ДЗ 5

1

$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ = $a \begin{vmatrix} -3 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} + d \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}$ =
$a(-27-8-8+3+24+24)-b(18+24+16-9-48-16)+c(-12-18-4+6+36+4)-d(-16-27-16+24+48+6)$

$= 8a+15b-12c-19d$

2

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}$ =

$2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}$ -

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}$ =

$2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}$ - $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix} + O$

Получилась рекуррентная функция:

$|A_n| = 2|A_{n-1}| - |A_{n-2}|$

Представим, что $\lambda^n = |A_n|$, тогда :

$\lambda^2 = 2\lambda - 1$

$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

$\lambda = 1$

$|A_1| = 2; |A_0| = 1$

Система:

$\begin{bmatrix} C_1 + C_2 = 2 \\ C_1 = 1 \end{bmatrix}$

решим систему:

$C_1 = 1 \; C_2 = 1$

ответ:

$|A_n| = 1 + n$

3

Пусть M_n даннвя матрица, а

$A_k = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}$ Где k=n-2

M_n= $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}$ = 5 $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 & \cdots \\ 1 & 3 & 2 & \cdots \\ 0 & 1 & 3 & \cdots \\ \dots & \dots & \dots & \cdots \end{vmatrix}$ $-$ 6 $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 3 & 2 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}$ =
$5(5A_k - 2A_{k-1}) - 6 * 4A_k = A_k - 10A_{k-1}$

получилось

$M_n = A_k - 10A_{k-1}$

рассмотрим A_k:

$A_k = 3A_{k-1} - 2A_{k-2}$

Представим, что $\lambda^k = |A_k|$, тогда

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$

$\lambda_1 = 1$ $\lambda_2 = 2$

C_1 и C_2 - какие-то константы, что $|A_k| = C_1\lambda_1^k + C_2\lambda_2^k$

$|A_1| = 3; |A_0| = 1$

Система:

$\begin{bmatrix} C_1 + 2C_2 = 3 \\ C_1 + C_2 = 1 \end{bmatrix}$

решим систему:

$C_1 = -1$ $C_2 = 2$

значит:

$|A_k| = 2^{k+1} - 1$

Значит

$|M_n| = 2^{n-1} - 1 - 10 * 2^{n-2} + 10 = 9 - 2^{n+1}$

4

При n четных:

$A_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 3 \end{vmatrix}$ = $3A_{n-1} - 2A_{n-2}$

При нечетных:

$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 3 \end{vmatrix}$ = $3A_{n-1} - 2A_{n-2}$

руккурентные формулы совпадают, значит можно решать как и для нечередующихся матриц.

$A_n = 3A_{n-1} - 2A_{n-2}$

Представим, что $\lambda^n = |A_n|$, тогда

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$

$\lambda_1 = 1$ $\lambda_2 = 2$

C_1 и C_2 - какие-то константы, что $|A_n| = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$

$|A_1| = 3; |A_0| = 1$

Система:

$$\begin{bmatrix} C_1 + 2C_2 = 3 \\ C_1 + C_2 = 1 \end{bmatrix}$$

решим систему:

$C_1 = -1$ $C_2 = 2$

значит:

$|A_k| = 2^{n+1} - 1$

5

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{vmatrix}$$

$$|A^T| = \begin{vmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{vmatrix}$$

$$|AA^T| = \begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 \end{vmatrix} = (a^2+b^2+c^2+d^2)^4$$

$det(AB) = det(A) * det(B) \wedge det(A) = det(A^T) \implies det(A) = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2$

6

1е решение:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 & 7 & 7 \\ 5 & 3 & 2 & 9 & 1 \\ 2 & 5 & 7 & 8 & 3 \\ 2 & 8 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 & 7 & 7 \\ 1 & 3 & -10 & -5 & -13 \\ 2 & 5 & 7 & 8 & 3 \\ 2 & 8 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -10 & -5 & -13 \\ 2 & 0 & 6 & 7 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 8 & 3 \\ 2 & 8 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -10 & -5 & -13 \\ 0 & -6 & 26 & 17 & 33 \\ 0 & -1 & 27 & 18 & 29 \\ 0 & 2 & 24 & 15 & 27 \\ 0 & 1 & 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -10 & -5 & -13 \\ 0 & 1 & 6 & 7 & 9 \\ 0 & -1 & 27 & 18 & 29 \\ 0 & 2 & 24 & 15 & 27 \\ 0 & -6 & 26 & 17 & 33 \end{vmatrix}$$

=

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -10 & -5 & -13 \\ 0 & 1 & 6 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 33 & 25 & 38 \\ 0 & 0 & 12 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 62 & 59 & 87 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -10 & -5 & -13 \\ 0 & 1 & 6 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 12 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 33 & 25 & 38 \\ 0 & 0 & 62 & 59 & 87 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 & -10 & -13 \\ 0 & 1 & 7 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 12 & 9 \\ 0 & 0 & 25 & 33 & 38 \\ 0 & 0 & 59 & 62 & 87 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 & -10 & -13 \\ 0 & 1 & 7 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 12 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -267 & -187 \\ 0 & 0 & 0 & -646 & -444 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 267 & 187 \\ 646 & 444 \end{vmatrix} =$$

$118548 - 120802 = -2254 = 23 * -98$

2е решение:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 & 7 & 7 \\ 5 & 3 & 2 & 9 & 1 \\ 2 & 5 & 7 & 8 & 3 \\ 2 & 8 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 & 7 & 20677 \\ 5 & 3 & 2 & 9 & 53291 \\ 2 & 5 & 7 & 8 & 25783 \\ 2 & 8 & 4 & 5 & 28451 \\ 0 & 1 & 6 & 7 & 1679 \end{vmatrix}$$

Один из столбиков делится на 23, при этом определитель состоит из суммы(возможно отрицательных) перемножений, в каждом из которых есть элемент последнего столбца, значит вся сумма делится на 23.