Vorlesung Analysis II

July 8, 2025

Teil 3: Gewöhnliche Differentialgleichungen

an21: Lineare DGLn n-ter Ordnung mit Konstanten Koeffizienten

Stichworte: Linearität der Lösungsmenge, ϕ=charakteristisches Polynom, Operatormethode, D

Literatur: [Hoffmann]: Kapitel 7.8., [Heuser]: Kapitel 16

21.1. Einleitung: Behandeln mit der Operatormethode Lineare DGLn n-ter Ordnung mit Konstanten Koeffizienten, homogen und inhomogen. Speziell den Fall n=2.

21.2. Vereinbarung: Betrachten für $n \in \mathbb{N}$ fest, $a_0, ..., a_{n-1} \in \mathbb{R}, f : j \to \mathbb{K}$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$,
Die DGL $\boxed{u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + ... + a_1u' + a_0u = f}$ (*)

21.3. Motivation: Haben schon n=1 behandelt, daneben ist n=2 wichtig.

21.4. Def.: Für $f \neq 0$ heißt (*) eine inhomogene Lineare DGL n-ter Ordnung mit Konstanten Koeffizienten, f heißt Inhomogenität oder Störglied.
Die zugehörige homogene DGL (linear, n-ter Ordnung, mit Konstanten Koeffizienten) lautet $(*)_h$
$\boxed{u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + ... + a_1u' + a_0u = 0}$.

21.5. Linearitätsüberlegungen: (a) u,v Lsgn. von $(*)_h \Rightarrow \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$: $\alpha u + \beta v$ Lsg. von (*), d.h. doie Menge der Lösungen der homogenen DGL $(*)_h$ liefert einen Vektorraum.
(b) u Lsg. von (*) $\wedge$ v Lsg. von $(*)_h \Rightarrow$ u+v Lsg. von (*)
(c) v,w Lsgn. von (*) $\Rightarrow$ v-w Lsg. von $(*)_h$
(d) Ist y=u+iv mit u,v:j $\to \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}$, so gilt:
y (Komplexe) Lsg. von (*) $\Leftrightarrow$ u,v (reelle) Lsgn. von (*) mit Ref, Ymf als r.l.

Bem.: Alle Lsgn. von (*) erhält man durch Addition irgendeiner spzillen (partikulären) Lsg. zu einer (beliebigen) von $(*)_h$.

21.6. Def.: Das zu (*) gehörige Polynom $\phi(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0, \lambda \in \mathbb{K}$,
Heißt das charaktistische Polynom von (*),
Die Gleichung $\phi(\lambda) = 0$ heißt charakteristische Glg.

21.7. Spezialfall n=2: (*) $: u'' + au' + bu = f, (*)_h : u'' + au' + bu = 0$,

wo a,b $\in \mathbb{R}$, $f: j \to \mathbb{K}$ stetig.
Das charakteristische Polynom ist $\phi(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b, \lambda \in \mathbb{K}$
und $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ ist die charakteristische Glg.

21.8. Def.: Der Ableitungsoperator D seei definiert durch Du:=u' für u:j$\to$ $\mathbb{K}$ bel. oft diff'bar.

21.9. Bem.: D:$\phi^\infty(j,\mathbb{K}) \to \phi^\infty(j,\mathbb{K})$ ist Linear.

21.10. Def.: Mit $D^0 = E:=id_{\phi^\infty(j,\mathbb{K})}$ und $D^{k+1}:=DD^k, k \in \mathbb{N}_0$, sind bel. Potenzen und Linearkombinationen davon definiert.

21.11. Bem.: • Haben Eu=u, $D^k u = u^{(k)}$, für $k \in \phi^\infty(j,\mathbb{K})$.
• Haben die Verauschbarkeitsbeziehung $\forall n,m \in \mathbb{N}_0 : D^n D^m = D^{n+m} = D^m D^n$.

21.12. Notation: Zur Abkürzung def. $\underline{\alpha}:=\alpha E$ für $\alpha \in \mathbb{K}$,
und für k$\in$ $\mathbb{N}_0, c_0, ..., c_k \in \mathbb{K}, \Psi(x) := \sum_{l=0}^k c_l x^l, x \in \mathbb{K}$, notieren wir $\psi(D):=\sum_{l=0}^k c_l D^l$. (Setzen D in Polynome ein!)

