

Vorlesung Analysis II

July 9, 2025

an3: Konvergenz, Funktionsgrenzwerte, Stetigkeit im \mathbb{R}^n

Stichwörter: Funktionsgrenzwerte, Stetigkeit (Komponentenweise und partiell)

Literatur: [\[Hoff\]](#), Kapitel 9.3

3.1 Einleitung: Wir definieren Funktionsgrenzwerte bei Funktionen f von \mathbb{R}^n nach \mathbb{R}^m

3.2 Vereinbarung/Situation: Seien $M, n \in \mathbb{N}$, $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Als Norm benutzen wir die Maximumsnorm und schreiben deswegen $\|\cdot\|$ für $\|\cdot\|_\infty$. Weiter sei $a \in \mathbb{R}^n$ ein Häufungspunkt zu/von M , d.h. $\forall \epsilon > 0 : \neq \{x \in M; \|x - a\| < \epsilon\} = \emptyset$ (vgl. [An 10.2](#)).

(Anmerkung: $\{x \in M; \|x - a\| < \epsilon\} = U_a^\epsilon(M) \leftarrow \epsilon\text{-Umgebung um } a$, vgl. [3.14](#)).

Dies bedeutet, dass a aus M heraus durch von a verschiedene Punkte $x \in M$ beliebig gut approximierbar ist, bzw. "man kommt mit Punkten aus M beliebig gut heran an a ", und zwar aus "allen Richtungen" falls $\exists \epsilon > 0 : U_a^\epsilon(\mathbb{R}^n) \subseteq M$.

Wie in [An 10.4](#) definieren wir dann den Funktionsgrenzwert:

3.3 Def.: In Situation [3.2](#) gilt: $f(x) \rightarrow b$ (für $M \ni x \rightarrow a$)

: $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in M : 0 < \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - b\| < \epsilon$

Lesen: " $f(x)$ Konvergiert gegen b , wenn x (aus M heraus) gegen a geht/Konvergiert".

Wir nennen $b \in \mathbb{R}^m$ den Grenzwert (Kurz GW) von $f(x)$ für $M \ni x \rightarrow a$.

Notation: $f(x) \xrightarrow{M \ni x \rightarrow a} b$ oder $\lim_{M \ni x \rightarrow a} f(x) = b$ oder $\lim_{x \rightarrow a | x \in M} f(x) = b$.

Umformulierung: $\|f(x) - b\| \xrightarrow{M \ni x \rightarrow a} 0$.

3.4 Bem.: Falls $M = D$ ist, hat die Bedingung " $x \in M$ " Keine Weitere Bedeutung und kann weggelassen werden. Fehlt eine Bedingung, ist einfach $m = D$ gemeint.

3.5 Funktionsgrenzwerte können Komponentenweise untersucht und gebildet werden:

Für $x \in D$ ist $f(x)$ ein Element des \mathbb{R}^m , also Schreibbar in den Komponenten/Koordinaten

$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}$, den Komponentenfunktionen $f_1, \dots, f_m : D \rightarrow \mathbb{R}$, nämlich $\forall i \in \{1, \dots, m\} : \underline{f_i := pr_i \circ f}$.

Mit $b = (b_1, \dots, b_m)^T \in \mathbb{R}^m$ gilt dann:

Beh.:

$$\begin{aligned} f(x) \xrightarrow{M \ni x \rightarrow a} b &\Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, m\} : f_i(x) \rightarrow b_i (M \ni x \rightarrow a) \\ &\Leftrightarrow \forall i : |f_i(x) - b_i| \rightarrow 0 (M \ni x \rightarrow a) \end{aligned} \quad (1)$$

Bew.: Für $z = (z_1, \dots, z_m)^T \in \mathbb{R}^m, i \in \{1, \dots, m\}$ gilt $|z_i - b_i| \leq \|z - b\|_\infty \leq \sum_{i=1}^m |z_i - b_i|$. □

3.6 Bem.: Mit [3.5](#) kann man sich also auf die kgz. der Komponentenfunktionen zurückziehen, falls das nützlich/schneller geht.

3.7 Bsp.: $D = \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, f(v) := \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, wenn $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in D$, also $f : D \rightarrow \mathbb{R}$.

Beh.: $f(v) \rightarrow 0$ (bei $D \ni v \rightarrow (0, 0)^T =: 0$).

