А3. Быстрее Штрассена!

Вы планируете разработать алгоритм MULT, предназначенный для умножения двух квадратных матриц A и B размерности $N \times N$ и асимптотически более эффективный, чем алгоритм Штрассена.

Разрабатываемый алгоритм будет также использовать стратегию <<разделяй-и-властвуй>>.

Исходные матрицы A и B разделяются на неизвестное количество фрагментов размера $N/4$ × $N/4$ для дальнейшей рекурсивной обработки. Асимптотическая точная граница общих временных затрат на выполнение шагов CONQUER и COMBINE алгоритма MULT - Θ(N2).

Таким образом, временная сложность алгоритма MULT будет описываться рекуррентным соотношением $T(N) = a \cdot T(N/4) + \Theta(N^2)$, где коэффициент a отвечает за количество решаемых подзадач --- количество блоков-подматриц размерности $N/4 \times N/4$. Например, для алгоритма Штрассена в соответствии с рекуррентным соотношением $T(N) = 7 \cdot T(N/2) + \Theta(N^2)$ известно, что для каждой задачи решается 7 подзадач вдвое меньшего размера.

В каком диапазоне должен находиться параметр a разрабатываемого вами алгоритма MULT для того, чтобы в результате он был асимптотически более эффективным по временной сложности в сравнении с алгоритмом Штрассена? Обоснуйте свой ответ.

Заметим, что при прочих равных, по мастер-теореме разделяй-и-властвуй уменьшение параметра a монотонно уменьшает верхнюю границу времени работы алгоритма

тогда искомый диапазон будет иметь вид $[1, r)$, где r - такое значение параметра a, при котором алгоритм будет работать столько же, сколько штрассен. (левая граница в 1 выбрана из-за того, что алгоритм будет стратегии разделяй-и-властвуй, а значит будет вызывать хотя бы одну подзадачу).

Давайте с помощью мастер-теоремы подберем такой r:

$log_2 7 = log_4 r$

$2 log_4 7 = log_4 r$

$log_4 49 = log_4 r$

$r = 49$

Таким образом мы получили ответ:

Чтобы наш алгоритм умножения матриц работающий за $T(N) = aT(N/4) + \Theta(N^2)$ был асимптотически более выгоден, чем алгоритм Штрассена, аргумент a должен лежать в полуинтервале $[1, 49)$.