

Ex 1.

1) a) $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ donc par le théorème spectral, il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} P^T$ avec $\text{Sp}(M) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$.

$M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ donc $\forall i \in [1, n] - \lambda_i \geq 0$

On pose $B = P \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} P^T$ alors $B^T B = B^2 = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} P^T = M$.

b) $N = \lambda u u^T - M$. $N^T = \lambda u u^T - M^T = \lambda u u^T - M = N$ (propriétés de la transposée)

$\text{Sp}(M) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ avec $\lambda_i \leq 0$ pour tout $i \in [2, n]$.

Par le théorème spectral, soit (u, e_2, \dots, e_n) une base orthonormée de \mathbb{R}^n formée de vecteurs propres de M (associés à $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$).

$$\forall i \in [2, n], N e_i = \lambda u u^T e_i - M e_i = -M e_i = -\lambda_i e_i$$

car $e_i \in \text{Vect}(u)^\perp$ donc $u^T e_i = (u | e_i) = 0$.

$$\text{Et } N u = \lambda \frac{u u^T u}{\|u\|^2} - M u = \lambda u - \lambda u = 0$$

$$\text{Donc } \text{Sp}(N) = \{0, -\lambda_2, \dots, -\lambda_n\} \subset \mathbb{R}^+$$

Ainsi $N \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Par la question 1a, il existe $B \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $N = B^T B$.

2) a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ car $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ les 2 colonnes forment une base orthonormée de \mathbb{R}^2 .

$$b) x_M(x) = \begin{vmatrix} x - \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & x - \frac{1}{4} \end{vmatrix} = (x - \frac{1}{4})^2 - (\frac{1}{4})^2 = x^2 - \frac{1}{2}x$$

$$\text{Sp}(M) = \{0, \frac{1}{2}\}.$$

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = y \quad \text{et } M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = -y.$$

Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à M , $\pi = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f)$ avec \mathcal{B} la base canonique de \mathbb{R}^2 .

$\mathcal{B} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est une base orthonormée de \mathbb{R}^2 formée de vecteurs propres de f .

$$M = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(\text{Id}) \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f) \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(\text{Id}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

On pose $B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

3) a) ~~$\frac{1}{\sqrt{n}} H_n \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ donc par produit~~, $S^T = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} H_n \right)^T D^T \left(\frac{1}{\sqrt{n}} H_n \right)$
 $= S$ car $D^T = D$

$\frac{1}{\sqrt{n}} H_n \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ donc $\left(\frac{1}{\sqrt{n}} H_n \right)^T = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} H_n \right)^T$

Set D sont semblables donc $\text{Sp}(S) = \text{Sp}(D) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$.

$\forall i, j \in [1, n]$, $S_{ij} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} H_n \right)^T_{ik} \sum_{\ell=1}^n D_{k\ell} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} H_n \right)_{\ell j}$
 $= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n (H_n)_{ki} D_{k\ell} (H_n)_{\ell j} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (H_n)_{ki} \lambda_k (H_n)_{kj}$

$D_{k\ell} = 0$ si $k \neq \ell$

$= \frac{1}{n} \underbrace{(H_n)_{1i}}_1 \underbrace{(H_n)_{1j}}_1 \lambda_1 + \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n (H_n)_{ki} (H_n)_{kj} \lambda_k$

$\forall k \in [2, n]$, $\lambda_k \leq 0$, $(H_n)_{ki} = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases} \leq 1$, $(H_n)_{kj} \leq 1$

Donc $S_{ij} \geq \frac{1}{n} \lambda_1 + \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \lambda_k = \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \lambda_k = 0$

Et $S_{ii} = \frac{1}{n} \lambda_1 + \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \underbrace{(H_n)_{ki}^2}_{=1} \lambda_k = \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \lambda_k = 0$

3) b) i) $\frac{1}{\sqrt{n}} H_n e = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 \\ (L_2 | e) \\ \vdots \\ (L_n | e) \end{pmatrix}$

Or $(L_i | e) = (L_i | L_1) = 0$ si $i \neq 1$.

ii) λ_1 est valeur propre simple (puisque la seule valeur propre positive)

Et $Se = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} H_n \right)^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{n} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} H_n \right)^T \begin{pmatrix} \lambda_1 \sqrt{n} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = L_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = e$

c) $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\text{Sp}(S) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ avec $\lambda_1 > 0 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ et $E_{\lambda_1}(S) = \text{Vect}(e)$ (1/11)

donc par la question 1b, il existe $B \in \text{JO}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$S = \lambda_1 \frac{e}{\|e\|} \frac{e^T}{\|e\|} - B^T B. \quad \text{on, } \|e\|^2 = n.$$

$$\begin{aligned} \text{Soit } X \in \mathbb{R}^n, \quad X^T A X &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} X^T P e e^T P X - X^T P B^T B P X \right) \\ &= \frac{1}{2} (B P X)^T (B P X) \quad \text{car } P e = e - \frac{1}{n} e \frac{e^T e}{\|e\|^2} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{De plus, } P^T = I_n - \frac{1}{n} (e^T)^T e^T = P \quad \text{et} \quad S^T = S$$

