Vorlesung Analysis II

June 20, 2025

Teil 2: Topologische Grundbegriffe un metrischen Räumen

an10: Konvergenz in metrischen Räumen

Stichworte: Normierter $\mathbb{R}-VR$, B-W, Äquivalenz aller Normen im $\mathbb{R}^n$, metrischer Raum, Kgz i

Literatur: [Forster], Kapitel 1,2

10.1. Einleitung: Wir haben den $\mathbb{R}^n$ mit der Maximumsnorm $||\cdot||_\infty$ versehen und damit die Grenzwerttheorie des $\mathbb{R}^n$ aufgebaut. Die euklidische Norm $||\cdot||_2$ ist dazu äquivalent. Wir beschreiben noch andere Normen, zeigen den mehrdimensionalen Satz von Bolzano-Weierstrß und damit, dass alle Normen im $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind.

10.2. Def.: Sei $p \in \mathbb{R}, p \geq 1$. Für $x = (\xi_1, ..., \xi_n)^T \in \mathbb{R}^n$ sei $||x||_p := (\sum_{j=1}^n |\xi_j||^p)^{\frac{1}{p}}$ die p-Norm bzw. l_p−Norm bzw. Hölder-Norm.

10.3. Bem.: Für p=2 stimmt diese mit der in an 1.6 definierten euklidischen Norm überein.

10.4. Satz: $||\cdot||_p$ ist eine Norm.
Bew.: Zeigen Eigenschaften (N1)-(N3) in an 1.5, und (N1),(N2) sind klar.
Zu (N3): Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$. Ist $p = 1$, dann ist $||x+y||_1 = ||x||_1 + ||y||_1$ klar.
Ist p>1, def. q durch $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, d.h. $q = \frac{p}{p-1} = 1 + \frac{1}{p-1}$>1.
dann ist $||x+y||_p^p = \sum_{j=1}^n |\xi_j + \eta_j| \cdot |\xi_j + \eta_j|^{p-1} \leq \sum_{j=1}^n |\xi_j| \cdot |\xi_j + \eta_j|^{p-1} + \sum_{j=1}^n |\eta_j| \cdot |\xi_j + \eta_j|^{p-1}$
$\overset{*}{\leq} ||x||_p (\sum_{j=1}^n |\xi_j + \eta_j|^{q(p-1)})^{1/q} + ||y||_p (\sum_{j=1}^n |\xi_j + \eta_j|^{q(p-1)})^{p-1}$
$= (||x||_p + ||y||_p) \cdot (||x+y||_p)^{p/q}$, also $||x+y||_p \leq ||x||_p + ||y||_p$.

□

In *: Für $a, b \in \mathbb{R}^n$ ist $\sum_{j=1}^n |\alpha_j \beta_j \leq ||a||_p \cdot ||b||_q$, denn ⌜Œ$||a||_p = ||b||_q = 1$⌝es gilt:
$\forall \alpha, \beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}$. ⌜$\alpha\beta = l^{ln(\alpha)} l^{ln(\beta)} = \exp(\frac{1}{p} ln(\alpha^p) + \frac{1}{q} ln(\alpha^q)) \leq \frac{1}{p} l^{ln(\alpha^p)} + \frac{1}{q} l^{ln(\beta^q)}$✓⌝

10.5. Bem.: Man nennt die △- Unglg. (N3) für $||\cdot||_p$ auch Minkowski-Ungleichung.
Die folgende Beh. zeigt, warum man die Maximumsnorm $||x||_\infty := \max_{1 \leq j \leq n} |\xi_j|$ mit dden ∞-Zeichen im Index schreibt:

10.6. Beh.: $\forall x \in \mathbb{R}^n : \lim_{p \to \infty} ||x||_p = ||x||_\infty$.
Bew.: Wähle $j \in \{1, ..., n\}$ mit $||x||_\infty = |\xi_j| =: M$. sei Œ$x \neq 0$.

Dann gilt $M = (|\xi_j|^p)^{\frac{1}{p}} \leq ||x||_p = (\sum_{j=1}^n |\xi_j|^p)^{1/p} \leq (nU^p)^{1/p} = n^{1/p}M \xrightarrow{p\to\infty} 1 \cdot M$.

