Vorlesung Analysis II

May 20, 2025

Teil 1: Differnetialrechnung im $\mathbb{R}^n$

an2: Geometrie von Funktionen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit m=1 und n=1
Stichworte:Affine Räume, Parameter- und Normdarstellung, Funktionen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
Literatur: [Hoff], Kapitel 9.2

2.1Einleitung: Nach Kurzer Überlegung zur Darstellung affin-Linearer Objekte im $\mathbb{R}^n$, also Geraden, Ebenen, Hyperebenen,... arbeiten wir an der geometrischen Anschauung von Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, die affinlinear oder nicht affinlinear sind. Wir betrachten insbesondere $\mathbb{R}$-wertiger (auch: reellwertiger) Funktionen, d.h. solche Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit n = = 1, sowie auch "Kurvenartige Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ mit m = 1.

2.2Affine Räume im $\mathbb{R}^n$: Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$, so heißt a+U für ein $a \in \mathbb{R}^n$ ein (d-dimensionaler) affiner Raum, wenn dim U=d ist. (Man kann a einen Aufpunkt von a+U nennen.)
Es gibt folgende Atren zur Beschreibung der El. von a+U:
2.3 •Parameterfarstellung: Ist u die Lineare Hülle von Vektoren $v_1, ..., v_r$, d.h. U= L$(v_1, ..., v_r)$:= $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_r v_r; \alpha_1, ..., \alpha_r \in \mathbb{R} = \mathbb{R}v_1 + ... + \mathbb{R}v_r$, d.h. die Menge aller Linearkombinationen $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i$ der $v_1, ..., v_r$, auch: der Span der $v_1, ..., v_r$ geschrieben $span(v_1, ..., v_r)$,
bzw. auch: das Lineare Erzeugnis der $v_1, ..., v_r$ geschrieben$<v_1, ..., v_r>$($\leftarrow$ keine skalarproduktklammern, sondern "Erzeugnissklammern"!)
Dann ist a+U = a+L$(v_1, ..., v_r) = a + \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_r v_r; \alpha_1, ..., \alpha_r \in \mathbb{R}$

Sind $v_1, ..., v_r$ Linear unabhängig, gilt dim(a+U)=dim U = r, die $v_1, ..., v_r$ heißen dann Richtungsvektoren.
Für r= dim U = 1 ist die eine Gerade $a + \mathbb{R}v_1 = a + tv_1; t \in \mathbb{R}^n$, "in Richtung" $v_1 \in \mathbb{R}^n, v_1 \neq 0$, und mit Aufpunkt $a \in \mathbb{R}^n$. Für r=dim U = 2 ist dies eine Ebene $a + \mathbb{R}v_1 + \mathbb{R}v_2 = a + tv_1 + sv2; t, s \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^n$ mit zwei (linear unabh.) Richtungsvektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ und Aufpunkt $a \in \mathbb{R}$. Usw.
Eine besonders einfache Darstellung ist im Fall dim U = n-1 möglich, den zugehörigen affinen Raum nennen wir eine Hyperebene in $\mathbb{R}^n$:

2.4• Normalendarstellung(einer Hyperebene im $\mathbb{R}^n$):
Sei $H_{c,a} := x \in \mathbb{R}^n | <x, c> = \alpha$ für $c \in \mathbb{R}^n, c \neq 0$, und $\alpha \in \mathbb{R}$.
Sei $p \in H_{c,\alpha}$ irgenein Punkt dieser Menge, d.h. es gelte $<p, c> = \alpha$.
Dann ist $H_{c,\alpha} = p + U$ mit einem Untervektorraum $U \subseteq \mathbb{R}^n$, für den dim U = n-1 ist, denn: $U = ker f$ für die Lineare Abb. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \to <x, c>$
$\_x \in H_{c,\alpha} \Leftrightarrow <x, c> = \alpha \Leftrightarrow <x - p, c> = \alpha - \underbrace{<p, c>}_{\alpha} \Leftrightarrow x = p + n$ mit $n \in ker f\hat{}$

