Teil 1: Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$

an5: Partielle und totale Ableitungen

Stichworte: Funktionalmatrix, Gradient, Kettenregel, Richtungsableitungen

Literatur:[Hoff], Kapitel 9.4

5.1. Einleitung: Die totale Ableitung liefert einen einfachen Weg, Richtungsableitungen zu berechnen. Wirdefinieren für m=1 den Gradienten und beweisen die allgemeine Kettenregel.

5.2. Konvention: Betrachten Funktionen $f : U \to \mathbb{R}^m$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^n$.
Sei $a \in U$ ein innerer Punkt von U, d.h. $\exists s{>}0 : U_a^s \subseteq U$.
Wir bezeichnen die Menge aller Richtungsvektoren $v \in \mathbb{R}^n$ mit S^{n-1}:=$\{v \in \mathbb{R}^n; ||v||_2 = 1\}$, die (n-1)-dimensionale Sphäre im $\mathbb{R}^n$.
• Für einen inneren Punkt $a \in U$ und ein $v \in S^{n-1}$ haben wir in an4.8
$D_v f(a) := \lim\limits_{0\neq t\to 0} \frac{1}{t}(f(a+tv) - t(a))$
als Richtungsableitung von f in a in Richtung v definiert.
(Diese Def. benutzt, dass $a + tv \in U$ ist aööe $t \in \mathbb{R}$ mit hinreichend kleinen $|t|$)
•Speziell: Ist $v = e_i$ der i-te Einheitsvektor, so ist
$D_i f(a) = \frac{\delta f}{\delta \xi_i}(a) = f_{\xi_i}(a) := (D_{e_i} f)(a)$ die i-te partielle Ableitung.

5.3. Satz: Vor.: f in a diff'bar (d.h. total diff'bar), $v \in S^{n-1}$.
Beh.: f ist in Richtung v in a diff'bar und $(D_v f)$(a)=$\underbrace{(Df)(a)}_{\in\mathbb{R}^{mxn}} \cdot \underbrace{v}_{\in\mathbb{R}^n} = \underbrace{f'(a)(v)}_{\text{mit} f'(a)\in Hom(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m) \text{ausgedrückt, dh als lineare Abb.}}$

Bew.:$\frac{1}{t}(f(a{+}tv){-}f(a)) = \frac{1}{t}(f'(a)(tv){+}o(||tv||_2) = \underline{Bew.:}\frac{1}{t}(f(a{+}tv){-}f(a)) = \frac{1}{t}(f'(a)(tv){+}o(||tv||_2)) = f'(a)(v) + \underbrace{\underbrace{\frac{|t|\cdot||v||_2}{t}}_{\text{beschränkt}} \cdot \underbrace{\frac{o(||tv||_2)}{||tv||_2}}_{\xrightarrow{t\to 0}0}}_{\xrightarrow{t\to 0}0}$.

$\square$

5.4 Bsp.: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2-y \\ 3x \\ sin(y)\end{pmatrix}$ gibt $f'(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -1 \\ 3 & 0 \\ 0 & cos(y)\end{pmatrix}$, sei $a = \begin{pmatrix} 1 \\ \pi/4\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Dann: $f'(\begin{pmatrix} 1 \\ \pi/4\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2}\end{pmatrix}$ und sei $v = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, haben $||v||_2 = \frac{1}{5}\cdot\sqrt{3^2+4^2} = 1$.

sich dann als $f'\begin{pmatrix} 1 \\ \pi/4\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5}(\begin{pmatrix} 3 \\ 4\end{pmatrix}) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2\cdot 3 + (-1)\cdot 4 \\ 3\cdot 3 + 0\cdot 4 \\ 0\cdot 3 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot 4\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 2\sqrt{2}\end{pmatrix}$.

Die partiellen Ableitungen sind $D_1 f(a) = f'\begin{pmatrix} 1 \\ \pi/4\end{pmatrix}\cdot e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0\end{pmatrix}, D_2 f(a) = f'\begin{pmatrix} 1 \\ \pi/4\end{pmatrix}\cdot e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}\end{pmatrix}$.

5.5 Folgerungen: Sei f in a Diff'bar.
Beh.:
(a) f ist in a in jeder Koordinate partiell diff'bar,

(b)$(D_i f)(a) = f'(a) \cdot e_i$, und dies ist die i-te spalte von f'(a), denn Sie wissen ja:
die Spalten einer Matrix sind genau die Bildere der Einheitsvektoren.
Also sind die Spalten von f' genau die Pariellen Ableitungen von f.

(c) Es ist $f'(a) = Df(a) = \begin{pmatrix} (D_1 f_1)(a) & \cdots & (D_n f_1)(a) \\ (d_1 f_2)(a) & \cdots & (D_n f_2)(a) \\ \vdots & & \vdots \\ (D_1 f_m)(a) & \cdots & (D_n f_m)(a) \end{pmatrix}$

(d) Es ist $(D_j f_j)(a) = pr_i(D_j f(a))$, also $D_j f_i = pr_i \circ D_j f$ für alle $j \in \{1, ..., n\}, i \in \{1, ..., m\}$.
Bew.: (a),(b),(c): Klar mit 5.3 und $v = e_i$.

