{-i\theta}}{2}}{(1 - \frac{e^{i\theta}}{2})(1 - \frac{e^{-i\theta}}{2})}$

4) Nnature de la serie $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$

$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$ avec $a = 1$ et $b = -1$

$S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k = \sum\limits_{k=1}^{n}(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}$
$= \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum\limits_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n+1}$

$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}(1 - \frac{1}{n+1}) = 1$

Conclusion: la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge et on a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$

Proposition 1.3. *Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une serie numerique.*

Si la serie $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, alors la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0.

Démonstration: Soit $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n,$.
On a $u_n = S_n - S_{n-1}$ et $\lim_{n\to+\infty} S_n = l \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = l$
donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Remarques 1.4. .
1) Si $(u_n)_n$ ne converge pas vers 0, alors la serie $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge.

Exemple: Nature de $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2-1}{2n^2+3n+1}$

$u_n = \sum_{n\geq 0} \frac{n^2-1}{2n^2+3n+1} \to_{n\to+\infty} \frac{1}{2} \neq 0$

donc $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2-1}{2n^2+3n+1}$ diverge.

2) Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, on n'a pas necessairement la convergence de la serie $\sum_{n\geq 0} u_n$.

Exemple: Nature de $\sum_{n\geq 1} ln(1+\frac{1}{n})$

$u_n = ln(1+\frac{1}{n}) \sim_{+\infty} \frac{1}{n} \to_{n\to+\infty} 0$ mais $\sum_{n\geq 1} ln(1+\frac{1}{n})$ diverge, en effet

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=1}^{n} ln(1+\frac{1}{k}) &= \sum_{k=1}^{n} ln(\frac{k+1}{k}) = \sum_{k=1}^{n}(ln(k+1) - ln(k)) \\ &= \sum_{k=1}^{n} ln(k+1) - \sum_{k=1}^{n} ln(k) = \sum_{k=2}^{n+1} ln(k) - \sum_{k=1}^{n} ln(k) \\ &= ln(n+1). \end{aligned}$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} ln(n+1) = +\infty$

d'ou $\sum_{n\geq 1} ln(1+\frac{1}{n})$ diverge.

1.2. Operations sur les series

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux series numeriques et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge, alors $\sum_{n\geq 0}(u_n + \lambda v_n)$ converge et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n + \lambda v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

Remarques 1.5. .

1) Si $\begin{cases} \sum_{n\geq 0} u_n \text{ converge} \\ \sum_{n\geq 0} v_n \text{ diverge}, \end{cases}$ alors $\sum_{n\geq 0}(u_n + v_n)$ diverge

Exemple: Nature de $\sum_{n\geq 0}((\frac{1}{2})^n + 2^n)$.

On a $\sum_{n\geq 0}(\frac{1}{2})^n$ converge et $\sum_{n\geq 0} 2^n$ diverge

ce qui implique que $\sum_{n\geq 0}((\frac{1}{2})^n + 2^n)$ diverge.

2) si $\begin{cases} \sum_{n\geq 0} u_n \text{ diverge} \\ \sum_{n\geq 0} v_n \text{ diverge} \end{cases}$, alors on ne peut pas conclure la nature de $\sum_{n\geq 0}(u_n + v_n)$.

2. series positives

Théorème 2.1. *Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une serie positive ($u_n \geq 0 \forall n$).*

alors

- *(i) La suite somme partielle $(S_n)_n$ est croissante.*
- *(ii) la serie $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge <u>ssi</u> la suite $(S_n)_n$ est majorée.*

Exercice: Etudier la nature de la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in [k, k+1]$, $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$

donc $\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1} dt = \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dt = \frac{1}{k}$

et par suite

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt = \int_1^{n+1} \frac{1}{t} dt = ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

d'ou $ln(n+1) \leq S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} ln(n+1) = +\infty$.

Conclusion: $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

2.1. critère de comparaison

Théorème 2.2. *Soit* $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ *deux series a termes positives.*

1. <u>*Si*</u> $\begin{cases} 0 \leq u_n \leq v_n \\ \sum\limits_{n\geq 0} v_n \text{ converge} \end{cases}$, <u>*alors*</u> $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ *converge*

2. <u>*Si*</u> $\begin{cases} 0 \leq u_n \leq v_n \\ \sum\limits_{n\geq 0} u_n \text{ diverge} \end{cases}$, <u>*alors*</u> $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ *diverge.*

Application: Déterminer la nature de la serie $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ dans les cas suivants.