Schreiben damit (*) in der Kurzform (*) $\boxed{\phi(D)u = f}$.

21.13. Beh.: Für $\Psi \in \mathbb{K}[x], \alpha \in \mathbb{K} : \Psi(D)e^{\alpha x} = \psi(\alpha)e^{\alpha x}$ (als Fkt in x).
Bew.: l.l. $=(\sum_{l=0}^k c_l D^l)e^{\alpha x} = \sum_{l=0}^k c_l(D^l e^{\alpha x}) = \sum_{l=0}^k c_l d^l e^{\alpha x} = r.l$

□

21.13. Beh.: Für $\Psi \in \mathbb{K}[x], \alpha \in \mathbb{K} : \Psi(D)e^{\alpha x} = \Psi(\alpha)e^{\alpha x}$ (als Fkt. in x).
Bew.: l.l.$=(\sum_{l=0}^k c_l D^l)e^{\alpha x} = \sum_{l=0}^k c_l(D^l e^{\alpha x}) = \sum_{l=0}^k c_l \alpha^l e^{\alpha x} = r.l.$

□

21.14. Folgerung: (a) $\forall \alpha, \eta \in \mathbb{K} \forall r \in \mathbb{N}_0 : (D-\eta)^r e^{\alpha x} = (\alpha - \eta)^r e^{\alpha x}$. ⌜$\Psi(x) = (x-\eta)^r$⌝
(b) Ist α Nst. von l, so ist $e^{\alpha x}$ Lsg. der homogenen DGL $(*)_h$.
(c) Ist α K eine Nst. von ϕ, so ist $\frac{\beta}{\phi(\alpha)}e^{\alpha x}$ Lsg. der inhomogenen DGL (*) mit der r.l. $f(x) := \beta e^{\alpha x}$ für $\beta \in \mathbb{K}$. ⌜$\Psi = \phi$ in 21.13.⌝

21.15. Bsp.: DGL $\boxed{u'' + u' - 6u = e^x}$ (*)
Haben $\phi(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda+3)(\lambda-2)$.
Mit 21.14.(a) erhalten wir e^{-3x}, e^{2x} als Lsgn. von $(*)_h$.
Mit 21.14.(b) ergibt sich $(\alpha := 1, \beta := 1)$ dann $\frac{1}{\phi(1)}e^x = -\frac{1}{4}e^x$.
als eine Lsg. von (*). Somit: $c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x} - \frac{1}{4}e^x, c_1, c_2 \in \mathbb{K}$, sind Lösungen von (*).
⌜Auch: Alle Lsgn., denn der Lösungsraum von $(*)_h$ hat die Dimension 2 nach 21.24.⌝

21.16. Lemma: Für $\Psi \in \mathbb{K}[x], \alpha \in \mathbb{K}, v \in \phi^\infty(j,\mathbb{K})$ gilt:
$\Psi(D)(e^{\alpha x}v) = e^{\alpha x}\Psi(D+\alpha)v$
"Exponentialshift".
Bew.:• Der Spezialfall $\Psi(x) = x^l$, $l \in \mathbb{N}_0$, ergibt sich induktiv:
l=0: trivial wegen $\Psi(D) = D^0 = id = (D+\alpha)^0$✓
$l \to l+1$: $D^{l+1}(e^{\alpha x}v) = D(D^l e^{\alpha x}v) \underbrace{=}_{Ind.Vor.} D(e^{\alpha x}\underbrace{(D+ßalpha)^l v)}_{=:w\in\phi^\infty(j,\mathbb{K})}$

$\underbrace{=}_{Produktionsregel} e^{\alpha x}(\alpha + D)w = e^{\alpha x}(D+\alpha)^{l+1}v.$✓

- Daraus ist der allg. Fall ablesbar, da $\Psi(D) = \sum_{l=0}^{k} c_l D^l$.

$\square$

21.17. Bem.: $\Psi(D+\alpha) = \sum_{l=0}^{k} \frac{\Psi^{(l)}(\alpha)}{l!} D^l, ßalpha \in \mathbb{K}$.

21.18. Bew.: Taylorentwicklung von Ψ Zeigt $\Psi(t+\alpha) = \sum_{l=0}^{k} \frac{\Psi^{(l)}(\alpha)}{l!} t^l$.

$\square$

21.19. Bem.: Beh. 21.13. ergibt sich auch aus dem Exponentialshift 21.16. mit $v(t) \equiv 1$, denn alle Ableitungen (ab der Ordnung 1) sind 0, somit ist $\Psi(D+\alpha)v = \Psi(\alpha)$.

21.20. Bem.: $\phi(D)(xe^{\alpha x}) = (x\phi(\alpha) + \phi'(\alpha))e^{\alpha x}, \alpha \in \mathbb{K}$.
Bew.: direkt oder ablesbar aus 21.16. und 21.17. mit v(x):=x wie folgt:
l.S. $\underbrace{=}_{21.16.} e^{\alpha x}\phi(D+\alpha)x \underbrace{=}_{7}$ 21.17.$e^{\alpha x} \sum_{l=0}^{n} \frac{\phi^{(l)}(\alpha)}{l!} D^l x)$r.S.

$\square$

Aus Bem. 21.20. erhalten wir als Ergänzung zu 21.14.:
21.21. Satz: (d) Ist α doppelte Nst. von ϕ, so ist auch $xe^{\alpha x}$ Lsg. von (*).
(e) Ist α nur einfache Nst. von ϕ (d.h. $\phi(\alpha) = 0 \neq \phi'(\alpha)$, so liefert $\frac{\beta}{\phi'(\alpha)} xe^{\alpha x}$ eine Lsg. von (*)) mit $f(x) := \beta e^{\alpha x}$ als r.S., $\beta \in \mathbb{K}$.

21.22. Bsp.: DGL $\boxed{\ddot{s} - 2\dot{s} = \cos}$
Haben $\phi(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda-1)^2$, nach 21.14.(b) und 21.21.(d) erhalten wir e^x, xe^x als Lsgn. von $(*)_h$.
Zur Lsg. von (*) betr. die Komplexe DGL $\boxed{\ddot{z} - 2\dot{z} + z = e^{ix}}$.
Nach 21.14.(c) mit $\alpha = i, \beta = 1$ ist z=$\frac{1}{\phi(i)}e^{ix}$=$\frac{1}{-2_i}(\cos(x) + i\sin(x))$ =$\frac{1}{2}(-\sin(x) + i\cos(x))$ eine Partikuläre Lsg.
Da die r.S. der DGL für s genau (Realteil)Re(eix) ist, erhalten wir eine partikuläre Lsg. durch s=Re($\frac{1}{2}(-\sin(x)$ +
⌜Ebenso mit Im(e^{ix}) Lsg. von $\ddot{s} - 2\dot{s} + s = \sin$.
Haben, dass $(c_1 x + c_2)e^x - \frac{1}{2}\sin(x)$ für $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ schon alle Lsgn. sin nach 21.24.⌝

21.23. Allgemeine Lsg. der homogenen DGL (*):
Hat ϕ die r-fache Nst. $\alpha \infty \mathbb{C}$, d.h. $\phi(x) = (x-\alpha)^r \Psi(x), r \infty \mathbb{N}_0$
und $\Psi \in \mathbb{C}[x], deg\Psi = n - r, \Psi(\alpha) \neq 0$,
so hat man $\phi(D) = (D-\alpha)^r \Psi(D) = \Psi(D)(D-\alpha)^r$.

Fall (D-α)$^r u = 0$: Dies zeigt $\phi(D)u = 0$, wir suchen dann Lsgn. de Form $u(x) = e^{\alpha x}v(x)$ ⌜jede Fkt. ist so schreibbar⌝.
Dann ist $0 = (D-\alpha)^r e^{\alpha x} v = e^{\alpha x} D^r v$, also $D^r v = 0$.
Also ist v ein Polynom vom Grad $\leq$ r-1, Und $e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}, x^2 e^{\alpha x}, ..., x^{r-1}e^{\alpha x}$ sind zu α gehörende Lsgn. von $(*)_h$.
⌜Diese sind Linear unabh., da $x^0, x^1, ..., x^{r-1}$lin. unabh. Fktn. sind.

