# DZ 30

## 1

дополним до лнз:

$$\begin{pmatrix} (1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2) \\ (1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2) \\ (1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2) \\ (1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2) \end{pmatrix}$$

применим гамма шмидта

$b_1 = a_1$

$b_2 = a_2$

$b_3 = a_3 - \frac{(a_3,b_1)}{(b_1,b_1)}b_1 - \frac{a_3,b_2}{(b_2,b_2)}b_2 = a_3 - 0 - 0 = a_3$

$b_4 = a_4 - \frac{(a_4,b_1)}{(b_1,b_1)}b_1 - \frac{(a_4,b_2)}{(b_2,b_2)}b_2 - \frac{((a_4,b_3))}{(b_3,b_3)}b_3 = a_4 - \frac{1}{2}b_1 - \frac{1}{2}b_2 + \frac{1}{2}b_3 =$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

$||b_4|| = \sqrt{\frac{1+1+1+9}{16}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

поделим на скаляр чтобы получить ортонормированный базис:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{6} \\ -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

получили ортонормированный базис

## 2

найдем собвенное число:

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\lambda^3 - 1 = 0$

$\lambda^3 = 1$

$\lambda = 1$

теперь найдем собственный вектор:

$$\begin{cases} x = y \\ y = z \\ x = z \end{cases}$$

тогда нормированный вектор будет

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$$

дополним до ортонормированного базиса

$$\begin{pmatrix} (\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3}) \\ (\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3}) \\ (\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3}) \end{pmatrix}$$

тогда матрица оператора в получившемся базисе:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$$

# 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

по методу грамма-шмидта построим ортонормированный базис

$b_1 = a_1$

$b_2 = a_2 - \frac{(a_2,b_1)}{(b_1,b_2)}b_1 = a_2 - \frac{4}{3}b_1 = (2/3, -4/3, 0, 2/3)$

$b_3 = a_3 - \frac{(a_3,b_1)}{(b_1,b_1)}b_1 - \frac{(a_3,b_2)}{(b_2,b_2)}b_2 = a_3 - \frac{2}{3}b_1 + b_3 = (0, 0, 1, 0)$

$b_4 = (3/2, 0, 0, -3/2)$

$Q =$

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$R = Q^T A =$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{4\sqrt{3}}{3} & \frac{2\sqrt{3}}{3} & \frac{4\sqrt{3}}{6} \\ 0 & \frac{2\sqrt{6}}{3} & -\frac{2\sqrt{6}}{3} & \frac{7\sqrt{6}}{6} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$