DZ 17

1

БАЗА

$n = 1$

$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$

ШАГ

$1 - \frac{1}{2} + \dots - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+1} =$

$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} =$

$(\frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n+1}) + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n+2} =$

$\frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n+2}$

ч.т.д.

$$\lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \gamma + ln2n + o(1) - 1 - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{n} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \gamma + ln2n + o(1) - \gamma - lnn - o(1) =$$

$$\lim_{n\to\infty} ln2 + o(1) = ln2$$

2

a) Да

$\sum(-1)^{n-1}a_n = -\sum(-1)^n a_n$ (по признаку лейбница) $= -1 * 0 = 0$

b) Да

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 1 \iff$$

$\forall\epsilon\exists n_0 \forall n > n_0 : |b_n - a_n| < \epsilon$

тогда

$a_n - \epsilon < b_n < a_n + \epsilon$

т.к. a_n сходится, то она стремится к 0, а значит

$b_n \to 0$

теперь

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n =$

$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} b_k$

начиная с какого-то $k_0 : a_n \sim b_n \to \sum a_n \sim \sum b_n$

тогда

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} b_k =$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{k_0} b_k +$$

$$\sum_{k=k_0}^{n} a_k =$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{k_0} b_k +$$

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} a_n$$

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} a_n$$ сходится

k_0 конечно, поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{k_0} b_k$$ сходится

тогда и вся сумма ряда сходится

3

а)

$a_n = \sum cos(\frac{\pi n}{4})$ сходится, а значит

$\exists M : \sum cos(\pi n/4) < M$

а $b_n = \frac{1}{(n+2)\sqrt{ln^3(n+1)}}$ стремится к 0

тогда по признаку Дирихле $\sum a_n b_n$ сходится а, т.к. все элементы $a_n b_n$ положительны, то ряд сходится абсолютно

b)

$ln(1+\frac{(-1)^n}{n}) \sim ln(1+\frac{1}{n})(-1)^n$

тогда

$\sqrt{\frac{n^2+3}{n^3+4n}}ln(1+\frac{(-1)^n}{n}) \sim (\sqrt{\frac{n^2+3}{n^3+4n}}ln(1+\frac{1}{n}))(-1)^n$

что по признаку Лейбница сходится

4

a)

ряд сходится условно

т.к. он сходится по признаку Лейбница, но не сходится абсолютно потому, что

$\frac{lnn}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}}$ а он не сходится

b)

аналогично сходится по признаку Лейбница

и не сходится абсолютно

$\frac{n}{(n+2)\sqrt[4]{n+1}} > \frac{1}{n}$ а он не сходится

значит ряд сходится условно

c)

$\sum cos^3(2n)$ ограничена

а, $\frac{1}{ln(n+1)} \to 0$ тогда по принципу дирихле ряд сходится

но не сходится абсолютно

$\frac{|cos^3(2n)|}{ln(n+1)} > \frac{1}{n}$ а он не сходится

значит ряд сходится условно

d)

$\sum sin(n)$ ограничена

а, $\frac{1}{\sqrt{n}+sinn} \to 0$ тогда по принципу дирихле ряд сходится

но не сходится абсолютно

$\frac{sinn}{\sqrt{n}+sinn} > \frac{1}{n}$ а он не сходится

значит ряд сходится условно