Vorlesung Analysis II

July 11, 2025

Teil 3: Gewöhnliche Differentialgleichungen

an 22: Der satz von Picard Lindelöf

Stichworte: Fixpunktsatz von Weissinger, Satz von Picard-Lindelöf

Literatur: [Heuser], §12

22.1. Einleitung: Mit dem Fixpuntksatz von weissinger zeigen wir den Satz von Picard-Lindelöf.

22.2. Motivation: Die DGL $y' = f(x,y)$ wird auf eindeutig Lösbarkeit hin untersucht.

22.3. Fixpunktsatz von Weissinger: Vor.: Sei $\emptyset \neq U \subseteq V$, $(v, ||\cdot||)$ ein vollständiger normierter $\mathbb{R}-VR$, ferner sei U in V abg. Weiter sei $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j$ eine Konvergente Reihe, alle α>0,
und A:U→ U eine Abb. so, dass $\forall u, v \in U\ \forall n \in \mathbb{N}:\ ||A^n u - A^n v|| \leq \alpha_n ||u-v||$.
Beh.:
(a) Dann ex. genau ein Fixpunkt $\tilde{u}$ von A, d.h. es ex. genau ein $\tilde{u}$ mit A$\tilde{u} = \tilde{u}$.
(b) Dieser Fixpunkt ist Grenzwert der Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wo $u_0 \in U$ und $u_n := A^n u_0$.
(c) Es gilt die Fehlerabschätzung $||\tilde{u} - u_n|| \leq \sum_{j=u}^{\infty} \alpha_j ||u_1 - u_0||$.
Bew.: Haben $||u_{n+1} - u_n||$=$||A^n u_1 - A^n u_0|| \leq \alpha_n ||u_1 - u_0||$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $||u_{n+k} - u_n||$≤ $||u_{n+k} - u_{n+k-1}|| + ||un + k - 1 - u_{n+k-2}|| + ... + ||u_{n+1} - u_n||$
$\leq \underbrace{(\alpha_{n+k-1} + \alpha_{n+k-2} + ... + \alpha_n)}_{\to 0 \text{für } n,k\to\infty} \cdot ||u_1 - u_0||$, (*)
also ist $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Cauchyfolge. Da U als abg. Teilmenge des vollst. normierten Raumes V selbst vollständig ist (wegen 12.6.), kgt. die FOlge in U, und hat einen $GW \tilde{u} \in U$.
Wegen $||u_{n+1} - A\tilde{u}|| = ||Au_n - A\hat{u}|| \leq \alpha_1 ||u_n - \tilde{u}|| \to 0$ folgt, dass $u_n \to A\tilde{u} = \tilde{u}$, also ist $\tilde{u}$ Fixpunkt von A. Wäre v ein weiterer Fixpunkt, gilt v=Av=$A^2 v = ...$ und mit $\tilde{u} = A\tilde{u} = A^2\tilde{u} = ...$ folgt $||\tilde{u} - v|| = A^n u - A^n v|| \leq \alpha_n ||\tilde{u} - v|| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \cdot ||\tilde{u} - v|| = 0$, also ist $v = \tilde{u}$ und $\tilde{u}$ eind. Es folgt (a),(b).
Mit $k \to \infty$ in (*) folgt noch die Fehlerabschätzungc.

□

Wir erhalten nun den zentralen Satz:
22.4. Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf:
Vor.: Sei $R := \{(x,y); |x - x_0| \leq a,\ |y - y_0| \leq b\}$ für $a, b, x_0 y_0\ \in \mathbb{R},\ a, b$>0,
sei $f : R \to \mathbb{R}^n$, f(x,·) stetig diff'bar (oder schwächer: $\exists L$>0 : $|f(x,y) - f(x\tilde{y})| \leq L \cdot |y - \tilde{y}|$ für alle (x,y), $(x, \tilde{y}) \in R$.)
(a) Dann besitzt die AWA $y' = f(x,y), y(x_0) = y_0$ genau eine auf $j := [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ definierte Lsg. y(x),

wobei $\alpha := \min(a, \frac{b}{M}), M := \max_{(x,y)\in R} |f(x,y)|$.
(b)Dabei kann y(x) iterative gewonnen werden:
wähle bel. Fkt. $\varphi_0 \in K := \{u \in \varphi^0(j); |u(x) - y_0| \leq b\textbf{für alle } x \in j\}$, setze $\varphi(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_{n-1}(t))\mathrm{dt}$
für n $\in \mathbb{N}$, $x \in j$,
sp gilt $\varphi_n \rightarrow$ y gl,. auf j.
(c) Man hat die Fehlerabschätzung $|y(x) - \varphi_n(x)| \leq$