Teil 2: Topologische Grundbegriffe in metrischen Räumen

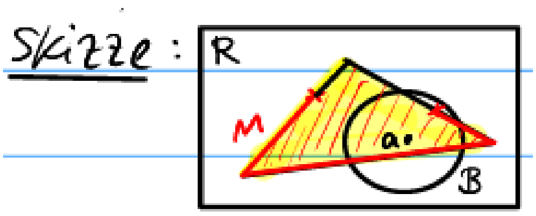
an12:Konvergenz und Kompaktheit

Stichworte: Vollständigkeit, allg. Banach-Fixpunktsatz, Kompaktheit, Heine-Borel

Literatur: [Forster], Kapitel 3

12.1. Einleitung: $\mathbb{R}^n$ ist als metrischer Raum vollständig. Wir zeigen, dass abgeschlossene Teilmengen eines vollständigen metrischen Raums wieder Vollständig sind, was einen neuen Blick auf den Banachschen Fixpunktsatz wirft. Weiter werden wir zum Kompaktheitsbegriff geführt, und wir zeigen den Satz von Heine-Borel, welcher besagt, dass die (überdeckungs-)kompakten Teilmengen im metrischen Raum $\mathbb{R}^n$ genau die sin, die beschränkt und abgeschlossen sind.

12.2 Motivation: Sei $\emptyset \neq M \subseteq (R, \delta)$, dann ist $(M, \delta_{\neg MxM})$ auch metrischer Raum.
Für $a \in M$ ist dann eine Kugel in M um a:
$B^{\epsilon}_{a,n}$:=$\{x \in \mathbb{R}; \delta(x, a) < \epsilon\} \cap M = B^{\epsilon}_{a,R} \cap M$.



Beobachtung: $B^{\epsilon}_{a,n}$ offen in M, i.a. aber nicht in R.

12.3 Bezeichnung: in M relativ offen :$\Leftrightarrow$ offen in M
in M relativ abgeschlossen:$\Leftrightarrow$ abg. in M

12.4 Es gibt:
$M \supseteq U$ odden in M $\Leftrightarrow$ $O \in \mathcal{O}(R) : U = O \cap M$,
$M \supseteq U$ abg. in M $\Leftrightarrow$ $\exists A \in \mathcal{A}(R) : A \cap M$.

12.5. Bem.: Sei $a \in M \subseteq R$.
(1) $a \in \dot{M}$ $\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}$ $\exists x_k \in M \backslash \{a\} : x_k \to a$,
(2) $a \in \overline{M}$ $\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}$ $\exists x_k \in M : x_k \to a$.

Bew.: Zu (1): "$\Rightarrow$: $a \in \dot{M} \Rightarrow \exists x_k \in (U_a^{\frac{1}{k}} \backslash \{a\}) \cap M \Rightarrow x_k \to a.$
"$\Leftrightarrow$" vgl. Def. HP in 11.14: In jeder Umgebung von x_k lieden ∞ viele Folgenglieder $\Rightarrow$ a ist HP.
Zu (2): $\overline{M} = M \cup \dot{M}$ aus (1).

12.6. Satz:(R.S) vollständig, $M \subseteq R$.
Beh.: M vollständig $\Leftrightarrow$ M Abgeschlossen.

Bew.:"$\Rightarrow$": Zeige $M = \overline{M}$ oder: $a \in \overline{M} \xRightarrow{12.3(2)} \exists (x_k) \subseteq M, x_k \to a \Rightarrow (x_k)$ ist CF
$\Rightarrow$a $= lim x_k \in M$, da M vollständig nach Vor.
"$\Leftarrow$":(x_k) CF in M $\Rightarrow (x_k)$ CF in $R \Rightarrow \exists a \in R : x_k \to a \Rightarrow a \in \overline{M} = M$.

$\square$

Wir erhalten weiter die allgemeine Version der Banachschen Fixpunktsatzes in vollständigen metrischen Räumen wie folgt.

12.7. Banachscher Fixpunktsatz(allg. Version):
Vor.: (R, δ) vollständiger metrischer Raum, f: $R \to R$ Kontraktion mit Kontraktionsfaktor $p \in [0, 1[$.
Beh.:
a) $\exists!$ Fixpunkt a von f.
b) Setze $x_0 \in R$ beliebig und $x_{k+1} := f(x_k)$ für alle k $\geq$0.
Dann: $\delta(x_k, a) \leq \frac{p^k}{1-p}\delta(x_1, x_0)$, d.h. insb. $\lim_{k\to\infty} x_k = a$.

