DS10

Ex 1.

1) a) $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ donc par le théorème spectral, il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que

$M = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} P^T$ avec $Sp(M) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$.

$M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ donc $\forall i \in [\![1, n]\!], \lambda_i \geq 0$

On pose $B = P\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} P^T$ alors $B^T B = B^2 = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} P^T$

$= M$.

b) $N = \lambda u u^T - M$. $N^T = \lambda u u^T - M^T = \lambda u u^T - M = N$ (propriétés de la transposée)

$Sp(M) = \{\lambda, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ avec $\lambda_i \leq 0$ pour tout $i \in [\![2, n]\!]$.

Par le théorème spectral, soit $(u, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de M (associés à $\lambda, \lambda_2, \dots, \lambda_n$).

$\forall i \in [\![2, n]\!]$. $N e_i = \lambda u u^T e_i - M e_i = -M e_i = -\lambda_i e_i$

car $e_i \in \text{Vect}(u)^\perp$ donc $u^T e_i = (u | e_i) = 0$.

Et $Nu = \lambda u \underbrace{u^T u}_{\substack{\|u\|^2 \\ = 1}} - Mu = \lambda u - \lambda u = 0$

Donc $Sp(N) = \{0, -\lambda_2, \dots, -\lambda_n\} \subset \mathbb{R}^+$

Ainsi $N \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Par la question 1a, il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $N = B^T B$

2) a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ car $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ les 2 colonnes forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$.

b) $\chi_M(X) = \begin{vmatrix} X - \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & X - \frac{1}{4} \end{vmatrix} = \left(X - \frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = X^2 - \frac{1}{2}X$

$Sp(M) = \{0, \frac{1}{2}\}$.

$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = y$ et $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = -y$.

Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à M, $M = \text{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(f)$ avec $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

$\mathcal{B} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \right)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ formée de vecteurs propres de f.

$$M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathrm{Id})\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(f)\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\mathrm{Id}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$$

On pose $B = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$

3) a) • ~~$\frac{1}{\sqrt{n}}H_n \in O_n(\mathbb{R})$ donc par produit~~, $S^T = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}H_n\right)^T D^T \left(\frac{1}{\sqrt{n}}H_n\right)$

$= S$ car $D^T = D$

• $\frac{1}{\sqrt{n}}H_n \in O_n(\mathbb{R})$ donc $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}H_n\right)^{-1} = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}H_n\right)^T$

S et D sont semblables donc $Sp(S) = Sp(D) = \{\lambda_1, \dots \lambda_n\}$.

• $\forall i,j \in [\![1,n]\!]$, $S_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}H_n\right)^T_{ik} \sum_{\ell=1}^{n} D_{k\ell} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}H_n\right)_{\ell j}$

$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} (H_n)_{ki} D_{k\ell} (H_n)_{\ell j} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (H_n)_{ki}\ \lambda_k\ (H_n)_{kj}$

$D_{k\ell} = 0$ si $k \neq \ell$

$= \frac{1}{n}\underset{=1}{(H_n)_{1i}}\ \underset{=1}{(H_n)_{1j}}\ \lambda_1 + \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}(H_n)_{ki}(H_n)_{kj}\lambda_k$

$\forall k \in [\![2,n]\!]$, $\lambda_k \leq 0$, $(H_n)_{k,i} = \begin{cases}1\\-1\end{cases} \leq 1$ $(H_n)_{kj} \leq 1$

Donc $S_{ij} \geq \frac{1}{n}\lambda_1 + \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\lambda_k = \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\lambda_k = 0$

Et $S_{ii} = \frac{1}{n}\lambda_1 + \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\underbrace{(H_n)^2_{ki}}_{=1}\lambda_k = \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\lambda_k = 0$

3) b) i) $\frac{1}{\sqrt{n}}H_n\, e = \frac{1}{\sqrt{n}}\begin{pmatrix}1 \dots 1\\ L_2\\ \vdots\\ L_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{n}}\begin{pmatrix}n\\ (L_2|e^T)\\ \vdots\\ (L_n|e^T)\end{pmatrix}$

Or $(L_i|e^T) = (L_i|L_1) = 0$ si $i \neq 1$.

ii) λ_1 est valeur propre simple (puisque la seule valeur propre positive)

Et $Se = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}H_n\right)^T\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{n}\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix} = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}H_n\right)^T\begin{pmatrix}\lambda_1\sqrt{n}\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix} = L_1^T = \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = e$

c) $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $Sp(S) = \{\lambda_1 \dots \lambda_n\}$ avec $\lambda_1 > 0 \geq \lambda_2 \dots \geq \lambda_n$ et $E_{\lambda_1}(S) = \mathrm{Vect}\left(\frac{e}{\|e\|}\right)$

donc par la question 1b, il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$S = \lambda_1 \frac{e}{\|e\|} \frac{e^T}{\|e\|} - B^T B. \qquad \text{or, } \|e\|^2 = n.$$

Soit $X \in \mathbb{R}^n$, $X^T A X = -\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_1}{n} X^T P e e^T P X - X^T P B^T B P X\right)$

$$= \frac{1}{2}(BPX)^T(BPX) \qquad \text{car } Pe = e - \frac{1}{n} e \underbrace{e^T e}_{=\|e\|^2 = n} = 0$$

De plus, $P^T = I_n - \frac{1}{n}(e^T)^T e^T = P$ et $S^T = S$

donc $A^T = -\frac{1}{2} P^T S^T P^T = -\frac{1}{2} PSP = A$ donc $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

d) $K(M) = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}(m_{11} \ m_{22} \ \dots \ m_{nn}) + \begin{pmatrix} m_{11} \\ \vdots \\ m_{nn} \end{pmatrix}(1 \ \dots \ 1) - 2M$

$$= \begin{pmatrix} m_{11} & & m_{nn} \\ m_{11} & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ m_{11} & & m_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_{11} & & m_{11} \\ \vdots & & \\ \vdots & & \\ m_{nn} & & m_{nn} \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \\ m_{21} & & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

Donc $\forall i, j \in [\![1, n]\!]$, $(K(M))_{i,j} = m_{ii} + m_{jj} - 2m_{ij}$

Par la question 1a, $A = B^T B$ avec $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc $a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} B_{ki} B_{kj}$
$= (C_i | C_j)$

Donc $(K(A))_{ij} = \|C_i\|^2 + \|C_j\|^2 - 2(C_i | C_j)$

$= \|C_i - C_j\|^2$.

4) $H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ est une matrice d'Hadamard (au 2) $\quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$S = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Correspond aux hypothèses de la question 3.

$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}(1 \ 1) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ par question 2b, $B = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

On note C_1 et C_2 les colonnes de B.

$(K(A))_{1,1} = 0 = \|C_1 - C_1\|^2 \qquad (K(A))_{1,2} = 1 = \|C_1 - C_2\|^2$

$(K(A))_{2,2} = 0 = \|C_2 - C_2\|^2 \qquad (K(A))_{2,1} = 1 = \|C_2 - C_1\|^2$.

Et on retrouve bien $S = K(A)$.