Teil 1: Differentialgleichung im $\mathbb{R}^n$

an4: Mehrdimensionales Ableiten

Stichworte: Richtungsableitung, partielle Ableitung, totale Ableitung, Klein-o

Literatur: [Hoff], Kapitel 9.4

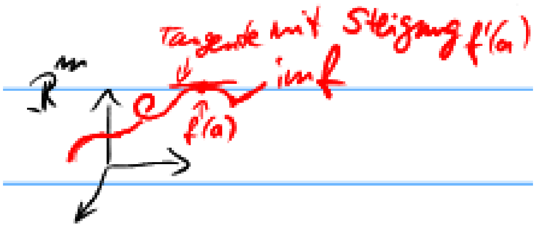
4.1. Einleitung: Wir führen den Differenzierbarkeitsbegriff für Funktionen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ein: über Richtungableitungen entlang der Koordinatenachsen gelangen wir zu partiellen Ableitungen. Wir definieren die totale Ableitung und sehen wie mit den partiellen Ableitungen der Komponentenfunktionen berechnet werdeb kann. Die "Linearsierung" von f ergibt also die Matrix $Df(a) \in \mathbb{R}^{mxn}$ so, dass $f(x) \approx f(a) + Df(a) \cdot (x-a)$ in gute Mäherung ist.

4.2 Konvention: Betrachte Funktionen $f : U \to \mathbb{R}^m$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^n$.
Sei $a \in U$ ein innerer Punkt von U, d.h. $\exists S > 0 : U_a^s \subseteq U$.
Man könnte D füt die Definitionsmenge von f schreiben, tun dies aber wegen Verwechslungsgefahr mit den anderen D's in diesen Kapitel nicht.

4.3. Hatten: im Fall n=m=1 ist $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ die Ableitung. $(\mathbb{R} \supseteq U \ni x \to a)$

4.4. Falls $n > 1$, ist x-a ein Vektor und der Differentialquotient nicht bildbar.

4.5. Falls n=1, $m \geq 1$, ist $\frac{1}{x-a} \cdot (f(x) - f(a))$ der (n-dimensionale) Differenzenquotient $\in \mathbb{R}^m$, und Df(a):=$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ die Ableitung. $(\mathbb{R} \supseteq U \ni x \to a)$



Sind $f_1, ..., f_m$ die Komponentenfunktionen von f, d.h. $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$ für alle x $\in U \subseteq \mathbb{R}$,

also die $f_i : U \to \mathbb{R}, f_i := pr_i \circ f$, so ist

$$\frac{1}{x-a} \cdot (f(x) - f(a)) = \frac{1}{x-a} \cdot \begin{pmatrix} f_1(x) - f_1(a) \\ \vdots \\ f_m(x) - f_m(a) \end{pmatrix} \xrightarrow{x \to a} \begin{pmatrix} f_1'(a) \\ \vdots \\ f_m'(a) \end{pmatrix}, \tag{1}$$

falls alle Komponentenfunktionen f_i diffbar in a sind.

Wir erhalten $Df(a) = \begin{pmatrix} f_1'(a) \\ \vdots \\ f_m'(a) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ in diesem Fall und schreiben auch f'(a) für Df(a).

4.6 Bsp.: Betrachten $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, f(x) := \begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix}$. also :$f_1(x) = x, f_2(x) = x^2, f_1'(x) = 1, f_2(x) = 2x$, wir erhalten f'(a)=$\begin{pmatrix} f_1'(a) \\ f_2'(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2a \end{pmatrix}$ für $a \in \mathbb{R}$.