Bew.: $|f(v) - 0| = |f(v)| \leq \frac{\|v\|_2^2}{\|v\|_2} = \|v\|_2 \rightarrow 0$.

Bei $\leq \frac{\|v\|_2^2}{\|v\|_2} \Leftarrow |xy| \leq \max(x^2, y^2) = \|v\|^2 \leq x^2 + y^2 = \|v\|_2^2$. □

3.8 Bsp.: $D = \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, f(v) := \frac{xy}{x^2+y^2}$, wenn $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in D$, also $f : D \rightarrow \mathbb{R}$.

Beh.: Es existiert kein $b \in \mathbb{R}$ mit $f(v) \rightarrow b$ (bei $v \rightarrow (0, 0)^T = 0$).

Bew.: Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gelten $f(x, 0) = 0$ und $f(x, x) = \frac{1}{2}$, im \S zu [3.5](#). □

Wie in eindimensionalen Fall ist ein Funktions GW mit Folgenkonvergenz beschreibbar:

3.9 Bem.: $f(x) \xrightarrow{M \ni x \rightarrow a} b$, wenn $\forall (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq M, x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} a : f(x_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} b$ mit Folgenkonvergenz wie in [an 1.8](#)

3.10 Rechnen mit Grenzwerten ("GWSätze"):

$$f(x) \rightarrow b, g(x) \rightarrow c \Rightarrow (f + g)(x) \rightarrow b \pm c, \text{ sofern bildbar} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \langle f(x), g(x) \rangle \rightarrow \langle b, c \rangle, \text{ sofern bildbar} \quad (3)$$

$$\Rightarrow \|f(x)\| \rightarrow \|b\| \quad (4)$$

Wir kommen zur Stetigkeit von Funktionen $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m, D \subseteq \mathbb{R}^n$.

3.11 Def.:

$$\text{Für } a \in D \text{ heißt } f \text{ stetig in } a : \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D : \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \epsilon \quad (5)$$

$$\Leftrightarrow f(x) \rightarrow f(a) \text{ (bei } D \ni x \rightarrow a) \quad (6)$$

$$\text{bzw. } \lim_{x \rightarrow a (x \in D)} f(x) = f(a). \quad (7)$$

3.12 Bem.: Die Forderung, dass a ein Häufungspunkt von D ist, wird hier nicht benötigt.

3.13 Def.: Sei $T \subseteq D$. Dann: f heißt setig in T : $\Leftrightarrow \forall z \in T : f$ stetig in z
 f heißt Stetig : $\Leftrightarrow f$ stetig in D

3.14 Zum Erkennen von stetigen Funktionen ist wieder folgende Grundregel zur Stetigkeit zusammengesetzter/verknüpfter Funktionen nützlich:

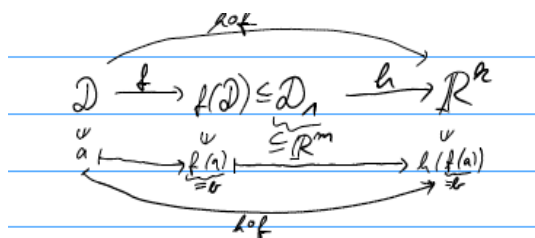
Vor.: $n, m, k \in \mathbb{N}$, $a \in D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D_1 \rightarrow \mathbb{R}^k$,

$D_1 \subseteq \mathbb{R}^m$ mit $f(D) \subseteq D_1$, $h : D_1 \rightarrow \mathbb{R}^k$,

$b := f(a)$, f in a stetig, h in b stetig.

Beh.: $h \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}^k$ ist in a stetig

Skizze:



Bezeichnung: $U_c^S := \{x \in \mathbb{R}^l : \|x - c\| < S\}$ heißt S-Umgebung von c Bedeutung der Stetigkeit von $h \circ f$: eine η -Umgebung von a wird unter f in eine δ -umgebung von b , und diese dann unter h ist eine ϵ -Umgebung von $h(b)$ abgebildet. Dies ist auch der

Bew.:

Zu $\epsilon > 0$ ex. zunächst ein $\delta > 0$ so, dass $\|h(z) - h(b)\| < \epsilon$ (bei $z \in D_1$, $\|z - b\| < \delta$).

Zu $\delta > 0$ ex. nun ein $\eta > 0$ so, dass $\|f(x) - f(a)\| < \delta$ (bei $x \in D$, $\|x - a\| < \eta$).