(a) $u_n = \dfrac{1}{(n+1).3^n}$

(b) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

(c) $u_n = \dfrac{arctg(n)}{n(n+1)}$

(a) On a $0 \leq \dfrac{1}{(n+1).3^n} \leq \dfrac{1}{3^n} = (\dfrac{1}{3})^n$ et $\sum\limits_{n\geq 0}(\dfrac{1}{3})^n$ converge,

donc, d'après le critère de comparaison, $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge.

(b) On a $0 \leq \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{1}{n}$ diverge,

donc, d'après le critère de comparaison, $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ diverge.

(c) On a $0 \leq \dfrac{arctg(n)}{n(n+1)} \leq \dfrac{\frac{\pi}{2}}{n(n+1)}$ car $0 \leq arctg(x) \leq \dfrac{\pi}{2}\ \ \forall x \geq 0$ et

$\sum\limits_{n\geq 0}(\dfrac{1}{n(n+1)}$ converge,

donc, d'après le critère de comparaison, $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge.

2.2. critère d'équivalence

Théorème 2.3. *Soit* $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ *deux series a termes positives.*
Si $u_n \sim_{+\infty} v_n$*, alors, les deux series sont de même nature.*

Exemples. 1) Nature de $\sum_{n\geq 1} ln(1+\frac{1}{n})$?

On a $ln(1+\frac{1}{n}) \sim_{+\infty} \frac{1}{n}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge,

donc, daprès le critère d'équivalence, $\sum_{n\geq 1} ln(1+\frac{1}{n})$ diverge.

2)

2.3. series de Riemann

On appelle serie de Riemann toute serie de la forme $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Théorème 2.4. *La serie de Riemann* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ *converge ssi* $\alpha > 1$

Démonstration:

- Si $\alpha < 0$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = +\infty$ donc $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.
- Si $\alpha = 1$, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge
- Si $0 < \alpha < 1$, $n^\alpha < n$ et par suite $0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^\alpha}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge,

  donc, daprès le critère d'équivalence, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.
- Si $\alpha > 1$
  Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in [k, k+1]$, $\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \frac{1}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$
  donc $\int_k^{k+1} \frac{1}{(k+1)^\alpha} dt = \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k^\alpha} dt = \frac{1}{k^\alpha}$
  et par suite
  $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt = \int_1^n \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha}$
  d'ou $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{1-\alpha}[\frac{1}{n^{\alpha-1}} - 1] = \frac{1}{\alpha-1}[1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}] \leq \frac{1}{\alpha-1}$ $(\alpha > 1)$
  donc $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge.

Exemples:
les series $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ $(\alpha = 2)$, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^5}$ $(\alpha = 5)$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ $(\alpha = \frac{3}{2})$ convergent.
les series $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ $(\alpha = 1)$, $\sum_{n\geq 1} n$ $(\alpha = -1)$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ $(\alpha = \frac{1}{2})$ divergent.

Applications: Nature de $\sum_n u_n$ dans les cas suivants.

a) $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$, $n \in \mathbb{N}^*$

On a $\frac{1}{n(n+1)} \sim_{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$)

donc, d'après le critére d'equivalence, $\sum_n \frac{1}{n(n+1)}$ converge.

b) $u_n = \frac{2n^2 - 5n + 8}{3n^3 + n^2 + 2n + 1}$, $n \in \mathbb{N}^*$

On a $\frac{2n^2 - 5n + 8}{3n^3 + n^2 + 2n + 1} \sim_{+\infty} \frac{2n^2}{3n^3} = \frac{2}{3}\frac{n^2}{n^3} = \frac{2}{3}\frac{1}{n}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge (série de Riemann avec $\alpha = 1 \leq 1$)

donc, d'après le critére d'equivalence, $\sum_n \frac{2n^2 - 5n + 8}{3n^3 + n^2 + 2n + 1}$ diverge.

c) $u_n = \frac{sin^2(n)}{n^3}$, $n \in \mathbb{N}^*$

On a $0 \leq \frac{sin^2(n)}{n^3} \leq \frac{1}{n^3}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}$ converge (série de Riemann avec $\alpha = 3 > 1$)

donc, d'après le critére de comparaison, $\sum_n \frac{sin^2(n)}{n^3}$ converge.

2.4. Critère de Riemann

Soit $\sum_n u_n$ une série à terme positive.

- S'il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = l \in [0, +\infty[$, alors $\sum_n u_n$ converge.
- S'il existe $\alpha \leq 1$ tel que $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = l \in]0, +\infty[\cup\{+\infty\}$, alors $\sum_n u_n$ diverge.

