Labor 3

Simulationen zur Schätzung bedingter Wahrscheinlichkeiten

Die **bedingte Wahrscheinlichkeit** $P(B|A)$ ist die Wahrscheinlichkeit des Eintretens des Ereignisses B unter der Bedingung, dass das Eintreten des Ereignisses A bereits bekannt ist

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\text{Anzahl } \textbf{günstige} \text{ Fälle für } B \cap A}{\text{Anzahl } \textbf{günstige} \text{ Fälle für } A},$$

wenn $P(A) > 0$.

A1. In einer Urne sind 6 rote Kugeln, 4 blaue Kugeln und 6 grüne Kugeln. Man zieht 3 Kugeln hintereinander *ohne Zurücklegen*. Man betrachtet die Ereignisse:
A: "mindestens eine rote Kugel wurde entnommen"
B: "alle entnommenen Kugeln haben dieselbe Farbe".

```
# eine Simulation des Experiments Aufgabe A1:
import random
kugeln = random.sample(['r','b','g'],counts=[6,4,6],k=3)
```

1) Anhand Simulationen schätze man die Wahrscheinlichkeiten $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$, $P(B|A)$.
2) Man gebe auch die theoretischen Wahrscheinlichkeiten an für $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$, $P(B|A)$.

A2. Beispiel Histogramm - Man zeichne ein Histogramm der relativen Haufigkeiten der Zahlen die beim 200-maligen Würfeln erhalten wurden. *Was stellt das blau gezeichnete Histogramm dar? Wie verändert sich das Bild wenn $N = 2000$?*

```
import numpy
from random import randrange
from matplotlib.pyplot import bar, show, hist, grid, legend, xticks
N=200
daten = [randrange(1,7) for _ in range(N)]
#print(daten)
z, count = numpy.unique(daten, return_counts=True)
d=dict([(z[i],count[i]/N) for i in range(0,6)])
print(d)
bar(z, count/N, width=0.9,color="red", edgecolor="black", label="relative
                                        Haufigkeiten")
D = dict([(k,1/6) for k in range(1,7)])
bar(D.keys(),D.values(), width=0.7,color="blue", edgecolor="black", label="....."
                                        )
legend(loc="lower left")
xticks(range(0,7))
grid()
show()
```

A3. Drei Würfel werden geworfen. Das Spiel gewinnt derjenige, der die Summe der drei aufgetauchten Zahlen vorhersagt.
(1) Man simuliere dieses Spiel N-mal (=500, 1000...), man erstelle das Histogramm der relativen Häufigkeiten. Auf demselben Bild zeichne man auch die Balken für die theoretischen Wahrscheinlichkeiten. Man vergleiche die theoretischen Ergebnisse mit den erhaltenen Werten aus den Simulationen.
(2) Auf welche Zahl (oder Zahlen) muss man wetten, um die größten Gewinnchancen zu haben?

(3) Welches ist die theoretische Wahrscheinlichkeit, dass diese Zahl (oder Zahlen) auftaucht? Man vergleiche das theoretische Resultat mit den erhaltenen Ergebnissen der Simulationen.

A4. Welche Wahrscheinlichkeiten `p1`, `p2`, `p3` schätzt folgendes Programm? Welche sind die theoretischen Werte für `p1`, `p2`, `p3`?

```
import random; import numpy
c1,c2,a1,a2=0,0,0,0
N=10000
A= list(range(1,21))
for _ in range(N):
 i=numpy.random.randint(len(A))
 v=A[i]
 c1=c1+(v%2)
 c2=c2+((v%2)==0)
 a1=a1+(v%2)*((v%3)==0);
 a2=a2+ ((v%2)==0)*(6<=v and v<=10)
p1=a1/c1
p2=a2/c2
p3=c1/N
print("Aus den Simulationen:")
print(f"p1=",p1)
print(f"p2=",p2)
print(f"p3=",p3)
```

A5. Welche ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Gruppe von 5 Personen genau zwei Personen Geburtstag im selben Monat haben und die anderen drei Personen verschiedene Geburtstage haben? a) Man löse die Aufgabe anhand Simulationen. b) Man gebe die theoretische Wahrscheinlichkeit an. Annahme: die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig gewählte Person Geburtstag in einem bestimmten Monat hat ist $\frac{1}{12}$.

A6. Man schätze anhand Simulationen die Wahrscheinlichkeit, dass beim zweimaligen Werfen eines Würfels die Summe der Zahlen mindestens 7 ist (Summe ≥ 7),
a) unter der Bedingung, dass beim ersten Wurf eine 4 erhalten wurde;
b) unter der Bedingung, dass beim zweiten Wurf eine gerade Zahl erhalten wurde.
c) Welche sind die theoretischen Wahrscheinlichkeiten bei a), bzw. b) ?