Teil 1: Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$

an5: Partielle und totale Ableitungen

Stichworte: Funktionalmatrix, Gradient, Kettenregel, Richtungsableitungen

Literatur:[Hoff], Kapitel 9.4

5.1. Einleitung: Die totale Ableitung liefert einen einfachen Weg, Richtungsableitungen zu berechnen. Wirdefinieren für m=1 den Gradienten und beweisen die allgemeine Kettenregel.

5.2. Konvention: Betrachten Funktionen $f: U \to \mathbb{R}^m$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^n$.
Sei $a \in U$ ein innerer Punkt von U, d.h. $\exists s{>}0 : U_a^s \subseteq U$.
Wir bezeichnen die Menge aller Richtungsvektoren $v \in \mathbb{R}^n$ mit S^{n-1}:=$\{v \in \mathbb{R}^n; ||v||_2 = 1\}$, die (n-1)-dimensionale Sphäre im $\mathbb{R}^n$.
• Für einen inneren Punkt $a \in U$ und ein $v \in S^{n-1}$ haben wir in an4.8
$D_v f(a) := \lim\limits_{0 \neq t \to 0} \frac{1}{t}(f(a+tv) - t(a))$
als Richtungsableitung von f in a in Richtung v definiert.
(Diese Def. benutzt, dass $a + tv \in U$ ist aööe $t \in \mathbb{R}$ mit hinreichend kleinen $|t|$)
•Speziell: Ist $v = e_i$ der i-te Einheitsvektor, so ist
$D_i f(a) = \frac{\delta f}{\delta \xi_i}(a) = f_{\xi_i}(a) := (D_{e_i} f)(a)$ die i-te partielle Ableitung.

5.3. Satz: Vor.: f in a diff'bar (d.h. total diff'bar), $v \in S^{n-1}$.
Beh.: f ist in Richtung v in a diff'bar und $(D_v f)$(a)=$\underbrace{(Df)(a)}_{\in\mathbb{R}^{mxn}} \cdot \underbrace{v}_{\in\mathbb{R}^n} = \underbrace{f'(a)(v)}_{\text{mit} f'(a)\in Hom(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)\text{ausgedrückt, dh als lineare Abb.}}$

Bew.:$\frac{1}{t}(f(a+tv)-f(a)) = \frac{1}{t}(f'(a)(tv)+o(||tv||_2) = \underline{Bew.:}\frac{1}{t}(f(a+tv)-f(a)) = \frac{1}{t}(f'(a)(tv)+o(||tv||_2)) =$
$f'(a)(v) + \underbrace{\underbrace{\frac{|t| \cdot ||v||_2}{t}}_{\text{beschränkt}} \cdot \underbrace{\frac{o(||tv||_2)}{||tv||_2}}_{\xrightarrow{t\to 0}0}}_{\xrightarrow{t\to 0}0}.$

$\square$

5.4 Bsp.: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - y \\ 3x \\ sin(y) \end{pmatrix}$ gibt $f'(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -1 \\ 3 & 0 \\ 0 & cos(y) \end{pmatrix}$, sei $a = \begin{pmatrix} 1 \\ \pi/4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Dann: $f'(\begin{pmatrix} 1 \\ \pi/4 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$ und sei $v = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, haben $||v||_2 = \frac{1}{5} \cdot \sqrt{3^2 + 4^2} = 1$.

sich dann als $f'\begin{pmatrix} 1 \\ \pi/4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5}(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 4 \\ 3 \cdot 3 + 0 \cdot 4 \\ 0 \cdot 3 + \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Die partiellen Ableitungen sind $D_1 f(a) = f'\begin{pmatrix} 1 \\ \pi/4 \end{pmatrix} \cdot e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, D_2 f(a) = f'\begin{pmatrix} 1 \\ \pi/4 \end{pmatrix} \cdot e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

5.5 Folgerungen: Sei f in a Diff'bar.
Beh.:
(a) f ist in a in jeder Koordinate partiell diff'bar,

(b)$(D_i f)(a) = f'(a) \cdot e_i$, und dies ist die i-te spalte von f'(a), denn Sie wissen ja:
die Spalten einer Matrix sind genau die Bildere der Einheitsvektoren.
Also sind die Spalten von f' genau die Pariellen Ableitungen von f.