Bew.: Wie in 8.6 zeigt mann, dass (x_k) eine CF ist.
Da R vollständig, ex. $a = \lim_{k\to\infty} x_k \in R$. wie dort zeigt man f(a)=a.

□

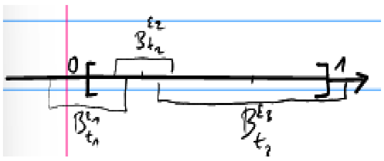
12.8 Bem.: Da der frühere Fixpunktsatz für Kontraktionen auf $U \subseteq \mathbb{R}^n$ formuliert ist, wo U abg. ~~und beschr. ist(also Kompakt nach kap 12.11)~~ und somit vollständig nach 12.6, und Ü Bl. 2A2.2($\mathbb{R}^n$ ist vollständig), folgt die alte version 8.6 auch aus 12.7.

Für bestimmte Anwendungen(z.b Existenz von Extrema auf bestimmten Teilmengen des $\mathbb{R}^n$) reicht die Abgeschlossenheit oft nicht aus, wir benötigen dafür einen stärkeren Begriff wie folgt.

12.9. Def.: $M \subseteq R$ heißt Kompakt (auch:"überdeckungskompakt"), falls gilt: Jede offene Überdeckung von M hat eine endliche teilüberdeckung, * d.h. $M \subseteq \bigcup_{i\in I} = O_i$ mit $O_i \infty \mathcal{O}(R) \Rightarrow \exists$ endlich viele $O_{i_1}, ..., O_{i_k}$, die $i_1, ..., i_k \in I : M \subseteq \bigcup_{i=1}^k O_{i_1} = o \cup ... \cup O_{i_k}$.

12.10. Bem.: Die Aussage * wird manchmal missverstanden in der Form "Nur endlich viele Überdeckungsmen O_i überdecken M nur zum Teil" o.ä. gemeint ist aber, dass stets bereits endlich vile Überdeckungsmengen zur Kompletten Überdeckung der Menge M ausreichen ("Teil" bezieht sich auf die Indexmenge I).

12.11. Bsp.: $M = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}^1$, für $t \in [0, 1]$ bilden mit bel. ϵ_t>0 die "Kugeln" $B_t^{\epsilon_t} =]t - \epsilon_t, t + \epsilon_t[$ bereits eine Überdeckung von $[0, 1]$, denn $[0, 1] \subseteq \bigcup_{t\in[0,1]} B_t^{\epsilon_t}$.
Nun ist $[0, 1]$ Kompakt laut 12.11, also $\exists t_1, ..., t_n \in [0, 1] \exists \epsilon_1, ..., \epsilon_n$>0 : $[0, 1] \subseteq \bigcup_{j=1}^n B_{t_j}^{\epsilon_j}$.[anschaulich klar]



Eine auf M stetige Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ nimmt ihr mMinimum und Maximum an, vgl. Satz von Minimum/Maximum An9.30.
Als Anwendung ddes Zwischenwertsatzes erhält man, dass $f(u) \subseteq \mathbb{R}$ ein abg. IV ist.

12.12. Bsp.: $M =]0, 1] \subseteq \mathbb{R}^1$ ist nicht Kompakt, denn in der Überdeckung $]0, 1] \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_{1/n}^{1/2n}$ kann keine endliche Teilüberdeckung ausgewähl werden, die zur Überdeckung von]0,1] bereits ausreichen würde.
Hier gibt es eine M stetige Funktion $f : M \to \mathbb{R}$, die kein Maximum annimmt, z.b. $f : M \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$.

12.13. Bsp.: Die Menge M=$[0, \infty[\subseteq \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$.

12.13. **Bsp.:** Die Menge $M = [0, \infty[\subseteq \mathbb{R}^1$ ist nicht Kompakt, wie die Überdeckung $[0, \infty[\subseteq \bigcup_{n \geq 1} N_n^{1.1}$ zeigt. Die Funktion $f : M \to \mathbb{R}, f(x) = x$, nimmt kein Maximum an.

Im $\mathbb{R}^n$ lässt sich Kompaktheit einfach topologisch beschreiben wie folgt.

12.14 Satz (von Heine-Borel):

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^n$ mit einer Metrik versehen, die assoziert von einer Norm ist (Œ also $||\cdot = ||\cdot||_i nfty$).
Dann sind äquivalent:
(a)M ist Kompakt,
(b)M ist Folgenkompakt,
d.h. jede Folge in M hat eine (in M) Konvergent Teilfolge,
(c)M ist beschränkt und abgeschlossen.

