

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Ingegneria e Architettura
Dipartimento di Informatica · Scienza e Ingegneria · DISI
Corso di Laurea in Ingegneria Informatica

**SISTEMI ANTI-DENIAL OF SERVICE IN AMBIENTI
ANONIMI BASATI SU ZK-SNARK**

Relatore:
Prof. Paolo Bellavista

Presentata da:
Straccali Leonardo

Anno Accademico 2022/2023

Indice

Elenco delle figure	5
1 Stato dell'arte	7
1.1 Denial-of-Service (DoS)	7
1.2 zk-SNARK	10
1.2.1 Zero-Knowledge	10
1.2.2 Succinct	12
1.2.3 Non-Interactive	19

Elenco delle figure

1.1	Diagramma funzionamento della strategia Fixed window	8
1.2	Diagramma funzionamento della strategia Token bucket	8
1.3	Diagramma funzionamento della strategia Leaky bucket	9
1.4	Diagramma funzionamento della strategia Sliding window	9
1.5	Disegno della caverna	11
1.6	Interzione tra Peggy e Victor	12
1.7	Disegno esempio di valutazione a tentativi fallita	13
1.8	Esempio applicazione del lemma di Schwartz-Zippel, tratta da [7] . .	14
1.9	Passi da seguire per ottenere un QAP	15
1.10	Codice esemplificativo per la creazione di un circuito algebrico	16
1.11	Contrllo dei vincoli R1CS	17
1.12	immagine generica di una cerimonia di trusted set-up. tratta da [9] .	20
1.13	immagine modelli di di affidabilità, tratta da [10]	21
1.14	immagine generica di una di power of tau. tratta da [9]	22
1.15	immagine prestazioni di teconlogi NIZKP a confronto. tratta da [12] .	23

Capitolo 1

Stato dell'arte

1.1 Denial-of-Service (DoS)

Gli attacchi di tipo Denial-of-Service (DoS) sono una tipologia di attacchi informatici estremamente diffusi, la cui frequenza è cresciuta negli anni sia in termini quantitativi che qualitativi. Questo incremento è stato determinato dalla relativa facilità con cui è possibile condurre un attacco di questo tipo, nonché dalle sue conseguenze, che in base alle contromisure adottate e alla struttura del servizio attaccato possono essere più o meno gravi. Nella tesi ci concentreremo solamente, sull'analisi della metodologia di protezione denominate rate-limiting. Queste strategie possono risultare estremamente efficaci in alcune situazioni, come dimostrato dall'evento accaduto ad agosto 2022 a Google [1], la quale grazie all'attivazione di un rate-limiter è stata in grado di contrastare con successo il più grande attacco di tipo DDoS a livello applicativo mai registrato. Tale attacco, proveniente da oltre 5.256 sorgenti IP dislocate in 132 paesi differenti, ha raggiunto il picco di 46 milioni di richieste al secondo.

In generale, una regola per il rate limiting consiste in un semplice conteggio delle occorrenze delle richieste in un lasso di tempo. Tuttavia, esistono diverse tecniche per misurare e limitare la frequenza di tali richieste, ognuna con i propri usi e implicazioni.

- **Fixed window:** Tra tutte le strategie che vedremo è la più semplice da implementare, consiste nello stabilire un limite massimo al numero di richieste che possono essere inviate in un determinato intervallo di tempo, detto "finestra". Ad esempio, si potrebbe limitare il numero di richieste a 100 ogni minuto. Questo limite viene applicato in modo uniforme all'interno della finestra temporale. Ciò significa che, una volta raggiunto il limite massimo di richieste consentite, l'utente o l'applicazione deve attendere il termine della finestra temporale per poter inviare nuove richieste. Uno svantaggio significativo di questa strategia è la possibile concentrazione di richieste tutte in una porzione della finestra, rischiando un sovraccarico del servizio. Caso notevole è il caso in cui si concentrino tutte le richieste di una finestra al margine della fine e tutte le richieste della finestra successiva al margine dell'inizio questo comporta che il sistema in una durata equivalente a quella della finestra gestisca il doppio

delle richieste consentite.

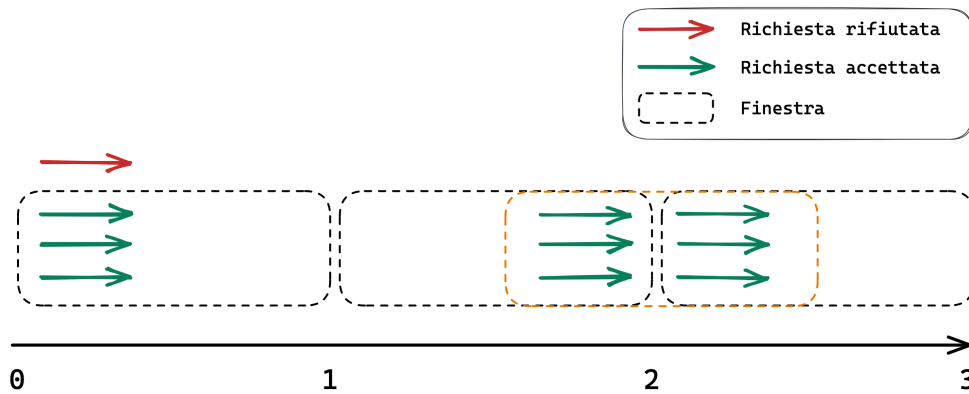


Figura 1.1: Diagramma funzionamento della strategia Fixed window

- **Token bucket:** Il funzionamento del token bucket prevede che non tutte le richieste di un servizio vengano mappate 1:1 con la richiesta di risorse, poiché alcune richieste potrebbero richiedere più risorse di altre. Per questo motivo, viene mantenuto un contatore di risorse, che viene scalato per ogni richiesta, del numero di token necessari per portare a termine il lavoro. Il contatore ha una frequenza di riempimento, ovvero a ogni unità di tempo viene reimpostato al suo valore massimo. Quando un utente o un'applicazione invia una richiesta al sistema, il sistema verifica se ci sono abbastanza token disponibili per soddisfare la richiesta. Se non ci sono abbastanza token, la richiesta viene respinta. In questo modo, le richieste vengono accettate solo se c'è abbastanza capacità per soddisfarle.

