an3: Konvergenz, Funktionsgrenzwerte, Stetigkeit im $\mathbb{R}^n$ **Stichworter:** Funktionsgrenzwerte, Stetigkeit (Komponentenweise und partiell)

Literatur:[Hoff], Kapitel 9.3

3.1Einleitung: Wir definieren Funktionsgrenzwerte bei Funktionen f von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$

3.2 Vereinbarung/Situation: Seien M,n $\in \mathbb{N}$, M $\subseteq \mathbb{R}^n$, f : D $\to \mathbb{R}^m$ und b $\in \mathbb{R}^m$. Als Norm benutzen wir die Maximumsnorm und schreiben deswegen $||\cdot||$ für $||\cdot||_\infty$. Weiter sei $a \in \mathbb{R}^n$ ein Häufungspunkt zu/von M, d.h $\forall \epsilon > 0 :\neq \{x \in M; ||x-a|| < \epsilon\} = \infty$ (vgl. An 10.2).
(Anmerkung$\{x \in M; ||x-a|| < \epsilon\} = U_a^\epsilon(M) \leftarrow$ ϵ-Umgebung um a, vgl. 3.14).
Dies bedeutet, dass a aus M heraus durch von a verschiedene Punkte x $\in M$ beliebig gut approximierbar ist, bzw. "man kommt mit Punkten aus M beliebig gut heran an a", und zwar aus "allen Richtungen" falls $\exists \epsilon > 0 : U_a^\epsilon(\mathbb{R}^n) \subseteq M$.
Wie in An 10.4 definieren wir dann den Funktionsgrenzwert:

3.3Def.: In Situation 3.2 gilt: f(x) $\to$ b (für M$\ni$ x $\to$ a)
$: <=> \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \ \ \forall x \in M : ||x-a|| < \delta => ||f(x)-b|| < \epsilon$
Lesen "f(x) Konvergiert gegen b, wenn x (aus M heraus) gegen a geht/Konvergiert".
Wir nennen b $\in \mathbb{R}^m$ den Grenzwert (Kurz GW)von f(x) für $M \ni x \to a.$
Notation: f(x) $\xrightarrow{M \ni x \to a}$b oder $\lim_{n \ni x \to a} f(x) = b$ oder $\lim\limits_{x \to a | x \in M} f(x) = b.$
Umformulierung:$||f(x)-b|| \xrightarrow{M \ni x \to a} 0.$

3.4Bem.: Falls M = D ist, hat die Bedingung "$x \in M$" Keine Weitere Bedeutung und kann weggelassen werden. Fehlt eine Bedingung, ist einfach m= D gemeint.

3.5 Funktionsgrenzwerte können Komponentenweise untersucht und gebildet werden:
Für $x \in D$ ist f(x) ein Element des $\mathbb{R}^m$, also Schreibbar in den Komponenten/Koordinaten
f(x)=$\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}$, den Komponentenfunktionen $f_1, ..., f_m : D \to \mathbb{R}$, nämlich $\forall i \in \{1, ..., m\} : f_i := pr_i \circ f$.
Mit $b = (b_1, ..., b_m)^T \in \mathbb{R}^m$ gilt dann:
Beh.:

$$\begin{aligned} f(x) \xrightarrow{n \ni x \to a} b &\Leftrightarrow \forall i \in \{1, ..., m\} : f_i(x) \to b_i(n \ni x \to a) \\ &\Leftrightarrow \forall i : |f_i(x) - b_i| \to 0(n \ni x \to a) \end{aligned} \tag{1}$$

Bew.: Für $z = (z_1, ..., z_m)^T \in \mathbb{R}^m, i \in \{1, ..., m\}$ gilt $|z_i - b_i| \le ||z-b||_\infty \le \sum_{i=1}^m |z_i - b_i|$.

□

3.6Bem.: Mit 3.5 kann man sich also auf die kgz. der Komponentenfunktionen zurückziehen , falls das nützlich/schneller geht.

3.7Bsp.: $D = \mathbb{R}^2 \backslash \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}, f(v) := \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, wenn $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in D$, also $f : D \to \mathbb{R}$.

Beh.: $f(v) \to 0$ (bei $D \ni v \to (0,0)^T =: 0$).
Bew.: $|f(v) - 0| = |f(v)| \leq \frac{||v||_2^2}{||v||_2} = ||v||_2 \to 0$.
Bei $\leq \frac{||v||_2^2}{||v||_2} \Leftarrow |xy| \leq \max(x^2, y^2) = ||v||^2 \leq x^2 + y^2 = ||v||_2^2$.

□

3.8Bsp.: $D = \mathbb{R}^2 \backslash \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}, f(v) := \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, wenn $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in D$, also $f : D \to \mathbb{R}$.
Beh.: Es existiert kein $b \in \mathbb{R}$ mit $f(v) \to b$ (bei $v \to (0,0)^T = 0$).
Bew.: Für x$\in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ gelten $f(x,0) = 0$ und $f(x,x) = \frac{1}{2}$, im $\lightning$ zu 3.5.

