Vorlesung Analysis II

June 20, 2025

Teil 1: Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$

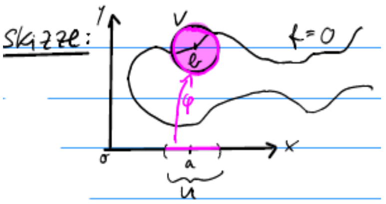
an9: Extrema mit Nebenbedingungen, implizierte Funktionen

Stichworte:Extrma mit NBen, Lagrange-Multiplikationen, implizierter Funktionensatz

Literatur [Hoff], Kapitel 9.8, [Forster], Kapitel 8,9

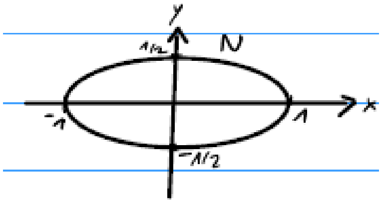
9.1. Einleitung: Sla Anwendung des Satzes von der lokalen Umkehrbarkeit zeigen wir den impliziten Funktionensatz und untersuchen Extrema mit Nebenbedingungen.

9.2 Motivation: Sei $a \in U \subset \mathbb{R}^n, f : U \to \mathbb{R}$. Diskutieren im Fall n=2:
1. Ziel: Wollen die Glg. f(x,y)=0 "nach y auflösen", also eine Fkt. l finden mit $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = l(x)$. Wir sagen dann, die Glg. f(x,y)=0 definiert implizit eine FUnktion l. Wie und unter welcher Vor. das geht, beschreibt der Satz über implizite Funktionen. Wir erwarten, das dies nur "lokal" geht, also auf Umgebungen einer Stelle a und einem Wert b mit f(a,b)=0.



Konkretes Bsp.: Glg. $x^2 + 4y^2 = 1 \to f(x, y) = x^2 + 4y^2 - 1$, und $y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{1 - x^2}$.
2. Ziel: Bsp. n=2
In Anwendungen er Extremwertbestimmung wird oft nach Extrema von Funktionen g(x,y) auf einer NullstellenmengeN:= $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; f(x, y) = 0\}$ gefragt, d.h. unter der Bedingung f(x,y)=0. Gegeben ist dann eine "Nebenbedingung".
Konkretes Bsp.: $\overline{f}(x, y) = \frac{xy}{1+x^4+y^4}$, ist stetig, nimmt Extrema auf $N = \{(x, y); f(x, y) = 0\}$ an. Ist $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in N$ so eine Stelle, und ist $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, dann gilt nahe $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$: $D_2 f(x, y) \neq 0$.

9.3. Allgemeine Situation: Sei $D \subset \mathbb{R}^n, 2 \leq l \leq n, (f_1, ..., f_l) = f \in l^1(D, \mathbb{R}^l)$.
Setze $N := \bigcap_{1=2}^{l} f_i^{-1}(0)$, ist offen in $\mathbb{R}^n$,
Sprechweise: f_1 hat ein lokales Etremum in $a \in N$ mit Nebenbedingung N, falls $f_{1/N}$ in a ein lokales Extremum hat.



9.4. Satz: Geg. die Situation 9.3, Vor.: $f_{1/N}$ hat in $a \in N$ ein lokales Extremum.

Beh.: rg $\begin{pmatrix} D_1 f_1 & \cdots & D_n f_1 \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 f_l & \cdots & D_n f_l \end{pmatrix}(a) < l$. "Lagrangesche Multiplikatorenregel"

9.5. Bem.: • Im Fall l=n ist die Beh. äquivalent zu $\begin{pmatrix} D_1 f_1 & \cdots & D_n f_1 \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 f_n & \cdots & D_n f_n \end{pmatrix}(a) = 0$.

