

ДЗ 4

9

Возьмем число $b = a/2$. У числа a делители: $c, 2c \forall c \in \{\text{Множество делителей числа } b\}$. Причем все делители числа b нечетные.

10

Сумма чисел числа в десятичной записи - 300. 300 Делится на 3, но не делится на 9, значит число не является точным квадратом.

11

$$6k + 5 = 6(k + 1) - 1 = 6n - 1$$

Пусть p_q максимальное простое число принадлежащее этому множеству

$$n' = \prod_i^q p_i$$

Тогда $6n' - 1$ не делится ни на одно простое число, значит $6n' - 1$ само является простым. Противоречие.

12

$$\text{НОК}(x, y, z) = \prod p^{\max(i_x, j_y, k_z)}$$

$$\text{НОД}(x, y, z) = \prod p^{\min(i_x, j_y, k_z)}$$

Основание статично, так что перейдем к рассмотрению степеней каждой операции для удобства.

Пусть $i_x \leq j_y \leq k_z$ в противном случае их можно переставить местами, так как мы работаем с коммутативными функцией максимума, минимума, а также с перемножением.

$$\frac{i_x j_y k_z \min(i_x, j_y, k_z)}{\min(i_x, j_y) \min(i_x, k_z) \min(j_y, k_z)} = \frac{i_x j_y k_z i_x}{i_x i_x j_y} = k_z = \max(i_x, j_y, k_z)$$

13

$$p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$$

если $p > 3$ простое (а значит и нечетное), то $(p - 1)$ и $(p + 1)$ делятся на 2, причем одно из них делится и на 4. Значит $(p - 1)(p + 1)$ делится на 8.

если $p > 3$ простое, то оно не делится на 3, тогда $(p - 1)$ или $(p + 1)$ обязаны делиться.

Получилось, что $p^2 - 1$ делится на 8 и 3, а значит делится на 24.

14

Возьмем $a_n \neq 0$ (такое существует т.к. разность ненулевая), тогда $a_{n+a_n} = a_n + da_n$, значит оба этих члена сокращаются на a_n

15

$$\frac{n^2-n+1}{n^2+1} = \frac{(n-1)^2+n}{(n-1)^2+2n}$$

Пусть дробь можно сократить, тогда $(n-1)^2 + n$ делится на какое-то m и $(n-1)^2 + 2n$ делится на m . Значит n делится на m . Тогда и $(n-1)^2$ должно делиться на m .

если $n \equiv 0 \pmod{m}$, то $n^2 \equiv 0 \pmod{m}$ составим систему:

$$n = mk_1$$

$$n^2 = mk_2$$

$$(n-1)^2 = mk_3$$

раскроем скобки:

$$n^2 - 2n + 1 = mk_3$$

подставим:

$$mk_2 - 2mk_1 + 1 = mk_3$$

$$m(k_3 + k_1 - k_2) = 1$$

т.к. работаем в натуральных числах $k_3 + k_1 - k_2 = 1$ и $m = 1$, а значит дробь несократима.