Vorlesung Analysis II

July 12, 2025

an3: Konvergenz, Funktionsgrenzwerte, Stetigkeit im $\mathbb{R}^n$

Stichwörter:Funktionsgrenzwerte, Stetigkeit (Komponentenweise und partiell)

Literatur:[Hoff], Kapitel 9.3

3.1Einleitung: Wir definieren Funktionsgrenzwerte bei Funktionen f von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$

3.2 Vereinbarung/Situation: Seien M,n $\in \mathbb{N}$, M $\subseteq \mathbb{R}^n$, f : D $\to \mathbb{R}^m$
und b $\in \mathbb{R}^m$. Als Norm benutzen wir die Maximumsnorm und schreiben deswegen $||\cdot||$ für $||\cdot||_\infty$. Weiter sei $a \in \mathbb{R}^n$ ein Häufungspunkt zu/von M, d.h $\forall \epsilon > 0 :\neq \{x \in M; ||x-a|| < \epsilon\} = \infty$ (vgl. An 10.2).
(Anmerkung$\{x \in M; ||x-a|| < \epsilon\} = U_a^\epsilon(M) \leftarrow$ ϵ-Umgebung um a, vgl. 3.14).
Dies bedeutet, dass a aus M heraus durch von a verschiedene Punkte x $\in M$ beliebig gut approximierbar ist, bzw. "man kommt mit Punkten aus M beliebig gut heran an a", und zwar aus "allen Richtungen" falls $\exists \epsilon > 0 : U_a^\epsilon(\mathbb{R}^n) \subseteq M$.
Wie in An 10.4 definieren wir dann den Funktionsgrenzwert:

3.3Def.: In Situation 3.2 gilt: f(x) $\to$ b (für M$\ni$ x $\to$ a)
: $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad \forall x \in M : 0 < ||x-a|| < \delta \Rightarrow ||f(x)-b|| < \epsilon$
Lesen: "f(x) Konvergiert gegen b, wenn x (aus M heraus) gegen a geht/Konvergiert".
Wir nennen b $\in \mathbb{R}^m$ den Grenzwert (Kurz GW)von f(x) für $M \ni x \to a.$
Notation: f(x) $\xrightarrow{M \ni x \to a}$b oder $\lim_{M\ni x\to a} f(x) = b$ oder $\lim\limits_{x\to a | x \in M} f(x) = b$.
Umformulierung:$||f(x)-b|| \xrightarrow{M \ni x \to a} 0$.

3.4Bem.: Falls M = D ist, hat die Bedingung "$x \in M$" Keine Weitere Bedeutung und kann weggelassen werden. Fehlt eine Bedingung, ist einfach m= D gemeint.

3.5 Funktionsgrenzwerte können Komponentenweise untersucht und gebildet werden:
Für $x \in D$ ist f(x) ein Element des $\mathbb{R}^m$, also Schreibbar in den Komponenten/Koordinaten

f(x)= $\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}$, den Komponentenfunktionen $f_1, ..., f_m : D \to \mathbb{R}$, nämlich $\forall i \in \{1, ..., m\} : \underline{f_i := pr_i \circ f}$.
Mit $b = (b_1, ..., b_m)^T \in \mathbb{R}^m$ gilt dann:
Beh.:

$$\begin{aligned} f(x) \xrightarrow{M \ni x \to a} b &\Leftrightarrow \forall i \in \{1, ..., m\} : f_i(x) \to b_i (M \ni x \to a) \\ &\Leftrightarrow \forall i : |f_i(x) - b_i| \to 0 (M \ni x \to a) \end{aligned} \tag{1}$$

Bew.: Für $z = (z_1, ..., z_m)^T \in \mathbb{R}^m, i \in \{1, ..., m\}$ gilt $|z_i - b_i| \leq ||z - b||_\infty \leq \sum_{i=1}^m |z_i - b_i|$.

□

3.6Bem.: Mit 3.5 kann man sich also auf die kgz. der Komponentenfunktionen zurückziehen , falls das nützlich/schneller geht.
3.7Bsp.: $D = \mathbb{R}^2 \backslash \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}, f(v) := \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, wenn $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in D$, also $f : D \to \mathbb{R}$.
Beh.: $f(v) \to 0$ (bei $D \ni v \to (0, 0)^T =: 0$).
Bew.: $|f(v) - 0| = |f(v)| \leq \frac{||v||_2^2}{||v||_2} = ||v||_2 \to 0$.
Bei $\leq \frac{||v||_2^2}{||v||_2} \Leftarrow |xy| \leq$max$(x^2, y^2) = ||v||^2 \leq x^2 + y^2 = ||v||_2^2$.

