DZ 8

1

a)

обратное бинарное отношение к функции $y = x^2$

потому что сама функция $y = x^2$ функциональна, не иньективна, тотальна, несюрьективна

b)

$y = x^2$

2

а) поскольку R функционально, тогда R^{-1} иньективно

$R^{-1}[X] \iff \{\, y \in A | \exists x \in X : (y, x) \in R \,\}$

$R[R^{-1}[X]] \iff \left\{\, b \in B | \exists a \in R^{-1}[X] : (a, b) \in R \,\right\} \iff \{\, b \in B | \exists a \in A : \exists x \in X \ (a, x) \in R \wedge (a, b) \in R \,\} \subseteq$

$\subseteq \{\, b \in B \cap X | \exists a \in A : (a, b) \in R \,\} \subseteq B \cap X \subseteq X$

b)

нет

$A = \{\, 1, 2 \,\}$

$B = \{\, 1, 2 \,\}$

$R = \{\, (1, 1), (2, 1) \,\}$

$X = \{\, 1, 2 \,\}$

$R^{-1}[X] = \{\, 1, 2 \,\}$

$R[R^{-1}[X]] = \{\, 1 \,\}$

3

из-за тотальности, первые элементы пар и f и g составляют всё множество A, тогда если бы функции не были равны, при их обьединении появились бы пары с одинаковыми первыми парами, что нарушает функциональность, значит функции равны.

4

композиция иньекция $\iff \forall a, b, c(a(g \circ f)b \wedge c(g \circ f)b) \to a = c$

$\iff \forall a, b, c((\exists i : f(a) = i \wedge g(i) = b) \wedge (\exists j : f(c) = j \wedge g(j) = b)) \to a = c$

$\iff \forall a, b, c \exists i, j(f(a) = i \wedge g(i) = b \wedge \exists j : f(c) = j \wedge g(j) = b)$

допустим f не иньекция $\iff \exists a, b, c : a \neq b \wedge afc \wedge bfc$, тогда заключение ложно, значит посылка ложна тоже

$\exists a, b, c \, \forall i, j : f(a) \neq i \vee g(i) \neq b \vee f(c) \neq j \vee f(j) \neq b$

$\implies \exists a \, \forall i : f(a) \neq i$

из-за тотальности существует пара $(a, q) \in f$ для какого-то q, а значит выражение ложно

Тогда f не может не быть иньекцией

5

$f \circ g = f \circ h \iff \forall a, c((\exists b_1 : agb_1 \land b_1fc) \land (\exists b_2 : ahb_2 \land b_2fc))$

$\iff \forall a, c\, \exists b_1, b_2(agb_1 \land b_1fc \land ahb_2 \land b_2fc)$

если f иньективна, то $b_1 = b_2$ а значит и функции g и h одинаковы.

допустим f не иньекция $\iff \exists a, b, c : a \neq b \land afc \land bfc$, тогда могут быть разные g и h удовлетворяющих $f \circ g = f \circ h$, а значит и выражение

```
для любых
функций g, h: C → A из f ◦ g = f ◦ h следует g = h.
```

неверно

6

a)

эквивалентная функция : $(0, 0), (1, 1), (2, 2)$

b)

функция домножения на $\sqrt{2}$: $\forall x \in Q : f(x) = \sqrt{2}x$

c)

функция перемножающая аргументы $\forall x \in R, y \in Z : f(x, y) = xy$