Devoir surveillé 10 - 30/04/24

Exercice 1 : (Questions indépendantes)

1. Démontrer qu'une matrice symétrique définie positive est inversible.
2. Déterminer toutes les matrices de $\mathcal{O}_2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.
3. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$
   (a) Soit $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, on pose $B = P^{-1}AP$, démontrer que $\|A\| = \|B\|$ en notant $\|.\|$ la norme canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (b) En déduire que la somme des carrés des valeurs propres de A est égale à la somme des carrés de ses coefficients.

Exercice 2 : Soit $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + M^T = I_n$

1. Démontrer que $X^4 - 2X^2 + X$ est annulateur de M.
2. Montrer que M est diagonalisable et déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $Sp_{\mathbb{R}}(M) \subset \{1, a, b\}$.
3. Montrer que $M - I_n$ est inversible.
4. Montrer que M est symétrique.
5. Réciproquement, démontrer que toute matrice A symétrique réelle telle que $Sp(A) \subset \{a, b\}$ est inversibles et vérifie $A^2 + A^T = I_n$.

Exercice 3 : (Questions indépendantes)

1. Montrer que $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est fermé.
2. Montrer que $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est convexe.
3. Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$,
   (a) Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.
   (b) Si $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ vérifie $A = B^2$, démontrer que pour tout $\lambda \in Sp(A), Ker(B - \sqrt{\lambda} I_n) = Ker(A - \lambda I_n)$.
   (c) En déduire qu'il existe une unique $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.