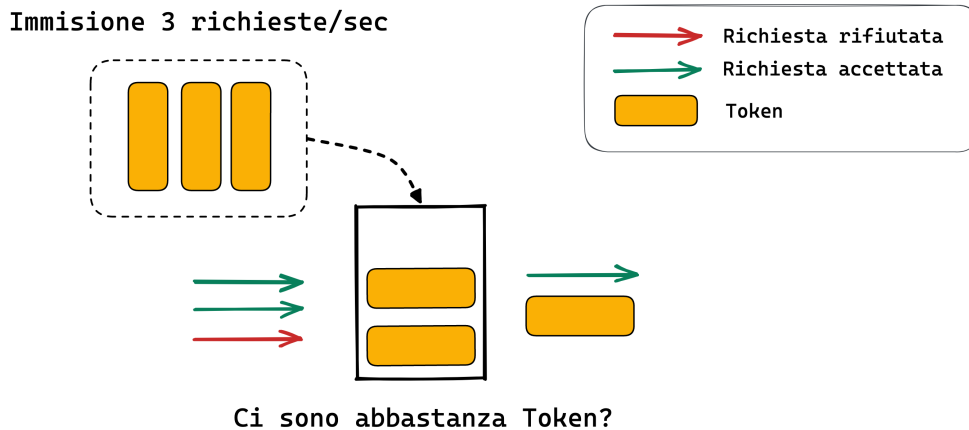


Figura 1.2: Diagramma funzionamento della strategia Token bucket

- **Leaky bucket:** L'idea di base è simile a quella del Token bucket ma invece di rispondere al numero di richieste liberando i token necessari fino a esaurimento, il tasso di elaborazione delle richieste viene regolato in modo uniforme. Questo significa che quando un pacchetto di dati arriva al sistema, se il secchio è già pieno, il pacchetto viene scartato. Nel mentre ad ogni unità di tempo viene elaborata una quantità di richieste corrispondente alla velocità di uscita del

sistema. In questo modo, il flusso di dati in uscita non supera mai una certa soglia.

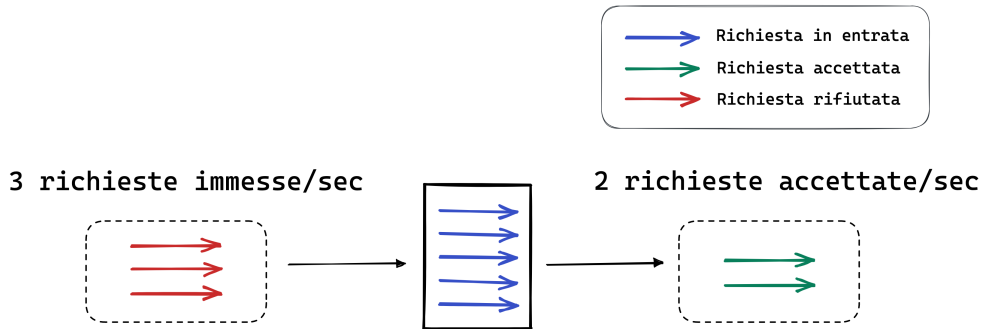


Figura 1.3: Diagramma funzionamento della strategia Leaky bucket

- **Sliding window:** La strategia di sliding window adotta un approccio simile alla Fixed Window, ma con una differenza fondamentale: esamina il tasso di richieste effettuate in un periodo di tempo continuo piuttosto che in intervalli fissi. Ad esempio, se il limite di richieste è fissato a 100 al minuto, la strategia prevede di controllare il numero di richieste effettuate nell'ultimo minuto e, nel caso superi il limite, rifiutare la richiesta. Questo approccio evita il potenziale sovraccarico del sistema alla fine di una finestra con un tempo prefissato, ma richiede la gestione di una finestra scorrevole, aumentando la complessità di implementazione.

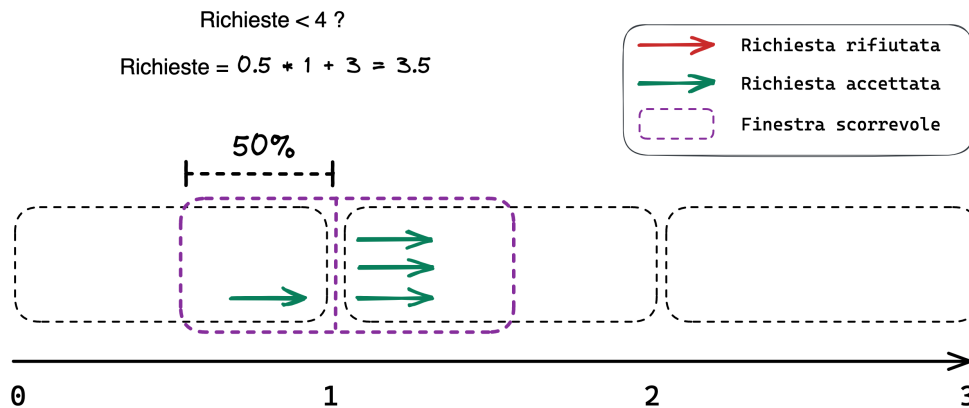


Figura 1.4: Diagramma funzionamento della strategia Sliding window

Vale la pena notare che pur essendo un metodo ampiamente utilizzato il rate-limiting da solo potrebbe risultare insufficiente per garantire un livello di sicurezza adeguato contro gli attacchi DoS, pertanto, è necessario adottare contromisure di diversa natura al fine di garantire una protezione completa.

1.2 zk-SNARK

L'acronimo zk-SNARK rappresenta l'espressione completa "Zero-Knowled Succinct Non-Interactive Argument of Knowledge". Questa tecnologia è stata formalizzata per la prima volta in un articolo scientifico pubblicato nel 2014 intitolato "Succinct non-interactive zero knowledge for a von Neumann architecture"[2]. Da allora, sono state apportate diverse migliorie alla tecnologia e sono emerse numerose applicazioni in svariati settori. Le prime applicazioni significative di zk-SNARK sono state implementate nel contesto della Blockchain, che rimane il settore dove la tecnologia è più conosciuta e applicata, per fare alcuni esempi Ethereum¹ una delle Blockchain più accreditate ha iniziato ad implementare la tecnologia nella sua rete dal 2016, e il suo fondatore Vitalik Buterin ha scritto in un articolo sull'argomento: "Perhaps the most powerful cryptographic technology to come out of the last decade is general-purpose succinct zero knowledge proofs, usually called zk-SNARKs" [3] (Forse la tecnologia crittografica più potente emersa nell'ultimo decennio è quella delle prove succinte a conoscenza zero di uso generale, solitamente chiamate zk-SNARK.).

