Interro 2

Ex 2

1) On note $f : x \mapsto \ln(\cos(\frac{1}{x}))$ qui est continue et négative sur $[\pi, +\infty[$

Et $f(x) = \ln\left(1 - \frac{1}{2x^2} \underset{x\to+\infty}{+o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$

$= -\frac{1}{2x^2} \underset{x\to+\infty}{+o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$

$\underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2x^2}$

Par comparaison à une intégrale de Riemann, $\int_{\pi}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge

2) On note $g : x \mapsto \frac{1}{\sin(x)}$ qui est continue et positive sur $]0,1]$

Et $g(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x}$

Donc par comparaison à une intégrale de Riemann, $\int_0^1 g(x)\,dx$ diverge.

3) On note $h : x \mapsto x\ln(x)$ qui est continue sur $]0,+\infty[$

- h est négative sur $]0,1[$ et $h(x) \underset{x\to 0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

car $\sqrt{x}\, x\ln(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées.

Par comparaison à une intégrale de Riemann, $\int_0^1 h(x)\,dx$ converge

- h est positive sur $[1,+\infty[$ et $\frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{=} o(h(x))$

car $\frac{1}{x^2\ln(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Par comparaison à une intégrale de Riemann, $\int_1^{+\infty} h(x)\,dx$ diverge

OU soit $A > 1$, $\int_1^A x\ln(x)\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\ln(x)\right]_1^A - \int_1^A \frac{1}{2}x^2 \times \frac{1}{x}$

$= \left[\frac{1}{2}x^2\left(\ln(x) - \frac{1}{2}\right)\right]_1^A \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

donc $\int_1^{+\infty} x\ln(x)\,dx$ diverge.

- Par relation de Chasles, $\int_0^{+\infty} h(x)\,dx$ diverge