IDZ 4 вариант 2

10

$A = U\Sigma V^T$

посчитаем $AA^T =$

$$\begin{pmatrix} 850 & -850 & -174 & 174 \\ -850 & 850 & 174 & -174 \\ -174 & 174 & 850 & -850 \\ 174 & -174 & -850 & 850 \end{pmatrix}$$

у нее собственные числа:

$2048 : (1, -1, -1, 1)^T$

$1352 : (-1, 1, -1, 1)^T$

$0 : (1, 1, 0, 0)^T$

$0 : (0, 0, 1, 1)^T$

сингулярные числа:

$\sigma_1 = 32\sqrt{2}$

$\sigma_2 = 26\sqrt{2}$

тогда матрица

$\Sigma = \begin{pmatrix} 32\sqrt{2} & 0 & 0 & 0\,0 & 26\sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$

построим матрицу V^T из собственных веекторов

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

теперь находим матрицу U оп формуле

$u_i = \frac{Av_i}{\sigma_i}$

$u_1 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

$u_2 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

$U = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

тогда получилось

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 0 & 26\sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

теперь

$B =$

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

посчитаем

$$= \begin{pmatrix} 32 & 0 & 0 & 0 \\ 32 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} V^T =$$

$$\begin{pmatrix} 16 & -16 & 16\sqrt{2} & 0 \\ -16 & 16 & 16\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

1

у нас есть уравнения

$a_1 X = b_1$

$a_2 X = b_2$

$a_3 X = b_3$

$a_4 X = b_4$

каждое из них содержит 4 линейных уравнения на 12 одинаковых для всех неизвестных

всего 16 уравнений

составим слау

$$\begin{cases} 3x_{11} - 4x_{21} + 4x_{31} = 3 \\ 3x_{12} - 4x_{22} + 4x_{32} = 6 \\ 3x_{13} - 4x_{23} + 4x_{33} = -3 \\ 3x_{14} - 4x_{24} + 4x_{34} = 9 \\ -8x_{11} - 2x_{21} + 6x_{31} = -4 \\ -8x_{12} - 2x_{22} + 6x_{32} = -8 \\ -8x_{13} - 2x_{23} + 6x_{33} = 4 \\ -8x_{14} - 2x_{24} + 6x_{34} = -12 \\ -6x_{11} + x_{21} - x_{31} = -6 \\ -6x_{12} + x_{22} - x_{32} = -12 \\ -6x_{13} + x_{23} - x_{33} = 6 \\ -6x_{14} + x_{24} - x_{34} = -18 \\ 2x_{11} + 4x_{21} - 5x_{31} = 1 \\ 2x_{12} + 4x_{22} - 5x_{32} = 2 \\ 2x_{13} + 4x_{23} - 5x_{33} = -1 \\ 2x_{14} + 4x_{24} - 5x_{34} = 3 \end{cases}$$

решаем методом гаусса и получаем

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

найдем размерность ядра

$$a \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = 0$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = 0$$

разменость 2, т.к. две переменные свободные и третья меняется чтобы сумма была 0

размерность образа 4, т. к. для любого b

$$a \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = b$$

$$\exists a = \begin{pmatrix} b_1/3 & b_2/6 & -b_3/3 & b_4/3 \end{pmatrix}$$

2

запишим матрицы квадратичных форм

$$Q_1 = \begin{pmatrix} -50 & -30 & -10 \\ -30 & -26 & -18 \\ -10 & -18 & -20 \end{pmatrix}$$

применим метод симметричного Гаусса

$$\begin{pmatrix} -50 & -30 & -10 \\ -30 & -26 & -18 \\ -10 & -18 & -20 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -50 & 0 & -10 \\ 0 & -8 & -12 \\ -10 & -12 & -20 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -50 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -12 \\ 0 & -12 & -18 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} -50 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

отрицательный индекс инерции : 2 положительный 0

матрица перехода к базису сроится через матрицы элементарных преобразований

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3/5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -3/5 & -1/5 \\ -3/5 & 1 & -3/2 \\ -1/5 & -3/2 & 1 \end{pmatrix}$$

квадратичная форма отрицательно определена

не существует базиса перехода к Q_2 так как у квадратичных форм разные индексы инерции

3

$(x, y)A = (x - 3y, 2x - 2y) = x - 3y + 2i(x - y)$

найдем собственные значения:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$-(1-\lambda)(2+\lambda) + 6 = 0$

$\lambda^2 + \lambda + 4 = 0$

нет решений над R

значит нет базиса в котором линейный оператор имеет диагональный вид.

