Vorlesung Analysis II

June 27, 2025

Teil 3: Gewöhnliche Differentialgleichungen

an 18: Lineare DGL 1. Ordnung

Stichworte: Variation der Konstanten, zugeh. homogene DGL, partikuläre Lsg.

Literatur: [Hoffmann], kapitel 7.3.

18.1. Einleitung: Bereits die einfache DGL $y' = \alpha y$ beschreibt exponentielles Verhalten (Wachstum für α>0, zerfall für α<0), in vielen Anwendungen ein Standardkonzept. Wir behandeln die DGL $y' = f(x)y + g(x)$ als Verallgemeinerung dieser Form.

18.2. Motivation: Die Lineare DGL 1.Ordnung wird untersucht.

18.3. Vereinbarung: Betr. die DGL $\boxed{y' = f(x)y + g(x)}$ (*)
wo $f, g : j \to \mathbb{R}$ stetig, $j \subseteq \mathbb{R}$ ein IV. Die r.s. ist linear in y.

18.4. Bem.: Für $a \in j$ wird durch $y_0(x) := \exp(\int_a^x f(t)dt)$, $x \in j$, eine Lsg. y_0 der zugehörigen homogenen (linearen) DGL auf j erklärt, die $y_0(x) \neq 0, y_0(a) = 1$ erfüllt.
$\boxed{f' = f(x)y}$ $(*)_l$

18.5. Satz: • Für $a \in j$ und $b \in \mathbb{R}$ ist die (eindeutig bestimmte) Lsg. y von (*) auf j mit y(a)=b gegeben durch
$y(x) = y_0(x) \cdot (\int_a^x g(t)y_0(t)^{-1}dt + b)$. (+)
•Sämtliche Lösungen von (*) erhält man durch Variation von a und b (d.h. a=a(x), b=b(x)) und Einschränkung auf Teilintervalle.
Beweis: • Sei y eine Lsg. von (*) in einem IV j_0 mit $a \in j_0 \subseteq j$ und $y(a)b \in \mathbb{R}$. Wir schreiben y in der Form $y(x) = c(x)y_0(x)$, $x \in j_0$, "Variation der Konstanten"
mit $c : j_0 \to \mathbb{R}, x$ (stetig)diff'bar (die Glg. kann als Def. für c gelesen werden).

Nehmen wir diese Form $y = cy_0$ an, dann gilt damit
fcy_0+g$= fy + g = y' = c'y_0 + cy_0 = c'y_0$+$cfy_0$
$\Rightarrow c'(t) = g(t)y_0(t)^{-1}$,
somit notwendig $y(x) = y_0(x) \cdot (\int_a^x g(t)y_0(t)^{-1}dt + b)$, d.h. (+).
• Andererseits wird durch (+) eine Lsg. von (+) mit y(a)=b erklärt.

□

e18.6. Folgerung: (a) Für die zugeh. homogene DGL (*)$_h$ sind alle Lsg. auf j gegeben durch $y(x) = by_0(x)$, $x \in j$, $b \in \mathbb{R}$.

(b) Für eine Lsg. y der homogenen DGL (*)$_h$ gilt: $y \neq 0 \Rightarrow \forall x \in j : y(x) \neq 0$.

(c) Jede bel. Lsg. von (*) auf j entsteht aus einer speziellen ("partikulären")Lsg. durch Addition eine Lsg. der homogenen DGL (*)$_h$.

Bew.: (a): direkt ablesbar aus (+) mit g(t):=0, $t \in j$.

(b): aus (a), da $y_0 \neq 0$ für $x \in j$.

(c): aus der Linearität der Ableitung folgt:

Sind y,z Lsgn. von (*), so gilt $(y-z)' = y' - z' = f(y) - f(y) = f(y-z)$.

Also ist y-z Lsg. von (*)$_h$, und y=z+(y-z) die gewünschte Darstellung.

□