□

3.8Bsp.: $D = \mathbb{R}^2 \backslash \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}, f(v) := \frac{xy}{x^2+y^2}$, wenn $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in D$, also $f : D \to \mathbb{R}$.
Beh.: Es existiert kein $b \in \mathbb{R}$ mit $f(v) \to b$ (bei $v \to (0, 0)^T = 0$).
Bew.: Für x$\in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ gelten $f(x, 0) = 0$ und $f(x, x) = \frac{1}{2}$, im $\lightning$ zu 3.5.

□

Wie in eindimensionalen Fall ist ein Funktions GW mit Folgenkonvergenz beschreibbar:
3.9 Bem.: $f(x) \xrightarrow{M \ni x \to a} b$, wenn $\forall (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq M, x_k \xrightarrow{k \to \infty} a : f(x_k) \xrightarrow{k \to \infty} b$ mit Folgenkonvergenz wie in an 1.8

3.10 Rechnen mit Grenzewerten ("GWSätze"):

$$f(x) \to b, g(x) \to c \Rightarrow (f + g)(x) \to b \pm c, \text{ sofern bildbar} \tag{2}$$
$$\Rightarrow <f(x), g(x)> \to <b, c>, \text{ sofern bildbar} \tag{3}$$
$$\Rightarrow ||f(x)|| \to ||b|| \tag{4}$$

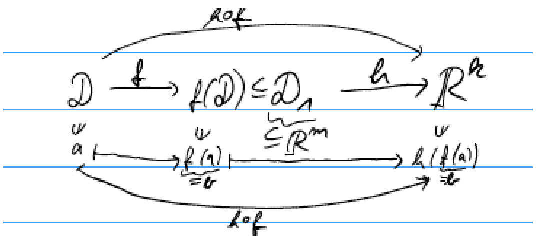
Wir kommen zur Stetigkeit von Funktionen $f : D \to \mathbb{R}^m, D \subseteq \mathbb{R}^n$.
3.11Def.:

$$\text{Für } a \in D \text{ heißt f } \underline{\text{stetig in a}} :\Leftrightarrow \forall \epsilon{>}0 \exists \delta{>}0 \forall x \in D : ||x - a||{<}\delta \Rightarrow ||f(x) - f(a)||{<}\epsilon \tag{5}$$
$$\Leftrightarrow f(x) \to f(a) (\text{bei } D \ni x \to a) \tag{6}$$
$$\text{bzw. } \lim_{x \to a (x \in D)} f(x) = f(a). \tag{7}$$

3.12 Bem.: Die Forderung, dass a ein Häufungspunkt von D ist, wird hier nicht benötigt.

3.13 **Def.:** Sei $T \subseteq D$. Dann: f heißt setig in T $:\Leftrightarrow \forall z \in T : f$ stetig in z
f heißt Stetig $:\Leftrightarrow f$ stitig in D

3.14 Zum Erkennen von stetigen Funktionen ist wieder folgende Grundregel zur Stetigkeit zusammengesetzter/verknüpfter Funktionen nützlich:
Vor.: $n, m, k \in \mathbb{N},\ a \in D \subseteq \mathbb{R}^n,\ f : D_1 \to \mathbb{R}^k,$
$D_1 \subseteq \mathbb{R}^m$ mit $f(D) \subseteq D_1,\ h : D_1 \to \mathbb{R}^k,$
$b := f(a), f$ in a stetig, h in b stetig.
Beh.:$h \circ f : D \to \mathbb{R}^k$ ist in a stetig
Skizze:



Bezeichnung: U_c^S:=$\{x \in \mathbb{R}^l; ||x-c||<S\}$ heißt S-Umgebung von c Bedeutung der Stetigkeit von $h \circ f$: eine η-Umgebung von a wird unter f in eine δ-umgebung von b, und diese dann unter h ist eine ϵ-Umgebung von h(b) abgebildet. Dies ist auch der
Bew.:
Zu ϵ>0 ex. zunächst ein δ>0 so, dass $||h(z) - h(b)||<\epsilon$ (bei $z \in D_1, ||z-b||<\delta$).
Zu δ>0 ex. nun ein η>0 so, dass $||f(x) - f(a)||<\delta$ (bei $x \in D, ||x-a||<\eta$).
Für solche x gilt also $||h(f(x)) - h(f(a))||<\epsilon$. Also ist h ∘ f stetig in a.

