Vorlesung Analysis II

July 15, 2025

Teil 3: Gewöhnliche Differentialgleichungen

an 22: Der satz von Picard Lindelöf

Stichworte: Fixpunktsatz von Weissinger, Satz von Picard-Lindelöf

Literatur: [Heuser], §12

22.1. Einleitung: Mit dem Fixpuntksatz von weissinger zeigen wir den Satz von Picard-Lindelöf.

22.2. Motivation: Die DGL $y' = f(x, y)$ wird auf eindeutig Lösbarkeit hin untersucht.

22.3. Fixpunktsatz von Weissinger: Vor.: Sei $\emptyset \neq U \subseteq V$, $(v, ||\cdot||)$ ein vollständiger normierter $\mathbb{R} - VR$, ferner sei U in V abg. Weiter sei $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j$ eine Konvergente Reihe, alle α>0,
und A:U→ U eine Abb. so, dass $\forall u, v \in U\ \forall n \in \mathbb{N}:\ ||A^n u - A^n v|| \leq \alpha_n ||u - v||$.
Beh.:
(a) Dann ex. genau ein Fixpunkt $\tilde{u}$ von A, d.h. es ex. genau ein $\tilde{u}$ mit A$\tilde{u} = \tilde{u}$.
(b) Dieser Fixpunkt ist Grenzwert der Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wo $u_0 \in U$ und $u_n := A^n u_0$.
(c) Es gilt die Fehlerabschätzung $||\tilde{u} - u_n|| \leq \sum_{j=u}^{\infty} \alpha_j ||u_1 - u_0||$.
Bew.: Haben $||u_{n+1} - u_n||$=$||A^n u_1 - A^n u_0|| \leq$$\alpha_n ||u_1 - u_0||$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $||u_{n+k} - u_n||$$\leq ||u_{n+k} - u_{n+k-1}|| + ||un + k - 1 - u_{n+k-2}|| + ... + ||u_{n+1} - u_n||$
$\leq \underbrace{(\alpha_{n+k-1} + \alpha_{n+k-2} + ... + \alpha_n)}_{\to 0 \text{für } n,k\to\infty} \cdot ||u_1 - u_0||$, (*)
also ist $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Cauchyfolge. Da U als abg. Teilmenge des vollst. normierten Raumes V selbst vollständig ist (wegen 12.6.), kgt. die Folge in U, und hat einen $GW\tilde{u} \in U$.
Wegen $||u_{n+1} - A\tilde{u}|| = ||Au_n - A\hat{u}|| \leq \alpha_1 ||u_n - \tilde{u}|| \to 0$ folgt, dass $u_n \to A\tilde{u} = \tilde{u}$, also ist $\tilde{u}$ Fixpunkt von A. Wäre v ein weiterer Fixpunkt, gilt v=Av=$A^2 v = ...$ und mit $\tilde{u} = A\tilde{u} = A^2\tilde{u} = ...$ folgt $||\tilde{u} - v|| = A^n u - A^n v|| \leq \alpha_n ||\tilde{u} - v|| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \cdot ||\tilde{u} - v|| = 0$, also ist $v = \tilde{u}$ und $\tilde{u}$ eind. Es folgt (a),(b).
Mit $k \to \infty$ in (*) folgt noch die Fehlerabschätzungc.

□

Wir erhalten nun den zentralen Satz:
22.4. Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf:
Vor.: Sei $R := \{(x,y); |x-x_0| \le a,\ |y-y_0| \le b\}$ für $a, b, x_0 y_0\ \in \mathbb{R},\ a, b{>}0$,
sei $f : R \to \mathbb{R}^n$, f(x,·) stetig diff'bar (oder schwächer: $\exists L{>}0 : |f(x,y) - f(x\tilde{y})| \le L \cdot |y - \tilde{y}|$ für alle (x,y), $(x, \tilde{y}) \in R$.)
(a) Dann besitzt die AWA $y' = f(x,y), y(x_0) = y_0$ genau eine auf $j := [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ definierte Lsg. y(x),
wobei $\alpha := \min(a, \frac{b}{M}), M := \max_{(x,y)\in R} |f(x,y)|$.
(b)Dabei kann y(x) iterative gewonnen werden:
wähle bel. Fkt. $\varphi_0 \in K := \{u \in \varphi^0(j); |u(x) - y_0| \le b$für alle $x \in j\}$, setze $\varphi_n(x) := y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi_{n-1}(t))dt$
für n $\in \mathbb{N}$, $x \in j$,
sp gilt $\varphi_n \to$ y gl,. auf j.
(c) Man hat die Fehlerabschätzung $|y(x) - \varphi_n(x)| \le (\sum_{k=n}^\infty \frac{(\alpha L)^k}{k!}) \cdot \max_{x\in j} |\varphi_1(x) - \varphi_0(x)|$,
oder etwa gröber:
$|y(x) - \varphi_n(x)| \le \frac{(\alpha L)^n}{n!} \varphi^{\alpha L} \cdot \max_{x\in j} |\varphi_1(x) - \varphi_0(x)|$.
⌜denn $\sum_{k=n}^\infty \frac{x^k}{k!} \le \frac{x^n}{n!} e^x$⌝

22.5. Bem.: Ohne weiteres können wir im satz 22.4. auch j durch irgendein Kompaktes IV $[x, d]$ ersetzen, und K durch $\varphi^0([c,d])$. Dann ist $\alpha := \max(x_0 - c, d - x_0)$.