Zk-SNARK, come suggerisce il nome, rappresenta una tecnologia fondata sul protocollo crittografico zero-knowledge proof, il quale consente a una parte (il dimostratore) di dimostrare a un'altra (il verificatore) la veridicità di un'affermazione senza rivelare nessuna informazione ulteriore. Inoltre questo processo di dimostrazione, viene effettuato in modo da ottenere una prova, in cui sia la dimensione della prova, che il tempo necessario per verificarla crescono molto più lentamente rispetto al calcolo da verificare e senza la necessità di interazione bidirezionale tra le due parti coinvolte.

Di seguito esamineremo meglio le singole parti che compongono la tecnologia zk-SNARK, analizzando i suoi componenti chiave per ottenerne una panoramica completa.

Notare: Nei prossimi paragrafi lavoreremo nel dominio algebrico dei campi finiti.

1.2.1 Zero-Knowledge

Come accennato precedentemente, Zero-Knowledge proof è un protocollo crittografico in cui una parte dimostra di conoscere una determinata informazione a un'altra parte, senza rivelare alcuna informazione aggiuntiva su di essa. Per esempio, se Peggy vuole dimostrare a Victor di conoscere la password del suo account, senza rivelargli la password stessa, può utilizzare un protocollo di tipo Zero-Knowledge. In questo modo, Peggy può dimostrare a Victor di sapere quale è la password corretta senza rivelarla, proteggendo così la sua privacy e la sicurezza del suo account.

Formalmente le prove di tipo Zero-Knowledge non sono dimostrazioni di carattere matematico, ma probabilistiche, il che significa che c'è sempre una probabilità che un dimostratore disonesto riesca a dimostrare la veridicità di un'affermazione a un verificatore onesto. Esistono tuttavia tecniche per ridurre questa probabilità a valori piccoli a piacere.

¹<https://ethereum.org>

Il primo articolo che definisce il costrutto è "The Knowledge Complexity of Interactive Proof-Systems" [4] pubblicato nel 1985, dove gli autori introducono il concetto di "Zero-Knowledge proof" come un tipo di "interactive proof systems" [5] (un modello computazionale che simula lo scabio di messaggi tra due individui) in cui il verificatore non apprende nulla oltre alla verità dell'affermazione che viene dimostrata.

Per poter ottenere un sistema Zero-Knowledge proof per una particolare affermazione abbiamo bisogno che la prova generata soddisfi le seguenti proprietà :

- **Completezza:** Se l'affermazione da dimostrare è vera, allora un verificatore onesto (cioè che segue correttamente le regole del protocollo) verrà convinto della veridicità da un dimostratore onesto.
- **Correttezza:** Se l'affermazione è falsa, nessun dimostratore disonesto può convincere un verificatore onesto che essa è vera, se non con una piccola probabilità.
- **Zero-knowledge:** se l'affermazione è vera, nessun verificatore apprende altro se non il fatto che l'affermazione è vera.

Le tre proprietà appena viste descrivono un sistema Zero-Knowledge proof da un punto di vista formale ma per avere una visione più intuitiva del protocollo è utile vedere il funzionamento del protocollo attraverso un esempio. L'esempio in questione è tratto da un famoso articolo di Jean-Jacques Quisquater "How to Explain Zero-Knowledge Protocols to Your Children" [6] ne estrapolerò solo le parti essenziali alla trattazione, ma ne consiglio la lettura.

L'esempio riguarda una caverna a forma di anello, nella quale è posta a metà del percorso una porta che impedisce il passaggio, a meno di non conoscere una parola segreta. Supponiamo l'esistenza di due parti, Peggy - che conosce il segreto della porta e agirà da dimostratrice - e Victor - che invece non conosce il segreto e sarà il verificatore. Peggy vuole dimostrare a Victor di sapere come superare la barriera senza però rivelare il segreto. Per fare ciò, Peggy propone a Victor di seguire una strategia: dapprima stabiliscono un nome per identificare i due percorsi (ad esempio, A e B), poi Victor rimane fuori dalla caverna mentre Peggy sceglie uno dei due percorsi.

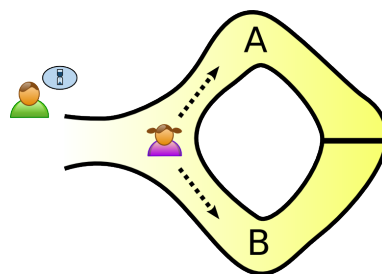


Figura 1.5: Disegno della caverna

Dopo qualche minuto, Victor entra nella caverna e chiama ad alta voce il nome di uno dei due percorsi, a quel punto Peggy dovrà uscire dal percorso chiamato da Victor. Victor accetta la proposta, ma con una condizione: il processo dovrà



Figura 1.6: Interazione tra Peggy e Victor

essere Bob ripetuto più volte. Dopo diversi tentativi, Victor si convince che Peggy conosca effettivamente il segreto per superare la barriera. Possiamo calcolare questa probabilità utilizzando la distribuzione binomiale, dove la probabilità di successo p è del 50% e il numero totale di prove n è 10. La probabilità di indovinare correttamente tutte le 10 scelte di Victor è data dalla seguente formula: $P = p^n = 0,5^{10} = 0,0009765625$

L'esempio proposto è molto efficace nel far comprendere come sia possibile dimostrare il possesso o la conoscenza di un'informazione senza rivelarla. Nell'articolo citato inoltre si prevedono diversi scenari in cui una o entrambe le parti potrebbero essere disoneste. Per gestire tali situazioni, è possibile applicare una procedura denominata "trusted setup", che verrà approfondita nelle sezioni relative alle prove non interattive [Non-Interactive].

1.2.2 Succinct

Una dimostrazione di tipo succinct che potremmo tradurre con la parola concisa, è una prova in cui sia la dimensione della prova che il tempo necessario per verificarla crescono molto più lentamente rispetto alla computazione da verificare. Ad esempio se Peggy volesse provare a Victor di possedere un array composto da un milione di elementi, dove ogni elemento è uguale all'indice dell'array più uno.

$$a = [1, 2, 3, \dots, 1000000] \quad (1.1)$$

Una prova di tipo succinct, così come definita, non può essere realizzata attraverso un processo di controllo "uno per uno" degli elementi dell'array. Questo perché, se così fosse, si otterrebbe un processo che richiederebbe tanto tempo e spazio di memoria quanto il calcolo effettuato per generare l'array. Una possibile miglioria rispetto al calcolo puntuale potrebbe essere quella di campionare l'array in un punto casuale e controllare se l'elemento selezionato rispetta la regola.