□

10.7. **Def.:** Eine Folge $(x_k) \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt beschränkt $:\Leftrightarrow (||x_k||_\infty)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt (in $\mathbb{R}$)
$\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R} \forall k \in \mathbb{N} : ||x_k||_\infty \leq M$.

10.8. **Satz von Bolzano-Weierstraß(im $\mathbb{R}^n$):**
Jede beschränkte Folge besitzt ein Konvergente Teilfolge.
Bew.: Sei (x_k) beschränkt.
Es genügt, z.z.: $\exists$ Teilfolge $(x_{l(k)})_{k\in\mathbb{N}} \forall j \in \{1,...,n\} : pr_j(k_{l(k)})$ konvergiert.
Dazu sei j fest. Dann ist $(pr_j(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt.
Dazu $\exists$ Teilfolge $(x_{l(k)})$ mit $pr_j(x_k)$ Kgt. laut 1-dim. B-W.
Wenden dies für j=1,...,n an, erhalte somit Folgen
$\mathbb{N} \supseteq (l_1(k)) \supseteq (l_2(k)) \supseteq ... \supseteq (l_n(k))$, setze $l(k) := l_n(k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
Die Folge $(x_{l(k)})$ ist eine Konvergente Teilfolge, da sie laut Konstruktion in jeder Komponente Konvergiert (d.h. bzgl. $||\cdot||_\infty$), vgl. an 1.12.

□

10.9. **Bem.:** p Norm auf $\mathbb{R}^n \Rightarrow \forall x, y \in \mathbb{R}^n : |p(x - p(y| \leq p(x - y)))$,
und damit ist jede Norm auf $\mathbb{R}^n$ stetig.
Bew.: • Haben $p(x) = p(x - y + y) \leq p(x - y) + p(y) \Rightarrow p(x) - p(y) \leq p(x - y)$,
und $p(y) = p(y - x + x) \leq p(x - y) + p(x) \Rightarrow p(y) - p(x) \leq p(x - y)$,
zusammen fplgt $|p(x) - p(y)| = \max(p(x) - p(y), p(y) - p(x)) \leq p(x - y)$.
• Die Stetigkeit folgt direkt: $\forall x \forall \epsilon{>}0 \exists \delta{>}0 \forall y : p(x - y){<}\delta \Rightarrow p(x) - p(y) \leq \epsilon$,
nämlich nimm $\delta = \epsilon$, dazu ist p(x)-p(y)$\leq p(x - y){<}\delta = \epsilon$.

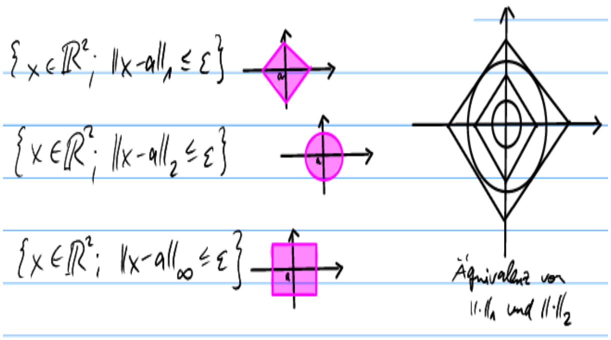
□

10.10. **Satz:** Alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent, d.h.
Sind p,qq beliebige Normen, dann $\exists \alpha\beta \in \mathbb{R} : p \leq \alpha q$ und $q \leq \beta p$.
Bew.: Haben Ä-Relation der Normen (refl./symm./transitiv klar).
Daher gen. z.z. Jede Norm ist zu $||\cdot||_\infty$ äquivalent.
1. Schritt: Mit der Standardbasis $e_1, ..., e_n$ des $\mathbb{R}^n$ gilt:

$$p(x) = p(\textstyle\sum_j \xi_j e_j) \leq \sum_j p(\xi_j e_j) = \sum_j |\xi_j| p(e_j) \leq ||x||_\infty \underbrace{\displaystyle\sum_{j=1}^n p(e_j)}_{=:a}$$