4

матрица оператора дня:

пусть у нас вектор $(\text{здоровые} \quad \text{легко} \quad \text{тяжело})$

тогда матрица оператора дня:

$(0.3 \quad 0.3 \quad 0.4\, 0.14 \quad 0.76 \quad 0.1\, 0.14 \quad 0.36 \quad 0.5)$

найдем к чему сремится:

найдем такой вектор, при применении к которому оператора ничего не изменится (собственный вектор с собств. значением 1)

заметим что вектор $(2, 7, 3)$ как раз такой

тогда население страны будет коллинеарным этому вектору

$(1270, 4445, 1905)$

5

найдем при помощи Грамма-Шмидта

$$\begin{bmatrix} -2 & -10 & 6 & -15 \\ -2 & -10 & 16 & 9 \\ -2 & 4 & 12 & -7 \\ -2 & 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

$b_1 = a_1$

$b_2 = a_2 - \frac{(a_2,b_1)}{(b_1,b_1)} b_1 = (-10, -10, 4, 4) - \frac{3}{4} b_1 = (-7, -7, 7, 7)$

$b_3 = a_3 - \frac{(a_3,b_1)}{(b_1,b_1)} b_1 - \frac{(a_3,b_2)}{(b_2,b_2)} b_2 = (-5, 5, 5, -5)$

$b_4 = (-9, 9, -9, 9)$

нормируем и получаем матрицу Q

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

теперь найдем $R = Q^{-1}A = Q^T A$

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -18 & 4 \\ 0 & 14 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 10 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

6

6. Найдите расстояние от вектора $\alpha = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$ до подпространства L, заданного системой уравнений $Ax = 0$.

Найдите косинус угла между L и α.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

найдем вначале подпрастранство

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_4 \\ 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

ФСР:

$$x_4 \begin{pmatrix} -11/2 \\ 5/2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

тогда

$$L = < \begin{pmatrix} -11 \\ 5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} >$$

$$pr_L\alpha = \frac{(\alpha,l)}{(l,l)}l = \frac{-29}{93}l = (\frac{319}{93}, -\frac{145}{93}, -\frac{58}{31}, -\frac{58}{93})$$

$$ort\alpha = \alpha - pr_L\alpha = (-\frac{40}{93}, \frac{52}{93}, -\frac{66}{31}, -\frac{138}{93})$$

$$cos = \frac{||pr_L\alpha||}{||\alpha||} = \frac{69803}{129735}$$

7

найдем $a = x_2 - x_1 =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

распишем Фробениусово скалярное произведение

$$Tr(B^T A) = b_{11}a_{11} + b_{21}a_{21} + b_{12}a_{12} + b_{22}a_{22}$$

получилось скалярное произведение в некотором ОНБ

то есть это пространство U изоморфно векторному пространству с ОНБ U'

с изоморфизмом

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}_U \to$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

давайте найдем $L_1 + L_2$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 2 & 1 & 0 & -1 -1 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 2 & 1 & 0 & -1 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 0 & -1 & -4 & -1 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \to$$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 0 & 1 & 0 & -2 0 & 0 & -4 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 0 & 1 & 0 & -2 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \rightarrow$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} 0 & 1 & 0 & -2 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

$(\frac{1}{2}, -2, \frac{3}{4}, 1) \rightarrow (2, -8, 3, 4)$ - базис в $L_1 + L_2$

$(x_2 - x_1)^{\perp}_{L_1 + L_2} = xe$

$x = \frac{(a,e)}{(e,e)} = \frac{2-16+4}{4+64+9+16} = -\frac{10}{93}$

$p^2 = ||ort_{L_2+L_1} a|| = x^2||(a,a)|| = \frac{200}{2883}$

$p = \frac{10\sqrt{6}}{93}$

11

a)

