IDZ вариант 2

1

$z = \frac{\sqrt{3}+i}{2} = cos\frac{\pi+12\pi k}{6} + isin\frac{\pi+12\pi k}{6}$

$z^{3/7} = cos\frac{\pi+12\pi k}{14} + isin\frac{\pi+12\pi}{14}$

при этом

$\frac{z^{3/7}}{4z} = cos\frac{4\pi}{21} + isin\frac{4\pi}{21}$

$\frac{z^{3/7}}{4z} = \frac{cos\frac{\pi+12\pi k}{14}+isin\frac{\pi+12\pi k}{14}}{4(cos\frac{\pi}{6}+isin\frac{\pi}{6})} = 1/4(cos\frac{3\pi+36\pi k-7\pi}{42} + isin\frac{3\pi+36\pi k-7\pi}{42}) = 1/4(cos\frac{-2\pi+18\pi k}{21} + isin\frac{-2\pi+18\pi k}{21})$

$-2\pi + 18\pi k = 4\pi (mod\, 42\pi)$

$18k = 6(mod\, 42)$

$3k = 1(mod\, 7)$

$k = 5$

Ответ: $cos\frac{61\pi}{14} + isin\frac{61\pi}{14} = cos\frac{5\pi}{14} + isin\frac{5\pi}{14}$

2

$\begin{pmatrix} 10+13i & -7-14i \\ -12-9i & -10+11i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 138-450i \\ -133+217i \end{pmatrix}$

решим Крамером

$\Delta = \begin{vmatrix} 10+13i & -7-14i \\ -12-9i & -10+11i \end{vmatrix}$
$= (10+13i)(-7-14i) - (-12-9i)(-10+11i) = -70 - 140i - 91i + 182 - 120 + 132i - 90i - 99 = -107 - 189i$

$\Delta_x = \begin{vmatrix} 138-450i & -7-14i \\ -133+217i & -10+11i \end{vmatrix} = -399 + 5675i$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 10+13i & 138-450i \\ -12-9i & -133+217i \end{vmatrix} = 1555 - 3717i$

$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-399+5675i}{-107-189i}$

$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{1555-3717i}{-107-189i}$

3

$-5x^6 + 50x^4 + 440x^3 - 3005x^2 + 2840x + 6240$

поделим многочлен на $(x-3)$

$(x-3)(-5x^5 - 15x^4 + 5x^3 + 455x^2 - 1640x - 2080)$

так как многочлен состоит из целых коэффициентов и один из корней $x = 3 - 2i$, то существует корень $x = 3 + 2i$

поделим многочлен на $(x-3-2i)(x-3+2i) = x^2 - 6x + 13$

$(x-3)(x-3-2i)(x-3+2i)(-5x^3 - 45x^2 - 200x - 160)$

поделим многочлен на $(x-4-4i)(x-4+4i) = x^2 - 8x + 32$

$(x-3)(x-3-2i)(x-3+2i)(x-4-4i)(x-4+4i)(-5x-85)$

$-5(x-3)(x-3-2i)(x-3+2i)(x-4-4i)(x-4+4i)(x+17)$

4

есть три точки $A(-18;20), B(1;-18), C(21;18)$

нужных нам точек существует 3

возьмем точку B как соседа для A и C.

$BA = (-19; 38)$

$BC = (21; 36)$

точка D (четвертая точка параллелограмма) найдется через сумму BA+BC

$BD = BA + BC = (2; 74)$

$D = B + BD = (3; 56)$

$z = 3 + 56i$

5

$z_1 = 2(cos\frac{2\pi}{3} + isin\frac{2\pi}{3})$

$z_2 = 2(cos\frac{5\pi}{6} + isin\frac{5\pi}{6})$

$\begin{cases} \frac{2\pi}{3} = \frac{\alpha\pi}{n} \\ \frac{5\pi}{6} = \frac{\alpha\pi+2\pi}{n} \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{2}{3} = \frac{\alpha}{n} \\ \frac{5}{6} = \frac{\alpha+2}{n} \end{cases}$