Dopo un singolo campionamento, il grado di fiducia di Victor rispetto ad Peggy sarebbe di soli 0,0001%, ovvero un milionesimo. Se in uno qualsiasi dei campionamenti effettuati Victor dovesse prelevare un numero non congruo, la dimostrazione verrebbe invalidata completamente senza bisogno di ulteriori controlli. È possibile aumentare il grado di fiducia del verificatore eseguendo più controlli, ma anche in questo caso, le prove generate da dimostratori disonesti in cui uno o pochi elementi sono errati all'interno dell'intera prova richiederebbero un numero eccessivo di passaggi per raggiungere un grado di fiducia accettabile, rendendo così questo secondo approccio fragile e non attuabile.

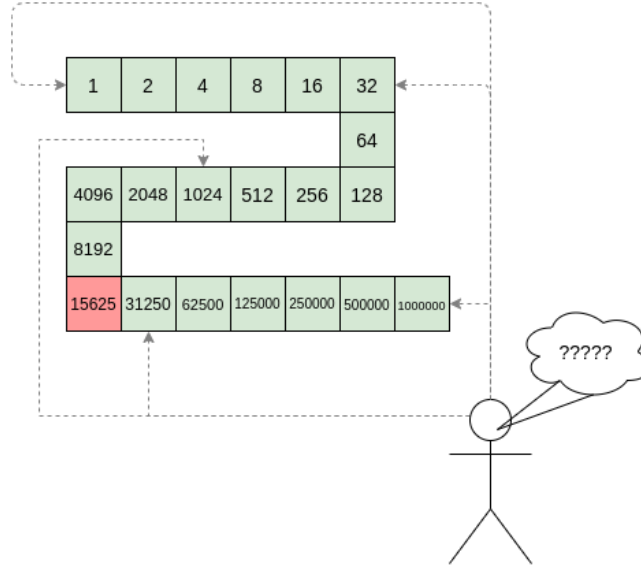


Figura 1.7: Disegno esempio di valutazione a tentativi fallita

Polinomi

Per trovare una soluzione al problema, è necessario fare riferimento ai polinomi, in particolare alla tecnica crittografica nota come "polynomial commitments". Questa tecnica ci consente di generare delle funzioni hash per i polinomi, chiamate "polynomial commitment", sulle quali è ancora possibile effettuare operazioni algebriche. Ciò significa che possiamo eseguire operazioni sui polinomi senza conoscerli, attraverso i commitment. L'utilizzo di questa tecnica ci fornisce notevoli vantaggi durante la fase di verifica, Infatti la possibilità di verificare le informazioni del dimostratore senza dover operare un controllo puntuale è possibile grazie a una proprietà dei polinomi descritta dal lemma di Schwartz-Zippel; un risultato importante in teoria della complessità computazionale e della teoria degli algoritmi che stabilisce una condizione sufficiente per determinare se un polinomio multivariato non nullo ha radici in un campo finito.

Per comprendere come questo strumento possa esserci utile, partiamo da un'equivalenza intuitiva: ipotizzando di essere in possesso di due polinomi $f(x_1, \dots, x_n)$ e $g(x_1, \dots, x_n)$, chiedersi se $f \equiv g$ è equivalente a chiedersi se

$$p(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) - g(x_1, \dots, x_n) \equiv 0 \quad (1.2)$$

L'intuizione su cui possiamo basarci per capire l'utilità del lemma per i nostri fini, è che Victor (il verificatore) abbia il polynomial commitment $g(x_1, \dots, x_n)$ del polinomio corretto $f(x_1, \dots, x_n)$ e voglia verificare che Peggy (il dimostratore) lo conosca.

Sotto queste ipotesi possiamo immaginare un semplice protocollo di esempio dove:

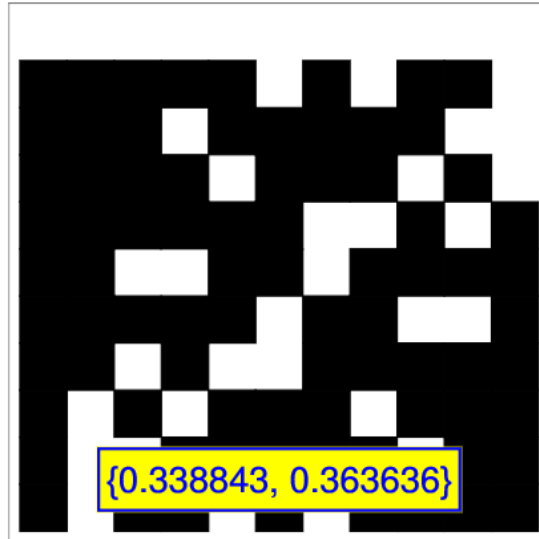
1. Victor sceglie un punto qualsiasi s e valuta il suo polynomial commitment in s , e ottiene $g(s_1, \dots, s_n)$.
2. Victor invia s a Peggy che provvederà a valutare il suo polinomio in s , e ottiene $f(s_1, \dots, s_n)$.
3. Peggy invia il risultato della sua valutazione a Victor che la confronta con il suo valore, se i valori sono uguali Victor si convince che nel punto s Peggy conosce il corretto polinomio.

In questa fase ci potremmo chiedere quale beneficio abbiamo ottenuto passando dalla formulazione dell'array in cui venivano fatti campionamenti casuali, alla formulazione dei polinomi in cui vengono fatte valutazioni del polinomio in variabili casuali. Il beneficio è dovuto al lemma di Schwartz-Zippel, che permette di dimostrare che:

Prendendo un polinomio $p(x_1, \dots, x_n)$ di grado $d > 1$ con coefficienti in un campo finito \mathbb{K} , prendendo $S \subset \mathbb{K}$ e $r_1, \dots, r_n \in S$ scelti in modo arbitrario, allora se $p(x_1, \dots, x_n)$ non è il polinomio nullo abbiamo che $p(r_1, \dots, r_n) = 0$ con probabilità $\leq d/|S|$

Nell'immagine sottostante si può osservare che prendendo un polinomio qualunque nel campo finito \mathbb{K} , la probabilità che il polinomio valutato in un punto casuale sia uguale a 0 differisce di poco se calcolata con la definizione classica di probabilità o con il lemma di Schwartz-Zippel, tuttavia il calcolo attraverso la seconda formula è molto più immediato.

$$f(x, y) = \prod_{i=0}^{d-1} (x + i \cdot y) \text{ and its roots in } \mathbb{F}_p^2, \text{ for } p = 11, d = 4:$$



Left number: percentage of roots; right number: d/p

Figura 1.8: Esempio applicazione del lemma di Schwartz-Zippel, tratta da [7]

La conseguenza del lemma è che la probabilità di trovare una radice del polinomio in un gruppo di valori appartenenti al campo è inferiore o uguale al rapporto tra il grado del polinomio e la cardinalità del gruppo di elementi selezionati, operazione molto più veloce da calcolare di un controllo puntuale. Inoltre se decidessimo di ripetere il processo di selezione degli $r_1, \dots, r_n \in S$ un numero k di volte otterremo che la probabilità che $p(r_1^k, \dots, r_n^k) = 0$ sarebbe obbligatoriamente $\leq (d/|S|)^k$ e per valori di S abbastanza grandi il rapporto tende molto velocemente a 0. Intuitivamente il lemma ci dimostra che se un'equazione che coinvolge alcuni polinomi è vera in una coordinata selezionata arbitrariamente, allora è quasi certamente vera per i polinomi nel suo insieme.

Come calcolare i polinomi

Una volta compreso il vantaggio nell'affrontare il problema mediante l'utilizzo di polinomi, possiamo procedere alla descrizione del processo che ci permette di ottenere tali polinomi.

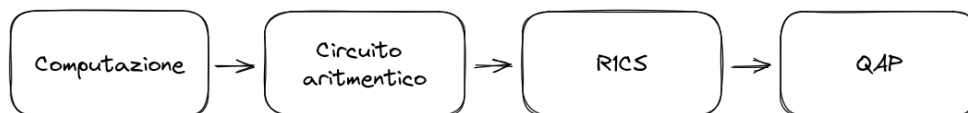


Figura 1.9: Passi da seguire per ottenere un QAP

Per illustrare in dettaglio i passaggi che conducono dalla computazione alla rappresentazione polinomiale desiderata, ovvero la QAP (Quadratic Arithmetic Programs), utilizzeremo un compilatore scritto in Rust² chiamato circom³

1. La prima fase, ovvero il passaggio dalla computazione al circuito algebrico, può essere un processo non immediato, soprattutto quando si trattano computazioni articolate. A titolo di esempio, consideriamo la computazione $2 * x^2 = 18$ con l'ovvia soluzione da dimostrare $x = 3$. Per ottenere un circuito algebrico a partire da questa computazione, si può procedere come segue:

²<https://www.rust-lang.org>

³<https://docs.circom.io/>

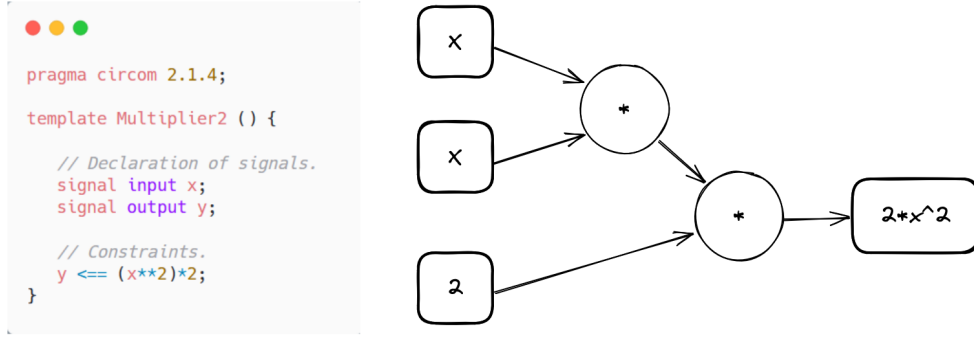


Figura 1.10: Codice esemplificativo per la creazione di un circuito algebrico

2. Ora per proseguire dobbiamo trasformare il nostro circuito aritmetico in un formato chiamato R1CS. R1CS è un formato in cui ogni vincolo (gate del circuito) viene espresso tramite in una terna di vettori (a, b, c) e sul quale viene calcolato un vettore chiamato s che rappresenta la soluzione del sistema di vincoli R1CS. Il vettore s è costruito nel seguente modo:

$$s \cdot a * s \cdot b - s \cdot c = 0$$

dove con il simbolo \cdot si rappresenta il prodotto scalare. Continuando con il nostro esempio dal circuito precedente possiamo calcolare le terne di vettori (a, b, c) per i due gate

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Possiamo osservare che per ognuno dei due gate del circuito, sono stati creati una terna di vettori (a, b, c) di dimensione 4, la dimensione dei vettori è dovuta al numero di variabili del circuito.

Per quanto riguarda il vettore s , esso viene calcolato a partire dal vettore delle variabili del circuito, inserendo al posto di ogni variabile il valore assunto durante la valutazione del circuito. In questo modo, il vettore s rappresenta la soluzione del sistema R1CS.

$$\text{Vettore variabili} = [one, x, out, sym_1]$$

$$\text{Vettore } s = [1 \quad 3 \quad 18 \quad 9]$$

Possiamo vedere che sym_1 è una variabile creata per spezzare il calcolo di $2*x^2$ in due diversi vincoli più semplici questa procedura viene chiamata "Flattening" (appiattimento), mentre one è una variabile di sistema utilizzata per effettuare operazioni algebriche come la moltiplicazione o la somma per gli elementi del campo. Per verificare che il vettore s sia effettivamente una soluzione del sistema di vincoli R1CS, è possibile calcolare la formula precedente per ogni gate del circuito.

S	a_1	s	b_1	s	c_1	S	a_2	s	b_2	s	c_2
1	0	1	0	1	0	1	0	1	2	1	0
3	1	3	1	3	0	3	0	3	0	3	0
18	0	18	0	18	0	18	0	18	0	18	1
9	0	9	0	9	1	9	1	9	0	9	0
$3 * 3 - 9 = 0$						$9 * 2 - 18 = 0$					

Figura 1.11: Contrllo dei vincoli R1CS

Visto che il risultato dell'operazione è 0 possiamo dire che s è una soluzione del sistema R1CS, e quindi che il nostro valore $x = 3$ che compone il vettore soluzione è corretto. Al pari del calcolo puntuale degli esempi precedenti questa operazione di verifica per circuiti con molti gate non può essere percorribile.

