Дз 4

2

a) при больших n:

$(\frac{n}{2n})^n < a_n < (\frac{1.1n}{1.9n})$

$(\frac{n}{2n})^n = (\frac{1}{2})^n \to 0$

$(\frac{1.5n}{n})^n = (\frac{11}{19})^n \to 0$

$\implies a_n \to 0$

b) при больших n:

$\sqrt[n]{2} < a_n < \sqrt[n]{3}$

$\sqrt[n]{2} \to 1$

$\sqrt[n]{3} \to 1$

$\implies a_n \to 1$

c) при больших n:

$\sqrt[n]{3^n} < a_n < \sqrt[n]{2 * 3^n}$

$\sqrt[n]{3^n} \to 3$

$\sqrt[n]{2 * 3^n} \to 3$

$\implies a_n \to 3$

d) при больших n:

$\sqrt[n]{n} < a_n < \sqrt[n]{3n}$

$\sqrt[n]{n} \to 1$

$\sqrt[n]{3n} \to 1$

$\implies a_n \to 1$

2

$a_n = (cos(\frac{\pi n}{2}))^{n+1}$

последовательность периодическая:

$0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, ...$

Значит $sup = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = 1 \wedge inf = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = -1$

А множество частичных пределов:

$a_{2n-1} \to 0$

$a_{4n-2} \to -1$

$a_{4n} \to 1$

3

предположим предел есть и он равен A, тогда

$lim(x_n) = lim(x_{n+1})$

$A = \sqrt{5A}$

$A^2 = 5A$

$A(A-5) = 0$

$A = 5$

$A = 0$ неподходит

докажем что $x_{n-1} \leq x_n \leq 5$, т.е последовательность монотонно возрастает и ограничена.

1)$x_{n-1} \leq x_n$

$x_{n-1} \leq \sqrt{5x_n - 1}$

$x_{n-1}(x_{n-1} - 5) \leq 0$

$x_{n-1} \in (-\infty; 0] \cup [5; \infty)$ неподходит

$x_{n-1} \in [0; 5]$, подходит

2)$x_n \leq 5$

По ПМИ:

БАЗА: $n = 1$ подходит

Шаг: пусть для $n = k$ работает, докажем для $k + 1$:

$x_{k+1} \leq 5$

$\sqrt{5x_k} \leq 5$

$5x_k \leq 25$

$x_k \leq 5$

Так как последовательность монотонно возрастает 1), и ограничена 2), то по теореме Вейерштрасса предел последовательность существует.