Devoir surveillé 9 - 02/04/24

Exercice 1 : Soit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique.
On note $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$

1. Déterminer une base orthonormée de $A^\perp$.
2. Déterminer $d(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A)$

Exercice 2 : On note $E = \mathbb{R}_2[X]$.

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n!$
2. Démontrer que l'on définit un produit scalaire sur E en posant $< P, Q >= \displaystyle\int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x} dx$.
   On note $\|.\|$ la norme associée.
3. Déterminer le projeté orthogonal de X^2 sur $F = \mathbb{R}_1[X]$ noté $p_F(X^2)$.
4. Justifier que $\|X^2 - p_F(X^2)\|^2 = \|X^2\|^2 - \|p_F(X^2)\|^2$.
5. Calculer $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} (x^2 - ax - b)^2 e^{-x} dx$.

Exercice 3 : Soit $(E, (|))$ un espace préhilbertien réel.
Un endomorphisme f de E est une <u>similitude vectorielle</u> s'il existe $u \in \mathcal{O}(E)$ et $k \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $f = ku$

1. Soit f une similitude vectorielle, démontrer que pour tous $x, y \in E, (x|y) = 0 \Rightarrow (f(x)|f(y)) = 0$
2. On suppose que f est un endomorphisme non nul tel que pour tous $x, y \in E, (x|y) = 0 \Rightarrow (f(x)|f(y)) = 0$
   (a) Montrer que si $a, b \in E$ sont unitaires alors $a + b$ et $a - b$ sont orthogonaux.
   (b) En déduire que si $x, y \in E \setminus \{0\}$ alors $\dfrac{\|f(x)\|}{\|x\|} = \dfrac{\|f(y)\|}{\|y\|}$.
   (c) Montrer que f est une similitude.