Series numériques

Mohamed Gaied

1. Convergence d'une serie numerique

Définition 1.1. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite numerique.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose, $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.
S_n est appelé somme partielle d'ordre n de u_n.
La suite numérique $(S_n)_{n\geq 0}$ est appelée serie numerique de terme general u_n et on la note $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$

1.1. convergence

Définition 1.2. Soit $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ une serie numerique.

• On dit que la serie numerique $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ converge si la suite somme partielle $(S_n)_{n\geq 0}$ converge et on note $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$

• On dit que la serie numerique $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge si la suite somme partielle $(S_n)_{n\geq 0}$ diverge.

Exemples. .
1) Nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 0} 1$?
Dans ce cas $u_n = 1 \forall n \in \mathbb{N}$.
$\displaystyle S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty$
donc la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 0} 1$ diverge.
2) Somme d'une suite arithmétique:
Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $r = 2$:

$u_n = u_0 + nr = 1 + 2n$
Etudier la nature de la serie $\sum_{n\geq 0} u_n$

$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n}(1+2k) = \sum_{k=0}^{n} 1 + 2\sum_{k=0}^{n} k = (n+1) + 2\frac{n(n+1)}{2} = (n+1)^2$

par suite $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} (n+1)^2 = +\infty$

donc la serie $\sum_{n\geq 0} n$ diverge.

3) Somme d'une suite géometrique:
Soit $a \in \mathbb{C} - \{1\}$ et $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite géometrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison a: $u_n = a^n$
Etudier la nature de la serie $\sum_{n\geq 0} u_n$

$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = 1 + a + a^2 + ... + a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$

$\lim_{n\to+\infty} a^{n+1} = \begin{cases} 0 \text{ si } |a| < 1 \\ \text{ n'existe pas ou infinie si } |a| > 1 \end{cases}$

par suite $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-a^{n+1}}{1-a} = \begin{cases} \frac{1}{1-a} \text{ si } |a| < 1 \\ +\infty \text{ si } a > 1 \\ \text{ n'existe pas ou infinie si } |a| > 1 \end{cases}$.

Conclusion: la serie $\sum_{n\geq 0} a^n$ converge ssi $|a| < 1$ et on a dans ce cas

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}.$$

Cas particulier: $a = \frac{e^{i\theta}}{2}$, $|a| = |\frac{e^{i\theta}}{2}| = \frac{1}{2} < 1$

donc $\sum_{n\geq 0} \frac{e^{in\theta}}{2^n}$ converge et on a $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{in\theta}}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{e^{i\theta}}{2}} = \frac{1-\frac{e^{-i\theta}}{2}}{(1-\frac{e^{i\theta}}{2})(1-\frac{e^{-i\theta}}{2})}$

4) Nnature de la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$

$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$ avec $a = 1$ et $b = -1$

$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}$

$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n+1}$

$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} (1 - \frac{1}{n+1}) = 1$

Conclusion: la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge et on a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$

Proposition 1.3. *Soit* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *une serie numerique.*
Si la serie $\sum_{n\geq 0} u_n$ *converge, alors la suite* $(u_n)_{n\geq 0}$ *converge vers 0.*

Démonstration: Soit $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$,.
On a $u_n = S_n - S_{n-1}$ et $\lim_{n\to+\infty} S_n = l \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = l$
donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Remarques 1.4. .
1) Si $(u_n)_n$ ne converge pas vers 0, alors la serie $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge.

Exemple: nature de $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2-1}{2n^2+3n+1}$

$u_n = \sum_{n\geq 0} \frac{n^2-1}{2n^2+3n+1} \to_{n\to+\infty} \frac{1}{2} \neq 0$

donc $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2-1}{2n^2+3n+1}$ diverge.

2) Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, on n'a pas necessairement la convergence de la serie $\sum_{n\geq 0} u_n$.

