Labor 4

A1. Beispiel - Generieren von zufälligen Werten der ZG: $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0.4 & 0.1 & 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}$. Simulation von zufälligen Werten für X in Python:

```
# A1 Simulation  zufallige  Werte  fur X
import numpy
N=3
x=[0 ,1 ,3 ,5]
P=[0.4 ,0.1 ,0.3 ,0.2]
rng = numpy.random.default_rng()
r=rng.choice(x, size=N , replace=True, p=P)
print(r)
```

► Man erstelle das Histogramm der relativen Häufigkeiten für 1000 zufällige Werte von X. Auf demselben Bild zeichne man auch die Balken für die theoretischen Wahrscheinlichkeiten.

A2. Über die Zufallsgröße X= Anzahl von Fehlern in den online Artikeln einer bestimmten Zeitung ist bekannt: in 25% der Artikeln sind keine Tippfehler, in 35% der Artikel ist ein Tippfehler, in 25% der Artikel sind zwei, in 10% drei und auf dem Rest vier Tippfehler.
► Man generiere zufällige Werte für X.
► Man schätze anhand der Simulationen die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 1 Tippfehler in einem zufällig gewählten Artikel auftaucht.
► Wie viele Tippfehler sind *durchschnittlich* (im Mittel) in einem online Artikel dieser Zeitung zu erwarten, d.h. man verlangt die Schätzung von dem Erwartungswert $E(X)$. Man berechne den theoretischen Erwartungswert.

A3. Gegeben sind $n, N \in \mathbb{N}^*, p \in (0,1)$.Die Zufallsgröße X hat binomiale Verteilung $X \sim Bino(n,p)$, wenn

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k \in \{0, \dots, n\}.$$

► Man generiere N (z.B. 500,1000,...) Werte der Zufallsgröße X mit binomialer Verteilung $X \sim Bino(n,p)$ mit $n = 8, p = 0.5$. Man benutze hierfür `scipy.stats.binom.rvs`.
► Man erstelle das Histogramm der relativen Häufigkeiten der zufälligen Werten von X. Auf demselben Bild zeichne man auch die Balken für die theoretischen Wahrscheinlichkeiten, für diese benutze man `scipy.stats.binom.pmf`.

Hinweis: `scipy.stats.binom.pmf`(k, n, p) berechnet $P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, wenn $k \in \{0, ..., n\}$.

```
# A3  Beispiel
from scipy.stats import binom
N=10
n=8; p=  0.5
X = binom.rvs(n, p,size= N)
print("zufallige Werte fur X:")
print(X)
k=5
w=binom.pmf(k,n,p)
print("Man berechnet P( X =",k,f")={w:.6f}")
```

A4. (Anwendung A3) In einem Computerpool sind 7 Rechner. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein neuer Virus einen Rechner angreift ist 0.4, unabhängig von anderen Rechnern.
► Welche ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Virus:
a) höchstens 3 Rechner;
b) mindestens 4 Rechner;

c) genau 4 Rechner angreift?
Man gebe die Antworten anhand Simulationen (`binom.rvs`) und vergleiche diese mit den theoretischen Wahrscheinlichkeiten (hierfür benutze man `binom.cdf, binom.pmf`).

▶ Wahrscheinlichkeiten bei einer diskreten Zufallsvariablen X mit Verteilungsfunktion
$F : \mathbb{R} \to [0, 1], F(x) = P(X \leq x) \longmapsto$ `binom.cdf`$(x, n, p) \longmapsto$ für die binomiale Verteilung

Wahrscheinlichkeit für X	Mathematischer Ausdruck
... ist höchstens a	$P(X \leq a) = F(a)$
... ist weniger als a	$P(X < a) = F(a) - P(X = a)$
... ist mindestens a	$P(X \geq a) = 1 - F(a) + P(X = a)$
... ist mehr als a	$P(X > a) = 1 - F(a)$

A5. Ein Zufallsgenerator generiert Zufallszahlen für die Verteilung $Unid(5)$, d.h.

$$U \sim Unid(5) \iff U \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 5 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \dots & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Sei X die Anzahl der generierten Zahlen, *bevor* die erste 5 auftaucht.
▶ Man generiere N (z.B. 500,1000,...) zufällige Werte für X und zeichne das Histogramm der relativen Häufigkeiten.
▶ Man schätze zusätzlich $P(X \leq 3)$, $P(X > 3)$ und den Erwartungswert $E(X)$.

A6. Eine Urne enthält 5 Kugeln mit der Ziffer 1, 6 Kugeln mit der Ziffer 2, 9 Kugeln mit der Ziffer 3. Aus der Urne werden 2 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. X sei die Summe der beiden Kugeln.
▶ Man generiere N (z.B. 500,1000,...) zufällige Werte für X und zeichne das Histogramm der relativen Häufigkeiten. Auf demselben Bild zeichne man auch die Balken für die theoretischen Wahrscheinlichkeiten.
▶ Man schätze zusätzlich den Erwartungswert $E(X)$ und berechne den theoretischen Erwartungswert von X.