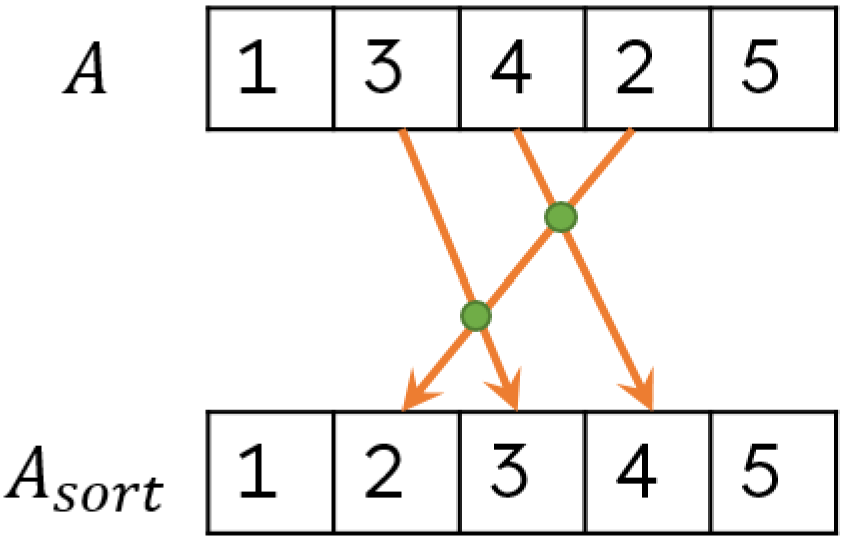
A4. Значительные инверсии

Рассмотрим механизм подсчета так называемой степени упорядоченности некоторого целочисленного массива $A = [a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n]$, заполненного уникальными значениями.

Элементы a_i и a_j массива А назовем инвертированными, если $i < j$, но $a_i > a_j$. Например, в массиве $A = [1, 3, 4, 2, 5]$ достаточно выполнить две инверсии, а именно $3 \leftrightarrow 2$ и $4 \leftrightarrow 2$ (см. количество пересечений стрелок на рисунке ниже), чтобы получить отсортированный массив $A' = [1, 2, 3, 4, 5]$.



1. Разработайте DaC-алгоритм CINV, временная сложность которого должна соответствовать $O(nlogn)$, для подсчета степени упорядоченности массива путем вычисления количества необходимых перестановок. Описание алгоритма представьте в любом удобном формате. Опишите суть шагов DIVIDE, CONQUER и COMBINE, а также представьте рекуррентное соотношение для $T(n)$ и обоснуйте соответствие требуемой асимптотической верхней границе временной сложности. Проанализируйте, возвращает ли разработанный вами алгоритм CINV минимальное количество необходимых инверсий.

Придуманный мною алгоритм является расширенным алгоритмом `merge_sort()`

полный код можно посмотреть по ссылке

```
int extended_merge_sort(int l, int r){
    if(l+1>=r){
        return 0;
    }
```

```
    int m = (l+r)/2;
    int ans = 0;
    ans += extended_merge_sort(l,m);
    ans += extended_merge_sort(m,r);
    ans += count_inversions(l,r);
    merge(l,r);
    return ans;
}
```

опишем каждые из шагов

DIVIDE - делим массив на две части, и вызываем нашу функцию от обоих частей, считаем эту сумму

CONQUER - когда в нашем диапазоне 1 элемент возвращаем 0 (именно столько инверсий в массиве с 1 элементом). И при этом массив из 1 элемента считается отсортированным.

COMBINE - найдем количество инверсий между нашими половинами:

```
int count_inversions(int l, int r){
    int res = 0;
    int m = (l+r)/2;
    int i = l;
    int j = m;
    while(i < m && j < r){
        if(v[i] > v[j]){
            res += j - m + 1;
            ++j;
        }
        else{
            ++i;
        }
    }

    return res;
}
```

эта функция знает, что при ее вызове каждая половина отсортирована

а значит можно за линию найти количество инверсий

если i-е число в левой половине больше j-го числа в правой половине, то оно больше и всех чисел перед j

После подсчета инверсий между половинами, мы стандартно мерджим эти 2 половины в один отсортированный массив.

опишем рекуррентное выражение временной сложности:

$$\begin{cases} T(n) = 2T(n/2) + O(n) \\ T(1) = O(1) \end{cases}$$

по мастер-теореме разделяй-и-властвуй:

$$T(n) = O(nlogn)$$

Мой алгоритм не возвращает минимальное количество необходимых транспозиций для сортировки массива. Мой алгоритм возвращает количество инверсий как в теории перестановок из алгебры.

пример:

```
A = [3,2,1]
```

количество неоходимых транспозиций для сортировки - 1 (поменять 1 и 3)

количество инверсий - 3 (3 и 2, 3 и 1, 2 и 1)

2. Элементы a_i и a_j массива A назовем значительно инвертированными, если $i < j$, но $a_i > 2a_j$. Какие изменения и доработки необходимо внести в алгоритм CINV, разработанный на предыдущем шаге, чтобы в качестве степени упорядоченности велся подсчет количества пар значительно инвертированных элементов? Например, в массиве $A = [1, 3, 4, 2, 5]$ нет значительно переставленных элементов, а в массиве $A = [5, 3, 2, 4, 1]$ всего 4 пары значительно переставленных элементов: $5 \leftrightarrow 1$, $5 \leftrightarrow 2$, $4 \leftrightarrow 1$ и $3 \leftrightarrow 1$. Асимптотическая верхняя граница временной сложности измененного алгоритма должна остаться неизменной.

В мой алгоритм достаточно внести 1 изменение в функции `count_inversions(int l, int r)`:

```
int count_inversions(int l, int r){
    int res = 0;
    int m = (l+r)/2;
    int i = l;
    int j = m;
    while(i < m && j < r){
        if(v[i] > 2 * v[j]){ // добавил умножение на 2
            res += j - m + 1;
            ++j;
        }
        else{
            ++i;
        }
    }
```

```
    return res;
}
```

Доказательство корректности алгоритма точно такое же как в предыдущем пункте

Временная сложность

Получается в моем алгоритме изменилось только условие внутри линейного цикла части COMBINE

тогда рекуррентное выражение временной сложности не изменилось

$$\begin{cases} T(n) = 2T(n/2) + O(n) \\ T(1) = O(1) \end{cases}$$

и по мастер-теореме разделяй-и-властвуй верхнее ограничение не изменилось:

$$T(n) = O(nlogn)$$