Teil 1: Differentialrechung im $\mathbb{R}^n$

an8: lokale Umkehrbarkeit

Stichworte: Kontraktion, Banachscher Fixpunktsatz, Lokale Umkehrbarkeit

Literatur: [Forster, Ende von Kap. 8]

8.1. Einleitung: Mit dem Banachschen Fixpunktsatz zeigen wir den Satz über die lokale Umkehrbarkeit als Verallgemeinerung des Satzes von der Ableitung von Umkehrfkt.

8.2. Motivation: Sei $a \in U \subset \mathbb{R}^n, f \in l^1(U, \mathbb{R}^n)$,
d.h. $f_j \in l^1(U, \mathbb{R})$ für alle $j \in \{1, ..., n\}$.
Haben: $f' : U \to Hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^{nxn}$ ist stetig. (d.h. jedes f_i' bzgl. Norm $||\cdot||_\infty$ und dazu äquivalente Normen).
Als Kriterium für Invertierbarkeit ist bekannt.
$A \in Hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ invertierbar $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$.
Jetzt: $A = f'(a)$ invertierbar$\Rightarrow$ f nahe a invertierbar, d.h. $\exists U \in \mathcal{U}_a : f_{rU}$ invertierbar.

8.3. Def.: Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, a \in \mathbb{R}^n$.
Dann: a heißt Fixpunkt von f, falls f(a)=a ist.

8.4. Bsp.: • Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \rightarrowtail x + c$ für $c \in \mathbb{R}^n$ fest.
Für c=o sind alle x fix, für c≠o ist kein x fix.
• Ist f eine Drehung um o las Drehzentrum, so ist o Fixpunkt und alle x fix, wenn der Drehwinkel Vielfaches von 2π ist.

8.5. Def.: Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Dannn heißt f Kontrahierend (oder Kontraktion) mit Kontraktionsfaktor p$\in [0, 1[$, falls $\forall a, b \in \mathbb{R}^n : ||f(a) - f(b)|| \leq p||a - b||$.
(Wobei $|| \cdot || = || \cdot ||_i nfty$ sei) Beachte p<1!
Bem.:Jede Kontraktion ist stetig (Klar per Def.).

8.6. Banachscher Fixpunktsatz: Vor.: $f : U \to U$ Kontrahierend mit Kontraktionsfaktor p, wo $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und beschränkt sei. (Vgl. später Teil 2 dieser Vorlesung.)
Beh.: (a)$\exists!$ Fixpunkt a von f.
(b) Setze $x_0 \in \mathbb{R}^n$ beliebig, und $x_k + 1 := f(x_k)$ für alle $k \geq 0$.
Dann: $||x_k - a|| \leq \frac{p^k}{1-p} ||x_1 - x_0||$, d.h. $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a.$
Bew.: (a) Eindeutigkeit: Ann.: u,v seien Fixpunkte, $u \neq v$
Dann:$0 \neq ||u - v|| = ||f(u) - f(v)|| \leq p||u - v|| < ||u - v||, \lightning$. Also folgt u=v.
Existenz: 1. Ableitung: $||x_{k+1} - x_k|| = ||f(x_k) - f(x_{k-1})|| \leq p||x_k - x_{k-1}|| \leq \cdots \leq p^k||x_1 - x_0||$.
2. Ableitung: $||x_{k+l} - x_k|| \leq (p^{k+l-1} + p^{k+l-2} + \cdots + p^k)||x_1 - x_0||$ (mit $l \geq 1$)
$=p^k(p^{l-1} + \cdots + 1)||x_1 - x_0|| \leq \frac{p^k}{1-p}||x_1 - x_0||.$ *

Es folgt: (x_k) ist eine Cauchyfolge, also ex. $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a \in U$ (Vgl. Ü Bl. 2, A1.2.: Kgz. in $\mathbb{R}^n$✓
Dann :Kgz. in U, da U beschr. (in $|| \cdot ||_\infty$) und abgeschlossen.)
Dieser GW ist Fixpunkt, denn $f(a) \xleftarrow{k\to\infty \text{f stetig}} f(x_k) = x_{k+1} \xrightarrow{k\to\infty} a,$
und aufgrund der Eindeutigkeit des GWes folgt f(a)=a.
(b): Obige Abschätzung * für $l \to \infty$.

