

Vorlesung Analysis II

July 3, 2025

Teil 1: Differentialrechnung im \mathbb{R}^n

an2: Geometrie von Funktionen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $m=1$ und $n=1$

Stichworte: Affine Räume, Parameter- und Normalendarstellung, Funktionen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Literatur: [Hoff], Kapitel 9.2

2.1 Einleitung: Nach Kurzer Überlegung zur Darstellung affin-Linearer Objekte im \mathbb{R}^n , also Geraden, Ebenen, Hyperebenen,... arbeiten wir an der geometrischen Anschauung von Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, die affinlinear oder nicht affinlinear sind. Wir betrachten insbesondere \mathbb{R} -wertiger (auch: reellwertiger) Funktionen, d.h. solche Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit $n = 1$, sowie auch "Kurvenartige Funktionen" $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $m = 1$.

2.2 Affine Räume im \mathbb{R}^n : Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum des \mathbb{R}^n , so heißt $a+U$ für ein $a \in \mathbb{R}^n$ ein (d -dimensionaler) affiner Raum, wenn $\dim U = d$ ist. (Man kann a einen Aufpunkt von $a+U$ nennen.)

Es gibt folgende Atrien zur Beschreibung der El. von $a+U$:

2.3 • Parameterdarstellung: Ist u die Lineare Hülle von Vektoren v_1, \dots, v_r , d.h. $U = L(v_1, \dots, v_r) := \{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r; \alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}v_1 + \dots + \mathbb{R}v_r$, d.h. die Menge aller Linearkombinationen $\sum_{i=1}^r \alpha_i v_i$ der v_1, \dots, v_r , auch: der Span der v_1, \dots, v_r geschrieben $\text{span}(v_1, \dots, v_r)$, bzw. auch: das Lineare Erzeugnis der v_1, \dots, v_r geschrieben $\langle v_1, \dots, v_r \rangle$ (\leftarrow keine skalarproduktklammern, sondern "Erzeugnisklammern"!)

Dann ist $a+U = a+L(v_1, \dots, v_r) = \{a + \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r; \alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}\}$

Sind v_1, \dots, v_r linear unabhängig, gilt $\dim(a+U) = \dim U = r$, die v_1, \dots, v_r heißen dann Richtungsvektoren.

Für $r = \dim U = 1$ ist dies eine Gerade $a + \mathbb{R}v_1 = \{a + tv_1; t \in \mathbb{R}\}$, "in Richtung" $v_1 \in \mathbb{R}^n, v_1 \neq 0$, und mit Aufpunkt $a \in \mathbb{R}^n$. Für $r = \dim U = 2$ ist dies eine Ebene $a + \mathbb{R}v_1 + \mathbb{R}v_2 = \{a + tv_1 + sv_2; t, s \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^n$ mit zwei (linear unabh.) Richtungsvektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ und Aufpunkt $a \in \mathbb{R}^n$. Usw.

Eine besonders einfache Darstellung ist im Fall $\dim U = n-1$ möglich, den zugehörigen affinen Raum nennen wir eine Hyperebene in \mathbb{R}^n :

2.4 • Normalendarstellung (einer Hyperebene im \mathbb{R}^n):

Sei $H_{c,a} := \{x \in \mathbb{R}^n | \langle x, c \rangle = \alpha\}$ für $c \in \mathbb{R}^n, c \neq 0$, und $\alpha \in \mathbb{R}$.

Sei $p \in H_{c,\alpha}$ irgendein Punkt dieser Menge, d.h. es gelte $\langle p, c \rangle = \alpha$.

Dann ist $H_{c,\alpha} = p + U$ mit einem Untervektorraum $U \subseteq \mathbb{R}^n$, für den $\dim U = n-1$ ist, denn: $U = \ker f$ für die lineare Abb. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \langle x, c \rangle$

$x \in H_{c,\alpha} \Leftrightarrow \langle x, c \rangle = \alpha \Leftrightarrow \langle x - p, c \rangle = \alpha - \underbrace{\langle p, c \rangle}_{\alpha} \Leftrightarrow x = p + n$ mit $n \in \ker f$

dabei ist $\text{im} f = \mathbb{R}$, also $\dim U = \dim \ker f = n - \dim \text{im} f = n - 1$

Mit $U = \ker f = \{u \in \mathbb{R}^n; \langle u, c \rangle = 0\} =: c^\perp$ folgt, dass die $u \in U$ genau die Vektoren im \mathbb{R}^n sind, die senkrecht auf c stehen, bzw. wir haben $U^\perp = \mathbb{R}c$. ⚡

Da c senkrecht zu jedem Punkt von U ist, heißt c Normalenvektor von $H_{c,\alpha}$. Denn eine Gerade $p + \mathbb{R}c \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt Normale von $H_{c,\alpha}$ und steht senkrecht auf $H_{c,\alpha}$.

2.5 • Ein Spezialfall der Normalendarstellung ist die Hessesche Normalform: $H_{c,\alpha}$ mit $\|c\| = 1$ (wo der Normalenvektor auf 1 normiert ist).