$$\text{donc } A^T = -\frac{1}{2} P^T S^T P^T = -\frac{1}{2} P S P = A \quad \text{donc } A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}).$$

$$\begin{aligned} d) \quad K(M) &= \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} (m_{11} \quad m_{22} \quad \dots \quad m_{nn}) + \begin{pmatrix} m_{11} \\ \vdots \\ m_{nn} \end{pmatrix} (1 \quad \dots \quad 1) - 2M \\ &= \begin{pmatrix} m_{11} & & & \\ m_{11} & m_{nn} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ m_{11} & & & m_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_{11} & & & \\ & m_{11} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ & & & m_{nn} \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & & \\ m_{21} & & & \\ & & \ddots & \\ & & & \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \forall i, j \in [1, n], \quad (K(M))_{ij} = m_{ii} + m_{jj} - 2m_{ij}$$

$$\text{Par la question 1a, } A = B^T B \quad \text{avec } B \in \text{JO}_n(\mathbb{R}) \quad \text{donc } a_{ij} = \sum_{k=1}^n B_{ki} B_{kj} = (C_i | C_j)$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } (K(A))_{ij} &= \|C_i\|^2 + \|C_j\|^2 - 2(C_i | C_j) \\ &= \|C_i - C_j\|^2. \end{aligned}$$

4) $H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ est une matrice d'Hadamard (ou 2)

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Correspond aux hypothèses de la question 3.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{par question 1b, } B = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On note C_1 et C_2 les colonnes de B .

$$(K(A))_{1,1} = 0 = \|C_1 - C_1\|^2$$

$$(K(A))_{1,2} = 1 = \|C_1 - C_2\|^2$$

$$(K(A))_{2,2} = 0 = \|C_2 - C_2\|^2$$

$$(K(A))_{2,1} = 1 = \|C_2 - C_1\|^2.$$

Et on retrouve bien $S = K(A)$.

Ex 2.

$$1) V = \mathbb{R}^2 \quad \phi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=a \\ x+2y=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=b-a \\ x=a-b+a \end{cases}$$

Soit $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ possède un unique antécédent par ϕ : $\begin{pmatrix} 2a-b \\ b-a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

2) $f = g \circ \phi$ donc par la dérivation en chaîne, pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \partial_1 f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= \partial_1 x_1\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \partial_1 g\left(\frac{x+y}{x+2y}\right) + \partial_1 x_2\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \partial_2 g\left(\frac{x+y}{x+2y}\right) \\ \partial_2 f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= \partial_2 x_1\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \partial_1 g\left(\frac{x+y}{x+2y}\right) + \partial_2 x_2\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \partial_2 g\left(\frac{x+y}{x+2y}\right) \end{aligned}$$

en notant $x_1\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = x+y$ et $x_2\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = x+2y$ fonctions de classe \mathcal{C}^1 .

$$\text{Donc } 2\partial_1 f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) - \partial_2 f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \partial_1 g\left(\frac{x+y}{x+2y}\right)$$

Par bijectivité de ϕ , pour tout $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $\partial_1 g\left(\frac{a}{b}\right) = 0$ par (*).

$$3) \bullet \partial_1 g\left(\frac{a}{b}\right) = \phi_1'(a) \text{ avec } \phi_1: a \mapsto g\left(\frac{a}{b}\right) \text{ donc } \forall t \in \mathbb{R},$$

$$\int_0^t \partial_1 g\left(\frac{a}{b}\right) da = \phi_1(t) - \phi_1(0) = 0 \quad \text{donc } \phi_1 \text{ est constante}$$

$\forall \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $g\left(\frac{a}{b}\right) = h(b)$ et $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = g\left(\frac{a}{b}\right) = h(x+2y) \quad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.
 g est de classe \mathcal{C}^1 donc h est de classe \mathcal{C}^1 .

• Réciproquement, si $f: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto h(x+2y)$ avec $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$\text{alors } \partial_1 f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = 1 \times h'(x+2y) \text{ et } \partial_2 f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = 2 \times h'(x+2y)$$

$$\text{car } f = h \circ x_1 \text{ avec } x_1\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = x+2y \text{ donc } \partial_1 x_1\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = 1, \partial_2 x_1\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = 2$$

$$\text{et } \partial_1 h\left(\frac{a}{b}\right) = h'\left(\frac{a}{b}\right) = \partial_2 h\left(\frac{a}{b}\right).$$

$$\text{Donc } 2\partial_1 f - \partial_2 f = 0.$$

Ex 3.

1) $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x^3 + 2xxy + \sin(y) + c$$

avec $c \in \mathbb{R}$.

F est de classe \mathcal{C}^1 par opérations de fonctions usuelles donc

par le théorème fondamental, F est différentiable sur \mathbb{R}^2 et $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} dF_{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} &= \partial_1 F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} h + \partial_2 F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} k \\ &= (3x^2 + 2y)h + (2x + \cos(y))k \\ &= f_{(x,y)}(h, k). \end{aligned}$$

2) \mathbb{R}^2 est un ouvert convexe non vide donc

$$f_{(x,y)} = d_{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} F = 0$$

$\Leftrightarrow F$ est constante.

$$\Leftrightarrow \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = c.$$