□

Wie i, eindimensionalen Fall ist ein Funktions GW mit Folgenkonvergenz beschreibbar:
3.9 Bem.: $(f) \xrightarrow{M \ni x \to a} b$, wenn $\forall (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq M, x_k \xrightarrow{k \to \infty} a : f(x_k) \xrightarrow{k \to \infty} b$ mit Folgenkonvergenz wie in an 1.8

3.10 Rechnen mit Grenzewerten ("GWSätze"):

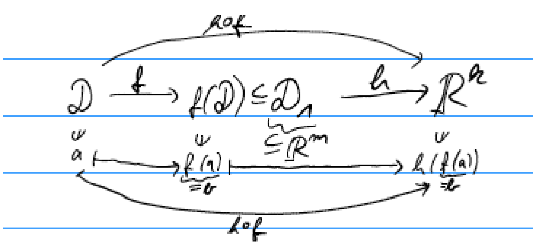
$$\begin{cases} f(x) \to b, g(x) \to c & \Rightarrow (f+g)(x) \to b \pm c, \text{ sofern bildbar} \\ & \Rightarrow <f(x), g(x)> \to <b, c>, \text{ sofern bildbar} \\ & \Rightarrow ||f(x)|| \to ||b|| \end{cases} \tag{2}$$

Wir kommen zur Stetigkeit von Funktionen $f : D \to \mathbb{R}^m, D \subseteq \mathbb{R}^n$.
3.11Def.:

$$\begin{cases} \text{Für } a \in D \text{ heißt f stetig in a} : & \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D : ||x - a|| < \delta \Rightarrow ||f(x) - f(a)|| < \epsilon \\ & \Leftrightarrow f(x) \to f(a) (\text{bei } D \ni x \to a) \\ & \text{bzw. } \lim_{x \to a (x \in D)} f(x) = f(a). \end{cases} \tag{3}$$

3.12 Bem.: Die Forderung, dass a ein Häufungspunkt von D ist, wird hier nicht benötigt.
3.13 Def.: Sei $T \subseteq D$. Dann: f heißt setig in T $:\Leftrightarrow \forall z \in T : f$ stetig in z
f heißt Stetig $:\Leftrightarrow f$ stitig in D

3.14 Zum Erkennen von stetigen Funktionen ist wieder folgende Grundregel zur Stetigkeit zusammengesetzter/verknüpfter Funktionen nützlich:
Vor.: $n, m, k \in \mathbb{N}, a \in D \subseteq \mathbb{R}^n, f : D_1 \to \mathbb{R}^k$,
$D_1 \subseteq \mathbb{R}^m$ mit $f(D) \subseteq D_1, h : D_1 \to \mathbb{R}^k$,
$b := f(a), f$ in a stetig, h in b stetig.
Beh.:$h \circ f : D \to \mathbb{R}^k$ ist in a stetig
Skizze:



Bezeichnung: $U_c^S := \{x \in \mathbb{R}^l; ||x - c|| < S\}$ heißt S-Umgebung von c Bedeutung der Stetigkeit von $h \circ f$:

eine η-Umgebung von a wird unter f in eine δ-umgebung von b, und diese dann unter h ist eine ϵ-Umgebung von h(b) abgebildet. Dies ist auch der

Bew.:
Zu ϵ>0 ex. zunächst ein δ>0 so, dass $||h(z) - h(b)||<\epsilon$(bei $z \in D_1, ||z - b||<\delta$).
Zu δ>0 ex. nun ein η>0 so, dass $||f(x) - f(a)||<\delta$(bei $x \in D, ||x - a||<\eta$).
Für solche x gilt also $||h(f(x)) - h(f(a))||<\epsilon$. Also ist h $\circ$f stetig in a.

$\square$

3.15 Beh.:3.5 liefert nun mit 3.14, dass Stetigkeit und Komponentenweise Stetigkeit (d.h. mit den Komponentenfunktionen) äquivalent sind:
Beh.: f stetig in a $\Leftrightarrow$ $\forall_i \in \{1, ..., m\} : f_i$ stetig in a. (Beachte $f_i = pr_i \circ f$ und 3.20)
Bew.: " $\Rightarrow$ ": klar mit 3.14/3.20 " $\Leftarrow$ ": Wähle $(x_k) \subseteq D$ mit $x_k \rightarrow a$. Dann:
$\forall i : pr_i(f(x_k)) \rightarrow pr_i(f(a))$, da die $pr_i \circ f = f_i$ stetig. Nach 3.5 gilt dann $f(x_k) \rightarrow f(a)$, d.h. f ist stetig in a laut 3.11.

$\square$

Die GWSätze 3.10 zeigen: