Teil 1: Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$

an6: Mittelwertsatz und der Satz von Schwarz

Stichworte: MWS, stetig diff'bar, mehrfache partielle Ableitung, Satz von Schwarz

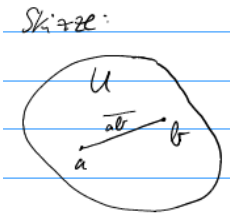
Literatur: [Hoff], Kapitel 9.5

6.1. Einleitung: Der MWS wird für Skalarfelder verallgemeinert.

6.2. Erinnerung: Hatten der MWS: Vor.: $a, b \in \mathbb{R}, a<b, f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, in $]a, b[$ diff'bar.
Beh.: $\exists t \in]a, b[: f(b) - f(a) = f'(t) \cdot (b - a)$.
Dies ist so nicht übertragbar auf Abbildungen mit Werten in $\mathbb{R}^2$:
Betrachte $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, t \to \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ auf $[0, 2\pi]$.
Aber: $f(2\pi) - f(0) = 0 \neq \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \cdot 2\pi$, da $|| \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} ||_2 = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

6.3. Konvention/Vereinbarung: Betrachte also nur $\mathbb{R}^1$-wertige Funktion (d.h. Skalarfelder), die auf $U \subseteq \mathbb{R}$ definiert sind, wo jeder Punkt $a \in U$ innerer Punkt von U ist. Für je zwei Punkte $a, b \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ sei weiter die (Verbindungs-)Strecke $\overline{ab} \subseteq U$, wobei $\overline{ab}:=\{a + t(b - a); t \in [0, 1]\}$. U heißt dann Konvex (Konvexe Menge).

Skizze:



6.4. Mittelwertsatz:
Vor.: Sei $\overline{ab} \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^n$ wie in 6.3, $f : U \to \mathbb{R}$ in allen Punkten von $\overline{ab}$ diff'bar.
Beh.: $\exists c \in \overline{ab} \backslash \{a, b\}$ mit $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a) = <f'(c)^T, b - a>$.
Bew.: Setze $h(t) := f(a + t(b - a))$, $h : [0, 1] \to \mathbb{R}, t \rightarrowtail a + t(b - a) \xrightarrow{f} h(t)$. Werde auf h den alten MWS An12.13 an:
$\exists \xi \in]0, 1[$ mit $h(1) - h(0) = h'(\xi)(1 - 0) \Rightarrow f(b) - f(a) = f'(a + \xi(b - a))(b - a) = f'(c) \cdot (b - a)$
mit $c := a + \xi \cdot (b - a) \in \overline{ab} \backslash \{a, b\}$.

□

6.5. Dies liefert folgende Möglichkeit zur Fehlerabschätzung:

Sei $b = a + \begin{pmatrix} \triangle\alpha_1 \\ \triangle\alpha_2 \\ \vdots \\ \triangle\alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

Dann gilt: $|f(b) - f(a)| = |f'(c)(b - a)| = | \sum_{j=1}^n D_j f(c) \triangle\alpha_j| \leq \sum_{j=1}^n S_j |\triangle\alpha_j|$,