Exemples. 1. Nature de $\sum_{n\geq 0} e^{-n}$

$\lim_{n\to+\infty} n^2 e^{-n} = 0$

donc, d'après le critère de Riemann, $\sum_{n\geq 0} e^{-n}$ converge

2. Nature de $\sum_n e^{-\sqrt{n}}$

$\lim_{n\to+\infty} n^2 e^{-\sqrt{n}} = 0$

donc, d'après le critère de Riemann, $\sum_{n\geq 0} e^{-\sqrt{n}}$ converge

3. Nature de $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\sqrt{n}ln(n)}$

$\lim_{n\to+\infty} n^{\frac{2}{3}} \frac{1}{\sqrt{n}ln(n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\frac{1}{6}}}{ln(n)} = +\infty$

donc, d'après le critère de Riemann, $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\sqrt{n}ln(n)}$ diverge.

2.5. critère d 'Alembert

Soit $\sum_n u_n$ une série à terme positive, ($u_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$) telle que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$.

- Si $l < 1$, alors $\sum_n u_n$ converge.
- Si $l > 1$, alors $\sum_n u_n$ diverge.

Exemples. .

1. Nature de $\sum_n \frac{1}{n!}$.

   $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$

   donc, d'aprèe le critère d'Alembert, la série $\sum_n \frac{1}{n!}$ converge.

2. Soit $a \in \mathbb{R}_+$
   Nature de $\sum_n \frac{a^n}{n!}$.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a^{n+1}n!}{a^n(n+1)!} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{a}{n+1} = 0 < 1\end{aligned}$$

   donc, d'aprèe le critère d'Alembert, la série $\sum_n \frac{a^n}{n!}$ converge.

3. Nature de $\sum_n \frac{2^n}{n}$.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n}{n}} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n+1}n}{2^n(n+1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{n+1} = 2 > 1\end{aligned}$$

   donc, d'aprèe le critère d'Alembert, la série $\sum_n \frac{2^n}{n} v$ diverge.

3. Série numériques:

Dans cette partie, $u_n \in \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

3.1. Séries alternées

Définition 3.1. On appelle série altérnée toute série de la forme $\sum_n (-1)^n a_n$ avec $a_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$.

Exemple. .
$\sum_n (-1)^n$, $\sum_n (-1)^n n$ et $\sum_n (-1)^n e^{\sqrt{n}}$ sont des séries altérnées.

Théorème 3.2 (Théorème special des séries altérnées (TSSA)). .
Soit $\sum_n (-1)^n a_n$ *une série alternée.*

Si $\begin{cases} (a_n)_n \text{ est décroissante} \\ \lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \end{cases}$ *, alors* $\sum_n (-1)^n a_n$ *converge.*

Exemples. 1. Nature de $\sum_n \dfrac{(-1)^n}{n}$

dans ce cas, $a_n = \frac{1}{n}$

$(a_n)_n$ est décroissante ($\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$) et $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

donc, d'après le TSSA, $\sum_n \dfrac{(-1)^n}{n}$ converge.

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Discuter, suivant la valeur de α, la nature de $\sum_n \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$.

- Si $\alpha \leq 0$, $\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ ne tend pas vers 0 (n'admet pas une limite), donc la série $\sum_n \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ diverge.
- Si $\alpha > 0$,
  $n^\alpha < (n+1)^\alpha \Rightarrow a_n \frac{1}{n^\alpha} > \frac{1}{(n+1)^\alpha} = a_{n+1}$

  donc $(a_n)_n$ est décroissante et $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = 0$

  et d'après le TSSA, $\sum_n \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge.

Conclusion: $\sum_n \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 0$.

Cas particulier: $\sum_n \dfrac{(-1)^n}{n}$ $(\alpha = 1)$, $\sum_n \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ $(\alpha = \frac{1}{2})$ et $\sum_n \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ $(\alpha = 2)$ convergent.
$\sum_n (-1)^n$ $(\alpha = 0)$ et $\sum_n (-1)^n n$ $(\alpha = -1)$ divergent.

3.2. Séries complexes

Définition 3.3. .
Une série complexe est une série de la forme $\sum_{n\geq 0}(a_n + ib_n)$, $a_n,\ b_n \in \mathbb{R}$.