□

3.15 **Beh.:**3.5 liefert nun mit 3.14, dass Stetigkeit und Komponentenweise Stetigkeit (d.h. mit den Komponentenfunktionen) äquivalent sind:
Beh.: f stetig in a $\Leftrightarrow \forall_i \in \{1, ..., m\}$: f_i stetig in a. (Beachte $f_i = pr_i \circ f$ und 3.20)
Bew.: " $\Rightarrow$ ": klar mit 3.14/3.20 " $\Leftarrow$ ": Wähle $(x_k) \subseteq D$ mit $x_k \to a$. Dann:
$\forall i : pr_i(f(x_k)) \to pr_i(f(a))$, da die $pr_i \circ f = f_i$ stetig. Nach 3.5 gilt dann $f(x_k) \to f(a)$, d.h. f ist stetig in a laut 3.11.

□

Die GWSätze 3.10 zeigen:
3.16 **Kor.:** Linearkombinationen stetiger Funktionen (insbesondere Summen und Differenzen) und (soweit bildbar) Skalarprodukte und Normen stetiger Funktionen sind wieder stetig.

3.17 **Triviales Bsp.:** $b \in \mathbb{R}^m$, die konstante Fkt. f(x):= b für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ ist stetig.
Tivialität: f stetig, $T \subseteq D \Rightarrow frT$ stetig.

3.18 **Satz:** Jede Lineare Abb. $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist stetig. (im Sinne der Lineare Algebra, s. Anhang 22 in an1)
Bew.: Sei A durch die mxm-Matrix $(\alpha_{ij})_{1\leq i \leq m | 1 \leq j \leq n} \in \mathbb{R}^{mxn}$ beschrieben, schreibe auch A für diese Matrix. Für $x \in \mathbb{R}^n$ und $b := Ax$ ist dann $b_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j$, wo $1 \leq i \leq m$.
Schätze ab: $|b_i| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \cdot |x_j| \leq \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}| \cdot ||x||$, also $||Ax|| \leq K \cdot ||x||$ mit K:=$\max_{1\leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}|$.
Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt somit $||Ax - Ay|| = ||A(x-y)|| \leq K \cdot ||x-y||$, es folgt die Beh.

□

3.19 **Bsp.:** $+ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \rightarrowtail x + y, \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (\alpha, x) \rightarrowtail \alpha \cdot x, / : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}, x \rightarrowtail \frac{1}{x},$

sind stetige Abb..

3.20 **Kor.:** $\forall_i : pr_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \rightarrowtail x_i$ ist stetig! Da Linear!

(Spezialfall von 3.18)

3.21 Haben Zusammenhang zwischen FunktionsGWen und Stetigkeit, genau wie in An 10.4:
Vor.: $\tilde{f} := \begin{cases} f \text{ auf } M \backslash \{a\}, \\ b \text{ für } x = a \end{cases}$
Beh.: $f(x) \to b$ bei $M \ni x \to a \Leftrightarrow \tilde{f}$ stetig in a.

3.22 **Partielle Stetigkeit** (d.h. Stetigkeit in einer Variablen, wenn die andere "festgehalten" werden):
f stetig, $a = (a_1, ..., a_n)^T$ fest $\Rightarrow$(nicht in andere Richtung) $f(\cdot, a_2, ..., a_n)$ stetig und $f(a_1, \cdot, a_2, ..., a_n)$ stetig und ... und $f(a_1, ..., a_{n-1}, \cdot)$ stetig.
Bem.: die Umkehrung gilt nicht:
Bsp.: f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ das Bsp. 3.8.
Diese Fkt. f ist stetig auf $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$,
weiter sind $f(0, \cdot)$ und $f(\cdot, 0)$ stetig,
d.h. f ist partiell stetig, aber nicht stetig in a=(0,0):
Haben $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \xrightarrow{n\to\infty} (0,0)$, aber $f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \frac{1}{2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0)$.

3.23. **Bsp.:** Für $f(x,y) := \frac{x-y}{x+y}$ gilt $\lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} f(x,y) = 1, \lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} f(x,y) = -1$,
demm $\lim_{y\to 0} \frac{x-y}{x+y} = 1, \lim_{x\to 0} \frac{x-y}{x+y} = -1$.
Weiter: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ex. nicht, da $\lim_{n\to\infty} f(\underbrace{\frac{1}{n}, 0}_{x_n = \frac{1}{n}, y_n = 0}) = 1$

aber $\lim_{n\to\infty} f(\underbrace{0, \frac{1}{n}}_{x_n = 0, y_n = \frac{1}{n}}) = -1 \neq 1$.
Also: f partiell stetig, aber nicht stetig (fortsetzbar) in (0,0).