$\begin{cases} 2n = 3\alpha \\ 5n = 6\alpha + 12 \end{cases}$

$\alpha = 8; n = 12$

$\alpha\pi = \beta\pi + 2\pi k, k \in \Z$

$\beta = 0$

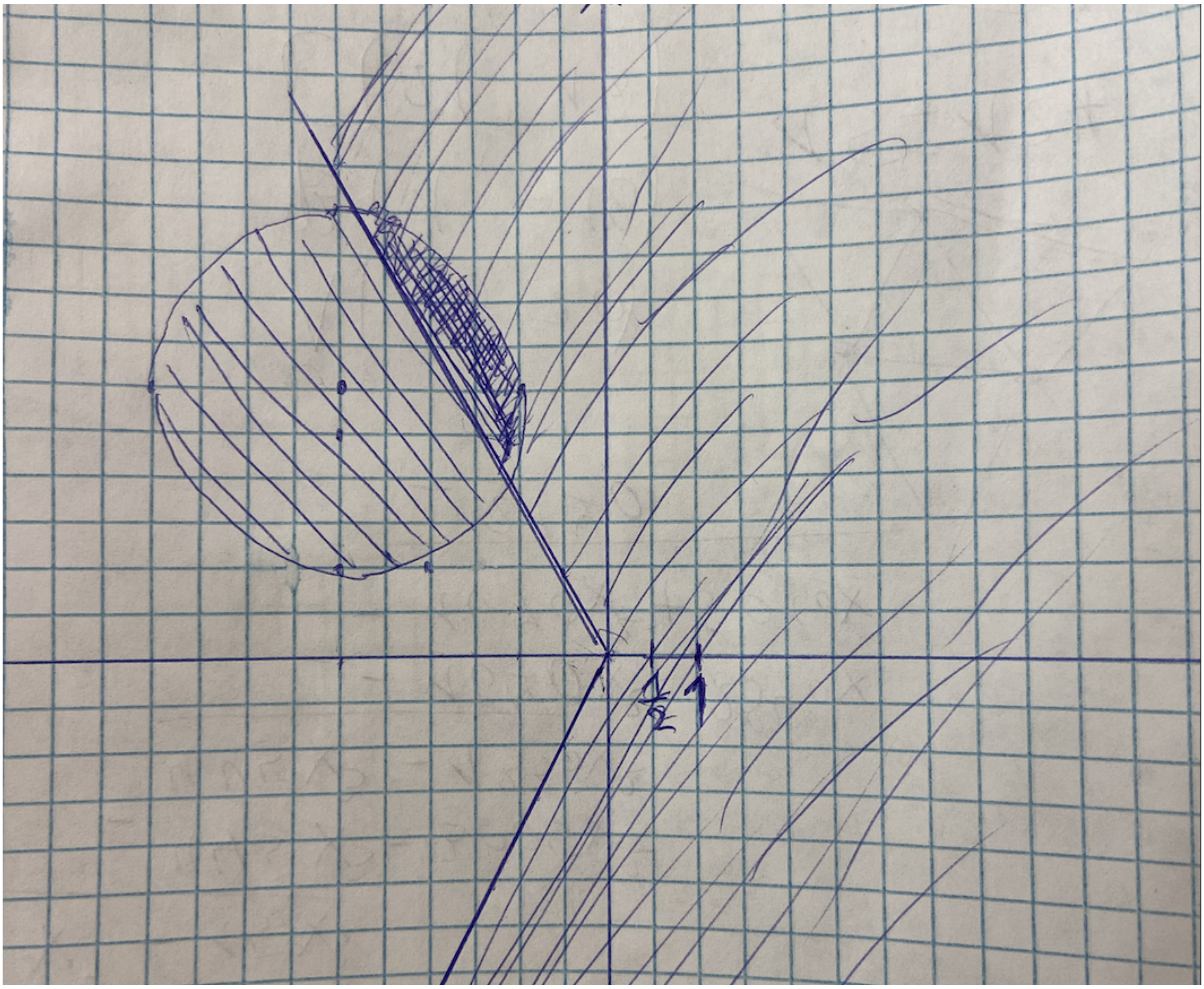
$z_1, z_2 = \sqrt[12]{2^{12}(cos0 + isin0)}$

$z = 2^{12} = 4096$

6

сделаем замену $t = z - 1$

$\begin{cases} |t + 3 - 3i| < 2 \\ |arg(t)| < \frac{2\pi}{3} \end{cases}$



7

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 8x_3 = \alpha \\ -3x_1 - 8x_2 = \beta \\ -x_1 - x_2 - x_3 = \gamma \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 8 & \alpha \\ -3 & -8 & 0 & \beta \\ -1 & -1 & -1 & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 8 & \alpha+\beta \\ 0 & -41 & 24 & 3\alpha+4\beta \\ 0 & -1 & -1 & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 8 & \alpha+\beta \\ 0 & -41 & 24 & 3\alpha+4\beta \\ 0 & -7 & -4 & \alpha+4\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 8 & \alpha+\beta \\ 0 & -41 & 24 & 3\alpha+4\beta \\ 0 & 0 & -1 & 5\alpha-7\beta+41\gamma \end{pmatrix}$$

$x_3 = -5\alpha + 7\beta - 41\gamma$

$x_2 = -3\alpha + 4\beta - 24\gamma$

$x_1 = 8\alpha - 11\beta + 64\gamma$

8

Вектор нормали к плоскости

$n = (-6; 24; -34)$

сократим

$n = (3; -12; 17)$

найдем вектор, что если его прибавить к данной точке, результирующая точка будет лежать в плоскости

$-6(3+3k) + 24(4-12k) - 34(-7+17k) + 568 = 0$

$k = 1 \rightarrow n = (3; -12; 17)$

тогда если к точке прибавить два вектора нормали результирующая точка будет находится симметрично относительно плоскости

