Домашнее задание

1.

Допустим последовательность ограничена снизу, но не ограничена сверху, тогда мы не можем назвать ее ограниченной, потому что $\nexists C, \forall n : a_n < C$, аналогично в обратной ситуации. Значит последовательность называется ограниченой тогда и только тогда, когда $\exists C, \forall n : |a_n| < C$

2.

a)$a_n = x_n | x_n = a$

b)$a_n = x_n | x_n = a^{\frac{n-1}{n}}$

c) $a_n = x_n | x_n = [\, a : n > 0 \ - a : n \leq 0 \,]$

d) $a_n = x_n | x_n = a * nmod2$

3.

Определение предела последовательности: $\forall \epsilon > 0, \exists N, \forall n > N : |x_n - x| < \epsilon$. Значит и $\forall \epsilon > 0, \exists N, \forall n + p > N : |x_n - x| < \epsilon$ и $\forall \epsilon > 0, \exists N, \forall n - p > N : |x_n - x| < \epsilon$. А исходя из равенства $y_n = x_{n-p} \vee y_n = x_{n+p} \implies \lim\limits_{y \to \infty} y_n \to x$

4.

в знаменателе положительное число, а в числителе отрицательно, значит сверху ограничена, докажем что ограничено снизу

$\frac{1-n}{\sqrt{n^2+1}} > \frac{1-n}{\sqrt{n^2-2n+1}} = \frac{1-n}{n-1} = -1$

5.

Расспишем последовательность : $1, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, 6, \frac{1}{7} \ldots$ Заметим, что последовательность можно разбить на две подпоследовательности:

$a_n = x_n | x_n = 2n$

$b_n = x_n | x_n = \frac{1}{2n-1}$

Не трудно доказать, что для послежовательности a_n предел - это ∞, а для b_n - 0. Последовательность может иметь только один предел $\implies$ последовательность неограничена.

6.

a) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{\sqrt{3n - 11}} = 0$

$|\frac{1}{\sqrt{3n-11}}| < \epsilon$

$\frac{1}{\sqrt{3n-11}} < \epsilon$

$1 < 3n\epsilon^2 - 11\epsilon^2$

$n > \frac{1+11\epsilon^2}{3\epsilon^2}$

$N(\epsilon) = \lceil \frac{1+11\epsilon^2}{3\epsilon^2} \rceil + 1$

b) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{2n+3}{n^2} = 0$

$|\frac{2n+3}{n^2}| < \epsilon$

$\frac{2n+3}{n^2} < \epsilon$

$2n + 3 < n^2\epsilon$

$n^2\epsilon - 2n - 3 > 0$

$D = 4 + 12\epsilon$

$n = \frac{2 \pm 2\sqrt{1+3\epsilon}}{2\epsilon}$

$N(\epsilon) = \lceil \frac{2+2\sqrt{1+3\epsilon}}{2\epsilon} \rceil + 1$

c) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{cosn}{\sqrt{n}} = 0$

$|\frac{cosn}{\sqrt{n}}| < \epsilon$

$\frac{1}{\sqrt{n}} < \epsilon$

$n > \frac{1}{\epsilon^2}$

$N(\epsilon) = \lceil \frac{1}{\epsilon^2} \rceil + 1$