Die Formel in 2.8 und 2.9 werden dann noch einfacher.

2.6 Bsp. zur Normalendarstellung:

Eine Ebene E im Raum \mathbb{R}^3 kann in der Form $E = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}; \underbrace{\gamma_1 \xi_1 + \gamma_2 \xi_2 + \gamma_3 \xi_3}_{=\langle x, c \rangle} = \alpha$ dargestellt werden;

$c = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$ ist darin der Normalenvektor, d.h. $c \perp E$.

Die Eben $E = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3; 3x - 2y - z = 2$ z.B. steht senkrecht auf $c = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

In dieser Form nennt man die Normalendarstellung auch oft Koordinatendarstellung von E . Anderes

Bsp. $E = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3; x = 0$ ist die y - z -Ebene, und $E = \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4; w - 3x - y + 4z = 10$ ist die

(3-dim) Hyperebene im \mathbb{R}^4 , die senkrecht zu $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ ist.

2.7 Schul bsp. zur Normalendarstellung: Eine Gerade g in der Ebene \mathbb{R}^2 ist auch eine "Hyper-ebene" im \mathbb{R}^2 , da $\dim g = 1 = 2 - 1$ gilt.

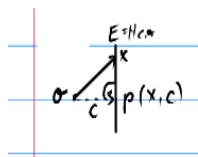
Eine Normalendarstellung lautet dann $g = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \rangle = \alpha$ für $\gamma_1, \gamma_2, \alpha \in \mathbb{R}$, d.h. wird beschrieben durch die Gleichung $\gamma_1 x + \gamma_2 y = \alpha \Leftrightarrow (\gamma_2 \neq 0)y = -\frac{\gamma_1}{\gamma_2}x + \frac{\alpha}{\gamma_2} \leftarrow$ Geradengleichung der Schule mit Steigung $m = -\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$, und $c = \frac{\alpha}{\gamma_2}$ als y -Achsenabschnitt.

Sogar an eine "Schulglg." $1 \cdot y = mx + c$ für eine Gerade kann man also den Normalenvektor $\begin{pmatrix} -m \\ 1 \end{pmatrix}$ ablesen, der senkrecht auf der Geraden g (mit Richtungsvektor $\begin{pmatrix} m \\ 1 \end{pmatrix}$) steht: $\langle \begin{pmatrix} -m \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \rangle = -m + m = 0$.

2.8 Rechnen mit der Hesseschen Normalform: Sei $E = H_{c,\alpha} \subseteq \mathbb{R}^n$ geg., so ist der Abstand von 0 zu $H_{c,\alpha}$ gegeben als $\text{dist}(0, H_{c,\alpha}) = \frac{|\alpha|}{\|c\|}$.

• Ist außerdem $\|c\| = 1$, ist dieser Abstand also $= |\alpha|$.

Bew.: Sei $x \in H_{c,\alpha}$ beliebig. Der gesuchte Abstand ist die Länge von $p(x,c)$, also $\text{dist}(0, H_{c,\alpha}) = \|p(x,c)\| = \frac{|\langle x, c \rangle|}{\|c\|} = \frac{|\alpha|}{\|c\|}$. \square



Bsp.: $H \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y = -7$ (hier: $\|c\| = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$) hat den Abstand $|\alpha| = |-7| = 7$ vom Ursprung ist nicht der y-Achsenabschnitt.

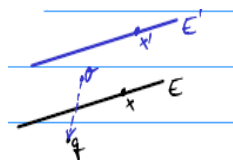
2.9 2.Beh.: Ist $H_{c,\alpha} \in \mathbb{R}^n$ geg., so ist der Abstand von (irgendeinem) $q \in \mathbb{R}^n$ zu $H_{c,\alpha}$ gegeben als

$$\text{dist}(q, H_{c,\alpha}) = \frac{|\langle q, c \rangle - \alpha|}{\|c\|}. \quad (1)$$

Bew.: Betr. die um q verschobene Ebene $E' = x'; x' + q \in E$, dann ist der gesuchte Abstand der von 0 zu E' , für ein $x' \in E'$ also $\|p(x', c)\| = \|\rightarrow x' + q = x \in E\| \|p(x - q, c)\|$

$$= \left\| \frac{\langle x - q, c \rangle}{\langle c, c \rangle} \cdot c \right\| = \left\| \frac{\langle x, c \rangle}{\|c\|^2} \cdot c - \frac{\langle q, c \rangle}{\|c\|^2} \cdot c \right\| = \frac{1}{\|c\|} \cdot |\alpha - \langle q, c \rangle|. \quad (2)$$

\square



2.10 Bsp.: Abstand von $q = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ zu $H \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, 5 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2; 2x + 3y = 5$ ist

$$\frac{|\langle q, c \rangle - \alpha|}{\|c\|} = \frac{|1 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 - 5|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{|2 - 6 - 5|}{\sqrt{13}} = \frac{9}{\sqrt{13}}. \quad (3)$$

\square

2.11 geometrische Anschauung von Funktionen $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n, m, n \in \mathbb{N}$.

