Teil 1: Differentialgleichung im $\mathbb{R}^n$

an4: Mehrdimensionales Ableiten

Stichworte: Richtungsableitung, partielle Ableitung, totale Ableitung, Klein-o

Literatur: [Hoff], Kapitel 9.4

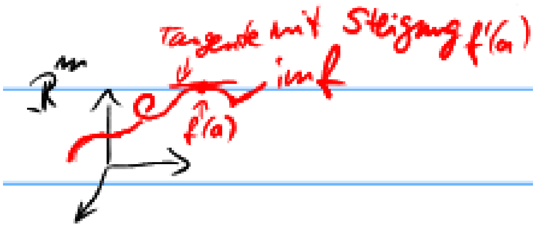
4.1. Einleitung: Wir führen den Differenzierbarkeitsbegriff für Funktionen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ein: über Richtungableitungen entlang der Koordinatenachsen gelangen wir zu partiellen Ableitungen. Wir definieren die totale Ableitung und sehen wie mit den partiellen Ableitungen der Komponentenfunktionen berechnet werdeb kann. Die "Linearsierung" von f ergibt also die Matrix $Df(a) \in \mathbb{R}^{mxn}$ so, dass $f(x) \approx f(a) + Df(a) \cdot (x-a)$ in gute Mäherung ist.

4.2 Konvention: Betrachte Funktionen $f : U \to \mathbb{R}^m$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^n$.
Sei $a \in U$ ein innerer Punkt von U, d.h. $\exists S > 0 : U_a^s \subseteq U$.
Man könnte D füt die Definitionsmenge von f schreiben, tun dies aber wegen Verwechslungsgefahr mit den anderen D's in diesen Kapitel nicht.

4.3. Hatten: im Fall n=m=1 ist $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ die Ableitung. $(\mathbb{R} \supseteq U \ni x \to a)$

4.4. Falls $n > 1$, ist x-a ein Vektor und der Differentialquotient nicht bildbar.

4.5. Falls n=1, $m \geq 1$, ist $\frac{1}{x-a} \cdot (f(x) - f(a))$ der (n-dimensionale) Differenzenquotient $\in \mathbb{R}^m$, und Df(a):=$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ die Ableitung. $(\mathbb{R} \supseteq U \ni x \to a)$



Sind $f_1, ..., f_m$ die Komponentenfunktionen von f, d.h. $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$ für alle x $\in U \subseteq \mathbb{R}$,

also die $f_i : U \to \mathbb{R}, f_i := pr_i \circ f$, so ist

$$\frac{1}{x-a} \cdot (f(x) - f(a)) = \frac{1}{x-a} \cdot \begin{pmatrix} f_1(x) - f_1(a) \\ \vdots \\ f_m(x) - f_m(a) \end{pmatrix} \xrightarrow{x\to a} \begin{pmatrix} f_1'(a) \\ \vdots \\ f_m'(a) \end{pmatrix}, \tag{1}$$

falls alle Komponentenfunktionen f_i diffbar in a sind.

Wir erhalten $Df(a) = \begin{pmatrix} f_1'(a) \\ \vdots \\ f_m'(a) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ in diesem Fall und schreiben auch f'(a) für Df(a).

4.6 Bsp.: Betrachten $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, f(x) := \begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix}$. also :$f_1(x) = x, f_2(x) = x^2, f_1'(x) = 1, f_2(x) = 2x,$

wir erhalten f'(a)=$\begin{pmatrix} f_1'(a) \\ f_2'(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2a \end{pmatrix}$ für $a \in \mathbb{R}$.

