DZ 16

1

$xe_1 = e_1x = x$

$xe_2 = e_2x = x$

$e_1e_2 = e_1$

$e_1e_2 = e_2$

$\to e_1 = e_2$

2

операция ассоциативна, потоому что она будет давать самый правый и самый левый элементы крайних пар, поэтому M^2 полугруппа

Нейтральный элемент:

Допустим в M один элемент e, тогда и пара (e, e) будет нейтральным элементом

> 1 элемента

Допустим такой элемент существует, тогда

$e(x, y) = (x, y)e = (x, y)$, отсюда e обязательно должен быть (x, y), но из

$e(y, x) = (y, x)e = (y, x)$ следует обратное, значит нейтрального элемента не существует

3

отображения множества $1, .., n$ это подстановки

корректность операции очевидна

ассоциатовность доказывали на семинаре

нейтральный элемент - id

обратный элемент у отображений существует

4

нет, потому что множество нечетных подстановок это подмножество подстановок, а тождественная подстановка есть четная подстановка, а значит в этом множестве нет нейтрального элемента

5

докажем что это множество подгруппа всех подстановок

1.

множество замкнуто относительно операции (композиция из подстановок с одинаковым количеством элементов определена)

2.

множество замкнуто относительно взятия обратного (каждый элемент сам себе является обратным)

А значит множество и группа тоже

6

Пусть есть матрицы

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q & e \\ e & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aq+be & ae+bd \\ bq+ce & be+cd \end{pmatrix}$$

операция некорректна

7

Докажем что операция корректна

поскольку матрица невырождена, ее можно записать как

$$A = E_1E_2..E$$

Где $E_1E_2..$ матрицы элементарных преобразований а E единичная матрица

Также с матрицей B

Тогда

$$AB = E_1E_2..EE_1'E_2'..E = E_1E_2..E_1'E_2'..E$$

и данное произведение матриц элементарных преобразований на единичную матрицу дают невырожденную матрицу, операция корректна

умножение матриц ассоциативно

существует нейтральньный элемент единичная матрица

У всех невырожденных матриц есть обратная

Значит группа

8

нейтральный элемент значит

$$ex = xe = x$$

но операция определена как

$xa = x$

в таком случае нейтральный элемент определен и множество с операцией являются группой только если это множество из одного элемента

9

у операции конкатенации нет обратного элемента, потому что при каждом ее вызове слово только увеличивается

10

допустим ab имеет порядок n, тогда

$(ab)^n = e$

$abab..ab = e$

$bab..ab = a^{-1}$

домножим справа на а

$bab..aba = e$

$(ba)^n = e$

при этом эо минимальная степень для ba, значит n это степень и ba тоже

11

рассматривается по операции сложения

$a^{p^m} = e \iff ap^m \equiv 0(p^n)$

n чисел, для каждого m есть единственное $a = p^{n-m}$, такое что p^m минимальная степень