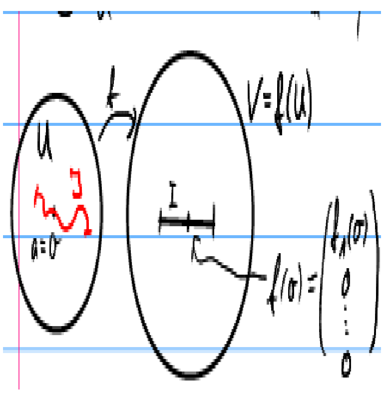
• Es gilt: Beh. $rg(...) < l$
$\Leftrightarrow f_1'(a), ..., f_l'(a)$ sind Lin. abh.
$\Leftrightarrow \in (\overline{\lambda_1}, ..., \lambda_l)^T \in \mathbb{R}^l \backslash \{0\}. D_j(\sum_{i=1}^l \overline{\lambda_i} f_i)(a) = 0$ für alle $j \in \{1, ..., n\}$.
Œsei $\lambda_1 = 1$(sonst unnumerieren und normieren).
Also $\exists(\lambda_2, ..., \lambda_l)^T \in \mathbb{R}^{l-1}$ mit $D_j f_1(a) = \sum_{i=2}^l \lambda_i D_j f_i(a)$, alle $j \in \{1, ..., n\}$.
$\Rightarrow f_1(a) = \sum_{i=2}^l \lambda_i gradf_i(a)$.⌜ŒOhne Minus vor den λ_i...⌝
⌜Bsp. für $l = 2 : \exists \lambda \in \mathbb{R} : gradf_1(a) = \lambda gradf_2(a)$, für $f_2'(a) \neq 0$.⌝

9.6. Def.: Man nennt die $\lambda_2, ..., \lambda_l$ Lagrargemultiplikatoren.

9.7. Bew.: Sei Œ$a = 0$. • Ferner betr. zunächst den Fall l=n.

Angenommen, es wäre sonst rg A=n, wo $\begin{pmatrix} D_1 f_1 & \cdots & D_n f_1 \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 f_n & \cdots & D_n f_n \end{pmatrix}(0) \in \mathbb{R}^{nxm}$.

Dann ist A eine invertierbare Matrix.
Der Satz über lokale Umkehrbarkeit 8.8 liefert dann:
$\exists U \subset \mathbb{R}^n \exists V \subset \mathbb{R}^n, o \in U, f(o) \in V, U \xrightarrow{fru} V$ invertierbar und bijektiv.



Betr. $\underline{I:=}\begin{pmatrix}[f_1(o)-\epsilon, f_1(o)+\epsilon]\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ für ϵ>0 klein so, dass I ganz im Bild V liegt.
Dann ist $\underline{J := f^{-1}(I) \subseteq N}$, aber f_{1tN} hat in o ein lokales Extrema $\Rightarrow \lightning$.

- Im allgemeinen Fall: Betr. $g : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^l$, $\underline{g(y) := f \begin{pmatrix} y\\ o\end{pmatrix}}$, wo $\begin{pmatrix} y\\ o\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^l$ für hinreichend kleine $||y||$ so, dass $\underline{\begin{pmatrix} y\\ o\end{pmatrix} \in U}$.

Es ist N$\supseteq \bigcap_{1=2}^l g_i^{-1}(o)$, und g_1 hat in o ein lokales Extremum unter NBN. Nach spezialfall n=l ist dann
$rg\begin{pmatrix} D_1f_1 & \cdots & D_nf_1\\ \vdots & & \vdots\\ D_1f_l & \cdots & D_nf_l\end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} D_1g_1 & \cdots & D_ng_1\\ \vdots & & \vdots\\ D_1g_l & \cdots & D_ng_l\end{pmatrix}$<$l$

Betr. $\underline{g_{(r)}}:= \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^l$, $\underline{g_{(r)}(y)}:=f\begin{pmatrix} y_1\\ \vdots\\ y_{l-1}\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ y_l\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ an Stellen $l+r \leq n$ für $r \in \mathbb{N}_0$.

Es ist $N \supseteq \bigcap_{1=2}^l g^{-1}(o)$, und g_1 hat in o ein lokales Extremum unter NBN.
Nach Spezialfall ist dann $rg\begin{pmatrix} D_1f_1 & \cdots & D_nf_1 & D_{l+r}f_1\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ D_1f_l & \cdots & D_nf_l & D_{l+r}f_l\end{pmatrix}$<$l$.

Sei $h_i := \begin{pmatrix} D_1f_1\\ \vdots\\ D_if_l\end{pmatrix}$, $1 \leq i \leq n$.
Dann ist $rg(h_1, ..., h_{l-1}, h_{l+r})$<$l$ für alle $r \in \{0, ..., n-l\}$.
Daher ist $rg(h_1, ..., h_n)$<l, die Beh.