4.7 **Fall n >1:** Mit $a \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ und der Konvention, dass a ein innerer Punkt von U ist, können wir und mit $x \in U$ aus verschiedenen Richtungen an a annähern, Ist etwa $v \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ ein Vektor, der uns die "Richtung" der Ableitung angeben soll, so wollen wir f "in diese Richtung" ableiten, d.h. die Funktion f_v:$\begin{cases}]-s, s[\to \mathbb{R}^m \\ t \rightarrowtail f(a+tv) \end{cases}$
in ($t_0 =$)0 ableiten, und haben die Fragestellung auf 4.5 zurückgeführt. Dabei ist s>0 geeignet so, dass $U_a^{s||v||} \subseteq U$ ist (damit auch a$\pm sv \in U$ ist). Hier ist es üblich, den Richtungsvektor auf 1 zu normieren, d.h. $||v|| = 1$ vorauszusetzen, damit wir in der Bedingung an s einfach $U_a^s \subseteq U$ schreiben können.

4.8 **Def.:** Das Ergebnis $D_v f(a)$:=$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \cdot (f(a+tv) - f(a)) \in \mathbb{R}^m$, d.h. $D_v f(a) := f_v'(0)$, heißt Richtungsableitung von f in a in Richtung v.
Diese beschreibt also das Wachstum von f entlang der Geraden $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$
g(t):=a+tv (in Parameterform mit $t \in \mathbb{R}$ als Parameter).

4.9 **Bsp.:**•$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrowtail \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ 2x^2 \end{pmatrix}$ soll in $a = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ abgeleitet werden, und zwar entlang $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (es sei $||\cdot|| = ||\cdot||_\infty$).

dazu bilden wir $f_v : t \rightarrowtail f(a+tv) = f\begin{pmatrix} -3+t \\ 4+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2t \\ -7 \\ 2(-3+t)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{v,1}(t) \\ f_{v,2}(t) \\ f_{v,3}(t) \end{pmatrix}, \begin{cases} f_{v,1}(t) = 2 \\ f_{v,2}(t) = 0 \\ f_{v,3}(t) = 4(-3+t) \end{cases}$

deren Ableitung ist
$$D_{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} f \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}' (0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4\cdot(-3+0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

• Dasselbe f soll entlang der Koordinatenachsen $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =: e_1$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =: e_2$ in $a = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ abgeleitet werden. haben $f_{e_1} : t \rightarrowtail f(a+te_1) = f\begin{pmatrix} -3+t\cdot 1 \\ 4+t\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t \\ -7+t \\ 2(-3+t)^2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} f_{e_1,1}(t) = 1 \\ f_{e_2,2}(t) = 1 \\ f_{e_3,3}(t) = 4(-3+t) \end{cases}$

mit Abl. $\underline{\underline{D_{e_1} f \begin{cases} -3 \\ 4 \end{cases}}} = f'_{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -12 \end{pmatrix}$,

und mit $f_{e_2} : t \rightarrowtail f(a+te_2) = f\begin{pmatrix} -3t\cdot 0 \\ 4+t\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t \\ -7-t \\ 18 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} f_{e_2,1}(t) = 1 \\ f_{e_2,2}(t) = 1 \\ f_{e_2,3}(t) = 4(-3+t) \end{cases}$
SCHAU NACH WAS HIER RICHTIG IST E 2 ODER E 1-3!!!!!!!!!!
mit Ableitung $\underline{\underline{D_{e_1} f \begin{cases} -3 \\ 4 \end{cases}}} = f'_{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4.10 **Def.:** Für $j \in \{1, ..., n\}$ heißt die Richtungsableitung $D_j f(a) = \frac{\delta f}{\delta x_j}$:=$D_{e_j} f(a) \in \mathbb{R}^m$

von f in a in Richtung des j-ten Kanonischen Einheitsvektors $e_j = (0, ..., 0, 1(\text{setlle j}), 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n$ (d.h. in richtung der j-ten Koordinatenachse)
dir j-te partielle ableitung von f in a.

4.11 **Bem.:**• Für m=1 erhält man dies Ableitung $\in \mathbb{R}$ durch Ableiten nach der j-ten Variable, denn

$$D_{e_j} f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(a + te_j) - f(a)) \tag{2}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \cdot (f(..., a_{j-1}, a_j + t \cdot 1, a_{j+1}, ...) - f(..., a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, ...)), \tag{3}$$

4.12 **Bsp.:**