Transformada de Fourier

Guilherme Baccarin

25 de Novembro de 2022

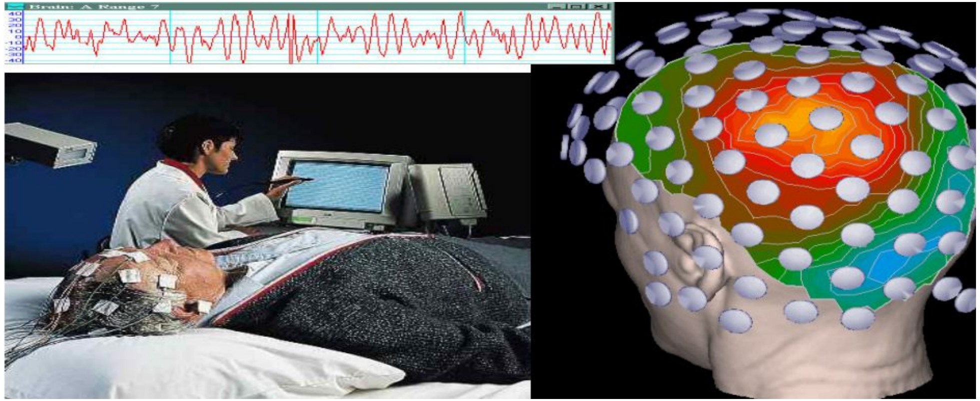
A teoria de Fourier diz que qualquer sinal, ou imagens, pode ser expresso como uma soma de uma série de sinusóides (senos e cossenos).

Fourier usou isso como ferramenta analítica no estudo das ondas e dos fluxos de calor.

A técnica para se transformar uma forma complexa em suas componentes sinusoidais é chamada Transformada de Fourier.

Aplicações

Muitas vezes ao invés de saber onde ou quando algum sinal é mais intenso precisa-se saber quanto frequentemente alguma intensidade ocorre, ou quanto por cento está acima de um certo valor, etc....



Transformada de Fourier de funções contínuas

A transformada de Fourier F(u), de uma função contínua f(x) de uma variável real x pode ser definida como:

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp[-j2\pi u x] dx \qquad \text{onde} \quad j = \sqrt{-1}$$

A partir de F(u), pode-se obter f(x) através da transformada inversa de Fourier:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) \exp[j2\pi u x] du$$

Transformada de Fourier de funções contínuas

A transformada de Fourier F(u), de uma função contínua f(x) de uma variável real x pode ser definida como:

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp[-j2\pi u x] dx \qquad \text{onde} \quad j = \sqrt{-1}$$

A partir de F(u), pode-se obter f(x) através da transformada inversa de Fourier:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) \exp[j2\pi\, u\, x] du$$

Essas duas equações são chamadas de par de transformada de Fourier e podem existir se ambas forem integráveis e se f(x) for contínua.

Transformada de Fourier de funções contínuas

A transformada de Fourier de uma função f(x) é uma função complexa, i.e. tem parte real e imaginária:

$$F(u) = R(u) + j\,I(u) \qquad j = \sqrt{-1}$$

Como outras funções complexas pode ser escrita na forma também na forma exponencial:

$$F(u) = \left|F(u)\right| e^{j\theta(u)} = \left|F(u)\right| \exp[j\,\theta(u)]$$

Transformada de Fourier de funções contínuas

É uma ferramenta matemática fundamental na solução de problemas de processamento de imagens digitais.

Não há perda de informação durante a mudança de domínios, apenas a informação visual da imagem passa a estar representada de uma outra forma: no domínio da frequência.

A transformada de Fourier possui propriedades que facilitam a sua utilização em aplicações computacionais, tais como:

- separabilidade,
- translação,
- periodicidade
- simetria conjugada,
- rotação,
- distributividade,
- mudança de escala,
- valor médio,
- laplaciano,
- convolução,
- correlação e
- amostragem.

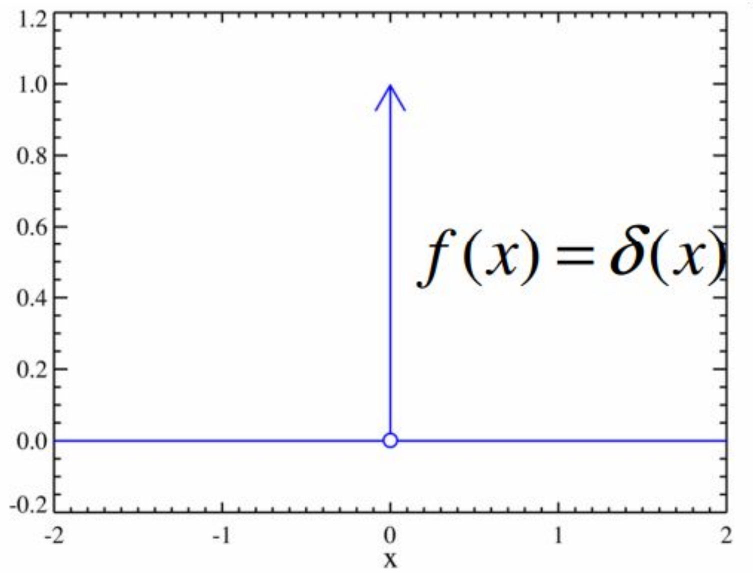
Transformada de Fourier: função impulso (função constante)

$\delta(x) = 0$ se $x \neq 0$

$\delta(0) = \infty$

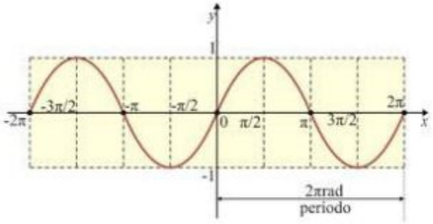
$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$

f(x)	F(u)
$\delta(x)$	1



Transformada de Fourier: cosseno => par de funções impulso

Função coseno



f(x)	F(u)
$\cos(u_0 x)$	$\pi[\delta(u-u_0)+\delta(u+u_0)]$

Relação entre transformadas

A Transformada de Laplace é uma ferramenta para converter equações no domínio do tempo em equações no domínio da frequência, de modo a facilitar a resolução dessas equações.

Quanto à Transformada de Fourier, ela fornece uma descrição no domínio da frequência de funções não periódicas no domínio do tempo.

A Transformada de Laplace envolve a transformação de uma função no domínio do tempo para o domínio da frequência, facilitando consideravelmente diferentes problemas, principalmente quando se trata de circuitos elétricos, pois elimina a necessidade de se trabalhar com fasores.

A Transformada de Fourier, assim como a de Laplace, é uma transformada de integrais, a qual transforma uma função no tempo para o domínio da frequência, sendo muito útil em sistemas de comunicação e processamento de sinais digitais para situações em que a Transformada de Laplace não se aplica, pois enquanto a Transformada de Laplace lida com circuitos com entradas para 0 com condições iniciais, a Transformada de Fourier é capaz de lidar com circuitos com entradas para qualquer

Referências

http://www.ic.uff.br/~aconci/Fourier2017.pdf

http://www.eaic.uem.br/eaic2021/anais/artigos/4955.pdf