DZ 4b

1

Дано $A \cap B = \empty$

Хотим $C^{A \cup B} \sim C^A \times C^B$

$A \cap B = \empty \implies$

$|A \cup B| = |A| + |B|$

$|C^{|A|+|B|}| = |C|^{|A|} * |C|^{|B|}$

$|C^A\times C^B| = |C^A|/C^B/=/C/^{/A/}|C|^{|B|}$

2

проведем биекцию :

$\forall x \in A : f(x) = \{ x \}$

иньекция:

допустим f не иньекция тогда

$\exists x_1, x_2, x_1 \neq x_2 : f(x_1) = f(x_2)$

но исход из определения $\implies x_1 = x_2 \perp$

сюрьекция:

допустим f не сюрьекция тогда

$\exists y, \forall x : f(x) \neq y$

чего тоже не может быть т.к. $\forall y = \{ x' \} \exists x' : f(x') = y$

значит равномощны

3

a)

$f_{(A \cup B) \setminus C}(x) = f_{A \cup B}(x) - f_{A \cup B}(x) f_C(x) = (f_A(x) + f_B(x) - f_A(x) f_B(x)) - (f_A(x) + f_B(x) - f_A(x) f_B(x)) f_C(x)$

$= f_A(x) + f_B(x) - f_A(x) f_B(x) - f_A(x) f_C(x) - f_B(x) f_C(x) + f_A(x) f_B(x) f_C(x)$

$= f_{A \setminus C} + f_{B \setminus C} - f_A(x) f_B(x) (1 - f_C(x)) =$

$= f_{A \setminus C} + f_{B \setminus C} - f_A(x) f_B(x) (1 - f_C(x))^2 =$

$= f_{A \setminus C} + f_{B \setminus C} - f_{A \setminus C}(x) f_{B \setminus C}(x) = f_{(A \setminus C) \cap (B \setminus C)}$

чтд

b)

$f_{(A \setminus B) \cup B}(x) =$

$f_{A\setminus B}(x) + f_B(x) - f_{A\setminus B}(x)f_B(x) =$

$f_A(x) - f_A(x)f_B(x) + f_B(x) - f_A(x)f_B(x) + f_A(x)f_B(x)^2 =$

$f_A(x) + f_B(x) - f_A(x)f_B(x) =$

$f_{A\cup B}(x)$

из

$f_{A\cup B}(x) = f_A(x) \implies B \subseteq A$

чтд

4

a)

$N^{N\times Q} \times N \gtrsim N^{N\times Q} \gtrsim 2^{N\times Q} \sim R^Q$

$N^{N\times Q} \times N \lesssim R^{N\times Q} \sim R^Q$

по КШБ доказано

b)

$\underline{5}^N \gtrsim \underline{2}^N \sim R$

$\underline{5}^N \lesssim \underline{2}^{N^3} \sim \underline{2}^N \sim R$

по КШБ $\underline{5}^N \sim R$

$\underline{3}^N \gtrsim \underline{2}^N \sim R$

$\underline{3}^N \lesssim \underline{2}^{N^2} \sim \underline{2}^N \sim R$

по КШБ $\underline{3}^N \sim R$

$\implies \underline{3}^N \sim \underline{5}^n$

c)

внутри любого круга можно построить квадрат со стороной $radius\sqrt{2}$ так можно построить биекцию между любым квадратом и кругом на плоскости

значит они равномощны

d)

любой треугольник задается шестью координатами (по 2 на каждую точку)

$R^6 \sim R$

$\implies$ множество всех треугольников на плоскости $\sim R$

5

$R^R \sim (2^N)^R \sim 2^{N\times R} \sim 2^R \sim P(R)$

6

внутри любой окружность есть точка с рациональными координатами, значит мы может каждый круг на плоскости задать парой рациональных чисел (никакие два круга не будут иметь одинаковые "индексы" потому, что восьмерки а следственно и круги не пересекаются), тогда каждая восьмерка будет обозначаться четырьмя рациональными числами

значит множество всех восьмерок $\lesssim Q^4 \sim N$

7

найдем S' например все прямые линии параллельные оси абсцисс

а поскольку $R^2 \sim R \implies P(R^2) \sim P(R)$

значит существует какая-то биекция $f : P(R^2) \to P(R)$

$S = f(S')$

8

Функция f, определённая на множестве M, на- зывается непрерывной в точке x_0 ∈ M, если для любой последовательности (x_n) элементов мно- жества M, сходящейся к x_0, последовательность (f(x_n)) сходится к f(x_0).

Это значит что для каждой точки x в эпсилон окрестности все значения этой функции отличаются не больше чем на дельту, но для любой дельта окрестности мы можем выбрать рациональное число, входящее в нее

получается мощность всех непрерывных функций R^Q ($\forall x \in R, \exists y \in Q, y \in U_\delta(f(x))$)

$R^Q \sim R$