21.24. Schluss: Man erhält eine Basis des Lsgs.raums (ein "Fundamentalsystem"), d.h.: Jede Lsg. von $(*)_h$ lässt sichh in eindeutiger Weise als LK von $e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}, ..., x^{r-1}e^{\alpha x}$ schreiben, wobei α die verschiedenen Nullstellen von ϕ durchläuft.¡¡¡ßß Hat ϕ nut reelle Nst., ergibt dies ein reelle Fundamentalsystem.

21.25. Bem.: Die Lösung der allgemeinen DGL $\boxed{\phi(D)u = f}$ (*)

lässt sich wegen $\phi(D) = (D-\lambda_1)^{r_1}\cdots(D-\lambda_s)^{r_s}$,
$s \in \mathbb{N}, r_1, ..., r_s \in \mathbb{N}$, ddie $\lambda_1, ..., \lambda_s \in \mathbb{C}$ p.w.v. Nst. von ϕ ⌜laut Hauptsatz der Algebra ⌝
auf das sukzessive Lösen von n (linearen) DGLn erster Ordnung zurückführen.

21.26. Beweisskizze für 21.24.:
1. Schritt: Aus der Darstellung $\phi(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{r_1}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s}$ gewinnen wir mit der Partialbruchzerlegung An17.14. Polynome $q_1, ..., q_s$ mit $\frac{1}{\phi(\lambda)} = \frac{q_1(\lambda)}{(\lambda-\lambda_1)^{r_1}} + ... + \frac{q_s(\lambda)}{(\lambda-\lambda_s)^{r_s}}$, $\lambda \notin \{\lambda_1, ..., \lambda_s\}$.
2. Schritt: Setze $p_j(\lambda) := \prod_{l=1;l\neq j}^{s}(\lambda-\lambda_l)^{r_l}$, $j = 1, ..., s$.

$$\text{damit folgt} 1 = q_1(\lambda)p_1(\lambda) + ... + q_s(\lambda)p_s(\lambda), \tag{1}$$
$$\text{also} u = \underbrace{q_1(D)p_1(D)u}_{=:u_1} + ... + \underbrace{q_s(D)p_s(D)u}_{=:u_s} \tag{2}$$

3. Schritt: Ist u Lsg. von $(*)_h$, so gilt
(#) $\boxed{(D-\lambda_j)^{r_j}u_j = 0}$, $j = 1, ..., s$,

⌜l.S.$=(D-\lambda_j)^{r_j}q_j(D)p_j(D)u = q_j(D)\overbrace{\phi(D)u}^{=0} = 0.$ ⌝
4. Schritt: Die Lsgn. $v_1, ..., v_s$ von (#) liefern durch $v : v_1 + ... + v_s$
eine Lsg. von $(*)_h$. ⌜$\phi(D)v = \phi(D)v_1 + ... + \phi(D)v_s = \sum_{j=1}^{s} p_j(D)\underbrace{(D-\lambda)^{r_j}v_j}_{=0} = 0.$⌝

5. Schritt: Dimensionsüberlegung: $\mathcal{M} := \{u \in \phi^\infty(j, \mathbb{C}; \phi(D)u = 0(\Leftrightarrow (*)_h))\}$.
und für $1 \leq j \leq s$ sei $\mathcal{L}_j := \{v_j \in \phi^\infty(j, \mathbb{C}); (D-\lambda_j)^{r_j}v_j = 0\}$.
haben Isomorphismus $\mathcal{M} \tilde{=} \mathcal{L}_1 \oplus ... \oplus \mathcal{L}_s, u \rightarrowtail u_1 + ... + u_s$, wo $u_j := q_jp_j(D)u, 1 \leq j \leq s$.
Dabei ist die Summe der $\mathcal{L}_j$ direkt. Es folgt $dim_{\mathbb{C}}\mathcal{M} = dim\mathcal{L}_1 + ... + dim\mathcal{L}_s = r_1 + ... + r_s = n$.