$\square$

8.7. Bsp.: Newton-Verfahren zur numerischen Nullstellenbestimmung:
Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diff'bar und $\forall x : f'(x) \neq 0$
setze $g(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. ein Fixpunkt a von g ist dann genau eine Nst. von f wegen $g(a) = a \Leftrightarrow a = a - \frac{f(a)}{f'(a)} \Leftrightarrow f(a) = 0$.
Die Fixpunkte von g bzw. Nst. von f erhält man nach 8.6. (b) mit der Rekursion $x_0 \in \mathbb{R}, x_{k+1} := g(x_k) = x_k - \frac{f}{f'}$ falls g Kontrahierend ist. Ist a eine Nst. von f in einen IV I, $f \in l^2(I)$, so ist laut Taylorformel (1. Ordnung): $0 = f(a) = f(x) + f'(x)(a-x) + \frac{f''(\xi)}{2}(a-x)^2, \xi$ zw. a und x
$\Leftrightarrow \underbrace{x - \frac{f(x)}{f'(x)}}_{g(x)} - a = \frac{f''(\xi)}{2f'(x)}(x-a)^2$, mit $M_2 = sup_{x \in I}|f''(x)|, m_1 = inf_{x\in I}|f'(x)|$
folgt $|g(x) - a| \leq \frac{M_2}{2m_1}|x-a|^2$ für alle $x \in I$,
was unter bestimmten Voraussetzungen zum Nachweis der Kontraktionseigenschaft von g führt.

8.8. Satz über die lokale Umkehrbarkeit: (Verallg. von Satz An12.2, Ableitung von Umkehrfktn.)
Vor.: $f \in l^1(D, \mathbb{R}^n, a \in D \subset \mathbb{R}^n), A := f'(a) \in \mathbb{R}^{nxm}$ sei invertierbar, b:=f(a).
Beh.: (1) $\exists U \subset \mathbb{R}^n \exists V \subset \mathbb{R}^n : a \in U \xrightarrow{f} V \ni b$ bijektiv,
(2) f_{ru}^{-1} ist stetig diff'bar (in V),
(3) $f'(x) \in \mathbb{R}^{nxm}$ ist invertierbar für alle $x \in U$,
(4) $\forall y \in V : (f_{ru}^{-1})'(y) = (f'(f_{ru}^{-1}(y)))^{-1}$. ⌜Vgl. $(f^{-1})'(b) = (f'(f^{-1}(b)))^{-1}$ in An 12.2⌝
Bew.: • Sei Œ a=b=o, durch Betrachtung von f(x-a) bzw. f(x)-f(a). Ferner sei Œ$A = I_n$, die Einheitsmatrix $I_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{nxm}$, durch Betrachtung von $x \rightarrowtail A^{-1} \circ (f(x+a) - b)$ mit der Ableitung $A^{-1} \circ (f(x+a)-b)'(a) \underbrace{=}_{a=b=o} A^{-1} \circ f'(o) = A^{-1} \circ A = T_n$.

• Ann.: (1) und (2) gelte. Für $x \in U$ gilt dann: $f_{ru}^{-1} f(x) = x$, was laut Kettenregel diffbar ist mit der Ableitung: $(f_{ru}^{-1})'(f(x))$ f'(x)=I_n, denn f_{ru}^{-1} ist diff'bar laut (2). Also ist $f'(x)$ invertierbar (also (3)), nämlich mit $(f'(x))^{-1} = (f_{ru}^{-1})'(f(x))$. Setze nun $y = f_{ru}(x) = f(x)$, also x= $f_{ru}^{-1}(y)$, es folgt $(f'(f_{ru}^{-1}(y)))^{-1} = (f_{ru}^{-1})'(y)$, das ist Formel (4).