2. SChritt: Ann.: $\exists z \in S : \{x \in \mathbb{R}^n; ||x||_\infty = 1\}$ mit $p(z) = \inf_{x\in S} p(x)$.
$\Rightarrow p(z) = min_{x\in S} p(x)$.
Dann setze $\frac{1}{\beta} := p(z)$ (da ja $z \neq 0$).
Beh.: Dieses β tut's, d.h. $||\cdot||_\infty \leq \beta p$.
Denn: Sei Œ$x \neq 0, y := \frac{x}{||x||_\infty} \in S$,
Dann ist $\frac{1}{||x||_\infty} p(x) = p(\frac{1}{||x||_\infty} \cdot x) = p(y) \geq p(z) = \frac{1}{\beta}$
$\Rightarrow ||x||_\infty \leq \beta p(x)$ wie gewünscht.
Zeige also Annahme:
Wähle $(x_k) \subseteq S$ mit $p(x_k) \xrightarrow{k\to\infty} \inf_{e\in S} p(x)$,
wegen $(x_k) \subseteq S$ ist (x_k) beschränkt.
Mit B-W 10.8 folgt $\lim\limits_{n\to\infty} x_{l(k)} = z$.
Dann ist $|||x_{l(k)}||_\infty - ||z||_\infty| \leq ||x_{l(k)} - z||_\infty \xrightarrow{k\to\infty} 0 \Rightarrow ||z||_\infty = 1$.
Haben somit ein $z \in S$ mit $p(z) = \inf_{x\in S} p(x)$, da p stetig nach 10.9.

10.11. **Bsp.:** Einheits"Kugeln" bzgl. verschiedener Normen: Sei $a \in \mathbb{R}^2, \epsilon>0$.



Zur Abstandsmessung im Normierten $\mathbb{R}-V$ Räumen dient der Term $||x-y|| \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

10.12. **Def.:** In einem endlich dim. normierten $\mathbb{R}-VR$ $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||)$ heißt die Abb. δ $:\mathbb{R}^n x\mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\delta(x,y) := ||x-y||$ die zu $||\cdot||$ gehörige Metrik.

10.13. **Bem.:** Die zu $||\cdot||$ gehörige Metrik erfüllt die folgende Eigenschaften:
(M1)$\delta(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$, denn $\delta(x,y)=0 \Leftrightarrow ||x-y||=0 \Leftrightarrow x-y=0 \Leftrightarrow x=y$.
(M2)$\delta(x,y)=\delta(y,x)$, denn $\delta(x,y)=||x-y||=||-(y-x)||=|-1|\cdot||y-x||=||y-x||=\delta(y,x)$.
(M3) $\delta(x,z) \leq \delta(x,y)+\delta(y,z)$, denn $\delta(x,z)=||x-z||=||(x-y)+(y-z)|| \leq ||x-y||+||y-z|| = \delta(x,y)+\delta(y,z)$.

Diese drei Grundeigenschaften der "Abstandsmessung" sind ohne Angabe einer Norm formulierbar, wir sprechen dann allgemein von einem metrischen Raum.

10.14. **Def.:** Sei R eine Menge und $\delta : R \times R \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Abb. mit den Eigenschaften
(M1)$\forall x,y \in R : \delta(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$
(M2) $\forall x,y \in R : \delta(x,y=\delta y,x)$ (Symmetrie)
(M3) $\forall x,y,z \in R : \delta(x,z) \leq \delta(x,y)+\delta(y,z)$ $\triangle$-Unglg.
Dann heißt δ eine Metrik (auf R) und (R,δ) ein metrischer Raum.

10.15. **Folgerung:**(1) $|\delta(a,b)-\delta(x,y)| \leq \delta(a,x)+\delta(b,y)$
(2) $|\delta(a,b)-\delta(a,y)| \leq \delta(b,y)$.
Bew.: (1): $\delta(a,b) \leq \delta(a,x)+\delta(x,b) \leq \delta(a,x)+\delta(x,y)+\delta(y,b)$
$\Rightarrow ßdelta(a,b)-\delta(x,y) \leq \delta(a,x)+\delta(b,y)$,
analog: $\delta(x,y)-\delta(a,b) \leq \delta(a,x)+\delta(b,y)$.
(2): Setze x=a in (1).

□

Konvergenz dann in metrischen Räumen erklärt werden. Sei dazu (R,δ) metrischer Raum.