(c) Es ist $f'(a) = Df(a) = \begin{pmatrix} (D_1 f_1)(a) & \cdots & (D_n f_1)(a) \\ (d_1 f_2)(a) & \cdots & (D_n f_2)(a) \\ \vdots & & \vdots \\ (D_1 f_m)(a) & \cdots & (D_n f_m)(a) \end{pmatrix}$

(d) Es ist $(D_j f_j)(a) = pr_i(D_j f(a))$, also $D_j f_i = pr_i \circ D_j f$ für alle $j \in \{1, ..., n\}, i \in \{1, ..., m\}$.
Bew.: (a),(b),(c): Klar mit 5.3 und $v = e_i$.

Für (d): Haben $f(a) = \begin{pmatrix} f_1(a) \\ \vdots \\ f_m(a) \end{pmatrix}$ und $d_j f(a) = \begin{pmatrix} D_j f_1(a) \\ D_j f_2(a) \\ \vdots \\ D_j f_m(a) \end{pmatrix}$,

also $pr_j(D_j f_i(a))_{1 \leq i \leq m | 1 \leq j \leq n} \in \mathbb{R}^{mxn}$
die Jacobimatrix/Funktionalmatrix von f in a.
Bem.: "$\Leftarrow$" Kann is 5.5 nicht gelten, die Existenz der Partiellen Ableitungen reicht nicht zum Nachweis der Differenzierbarkeit! (vgl. 4.15, 4.16)

5.7 **Fall:** sei m=1, also f ein Skalarfeld.
Dann:

$$f'(a) = (d_1 f(a), ..., D_n f(a)) =: (gradf(a))^T \qquad \text{"}\textbf{Gradient}\text{"} \tag{1}$$
$$=: (\nabla f(a))^T \qquad \text{"}\textbf{Nabla}\text{"} \tag{2}$$

Wir nennen den Spaltenvektor grad f(a)=$\begin{pmatrix} D_1 f(a) \\ \vdots \\ D_n f(a) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ den Gradient von f in a.

mit ∇:=$\begin{pmatrix} D_1 \\ \vdots \\ D_n \end{pmatrix}$ bezeichnen wir den Nabla-Operator.

Somit:

$$f(x) = f(a) + (gradf(a))^T \cdot (x - a) + o(||x - a||) \tag{3}$$
$$\Rightarrow f(x) = f(a) + <gradf(a), x - a> + o(||x - a||). \tag{4}$$

Sei grad f(a)$\neq o$, und betrachte alle $v \in S^{n-1}$.
Dann gilt: $|D_v f(a)|$=$|f'(a)(v)| = |(gradf(a))^T \cdot v|$
$= |<gradf(a), v>| \leq ||gradf(a)|| \cdot ||v||_2$ (cauchyscchwarzungleichung Anhang 7 in an1)
Wobei "=" genau dann gilt, wenn v parallel zu grard f(a), d.h. ex. $t \in \mathbb{R} \backslash \{0\} : gradf(a) = tv$,
in diesem Fall wird für $D_c f(a)$ der maximale Wert angenommen.
Für $\tilde{v} := \frac{1}{||gradf(a)||_2} gradf(a)$ gilt demnach:
$|D_{\tilde{v}} f(a)| = ||gradf(a)||_2$.

5.8. **FAZIT:** grad f(a) ist die RIchtung maximaler Steigung von f in a
(welche dann $||gradf(a)||_2$ beträgt).

5.9. **Veranschaulichung:** Der Graph von f, nämlich G(f):$\{\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}\}$ (falls $U = \mathbb{R}^n$), wird in $\begin{pmatrix} a \\ f(a) \end{pmatrix}$ approximiert durch
$\xi_{n+1} = f(a) + <gradf(a), x - a>$,
und dies ist die Glg. für eine n-dim. Hyperebene im $\mathbb{R}^{n+1}$!
Diese heißt Tangentialhyperebene von f im Punkt a.

5.10 **Bsp. mit n=2:** $f(x,y) = x^2 - 3y, a = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \to gradf(a) = (2\alpha_1, -3\alpha_2)^T$, und
$\xi_3 = \alpha_1^2 - 3\alpha_2 + 2\alpha_1(\xi_1 - \alpha_1) - 3\alpha_2(\xi_2 - \alpha_2)$ ist die Glg. der Tangentialhyperebene im $\mathbb{R}^3$.

5.11. **Fall:** Sei m=n, also f ein Vektorfeld.
Dann heißt $divf(a) = <\nabla, f>(a)$:=$\sum_{i=1}^{n} D_i f_i(a) = spurf'(a) \in \mathbb{R} \leftarrow$ [Erinnerung Lineare Algebra: $spurA = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}$, wenn $A = (\alpha_{ij}) \in \mathbb{R}^{mxn}$, heißt Spur der Matrix A.]
die Divergenz von f in a.