$A_0 = A + 2n = (3, 4, 7) + (6; -24; 34) = (9; -20; 41)$

9

У бесконечной призмы линии, образованные пересечением любых двух плоскостей, параллельны

Плоскости :

$L_1 : 2x - y - 8z - 8 = 0$

$L_2 : -6x - 5y - 10z - 3 = 0$

$L_3 : -10x - 11y - 28z + 21 = 0$

Пересечение 1 и 2 плоскости:

$$\begin{cases} 2x - y - 8z = 8 \\ -6x - 5y - 10z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37/16 + 15/8z \\ -27/8 - 17/4z \\ z \end{pmatrix}$$

Пересечение 2 и 3 плоскости:

$$\begin{cases} -6x - 5y - 10z = 3 \\ -10x - 11y - 28z = -21 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -69/8 + 15/8z \\ 39/4 - 17/4z \\ z \end{pmatrix}$$

Пересечение 1 и 3 плоскости :

$$\begin{cases} 2x - y - 8z = 8 \\ -10x - 11y - 28z = -21 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 109/32 + 15/8z \\ -19/16 - 17/4z \\ z \end{pmatrix}$$

Все эти три прямые параллельны, поэтому они никогда не пересекутся в пространстве а значит образуют бесконечную призму.

Найдем нужную плоскость. Так как она параллельна L_3 и содержит прямую между $L_1 L_2$ совершим подстановку

(C константа, чтобы плоскость была параллельна L_1)

$-10x - 11y - 28z + C = 0$

$-10(37/16 + 15/8z) - 11(-27/8 - 17/4z) - 28z + C = 0$

$-370/16 - 150/8z + 297/8 + 187/4z - 28z + C = 0$

$14 + C = 0$

$C = -14$

Тогда нужная нам плоскость :

$-10x - 11y - 28z - 14 = 0$

10

найдем уравнения прямых

L_1:

$$\begin{cases} 15x - 6y + 23z - 66 = 0 \\ -15x + 32y + 29z - 38 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 27/5t_1 - 142/15 \\ y = 52/3t_1 - 104/3 \\ z = t_1 \end{cases}$$

направляющий вектор : $n_1 = (27/5, 52/3, 1)$

L_2 :

$$\begin{cases} -3x + 7y + 7z + 204 = 0 \\ -6x + 10y + 7z + 270 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -25/2 - 7/4t_2 \\ y = -69/2 - 7/4t_2 \\ z = t_2 \end{cases}$$

направляющий вектор : $n_2 = (-7/4, -7/4, 1)$

векторное произведение направляющих векторов будет перпендикулярно обоим прямым.

$n = [n_1, n_2]$=
$(\begin{vmatrix} 52/3 & 1 \\ -7/4 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 27/5 \\ 1 & -7/4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 27/5 & 52/3 \\ -7/4 & -7/4 \end{vmatrix}) = (52/3 + 7/4, -7/4 - 27/5, -189/20 + 364/12) = (229/12, -143/20, 1253/60)$

Составим систему

$L_{10} + kn = L_{20}$, где k какое-то число

$$\begin{cases} 27/5t_1 - 142/15 + 229/12k = -25/2 - 7/4t_2 \\ 52/3t_1 - 104/3 - 143/20k = -69/2 - 7/4t_2 \\ t_1 + 1253/60k = t_2 \end{cases} \implies \begin{cases} 27/5t_1 + 7/4t_2 + 229/12k = -91/30 \\ 52/3t_1 + 7/4t_2 - 143/20k = -1/6 \\ t_1 + -t_2 + 1253/60k = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 324t_1 + 105t_2 + 1145k = -182 \\ 1040t_1 + 105t_2 - 429k = -10 \\ 60t_1 - 60t_2 + 1253k = 0 \end{cases}$$

$(k, t_1, t_2) = (-\frac{628}{9431}, \frac{885}{9431}, -\frac{183446}{141465})$

зная t_1 можем найти точку и построить прямую по ней и вектору.

$$\begin{cases} x = -25/2 + 7/4\frac{183446}{141465} \\ y = -69/2 + 7/4\frac{183446}{141465} \\ z = -\frac{183446}{141465} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -25/2 + \frac{642061}{282930} \\ y = -69/2 + \frac{642061}{282930} \\ z = -\frac{183446}{141465} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{2894564}{282930} \\ y = -\frac{9119024}{282930} \\ z = -\frac{183446}{141465} \end{cases}$$

Тогда параметрическое уравнение прямой:

$$\begin{cases} x = -\frac{2894564}{282930} + 229/12t \\ y = -\frac{9119024}{282930} - 143/20t \\ z = -\frac{183446}{141465} + 1253/60t \end{cases}$$

Составим из него каноническое

$$\frac{12x + \frac{17367384}{47155}}{229} = \frac{20y + \frac{18238048}{28293}}{143} = \frac{60z + \frac{733784}{9431}}{1253}$$