4.7 <u>Fall n >1:</u> Mit $a \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ und der Konvention, dass a ein innerer Punkt von U ist, können wir und mit $x \in U$ aus verschiedenen Richtungen an a annähern, Ist etwa $v \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ ein Vektor, der uns die "Richtung" der Ableitung angeben soll, so wollen wir f "in diese Richtung" ableiten, d.h. die Funktion f_v:$\begin{cases}]-s,s[\to \mathbb{R}^m \\ t \rightarrowtail f(a+tv) \end{cases}$

in $(t_0 =)0$ ableiten, und haben die Fragestellung auf 4.5 zurückgeführt. Dabei ist s>0 geeignet so, dass $U_a^{s||v||} \subseteq U$ ist (damit auch a$\pm sv \in U$ ist). Hier ist es üblich, den Richtungsvektor auf 1 zu <u>normieren</u>, d.h. $||v|| = 1$ vorauszusetzen, damit wir in der Bedingung an s einfach $U_a^s \subseteq U$ schreiben können.

4.8 <u>Def.:</u> Das Ergebnis $D_v f(a)$:=$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \cdot (f(a+tv) - f(a)) \in \mathbb{R}^m$, d.h. $\underline{D_v f(a) := f_v'(0)}$, heißt <u>Richtungsableitung von f in a in Richtung v</u>.
Diese beschreibt also das Wachstum von f entlang der Geraden $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$
g(t):=a+tv (in Parameterform mit $t \in \mathbb{R}$ als Parameter).

4.9 <u>Bsp.:</u>$\bullet f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrowtail \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ 2x^2 \end{pmatrix}$ soll in $a = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ abgeleitet werden, und zwar <u>entlang</u> $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (es sei $|| \cdot || = || \cdot ||_\infty$).

dazu bilden wir $f_v : t \rightarrowtail f(a+tv) = f\begin{pmatrix} -3+t \\ 4+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2t \\ -7 \\ 2(-3+t)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{v,1}(t) \\ f_{v,2}(t) \\ f_{v,3}(t) \end{pmatrix}, \begin{cases} f_{v,1}(t) = 2 \\ f_{v,2}(t) = 0 \\ f_{v,3}(t) = 4(-3+t) \end{cases}$

deren Ableitung ist

$$D_{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} f \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}'(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \cdot (-3+0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

• Dasselbe f soll entlang der Koordinatenachsen $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =: e_1$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =: e_2$ in $a = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ abgeleitet werden. haben $f_{e_1} : t \rightarrowtail f(a+te_1) = f\begin{pmatrix} -3+t \cdot 1 \\ 4+t \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t \\ -7+t \\ 2(-3+t)^2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} f_{e_1,1}(t) = 1 \\ f_{e_2,2}(t) = 1 \\ f_{e_3,3}(t) = 4(-3+t) \end{cases}$

mit Abl. $\underline{\underline{D_{e_1} f \begin{cases} -3 \\ 4 \end{cases}}} = f'_{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -12 \end{pmatrix},$

und mit $f_{e_2} : t \rightarrowtail f(a+te_2) = f\begin{pmatrix} -3t \cdot 0 \\ 4+t \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t \\ -7-t \\ 18 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} f_{e_2,1}(t) = 1 \\ f_{e_2,2}(t) = 1 \\ f_{e_2,3}(t) = 4(-3+t) \end{cases}$

SCHAU NACH WAS HIER RICHTIG IST E 2 ODER E 1-3!!!!!!!!!!

mit Ableitung $\underline{\underline{D_{e_1} f \begin{cases} -3 \\ 4 \end{cases}}} = f'_{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

4.10 <u>Def.:</u> Für $j \in \{1,...,n\}$ heißt die Richtungsableitung $D_j f(a) = \frac{\delta f}{\delta x_j}$:=$\underline{D_{e_j} f(a)} \in \mathbb{R}^m$

von f in a in Richtung des j-ten Kanonischen Einheitsvektors $e_j = (0, ..., 0, 1(\text{setlle j}), 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n$ (d.h. in richtung der j-ten Koordinatenachse)
dir j-te partielle ableitung von f in a.