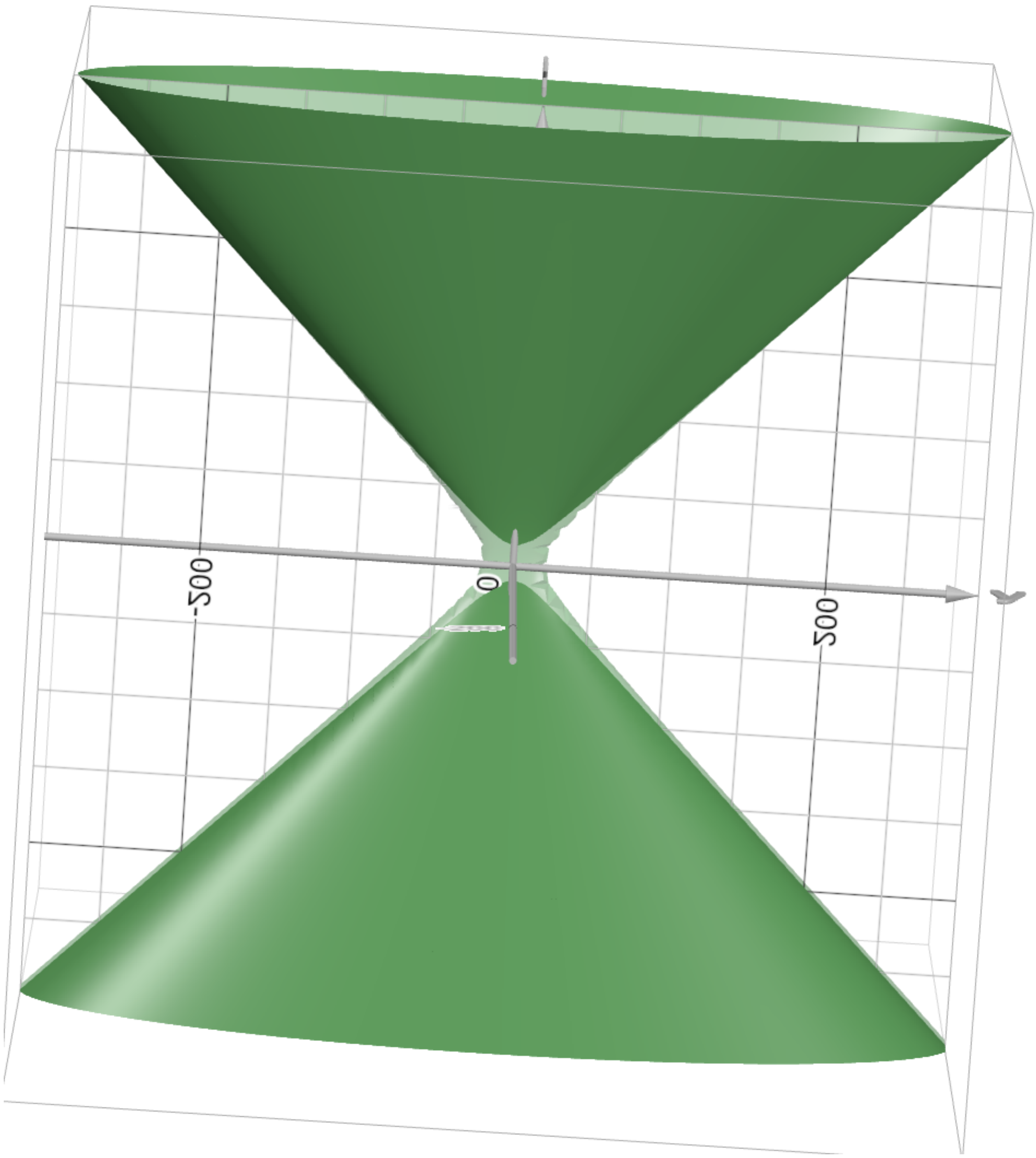
$-x^2 + 4x + y^2 - 2y + 9z^2 - 72z + 132 = 0$