- Il processo di trasformazione dal formato R1CS al formato QAP è il più complesso e richiede l'utilizzo di una tecnica chiamata interpolazione di Lagrange. L'idea principale è quella di costruire dei polinomi tali che se valutati nelle coordinate relative ai vincoli, restituiscano i valori dei vettori corrispondenti. Il processo per ottenere i polinomi si basa su una procedura iterativa su i vettori delle matrici A , B e C . Applicando il processo al nostro esempio otteniamo i seguenti polinomi:

$$A_p = \begin{bmatrix} 0x^2 + 0x \\ -1x^2 + 2x \\ 0x^2 + 0x \\ 1x^2 - 1x \end{bmatrix} \quad B_p = \begin{bmatrix} 2x^2 - 2x \\ -1x^2 + 2x \\ 0x^2 + 0x \\ 0x^2 + 0x \end{bmatrix} \quad C_p = \begin{bmatrix} 0x^2 + 0x \\ 0x^2 + 0x \\ 1x^2 - 1x \\ -1x^2 + 2x \end{bmatrix}$$

Questi polinomi sono costruiti in modo tale che valutandoli in $x = 1$ (coordinata del primo vincolo) otteniamo i valori corrispondenti ai vettori del primo vincolo

$$A_p = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0] \quad B_p = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0] \quad C_p = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$$

grazie a questa formato ora se volessimo verificando i vincoli tramite la formula precedente avremmo

$$A(x) * B(x) - C(x) = P(x)$$

dove $P(x)$ non è obbligatoriamente il polinomio nullo. Tuttavia Se la dimostrazione è corretta $P(x)$ deve avere delle radici in tutti le coordinate corrispondenti ai vincoli. Per verificarlo non abbiamo bisogno di controllare tutti i vincoli perché lavorando con i polinomi possiamo sfruttare il lemma di Schwartz-Zippel per valutare la condizione molto più velocemente.

Valutazioni sul protocollo

Fino ad ora abbiamo descritto un processo che ci consente di trasformare i nostri vincoli numerici in polinomi, permettendoci di calcolare con grande velocità e un elevato grado di certezza la validità dei vincoli imposti. Tuttavia, il protocollo spiegato in precedenza presenta due falle:

1. **Arbitrarietà:** Nel secondo passaggio del protocollo, Victor condivide con Peggy un punto s , che è stato scelto casualmente per valutare il polinomio. Tuttavia, passando s in chiaro ad Peggy ci si espone al rischio che Peggy costruisca un polinomio ad hoc, che soddisfi i vincoli solo nel punto specifico scelto, permettendole così di convincere Victor di pur non conoscendo il polinomio. Ciò violerebbe il principio di correttezza dei protocolli Zero-Knowledge proof.
2. **Verificabilità:** la capacità di Peggy di valutare correttamente il polinomio in s non garantisce che essa abbia utilizzato effettivamente il polinomio p per restituire il risultato a Victor, In altre parole, non è garantito che Peggy abbia utilizzato il polinomio descritto dal polynomial commitment per raggiungere il risultato atteso.

Per affrontare questi due problemi, vengono utilizzate altre tecniche matematiche, denominate Homomorphic Encryption (HH) per risolvere il primo problema e Knowledge of Coefficient (KC) per risolvere il secondo. In questa sede, si accennerà brevemente a come è possibile ottenere un Homomorphic Encryption in grado di soddisfare la proprietà di correttezza, mentre la trattazione del KC non verrà approfondita. È possibile trovare una introduzione ad entrambe le tecniche in questa serie di articoli [8]

Homomorphic Encryption

L'idea alla base dell'Homomorphic Encryption è quella di costruire un'operazione simile all'operazione di hashing con la proprietà di poter applicare delle operazioni aritmetiche ai valori criptati senza decifrarli, ovvero ottenere una funzione $E(x)$ che soddisfi tali proprietà :

1. **Difficoltà di inversione:** Dato un $E(x)$ sia complesso risalire a x
2. **Resistenza alle collisioni:** Se $x \neq y \Rightarrow E(x) \neq E(y)$
3. **Preserva operazioni aritmetiche:** Se si conoscono $E(x)$ ed $E(y)$, si può generare delle espressioni aritmetiche in x e y . Per esempio, si può calcolare $E(x+y)$ da $E(x)$ ed $E(y)$

1.2.3 Non-Interactive

Tutti i protocolli Zero-Knowledge proof esaminati fino ad ora erano di tipo interattivo. Questo significa che per generare e verificare la prova, le due parti coinvolte, ovvero il verificatore e il dimostratore, devono interagire in modo bidirezionale. Ad esempio, nel caso della "grotta di Alibaba", Victor, il verificatore, indicava il passaggio da intraprendere e Peggy, il dimostratore, che "rispondeva" uscendo dalla giusta direzione. Mentre nel caso dei polinomi, il verificatore forniva le coordinate del punto in cui valutare il polinomio e il dimostratore rispondeva con la valutazione corretta. In alcune situazioni tuttavia, può risultare vantaggioso utilizzare le cosiddette NIZKP, ovvero le Non-Interactive Zero-Knowledge proof, in cui il dimostratore trasmette al verificatore una prova contenente tutte le informazioni necessarie per la verifica, senza richiedere ulteriori interazioni tra le parti.

Questa metodologia presenta numerosi vantaggi sia in termini di prestazioni, poiché consente di costruire le prove più velocemente senza dover attendere la risposta e il tempo di comunicazione, sia in termini di sicurezza, in quanto l'assenza di uno scambio di messaggi elimina il rischio di intercettazioni da parte di individui malintenzionati. Inoltre, l'utilizzo di prove NIZKP potrebbe risultare obbligato in quei contesti applicativi in cui la comunicazione in tempo reale non è possibile. L'adozione di questo tipo di prove comporta però un aumento della complessità, poiché, essendo privi di interazione, tutto il lavoro di generazione e preparazione alla verifica viene svolto dal dimostratore e affinché il dimostratore non sia arbitrariamente libero di agire, generando prove scorrette, è necessario vincolarlo al rispetto delle regole.

A tal fine, si utilizza una tecnica nota come "trusted set-up" che consente di generare una Common Reference String (CRS), ovvero un dato pubblico conosciuto sia dal dimostratore che dal verificatore usato per aggiungere casualità all'interno della generazione della prova. Sempre riferendoci ai due esempi precedenti, la CRS ottenuta tramite un trusted set-up consentirebbe di rendere le scelte di Victor nella caverna il più casuali possibile, impedendo ad Peggy di individuare dei pattern o a entrambi di collaborare per ingannare un terzo osservatore e nel caso dei polinomi, invece, consentirebbe di rendere aleatoria la scelta del punto in cui valutare il polinomio.

La procedura di costruzione della CRS rappresenta un passaggio critico per la robustezza del protocollo e dipende fortemente dal tipo di cerimonia di trusted set-up scelta.

