Teil 1: Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$

an6: Mittelwertsatz und der Satz von Schwarz

Stichworte: MWS, stetig diff'bar, mehrfache partielle Ableitung, Satz von Schwarz

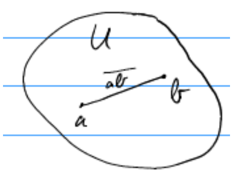
Literatur: [Hoff], Kapitel 9.5

6.1. Einleitung: Der MWS wird für Skalarfelder verallgemeinert.

6.2. Erinnerung: Hatten der MWS: Vor.: $a, b \in \mathbb{R}, a<b, f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, in $]a, b[$ diff'bar.
Beh.: $\exists t \in]a, b[$: $f(b) - f(a) = f'(t) \cdot (b - a)$.
Dies ist so nicht übertragbar auf Abbildungen mit Werten in $\mathbb{R}^2$:
Betrachte $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, t \to \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ auf $[0, 2\pi]$.
Aber: $f(2\pi) - f(0) = 0 \neq \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \cdot 2\pi$, da $|| \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} ||_2 = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

6.3. Konvention/Vereinbarung: Betrachte also nur $\mathbb{R}^1$-wertige Funktion (d.h. Skalarfelder), die auf $U \subseteq \mathbb{R}$ definiert sind, wo jeder Punkt $a \in U$ innerer Punkt von U ist. Für je zwei Punkte $a, b \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ sei weiter die (Verbindungs-)Strecke $\overline{ab} \subseteq U$, wobei $\overline{ab}:=\{a + t(b - a); t \in [0, 1]\}$. U heißt dann Konvex (Konvexe Menge).

Skizze:



6.4. Mittelwertsatz:
Vor.: Sei $\overline{ab} \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^n$ wie in 6.3, $f : U \to \mathbb{R}$ in allen Punkten von $\overline{ab}$ diff'bar.
Beh.: $\exists c \in \overline{ab} \backslash \{a, b\}$ mit $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a) = <f'(c)^T, b - a>$.
Bew.: Setze $h(t) := f(a + t(b - a))$, $h : [0, 1] \to \mathbb{R}, t \rightarrowtail a + t(b - a) \xrightarrow{f} h(t)$. Werde auf h den alten MWS An12.13 an:
$\exists \xi \in]0, 1[$ mit $h(1) - h(0) = h'(\xi)(1 - 0) \Rightarrow f(b) - f(a) = f'(a + \xi(b - a))(b - a) = f'(c) \cdot (b - a)$ mit $c := a + \xi \cdot (b - a) \in \overline{ab} \backslash \{a, b\}$.

$\square$

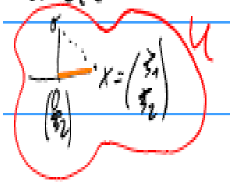
6.5. Dies liefert folgende Möglichkeit zur Fehlerabschätzung:
Sei $b = a + \begin{pmatrix} \triangle\alpha_1 \\ \triangle\alpha_2 \\ \vdots \\ \triangle\alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.
Dann gilt: $|f(b) - f(a)| = |f'(c)(b - a)| = |\sum_{j=1}^n D_j f(c) \triangle\alpha_j| \leq \sum_{j=1}^n S_j |\triangle\alpha_j|$,
wenn $|D_j f(c)| \leq S_j$ mit $1 \leq j \leq n$ ist.
Dies ist u.U. eine grobe Abschätzung für die Abwechslung des WErts f(b) von f(a).

6.6. Folgerung: Vor.: Wie im MWS 6.4., aber $f: U \to \mathbb{R}^m, \max_{1 \leq i \leq m} ||f'(c)^T||_\infty \leq M \in \mathbb{R}_{>0}$ für alle $c \in \overline{ab} \backslash \{a,b\}$.
Beh.: $||f(b) - f(a)||_\infty \leq nM \cdot ||b-a||_\infty$.
Bew.: Sei $i \in \{1,...,m\}$ so, dass $||f(b)-f(a)||_\infty = |f_i(b) - f_i(a)|$.
Mit dem MWS 6.4. folgt: $\exists c \in \overline{ab} \backslash \{a,b\}$ mit $|f_i(b) - f_i(a)| = |\underbrace{f_i'(c)}_{\in \mathbb{R}^{1xm}} \cdot \underbrace{(b-a)}_{\in \mathbb{R}^n}| \leq ||f_i'(c)^T||_2 \cdot ||b-a||_2 \leq nM \cdot ||b-a||_\infty$.

□

Dies Liefert und ein nützliches Kriterium zur Überprüfung der (totalen) Differenzierbarkeit:
6.7. Satz: Vor.: $U \subseteq \mathbb{R}^n, \forall c \in U: c$ innerer pkt. von $U, f: U \to \mathbb{R}^m$, f partiell diff'bar alle partiellen Ableitungen seien in $a \in U$ stetig.
Beh.: f in a diff'bar, f'(a)=($f_1(a), ..., D_n f(a)$).
Bew.: Sei Œ$m = 1$, Œ$a = o$, Œ$n = 2$, Œ$|| \cdot || = || \cdot ||_i nfty$. Ferner sei x so klein, dass $\overline{\begin{pmatrix} 0 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}} \subseteq U$.