4.11 **Bem.:**• Für m=1 erhält man dies Ableitung $\in \mathbb{R}$ durch Ableiten nach der j-ten Variable, denn

$$D_{e_j} f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(a + te_j) - f(a)) \tag{2}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \cdot (f(..., a_{j-1}, a_j + t \cdot 1, a_{j+1}, ...) - f(..., a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, ...)), \tag{3}$$

4.12 **Bsp.:** $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2x + y^3 - z^2$. Sei $j \in \{1, 2, 3\}, a = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}$.

Dann ist

$$D_{e_2} f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f \begin{pmatrix} u \\ v + t \cdot 1 \\ w \end{pmatrix} - f \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}). \tag{4}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \cdot (2u + (v + t)^3 - w^2 - (2u + v^3 - w^2)) \tag{5}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \cdot (t^3 + 3vt^2 + 3v^2t) = \underline{3v^2} \frac{\delta f}{\delta y}(\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}), \tag{6}$$

entsprechend $D_{e_1} f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) =\underline{2}$, $D_{e_2} f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{\delta f}{\delta z}(\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}) =\underline{-2\text{w}}$.

4.13. **Bem.:** Ist $f : U \to \mathbb{R}^m$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^n$, so erhält man die j-te partille Ableitung $\frac{\delta f}{\delta x_j}$ durch Bilder der j-ten partiellen Ableitung der Komponentenfunktion $f_1, ..., f_m$, nähmlich: ist $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$ mit $f_i : U \to \mathbb{R}, f_i = pr_i \circ f$,

so ist $D_{e_j} f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \cdot (\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} (a + te_j) - \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} (a)) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \cdot \begin{pmatrix} f_1(a + t \cdot e_j) - f_1(a) \\ \vdots \\ f_m(a + t \cdot e_j) - f_m(a) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} D_{e_j} f_1(a) \\ D_{e_j} f_2(a) \\ \vdots \\ D_{e_j} f_m(a) \end{pmatrix}$, bzw. $\frac{\delta f}{\delta x_j} = \begin{pmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta x_j} \\ \vdots \\ \frac{\delta f_m}{\delta x_j} \end{pmatrix}$, jede Komponente f_j wird nach der j-ten Variablen abgeleitet!

4.14. **Bsp.:** nochmal 4.9., d.h. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrowtail \begin{pmatrix} x + y \\ x + y \\ 2x^2 \end{pmatrix}$.

Es sollen die partiellen Ableitung berechnet werden. Laut 4.13. ist (einfacher als in 4.9.): $D_1 f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\delta f}{\delta x} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4x \end{pmatrix}, D_2 f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\delta f}{\delta y} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, also $D_1 f\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\4\cdot(-3)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\12\end{pmatrix}, D_2 f\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$.

4.15. Beobachtung: Kennt man alle partillen Ableitung, ist auf Anhieb nicht klar, ib die Funktion f "mehrdimensional§ differenzierbar ist, denn f kann partiell diffbar in Richtung aller $e_1, ..., e_n$ in a sein, aber so, dass f noch nicht einmal stetig in a ist:

4.16. Bsp.: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{, falls } \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \\ 0 & \text{, falls } x = y = 0, a = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}. \end{cases}$

Die beiden partiellen Ableitungen sind $D_1 f\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f\begin{pmatrix}t\\0\end{pmatrix} - \underbrace{f\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}_{=0}) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \cdot 0 = 0$ und $D_2 f\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} =$

$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f\begin{pmatrix}0\\t\end{pmatrix} - \underbrace{f\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}_{=0}) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \cdot 0 = 0,$

aber $\lim_{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}} f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ existiert nicht,

weil $f\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix} \xrightarrow{x\to 0} 0$, aber $f\begin{pmatrix}x\\x\end{pmatrix} = \frac{1}{2} \xrightarrow{x\to 0} \frac{1}{2} \neq 0$. Hier ist y=x gewählt, bzw die Richtung $v = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$! an verschiedenen Richtungen können verschiedene Funktionsgrenzwerte herauskommen, d.h. f ist unstetig in $a = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, s. auch Bsp. 3.22.

