DZ 7

1

a)

$f(x) = \sqrt{x^4 + x^3} - \sqrt{x^4 - x^3}$

Найдем область определения.

$$D(f) = \begin{cases} x^4 + x^3 \geq 0 \\ x^4 - x^3 \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^3(x+1) \geq 0 \\ x^3(x-1) \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in (-\infty; -1] \cup [0; \infty] \\ x \in (-\infty; 0] \cup [1; \infty] \end{cases} \iff x \in (-\infty; -1] \cup 0 \cup [1; \infty)$$

Найдем асимптоту $y = kx + b$ при $x \to \infty$.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^4 + x^3} - \sqrt{x^4 - x^3}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4 + x^3 - x^4 + x^3}{x(\sqrt{x^4 + x^3} + \sqrt{x^4 - x^3})} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1 + 1/x} + \sqrt{1 - 1/x}} = \frac{2}{2} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \sqrt{x^4 + x^3} - \sqrt{x^4 - x^3} - kx = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4 + x^3 - x^4 + x^3 - \sqrt{x^4 + x^3} - \sqrt{x^4 - x^3}}{\sqrt{x^4 + x^3} + \sqrt{x^4 - x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x - \sqrt{1 + 1/x} - \sqrt{1 + 1/x}}{\sqrt{1 + 1/x} + \sqrt{1 + 1/x}} = \frac{0}{2} = 0$$

Асимптота: $y = x$

b)

$f(x) = |x + 2| e^{-\frac{1}{x}}$

$D(f) = R/0$

Асимптоты зависят от $x \to \infty$ или $x \to -\infty$

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{|x+2|e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{|x+2|}{x} \lim_{x\to\infty} e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{|x+2|}{x}$$

При $x \to +\infty$:

$k = 1$

$$b = \lim_{x\to+\infty} |x+2|e^{-\frac{1}{x}} - x = \lim_{x\to+\infty} (x+2)e^{-\frac{1}{x}} - x = \lim_{x\to+\infty} x + 2 - x = 2$$

$y = x + 2$

При $x \to -\infty$:

$k = -1$

$$b = \lim_{x\to-\infty} |x+2|e^{-\frac{1}{x}} + x = \lim_{x\to-\infty} (-x-2)e^{-\frac{1}{x}} + x = \lim_{x\to-\infty} -x - 2 + x = -2$$

$y = -x - 2$

2

a) нет, $f(x) = x^2$

b) нет, $f(x) = x^4$

c) нет, $f(x) = x^2$

3

2^x монотонна, поэтому

$2^{f(x)} \leq 2^{Cg(x)}$

$\frac{2^{f(x)}}{2^{g(x)}} \leq 2^C$

2^C тоже конечное число, чтд

4

$f(y) = 1 + 3y - y^2 + o(y^2)$

$f(2x + 4x^2) = 1 + 3(2x + 4x^2) - (2x + 4x^2)^2 + o(x^4) = 1 + 6x + 12x^2 - 4x^2 + o(x^2) = 1 + 6x + 8x^2 + o(x^2)$

$\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1 + 6x + 8x^2 + o(x^2) - 1}{x} = \lim\limits_{x\to0} 6 + 8x + o(x) = 6$

5

a) $t = x - \frac{\pi}{6}$

$\lim\limits_{t\to0} \dfrac{cos(2\pi/3 - t + \pi/6)}{\sqrt{3} - 2cos(t - \pi/6)} = \lim\limits_{t\to0} \dfrac{cos(\pi/2 - t)}{\sqrt{3} - 2(cost\sqrt{3}/2 + sint/2)} = \lim\limits_{t\to0} -\dfrac{sint}{\sqrt{3}(1 - cost) - sint}$

перевернем выражение

$\lim\limits_{t\to0} -\dfrac{\sqrt{3}(1 - cost) - sint}{sint} = \lim\limits_{t\to0} -\dfrac{\sqrt{3}(1 - cost)}{sint} - 1 = \lim\limits_{t\to0} \dfrac{\sqrt{3}sin\frac{t}{2}}{sint} - 1 = \lim\limits_{t\to0} \dfrac{2t\sqrt{3}sin\frac{t}{2}}{2tsint} - 1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - 1$

значит неперевернутое выражение стремится к $\frac{2\sqrt{3}-3}{3}$

$x = \frac{4\sqrt{3}-6+\pi}{6}$

b)

$\lim\limits_{x\to0} \dfrac{cosx}{sinx}(e^{7x} - e^{2x}) = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{cosxe^{2x}(e^{3x} - 1)}{x} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{3cosxe^{2x}(e^{3x} - 1)}{3x} = \lim\limits_{x\to0} 3cosxe^{2x} = 3$

c)

$\lim\limits_{x\to0}(cosx)^{-1/x^2} = \lim\limits_{x\to0}(1 - sin^2\dfrac{x}{2})^{1/x^2} = \lim\limits_{x\to0}(1 - \dfrac{x^2}{4})^{1/x^2} = \lim\limits_{x\to0}((1 - \dfrac{x^2}{4})^{4/x^2})^{1/4} = e^{-1/4}$

d)

$\lim\limits_{x\to0}(cosx + arctg^2x)^{1/arctg^2x} = \lim\limits_{x\to0}(1 - sin^2\dfrac{x}{2} + arctg^2x)^{1/arctg^2x} = \lim\limits_{x\to0}(1 - \dfrac{x^2}{4} + x^2)^{1/x^2} = \lim\limits_{x\to0}((1 + \dfrac{3x^2}{4})^{\frac{4}{3x^2}})^{3/4} = e^{\frac{3}{4}}$

6

a) $f(x) = \ln\ln(\frac{x}{2})$

$f'(x) = \frac{1}{\ln(\frac{x}{2})}\frac{1}{\frac{x}{2}}\frac{1}{2} = \frac{1}{x\ln(\frac{x}{2})}$

b) $f(x) = 2^{\sin^2(x)} = e^{\ln 2\sin^2 x}$

$f'(x) = e^{\ln 2\sin^2 x}2\ln 2\sin x\cos x = 2^{\sin^2 x}\ln 2\sin 2x$

c) $f(x) = (sinx)^{cosx} = e^{cosx\ln sinx}$

$f'(x) = e^{cosx\ln sinx}(cosx\ln sinx)' = (sinx)^{cosx}(-sinx\ln sinx + cosx\frac{1}{sinx}cosx) = (sinx)^{cosx}(cosxctgx - sinx\ln sinx)$

d) $f(x) = arcos(\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1})$

$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}^2}}(\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1})' = -\frac{1}{\sqrt{\frac{4x^{2n}}{(x^{2n}+1)^2}}}(\frac{2nx^{2n-1}(x^{2n}+1)-2nx^{2n-1}(x^{2n}-1)}{(x^{2n}+1)^2}) = -\frac{4nx^{2n-1}}{2x^n(x^{2n}+1)} = -\frac{2n}{x(x^{2n}+1)}$