Skizze:



Dann gilt: $|f(x) - f(o) - (D_1 f(o), D_2 f(o))x|$

$$= |f\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} - f(o) - D_1 f(o)\xi_1 - D_2 f(o)\xi_2|$$

$$\leq |f\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} 0 \\ \xi_2 \end{pmatrix} - D_1 f(o)\xi_1| + |\underbrace{f\begin{pmatrix} 0 \\ \xi_2 \end{pmatrix} - f(o) - D_2 f(o)\xi_2}_{=o(|\xi_2|), \text{ da die partielleAbl. (entlang}\xi\text{)ex.}}|$$

$$\leq \underbrace{|D_1 f\begin{pmatrix} z_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} - D_1 f(o)|}_{\to 0 \text{für} 0 < z_1 < \xi_1 \to 0} \cdot |\xi_1| + \underbrace{o(|\xi_2|)}_{=o(||x||_\infty), \text{da} x \to o \text{betr. wird}} = o(||x||_\infty).$$

□

6.8. Def.: Wir nennen eine Funktion wie in 6.7.. stetig diff'bar, d.h. wenn sie (partiell) diff'bar ist und so, dass alle partiellen Ableitungen stetig sind. Ohne Stetigkeit der partillen Ableitungen kann 6.7. nicht stimmen, vgl. 4.16. Ü

6.9. Wir untersuchen nun auch höheree Ableitungen. Dazu sei die Generalvoraussetzung.
Sei $f: U \to \mathbb{R}^m, a \in U$, weiter sei
$U \subset \mathbb{R}^m$: $\Leftrightarrow$ $U \subset \mathbb{R}^n$ und $\forall c \in U: c$ innerer Punkt von U, d.h. $U \subset \mathbb{R}^n$ und $\forall c \in U \exists \epsilon > 0: U_c^\epsilon \subset U$.
Diese Bedingung kommt häufig vor. Wir sagen dann, U ist eine offfene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ (als Verallg. von "offene IV").

6.10 Beobachtung: Falls f in a diff'bar, so haben wir $f': U \to Hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \overset{\psi}{a} \to f'(\overset{\psi}{a})$
Falls f' in a diff'bar, so haben wir
$f'': U \to Hom(\mathbb{R}^n, Hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$
$\overset{\psi}{a} \rightarrowtail A^\psi =: f''$ (zweite Ableitung, eindeutig), d.h.: $f'(x) = f'(a) + A \cdot (x-a) + o(||x-a||)$.

Für $h, k \in \mathbb{R}^n$ ist also $Ah \in Hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), d.h.(Ah)k \in \mathbb{R}^m$.
Betr. nun $\tilde{A} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m (h, k) \rightarrowtail (Ah)(k)$.
Diese Abb. ist bilinear, schreibe daher: $Ahk = \tilde{A}(h, k)$.

6.11. Ableitungen beziehen sich stets auf die Komponentenfunktion $f_1, ..., f_m$, vgl. 4.13.
Wir beschränken uns Œauf m=1 und betrachten mehrfache partielle Ableitungen:
Vor.: Sei $f : U \to \mathbb{R}, U \subset \mathbb{R}^n, D_i f$ existiere auf $U, D_i f : U \to \mathbb{R}$.
Falls $D_i f(D_i f) = D_j D_i f =: \frac{\delta^2 f}{\delta \xi_j \delta \xi_i} = f_{\xi_j \xi_i}$,
und für i=j schreibe $\frac{\delta^2 f}{(\delta x_i)^2} = \frac{\delta^2 f}{\delta x_i^2} = D_i^2 f$.

6.12. Induktiv erhalten wir beliebige höhere partiellen Ableitungen wie folgt:
Def.: Seien $p_1, ..., p_r \in \mathbb{N}, i_1, ..., i_r \in \{1, ..., n\}$, setze $p := p_1 + ... + p_r$.
Dann heißt $D_{i_1}^{p_1} \circ D_{i_2}^{p_2} \circ ... \circ D_{i_r}^{p_r} f$ eine partielle Ableitung von f der Ordnung p.

6.13. Bsp.: Für $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ betrachte f$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = xe^y + yx^2$.

Dann: $D_1 f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^y + 2xy, D_2 f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = xe^y x^2$,

$D_2 D_1 f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^y + 2x, D_1 D_2 f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^y + 2x$.

