dz 13

1

векторное произведение = 0

$p = \alpha a + 5b$

$q = 3a - b$

$[\alpha a + 5b, 3a - b] = 0$

$[\alpha a, 3a] + [\alpha a, -b] + [5b, 3a] + [5b, -b] = 0$

$[\alpha a, -b] + [5b, 3a] = 0$

$[\alpha a, -b] = [3a, 5b]$

$\alpha^2 a^2 + b^2 = 9a^2 + 25b^2$

$\alpha^2 = \frac{9a^2+24b^2}{a^2}$

α должна быть отрицательной, чтобы векторы были направлены в одну сторону

$\alpha = -\sqrt{\frac{9a^2+24b^2}{a^2}}$

2

Посчитаем вначале площадь ABC потом CDA и суммируем

$A = (-1, 0, 1)$

$B = (0, 1, 2)$

$C = (-2, 2, 5)$

$D = (-4, 0, 3)$

$BA = (-1, -1, -1)$

$BC = (-2, -3, -3)$

$ABC = |[BA, BC]|/2 = |(\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix})|/2 = |(0, -1, 1)|/2 = \sqrt{2}/2$

$DC = (2, 2, 2)$

$DA = (3, 0, -2)$

$CDA = |[DC, DA]|/2 = |(\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix},)|/2 = |(-4, 10, -6)|/2 = \sqrt{150}/2 = \frac{5\sqrt{6}}{2}$

$ABCD = \frac{5\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

3

$\begin{cases} (a, c) = 0 \\ cos60 = \frac{(c,b)}{|c||b|} \\ |c| = 1 \end{cases}$

$c = (c_x, c_y, c_z)$

$\begin{cases} c_x + c_y + c_z = 0 \\ |b| = 2(c, b) \\ |c| = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} c_x + c_y + c_z = 0 \\ 1 = 2c_x \\ c_x^2 + c_y^2 + c_z^2 = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} c_y + c_z = -1/2 \\ c_y^2 + c_z^2 = 3/4 \end{cases}$

$c_y = -1/2 - c_z$

$(-1/2 - c_z)^2 + c_z^2 = 3/4$

$1/4 + c_z + c_z^2 + c_z^2 = 3/4$

$2c_z^2 - c_z - 1/2 = 0$

$D = 1 + 4 = 5$

$c_z = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$

тогда

$c_y = \frac{\mp\sqrt{5} - 3}{4}$

получается два корня

$(1/2, \frac{1+\sqrt{5}}{4}, \frac{-\sqrt{5}-3}{4})$

$(1/2, \frac{1-\sqrt{5}}{4}, \frac{\sqrt{5}-3}{4})$

a, b, c левая тройка векторов при $c = (1/2, \frac{1+\sqrt{5}}{4}, \frac{-\sqrt{5}-3}{4})$

5

пусть $g = [a, b]$ тогда

$([a,b],[c,d]) =< g,c,d >=< c,d,g >= (c,[d,[a,b]]) = (c, a(d,b) - b(d,a)) = (c, a(d,b)) - (c, b(d,a)) = (d,b)(c,a) - (d,a)(c,b) = \begin{vmatrix} (a,c) & (a,d) \\ (b,c) & (b,d) \end{vmatrix}$

6

$(2, 6, -3)$

рассмотрим 3 случая:

1. плоскость параллельна плоскости xOy
2. плоскость параллельна плоскости xOz
3. плоскость параллельна плоскости yOz

$\forall C \in R$

1

$Cz + 3C = 0$

2

$Cy - 6C = 0$

3

$Cx - 2C = 0$

7

$Ax + By + Cz + D = 0$

из-за первого условия :

$Ax + Cz = 0$

$\frac{A}{C}x + z = 0$

$\frac{A}{C} = Q$

$Qx + z = 0$

подставим

$2Q + 1 = 0$

$Q = -\frac{1}{2}$

итого

$-\frac{1}{2}x - z = 0$

8

найдем линию пересечения

$$\begin{cases} x + 2y + 3z - 4 = 0 \\ 3x + z - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -6 & -8 & -7 \end{pmatrix}$$

$x = \frac{5-z}{3}$

$y = \frac{7-8z}{6}$

получается

$z = 5 - 3x$

тогда линия

$y = \frac{7-40-24x}{6}$

$24x + 6y + 33 = 0$

так как плоскость π отсекает равные отрезки на осях, то $\exists q : (0, q, 0), (0, 0, q) \in \pi$

$\pi : Ax + Cy + Cz = 0$

так как написанная выше линия лежит в этой плоскости, то плоскостть задается уравнением

$\pi : 24x + 6y + 6z = 0 \iff 4x + y + z = 0$