Vorlesung Analysis II

July 4, 2025

Teil 3: Gewöhnliche Differentialgleichungen

1n20: Spezielle explizite DGLn 2.Ordnung

Stichworte explizite DGL 2.Ordnung ohne y und ohne x

Stichworte: [Hoffmann], Kapitel 7.6/7

20.1. Einleitung: Wir behandeln zwei spezielle Beispiele für DGLn 2. Ordnung, die sich durch geeignete Substitution in eine DGL 1. Ordnung überführen lässt.

20.2. Def.: Eine DGL der Art $\boxed{\text{y''=f(x,y')}}$ (*),
ist eine explizite DGL 2.Ordnung ohne y.

20.3. Vorgehen: Substitution z=y' führt auf $\boxed{\text{z'=f(x,z)}}$,
also eine explizite DGL 1.Ordnung.
Eine Lösung z dieser DGL liefert y als Stammfunktion zu z.

20.4. Bsp.: $\boxed{y''=\sqrt{1+y'^2}}$, mit z=y' erhalten wir $z' = \sqrt{1+z^2}$ bzw. $\frac{z'}{\sqrt{1+z^2}} = 1$.
Die l.s. ist aber die Ableitung von arcsin(z), An14.12.
Mit $c \in \mathbb{R}$ folgt $arsinh(z) = x+c$, also $z = sinh(x+c)$ und $y(x) = \cos h(x+c) + d$, $c, d \in \mathbb{R}$ Konstanten.

20.5. Def.: Eine DGL der Art $\boxed{\text{y''=f(y,y')}}$ (*)
ist eine explizite DGL 2.Ordnung ohne x.

20.6. Vorgehen: Substitution p=p(y)=y', also y''=p'(y)y'=p'(y)p,
man erhält die DGL 1. Ordnung pp'(y)=f(y,p), für $p \neq 0$ also: $\boxed{p'(y) = \frac{f(y,p)}{p}}$ (+).
Ist p Lösung von (+), so ist in IVen, in denen $p(n) \neq 0$ ist: $\int^{y(x)} \frac{d\eta}{p(\eta)} + C$ $[aus 1 = \frac{y'}{p}]$
woraus sich unter geeigneten Voraussetzung y(x) ergibt.