# 1

$$\begin{pmatrix} 9 & -18 & 18 & -2 \\ 3 & -3 & -12 & -9 \\ 0 & -18 & 17 & -14 \\ 1 & -19 & 13 & -17 \end{pmatrix}$$

разделим вторую строку на 3 и поменяем с первой.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 & -3 \\ 9 & -18 & 18 & -2 \\ 0 & -18 & 17 & -14 \\ 1 & -19 & 13 & -17 \end{pmatrix}$$

вычтем из второй строки первую 9 раз и из последней 1 раз

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & -9 & 54 & 25 \\ 0 & -18 & 17 & -14 \\ 0 & -18 & 17 & -14 \end{pmatrix}$$

вычтем из 3 и 4 строки 2 по 2 раза

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & -9 & 54 & 25 \\ 0 & 0 & -91 & -64 \\ 0 & 0 & -91 & -64 \end{pmatrix}$$

вычтем из последней строки предпоследнюю

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & -9 & 54 & 25 \\ 0 & 0 & 91 & 64 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

разделим вторую строку на -9 и третью на 91

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & -6 & -25/9 \\ 0 & 0 & 1 & 64/91 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

прибавим ко второй 6 третих и к первой 4 третих

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 111/91 \\ 0 & 1 & 0 & 1181/819 \\ 0 & 0 & 1 & 64/91 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

прибавим к 1 вторую

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2180/819 \\ 0 & 1 & 0 & 1181/819 \\ 0 & 0 & 1 & 64/91 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

# 2

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & -3 & 6 \\ -6 & -21 & 15 & -16 \\ 21 & 66 & -36 & 53 \\ -18 & -68 & 24 & -86 \end{pmatrix}$$

Построем вначале верхнетреугольный вид:

$$U = \begin{pmatrix} 3 & 8 & -3 & 6 \\ -6 & -21 & 15 & -16 \\ 21 & 66 & -36 & 53 \\ -18 & -68 & 24 & -86 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 8 & -3 & 6 \\ 0 & -5 & 9 & -4 \\ 0 & 10 & -15 & 11 \\ 0 & -20 & 6 & -46 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 8 & -3 & 6 \\ 0 & -5 & 9 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -30 & -30 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 8 & -3 & 6 \\ 0 & -5 & 9 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L = T_1^{-1} T_2^{-1} T_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & -2 & 1 & 0 \\ -6 & 4 & -10 & 1 \end{pmatrix}$$

## 3

$X = A - BX$

$X + BX = A$

$(E + B)X = A$

гаусс.

$$\begin{pmatrix} -5 & -8 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -57 & 43 & 30 \\ -9 & 48 & 28 \\ 50 & 180 & 120 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -5 & -8 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -57 & 43 & 30 \\ -9 & 48 & 28 \\ 5 & 18 & 12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -5 & -8 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -52 & 61 & 42 \\ -19 & 12 & 4 \\ 5 & 18 & 12 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 52 & -61 & -42 \\ 19 & -12 & -4 \\ 5 & 18 & 12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -100 & 35 & -10 \\ 19 & -12 & -4 \\ 5 & 18 & 12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -20 & 7 & -2 \\ 19 & -12 & -4 \\ 5 & 18 & 12 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -20 & 7 & -2 \\ 19 & -12 & -4 \\ 5 & 18 & 12 \end{pmatrix}$$

## 4

$ABA^{-2} = C^{-1}XC^{-1}$

$CABA^{-2}C = idXid = X$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 6 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 5 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 6 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$CABA^{-2}C = X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

## 5

$\sigma = (1, 3, 7, 6, 2, 8, 4, 1)(5, 9)$

Порядок подстановки 14

$\sigma^{-733} = (1,3,7,6,2,8,4)^{-733}(5,9)^{-733} = (1,3,7,6,2,8,4)^{-735+2}(5,9)^{-734+1} = id(1,3,7,6,2,8,4)^2 id(5,9) = (1,7,2,4,3,6,8)(5,9)$

## 6

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 6 & 5 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (1,2,7,4,5,3,6)$

$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ a & b & c & d & e & f & g \end{pmatrix}$

$\alpha\sigma = \sigma\alpha$

$\alpha\sigma\alpha^{-1} = \sigma id = \sigma$

$\sigma = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f & g \\ b & g & f & e & c & a & d \end{pmatrix} = (a,b,g,d,e,c,f)$

$(1,2,7,4,5,3,6) = (a,b,g,d,e,c,f)$

Ответ:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 6 & 5 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 1 & 3 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 2 & 6 & 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 3 & 7 & 1 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 4 & 2 & 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 1 & 5 & 7 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

## 7

$A = \begin{vmatrix} 72 & -32 & 0 & 0 & \dots \\ -40 & 72 & -32 & 0 & \dots \\ 0 & -40 & 72 & -32 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$

