Vorlesung Analysis II

July 18, 2025

Teil 3: Gewöhnliche Differentialgleichungen

an 23: Differentialgleichungssysteme

Stichworte: DGLsysteme (Linear 1. ordnung, Konstante Koeff.), Jordan-Normalform

Literatur: frühere Vorlesung in Lineare Algebra II, Kapitel l 14.

23.1. Einleitung: Wir lösen DGLsysteme 1. Ordnung (Linear mit Konstanten Koeffizienten) durch Anwenden des Satzes von dder Jordan-Normalform aus der Linearen Algebra II.

23.2. Motivation: Manche DGLn, etwa Lineare höhere Ordnung, lassen sich in DGLsysteme umformen und in Matrixform bzw. mit Funktionen bestehend aus mehreren Komponenten Kurzgefasst notieren und Lösen.

23.3. Vereinbarung: $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$, y(x)= $\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$ sei eine Funktion auf $\mathbb{R}$ (der Zeit x) die Komponentenfunktionen $y_1, ..., y_n$ seien stetig diff'bar.

dazu sei $y' : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n,\ x \rightarrowtail y'(x) := \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$ die Ableitung. Sie ist stetig auf $\mathbb{R}$.

Weiter sei A:=$(a_{ij})$$\in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine fest gewählte n x n- Matrix.

23.4. Bezeichnung: (i) Wir nennen eine Abb. $D : y \rightarrowtail$D(y):=y'-Ay,
d.h. $(D(y))(x) := y'(x) - A \cdot y(x)$,
einen Linearen Differential-Operator erster Ordnung mit Konstanten Koeffizienten.

(ii) Für eine stetige Funktion $b : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n,\ \rightarrowtail b(x) := \begin{pmatrix} b_1(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix}$

heißt $\boxed{\text{D(y)=b}}$, d.h. $\boxed{\text{y'=Ay+b}}$ ein Lineares Differentialgleichungssystem $\underbrace{\text{erster Ordnung}}_{\to\text{d.h. maximal erste Ableitung kommen vor}}$

($\underbrace{\text{mit Konstanten Koeffiziente}}_{\text{die Einträge von A sind Konstant, d.h. keine Veränderlichen Funktionen in x}}$ n).

Ist b(x)≡0 (konstant-0-Fkt.) so reden wir von einem homogenen System, sonst von einem inhomogenen System.

23.5. **Bem.:** Haben $D \in \ Hom(\varphi^1(\mathbb{R},\mathbb{C}^n),\varphi^0(\mathbb{R},\mathbb{C}^n))$ als Homomorphismus zwischen Funktionenräumen (sind ja $\mathbb{R} - VRe$) was die Benennung "linearer Differentialoperator" rechtfertigt. In der Funktionalanalysis heißen Abb.en zwischen Funktionsräumen Operatoren.

Die Struktur der Lösungsmenge erhält man aus der Linearen Algebra I:
23.6. **Lemma:** Ist y_p (irgend)eine (partikuläre/spezielle) Lösung des inhomogenen Systems Dy=b, d.h. von y'-Ay=b, so ist $\mathbb{L}(D;b) := \{y_p + y_H;\ y_H \in ker\ D\}$ die Gesamtheit aller Lösungen.
Dabei besteht ker(D) aus allen Lösungen der homogenen Gleichung $Dy_H = 0$,
d.h. von $y'_H - Ay_H = 0$.
Bew.: Vgl. Vorl. zur LA I, bzw. $y \in \mathbb{L}(D;b) \Leftrightarrow y - y_p \in \ ker(D) = D^{-1}(\{0\})$.

□

Die homogene Gleichunge hat folgende Eigenschaft.
23.7. **Lemma:** Ist y Lösung von $D_=0$, d.h. ist y'=Ay (d.h. ist homogene Lsg.),
und ist $x_0 \in \mathbb{R}$ eine Nullstelle von y, d.h. $y(x_0) = 0$,
so ist y(x)=0 für alle $x \in \mathbb{R}$, d.h. y(x)≡0 Konstant =0.
Bew.: Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist $y'(t) = Ay(t)$, so dass $y'_i(t) = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} y_j(t)$
Durch Integration folgt
$y_i(x) = y_i(x_0) + \int_{x_0}^x y'_i(t)dt = 0 + \int_{x_0}^x \alpha_{ij} y_j(t)dt$.
mit $\eta(x) := \max\{\max\{|y_i(t); \text{für t mit } |t - x_0| \leq |x - x_0|\};\ i = 1, ..., n\}$ und $a := \max\{|\alpha_{ij}|; \text{alle } i, j\}$ ist damit
$0 \leq \eta(x) \leq \int_{x_0}^x n \cdot a \cdot a \cdot \eta(t)dt \leq \eta(x) \cdot n \cdot a \cdot |x - x_0|$.
Ist x so nahe bei x_0, dass $na|x - x_0|<1$, folgt daraus notwendig $\eta(x = 0)$, also auch $\eta(t) = 0$ für $|t - x_0|<|x - x_0|$.
Dieser Schluss ist $\underbrace{\text{iterierbar}}_{erst: y(x)=0 \textbf{ für alle x nahe } x_0\text{, dann alle x(induktiv) erreichbar...}}$

□

23.8. **Folgerung:** (i) Für jedes $y_0 \in \mathbb{C}^n$, hat das Anfangswertaufgabe Dy=b, $y(0) \stackrel{!}{=} y_0$, höchstens eine Lösung.
(ii) Die Abbildung $\varphi:\ kerD \to \mathbb{C}^n,\ y \rightarrowtail y(0)$,
ist injektiv, und damit ist dim ker D ≤ n.