Die Funktionalmatrix ist quadratisch: $Df(a) = f'(a) = \begin{pmatrix} D_1 f_1(a) & D_2 f_1(a) & \cdots & D_n f_1(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ D_1 f_n & D_2 f_n & \cdots & d_n f_n(a) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{nxm}$.
Ihre Determinante heißt Funktionaldeterminante bzw. Jacobideterminante.

Eine wichtige Rechenregel für das Ableiten verketteter Funktionen im Mehrdimensionalen ist die (allgemeine)
5.12. **Kettenregel:** Vor.: $U \subseteq \mathbb{R}^n; U_1 \subseteq \mathbb{R}^m; a \in U \xrightarrow{f} U_1 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^k$, f in a diff'bar, g in f(a) diff'bar (insb. a innerer Punkt von U, f(A) innerer Punkt von U_1).
Beh.:$g \circ f$ in a diffbar, $\underbrace{D(f \circ f)(a)}_{\in \mathbb{R}^{kxn}} = \underbrace{(Dg)(f(a))}_{\in \mathbb{R}^{kxm}} \cdot \underbrace{\overset{mxn}{(Df)}(a)}_{\in \mathbb{R}}$.
Bew.: Setze B:= f(a).
dann gilt für $r_1(x) = o(||x-a||)$, dass $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + r_1(x)$, *
und für $r_2(y) = o(||y-b||)$, dass $g(y) = g(b) + g'(b)(y-b) + r_2(y)$.
$\xRightarrow{y=f(x)|b=f(a)} g(f(x)) = g(f(a)) + g'(f(a))(f(x) - f(a)) + r_2(f(x))$

$\overset{*}{\Longrightarrow} g \circ f(a) + \underbrace{(Df)(f(a)) \cdot (Df)(a \cdot (x-a))}_{=D(g \circ f)(a) \to \text{Beh.}} + g'(f(a))(r_1(x)) + r_2(f(x))$

Noch z.z.: $g'(f(a))(r_1(x)) + r_2(f(x)) = o(||x-a||)$.
(Def. für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{mxn}$ den wert $||A||_\infty : \max_{i,j} |a_{ij}|$, wenn $A = (a_{ij})_{i,j}$.)
• Es gilt:
$||\underbrace{g'(f(a))}_{\in \mathbb{R}^{kxm}} \cdot \underbrace{r_1(x)}_{\in \mathbb{R}^m}||_\infty \overset{Ü}{\leq} m \underbrace{||g'(f(a))||_\infty}_{\text{maximaler Eintrag der Matrix g'(f(a)) im Betrag, unabhängig von x}} \cdot ||r_1(x)||_\infty = o(||x - a||)$ nach Vor. an r_1.
• Bleibt, z.z.: $r_2(f(x)) = o(||x-a||)$.
Haben $r_2(y) = o(||y-b||)$, d.h. $\frac{r_2(y)}{||y-b||_\infty} \xrightarrow{y \to b} o$.

Wähle μ>0. Dann ist für y nahe b: $r_2(y) < \mu \cdot ||y-b||_\infty$.

Es folgt:

$$r_2(f(x)) < \mu ||f(x) - f(a)||_\infty = \mu ||f'(a)(x-a) + r_1(x)||_\infty \tag{5}$$
$$\le \underbrace{\mu \underbrace{||f'(a)||_\infty}_{\text{Konstant d.h. m abh. von x}} \cdot ||x-a||_\infty}_{\le \tilde{\mu}||x-a||_\infty} + \underbrace{\mu ||r_1(x)||_\infty}_{=o(||x-a||)}, \tag{6}$$

also $\frac{r_2(f(x))}{||x-a||_\infty} \xrightarrow{x \to a} 0$, da $\mu > 0$ beliebig.

$\square$

5.13. Illustration der Kettenregelformel: $D(g \circ f)(a) = (Dg)(f(a)) \cdot (Df)(a)$

$$\begin{pmatrix} D_1(g\circ f)_1(a) & \cdots & D_n(g\circ f)_1(a) \\ \vdots & & \vdots \\ D_1(g\circ f)_k(a) & \cdots & D_n(g\circ f)_k(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 g_1(f(a)) & \cdots & D_m g_1(f(a)) \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 g_k(f(a)) & \cdots & D_m g_k(f(a)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 f_1(a) & \cdots & D_n f_1(a) \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 f_m(a) & \cdots & D_n f_m(a) \end{pmatrix}.$$

