

dz 11

1

а) при $n = 0$ ответ 1иначе при четных n ответ 0 ($C_n^k = C_n^{n-k}$)а при нечетных $(-1)^{(n+1)/2} C_n^{(n+1)/2}$

b)

$$C_n^k = C_n^{n-k}$$

$$\Rightarrow \sum_{k|2}^n C_n^k = 2 \sum_{k|2}^{\lfloor n/2 \rfloor} C_n^k$$

продолжим

$$= 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor}$$

c)

$$\frac{C_n^k}{k+1} = \frac{1}{k+1} \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1} C_{n+1}^{k+1}$$

$$\sum_{k=0}^n \frac{C_n^k}{k+1} =$$

$$\sum_{k=0}^n C_{n+1}^{k+1} \frac{1}{n+1} =$$

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n C_{n+1}^{k+1} =$$

$$\frac{1}{n+1} (\sum_{k=0}^n C_{n+1}^{k+1} - C_{n+1}^0) =$$

$$\frac{1}{n+1} (2^{n+1} - 1) =$$

$$\frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$$

2

сначала посчитаем способы выбрать 6 цифр поровну четных и нечетных :

$$5^3 * 5^3 = 5^6$$

теперь найдем количество способов разместить 6 цифр по 6 местам

6!

итого

$$5^6 * 6!$$

вычтем те которые начинаются на 0

всего существует $5^2 * 5^3 = 5^5$ комбинаций чисел с хотябы одним нулем

5! способов разместить их чтобы ноль был вначале

ответ

$$5^6 * 6! - 5^5 * 5!$$

3

4 человека

по методу шаров и перегородок

$$\$ C^{\{4-1\}}_{\{6+4+1\}} | \times C^{\{4-1\}}_{\{3+4+1\}} \times C^{\{4-1\}}_{\{2+4+1\}} = \$$$

$$\$ C^{\{3\}}_{\{11\}} * C^{\{3\}}_{\{8\}} * C^{\{3\}}_{\{7\}} \$$$

4

решим подзадачу

какие существует a, b, c такие что

$$\begin{cases} 57 = 2a + 7b + 9c \\ a + b + c = 20 \end{cases}$$

$$(b + c) \bmod 2 = 1$$

подходит

$$\begin{cases} a = 17 \\ b = 2 \\ c = 1 \end{cases}$$

в других случаях при уменьшении a сильно вырастает общая сумма, значит набор единственен

тогда задача звучит так:

сколько существует способов выбрать 17 скобок из двадцати и потом выбрать еще две из оставшихся

$$C_{20}^{17} * C_3^2$$

5

по методу шаров и перегородок

$$C_{7-1}^2$$

6

количество способов выбрать 4 книги

$$C_{10}^4$$

количество способов перемешать 6 оставшихся книг

$$5 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 600$$

ответ

$$600 C_{10}^4$$

7

простые делители 2020

2, 5, 101

по правилу включений-исключений

$$2020/2 + 2020/5 + 2020/101 - 2020/10 - 2020/505 - 2020/202 + 2020/1010 = 1010 + 404 + 20 - 202 - 4 - 10 + 2 = 1220$$

8

начнем с самого левого числа и постепенно будем справа добавлять числа

1 длина числа:

колво способов когда самая правое число

1:1

2:1

3:1

4:1

5:1

6:1

7:1

8:1

9:1

2 длина числа:

колво способов когда самая правое число

1:1

2:1+1=2

3:1+2=3

4:1+3=4

5:1+4=5

6:1+5=6

7:1+6=7

8:1+7=8

9:1+8=9

3 длина числа:

колво способов когда самая правое число

1:1

2:2+1=3

3:3+3=6

4:4+6=10

5:5+10=15

6:6+15=21

$$7:7+21=28$$

$$8:8+28=36$$

$$9:9+36=45$$

4 длина числа:

колво способов когда самая правое число

$$1:1$$

$$2:3+1=4$$

$$3:6+4=10$$

$$4:10+10=20$$

$$5:15+20=35$$

$$6:21+35=56$$

$$7:28+56=84$$

$$8:36+84=120$$

$$9:45+120=165$$

5 длина числа:

колво способов когда самая правое число

$$1:1$$

$$2:4+1=5$$

$$3:10+5=15$$

$$4:20+15=35$$

$$5:35+35=70$$

$$6:56+70 = 126$$

$$7:84+126=210$$

$$8:120+210=330$$

$$9:165+330=495$$

6 длина числа:

колво способов когда самая правое число

$$1:1$$

$$2:5+1=6$$

$$3:15+6=21$$

$$4:35+21=46$$

$$5:70+46=116$$

$$6:126+116=242$$

$$7:210+242=454$$

$$8:330+454=784$$

$$9:495+784=1279$$

7 длина числа:

колво способов когда самая правое число

$$1:1$$

$$2:6+1=7$$

$$3:21+7=28$$

$$4:46+28=74$$

$$5:116+74=190$$

$$6:242+190=432$$

$$7:454+432=886$$

$$8:784+886=1670$$

$$9:1279+1670=2949$$

ИТОГО

$$1 + 7 + 28 + 74 + 190 + 432 + 886 + 1670 + 2949 = 6237 \text{ способов}$$