Devoir maison 1

Exercice 1 (Algèbre) :

Notations :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

On note $\mathbb{D}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, x_1 \geq x_2 \geq .. \geq x_n \right\}$

Si $x \in \mathbb{R}^n$, on note x^* le vecteur des coordonnées de x triées dans l'ordre décroissant

On définit la relation $\preceq$: soient $x, y \in \mathbb{R}^n, y \preceq x$ si $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i^* = \sum_{i=1}^{n} x_i^*$ et pour tout $k \in [|1, n-1|]$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} y_i^* \leq \sum_{i=1}^{k} x_i^*$ (par exemple, si $x = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ alors $x^* = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix}, y^* = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $y \preceq x$)

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, M est doublement stochastique si tous ses coefficients sont positifs et pour tout $i \in [|1, n|]$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} M_{i,k} = \sum_{k=1}^{n} M_{k,i} = 1$

Une relation R sur un ensemble E est d'ordre si elle est réflexive ($\forall x \in E, xRx$), antisymétrique ($\forall x, y \in E, xRy$ et $yRX \Rightarrow x = y$) et transitive ($\forall x, y, z \in E, xRy$ et $yRz \Rightarrow xRz$)

On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des bijections de $[|1, n|]$ dans $[|1, n|]$. A tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on associe la matrice de permutation $P_\sigma = (p_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $p_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \sigma(j) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

1. (a) Vérifier que $\preceq$ n'est pas une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^n$ mais en est une sur $\mathbb{D}^n$.
   (b) Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$, montrer que $y \preceq x$ si et seulement si
   $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} y_{n-i}^* = \sum_{i=0}^{n-1} x_{n-i}^*$ et pour tout $k \in [|0, n-2|]$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} y_{n-i}^* \geq \sum_{i=0}^{k} x_{n-i}^*$.
   (c) On note $e = \begin{pmatrix} 1 \\ . \\ . \\ 1 \end{pmatrix}$. Montrer que si $x \in \mathbb{R}^n$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = n$ alors $e \preceq x$.
2. (a) Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que P est doublement stochastique si et seulement si tous ses coefficients sont positifs, $Pe = e$ et $e^T P = e^T$.
   (b) Soient P_1 et P_2 deux matrices doublement stochastiques, montrer que $P_1 P_2$ est aussi doublement stochastique.
   (c) Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que si $xP \preceq x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ alors P est doublement stochastique *(on pourra étudier pour $x = e_j$ et $x = e$ avec $(e_1, ..., e_n)$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et utiliser la question 1).*
3. (a) Montrer que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice de permutation et exprimer la bijection associée.
   (b) Démontrer que toute matrice de permutation est doublement stochastique.
   (c) Soit $x \in \mathbb{R}^n$, démontrer qu'il existe $\sigma \in \mathcal{S}_n$ telle que $x^* = P_\sigma x$.
   (d) Démontre que pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n, P_\sigma^{-1} = P_{\sigma^{-1}}$.
   (e) Soient P une matrice doublement stochastique et $x, y \in \mathbb{R}^n$ tels que $y = Px$. Démontrer qu'il existe Q une matrice doublement stochastique telle que $y^* = Qx^*$ et que $y \preceq x$.

Exercice 2 (Analyse) : On définit $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^{2(x-E(x))}}$ avec E la fonction partie entière.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, démontrer que $\displaystyle\int_k^{k+1} f(x)dx \geq \ln(1+\frac{1}{2k})$.
2. En déduire la nature de $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$