$-(x-2)^2 + 4 + (y-1)^2 - 1 + (3z^2 - 24)^2 - 576 + 132 = 0$

$-(x-2)^2 + (y-1)^2 + (3z^2 - 24)^2 = 441$

$-\frac{(x-2)^2}{441} + \frac{(y-1)^2}{441} + \frac{(3z-24)^2}{441} = 1$

значит это уравнение однополосного гиперболойда



однополосный гиперболоид делит пространство на 2 части

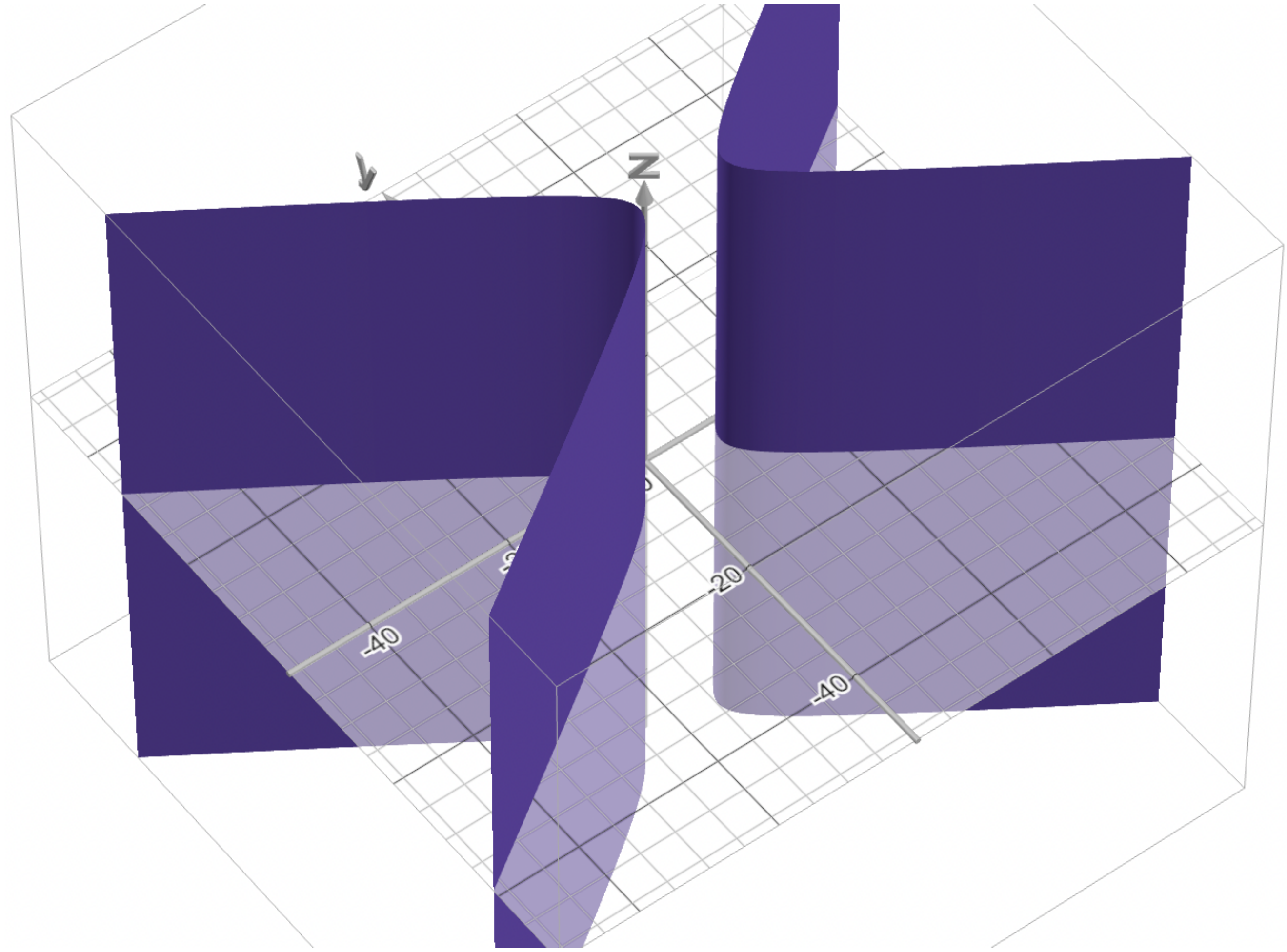
b)

$4x^2 + 24x - 9y^2 - 54y - 189 = 0$

$(2x + 6)^2 - 36 - (3y + 9)^2 + 81 - 189 = 0$

$\frac{(2x-6)^2}{144} - \frac{(3y+9)^2}{144} = 1$

это парабола в 2д, а при расширении в 3д становится гиперболическим цилиндром, делящим пространство на 3 части