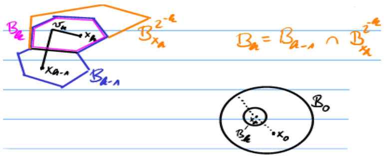
Bew: (Ringschluss $(a) \Rightarrow (c) \Rightarrow (b) \Rightarrow (a)$):
zu $(a) \Rightarrow (c)$: Sei M Kompakt.
(i:) Mit $M \subseteq \mathbb{R}^n = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} B_0^m$ Folgt dann:
$\exists m_0 \in \mathbb{N} : M \subseteq \bigcup_{m \leq m_0} B_0^m = B_0^{m_0} \Rightarrow ||M||_\infty \leq m_0$, also ist M beschränkt.
(ii): Sei $x \in \complement M = \mathbb{R}^n \backslash M$ fest, wähle $U^{(y)} \in \mathcal{U}_x$ und $V^y \in \mathcal{U}_y$ offen für alle $y \in M$ so, dass $U^{(y)} \cap V^y = \emptyset$. ($\mathbb{R}^n$ ist hausdorffsch)
Also ist $M \subseteq \bigcup_{y \in M} V^{(y)}$ offenen Überdeckung.

Da M Kompakt ist, ex. $V^{(y_1)}, ..., V^{(y_n)}$ mit $M \subseteq \bigcup_{j=1}^n V^{(y_j)}$.
Setze $\mathcal{U}_x \ni U : \bigcap_{j=1^n U^{(y_j)}}$, dies ist eine offene Umgebung von x.
damit ist dann $U \cap M = \emptyset$, d.h. $U \subseteq \complement M \Rightarrow \complement M$ offen $\Rightarrow M$ abgeschlossen.
Zu $(c) \Rightarrow (a) : (i) : z.z. : M$ abg., also nach 12.6 vollständig.
denn: $z \in \overline{M} \Rightarrow \exists x_k \to z$(Kgz.),$(x_k) \subseteq M$ und (x_k) hat nach (b) eine in M Konvergente Teilfolge (mit demselben GW)$\Rightarrow x_k \to z \in M$.
(ii) z.z.: M ist total beschränkt, d.h. $\forall \epsilon > 0 \forall M_0 \subseteq M, M_0$ endl. $\exists x \in M \backslash \bigcup_{a \in M_0} B_a^\epsilon$.
⌞ Ann.: M wäre nicht total beschränkt, d.h. $\exists \epsilon > 0 \forall M_0 \subseteq M, M_0$ endl.: $M \subseteq \bigcup_{a \in M_0} B_a^\epsilon$.
Wähle $x_1 \in M$ und x_k induktiv für $k \geq 2 : x_k \in M \backslash \bigcup_{j=1}^{k-1} B_{x_j}^\epsilon$.
Dann gilt: $(x_k) \subseteq M$ mit $\delta(x_i, x_j) \geq \epsilon$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$, d.h. ist keine CF und auch keine Teilfolge, d.h. (x_k) hat keine Konvergente Teilfolge im $\lightning$ zu (b).⌝
Benötigen (i) und (ii) für Schritt (iii) des (eigentlichen) Beweises:
(iii)z.z.: M ist Kompakt (indirekt):
Für k$\subseteq$ R nicht Kompakt gilt: $\exists \mathcal{O}_1 \subseteq \mathcal{O} : K \subseteq \bigcup_{O \in \mathcal{O}_1} O \Rightarrow \forall \mathcal{O}_2 \subseteq \mathcal{O}_1$ endl.: $K \nsubseteq \bigcup_{O \in \mathcal{O}_2} O$.
Sei dies so für M, dazu $\mathcal{O}_1$ geg. mit $M \subseteq \bigcup_{O \in \mathcal{O}_1} O$.
• Zu $\epsilon = 2^{-1}$ gilt nach (ii): $\exists M_1 \subseteq M$ endlich: $M \subseteq \bigcup_{a \in M_1} B_a^{2^{-1}} \to \forall \mathcal{O}_2 \subseteq \mathcal{O}_1$ endlich: $M \nsubseteq \bigcup O \in \mathcal{O}_2 O$
$\Rightarrow \exists x_1 \in M_1 \forall \mathcal{O}_2 \subseteq \mathcal{O}_1$ endlich: $M \cap B_{x_1}^{2^{-1}} \nsubseteq \bigcup_{O \in \mathcal{O}_2} O$, d.h. $M \cap B_{x_1}^{2^{-1}}$ nickt Kp.(kompakt)
⌜sonst: $\forall a \in M_1 : B_a^{2^{-1}} \cap M \subseteq \bigcup_{O \in \mathcal{O}_2} O$ für ein $\mathcal{O}_2 \subseteq \mathcal{O}_1$ endlich $\to$ endlich viele $O \in \mathcal{O}_1$ würden $M = \bigcup_{a \in M_1} B_a^{2^{-1}} \cap M$ Überdecken $\lightning$⌝
• Zu $\epsilon = 2^{-2}$ gilt nach (ii): $\exists M_2 \subseteq M$ endlich: $M \subseteq \bigcup_{O \in \mathcal{O}_2} B_a^{2^{-2}}$, d.h. $M \cap B_x {x_1}^{2^{-1}} \subseteq \bigcup_{O \in \mathcal{O}_2} B_a^{21-2}$.
$\xRightarrow{ebenso} \exists x_2 \in M_2 \forall \mathcal{O}_2 \subseteq \mathcal{O}_1$ endlich: $M \cap B_{x_1}^{2^{-1}} \cap B_{x_2^{2-2}} \nsubseteq \bigcup_{O \in \mathcal{O}_2} O, d.h. M \cap b_{x_1^{2-1}} \cap B_{x_2^{2-2}}$ nicht Kp.

