DZ 8

1

$y = arctgx - lnx$

$D(y) = (0; 1) \cup (1; +\infty)$

$y' = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x} = -\frac{x^2-x+1}{x(x^2+1)}$

функция монотонно убывает на всей своей области определения

2

a) $y = (x^2+1)arctgx - \frac{\pi}{4}x^2 - x$

$D(y) = R$

$y' = 2xarctgx + \frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{\pi x}{2} - 1 = 2xarctgx - \frac{\pi x}{2} = 2x(arctgx - arctg1)$

Ключевые точки: 0, 1

y возрастает на интервалах $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$ и убывает в интервале $(0; 1)$

b) $y = (x+2)e^{\frac{1}{x}}$

$D(y) = R \backslash 0$

$y' = e^{\frac{1}{x}} + (x+2)e^{\frac{1}{x}}\frac{-1}{x^2} = e^{\frac{1}{x}}\frac{x^2-x-2}{x^2} = e^{\frac{1}{x}}\frac{(x-2)(x+1)}{x^2}$

Ключевые точки : -1, 2

y возрастает на интервалах $(\infty; -1) \cup (2; +\infty)$ и убывает на интервалах $(-1, 0) \cup (0, 2)$

3

a) Функции непрерывны, значит дифференцируемы

$$f'(x) = \left\{ \begin{matrix} \frac{-2e^{-1/x^2}}{x^3}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{matrix} \right\}$$

$$g'(x) = \left\{ \begin{matrix} \frac{-2e^{-1/x^2}}{x^2} + e^{-1/x^2}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{matrix} \right\}$$

производные тоже непрерывны, а значит и дифференцируемы

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{2e^{-1/x^2}(2+3x^2)}{x^6}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$$

$g''(x) = \begin{cases} \frac{2e^{-1/x^2}(2+3x^2)}{x^6} + \frac{-2e^{-1/x^2}}{x^3}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$

Так $g^{(n)} = f^{(n)} + f^{(n-1)}$

А $f^{(n)}(x)$ при будет принимать вид $\frac{\text{показательная стремящаяся к 0}}{\text{степенная стремящаяся к 0}} \forall x, 0 < |x| < \epsilon$ а значит будет непрывной, а значит $f^{(n)}(x)$ дифференцируема

Тогда и $g^{(n)}(x)$ дифференцируема

Значит существуют производные функций любого порядка, и при этом в точке 0 все они будут равны 0.

b) $f(x)$ всегда положительна при $x \neq 0$, а значит и принимает минимальное значение в точке 0.

$g'(x)$ всегда положительна при $x \neq 0$ и непрерывна на всей области определения, значит $g(x)$ монотонна.

4

$y = |x^2 + 2x - 3| + 1.5lnx$

найдем интервалы в которых подмодульное выражение положительно:

$x^2 + 2x - 3 = 0$

$(x+3)(x-1) = 0$

на отрезке $[1; 2]$ выражение положительно

на отрезке $[0.5; 1]$ выражение отрицательно

рассмотрим 1 случай

$y' = 2x + 2 + \frac{3}{2x} = \frac{4x(x+1)+3}{2x} = \frac{4x^2+4x+3}{2x}$

функция достигает экстремума в точке 0

минимальное значение достигается в точке 1

$|1 + 2 - 3| + 1.5ln1 = 0 + 0 = 0$

максимальное значение в точке 2

$|4 + 4 - 3| + 1.5ln2 = 5 + 1.5ln2$

рассмотрим 2 случай

$y' = -2x - 2 + \frac{3}{2x} = -\frac{4x^2+4x-3}{2x} = -\frac{(x+3/2)(x-1/2)}{2x}$

на отрезке $[0.5; 1]$ функция убывает

минимальное значение в точке 1

$|1+2-3|+1.5ln1=0+0=0$

максимальное значение в точке 0.5

$|1/4+1-3|+1.5ln0.5=\frac{7-6ln2}{4}$

Итого по всем случаям минимальное значение функции 0, максимальное $5+1.5ln2$

5

чтобы найти интервалы выпуклости и точки перегиба надо взять 2 производную

$y=\sqrt[3]{4x^3-12x}$

$y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{(4x^3-12x)^2}}(12x^2-12)=\frac{4(x^2-1)}{\sqrt[3]{16x^6-96x^4+144x^2}}$

$y''=4*\frac{(x^2-1)'(\sqrt[3]{16x^6-96x^4+144x^2})-(x^2-1)(\sqrt[3]{16x^6-96x^4+144x^2})'}{\sqrt[3]{16x^6-96x^4+144x^2}^2}$

$=4\frac{2x\sqrt[3]{16x^6-96x^4+144x^2}-(x^2-1)\frac{1}{3\sqrt[3]{16x^6-96x^4+144x^2}^2}(96x^5-384x^3+288x)}{\sqrt[3]{16x^6-96x^4+144x^2}^2}$

$=4\frac{6x(16x^6-96x^4+144x^2)-(x^2-1)(96x^5-384x^3+288x)}{3\sqrt[3]{\dots}^4}$

$=4\frac{96x^7-576x^5+864x^3-96x^7+384x^5-288x^3+96x^5-384x^3+288x}{3(16x^6-96x^4+144x^2)\sqrt[3]{16x^6-96x^4+144x^2}}$

$=\frac{4}{3}\frac{-96x^5+192x^3+288x}{(16x^6-96x^4+144x^2)\sqrt[3]{16x^6-96x^4+144x^2}}$

$=-\frac{8}{\sqrt[3]{16}}\frac{x(x^4-2x-3)}{x^2(x^4-6x^2+9)\sqrt[3]{x^2(x^2-6x+9)}}$

$=-2\sqrt[3]{4}\frac{x(x^2+1)(x^2-3)}{x^2(x^2-3)^2\sqrt[3]{x^2(x^2-3)^2}}$

$=-\frac{2\sqrt[3]{4}(x^2+1)}{\sqrt[3]{x^5(x^2-3)^5}}$

точки перегиба: $\{-\sqrt{3};0;\sqrt{3}\}$

интервалы выпуклости достигаются при отрицательной второй производной : $(-\sqrt{3};0)\cup(0;\sqrt{3})$