Labor 6

A1. Der Vektor D enthält 800 Daten, welche die Werte der ZG

$$X \sim \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 0.05 & 0.1 & 0.1 & 0.35 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}$$

sind.
a) Man schätze den Erwartungswert $E(X)$, die Varianz $V(X)$, die Wahrscheinlichkeiten $P(X \leq 7)$, $P(X > 4)$.
Hinweis: `numpy.mean, numpy.var`

```
import random
X=[4,5,6,7,8,9,10]
P=[0.05,0.1,0.1,0.35,0.2, 0.1, 0.1]
D=random.choices(X, weights=P, k=800)
```

b) Man gebe an die theoretischen Werte für $E(X), V(X), P(X \leq 7), P(X > 4)$.
Hinweis: Erwartungswert $E(X) = \sum\limits_{i \in I} x_i P(X = x_i)$; Varianz $V(X) = E(X^2) - E^2(X)$.
c) Anhand der simulierten Daten konstruiere man die Histogramme der relativen, bzw. absoluten Häufigkeiten.

A2. Man simuliere $N = 1000$ zufällige Punkte aus dem Quader

$$[-2,\ 2] \times [-2,\ 2] \times [-2,\ 2] \subset \mathbb{R}^3.$$

Sei X die ZG welche Distanz dieser Punkte zum Punkt (2,2,2) darstellt. Man schätze a) den Erwartungswert von X; b) die Wahrscheinlichkeit dass ein zufällig gewählter Punkt im Quader sich auch im Inneren der Kugel mit Zentrum in (0,0,0) und Radius $R = 2$ befindet. Welche ist die dazugehörige theoretische Wahrscheinlichkeit ?
Hinweis: ▷ `scipy.stats.uniform(loc=...,scale=...,size=...)`
▷ `math.dist`$([x_1, y_1, z_1], [x_2, y_2, z_2])$, berechnet die euklidische Distanz zwischen den Punkten $P_1(x_1, y_1, z_1)$ und $P_2(x_2, y_2, z_2)$.
▷ Man benutze die geometrische Wahrscheinlichkeit :

$$w = \frac{Volumen\ Kugel}{Volumen\ Quader} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{4^3}.$$

A3. Ein Computer ist mit zwei Druckern verbunden: D_1 and D_2. Der Computer schickt einen Druckauftrag an D_1 mit Wahrscheinlichkeit 0.4, beziehungsweise an D_2 mit Wahrscheinlichkeit 0.6. D_1 druckt einen $A2$ Poster in T_1 Sekunden, wobei $T_1 \sim Exp(\frac{1}{5})$, D_2 druckt einen $A2$ Poster in T_2 Sekunden, wobei $T_2 \sim Unif[4, 6]$. Ein Druckauftrag für einen $A2$ Poster wird abgeschickt.
a) Man schätze die Wahrscheinlichkeit, dass das Drucken mehr als 5 Sekunden dauert?
b) Man schätze den Erwartungswert und die Standardabeweichung für die Druckzeit (in Sekunden) des Posters.
Hinweis: `scipy.stats.uniform(loc=...,scale=...,size=...)`
`scipy.stats.expon(loc=0,scale=...,size=...)`,
`numpy.mean, numpy.std`

A4. Sei die Gleichung zweiten Grades $x^2 + Bx + C = 0$, wobei $B, C \sim Unif[-1, 1]$ unabhängige ZG sind. Man schätze:
a) die Wahrscheinlichkeit, dass beide Wurzeln der Gleichung reell sind;
b) die Wahrscheinlichkeit, dass beide Wurzeln der Gleichung positiv sind;
c) den Erwartungswert und die Varianz der Summe der beiden Wurzeln.

A5. In einer Urne sind 20 rote Kugeln, 15 blaue Kugeln, 5 grüne Kugeln und 10 schwarze Kugeln. Man simuliere $N(= 200, 1000, \ldots)$ *Ziehungen mit Zurücklegen* und zeige (`print`) die relative Häufigkeit an mit welcher jede Farbe auftaucht. Man vergleiche die theoretischen Resultate mit den Ergebnissen aus den Simulationen. Man gebe die Ergebnisse der ersten 10 Ziehungen an!

A6. Eine Urne enthält 10 Kugeln mit der Ziffer 0, 20 Kugeln mit der Ziffer 1, 20 Kugeln mit der Ziffer 2. Aus der Urne werden 3 Kugeln *ohne Zurücklegen* gezogen. X sei das Produkt der 3 erhaltenen Zahlen. Man schätze anhand Simulationen den Erwartungswert und die Varianz von X! Man erstelle anhand Simulationen das Histogramm der absoluten Häufigkeiten für die Werte von X! In ein zweites Bild zeichne man ein zweites Histogramm mit den (theoretischen) Wahrscheinlichkeiten der ZG X.

A7. In einer Urne sind 3 blaue, 3 rote und 4 weiße Kugeln. Ein Spieler zieht nacheinander *ohne Zurücklegen* 3 Kugeln. Der Spieler erhält 5 €, wenn alle drei gezogenen Kugeln dieselbe Farbe haben. Er erhält 2 €, wenn die drei Kugeln unterschiedliche Farben aufweisen. Bei allen anderen Fällen muss der Spieler 1 € bezahlen. Wie viel gewinnt oder verliert im Mittel der Spieler pro Spiel? Man vergleiche das theoretische Resultat mit den Ergebnissen der Simulationen.

A8. **1)** Man stelle die Dichtefunktion bzw. die Verteilungsfunktion für
a) $X \sim Unif[-2, 2]$;
b) $X \sim Exp(2)$;
grafisch dar auf den Intervallen: für a) [-3,3]; für c) [0,4]!
2) Man schätze in jedem Fall anhand Simulationen $P(1 < X < 1.5)$. Man vergleiche den geschätzen Wert mit dem theoretischen Wert indem man die Python Befehle für die Verteilungsfunktionen benutzt!
3) Man schätze in jedem Fall anhand Simulationen den Erwartungswert $E(X)$ und die Varianz $V(X)$.
Hinweis: `scipy.stats.uniform` , `scipy.stats.expon`

A9. **a)** Man generiere alle Permutationen vom String `mutig`. Wie viele solche Permutationen gibt es?
b) Man generiere zwei zufällige Permutationen vom String `mutig`.
c) Man generiere alle Variationen mit vier Buchstaben aus dem String `mutig`. Wie viele solche Variationen gibt es?
d) Man generiere alle Kombinationen mit zwei Buchstaben aus dem String `mutig`. Wie viele solche Kombinationen gibt es?