Interro 1

1) $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln(1-\frac{1}{n})} = e^{n(-\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n}))} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-1} \neq 0$

La série diverge grossièrement

2) On pose $x_n = \frac{1}{n\ln(n)}$ alors $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et (x_n) est décroissante

Par le thm des séries alternées, la série converge.

3) $u_n = \frac{n!}{n^n}$ est une suite positive

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{n!}$$

$$= \frac{n+1}{n+1} \times \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$= e^{n\ln(\frac{n}{n+1})}$$

$$= e^{n\ln(1-\frac{1}{n+1})}$$

$$= e^{n(-\frac{1}{n+1}+o(\frac{1}{n+1}))}$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-1} < 1$$

Par le critère de d'Alembert, la série converge

4) $u_n = \sqrt{1+\frac{(-1)^n}{n}} - 1 = 1 + \frac{1}{2}\frac{(-1)^n}{n} + \frac{\frac{1}{2}\times(-\frac{1}{2})}{2}\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\frac{(-1)^n}{n}}_{a_n} \underbrace{- \frac{1}{8}\times\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{b_n}$$

Par le thm des séries alternées, $\sum a_n$ converge car $\left(\frac{1}{n}\right)$ est une suite décroissante qui converge vers 0

Et $b_n \sim \frac{1}{n^2}\times\frac{1}{8}$ (est de signe constant) donc par comparaison, $\sum b_n$ converge.

Par somme, la série converge.