$\square$

9.8. Bsp.: $l = 2$, $\underline{f_2(x) = <x, x>, f_1(x) = <Qx, x>}$, insb. $f_1, f_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, mit $Q \in \mathbb{R}^{nxn}$ symmetrisch, d.h. $Q^T = Q$.
Sei $\underline{N := f_2^{-1}(0) = S^{n-1}}$= $\{x \in \mathbb{R}^n; ||x||_2^2 = 1\}$ die Einheitssphäre.
Es gilt:

$$f_1(a+h) = <Q(a+h), a+h> \tag{1}$$
$$= <Qa, a> + \underbrace{<Qh, a>}_{=<h,Q^Ta>=<h,Qa>=<Qa,h>} + <Qa, h> + <Qh, h> \tag{2}$$
$$= f_1(a) + \underbrace{2<Qa, h>}_{f_1'(a)=2Qa} + \underbrace{TextlessQh, h>}_{=o(||h||)} \tag{3}$$

Also sind $\underline{f_1, f_2 \in l^1}$. Setze $\underline{M := \max f_{1rS^{n-1}}}$. (haben $N = S^{n-1}$).

Es folgt: $|\exists a : f_1(a) = M, mit a \neq o$(da $a \in S^{n-1}$).
Es gilt: $gradF_2(A) \neq o$ (haben ja $f_2'(a) = 2a^T \neq o$).
Also ex. $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $gradf_1(a = \lambda gradf_2(a))$
$\Leftrightarrow 2Qa = 2\lambda a \Leftrightarrow Qa = \lambda a$,
d.h. a ist Eigenvektor mit Eigenwert λ von Q.
Für $Qa = \lambda a$ gilt $f_1(a) = <\lambda a, a> = \lambda <a, a> = \lambda$ mit $a \in N = S^{n-1}$
und $\lambda = f_1(a) = M \geq f_1(x)$ für alle $x \in S^{n-1}$.
Also gilt: M ist maximaler Eigenwert von Q.
⌜Ist $Q = ux$, folgt $f_1(x) = u$ für $x \in S^{n-1}$ ⌝

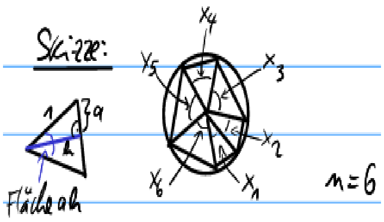
9.9. **Konkretes Bsp.:** $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + y^2 - 1, gradf_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (2x, 2y)^t$.

$$f_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = < \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}_{=Q} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} > = < \begin{pmatrix} x + 2y \\ 2x + 3y \end{pmatrix} > = x^2 + 2xy + 2xy + 3y^2 = x^2 + 4xy + 3y^2,$$

$gradf_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (2x + 4y, 4x + 6y)^T$.
Ewe von Q:
$\mathcal{X}_Q(T) = 0 \Leftrightarrow det \begin{pmatrix} 1 - T & 2 \\ 2 & 3 - T \end{pmatrix} = 0$
$\Leftrightarrow (1 - T)(3 - T) - 4 = 0 \Leftrightarrow T^2 - 4T - 1 = 0$
$\Leftrightarrow T_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 + 1} = 2 \pm \sqrt{5}$.
Der größte EQ von Q (und somit das Maximum von f_1 auf der Einheitskreislinie) ist $2+\sqrt{5}$.
Bestimmung von a=$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ als zugeh. EV:$(q - I_2\lambda)a = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 2 & 3 - \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1 - \lambda)x + 2y = 0 \to x = \frac{-2}{1-\lambda}$,
mit $a \in S^1$ muss $x^2 + y^2 = 1$ gekten, also $(\frac{1-\sqrt{5}}{2}) + 1 = \frac{1}{y^2} \Leftrightarrow \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2}(5 - \sqrt{5}) \Leftrightarrow y^2 = \frac{2(5+\sqrt{5})}{(5-\sqrt{5})(5+\sqrt{5})} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10}$, dazu x...

9.10. **Bsp.:** Sei $n>2$, man bestimme das maximum von $f(x) = \sin x_1 + ... + \sin x_n$ unter der NB $g(x) := x_1 + ... + n_n = 2\pi$, wobei $f : [0, \pi]^n \to \mathbb{R}$.
Anschaulich: f(x) ist der doppelte Flächeninhalt des im Einheitskreis einbeschriebenen n-Ecks mit den Zentriwinkel $x_1, ..., x_n$ unter der NB $x_1 + ... + x_n = 2\pi$
Vorgehen: Die Menge $\triangle := \{x \in [0, \pi]^n; g(x) = 2\pi\}$ ist beschränkt und abgeschlossen und weil f stetig ist, nimmt f dort ihr Maximum an (Klar: nicht auf den Randpunkten).