4.17. Motivation: DAs richtige Konzept zum mehrdimensionalen Ableiten ist die totale Ableitung und ist die verallgemeinerung von An 11.4.3,
Erinnerung:
$f : U \to \mathbb{R}$ diff'bar in $a \in U \subseteq \mathbb{R}, U$ ein offenes Intervall
$\Leftrightarrow \exists A \in \mathbb{R} \exists r : U \to \mathbb{R}$ stetig, $r(a) = 0 : f(x) = f(a) + A \cdot (x - a) + r(x) \cdot (x - a)$,
mit der Interpretation: $f(x) - f(a) - A(x - a) = r(x) \cdot (x - a)$
geht schneller gegen 0 als $|x - a|$.
Auch der Satz von Taylor An 19.3 macht diese Aussage; nur wird dort "$r(x) \cdot (x - a)$" noch näher spezifiziert, was die Aussage der Diff'barkeit verfeinert.

Für eine Funktion, die "schneller gegen 0 geht als $|x - a|$", wird eine mehrdimensionale Definition wie folgt gegeben:
4.18. Def.: Für $\varphi : U \to \mathbb{R}^m, x \in U$ mit $\exists \epsilon > 0 : U_a^\epsilon \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^n$ sei
$\varphi = \sigma(||x - a||) :\Leftrightarrow \frac{1}{||x-a||}\varphi(x) \xrightarrow{x\to a} 0$.
Sprich: $\varphi(x)$ ist "klein o" von $||x - a||$.
Diese Klein-o-Aussage ist eine Eigenschaft von φ.
Wenn das Symbol $o(||x - a||)$ in einer Formel vorkommt, steht dieses dort stellvertretend für eine Funktion, die diese "Klein-o"-Eigenschaft hat.

Somit geben wir die allgemeinste Def. für mehrdimensionale Diff'barkeit (für $\mathbb{R}^n \supseteq U \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$):
4.19. Def.: Geg. sei $f : U \to \mathbb{R}^m$ mit $\exists \epsilon > 0 : U_a^\epsilon \subseteq U$.

• Dann heißt f in a diff'bar: $\Leftrightarrow \exists A \in \mathbb{R}^{mxn}$:
$f(x) = f(a) + A \cdot (x-a) + o(||x-a||)$ auf U.
• Ist f in a diff'bar, dann heißt $f'(a) = Df(a) := A \in \mathbb{R}^{mxn}$
die erste Ableitung bzw. totale Ableitung von f in a.

4.20. Bem.: Dabei ist A eindimensional bestimmt (laut Bem. 4.26 unten).

Beispiele: Hier sei stets $a \in U, \exists \epsilon > 0 : U_a^\epsilon \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^n$.
4.21. Bsp.: f sei die Konstante Abb. $f : U \to \mathbb{R}^m, x \rightarrowtail c$ mit $c \in \mathbb{R}^m$ fest.
Dann ist f in $a \in U$ diff'bar und $f'(a) = \mathcal{O} \in \mathbb{R}^{mxn}$ (die m x n-Nullmatrix!).
Bew.: $f(x) = c = c + o \cdot (x-a) + o \leftarrow \in \mathbb{R}^m$ Nullvektor.

$\square$

4.22. Bsp.: $f \in Hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, d.h. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear und $f(x) = Mx$ für $M \in \mathbb{R}^{mxn}$.
Dann ist f in $a \in \mathbb{R}^n$ diff'bar und f'(a)=M $\in \mathbb{R}^{mxn}$.
Bew.: $f(x) = Mx = M(x-a+a) = \underbrace{Ma}_{f(a)} + M(x-a) + o$.

$\square$

Spezielles Bsp.: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, M := (1,1) \in \mathbb{R}^{1x2}$, f(x)=Mx=(1,1)$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \xi_1 + \xi_2$
ist diff'bar in $a \in \mathbb{R}^2$ und $f'(a) = (1,1) \in \mathbb{R}^{1x2}$.