Für (d): Haben $f(a) = \begin{pmatrix} f_1(a) \\ \vdots \\ f_m(a) \end{pmatrix}$ und $d_j f(a) = \begin{pmatrix} D_j f_1(a) \\ D_j f_2(a) \\ \vdots \\ D_j f_m(a) \end{pmatrix}$,

also $pr_j(D_j f_i(a))_{1 \leq i \leq m | 1 \leq j \leq n} \in \mathbb{R}^{mxn}$
die Jacobimatrix/Funktionalmatrix von f in a.
Bem.: "$\Leftarrow$" Kann is 5.5 nicht gelten, die Existenz der Partiellen Ableitungen reicht nicht zum Nachweis der Differenzierbarkeit! (vgl. 4.15, 4.16)

5.7 Fall: sei m=1, also f ein Skalarfeld.
Dann:

$$f'(a) = (d_1 f(a), ..., D_n f(a)) =: (gradf(a))^T \qquad \text{"}\textbf{Gradient}\text{"} \tag{1}$$
$$=: (\nabla f(a))^T \qquad \text{"}\textbf{Nabla}\text{"} \tag{2}$$

Wir nennen den Spaltenvektor grad f(a)=$\begin{pmatrix} D_1 f(a) \\ \vdots \\ D_n f(a) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ den Gradient von f in a.

mit ∇:=$\begin{pmatrix} D_1 \\ \vdots \\ D_n \end{pmatrix}$ bezeichnen wir den Nabla-Operator.

Somit:

$$f(x) = f(a) + (gradf(a))^T \cdot (x - a) + o(||x - a||) \tag{3}$$
$$\Rightarrow f(x) = f(a) + <gradf(a), x - a> + o(||x - a||). \tag{4}$$

Sei grad f(a)$\neq o$, und betrachte alle $v \in S^{n-1}$.
Dann gilt: $|D_v f(a)|$=$|f'(a)(v)| = |(gradf(a))^T \cdot v|$
$= |<gradf(a), v>| \leq ||gradf(a)|| \cdot ||v||_2$ (cauchyscchwarzungleichung Anhang 7 in an1)
Wobei "=" genau dann gilt, wenn v parallel zu grard f(a), d.h. ex. $t \in \mathbb{R} \backslash \{0\} : gradf(a) = tv$,
in diesem Fall wird für $D_c f(a)$ der maximale Wert angenommen.
Für $\tilde{v} := \frac{1}{||gradf(a)||_2} gradf(a)$ gilt demnach:
$|D_{\tilde{v}} f(a)| = ||gradf(a)||_2$.

5.8. FAZIT: grad f(a) ist die RIchtung maximaler Steigung von f in a
(welche dann $||gradf(a)||_2$ beträgt).

5.9. **Veranschaulichung:** Der Graph von f, nähmlich G(f):$\{\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}\}$ (falls $U = \mathbb{R}^n$), wird in $\begin{pmatrix} a \\ f(a) \end{pmatrix}$ approximiert durch
$\xi_{n+1} = f(a) + <grad f(a), x - a>$,
und dies ist die Glg. für eine n-dim. Hyperebene im $\mathbb{R}^{n+1}$!
Diese heißt Tangentialhyperebene von f im Punkt a.

5.10 **Bsp. mit n=2:** $f(x, y) = x^2 - 3y, a = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \to grad f(a) = (2\alpha_1, -3\alpha_2)^T$, und
$\xi_3 = \alpha_1^2 - 3\alpha_2 + 2\alpha_1(\xi_1 - \alpha_1) - 3\alpha_2(\xi_2 - \alpha_2)$ ist die Glg. der Tangentialhyperebene im $\mathbb{R}^3$.

5.11. **Fall:** Sei m=n, also f ein Vektorfeld.
Dann heißt $div f(a) = <\nabla, f>(a) := \sum_{i=1}^n D_i f_i(a) = spur f'(a) \in \mathbb{R} \leftarrow$ [Erinnerung Lineare Algebra: $spur A = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij}$, wenn $A = (\alpha_{ij}) \in \mathbb{R}^{mxn}$, heißt Spur der Matrix A.]
die Divergenz von f in a.

Die Funktionalmatrix ist quadratisch: $Df(a) = f'(a) = \begin{pmatrix} D_1 f_1(a) & D_2 f_1(a) & \cdots & D_n f_1(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ D_1 f_n & D_2 f_n & \cdots & d_n f_n(a) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{nxm}$.
Ihre Determinante heißt Funktionaldeterminante bzw. Jacobideterminante.

Eine wichtige Rechenregel für das Ableiten verketteter Funktionen im Mehrdimensionalen ist die (allgemeine)

5.12. **Kettenregel:** Vor.: $U \subseteq \mathbb{R}^n; U_1 \subseteq \mathbb{R}^m; a \in U \xrightarrow{f} U_1 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^k$, f in a diff'bar, g in f(a) diff'bar (insb. a innerer Punkt von U, f(A) innerer Punkt von U_1).

Beh.:$g \circ f$ in a diffbar, $\underbrace{D(f \circ f)(a)}_{\in \mathbb{R}^{kxn}} = \underbrace{(Dg)(f(a))}_{\in \mathbb{R}^{kxm}} \cdot \underbrace{\overset{mxn}{(Df)(a)}}_{\in \mathbb{R}}$.

Bew.: Setze B:= f(a).
dann gilt für $r_1(x) = o(||x - a||)$, dass $f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + r_1(x)$, *
und für $r_2(y) = o(||y - b||)$, dass $g(y) = g(b) + g'(b)(y - b) + r_2(y)$.

$\xRightarrow{y=f(x)|b=f(a)} g(f(x)) = g(f(a)) + g'(f(a))(f(x) - f(a)) + r_2(f(x))$

$\overset{*}{\Longrightarrow} g \circ f(a) + \underbrace{(Df)(f(a)) \cdot (Df)(a \cdot (x - a))}_{=D(g \circ f)(a) \to \text{Beh.}} + g'(f(a))(r_1(x)) + r_2(f(x))$

Noch z.z.: