Vorlesung Analysis II

July 2, 2025

Teil 3: Gewöhnliche Differentialgleichungen

an 18: Lineare DGL 1. Ordnung

Stichworte: Variation der Konstanten, zugeh. homogene DGL, partikuläre Lsg.

Literatur: [Hoffmann], kapitel 7.3.

18.1. Einleitung: Bereits die einfache DGL $y' = \alpha y$ beschreibt exponentielles Verhalten (Wachstum für α>0, zerfall für α<0), in vielen Anwendungen ein Standardkonzept. Wir behandeln die DGL $y' = f(x)y + g(x)$ als Verallgemeinerung dieser Form.

18.2. Motivation: Die Lineare DGL 1.Ordnung wird untersucht.

18.3. Vereinbarung: Betr. die DGL $\boxed{y' = f(x)y + g(x)}$ (*)
wo $f, g : j \to \mathbb{R}$ stetig, $j \subseteq \mathbb{R}$ ein IV. Die r.s. ist linear in y.

18.4. Bem.: Für $a \in j$ wird durch $y_0(x) := \exp(\int_a^x f(t)dt)$, $x \in j$, eine Lsg. y_0 der zugehörigen homogenen (linearen) DGL auf j erklärt, die $y_0(x) \neq 0, y_0(a) = 1$ erfüllt.
$\boxed{f' = f(x)y}$ $(*)_l$

18.5. Satz: • Für $a \in j$ und $b \in \mathbb{R}$ ist die (eindeutig bestimmte) Lsg. y von (*) auf j mit y(a)=b gegeben durch
$y(x) = y_0(x) \cdot (\int_a^x g(t)y_0(t)^{-1}dt + b)$. (+)
•Sämtliche Lösungen von (*) erhält man durch Variation von a und b (d.h. a=a(x), b=b(x)) und Einschränkung auf Teilintervalle.
Beweis: • Sei y eine Lsg. von (*) in einem IV j_0 mit $a \in j_0 \subseteq j$ und $y(a)b \in \mathbb{R}$. Wir schreiben y in der Form $y(x) = c(x)y_0(x)$, $x \in j_0$, "Variation der Konstanten"
mit $c : j_0 \to \mathbb{R}, x$ (stetig)diff'bar (die Glg. kann als Def. für c gelesen werden).

Nehmen wir diese Form $y = cy_0$ an, dann gilt damit
$\underline{fcy_0}$+g= $fy + g = y' = c'y_0 + cy_0 = c'y_0$+$\underline{cfy_0}$
$\Rightarrow c'(t) = g(t)y_0(t)^{-1}$,
somit notwendig $y(x) = y_0(x) \cdot (\int_a^x g(t)y_0(t)^{-1}dt + b)$, d.h. (+).
• Andererseits wird durch (+) eine Lsg. von (+) mit y(a)=b erklärt.

□

e18.6. **Folgerung:** (a) Für die zugeh. homogene DGL $(*)_h$ sind alle Lsg. auf j gegeben durch $y(x) = by_0(x)$, $x \in j$, $b \in \mathbb{R}$.
(b) Für eine Lsg. y der homogenen DGL $(*)_h$ gilt: $y \neq 0 \Rightarrow \forall x \in j : y(x) \neq 0$.
(c) Jede bel. Lsg. von $(*)$ auf j entsteht aus einer speziellen ("partikulären")Lsg. durch Addition eine Lsg. der homogenen DGL $(*)_h$.
Bew.: (a): direkt ablesbar aus $(+)$ mit g(t):=0, $t \in j$.
(b): aus (a), da $y_0 \neq 0$ für $x \in j$.
(c): aus der Linearität der Ableitung folgt:
Sind y,z Lsgn. von $(*)$, so gilt $(y - z)' = y' - z' = f(y) - f(y) = f(y - z)$.
Also ist y-z Lsg. von $(*)_h$, und y=z+(y-z) die gewünschte Darstellung.

$\square$

Die hier enthaltenen Linearitätsüberlegungen sind aus der Linearen Algebra bereits bei der Lösung Linearer Gleichungssysteme bekannt:
18.7. **Bem.:** (a) u,v Lsgn. von $(*)_h$ $\Rightarrow$ $\alpha u + \beta v$ Lsg. von $(*)_h$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
(b) u Lsg. von $(*)$ $\wedge$ v Lsg. von $(*)_h$
(c) u,v Lsg. von $(*)$ $\Rightarrow$ u-v Lsg. von $(*)_h$
Die Beh. (a) zeigt, dass die Menge der Lsgn. der homogenen DGL $(*)_h$ bereits einem $\mathbb{R}$-Vektorraum liefert.
Bew.: (c): siehe 18.6.(c).
(a),(b): ebenso aus der Linearität der Ableitung:
(a): $(\alpha u + \beta v)' = \alpha u' + \beta v' = \alpha f(u) + \beta f(v) = f(\alpha u + \beta v)$,
(b): $(u + v)' = u' + v' = (f(u) + g) + f(v) = f(u + v) + g$.

$\square$

18.8. **Bsp.:** DGL $\boxed{\text{y'=-xy+3x}}$, y(0)=5.
• Zur Lsg. dieser AWA ist in Satz 18.5. zu setzen:
$j := \mathbb{R}, a := 0, b := 5, f(x) := -x, g(x) := 3x$.
Es ergibt sich: $y_0(x)$:=exp$(\int_0^k (-t)dt)$ =$\exp(-\frac{1}{2}x^2)$
y(x):=$y_0(x) \cdot (\int_0^x 3t \exp(-\frac{1}{2}t^2)dt + 5)$ =$y_0(x) \cdot (3\exp(\frac{1}{2}x^2) + 2)$,
wegen $\int_0^x 3t \exp(\frac{1}{2}t^2)dt = 3\exp(\frac{1}{2}t^2)\Big|_0^x = 3(\exp(\frac{1}{2}x^2) - 1)$
Daher ist $y(x)3 + 2\exp(-\frac{1}{2}x^2)$ die eindeutig bestimmt Lsg. der AWA.
• Dieselbe AWA direkt mit "Variation der Konstanten" gelöst (ohne Formel$(+)$):
$y_0(x) = \exp(-\frac{1}{2}x^2)$ erfüllt $y_0' = -xy_0, y_0(0) = 1$.
Der Ansatz $y(x) = c(x)y_0(x)$ liefert
$-x(cy_0)+3x = -xy + 3x = y' = c'y_0 + cy_0' = c'y_0+c(-xy_0)$
$\Rightarrow c'y_0 = 3x \Rightarrow c'(x) = 3x\exp(\frac{1}{2}x^2)$.
Daraus folgt $c(x) = 3\exp(\frac{1}{2}x^2)+\alpha$. DIe Anfangswertbedingung c(0)=y(0)=5 gibt dann α=2, zusammen also wieder die Lsg. $y(x) = 3 + 2\exp(-\frac{1}{2}x^2)$.

• Oft ist es noch einfacher, eine Lsg. von $(*)$ zu erraten und dann mit Satz 18.6.(c)(und (a)) die allgemeine Lsg. zu notieren:

Schreibt man die geg. DGL in der Form $y' = x(-y + 3)$, so erkennt man leicht die Konstante Fkt. $y_p(x) := 3$ als partikuläre Lösung.

Mit der oben schon besimmten Lsg. y_0 der zugeh. homogenen DGL ist die allgemeine Lösung (nach

Satz 18.6.(a) und (c)) dann

$y(x) = by_0(x) + y_p(x) = b\exp(-\frac{1}{2}x^2) + 3$, mit $b \in \mathbb{R}$ bel.
Die Forderung $y(0) = 5$ zeige dann abschließend b=2.