• Zu $\epsilon = 2^{-k}$ gilt nach (ii): $\exists M_k \subseteq M$ endlich: $M \subseteq \bigcup_{a \in M_k} B_a^{2^{-k}}$, d.h. $M \cap B_{x_1}^{2^{-k+1}} \subseteq \bigcup_{a \in M_k} B_a^{2^{-k}}$.

$\xRightarrow{ebenso} \exists x_k \in M_{\{}k\} \forall \mathcal{O}_2 \subseteq \mathcal{O}_1$ endlich: $M \cap \underbrace{B_{x_1}^{2^{-1}} ßcup ... \cup B_{x_k}^{2^{-k}}}_{=:B_k} \nsubseteq \bigcup_{O \in \mathcal{O}_2} O$,

d.h. $M \cap B_{x_1}^{2^{-1}} \cap ... \cap B_{x_k}^{2^{-k}} = M \cap B_k$ nicht Kp.
Es ist $B_k \neq \emptyset$, sonst wäre $\emptyset = M \cap B_k \nsubseteq \bigcup_{O \in \mathcal{O}_2} O$. Somit $\exists v_k \in B_k$ für $k \geq 2$.
Dann gilt: $\delta(x_{k-1}, x_k) \leq \delta(x_{k-1}, v_k) + \delta(v_k, x_k) \leq \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^k} < \frac{1}{2^{k-2}} \Rightarrow (x_k)$ ist eine CF.
Nach (i) gilt: $x_k \to x_0 \in M$.
sei B_0 eine Kugel um x_0.
Dann gibt es ein k so, dass $B_k \subseteq B_0$. Wählt man insbesondere $B_0 \subseteq O \in \mathcal{O}_1$.



⌜denn $x_0 \in M$ wird von einem $O \in \mathcal{O}_1$ offen überdeckt und $x_0 \in B_0$, für B_0 klein⌝
so folgt $B_k \subseteq B_0 \subseteq O \in \mathcal{O}_1$, also $M \cap B_k \subseteq = \in \mathcal{O}_1$.
Setze $\mathcal{O}_2 = \{O\} \subseteq \mathcal{O}_1$ (ist endlich), also $M \cap B_k \subseteq \bigcup_{O \in \mathcal{O}_2} O$, $\lightning$ gegen obige Konstruktion.

$\square$

12.15. **Bem.:** Ein metrische Raum ist genau denn Kompakt, wenn er vollständig und total beschränkt ist.
Der vorige Beweis kann dahingehend angepasst werden.

Die folgende Aussage ist ein "Schachtelungsprinzip" für Kompakte Mengen.
12.16. **Satz:** Vor.: (R, δ) metrischer Raum, $\varnothing \neq A_k \subseteq R, k \in \mathbb{N}$, A_k kompakt,
$\forall k \in \mathbb{N} : A_k \supseteq A_{k+1}$.
Beh.: $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \neq \varnothing$.
Bew.: Ann.: $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \varnothing \Rightarrow \mathcal{C}(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k) = R$

$\Rightarrow A_1 \subseteq R = \bigcup_{k=1}^{\infty} \underbrace{\mathcal{C} A_k}_{\text{offen}} \xRightarrow{A_1 Kp.} \exists k_0 : A_{k_0} \subseteq A_1 \subseteq \bigcup_{k=1}^{k_0} \mathcal{C} A_k = \mathcal{C} A_{k_0}$

$\Rightarrow A_{k_0} = \varnothing$, $\lightning$.

$\square$