ДЗ 5

1

a)

$(\frac{n+2}{n+1})^{2n} = (1+\frac{1}{n+1})^{2n} = (1+\frac{1}{n+1})^{2(n+1)}/(1+\frac{1}{n+1})^2$

$\lim\limits_{n\to+\infty}(\dfrac{n+2}{n+1})^{2n} \to \dfrac{e^2}{1^2} = e^2$

b)

$(1-\frac{4}{n})^{3n-2} = (1-\frac{12}{3n})^{3n}/(1-\frac{4}{n})^2$

$\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\dfrac{4}{n})^{3n-2} \to \dfrac{e^{-12}}{1} = e^{-12}$

c)

$(\frac{n^2+3}{n^2+2})^{4n^2+1} = (1+\frac{1}{n^2+2})^{4(n^2+2)}/(1+\frac{1}{n^2+2})^7$

$\lim\limits_{n\to+\infty}(\dfrac{n^2+3}{n^2+2})^{4n^2+1} \to \dfrac{e^4}{1} = e^4$

d)

$(\frac{n+2}{3n-1})^n = (\frac{1}{3}\frac{n+2}{n-\frac{1}{3}})^n = (\frac{1}{3})^n(1+\frac{\frac{5}{6}}{n-\frac{1}{3}})^{n-\frac{1}{3}}(1+\frac{\frac{5}{6}}{n-\frac{1}{3}})^{\frac{1}{3}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}(\dfrac{n+2}{3n-1})^n \to 0 * e^{5/6} * 1 = 0$

2

a)

по Гейне:

берем все последовательности стремящиеся к 2

Тогда значение $2x^2-3x+1$ по арифметике пределов:

$2x^2 -3x +1 = 2*4* - 3*2* + 1 = 3$

Значит функция тоже сходится к 3.

По Коши:

$|2x^2-3x+1-3| < \epsilon$

$|2x^2-3x-2| < \epsilon$

$D = 9+16 = 25$

$x = \frac{3\pm5}{4} = 2, -0.5$

$|2(x-2)(x+0.5)| < \epsilon$

Пусть $\delta < 1$, тогда

$|2(x-2)(x+0.5)| < 2*1*3.5\delta = 7\delta$

$\epsilon \geq 7\delta$

$\delta = min(1, \epsilon/7)$

b)

по Гейне:

берем все последовательности стремящиеся к 1

Тогда значение $\frac{x^2-3x}{x+1}$ по арифметике пределов:

$\frac{x^2-3x}{x+1} = \frac{1-3}{2} = -1$

Значит функция тоже сходится к -1.

по Коши:

$|\frac{x^2-3x}{x+1} + 1| < \epsilon$

$|\frac{x^2-2x+1}{x+1}| < \epsilon$

$|\frac{(x-1)^2}{x+1}| < \epsilon$

Пусть $\delta < 1$, тогда

$|\frac{(x-1)^2}{x+1}| < \frac{1}{1}\delta = \delta$

$\epsilon > \delta$

$\delta = min(1, \epsilon)$

3

a)

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+4x-5}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+5)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+5}{x+1} = 3 \text{ По Гейне}$$

b)

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3-5x^2+3x+9}{x^3-8x^2+21x-18} = \lim_{x\to 3} \frac{(x+1)(x-3)^2}{(x-2)(x-3)^2} = \lim_{x\to 3} \frac{x+1}{x-2} = 4 \text{ По Гейне}$$

c)

$$\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{6-x}-1}{3-\sqrt{4+x}} = \lim_{x\to 5} \frac{(6-x-1)(3+\sqrt{4+x})}{(9-4-x)(\sqrt{6-x}+1)} = \lim_{x\to 5} \frac{3+\sqrt{4+x}}{\sqrt{6-x}+1} = 3 \text{ По Гейне}$$

d)

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to 3}\frac{-4x-6}{(x-1)(x-3)(\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6})}=$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{-2}{(x-1)(\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6})}=\frac{-2}{2*(3+3)}=-\frac{1}{6}$$ по Гейне

e)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\color{red}{\backslash\mathrm{tg}}4x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin x}\frac{1}{\cos 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x\cos 4x}\frac{x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$$ По 1 Замечательному пределу

f)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x^3-1}{\sin^6 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-2\sin^2\frac{3x^3}{2})-1}{sin^6 2x}=\lim_{x\to 0}-\frac{2\sin^2\frac{3x^3}{2}}{sin^6 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{3x^3}{2}}{(\frac{3x^3}{2})^2}*\frac{(2x)^6}{sin^6 2x}*-\frac{2(\frac{3}{2})^2}{2^6}=-\frac{9}{2^7}$$

По 1 замечательному пределу