• Noch z.z.: (1) und (2). Dazu betr. die Norm $||\cdot||_\infty$. Nach Vor. ist f' stetig (d.h. die f_i' stetig), sowie $f'(0) = I_n$. Daher $\exists s{>}0 \forall x \in U_0^{2s} : max_i||f_i'(x)^T - pr_i(I_n)||_\infty \leq \frac{1}{n} =: M$, dabei sei Œ$\overline{U_0^{2s}} \subseteq D$.
(Def. $\overline{U_0^{2s}} := \{x \in \mathbb{R}^n; ||x||_\infty \leq 2s\}$.)
Setze V:=U_0^s, wähle $y \in V$ fest und setze als Hilfsfunktion $h(x) := x - f(x) + y$ für $x \in D$.
Dann ist $h'(x) = I_n - f'(x)$, sowie max$_i$ $||pr_i(I_n) - f_i'(x)^T||\infty \leq \frac{1}{2n} = M$,
es folgt mit Flogerung 6.6 des MWS,
dass $||h(x_1) - h(x_2)||_\infty \leq nM \cdot ||x_1 - x_2||_\infty = \frac{1}{2}||x_1 - x_2||$ für alle $x_1.x_2 \in \overline{U_0^{2s}}$,
d.h. h ist Kontrahierend. Nun ist $\overline{U_0^{2s}}$ beschränkt und abgeschlossen, daher wende den Banachschen Fixpunktsatz 8.6. für h an. Dies zeigt:
$\exists! x \in \overline{U_0^{2s}}$ mit $h(x) = x \Leftrightarrow x - f(x) + y = x \Leftrightarrow f(x) = y = h(0)$.
Problem: Liegt x auf dem Rand von $\overline{U_0^{2s}}$? Nein: $h(\overline{x})$
⌜Haben die Abschätzung $||h(\overline{h})||_\infty = ||\underbrace{(\overline{x} - f(\overline{x}) + y)}_{h(\overline{x})} - \underbrace{h(0)}_{=y} + \underbrace{h(0)}_{=y}||_\infty$

$\leq \frac{1}{2}\underbrace{||\overline{x}-0||_\infty}_{\leq 2s} + \underbrace{||y||_\infty}_{<2s} < 2s$ für alle $\overline{x} \in \overline{U_0^{2s}}$,

mit h(x)=x folgt $||x||_\infty \leq \frac{1}{2}||x||_\infty + ||y||_\infty$ bzw. $||x||_\infty \leq 2||y||_\infty < 2s$ (*), d.h. $x \in \overline{U_0^{2s}}$.⌝

Setze $U := f^{-1}(U_0^s) \cap U_0^{2s} \subset \mathbb{R}^n, \Psi := f_{ru}, U \xrightarrow{\Psi} V$ ist alos injektiv und surjektiv, also bijektiv $\rightarrow$ (1) gilt. Setze $l := \Psi^{-1} = f_{ru}^{-1}$.

Ans (*) folgt: l ist stetig in o, ⌜$||l(y) - l(o)||_\infty \leq 2||y-o||_\infty$⌃

• Beh.: l ist in o diff'bar und $l'(o) = I_n$, d.h. (2) gilt.

Bew.: $y = f(x) = \underbrace{o}_{f(o)} + x + \epsilon$ ist in o stetig,

$\epsilon(x) \xrightarrow{x \to o} o$ da $f'(o) = I_n$.

$\Rightarrow l(y) = x = y - \epsilon(l(y)) \cdot \frac{||l(y)||_\infty \cdot ||y||_\infty}{||y||_\infty}$.

Ans $y \to o$ folgt $l(y) \to o$, da l stetig in o, ebenso gilt $\epsilon(l(y)) \xrightarrow{y \to o} o$. Also: $\epsilon(l(y)) \cdot \frac{||l(y)||_\infty}{||y||_\infty} \xrightarrow{y \to o} 0$.

Daher ist l in o diff'bar und $l'(o) = I_n$.✓

• Ferner ist $l' = (f_{ru}^{-1})'$ stetig als Komposition stetiger Abbildungen nach (4). (bemerke, dass im obigen Beweis von (4) nicht die Stetigkeit von l' benutzt wird.)

□

8.9. Zusatz: Es gilt auch: $f :_{ru} \in l^k(U, \mathbb{R}^n) \Rightarrow l = (f_{ru})^{-1} \in l^k(U, \mathbb{R}^n)$.

8.10. Bem.: Eine Abb. $f : U \to V$ mit $U, V \subset \mathbb{R}^n$ heißt Diffeomorphismus, falls f b_{ij} und f, f^{-1} stetig db.