

DZ

1

1. допустим операция незамкнута, тогда для каких-то a, b из пересечения $a * b = c$ где c не состоит в пересечении, тогда это число состоит не во всех подгруппах, противоречие
2. весь набор - подгруппы какой-то группы, в которой соблюдается ассоциативность, тогда и на пересечении подгрупп соблюдается ассоциативность
3. нейтральный элемент должен быть во всех подгруппах значит он есть и в пересечении подгрупп
4. как в 1)

2

допустим одна группа не содержится в другой, тогда в каждой группе существует по уникальному элементу a в одной и b в другой

тогда $c = a * b$ не должно входить в пересечение групп, потому что

для для первой подгруппы $a^{-1} * c = b$ не входит в нее

и для второй $c * b^{-1} = a$ не входит во вторую

значит одна группа содержится в другой

3

это будут все подгруппы

допустим есть подгруппа не являющаяся циклической

тогда в ней есть a и b такие что $a \neq b$ тогда из этих элементов получится составить всю группы

4

а) 1 неконечное количество элементов

б) 8 элементов

в) 1 элемент

г) неконечное количество элементов

д) неконечное количество элементов

е) неконечное количество элементов

ответ агде

5

$$Z_{15}^* = \{ 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14 \}$$

переберем всевозможные порождающие элементы

возьмем 2:

1. можно составить только 4 и 8

4 не имеет смысла брать потому что он как 2 только безплезней

из 7 ничего нельзя составить

8 аналогично 4

из 11 ничего нельзя составить

возьмем порожденный элемент 13

$$4 \equiv 13^2$$

$$7 \equiv 13^3$$

все

из 14 нельзя составить ничего

значит группа не циклична

6

$$Z_{14}^* = \{ 3, 5, 9, 11, 13 \}$$

$$5 \equiv 3^5$$

$$9 \equiv 3^2$$

$$11 \equiv 3^4$$

$$13 \equiv 3^3$$

циклична

7

$$0 \rightarrow 0$$

$$1 \rightarrow a$$

$$2 \rightarrow 2a$$

$$3 \rightarrow 3a$$

$$4 \rightarrow 4a$$

$$5 \rightarrow 5a$$

также должно выполняться

$$f(cd) = f(c)f(d)$$

значит

$$a(c + d) = ac + ad$$

вернее

$$a((c + d) \bmod 6) \equiv ac + ad \pmod{6} \quad (18)$$

$$a((c + d) \bmod 6) \equiv a(c + d) \pmod{6} \quad (18)$$

значит если $c + d > 6$ значит лишняя 6 справа при домножении на a должна ликвидироваться

поэтому в качестве a подойдут числа кратные 3 : 0, 3, 6, 8, 12, 15