$|A_n| = 72|A_{n-1}| + 32(-40|A_{n-2}| + |O|) = 72|A_{n-1}| - 1280|A_{n-2}|$

Представим, что $\lambda^n = |A_n|$, тогда :

$\lambda^2 = 72\lambda - 1280$

$\lambda^2 - 72\lambda + 1280 = 0$

$D = 72^2 - 4 * 1280 = 64(81 - 80) = 64$

$\lambda = \frac{72 \pm 8}{2} = 40, 32$

$|A_1| = 72; |A_0| = 1$

Система:

$\begin{bmatrix} 40C_1 + 32C_2 = 72 \\ C_1 + C_2 = 1 \end{bmatrix}$

решим систему:

$C_1 = 5 \; C_2 = -4$

ответ:

$|A_n| = 5 * 40^n - 4 * 32^n$

## 8

будем считать что многочлен 5 степени, если степень меньше то коэфициенты при наибольших степенях будут нулевые

РЕШИМ СЛАУ:

Отреверсим все столбцы и запомним это.

$$\begin{pmatrix}1&2&4&8&16\\1&-3&9&-27&81\\1&4&16&64&256\\1&-4&16&-64&256\\1&0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}106\\246\\1324\\820\\0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&4&8&16\\0&-5&5&-35&65\\0&2&12&56&240\\0&-6&12&-72&240\\0&-2&-4&-8&-16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}106\\140\\1218\\714\\-106\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&4&8&16\\0&1&-1&7&-13\\0&1&6&28&120\\0&1&-2&12&-20\\0&1&2&4&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}106\\-28\\609\\-119\\53\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}1&0&6&-6&42\\0&1&-1&7&-13\\0&0&14&42&266\\0&0&6&-30&162\\0&0&-6&6&42\end{pmatrix}\begin{pmatrix}162\\-28\\1274\\546\\-162\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-24&-72\\0&1&0&10&6\\0&0&1&3&19\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&24&72\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-384\\63\\91\\0\\384\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-1\\3\\4\\4\end{pmatrix}\to$$

Многочлен:

$f(x) = 4x^4 + 4x^3 + 3x^2 - x$

## 9

Пусть $A = (a_1, a_2, a_3)$

Тогда $Ax = b$, где $x$ вектор коэфициэнтов.

Решим Гауссом.

$$\begin{pmatrix}3&-2&-7\\9&-3&-2\\2&-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9\\-8\\\lambda\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2/3&-7/3\\9&-3&-2\\2&-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-8\\\lambda\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2/3&-7/3\\0&3&19\\0&-2/3&14/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-35\\\lambda+6\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}1&-2/3&-7/3\\0&1&19/3\\0&-2/3&14/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-35/3\\\lambda+6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&16/9\\0&1&19/3\\0&0&79/9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-43/9\\-35/3\\\lambda-16/9\end{pmatrix}\to$$

при $\lambda = 16/9$ решений нет, иначе:

коэфициент при третем столбике : $\frac{9\lambda-16}{79}$

при втором: $-35/3 - 19/3\frac{9\lambda-16}{79}$

при первом: $-43/9 - 16/9\frac{9\lambda-16}{79}$

## 10

$$A = \begin{pmatrix}2&1&-3&1\\5&\lambda&0&4\\-1&-5&4&-3\\1&-4&5&2\end{pmatrix}$$

пусть ранг 2: можем взять минор:

$$\begin{vmatrix}4&-2\\5&2\end{vmatrix} \neq 0$$

допустим ранг 3: возьмем окаймляющий минор:

$$\begin{vmatrix}2&-3&1\\-1&4&-3\\1&5&2\end{vmatrix} = 8+9-5-4-6+30 \neq 0$$

если ранг 4, есть только один случай - вся матрица

вычислим ее определитель:

$$\begin{vmatrix}2&1&-3&1\\5&\lambda&0&4\\-1&-5&4&-3\\1&-4&5&2\end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix}\lambda&0&4\\-5&4&-3\\-4&5&2\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}5&0&4\\-1&4&-3\\1&5&2\end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix}5&\lambda&4\\-1&-5&-3\\1&-4&2\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}5&\lambda&0\\-1&-5&4\\1&-4&5\end{vmatrix} =$$

$2(8\lambda+0-100+64-0+15\lambda) - (40-20+0-8-0+75) - 3(-50-3\lambda+16+20+2\lambda-60) - (-125+0+4\lambda-0+5\lambda+80) =$

$2(23\lambda-36) - 87 - 3(-74-\lambda) - (9\lambda-45) = 46\lambda - 72 - 87 + 3\lambda + 222 + 45 - 9\lambda = 40\lambda + 108 = 4(10\lambda - 27)$

При $\lambda = 2.7$ ранг матрицы 3, иначе 4