10.16. **Def.:** Eine Folge $(x_k) \subseteq R$ konvergiert gegen $a \in R :\Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} \delta(x_k,a)=0$.

Notation: $x_k \xrightarrow{k\to\infty} a$ bzw. $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$.
Nennen a den Grenzwert der Folge (x_k) in R, kurz: GW.

10.17. **Eigenschaften der Konvergenz im metrischen Raum:**

(1) $x_k \to a, x_k \to b \Rightarrow a = b$ (Eindimensional des GW)
(2) $x_k \to a, y_k \to b \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty \delta(x_k,y_k)=\delta(a,b)}$ (Stetigkeit der Metrik).

Bew.: Zu (1): $a = b \leftrightarrow \delta(a,b) = 0$, aber: $\delta(a,b) \leq \delta(a,x_k) + \delta(x_k,b) \xrightarrow{k\to\infty} 0+0=0$.
Zu (2): $|\delta(x_k,y_k) - \delta(a,b)| \leq \delta(a,x_k) + \delta(b,y_k) \xrightarrow{k\to\infty} 0+0=0$.

10.18. Def.: Eine Folge $(x_k) \subseteq R$ in einem metrischen Raum (r,δ) heißt Cauchyfolge:$\Leftrightarrow$ $\forall \epsilon{>}0 \exists k_0 \in \mathbb{N} \forall k,l \in \mathbb{N}, k,l \geq k_0 : \delta(x_k,x_l){<}\epsilon$.

10.19. Satz: Jede Konvergente Folge $(x_k) \subseteq R$ ist eine Cauchyfolge.
Bew.: Klar, geht genauso wie in An 5.21.

10.20. Def.: Ein metrischer Raum R heißt vollständig, wenn jede Cauchyfolge Konvergiert. ⌜vgl. An 6.9⌝

wir zeigen nun, dass jeder normierter endlich-dimensionale $\mathbb{R} - VR$ vollständig ist.
(bemerke, dass jeder n-dimensionale $\mathbb{R} - VR$ zu $\mathbb{R}^n$ isomorph ist, s. Lin. Algebra).

10.21. Satz: Es sei $||\cdot|| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ irgendeine Norm auf $\mathbb{R}^n$, $\delta(x,y) = ||x-y$.
Dann ist $(\mathbb{R}^n, \delta)$ ein vollständiger Raum.
Bew.: Bekannt aus 10.10: $\exists M_1, M_2{>}0 \forall x \in \mathbb{R}^n : ||x|| \leq M_1||x||_\infty, ||x||_\infty \leq M_2||x||$
Sei (x_k) eine Cauchyfolge bzgl. δ. Sei $\epsilon{>}0$, dann $\exists k_0 \in \mathbb{N} : \delta(x_k,x_l){<}\frac{\epsilon}{M_2}$,
d.h. $||x_k - x_l||{<}\epsilon$ wegen $\frac{||x_k-x_l||_\infty}{M_2} \leq ||x_k - x_l|| = \delta(x_k,x_l)$ für alle $k,l \geq k_0$.
Daraus folgt: $|pr_j(x_k) - pr_j(x_l)|{<}\epsilon$ für alle $j \in \{1,...,n\}$,
d.h. $(pr_j(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$.
da$\mathbb{R}$ vollständig ist (vgl. An. 6.9), gilt: $\exists \alpha_j \in \mathbb{R} : \lim\limits_{k\to\infty} pr_j(x_k) = \alpha_j$.
Setze $a := (\alpha,...,\alpha_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$,
denn $\delta(x_k,a) = ||x_k - a|| \leq M_1||x_k - a||_\infty = M_1 \max_{1\leq j\leq n} |pr_j(x_k) - \alpha_j| \xrightarrow{k\to\infty} 0$.

□

10.22. Bsp.: •$(\mathbb{R}^2, ||\cdot||_2)$ ist vollständiger $\mathbb{R} - VR$ der Dimension 2. •$(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ ist nicht vollständig.
•$(l[a,b], ||\cdot||_{sup})$ ist vollständig, $(l[a,b], ||\cdot||_1)$ ist nicht vollständig, vgl. Ü Nl.1 A4, Bl. 2 A5.