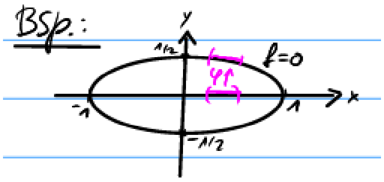
Skizze:



mit $\sin\frac{x}{2} = a$, $\cos\frac{x}{2} = h$
$\Rightarrow 2ah = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \sin(\frac{x}{2} + \frac{x}{2})$
$= \sin(x)$

Lagrange-Ansatz: nur Stellen $x = (x_1, ..., x_n)$ kommen für dieses Extremum in Frage, für die es einen Multiplikator $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt mit $0 = gradf(x) + \lambda gradf(x) = (\cos x_1, ..., \cos x_n) + \lambda \cdot (1, ..., 1)$ was nur für $\cos x_1 = ... = \cos x_n = 0$ geht. Mit $0 \leq x_j \leq \pi$ folgt $x_1 = ... = x_n$, und aus der NB $g(x) = 2\pi$ folgt $x_j = \frac{2\pi}{n}$ für $1 \leq j \leq n$.
Alsi ist der Flächeninhalt des einem Kreis einbeschrieben n-ecks genau für das regelmäßige n-Ecks maximal.

9.11. Motivation: $l, k \in \mathbb{N}, n = l + k, D \subset \mathbb{R}^n, f \in l^1(D, \mathbb{R}^k)$.



Umkehrung? Ging für $\frac{\delta f}{\delta y}(a) \neq 0$ bei $f : \mathbb{R}^1 x \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$: dann findet sich eine Umgebung von a, in der f eine Umkehrfunktion besitzt.

9.12. Allgemeine Situation: Stelle $w = (a, b), (x, y) \in \mathbb{R}^l x \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^{l+k}$.
Dann: $f'(w) = (\frac{\delta f}{\delta y}(w), \frac{\delta f}{\delta y}(w)) \in \mathbb{R}^{kx(l+k)}$

9.13Satz über implizite Funktionen: $l, k \in \mathbb{R}^{j+k}, f \in l^1(D, \mathbb{R}^k)$
Vor.: $w \in D, F(w) = 0, det(\frac{\delta f}{\delta y}(w)) \neq 0 (w = (a, b) \in \mathbb{R}^l x \mathbb{R}^k)$.
Beh.: $\exists U, V \quad w \in UxVc\mathbb{R}^l x \mathbb{R}^k$ mit:
$l : U \to V, x \to y \in V$ mit f(x,y)=0 ist eine Abbildung und zwar $l \in l^1(U, \mathbb{R}^k)$.
Die Abbildung von l ist $l'(x) = * - (\frac{\delta f}{\delta y}\begin{pmatrix} x \\ l(x) \end{pmatrix})^{-1} \frac{\delta f}{\delta x}\begin{pmatrix} x \\ l(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{kxl}$.
1.Bem.: $f \in l^r \xRightarrow{vollst.Ind} l \in l^r$.
2.Bem.: Bemerkenswert ist an diesem Satz, dass u.U. l nur schwierig berechnet werden kann, sehr wohl aber die Ableitung l'(x) nach der Formel (ohne die explizite Fkt. l ableiten zu müssen).

9.14.Bew.: • Falls l existiert und diffbar, so gilt:

$$0 = f(x, l(x)) \Rightarrow (f(x, l(x)))' = 0 \xRightarrow{K.R} \frac{\delta}{\delta x} f(x, l(x)) \cdot \frac{\delta x}{\delta x} + \underbrace{\frac{\delta}{\delta y} f(x, l(x))} \cdot l'(x) = 0 \text{invbar, falls x nahe a, d.h. falls} \tag{4}$$

•Betr.

$$F : D \to \mathbb{R}^l x \mathbb{R}^k, F \in l^1, (x, y) \rightarrowtail (x, f(x, y)). \text{Es gilt} F'(x, y) = \begin{pmatrix} I_l & 0 \\ \delta f & \delta f \\ \delta x & \delta y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(l+k)x(l+k)}, det F' = det \frac{\delta f}{\delta y} \neq 0 \text{nah} \tag{5}$$