Hier gilt $D_2 D_1 f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = D_1 D_2 f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Ist das immer so? Antwort:

6.14. Satz von Schwarz: Geg.: $f : U \to \mathbb{R}, a \in U \subset \mathbb{R}^n$.
Vor.: $D_k f, D_l f$ ex. auf U, $D_l D_k f$ ex. auf U, $D_k D_l f(a)$ ex. und $D_k D_l f(a) = D_l D_k f(a)$.
Bew.: Sei Œ$n = 2, k = 1, l = 2, a = 0, || \cdot || = || \cdot ||_\infty, \epsilon$>0 so dass $U_0^\epsilon \subseteq U$.
Wähle $h, k \in \mathbb{R}$ mit $0 < |h|, |k| < \epsilon$.
Doppelter Differenzenquotient:
F(h,k):=$\frac{1}{hk}(f \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} - f \begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix} - (f \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix} - f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix})) \in \mathbb{R}^m$.
Dann: $hkF(h, k) = g(h) - g(0) = g'(\tau h)h$ mit $0 < \tau < 1$ geeignet laut MWS 6.4
$= (D_1 f \begin{pmatrix} \tau h \\ k \end{pmatrix} - D_1 f \begin{pmatrix} \tau h \\ 0 \end{pmatrix})h = D_2 D_1 f \begin{pmatrix} \tau h \\ \sigma k \end{pmatrix} \xrightarrow{h,k \to 0} D_2 D_1 f(o)$, da $D_2 D_1 f$ stetig in o.
Somit ex. $\lim\limits_{(h,k) \to o}$, sowie $\lim\limits_{(h,k) \to o} F(h, k) = D_2 D_1 f(o)$.
Bei umgekehrter Reihenfolge erhält man ebenso analog:
$\lim\limits_{(h,k) \to o} F(h, k) = D_1 D_2 f(o)$. Es folgt, da Grenzwerte eindeutig sind: $D_2 D_1 f(o) = D_1 D_2 f(o)$.

□

6.15. Bem.: Wie im Satz 6.7 (Kriterium für totale Diff'barkeit) und im Satz von Schwarz 6.14 zu sehen ist, ist die Eigenschaft, dass die partiellen Ableitungen immer noch stetig sind, essentiell.

6.16. Def.:• Sei $p \in \mathbb{N}$.
f:$U \to \mathbb{R}$(oder auch in $\mathbb{R}^n$ möglich), heißt p-mal stetig (partiell) diff'bar, falls alle partiellen Ableitungen der Ordnung p existieren und stetig sind.
• Ein 1-,al stetig partiell diff'bar Fkt. heißt auch stetig (partiell) diff'bar, vgl. 6.8.
• Für $U \subset \mathbb{R}^n$ setze $\ell^p(U, \mathbb{R}) = \ell^p(U) := \{f : U \to \mathbb{R}, f$p-mal stetig (partiell) diff'bar$\}$.
Weiter sei $\ell^\circ(U) := \{f : U \to \mathbb{R} : f$stetig$\}$.
Ferner setze $\ell^\infty(U) := \bigcap_{p \geq 0} \ell^p(U)$, die Menge der beliebig oft ("∞ oft") stetig diff'baren Funktionen.
Dies sind trivialerweise $\mathbb{R} - VRe$, und überdies Standardbeispiele für nicht endlichdimensinale $\mathbb{R} - VRe$.

6.17. Aus dem Satz 6.7 folgt unmittelbar:
Kor.: Jeder stetig differnzierbare Fkt. (d.h. 1-mal stetig partiell diff'bare Fkt.) ist (total) diff'bar.

6.18. Aus dem Satz von Schwarz 6.14 folgt unmittelbar:
Kor.: Vor.: f in U p-mal stetig (partiell) diff'bar.
Beh.: Das ergebniss einer p-maligen partiellen Ableitung ist von der Reihenfolge unabhängig.

6.19. **Bsp.:** Die zweiten (partiellen) Ableitungen von $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\ \overbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}^{=v} \rightarrowtail 3x^2 - \sin(y) + x^3\cos(z)$

sind $D_1D_3f(v) = \frac{\delta}{\delta x}(\frac{\delta}{\delta z}(3x^2 - \sin(y) + x^3\cos(z))) = \frac{\delta}{\delta x}(-x^2\sin(z)) = -3x^2\sin(z)$
bzw.$D_3D_1f(v) = \frac{\delta}{\delta z}(\frac{\delta}{\delta x}(3x^2 - \sin(y) + x^3\cos(z))) = \frac{\delta}{\delta z}(6x + 3x^2\cos(z)) = -3x^2\sin(z)$,
sowie $D_2D_3f(v) = 0 = D_3D_2f(v)$ bzw. $D_1D_2f(v) = 0 = D_2D_1f(v)$,
ferner $D_1^2f(v) = \frac{\delta}{\delta z}(-x^3\sin(z)) = -x^3\cos(z)$.
Nach 6.7 ist f dsiff'bar, da die partiellen Ableitungen D_1f, D_2f, D_3f stetig sind.