DZ

1

$f(x) = |1+x| - |1-x|$

рассмотрим 3 промежутка: $(-\infty; -1), (-1; 1), (1; +\infty)$

$x \in (-\infty; -1):$

$f(x) = -1 - x + 1 - x = -2x$

$\int -2x\mathrm{d}x = -x^2$

$x \in (-1; 1):$

$f(x) = 1 + x + 1 - x = 2$

$\int 2\mathrm{d}x = 2x$

$x \in (1; +\infty):$

$f(x) = 1 + x - 1 + x = 2x$

$\int 2x\mathrm{d}x = x^2$

2

a)

первообразной $F(x)$ для $f(x)$ называется такая функция, что $F'(x) = f(x)$

при этом производную можно взять только у непрерывной функции. Значит $F(x)$ должна быть непрерывна

$$sign(x) = \begin{cases} 1, x \in (0, +\infty) \\ 0, x = 0 \\ -1, x \in (-\infty; 0) \end{cases}$$

тогда $F(x)$ должна выглядеть

$$F(x) = \begin{cases} x, x \in (0; +\infty) \\ c, x = 0 \\ -x, x \in (-\infty; 0) \end{cases}$$

если $c \neq 0$ то функция разрывна и у нее точно нельзя взять производную на промежутке R

рассмотрим $c = 0$

тогда $F(x) = |x|$

но в точках где подмодульная функция равно 0 производной не существует, значит и $F(x)$ не существует

b) определена на всей R $F(x) = |x|$

$$F'|x| = \begin{cases} 1, x > 0 \\ -1, x < 0 \end{cases} = sign(x)/(0,0)$$

3

a)

$$\int \frac{x^2-x+1}{\sqrt{x}} dx = \int x^{3/2} dx - \int x^{1/2} dx + \int x^{-1/2} dx = \frac{2x^{5/2}}{5} - \frac{2x^{3/2}}{3} - 2x^{1/2} + c$$

b)

$$\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} dx = \int x^{1/2} x^{1/4} x^{1/8} dx = \int x^{7/8} dx = \frac{8x^{15/8}}{15} + c$$

c)

$$\int sin^2 \frac{x}{2} dx = \int (\frac{1}{2} - \frac{cosx}{2}) dx = \frac{x}{2} - \frac{sinx}{2} + c$$

4

a)

$$\int \frac{6x-7}{3x^3-7x+1} dx$$

$$t = 6x - 7$$

$$\int \frac{t}{\frac{t^2-49}{12}+1} d\frac{7+t}{6} =$$

$$\int \frac{12t}{t^2-37} d\frac{7+t}{6} =$$

$$\int \frac{2t}{t^2-37} dt =$$

$$\int \frac{1}{t^2-37} dt^2 =$$

$$\int \frac{1}{t^2-37} d(t^2-37) =$$

$$ln|t^2 - 37| = ln|36x^2 - 84x + 12| + c$$

b)

$$\int x^3 \sqrt{x^2-1} dx = \int x^2 \sqrt{x^2-1} dx^2$$

$$t = x^2$$

$$\int t\sqrt{t-1} dt = \int ((t-1)\sqrt{t-1} + \sqrt{t-1}) d(t-1)$$

$$q = t - 1$$

$\int(qq^{1/2}-q^{1/2})dq = \int q^{3/2}dq - \int q^{1/2}dq = \frac{2q^{5/2}}{5} - \frac{2q^{3/2}}{3}$

$\frac{2(x^2-1)^{5/2}}{5} - \frac{2(x^2-1)^{3/2}}{3} + c$

c)

$\int e^{2x^2+2x-1}(2x+1)dx =$

$\frac{1}{2}\int e^{2x^2+2x-1}(4x+2)dx =$

$\frac{1}{2}\int e^{2x^2+2x-1}d(2x^2+2x) =$

$\frac{1}{2}\int e^{2x^2+2x-1}d(2x^2+2x-1) =$

$= \frac{e^{2x^2+2x-1}}{2} + c$

d)