□

Man erhält auf ähnliche Art den:
21.27. Existenz- und Eindeutigkeitssatz für DGL $\phi(D)y = f$:
Zu $f \in \phi(j, \mathbb{C})$, $x_0 \in j, (y_0, ..., y_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$ Ex. eindeutig ein $y \in \phi^\infty(j, \mathbb{C})$ ϕ(D)y=f, mit $y^{(j)}(x_0) = y, j = 0, ...,$
Vgl. [Heuser, Satz 16.13.]

21.28. Der Ex.-und Eind.satz 21.27. (bzw. die Überlegungen in 21.23-21.26)
Liefern speziell für den VR der Lösungen der homogenen DGL,
$\mathcal{M}$:=$\{u \in \phi^\infty(j, \mathbb{C}); \phi(D)u = 0\}$
durch $u \rightarrowtail (u(x_0), ..., u^{(n-1)}) \in \mathbb{C}^n$ einen Isomorphismus, d.h. $dim_{\mathbb{C}}\mathcal{M} = n$.

21.29. Reelle Lösungen zu Komplexen Nst.
Ist $\alpha + i\beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$, r-fache Nst. von ϕ, so auch $\alpha - i\beta$.
Die zugeh. homogenen Lsgn. sind nach 21.23. dann von der Form $p(x)e^{(\alpha+i\beta)x} + q(x)e^{(\alpha-i\beta)x}, p, q \in \mathbb{C}[x], degp, d$
zu P,Q$\in \mathbb{R}[x]$, deg P, deg Q $\leq r-1$, sind mit p$= \frac{1}{2}(P-iQ)$, q$= \frac{1}{2}(P+iQ)$ dann die Funktionen

$$pe^{(\alpha+i\beta)x} + qe^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}(\frac{1}{2}(P-iQ)e^{i\beta x} + \frac{1}{2}(P+iQ)e^{-i\beta x}) \tag{3}$$
$$= e^{\alpha x}(P(\frac{1}{2}(e^{i\beta x} + e^{-i\beta x})) - Q(\frac{i}{2}(e^{i\beta x} - e^{i\beta x}))) \tag{4}$$
$$= e^{\alpha x}(P\cos(\beta x) + Q\sin(\beta x)) \text{die reellen Lösungen}. \tag{5}$$

21.30. **Fazit:** Zu einer r-fachen Nst. $\alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, gehört die allg. Lsg. $e^{\alpha x}(P\cos(\beta x) + Q\sin(\beta x))$, mit $P, Q \in \mathbb{R}[x], degP, degQ \leq r-1$.

• Für r=1 ist dies $e^{\alpha x}(c_1\cos(\beta x) + c_2\sin(\beta x))$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

• Falls β=0, ist α reelle Nst. mit allg. Lsg. $e^{\alpha x}P, P \in \mathbb{R}[x], degP \leq r-1$,

• speziell r=1 ind β=0 ergibt $ce^{\alpha x}$, falls α einfache reelle Nst.

21.31. **Spezialfall n=2:** $\boxed{y'' + ay' + by = 0}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Fall $a^2 - 4b > 0$: haben zwei verschiedene reelle Nst.
$\lambda_{1/2} = \frac{1}{2}(-a \pm \sqrt{a^2 - 4b})$,
und $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}$ ist (reelles) Fundamentalsystem.
2. Fall $a^2 - 4b = 0$: haben eine doppelte Nst. $\lambda_0 := -\frac{a}{2}$ und $e^{\lambda_0 x}, xe^{\lambda_0 x}$ ist (reelles) Fundamentalsystem.
3. Fall $a^2 - 4b < 0$: $\lambda_{1/2} = \alpha \pm i\beta, \alpha := -\frac{1}{2}, \beta := \frac{1}{2}\sqrt{4b - a^2}$ sind Konjugiert Komplexe Nst., und $e^{\alpha x}\cos(\beta x)$, e
ist (reelles) Fundamentalsystem.