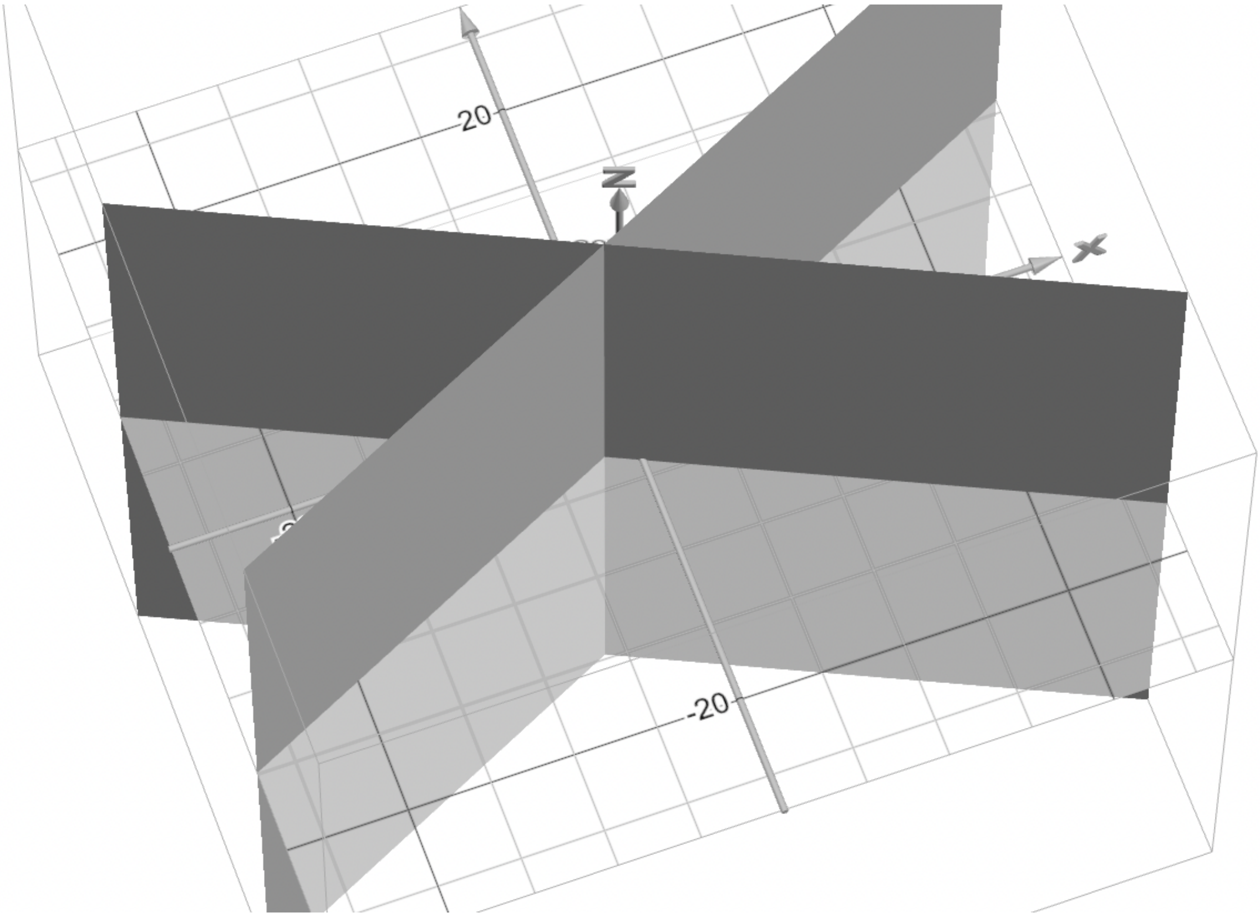
c)

$x^2 + 4x - 9y^2 - 54y + z^2 + 4z - 73 = 0$

$(x+2)^2 - 4 - (3y+9)^2 + 81 + (x+2)^2 - 4 - 73 = 0$

$(x+2)^2 - (3y+9)^2 + (x+2)^2 = 0$

две скрещивающиеся плоскости делят пространство на 4 части


20
Z
X
-20