Exemple: Nature de $\sum_{n\geq 1} ln(1+\frac{1}{n})$

$u_n = ln(1+\frac{1}{n}) \sim_{+\infty} \frac{1}{n} \to_{n\to+\infty} 0$ mais $\sum_{n\geq 1} ln(1+\frac{1}{n})$ diverge, en effet

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=1}^{n} ln(1+\frac{1}{k}) &= \sum_{k=1}^{n} ln(\frac{k+1}{k}) = \sum_{k=1}^{n}(ln(k+1) - ln(k)) \\ &= \sum_{k=1}^{n} ln(k+1) - \sum_{k=1}^{n} ln(k) = \sum_{k=2}^{n+1} ln(k) - \sum_{k=1}^{n} ln(k) \\ &= ln(n+1). \end{aligned}$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} ln(n+1) = +\infty$
d'ou $\sum_{n\geq 1} ln(1+\frac{1}{n})$ diverge.

1.2. Operations sur les series

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux series numeriques et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge, alors $\sum_{n\geq 0}(u_n + \lambda v_n)$ converge et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n + \lambda v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

Remarques 1.5. .

1) Si $\begin{cases} \sum_{n\geq 0} u_n \text{ converge} \\ \sum_{n\geq 0} v_n \text{ diverge ,} \end{cases}$ alors $\sum_{n\geq 0}(u_n + v_n)$ diverge

Exemple: Nature de $\sum_{n\geq 0}((\frac{1}{2})^n + 2^n)$.

On a $\sum_{n\geq 0}(\frac{1}{2})^n$ converge et $\sum_{n\geq 0} 2^n$ diverge

ce qui implique que $\sum_{n\geq 0}((\frac{1}{2})^n + 2^n)$ diverge.

2) si $\begin{cases} \sum_{n\geq 0} u_n \text{ diverge} \\ \sum_{n\geq 0} v_n \text{ diverge} \end{cases}$, alors on ne peut pas conclure la nature de $\sum_{n\geq 0}(u_n + v_n)$.

2. series positives

Théorème 2.1. *Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une serie positive ($u_n \geq 0 \forall n$.*
alors

- *(i) La suite somme partielle $(S_n)_n$ est croissante.*
- *(ii) la serie $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge ssi la suite $(S_n)_n$ est majorée.*

Exercice: Etudier la nature de la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in [k, k+1]$, $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$

donc $\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1} dt = \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dt = \frac{1}{k}$

et par suite

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt = \int_1^{n+1} \frac{1}{t} dt = ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

d'ou $ln(n+1) \leq S_n$ et $\lim_{n\to+\infty} ln(n+1) = +\infty$.

Conclusion: $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

2.1. critère de comparaison

Théorème 2.2. *Soit* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *deux series a termes positives.*

1. *Si* $\begin{cases} 0 \leq u_n \leq v_n \\ \sum_{n\geq 0} v_n \textit{ converge} \end{cases}$, *alors* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *converge*
2. *Si* $\begin{cases} 0 \leq u_n \leq v_n \\ \sum_{n\geq 0} u_n \textit{ diverge} \end{cases}$, *alors* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *diverge.*

Application: Déterminer la nature de la serie $\sum_{n\geq 0} u_n$ dans les cas suivants.

(a) $u_n = \dfrac{1}{(n+1).3^n}$

(b) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

(c) $u_n = \dfrac{arctg(n)}{n(n+1)}$

(a) On a $0 \leq \dfrac{1}{(n+1).3^n} \leq \dfrac{1}{3^n} = (\dfrac{1}{3})^n$ et $\sum_{n\geq 0} (\dfrac{1}{3})^n$ converge,

donc, daprès le critère de comparaison, $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

(b) On a $0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $\sum_{n\geq 0} \dfrac{1}{n}$ diverge,

donc, daprès le critère de comparaison, $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge.

(c) On a $0 \leq \dfrac{arctg(n)}{n(n+1)} \leq \dfrac{\frac{\pi}{2}}{n(n+1)}$ car $0 \leq arctg(x) \leq \dfrac{\pi}{2} \ \ \forall x \geq 0$ et

$\sum_{n\geq 0} (\dfrac{1}{n(n+1)}$ converge,

donc, daprès le critère de comparaison, $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

2.2. critère d'équivalence

Théorème 2.3. *Soit* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *deux series a termes positives.*

Si $u_n \sim_{+\infty} v_n$*, alors, les deux series sont de même nature.*

Exemples. 1) Nature de $\sum_{n\geq 1} ln(1+\frac{1}{n})$?