22.6. Bew.: Nimm V=$\varphi^0(j)$ mit der Norm $||\cdot||_\infty$, wo $||y||_\infty := \max_{x\in j} |y(x)|$, sowie U:=K und A die Abb. $(A_y)(x) := y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t))dt$ für jedes $x \in j$.
Dann gilt A:U→U, denn
$|(Ay)(x) - y_0| \le |x - x_0| M \le \alpha M \le b$ für alle $x \in j = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$.
Haben $|(A^n)(x) - (A^n v)(x)| \le \frac{|x-x_0}{n!} L^n ||u - v||_\infty$ für alle $n ßin \mathbb{N}, x \in j$ (induktiv), also $||A^n u - A^n v||_\infty \le \frac{(aL)^n}{n!} ||$
Der Rest folgt aus dem Fixpunktsatz von Weissinger 22.3., samt der glm. Kgz. der φ_n gegen den Fixpunkt y, für den $y' = f(x,y)$ gilt, und der Fehlerabsch.

□

22.7. Bsp.: Lösen iterativ die AWA y'=xy, y(0)=1 $\to x_0 = 0, y_0 = 1$.
Nimm $R = [-a, a]x[1 - b, 1 + b]$, $a, b{>}0$.
Für f(x,y):=xy gilt die Lipschitzbedingung mit L=a,
denn $|f(x,y) - f(x,\tilde{y})| = |xy - x\tilde{y}| = |x| \cdot |y - \tilde{y}| \le a|y - \tilde{y}|$ für alle (x,y), $(x, \tilde{y}) \in R$.
haben weiter M= $\max\{|xy|; (x,y) \in R\} \le a(1+b)$, $\alpha = \min(a, \frac{b}{u}) = \min(a, \frac{b}{a(1+b)})$.
Wähle φ_0 als Konstante Fkt. $\varphi_0(x) := 1 (= y_0)$ für alle $x \in j \in [-\alpha, \alpha]$.
Habern weiter $\varphi_n(x) := y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi_{n-1}(t))dt{=}1 + \int_0^x t\varphi_{n-1}(t)dt,\ x \in j$,
also sukzessive $\varphi_1(x) = 1 + \int_0^x tdt = 1 + \frac{1}{2}x^2$
$\varphi_2(x) = 1 + \int_0^x t \cdot (1 + ß\frac{1}{2}t^2)dt = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2\cdot4}x^4$
$\varphi_3(x) = 1 + \int_0^x t \cdot (1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2\cdot4}t^4 +)dt = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2\cdot4}x^4 + \frac{1}{2\cdot4\cdot6}x^6, \ldots$
also induktiv $\varphi_n(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2\cdot4}x^4 + \frac{1}{2\cdot4\cdot6}x^6 + \ldots + \frac{1}{2^n n!}x^{2n} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}(|\frac{x^2}{2})^k$,
was auf R glm. gegen y(x)= $e^{x^2/2}$ konvergiert, $x \in j$.
Dies ist genau die Lsg. der AWA: y(0)= $e^{0^2/2}$=1✓und $y'(x) = e^{x^2/2} \cdot x = xy$✓
Die Lsg. ist auch Lsg. für alle $x \in \mathbb{R}$

22.8. Bem.: 1. dass das Rechteck so gewählt ist, dass (x_0, y_0) der Mittelpunkt ist, dient der äußerlichen Beweisvereinfacherung und ist nicht wesentlich, vlg. Bem. 22.5..
2. Der Satz is ein "globaler" Satz, er gilt i.a. nicht, wenn die Lipschitz bed. nur "lokal" gilt.
3. Die Iterationsfolge (φ_n) lässt sich auch ohne Lipschitzbedingung bliden, allerdings kann es sein, dass

diese dann keine Lsg. der DGL/AWA liefert. (Bsp. [Heuser §12, Aufgabe 5]).
4. Die DGL y'=f(x,y) kann als mehrdimensionales Problem betrachtet werden wenn man allgemeiner $y \in \mathbb{K}^n,\ x \in \mathbb{R}$, und $f : \mathbb{R} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}^m,\ f(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ \vdots \\ f_n(x,y) \end{pmatrix}$

zulässt, d.h. y'=f(x,y)$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1'(x) & = f_1(x,y) \\ \vdots & \vdots \\ y_n(x)' & = f_n(x,y) \end{pmatrix}$ ist ein DGL-system 1. Ordnung Satz 22.4. gilt dann genau analog, der Beweis verläuft ebenso analog.