dabei ist $imf = \mathbb{R}$, also $dimU = dimkerf = n - dimimf = n - 1$
Mit U $=$ ker f $=$ $u \in \mathbb{R}; <u, c> = 0 =: c^{\perp}$ folgt, dass die $u \in U$ genau die Vektoren im $\mathbb{R}^n$ sind, die senkrecht auf c stehen, bzw. wir haben $U^{\perp} = \mathbb{R}c$. Ü
Da c senkrecht zu jedem Punkt von U ist, heißt c Normalenvektor von $H_{c,\alpha}$. Denn eine Gerade $p + \mathbb{R}c \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt Normale von $H_{c,\alpha}$ und steht senkrecht auf $H_{c,a}$.

2.5 • Ein Spezialfall der Normalendarstellung ist die Hessesche Normalform: $H_{c,\alpha}$ mit $||c|| = 1$ (wo der Normalenvektor auf 1 normiert ist).
Die Formel in 2.8 und 2.9 werden dann noch einfacher.

2.6 Bsp. zur normalendarstellung: Eine Ebene E im Raum $\mathbb{R}^3$ kann in der Form $E = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}; \underbrace{\gamma_1\xi_1 + \gamma_2\xi_2 + \gamma_3\xi_3}_{=<x,c>} =$

dargestellt werden; c$=$ $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$ ist darin der Normalenvektor, d.h. c $\perp$ E.

Die Eben $E = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3; 3x - 2y - z = 2$ z.b. steht senkrecht auf c$=$ $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
In dieser Form nennt man die Normalendarstellung auch oft Koordinatendarstellung von E. Anderes Bsp. $E = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3; x = 0$ ist die y-z-Ebene, und $E = (w, x, y, z) \in \mathbb{R}^4; w - 3x - y + 4z = 10$ ist die (3-dim) Hyperevene im $\mathbb{R}^4$, die senkrechte zu $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ ist.

2.7Schul bsp. zur Normalendarstellung: Eine Gerade g in der Ebene $\mathbb{R}^2$ ist auch eine "Hyperebene" im $\mathbb{R}^2$, da dim g =1=2-1 gilt.
Eine Normalendarstellung lautet dann $g = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; < \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} > = \alpha$ für $\gamma_1, \gamma_2, \alpha \in \mathbb{R}$, d.h. wird beschrieben durch die Gleichung $\gamma_1 x + \gamma_2 y = \alpha \Leftrightarrow (\gamma_2 \neq 0) y = -\frac{\gamma_1}{\gamma_2} x + \frac{\alpha}{\gamma_2} \leftarrow$ Geradengleichung der Schule mit Steigung m $= \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$, und c $=\frac{\alpha}{\gamma}$ als y-Achsenabschnitt.
Sogar an eine "Schulglg." $1 \cdot y = mx + c$ für eine Gerade kann man also den Normalenvektor $\begin{pmatrix} -m \\ 1 \end{pmatrix}$ ablesen, der senkrecht auf der Geraden g (mit Richtungsvektor $\begin{pmatrix} m \\ 1 \end{pmatrix}$) steht: $< \begin{pmatrix} -m \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} > = -m + m = 0$.

2.8 Rechen mit der Hesseschen Normalform: Sei $E = H_{c,\alpha} \subseteq \mathbb{R}^n$ geg., so ist der Abstand von 0 zu $H_{c,\alpha}$ gegeben als $dist(0, H_{c,\alpha}) = \frac{|\alpha|}{||c||}$.
• Ist außerdem $||c|| = 1$, ist dieser Abstand also $=|\alpha|$.
Bew.: Sei $x \in H_{c,\alpha}$ beliebig. Der gesuchte Abstand ist die Länge von p(x,c), also $dist(0, H_{c,\alpha}) = ||p(x,c)|| = ||\frac{|<x,c>|}{||c||} = \frac{|\alpha|}{||c||}$.$\square$

•