23.9. **Bem.:** Tatsächlich gibt es bei (i) stets eine Lösung, dann also eindeutig. Denn: Mit 23.10. sehen wir, dass φ bijektiv ist und dann dim ker D=n ist.
Bew.: (i): Sind y_1, y_2 Lösungen von Dy=b, jeweils mit $y_1(0) = y_0 = y_2(0)$,
$y(0) = y_1(0) - y_2(0) = y_0 - y_0 = 0$,
so dass $y_1(x) = y_2(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ folgt nach Lemma 23.7.
(ii): Stimmen zwei Lösungen von Dy=0 an der Stelle $x_0 = 0$ überein, so sind sie nach (i) identisch. Dies sagt gerade, dass φ injektiv ist.

□

Nun zeigen wir folgende Existenz-und Eindeutigkeitssatz:
23.10. **Satz:** Die Abbildung $\varphi:\ kerD \to \mathbb{C}^n,\ y \rightarrowtail y(0)$, ist auch surjektiv und damit bijektiv, d.h. zu jeden $y_0 \in \mathbb{C}^n$, gibt es genau eine Lösung der homogenen Anfangswertaufgabe $Dy = y' - Ay = 0,\ y(0) = y_0$.

Mit Folgerung 23.8. ist dies äquivalent dazu, dass Dy=0 genau n Linear unabhängige Lösungen besitzt. Wir führen den Beweis schrittweise durch.

23.11. Reduktion: Es genügt, die Aussage im Fall zu beweisen, wenn A in JNF←Jordan-Normalform vorliegt!
Bew.: Ist y'=Ay und G eine (konstante) invertierbare Matrix ($\in \mathbb{C}^{n\times n}$), so ist für die Funktion $z := G^{-1}y$, also $z(t) = G^{-1} \cdot y(t)$, die Ableitung dann $z' = G^{-1}y'$, und damit z'$=G^{-1}y' = G^{-1}AGG^{-1}y = G^{-1}AGz$, folglich z Lösung von z'$= (G^{-1}AG)z$, wobei man den AW z(0)$=G^{-1}y(0)$ hat. Es genügt also, die Beh. für das transformierte System zu beweisen, und dabei kann man durch Wahl von G die Matrix $G^{-1}AG$ in JNF erreichen laut Satz der Linearen Algebra II zur Jordan-Normalform.

□

23.12. Spezialfall: Die Matrix A habe JNF mit genau einem Jordan-Kasten

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I_n + E_n, \text{ wo } I_n = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(1,1,\ldots,1)$$

$$\text{und } E_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \text{ ein Eigenwert von } A.$$

Dann sind die Spalten der Matrix

$$C(x) := e^{\lambda x} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x & x^2/2! & x^3/3! & \cdots \\ 0 & 1 & x & x^2/2! & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & x & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & & \end{pmatrix}_{n,n}$$

eine Basis von ker D, d.h. der Lösungen von $z' = Az$.

eine Basis von ker D, d-h- der Lösung von z'=Az.
Bew.: Zu betrachten ist z'(x)=Az(x)=$(\lambda I_n + E_n)$z(t).

Mit einem noch zu bestimmenden Vektor $c(x) = \begin{pmatrix} c_1(x) \\ \vdots \\ c_n(x) \end{pmatrix}$ setzen wir an: z(x):=$e^{\lambda x} \cdot c(x)$.

Dies ergibt für alle x die zu erfüllende Gleichung z'(x)$= e^{\lambda x}\underbrace{(\lambda c(x) + c'(x))}_{\text{laut Produktregel}} \overset{!}{=} (\lambda I_n + E_n)e^{\lambda x}c(x) = e^{\lambda x}(\lambda c(x) + U_n c(x)) \Leftrightarrow c'(x) = E_n c(x)$.

In Komponenten aufgeschrieben lautet die letzte Gleichung: $c_i'(x)\begin{cases} c_{i+1}(x); & 1<n, \\ 0; & i = n \end{cases}$

und die Spalten der oben notierten Matrix C sind offenbar Lösungen dieser Gleichung. Da C invertierbar ist, sind sie Linear unabhängig und it Folgerung 23.8 also eine Basis.

23.13. Allgemeiner Fall: Sei A in (beliebiger) JNF gegeben, also als A=

$$\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k \end{pmatrix}$$

mit Jordan-Kästen $J_1, \ldots, J_k$. Zu jedem Jordan-Kasten J_i bilde man entsprechend den Spezialfall 23.12 die zugehörige Matrix $C_i(x)$ und ordne all diese Matrix an zur neuen Matrix

C(x)=.

$$\begin{pmatrix} C_1(x) & & & \\ & C_2(x) & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_k(x) \end{pmatrix}$$

Dann sind die Spalten von C linear unabhängig und Lösungen von z'=Az, womit auch Satz 23.10. gezeigt ist.

23.14. Bem.: Die DGL $u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + ... + a_1 u' + a_0 u = f$ aus an21 kann mir der Substitution $y_1 = 0, y_2 = u' = y_1', y_3 = u'' = y_2', ..., y_n = u^{n-1} = y_{n-1}'$ auf das System 1. Ordnung