$\int \frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}}dx =$

$\frac{1}{ln2}\int \frac{ln(2)2^x}{\sqrt{1-4^x}}dx =$

$\frac{1}{ln2}\int \frac{1}{\sqrt{1-4^x}}d2^x =$

$\frac{arcsin2^x}{ln2} + c$

e)

$\int \frac{1}{xlnxlnlnx}dx =$

$\int \frac{1}{lnxlnlnx}dlnx$

$t = lnx$

$\int \frac{1}{tlnt}dt =$

$\int \frac{1}{lnt}dlnt =$

$ln(lnt) + c = ln(ln(ln|x|)) + c$

f)

$\int sin^6xcosxdx =$

$\int sin^6dsinx =$

$\frac{sin^7x}{7} + c$

g)

$\int \frac{1}{x^2}cos\frac{1}{x}dx =$

-$\int(-\frac{1}{x^2}cos\frac{1}{x})dx =$

$-\int cos\frac{1}{x}d\frac{1}{x} =$

$-sin\frac{1}{x} + c$

h)

$\int\frac{sinxdx}{\sqrt{1-2cosx}} =$

$\frac{1}{2}\int\frac{2sinx}{\sqrt{1-cosx}}dx =$

$\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{1-2cosx}}d(-2cosx) =$

$\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{1-2cosx}}d(1-2cosx) =$

$ln(1-2cosx) + c$

i)

$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}arcsinx}dx =$

$\int\frac{1}{arcsinx}darcsinx =$

$ln|arcsinx| + c$

5

a)

$F(x) = \int xlnxdx$

$\int xlnxdx =$

$x^2lnx - \int xdxlnx =$

$x^2lnx - (\int x(lnx+1)dx) =$

$x^2lnx - (\int xlnxdx + \frac{x^2}{2} + c) =$

$x^2lnx - \frac{x^2}{2} - \int xlnxdx$

$\implies$

$F(x) = x^2lnx - \frac{x^2}{2} - F(x)$

$F(x) = \frac{x^2}{2}(lnx - \frac{1}{2})$

b)

$\int arctgxdx =$

$$xarctgx - \int xdarctgx =$$

$$xarctgx - \int \frac{x}{1+x^2}dx =$$

$$xarctgx - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx =$$

$$xarctgx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}d(x^2+1) =$$

$$xarctgx - \frac{ln(1+x^2)}{2} + c$$

c)

$$\int \frac{arcsinx}{x^2}dx =$$

$$-(\int -\frac{arcsinx}{x^2}dx) =$$

$$-(\int arcsinxdx^{-1}) =$$

$$-(\frac{arcsinx}{x} - \int \frac{1}{x}darcsinx) =$$

$$-(\frac{arcsinx}{x} - \int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}dx) =$$

$$-(\frac{arcsinx}{x} - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx) =$$

$$-(\frac{arcsinx}{x} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}d(-x^2)) =$$

$$-(\frac{arcsinx}{x} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x^2-1)\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x^2}}d(1-x^2)) =$$

$$-(\frac{arcsinx}{x} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x^2}}d(1-x^2))$$

$$t = 1 - x^2$$

$$-(\frac{arcsinx}{x} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{t\sqrt{t}-\sqrt{t}}d(t)) =$$

$$-(\frac{arcsinx}{x} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{t}(t-1)}d(t)) =$$

$$-(\frac{arcsinx}{x} - \int \frac{1}{2\sqrt{t}(t-1)}d(t)) =$$

$$-(\frac{arcsinx}{x} - \int \frac{1}{(t-1)}d(\sqrt{t})) =$$

$$-(\frac{arcsinx}{x} - \frac{1}{2}ln|\frac{1+\sqrt{t}}{1-\sqrt{t}}|) + c =$$

$$-(\frac{arcsinx}{x} - \frac{1}{2}ln|\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}|) + c =$$