DS10

Ex 2.

1) $V = \mathbb{R}^2$. $\quad \phi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = a \\ x + 2y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = b - a \\ x = a - b + a \end{cases}$

Soit $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ possède un unique antécédent par ϕ : $\begin{pmatrix} 2a - b \\ b - a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

2) $f = g \circ \phi$ donc par la dérivation en chaîne, pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$\partial_1 f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \partial_1 x_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \partial_1 g\begin{pmatrix} x+y \\ x+2y \end{pmatrix} + \partial_1 x_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \partial_2 g\begin{pmatrix} x+y \\ x+2y \end{pmatrix}$$
$$\partial_2 f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \partial_2 x_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \partial_1 g\begin{pmatrix} x+y \\ x+2y \end{pmatrix} + \partial_2 x_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \partial_2 g\begin{pmatrix} x+y \\ x+2y \end{pmatrix}$$

en notant $x_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + y$ et $x_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + 2y$ fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

Donc $2\partial_1 f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \partial_2 f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \partial_1 g\begin{pmatrix} x+y \\ x+2y \end{pmatrix}$

Par bijectivité de ϕ, pour tout $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $\partial_1 g\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$ par $(*)$

3) • $\partial_1 g\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \phi_1'(a)$ avec $\phi_1 : a \mapsto g\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ donc $\forall t \in \mathbb{R}$,

$\int_0^t \partial_1 g\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} da = \phi_1(t) - \phi_1(0) = 0$ donc ϕ_1 est constante

$\forall \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $g\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = h(b)$ et $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = g\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = h(x+2y)$ $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

g est de classe $\mathcal{C}^1$ donc h est de classe $\mathcal{C}^1$.

• Réciproquement, si $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto h(x+2y)$ avec $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

alors $\partial_1 f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \times h'(x+2y)$ et $\partial_2 f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \times h'(x+2y)$

car $f = h \circ x_1$ avec $x_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + 2y$ donc $\partial_1 x_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$, $\partial_2 x_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2$

et $\partial_1 h\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = h'\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \partial_2 h\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Donc $2\partial_1 f - \partial_2 f = 0$.

Ex 3.

1) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto x^3 + 2xy + \sin(y) + c$

avec $c \in \mathbb{R}$.

F est de classe $\mathcal{C}^1$ par opérations de fonctions usuelles donc par le théorème fondamental, F est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$dF_{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \partial_1 F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} h + \partial_2 F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} k$$

$$= (3x^2 + 2y) h + (2x + \cos(y)) k.$$

$$= f_{(x,y)}(h, k).$$

2) $\mathbb{R}^2$ est un ouvert convexe non vide donc $f_{(x,y)} = d_{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} F = 0$

$\iff$ F est constante.

$\iff \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \ F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = c$.