Der Graph von f ist G(f) :=

$$(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+m}; x \in D = (\xi_1, \dots, \xi_n, f(\xi_1, \dots, \xi_n)); (\xi_1, \dots, \xi_n)^T \in D \subseteq \mathbb{R}^{n+m}, \quad (4)$$

wir "verkleben" die Koordinaten von x mit denen von $f(x)$ zu Vektoren im \mathbb{R}^{n+m} .

(1) Fall $m=1$, d.h. eine \mathbb{R} -wertige/reellwertige Funktion, auch Skalarfeld genannt.

Für $n=2$ lässt sich $G(f)$ oftmals als "Fläche" im \mathbb{R}^3 deuten, für die man bei festen $c \in \mathbb{R}$ die "Niveaulinie" $x \in D; f(x) = c$ vom Niveau c betrachten kann (wie Höhenlinien bei Wanderkarten).

Dabei macht man "Horizontalschnitte", d.h. man schneidet den Graphen $G(f)$ mit der Ebene der Glg. $\xi_3 = c$ (d.h. $z = c$) und projiziert den Schnitt auf die $\xi_1 - \xi_2$ -Ebene (bzw. xy -Ebene).

(a) Bsp.: Für die Halbkugelfläche $f : (x, y); x^2 + y^2 \leq 1 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow \sqrt{1 - x^2 - y^2}$
Sind die Niveaulinien

$$\text{von Niveau } c: \begin{cases} \emptyset, & c > 0, c < 0 \\ 0, & c = 1 \\ x, y \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1 - c^2, & 0 \leq c < 1 \leftarrow \text{Kreise vom Radius } \sqrt{1 - c^2} \end{cases} \quad (5)$$

$\leadsto G(f) = ?$ Ü

(b) Bsp.: $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ affin-Linear, d.h. $f(\xi_1, \dots, \xi_n)$ [Eigentlich: $f \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_n \xi_n + \beta$ mit

$\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta \in \mathbb{R}$. Der Graph $G(f) = (\xi_1, \dots, \xi_n, \beta + \sum_{i=1}^n \alpha_i \xi_i)^T; \xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ ist (i.a.) eine n-dim Hyperebene im \mathbb{R}^{n+1} mit der Gleichung $-\sum_{i=1}^n \alpha_i \xi_i + \xi_{n+1} = \beta$.

(c) Die Schnitte des Graphen $G(f)$ einer Fkt. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit den Koordinatenhyperebenen, die jeweils durch eine Glg. $\xi_z = 0, 1 \leq z \leq n$, gegeben sind, sind "Vertikalschnitte". Bei $n=2$ hat man da die xy - Ebene der Glg. $z=0$, die xz-Ebene der Glg. $y=0$, und $x=0$ ist die yz-Ebene, die zu geh. Vertikalschnitte sind $(x, y, 0)^T; f(x, y) = 0, (x, 0, f(x, 0))^T; x \in \mathbb{R}, (0, y, f(0, y))^T; y \in \mathbb{R}$.

(2) Fall $n=m$: $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt Vektorfeld.

(3) Fall $n=1$: etwa $f : I \rightarrow \mathbb{R}^m$, wo $I \subseteq \mathbb{R}^1$ ein Intervall ist. Der Graph ist ein "Kurvenähnliches" Gebilde in \mathbb{R}^{1+n} , die Funktionswerte in \mathbb{R}^m können mit der Projektionsabb, $pr_i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ aus 1.11 Komponentnenweise betrachtet werden durch $f_i := pr_i \circ f, f_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ für $1 \leq i \leq m$.

Diese Funktionen können mit den Methoden der Analysis I untersucht werden, z.b Untersuchung auf Differenzierbarkeit (f ist diffbar, wenn alle f_i diffbar, sodass wir in diesem Fall von einer Kurve sprechen wollen, vgl. 4.5).

2.12 Def.: Sind pr_1, \dots, pr_m die Projektionsabb. $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m, D \subseteq \mathbb{R}^n$, dann heißt $f_i := pr_i \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}$ die i-te Komponentenfunktion (auch Koordinatenfunktion) von f, wo $1 \leq i \leq m$

ist. Damit gilt $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$.

Viele Eigenschaften von Funktionen f mit \mathbb{R}^m als Zielmenge können mit ihren Komponentenfunktionen (leichter) untersucht werden, da diese Skalarfelder sind.

2.13 Bsp.: Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Lineare Abb. (im Sinne der Linearen Algebra),

also $f(x) = A \cdot x$ mit einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, etwa $A = (\alpha_{ij})$.

Die m Komponentenfkt. sind $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, f_i(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \xi_j$, wo $1 \leq i \leq m$.

Der Graph jeder einzelnen Komponentenfunktion ist (i.a.) eine Hyperebene im \mathbb{R}^{n+1} mit der Gleichung $\xi_{n+1} = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \xi_j$, und der Gesamtgraph $G(f)$ Wird durch die m Gleichungen $\xi_{n+i} = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \xi_j$ beschrieben.