Дз 3

1

Докажем по матиндукции:

БАЗА: для 1 подходит

Пусть для k подходит, докажем для $k+1$

$S = 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = S + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)(k(2k+1)+6k+6)}{6} = \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}$

Доказано

2

Докажем по матиндукции:

БАЗА: для 2 подходит,

Пусть для k подходит, причем из i-того города можно доехать до любого, докажем для $k+1$.

Если $(k+1)$ -й город связан с i-тым в сторону $(k+1)$-го. То из i-го по прежнему можно приехать куда угодно.

Иначе, из $(k+1)$-го города можно приехать в i-тый, а оттуда во все остальные. Тогда из $(k+1)$-го города можно приехать куда угодно.

3

БАЗА : 1 подходит

Пусть для n подходит k, докажем что для $n+1$ найдется m

$1 + \frac{1}{2} + \dots \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} \dots \frac{1}{m} > n+1$

$n + \frac{1}{k+1} + \dots + \frac{1}{m} > n+1$

$\frac{1}{k+1} + \dots + \frac{1}{m} > 1$

Заметим что, для нечетных $m-k$,

$\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \dots + \frac{1}{m} \geq \frac{m-k}{\frac{m+k}{2}}$

Докажем тем, что для любого k

$\frac{1}{n-k} - \frac{1}{n} \geq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+k}$

$\frac{k}{n(n-k)} \geq \frac{k}{n(n+k)}$

$n(n-k) \leq n(n+k)$

тогда вернемся к начальной задаче

$\frac{1}{k+1} + \dots + \frac{1}{m} \geq \frac{m-k}{\frac{m+k}{2}} > 1$

$2(m-k) > m+k$

$2m - 2k > m+k$

$m > 3k$

$M(k) = 3k+1$

Доказано

4

Заметим что при возведении в квадрат последние две цифры становятся 01, а значит при умножении числа на 99 последние два числа станут 99, образуется цикл (99,01), в котором в четных степенях стоит 01, а в нечетных 99.

Ответ: 01

5

$a^3 - k(a-b) = b^3 - q(a-b)$

$a^3 - b^3 = (a-b)(k-q)$

$(a-b)(a^2+ab+b^3) = (a-b)(k-q)$

$(a^2+ab+b^3) = (k-q)$

Доказано

6

Дано : Рассмотрим все остатки деления m на 11, и какими должны быть остатки деления n на 11, чтобы $5m+3n=11k$

0. у n должно быть 0, тогда выполняется второе утверждение
1. у n должно быть 2, тогда выполняется второе утверждение
2. у n должно быть 4, тогда выполняется второе утверждение
3. у n должно быть 6, тогда выполняется второе утверждение
4. у n должно быть 8, тогда выполняется второе утверждение
5. у n должно быть 10, тогда выполняется второе утверждение
6. у n должно быть 1, тогда выполняется второе утверждение
7. у n должно быть 3, тогда выполняется второе утверждение
8. у n должно быть 5, тогда выполняется второе утверждение
9. у n должно быть 7, тогда выполняется второе утверждение
10. у n должно быть 9, тогда выполняется второе утверждение

При каждом остатке при делении m на 11, если выполняется 1 утверждение, то выполняется и второе

Доказано

7

a) $\forall q \in [-M; M-1], 0 <= q+M < 2M \rightarrow \text{остаток}(q+m, 2M) = q+M \rightarrow I(q) = q+M-M = q$

b) $x = k_1M + x';\ y = k_2M + y'$

$I(x'+y') = \text{остаток}(x'+y'+M, 2M) - M$

$I(x+y) = \text{остаток}(x'+y'+M(k_1+k_2+1), 2M) - M$

если $(k_1+k_2)mod2 = 0$, то $I(x+y) = I(x'+y')$, иначе $I(x+y) = x'+y'-M = I(x'+y'-M)$