Der Satz über lokale Umkehrbarkeit 8.8 liefert nun:
$\exists W, w \in Wc\mathbb{R}^l x \mathbb{R}^k$:

$$\begin{aligned} \overset{\mathbb{R}^l x \mathbb{R}^k}{(x,y)} \rightarrowtail \overset{\mathbb{R}^l x \mathbb{R}^k}{(x, f(x,y))} \rightarrowtail \overset{\mathbb{R}^l x \mathbb{R}^k}{(x, g(x, f(x,y)))} \quad (6) \\ W \to f(w) \xrightarrow{G=F^{-1}} W \xrightarrow{F} F(W) \quad (7) \\ (u,v) \rightarrowtail (u, \underbrace{g(u,v)}_{\in l^1}) \rightarrowtail (u, \underbrace{f(u, g(u,v))}_{=v}), \quad (8) \end{aligned}$$

d.h. (1) g(x,f(x,y))=y
(2) f(x,g(x,y))=y.
Wähle nun $U \subseteq \mathbb{R}^l$ mit $Ux\{0\} \subseteq F(W)$, mit 0$\in \mathbb{R}^k$.
(U existiert, da f(w)=0, also 0 als 2. Komponente in F(W) vorkommt.)
Für $x \in U$ setze $l(x) := g(x,0)$.
$Denn: f(x, l(x)) = f(x, g(x,0)) = 0$.
Ferner: l ist eindeutig: $x \in U, f(x, y=0)$,
(1)$\Rightarrow y = g(x, f(x,y)) = g(x,0) = l(x)$.

□

9.15. <u>Bsp.:</u> Betr. $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Für y>0 ist $y = \sqrt{1-x^2}$ die Fkt. y=l(x) "lokal", die durch f(x,y)=0 "implizit" gegeben ist.
Laut Satz ist ihre Ableitung gleich $l'(x) = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (wo y>0 ist),
wir erhalten das Ergebnis direkt durch partielle Ableiten von f, ohne die explizite Funktion l(x) ableiten zu müssen. ⌜Was hier ginge.⌝

9.16. <u>Bsp.:</u> Ist die Glg. $x^y = y^x$ in der Nähe von a=(e,e) bzw. $\overline{a} = (2,4)$ nach einer der beiden Variablen auflösbar?
Setze $f: \mathbb{R}^2_{>0} \to \mathbb{R}, f(x,y) = x^y - y^x$, f ist für x,y>0 bel. oft diff'bar, $f(e,e) = f(2,4) = 0$. Die partiellen Ableitungen sind $D_1 f(x,y) = yx^{y-1} - y^x ln(y), D_2 f(x,y) = x^y ln(x) - xy^{x-1}$.
• In (2,4) sind diese beiden partiellen Abl. $\neq 0$, also ist die Glg. dort lokal nach x oder y auflösbar (nur explizit nicht aber eben implizit!).
Es gilt $l'(2,4) = -\frac{D_1 f(2,4)}{2,4} = -\frac{2^5 - 2^5 ln(2)}{2^4 ln(s) - 8}$ für die Ableitung der Auflösung nach y an der Stelle $\overline{a} = (2,4)$.
• In (e,e) gilt $f'(e,e) = gradf(e,e) = (0,0)$, der implizite Funktionensatz ist deswegen dort nicht anwendbar (und f dort nicht auflösbar nach x oder y).

9.17. <u>Bem.:</u> Gegeben sei die Situation wie in <u>9.3</u>, nähmlich:
Sei $D \subset \mathbb{R}^n, 2 \leq l \leq n, (f_1, ..., f_l) = f \in l^1(D, \mathbb{R}^l)$. Im gegebnsatz zu <u>9.4.</u> sei jetzt aber
$rg \begin{pmatrix} D_1 f_1 & \cdots & D_n f_1 \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 f_l & \cdots & D_n f_l \end{pmatrix} (a)\underline{=l}$. Wegen <u>9.4</u> kann f_{1rN} kein Extremum in $a \in N$ haben, analog auch nicht für $f_2, ..., f_l$. Dann liegt eine besondere Situation vor, die in der mehrdimensionalen Analysis die folgende Beziehung hat.

9.18. <u>Def.:</u> $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt <u>(n-l)-dimensionale Untermannigfaltigkeit ("UMF")</u>,
(1) $M \cap U = U \cap f^{-1}(o) (= f^{-1}(o)), (2) rgDf(a) = l$.

9.19. <u>Bem.:</u> Jede <u>(n-l)-dim. UMF ist diffeomorph</u> zu $\underbrace{\{x \in \mathbb{R}^n; x_{n-l+1} = ... = x_n = 0\}}_{(n-l)-dimensionale Ebene im \mathbb{R}^n}$ der Dimension n-l