ДЗ 4

1

$(n+1)(n-1)-n^2 = n^2-1-n^2 = -1$

2

$(\frac{1-t^2}{1+t^2})^2 + \frac{4t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{1-2t^2+t^4+4t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{t^4+2t^2+1}{t^4+2t^2+1} = 1$

3

$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix} =$ $(4 * -2 * -5) + (53-7) + (1* -3 * 8) - (5*-21)- (-53*-3) - (4* -7 * 8)= 40 + -105 + -24- -10 - 45 - -224=100$

4

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

5

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 9 \\ 16 & 25 & 81 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 9 \\ 0 & 5 & 45 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 45 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 20 \end{vmatrix} = 20$$

6

0, так как третий столбец это 1 столбец намноженный на константу

7

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix}$$

Все члены с $a_{3,2}$:

1)$a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3}a_{4,4}$

2)$a_{1,1}a_{3,2}a_{4,3}a_{2,4}$

3)$a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3}a_{4,4}$

4)$a_{2,1}a_{3,2}a_{4,3}a_{1,4}$

5)$a_{4,1}a_{3,2}a_{1,3}a_{2,4}$

6)$a_{4,1}a_{3,2}a_{2,3}a_{1,4}$

Из них положительные : 2), 3), 6)

8

$$\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix},$$

$10x^4, -2x^3, -3x^3$

9

Зная свойство : Умножение всех элементов строки или столбца определителя на некоторое число λ равносильно умножению определителя на это число. Значит мы n раз вынесем -1, значит определитель изменится в $(-1)^n$ раз

10

придется переставить столбики $n-1$ раз, значит определитель изменится в $(-1)^{n-1}$ раз

11

Чтобы получить матрицу повернутую на 90 градусов, нужно транспонировать ее и отзеркалить строки относительно центра, тогда определитель изменится в $(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ раз

12

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -3$$

13

Произведение входит в определитель, так как никакая строка и никакой столбец не повторяются в произведении дважды

Рассмотрим подстановку:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & 3n-2 & 3n-1 & 3n \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 & \dots & 3n & 3n-1 & 3n-2 \end{bmatrix}$$

Тогда инверсий в подстановке : $3n$, значит при четных n произведение будет положительно, а при нечетных отрицательно

14

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{vmatrix} = a_1a_5a_9 + a_7 * a_2a_6 + a_3a_4a_8 - a_3a_5a_7 - a_9a_4*a_2 - a_1 a_8a_6$$

1)заметим, что разные множители одночлена одного знака состоит в разных одночленах другого знака

Допустим ответ 6, значит каждой одночлен должен быть равным 1, значит в каждом из отрицательных одночленов должно быть 1 или 3 отрицательных единицы.

`Пусть в первом отрицательном одночлене 1 отрицательное значение`, значит в каком-то из положительных одночленов, в котором есть это значение должно быть еще одно отрицательное значение, тогда по 1) другой отрицательный одночлен содержит как минимум 1 отрицательное значение.

Если в нем другие два значение отрицательны, то два остальных положительных одночлена по 1) должны содержать еще по одному отрицательному значению, причем эти значения не должны быть в первом отрицательном одночлене, значит они оба в третем отрицательном одночлене, но тогда он должен иметь еще одно отрицательное значение, но тогда какой-то положительный одночлен станет отрицательным. Противоречие.

рассмотрим случай когда другие два значения отрицательны. Тогда в третем отрицательном одночлене может быть либо 1 либо 3 отрицательных числа. В обоих случаях хотябы 1 положительный одночлен становится отрицательным.

`Тогда в первом отриццательном одночлене три отрицательных числа`, значит в каждом положительном одночлене должно быть по еще 1 отрицательному числу, тогда в кажлом из них должно быть по еще одному отрицательному числу, тогда другие два отрицательных одночлена становятся отрицательными.

Тогда ответ 4, приведу пример :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

П65

тяжело...

П68

Заметим что $\epsilon^3 = 1$:

$(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^3 = \frac{-1+3i\sqrt{3}+9-3i\sqrt{3}}{8} = \frac{8}{8} = 1$

Тогда $det = 1 + \epsilon^3 + \epsilon^6 - \epsilon^3 - \epsilon^3 - \epsilon^3 = 0$