4.23. Bsp.: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \xi_1\xi_2$, ist diff'bar in jedem $a = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$,
und $f'\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = (\alpha_2, \alpha_1) \in \mathbb{R}^{1x2}$.
Bew.:

$$f(x) = \xi_1\xi_2 = (\alpha_1 + (\xi_1 - \alpha_1))(\alpha_2 + (\xi_2 - \alpha_2)) \tag{7}$$
$$= \alpha_1\alpha_2 + (\alpha_2, \alpha_1) \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 - \alpha_1 \\ \xi_2 - \alpha_2 \end{pmatrix} + (\xi_1 - \alpha_1) \cdot (\xi_2 - \alpha_2) \tag{8}$$
$$= f(a) + (\alpha_2, \alpha_1) \cdot (x-a) + (\xi_1 - \alpha_1) \cdot (\xi_2 - \alpha_2) \tag{9}$$

mit $||(\xi_1 - \alpha_1) \cdot (\xi_2 - \alpha_2)|| \leq || \begin{pmatrix} \xi_1 - \alpha_1 \\ \xi_2 - \alpha_2 \end{pmatrix} ||_\infty^2 = o(||x-a||)$,
denn $\frac{1}{||x-a||} \cdot ||x-a||^2 = ||x-a|| \xrightarrow{x \to a} 0$.

$\square$

4.24 Bsp.: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = <x,x>$ ist diff'bar in jedem $a \in \mathbb{R}^n$,
under $f'(a) = <2a, \cdot> = 2a^T \in \mathbb{R}^{1xn}$.
Bew.:

$$f(x) = <x,x> = <a + (x-a), a + (x-a)> \tag{10}$$
$$= <a,a> + 2<a, x-a> + <x-a, x-a> \tag{11}$$
$$= f(a) + 2a^T \cdot (x-a) + \underbrace{||x-a||_2^2}_{=o(||x-a||).} \tag{12}$$

$\square$

Erste Eigenschaft des eindimensionalen Differenzierens übertragen sich:
4.25. Bem.: f in a diff'bar $\Rightarrow$ f in a stetig.
Bew.:

$$||f(x)-f(a)||_\infty \leq \underbrace{||A(x-a)||_\infty}_{\leq n \max_{i,j}|\alpha_{ij}|\cdot||x-a||_\infty \xrightarrow{x\to 0} 0} + \underbrace{||o(||x-a||)||_\infty}_{\xrightarrow[x\to a]{} 0} \xrightarrow{x\to a} 0. \quad (13)$$

□

4.26. Bem.: f in a diffbar $\Leftrightarrow \forall i \in \{1,...,m\}$:$f_i = pr_j \circ f$:$D \to \mathbb{R}$ diff'bar in a und dabei gilt:

$$f'(a) = \begin{pmatrix} f_1'(a) \\ \vdots \\ f_m'(a) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{mxn},$$

worinjede Ableitung $f_i'(a) \in \mathbb{R}^{1xn}$ ein Zeilenvektor ist. (Somit ist die Matrix f'(a) eindeutig bestimmt).
Bew.:"$\Rightarrow$": $\forall i \in \{1,...,m\}$ ::
$pr_i \circ f(x) == pr_i(f(x)) = pr_i(f(a)) + pr_i(f'(a)(x-a)) + pr_i(o(||x-a||))$
d.h. $f_i(x) = f_i(a) + f_i'(a)\cdot(x-a) + o(||x-a||)$.
"$\Leftarrow$": $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(a) + f_1'(a)(x-a) + o(||x-a||) \\ \vdots \\ f_m(a) + f_m'(a)(x-a) + o(||x-a||) \end{pmatrix} = f(a) + \begin{pmatrix} f_1'(a) \\ \vdots \\ f_m'(a) \end{pmatrix} \cdot (x-a) + o(||x-a||)$.

□