Proposition 3.4. .
Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ *une série complexe: (*$u_n = a_n + ib_n$ *avec* a_n*,* $b_n \in \mathbb{R}$*),*
alors on a

$$\sum_{n\geq 0} u_n \textit{ converge} \quad ssi \quad \begin{cases} \sum_{n\geq 0} a_n \textit{ converge} \\ \sum_{n\geq 0} b_n \textit{ converge} \end{cases}$$

et on a:

$$\sum_{n=+\infty 0} (a_n + ib_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + i\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$$

Exemple. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 1$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
Soit $u_n = x^n e^{in\theta}$, $n \in \mathbb{N}$.
Etudier la nature de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ et déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \cos(n\theta)$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \sin(n\theta)$.
$u_n = x^n e^{in\theta} = (xe^{i\theta})^n$
donc $(u_n)_n$ est une suite géométrique de raison $xe^{i\theta}$ et $|xe^{i\theta}| = |x| < 1$ et par suite $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge et on a

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n &= \sum_{n=0}^{+\infty} x^n e^{in\theta} = \frac{1}{1 - xe^{i\theta}} = \frac{1 - xe^{-i\theta}}{(1 - xe^{i\theta})(1 - xe^{-i\theta})} \\ &= \frac{1 - x\cos(\theta) + ix\sin(\theta)}{1 - x(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) + x^2} = \frac{1 - x\cos(\theta) + ix\sin(\theta)}{1 - 2x\cos(\theta) + x^2} \\ &= \frac{1 - x\cos(\theta)}{1 - 2x\cos(\theta) + x^2} + i\frac{x\sin(\theta)}{1 - 2x\cos(\theta) + x^2} \end{aligned}$$

or
$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n e^{in\theta} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \cos(n\theta) + i\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \sin(n\theta)$$
donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \cos(n\theta) = \frac{1 - x\cos(\theta)}{1 - 2x\cos(\theta) + x^2}$$

et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \sin(n\theta) = \frac{x\sin(\theta)}{1 - 2x\cos(\theta) + x^2}$$

3.3. Convergence absolue

Définition 3.5. Soit $\sum_n u_n$ une série numérique.

On dit que la série $\sum_n u_n$ converge absolument si la série $\sum_n u_n$ converge.

Proposition 3.6. *Si $\sum_n u_n$ converge absolument alors $\sum_n u_n$ converge.*

c.a.d.:

$$\sum_n |u_n| \textit{ converge } \Rightarrow \sum_n u_n \textit{ converge.}$$

Exemples. .

1. Nature de $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n)}{n^2}$?

   On a: $0 \leq |\frac{\sin(n)}{n^2}| \leq \frac{1}{n^2}$

   et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$

   donc, d'après le critère de comparaison, $\sum_{n\geq 1} |\frac{\sin(n)}{n^2}|$ converge

   d'ou $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n)}{n^2}$ converge.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 1$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

   Etudier la nature de $\sum_{n\geq 0} x^n \cos(n\theta)$?

   $|x^n \cos(n\theta)| \leq |x|^n$ et $\sum_{n\geq 0} |x|^n$ converge

   donc, d'après le critère de comparaison, $\sum_{n\geq 0} |x^n \cos(n\theta)|$ converge

   d'ou $\sum_{n\geq 1} x^n \cos(n\theta)$ converge.

Exercice. Soit $u_n = ln(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})$, $n \geq 2$.

Etudier la convergence et la convergence absolue de $\sum_{n\geq 2} u_n$.

- Convergence absolue:

  On a $\begin{cases} ln(1+x) \sim_0 \; x \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = 0 \end{cases} \Rightarrow ln(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}) \sim_{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

  donc $|ln(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})| \sim_{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge (serie de Riemann avec

$\alpha = \frac{1}{2} \leq 1)$

et , d'après le critère d'équivalence, $\sum_{n\geq 2} |ln(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})|$ diverge.

- <u>Convergence:</u>

  $ln(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}) \sim_{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge d'après le TSSA

  mais on ne peut pas appliquer le critère d'équivalence, car $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ ne garde pas un signe constant.
  Dans ce cas, au lieu d'utiliser le critère d'équivalence, on utilise le développement limité:
  On a $ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \circ(x^2)$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = 0$

  donc

$$\begin{aligned} ln(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}) &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})^2}{2} + \circ(\frac{1}{n}) \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + \circ(\frac{1}{n}) = \alpha_n + \beta_n \end{aligned}$$

avec $\begin{cases} \alpha_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \\ \beta_n = -\dfrac{1}{2n} + \circ(\dfrac{1}{n}) \end{cases}$

$\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge d'après le TSSA.

$\beta_n \sim_{+\infty} \frac{-1}{2}\frac{1}{n}$ et $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n}$ diverge (série de Riemann avec $\alpha = 1 \leq 1$)

donc, d'après le critère d'équivalence, $\sum_{n\geq 2} \beta_n$ diverge.

conclusion: $\sum_{n\geq 2} ln(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})$ diverge.

Mohamed Gaied
Ecole polytechnique Sousse.
Univercité de Sousse, TUNISIE.