5.14. • Bsp.: Sei $a \in U, T_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \rightarrowtail x + a$, ist diff'bar. (Translation um a)

$$\text{Dann: f in a diff'bar} \Leftrightarrow f \circ T_{-a} \text{in o diff'bar} \tag{7}$$
$$\Leftrightarrow T_{-f(a)} \circ f \text{in a diff'bar.} \tag{8}$$

•Bsp.: $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}, \mathbb{R}^3 \xrightarrow{g\circ f} \mathbb{R}, n = 3, m = 2, g = 1, f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 + y \\ 2y - z \end{pmatrix}, g(u,v))uv$

Betr. $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Dann:$D(g \circ f)(a) = (Dg) \underbrace{f(a)}_{=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}} \cdot (Df) \underbrace{(a)}_{=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}} = (1,3) \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} =$

$(2, 7, -3) \in \mathbb{R}^{1x3}$.

5.15. Bsp.: $n = k = 1, m = 3 : f(t) = \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \psi(t) \\ \chi(t) \end{pmatrix}$ mit $\varphi, \psi, \chi : U \to \mathbb{R}, a \in U \subseteq \mathbb{R}, \varphi, \psi, \chi$ diff'bar in $a \in \mathbb{R}$.
sei $b : f(a), g : U_1 \to, U_1 \subseteq \mathbb{R}^3$, b innerer Punkt von $U_1, h := g \circ f$.
Somit zeigt die Kettenregel, dass

$$h'(a) = g'(b) \cdot f'(a) = (D-1g(f(a)), D-2g(f(a)), D_3 g(f(a))) \cdot \begin{pmatrix} \varphi'(a) \\ \psi'(a) \\ \chi'(a) \end{pmatrix} \tag{9}$$
$$D_1 g(f(a))\varphi'(a) + D_2 g(f(a))\psi'(a) + D_3 g(f(a))\chi'(a) \in \mathbb{R} \tag{10}$$

In der Literatur wird dafür oft geschrieben: (mit $x(t) = \varphi(t), y(t) = \psi(t), z(t) = \chi(t)$)
$\frac{dh}{dt} = \frac{\delta f}{\delta x}\frac{dx}{dt} + \frac{\delta g}{\delta y}\frac{dy}{dt} + \frac{\delta g}{\delta z}\frac{dz}{dt}$ oder auch $dh = \frac{\delta g}{\delta x}dx + \frac{\delta g}{\delta y}dy + \frac{\delta g}{\delta z}dz$.

5.16. Spezialfall k=1 der Kettenregel, Verallgemeinerung von 5.15:
$\frac{\delta g}{\delta t_j}(a) = \sum_{i=1}^m \frac{\delta g}{\delta x_i}(f_1(a), ..., f_m(a)) \cdot \frac{\delta f_i}{\delta t_j}(a)$ für alle $j \in \{1, ..., n\}$, bzw. schreibbar als $D_j(g \circ f)(a) = (D_1 g(f(a)), ..., D_m g(f(a))) \cdot (d_j f_i(a))_{1 \le i \le m}$.

Bildet man rechts das Matrixprodukt, so ist dies $= \sum_{i=1}^{m} D_i g(f(a)) \cdot D_j f_i(a)$.
Ist $k = n = 1$, folgt $D(g \cdot f)(a) = <(grad g) \circ f, f'>(a)$, vgl. 5.15.

5.17. Berechnung von Richtungsableitungen im Fall m=1:
Satz 5.3. kann mir der Kettenregel bewiesen werden:
⌜Haben $D_v f(a) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{h}(f(a+hv) - f(a)) = g'(0)$
für die Funktion $g(h) := f(a+hv) = f \circ s(h)$,
wo $s(h) := a + hv, s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.
Die Kettenregel liefert $D_v f(a) = g'(0) = D(f \circ s)(0) = (Df)(s(0)) \cdot s'(0) = Df(a) \cdot v$⌃.

5.18 **Bem.:** Die Voraussetzung "f total diff'bar" in 5.3 ist notwendig!
Betr. z.b. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Dann ist $(D_{\underbrace{u,v}_{\text{Richtungsvektor}}} f)(0,0) = \frac{u^2}{v}$ für $v \neq 0$, denn $\frac{1}{t}(f(\underbrace{(0,0) + t \cdot (u,v)}_{=(tu,tv)}) - f(0,0)) = \frac{u^2 v}{t^2 u^4 + v^2} \xrightarrow{t \to 0} \underbrace{\frac{u^2}{v}}_{\neq 0}$,

und $D_1 f(0,0) = D_2 f(0,0) = 0$, also grad $f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, und die r.f. in 5.3 ist =0.