DZ 26

1

Билинейной формой называется функция, линейная по каждому аргументу, давайте рассмотрим все ее условия:

1) $F(x+y,z) = F(x,z) + F(y,z)$

$tr((A+B)C) = tr(AC+BC) = tr(AC) + tr(BC)$

2) $F(x,y+z) = F(x,y) + F(x,z)$

аналогично

3) $F(\alpha x, \beta y) = \alpha\beta F(x,y)$

$tr(\alpha A\beta B) = tr(\alpha\beta AB) = \alpha\beta tr(AB)$

выполняются все условия, значит $F(A,B)$ является билинейной формой

2

нет, потому что

$det(\alpha AB) = \alpha^n det(AB)$

3

Билинейной формой называется функция, линейная по каждому аргументу, давайте рассмотрим все ее условия:

1) $F(x+y,z) = F(x,z) + F(y,z)$

$tr((A^T+B^T)C) = tr(A^TC) + tr(B^TC)$

2) $F(x,y+z) = F(x,y) + F(x,z)$

аналогично

3) $F(\alpha x, \beta y) = \alpha\beta F(x,y)$

$tr(\alpha A^T\beta B) = tr(\alpha\beta A^TB) = \alpha\beta tr(A^TB)$

выполняются все условия, значит $F(A,B)$ является билинейной формой

4

Билинейной формой называется функция, линейная по каждому аргументу, давайте рассмотрим все ее условия:

1) $F(x+y,z) = F(x,z) + F(y,z)$

$\int_a^b (u+v)gdt = \int_a^b ugdt + \int_a^B vgdt$

2) $F(x,y+z) = F(x,y) + F(x,z)$

аналогично

3) $F(\alpha x, \beta y) = \alpha\beta F(x,y)$

$\int_a^b \alpha v\beta udt = \alpha\beta\int_a^b uvdt$

выполняются все условия, значит $F(A,B)$ является билинейной формой

5

по формулам перехода получаем матрицу перехода:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

тогда

$$A' = C^T A C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 9 & 7 & 14 \\ 6 & 5 & 10 \\ 17 & 12 & 29 \end{pmatrix}$$

6

$4x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3 =$

$(2x_1 - x_2 + \frac{3}{2}x_3)^2 + \frac{5}{4}x_3^2 + x_1x_3 =$

$(2x_1 - x_2 + \frac{3}{2}x_3)^2 + (\frac{\sqrt{5}}{5}x_1 + \frac{\sqrt{5}}{2}x_3)^2 - \frac{1}{5}x_1^2$

$$\begin{cases} x_1' = \frac{\sqrt{5}}{5}x_1 \\ x_2' = 2x_1 - x_2 + \frac{3}{2}x_3 \\ x_3' = \frac{\sqrt{5}}{5}x_1 + \frac{\sqrt{5}}{2}x_3 \end{cases}$$

7

применим симметричный метод гаусса и получим

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -6 & -9 \\ -6 & 10 & 20 \\ -9 & 20 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -6 & -9 \\ -6 & 10 & 20 \\ -9 & 20 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и для второй формы:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{6}{5} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{6}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

можем составить уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -6 & -9 \\ -6 & 10 & 20 \\ -9 & 20 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{6}{5} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{6}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

тогда

$$\begin{pmatrix} 3 & -6 & -9 \\ -6 & 10 & 20 \\ -9 & 20 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{6}{5} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{6}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

тогда

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{6}{5} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{6}{5} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{16}{5} & 1 & 0 \\ \frac{1}{5} & -1 & 1 \end{pmatrix}$$