$I(I(x)+I(y)) =$

1. если $k_1mod2 = 0$ и $k_2mod2 = 0$: $I(x'+y')$
2. если $k_1mod2 = 0$ и $k_2mod2 = 1$: $I(x'+y'-M)$
3. если $k_1mod2 = 1$ и $k_2mod2 = 0$: $I(x'+y'-M)$

4. если $k_1 mod 2 = 1$ и $k_2 mod 2 = 1$: $I(x' + y')$

Доказано

c) $x = k_1 M + x';\ y = k_2 M + y'$

$I(xy) = \text{остаток}((k_1 M + x')(k_2 M + y') + M, 2M) - M$

$\text{остаток}(k_1 k_2 M^2 + k_2 M x' + k_1 M y' + x'y' + M, 2M) - M$

$\text{остаток}(M(k_1 k_2 M + k_2 x' + k_1 y' + 1) + x'y', 2M) - M$

При четном $P = k_1 k_2 M + k_2 x' + k_1 y'$, $I(xy) = I(x'y')$

При нечетном: $I(xy) = I(x'y' - M)$

$I(I(x)I(y)) =$

1. если $k_1 mod 2 = 0$ и $k_2 mod 2 = 0$: $I(x'y')$. При таких k-шках P четно.
2. если $k_1 mod 2 = 0$ и $k_2 mod 2 = 1$: $I(x'(y' - M)) = I(x'y' - x'M)$. При четном x', $I(x'y' - x'M) = I(x'y')$ и P четно, при нечетном $I(x'y' - x'M) = I(x'y' - M)$ и P нечетно
3. если $k_1 mod 2 = 1$ и $k_2 mod 2 = 0$: $I((x' - M)y') = I(x'y' - y'M)$.При четном y', $I(x'y' - y'M) = I(x'y')$ и P четно, при нечетном $I(x'y' - y'M) = I(x'y' - M)$ и P нечетно
4. если $k_1 mod 2 = 1$ и $k_2 mod 2 = 1$: $I((x' - M)(y' - M)) = I(x'y' - y'M - x'M + M^2)$. При только x' четном или только y' четном или только M четном или при каждом из них четном : $I(x'y' - y'M - x'M + M^2) = I(x'y')$ и P четно. Иначе $I(x'y' - y'M - x'M + M^2) = I(x'y' - M)$ и P нечетно.

Доказано.

8

a) Для того чтобы результат функции был целочисленным, для каждого члена a остаток при делении на 2 должен быть одинаковым

$f^1 : a_1 mod 2 = a_2 mpd 2 = \dots = a_n mod 2$

$f^2 : ((a_1 + a_2)/2) mod 2 = \dots = ((a_n + a_1)/2) mod 2$

$f^3 : ((a_1 + 2a_2 + a_3)/4) mod 2 = \dots = ((a_n + 2 * a_1 + a_2)/4)$

$\dots$

$f^{n-1} : ((a_1 + 2a_2 + \dots + a_n)/2^{n-2}) mod 2 = \dots = ((a_n + 2a_1 + \dots + a_{n-1})/2^{n-2}) mod 2$

уменьшим все части на $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)/2^{n-2}$ и домножим на 2^{n-2}

$(a_2 + \dots + a_{n-1}) mod 2 = (a_3 + \dots + a_n) mod 2 = \dots = (a_1 + \dots + a_{n-2})$

Пусть $S = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, тогда

$(S - a_1 - a_n) mod 2 = (S - a_2 - a_1) mod 2 = \dots = (S - a_n - a_{n-1})$

$(a_n + a_1) mod 2 = (a_1 + a_2) mod 2 = \dots = (a_{n-1} + a_n) mod 2$

что равнозначно f^2

b) Условие выполнения f^1 - все числа делятся на 2 с одинаковым остатком, f^2 - все числа делятся на 4 с одинаковым остатком $\dots$ f^n - все числа делятся на 2^n с одинаковым остатком. Все числа делятся на все степени двойки с одинаковым остатком. Значит все числа одинаковы.