On a $ln(1+\frac{1}{n}) \sim_{+\infty} \frac{1}{n}$ et $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ diverge,

donc, daprès le critère d'équivalence, $\sum_{n\geq 1} ln(1+\frac{1}{n})$ diverge.

2)

2.3. series de Riemann

On appelle serie de Riemann toute serie de la forme $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}$

Théorème 2.4. *La serie de Riemann* $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$ *converge ssi* $\alpha > 1$

Démonstration:

- Si $\alpha < 0$, $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^\alpha} = +\infty$ donc $\sum_{n\leq 1}\frac{1}{n^\alpha}$ diverge.
- Si $\alpha = 1$, $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$ diverge
- Si $0 < \alpha < 1$, $n^\alpha < n$ et par suite $0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^\alpha}$ et $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ diverge,

  donc, daprès le critère d'équivalence, $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$ diverge.
- Si $\alpha > 1$
  Pour $k\in\mathbb{N}^*$, $\forall t\in[k,k+1]$, $\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \frac{1}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$
  donc $\int_k^{k+1}\frac{1}{(k+1)^\alpha}dt = \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1}\frac{1}{t^\alpha}dt \leq \int_k^{k+1}\frac{1}{k^\alpha}dt = \frac{1}{k^\alpha}$
  et par suite
  $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \sum_{k=1}^{n-}\int_k^{k+1}\frac{1}{t^\alpha}dt = \int_1^n\frac{1}{t^\alpha}dt \leq \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^\alpha}$
  d'ou $\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{1-\alpha}[\frac{1}{n^\alpha}-1] = \frac{1}{-1\alpha}[1-\frac{1}{n^\alpha}] \leq \frac{1}{1-\alpha}$ $(\alpha>1)$
  donc $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$ converge.

Exemples:
les series $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ $(\alpha=2)$, $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n5}$ $(\alpha=5)$ et $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ $(\alpha=\frac{3}{2})$ convergent.
les series $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ $(\alpha=1)$, $\sum_{n\geq 1} n$ $(\alpha=-1)$ et $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ $(\alpha=\frac{1}{2})$ divergent.

Applications: Nature de $\sum_n u_n$ dans les cas suivants.

a) $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$, $n\in\mathbb{N}^*$

On a $\frac{1}{n(n+1)} \sim_{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge (intégrale de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$)
donc, d'après le critére d'equivalence, $\sum_n \dfrac{1}{n(n+1)}$ converge.

b) $u_n = \dfrac{2n^2 - 5n + 8}{3n^3 + n^2 + 2n + 1}$, $n \in \mathbb{N}^*$
On a $\dfrac{2n^2 - 5n + 8}{3n^3 + n^2 + 2n + 1} \sim_{+\infty} \dfrac{2n^2}{3n^3} = \dfrac{2}{3}\dfrac{n^2}{n^3} = \dfrac{2}{3}\dfrac{1}{n}$ et $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n}$ diverge (intégrale de Riemann avec $\alpha = 1 \leq 1$)
donc, d'après le critére d'equivalence, $\sum_n \dfrac{2n^2 - 5n + 8}{3n^3 + n^2 + 2n + 1}$ diverge.

c) $u_n = \frac{sin^2(n)}{n^3}$, $n \in \mathbb{N}^*$
On a $\frac{sin^2(n)}{n^3} \leq \frac{1}{n^3}$ et $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^3}$ converge (intégrale de Riemann avec $\alpha = 3 > 1$)
donc, d'après le critére de comparaison, $\sum_n \dfrac{sin^2(n)}{n^3}$ converge.

Mohamed Gaied
Ecole polytechnique Sousse.
Univercité de Sousse, TUNISIE.