Für solche x gilt also $\|h(f(x)) - h(f(a))\| < \epsilon$. Also ist $h \circ f$ stetig in a . □

3.15 Beh.: 3.5 liefert nun mit 3.14, dass Stetigkeit und Komponentenweise Stetigkeit (d.h. mit den Komponentenfunktionen) äquivalent sind:

Beh.: f stetig in $a \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, m\} : f_i$ stetig in a . (Beachte $f_i = pr_i \circ f$ und 3.20)

Bew.: " \Rightarrow ": klar mit 3.14/3.20 " \Leftarrow ": Wähle $(x_k) \subseteq D$ mit $x_k \rightarrow a$. Dann:

$\forall i : pr_i(f(x_k)) \rightarrow pr_i(f(a))$, da die $pr_i \circ f = f_i$ stetig. Nach 3.5 gilt dann $f(x_k) \rightarrow f(a)$, d.h. f ist stetig in a laut 3.11. □

Die GWSätze 3.10 zeigen:

3.16 Kor.: Linearkombinationen stetiger Funktionen (insbesondere Summen und Differenzen) und (soweit bildbar) Skalarprodukte und Normen stetiger Funktionen sind wieder stetig.

3.17 Triviales Bsp.: $b \in \mathbb{R}^m$, die konstante Fkt. $f(x) := b$ für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ ist stetig.

Trivialität: f stetig, $T \subseteq D \Rightarrow f|_T$ stetig.

3.18 Satz: Jede Lineare Abb. $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist stetig. (im Sinne der Lineare Algebra, s. Anhang 22 in an1)

Bew.: Sei A durch die $m \times n$ -Matrix $(\alpha_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ beschrieben, schreibe auch A für diese Matrix. Für $x \in \mathbb{R}^n$ und $b := Ax$ ist dann $b_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j$, wo $1 \leq i \leq m$.

Schätze ab: $|b_i| \leq \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}| \cdot |x_j| \leq \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}| \cdot \|x\|$, also $\|Ax\| \leq K \cdot \|x\|$ mit $K := \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}|$. Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt somit $\|Ax - Ay\| = \|A(x - y)\| \leq K \cdot \|x - y\|$, es folgt die Beh. □

3.19 Bsp.: $+: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x + y, \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (\alpha, x) \mapsto \alpha \cdot x, /: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$,

sind stetige Abb..

3.20 Kor.: $\forall_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto x_i$ ist stetig! Da Linear!

(Spezialfall von [3.18](#))

3.21 Haben Zusammenhang zwischen FunktionsGwen und Stetigkeit, genau wie in [An 10.4](#):

Vor.: $\tilde{f} := \begin{cases} f \text{ auf } M \setminus \{a\}, \\ b \text{ für } x = a \end{cases}$

Beh.: $f(x) \rightarrow b$ bei $M \ni x \rightarrow a \Leftrightarrow \tilde{f}$ stetig in a .

3.22 Partielle Stetigkeit (d.h. Stetigkeit in einer Variablen, wenn die andere "festgehalten" werden):

f stetig, $a = (a_1, \dots, a_n)^T$ fest \Rightarrow (nicht in andere Richtung) $f(\cdot, a_2, \dots, a_n)$ stetig und $f(a_1, \cdot, a_2, \dots, a_n)$ stetig und ... und $f(a_1, \dots, a_{n-1}, \cdot)$ stetig.

Bem.: die Umkehrung gilt nicht:

Bsp.: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ das [Bsp. 3.8](#).

Diese Fkt. f ist stetig auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$,

weiter sind $f(0, \cdot)$ und $f(\cdot, 0)$ stetig,

d.h. f ist partiell stetig, aber nicht stetig in $a=(0,0)$:

Haben $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (0, 0)$, aber $f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \frac{1}{2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \neq 0 = f(0, 0)$.

3.23. Bsp.: Für $f(x, y) := \frac{x-y}{x+y}$ gilt $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 1, \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = -1$,
denn $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x-y}{x+y} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-y}{x+y} = -1$.

Weiter: $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ ex. nicht, da $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\underbrace{\frac{1}{n}, 0}_{x_n = \frac{1}{n}, y_n = 0}) = 1$

aber $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\underbrace{0, \frac{1}{n}}_{x_n = 0, y_n = \frac{1}{n}}) = -1 \neq 1$.

Also: f partiell stetig, aber nicht stetig (fortsetzbar) in $(0,0)$.