



Durée : 2 h. Calculatrice interdite. Un barème indicatif est indiqué pour chaque problème. On veillera à encadrer les résultats et à justifier toute affirmation.

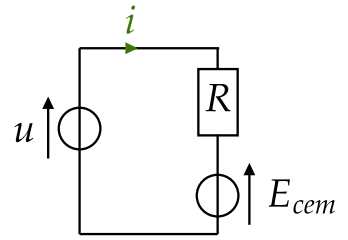
I - Problème 1 : Moteur à Courant Continu d'une perceuse

(~ 40% des pts)

On étudie le moteur à courant continu d'une perceuse, dont le champ magnétique du stator est assuré par deux aimants. La batterie de la perceuse impose une tension u aux bornes de l'induit, et un courant i le traversant.

Le moteur est soumis à un couple résistant constant $\Gamma_r = 60 \text{ N.m}$, pour lequel un essai réalisé avec $u = 20 \text{ V}$ a donné :

- Une f.c.é.m. $E_{cem} = 15 \text{ V}$
- Une vitesse de rotation $\Omega = 4000 \text{ tours/minute}$



Q1. Rappeler les expressions littérales existant entre les grandeurs électriques (E_{cem} et i) et les grandeurs mécaniques (Γ_m le couple moteur et Ω).

Q2. Faire l'application numérique de i et de la grandeur que vous avez défini en question 1.

Q3. Déterminer la valeur de R ; résistance électrique de l'induit de cette MCC.

On considère pour les questions 4 et 5 un fonctionnement en régime stationnaire du moteur à courant continu, s'opposant à un couple résistant de la forme $\Gamma_r = a\Omega + b$ avec $a = 0,01 \text{ N.m.rad}^{-1}.\text{s}$ et $b = 5 \text{ N.m}$.

Q4. Représenter graphiquement le point de fonctionnement du moteur sur un graphique ayant pour abscisse Ω et pour ordonnée un couple Γ , en précisant les équations des courbes tracées. On justifiera rigoureusement la démarche suivie.

Q5. Calculer en régime stationnaire le rendement moyen de ce moteur.

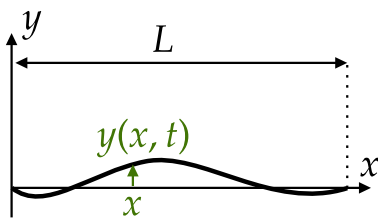
Le moment d'inertie du rotor selon l'axe de rotation vaut $J \simeq 3 \times 10^{-7} \text{ kg.m}^2$.

Q6. En partant d'un démarrage à vitesse de rotation nulle, déterminer la durée nécessaire pour que le moteur atteigne 95% de sa vitesse de rotation en régime stationnaire.

II - Problème 2 : Pour un piano harmonieux

(~ 60% des pts)

Un piano fonctionne selon un principe simple : chaque touche correspond à une corde de longueur L donnée, tendue avec une tension T_0 et fixée à ses deux extrémités en $x = 0$ et $x = L$. Le son que produit une corde provient des vibrations de l'air produites par le déplacement $y(x, t)$ d'une corde par rapport à sa position d'équilibre en $y = 0$ (**A**). Pour obtenir ce mouvement $y(x, t)$, un marteau vient frapper la corde (**B**). Puisque les notes les plus graves sont à gauche du clavier, il est normal que les cordes à gauche soient les plus longues, expliquant la forme caractéristique d'un piano (**C**). Mais en ouvrant un piano on observe que, si les marteaux sont tous bien alignés (**Da**), les points d'attache suivent une étrange courbure (**Db**) : nous allons expliquer cette géométrie, loin d'être anodine.



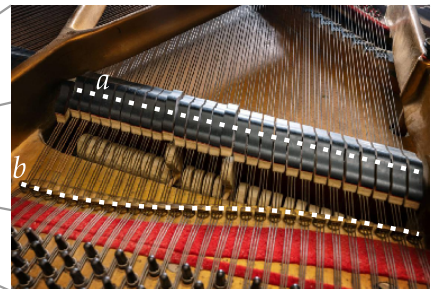
(A)



(B)



(C)



(D)

On note μ la masse linéique de la corde, tendue avec la tension T_0 . On fera l'hypothèse que les déformations sont petites, ce qui entraîne : $\left| \frac{\partial y}{\partial x} \right| \ll 1$, et que l'effet du poids sur la corde est négligeable.



