dz 21

1

nZ - это подмножество Z, которое является кольцом, значит все свойства наследуются, следует только проверить корректность операций

$na + nb = n(a + b)$ сложение корректно

$na * nb = n^2ab = n(nab)$ умножение корректно

кольцо

2

нет, потому что нет обратных чисел у сложению у большинства чисел

3

$\frac{n}{a} + \frac{n}{b} = \frac{na+nb}{ab} = \frac{n(a+b)}{ab}$, но совсем не всегда $a + b$ делит ab, а значит операция сложения некорректна

4

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd}$ так как b и d не делятся на простое число, то и bd не делится, сложение корректно

умножение тоже

дистрибутивность

$\frac{a}{b}(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}) = \frac{a}{b}(\frac{cf+de}{df}) = \frac{acf+ade}{bdf}$ корректна

значит кольцо

5

$\frac{p-2}{p} + \frac{2}{p} = \frac{p}{p} = \frac{1}{1}$

кольцо

6

это кольцо изоморфно паре целых чисел, а целые числа - кольцо, значит и это множество с операциями кольцо

7

умножение не корректно

пример

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 & 14 \\ 6 & 5 & 0 \\ 14 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 59 & 16 & 29 \\ 72 & 17 & 48 \\ 53 & 38 & 47 \end{pmatrix}$$

8

операция сложения очевидно корректно

при перемножении верхнетреугольниъ матриц выходит тоже верхнетреуголбная

дистрибутивность:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} \times (\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ 0 & c_3 \end{pmatrix}) =$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_2 + a_3 & b_2 + b_3 \\ 0 & c_2 + c_3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_1(a_2 + a_3) & b_1(b_2 + b_3) \\ 0 & c_1(c_2 + c_3) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ 0 & c_3 \end{pmatrix}$$

а с учетом свойства

$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} D & E \\ 0 & F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD & AE + BF \\ 0 & CF \end{pmatrix}$ дистрибутивность сохраняется для любых n

9

$h(x) = f(x) + g(x)$

$h''(x) = f''(x) + g''(x)$

сумма корректна

$h(x) = f(x)g(x)$

$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

$h''(x) = f''(x)g(x) + f'(x)g'(x) + f'(x)g'(x) + f(x)g''(x) = f''(x)g(x) + 2f'(x)g'(x) + f(x)g''(x)$

перемножение корректно

$h(x)(g(x) + f(x)) = h(x)g(x) + h(x)f(x)$

дистрибутивность работает

10

рассмотрим перемножение

$$(3 + sinx))(sin3x) = 3sin3x + sinxsin3x = 3sin3x + \frac{1}{2}(cos(-2x) - cos4x)$$

умножение некорректно

11

операции корректны

дистрибутивность:

$$A \cap ((B/C) \cup (C/B)) = A \cap (B/C) \cup A \cap (C/B)$$

выполняется

значит кольцо

12

допустим x левый делитель нуля и обратим слева, тогда

$$yxz$$

такое что $xz = 0$ и $yx = 1$, тогда с одной стороны

$$yxz = y0 = 0$$

а с другой

$yxz = 1z = z$, при том что $z \neq 0$

противоречие

13

$$f(x) = c$$

необратимая и не делитель нуля

14

$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & ad + be \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, где

$$c = 0 \wedge b = -\frac{ad}{e}$$

$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ae \\ 0 & be \end{pmatrix}$, где $e = 0$

допустим существует другой правый делитель нуля тогда

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & e \\ 0 & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad & ae+bf \\ 0 & cf \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} ad = 0 \\ ae + bf = 0 \\ cf = 0 \end{cases}$$

нет другого решения, кроме $a = 0 \vee c = 0$

15

допустим есть элемент

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & ab + bc \\ 0 & c^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} a^3 & a^2b + abc + bc^2 \\ 0 & c^3 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} a^4 & a^3b + a^2bc + abc^2 + bc^3 \\ 0 & c^4 \end{pmatrix}$$

и так далее, вообщем матрица должна иметь вид

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$