Modello di affidabilità

Una cerimonia di trusted set-up è una procedura che viene eseguita una sola volta per generare un CRS che poi potrà essere utilizzata ogni volta che viene eseguito il protocollo. Il termine "trusted" deriva dal fatto che una o più persone devono partecipare alla cerimonia in modo "fidato" contribuendo alla creazione della CRS con dei segreti anche chiamati "toxic waste" che non appena inseriti nella procedura dovranno essere eliminati.

Una volta completata l'elaborazione e dopo aver eliminato i segreti, il risultato dell'elaborazione (la CRS) diventa irreversibile e non può essere riprodotta volontariamente, il che garantisce la sicurezza del protocollo.

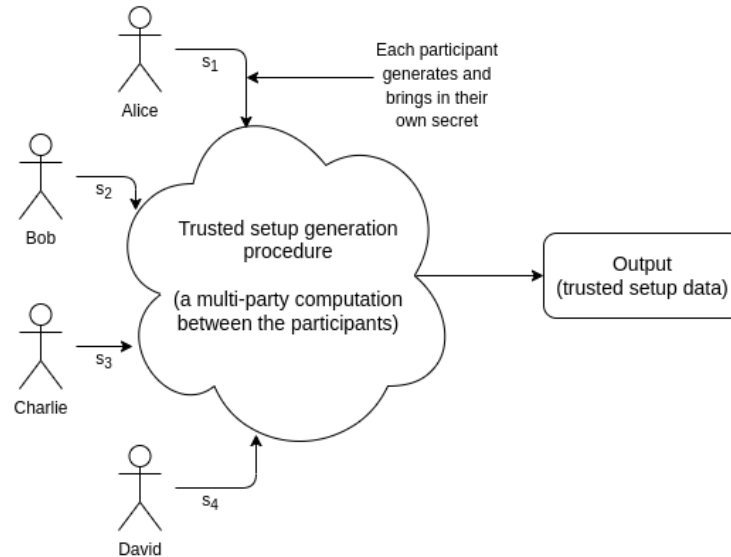


Figura 1.12: immagine generica di una cerimonia di trusted set-up. tratta da [9]

Se le parti coinvolte non si comportano in modo leale e conservano o pubblicano i loro segreti, la validità della cerimonia dipenderà dal modello di affidabilità utilizzato dall'algoritmo di trusted set-up. Infatti poiché i protocolli operano in diversi domini applicativi, non tutti utilizzano lo stesso modello di affidabilità.

Una trattazione completa dei vari modelli di affidabilità esula dai miei scopi, tuttavia, riducendo la classificazione a due sole proprietà degli algoritmi, è possibile descrivere brevemente alcune tipologie utili per la trattazione successiva.

Le due proprietà su cui si basa la classificazione sono il numero di parti fidate che partecipano alla cerimonia e il numero di parti che devono comportarsi “lealmente” per garantire la segretezza della CRS.

In base a queste proprietà, si possono individuare tre gruppi di interesse (non sono gli unici):

- **1 - 1:** Questo modello è simile a quello utilizzato nei servizi centralizzati, in cui ci si affida a un singolo individuo fidato per la gestione dei dati.
- **N/2 - 1:** La maggior parte delle blockchain utilizza questo modello, in cui il processo viene considerato valido se la maggioranza dei partecipanti rimane onesta.
- **1 - N:** In questo modello, è sufficiente che almeno una delle parti rimanga onesta durante la cerimonia per garantire la segretezza della CRS.

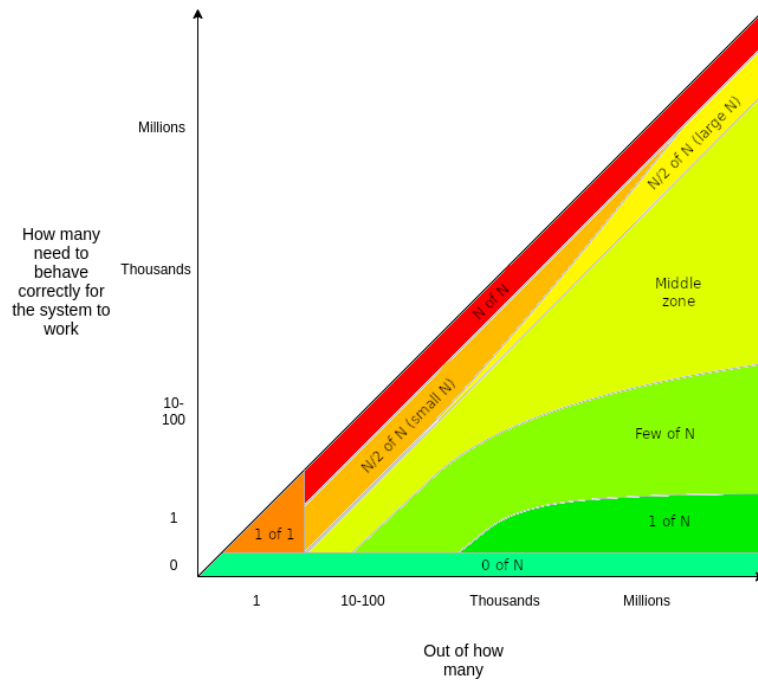


Figura 1.13: immagine modelli di di affidabilità, tratta da [10]

MPC (multi-party computation)

La tecnologia MPC (multi-party computation), anche se non è stata ancora esplicitamente menzionata, è alla base dei trusted set-up. Infatti per generare una CRS sicura e non riproducibile, è necessario coinvolgere molte parti e garantire che nessuno possa ricavare informazioni sui segreti dei partecipanti o sulla CRS stessa. Per questo motivo la procedura non si limita a una semplice combinazione dei segreti, ma può essere vista come una "black box" che applica elaborazioni ai segreti in input e restituisce la CRS in output.

Ogni algoritmo di MPC deve soddisfare due proprietà fondamentali:

1. Nel caso in cui uno o più partecipanti disonesti decidano di rivelare il loro segreto, il protocollo MPC deve impedire loro di obbligare i partecipanti onesti a rivelare le loro informazioni riservate o influenzare il risultato finale.
2. Nessuno dei partecipanti deve essere in grado di dedurre i segreti degli altri partecipanti dagli elaborati del protocollo. In altre parole, il calcolo effettuato dall'algoritmo non deve fornire alcun indizio sui segreti che hanno portato al risultato.