On considère un élément de corde de longueur $d\ell$ situé entre les plans d'abscisses x et $x + dx$.

Q7. Montrer que : $d\ell \simeq dx$ au premier ordre en $\left| \frac{\partial y}{\partial x} \right|$.

Q8. Réaliser un schéma des différentes forces s'appliquant à cet élément de corde, en explicitant le sens physique de chaque vecteur force tracé, et l'angle formé par ce vecteur par rapport à l'axe $(O\vec{e}_x)$.

Q9. Démontrer que le déplacement $y(x, t)$ de la corde vérifie l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Q10. Déterminer l'unité SI de c posé dans l'équation différentielle précédente, puis faire l'application numérique de c pour une corde cylindrique de diamètre $d = 1\text{mm}$, faite d'un alliage de masse volumique $\rho = 8000\text{ kg.m}^{-3}$, tendue avec une tension $T_0 = 800\text{ N}$.

Q11. Définir ce qu'est une onde stationnaire unidimensionnelle.

Q12. Montrer que les solutions en ondes stationnaire physiquement acceptables ici sont de la forme :

$$y(x, t) = y_0 \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \psi)$$

Enfin, les conditions limites imposent ici $y(0, t) = 0$ et $y(L, t) = 0$.

Q13. En déduire les valeurs des fréquences propre de la corde.

On admet que la solution générale de l'équation d'onde qui correspond aux conditions limites imposées est une superposition de modes propres, que l'on écrit sous la forme :

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Les conditions initiales sont données, avec $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ des fonctions définies sur $[0, L]$ par la forme de la corde : $y(x, 0) = \alpha(x)$, et sa vitesse : $\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = \beta(x)$. On notera $\tilde{\alpha}(x)$ et $\tilde{\beta}(x)$ les fonctions définies sur \mathbb{R} entier, impaires, périodiques de période $2L$ et coïncidant avec α et β sur $[0, L]$.

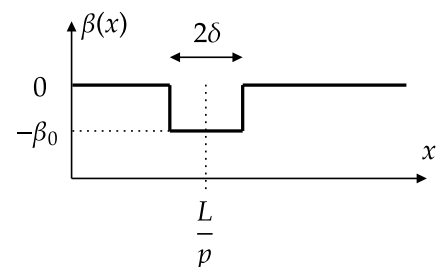
Si $f(x)$ est une fonction à valeurs réelles ou complexes, périodique de période spatiale λ , $f(x)$ se décompose en série de Fourier comme :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \cos\left(2\pi n \frac{x}{\lambda}\right) + v_n \sin\left(2\pi n \frac{x}{\lambda}\right) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} u_n = \frac{2}{\lambda} \int_{x_0}^{x_0+\lambda} f(x) \cos\left(2\pi n \frac{x}{\lambda}\right) dx & \text{avec } n \in \mathbb{N} \\ v_n = \frac{2}{\lambda} \int_{x_0}^{x_0+\lambda} f(x) \sin\left(2\pi n \frac{x}{\lambda}\right) dx & \text{avec } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Q14. Montrer que les coefficients a_n et b_n s'expriment à partir de la décomposition en série de Fourier des fonctions $\tilde{\alpha}(x)$ et $\tilde{\beta}(x)$.

Un piano est un instrument dit "à cordes frappées" : à l'instant $t = 0$, la corde est dans sa position au repos, mais le marteau a imposé une vitesse initiale $-\beta_0$ à une portion de longueur 2δ de la corde, autour d'un point d'abscisse $\frac{L}{p}$. On a typiquement $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $\delta \simeq 1\text{ cm}$.

Q15. Démontrer que l'harmonique de rang p a une amplitude nulle, et représenter schématiquement le spectre de la note produite.



On dit qu'un accord (deux notes ou plus jouées en même temps) est harmonieux lorsque les harmoniques de la première note coïncident avec la fréquence fondamentale d'une autre note de l'accord.

Note	do2	do3	sol3	do4	mi4	sol4	si4	do5
Fréquence fondamentale (Hz)	130.8	261.6	392.0	523.3	659	784	932	1046.5

Tab. 1 – Fréquences des notes les plus proches des harmoniques du do2

Q16. Pour la corde ayant pour fréquence fondamentale la fréquence fondamentale du do2, justifier à l'aide des données du tableau l'intérêt de placer l'impact du marteau à $\frac{L}{7}$. Proposer une explication schématique justifiant qu'un tel placement annule systématiquement la 7ème harmonique.