Groth16

Groth16 è un protocollo Zero-knowledge proof proposto da Jens Groth nell'articolo "On the Size of Pairing-based Non-interactive Arguments" [11] pubblicato nel 2016, questo protocollo è diventato molto diffuso grazie alla sua grande efficienza dal punto di vista computazionale, che permette di creare zk-SNARK estremamente

performanti sia in termini di tempo che di memoria. Tale tecnologia è alla base di progetti come Z-cash⁴.

Il trusted set-up su cui si basa Groth16 richiede due fasi distinte:

1. Nella prima fase si applica una procedura di trusted set-up chiamata “power of tau” che consiste in una algoritmo MPC basato sul modello di affidabilità 1-N che utilizzando le curve ellittiche permette di generare una CRS. Il processo viene chiamato powers of tau o Pot perchè durante le sue fasi vengono usate le potenze di un numero τ generalmente il 2 assieme ai contributi dei partecipanti per generare punti casuali e ottenere una CRS. il numero N di partecipanti per una cerimonia di tipo power of tau può essere dell'ordine del migliaio di partecipanti rendendo così la cerimonia molto sicura, in quanto basta che almeno uno di essi mantenga il segreto per far sì che la CRS rimanga valida. Questo procedimento deve essere svolto una volta sola e deve essere combinato con il processo della fase successiva.

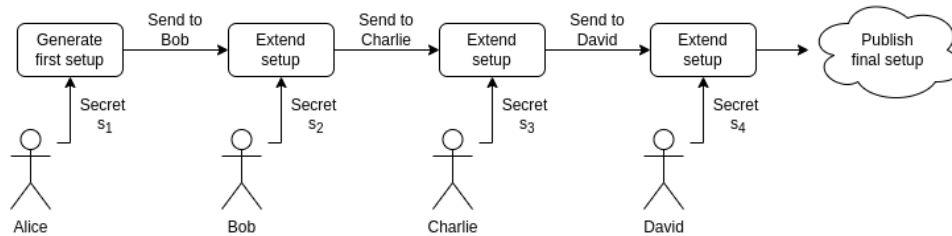


Figura 1.14: immagine generica di una di power of tau. tratta da [9]

2. Nella seconda fase invece viene elaborato un trusted set-up dipendente dalla computazione che si vuole provare (o meglio dipendente dal circuito). Quindi questa fase deve essere riprodotta dal dimostratore ogni volta che la dimostrazione cambia. Non entrerei nei dettagli implementativi, ma in questa fase viene utilizzata l'euristica di Fiat-Shamir, che permette di scegliere il punto in cui valutare il polinomio, che descrive la computazione, senza che il dimostratore possa interferire. Il punto viene scelto sulla base dei calcoli fatti per ottenere il polinomio stesso. È intuitivo comprendere che se il dimostratore volesse falsificare la prova, non potrebbe farlo perché per scegliere arbitrariamente un polinomio per soddisfare un determinato vincolo, dovrebbe conoscere il valore di s ma essendo s derivato dal polinomio stesso questo non è possibile.

Indubbiamente il fatto che la robustezza della tecnologia zk-SNARK sia subordinata a una procedura così elaborata è uno svantaggio, infatti esistono, protocolli di Zero-knowledge proof che non necessitano di una fase di trust set-up iniziale. Bulletproof e le STARK (Scalable Transparent Arguments of Knowledge), ad esempio, non richiedono alcuna configurazione di questo tipo, ciò nonostante, le tecnologie zk-SNARK basate su Groth16 risultano essere più performanti in termini di efficienza il che le rende molto più diffuse delle altre tecnologie.

⁴<https://z.cash/>

Trusted setup		
zk-SNARKs		
Prover	Verifier	Size
2.3s	10ms	288B
Very fast	Fastest	Smallest

Bulletproofs		
Prover	Verifier	Size
30s	1100ms	1,3KB
Slowest	Slowest	Middle

zk-STARKs		
Prover	Verifier	Size
1.6s	16ms	>40KB
Fastest	Very fast	Big

Figura 1.15: immagine prestazioni di tecnologie NIZKP a confronto. tratta da [12]

Bibliografia

- [1] Cloud Armor Emil Kiner Senior Product Manager. *Google blocked largest Layer 7 DDoS attack*. URL: <https://cloud.google.com/blog/products/identity-security/how-google-cloud-blocked-largest-layer-7-ddos-attack-at-46-million-rps>.
- [2] Eli Ben-Sasson et al. «Succinct Non-Interactive Zero Knowledge for a von Neumann Architecture». In: *Proceedings of the 23rd USENIX Conference on Security Symposium*. SEC'14. San Diego, CA: USENIX Association, 2014, 781–796. ISBN: 9781931971157.
- [3] Vitalik Buterin. «An approximate introduction to how zk-SNARKs are possible». In: (). URL: <https://vitalik.ca/general/2021/01/26/snarks.html>.
- [4] S Goldwasser, S Micali e C Rackoff. «The Knowledge Complexity of Interactive Proof-Systems». In: *Proceedings of the Seventeenth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*. STOC '85. Providence, Rhode Island, USA: Association for Computing Machinery, 1985, 291–304. ISBN: 0897911512. DOI: 10.1145/22145.22178. URL: <https://doi.org/10.1145/22145.22178>.
- [5] *Interactive proof system*. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Interactive_proof_system.
- [6] Jean-Jacques Quisquater et al. «How to Explain Zero-Knowledge Protocols to Your Children». In: *Advances in Cryptology — CRYPTO' 89 Proceedings*. A cura di Gilles Brassard. New York, NY: Springer New York, 1990, pp. 628–631. ISBN: 978-0-387-34805-6.
- [7] dtubbenhauer. «Slide on Schwartz-Zippel Lemma». In: (). URL: <https://www.dtubbenhauer.com/slides/my-favorite-theorems/23-schwartz-zippel.pdf>.
- [8] Ariel Gabizon. «Explaining SNARKs». In: (). URL: <https://electriccoin.co/blog/snark-explain/>.
- [9] Vitalik Buterin. «How do trusted setups work?» In: (). URL: <https://vitalik.ca/general/2022/03/14/trustedsetup.html>.
- [10] Vitalik Buterin. «trusted models». In: (). URL: <https://vitalik.ca/general/2020/08/20/trust.html>.
- [11] Jens Groth. «On the Size of Pairing-Based Non-interactive Arguments». In: *Advances in Cryptology – EUROCRYPT 2016*. A cura di Marc Fischlin e Jean-Sébastien Coron. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2016, pp. 305–326. ISBN: 978-3-662-49896-5.

- [12] *Interactive proof system*. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Non-interactive_zero-knowledge_proof.