Teil 2: topologische grundbegriffe in metrischen Räumen

an11: Topologische Grundbegriffe

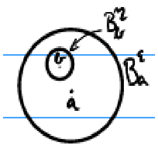
Stichworte: Umgebungsbasis, haisdorffsch, offen/abgeschlossen, Topologie

Literatur: [Forster], Kapitel 2

11.1 Einleitung:
Die bekannten Konzepte von "Kugel" und "Umgebung" können im metrischen Raum definiert und studiert werden. Die mehrdimensionale Analysis hat es oftmals erfordert, dass um ein Punkt $a \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ immernoch eine Komplette Umgebung von a in D enthalten ist. Wir verallgemeinern dies für metrische Räume und kommen so zum Konzept offener und abgeschlossener Mengen, das zentral für die Topologie (als teilgebiet der Mathematik) ist.

11.2 Bezeichung: Sei (R, δ) metrischer Raum, sei $a \in R$, sei $\epsilon{>}0$.
Dann heißt $B_a^\epsilon{:=}\{x \in R; \delta(x,a){<}\epsilon\}$ eine ϵ-Umgebung von a, ("Ball", "Kugel"...)
und $\tilde{\mathcal{U}_a}{:=}\{U \subseteq R; U; U = B_a^\epsilon, \epsilon{>}0 \text{geeignet}\}$
heißt eine Umgebungsbasis von a.
Bem.:$\tilde{\mathcal{U}_a}$ ist die Menge aller ß$epsilon$-Umgebungen von a, die in R enthalten sind.

11.3 Eigenschaften von ϵ-Umgebungen:
$(B0) \forall a \in R : \tilde{\mathcal{U}_a} \neq \emptyset$, bzw. $\forall a \in R \exists B_a^\epsilon \in \tilde{\mathcal{U}_a}$,
d-h- zu jedem Punkt $a \in R$ gibt es eine Umgebung von a in R.
$(B1) \forall a \in R \forall B_a^\epsilon \in \tilde{\mathcal{U}_a} : a \in B_a^\epsilon$, d.h. jede Umgebung von a enthält a.
$(B2) \forall a \in R \forall B_a^{\epsilon_1}, B_a^{\epsilon_2} \in \tilde{\mathcal{U}_a} : B_a^{\epsilon_1} \cap B_a^{\epsilon_2} \in \tilde{\mathcal{U}_a}$, und $B_a^{\epsilon_1} \cup B_a^{\epsilon_2} = B_a^{min(\epsilon_1,\epsilon_2)}$,
d.h. der Durchschnitt zweier Umgebungen von a ist Umgebung von a.
$(B3) \forall a, b \in R \forall B_a^\epsilon \ni b \exists V \in \tilde{\mathcal{U}_a} : V \subseteq B_a^\epsilon$,
d.h. ist b in einer Umgebung U von a, so ex. eine Umgebung V von b mit V⊆U.
Bew.:



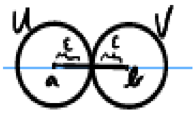
$\eta := \epsilon - \delta(a,b)$, sei $z \in B_a^\eta$, d.h. $\delta(z,b){<}\epsilon = \eta - \delta(a,b)$
$\Rightarrow \delta(z,a) \leq \delta(z,b) + \delta(b,a){<}\epsilon \Rightarrow z \in B_a^\epsilon \Rightarrow B_b^\eta \subseteq B_a^\epsilon$.

$\square$

$(B4) \forall a, b \in R, a \neq b \exists U \in \tilde{\mathcal{U}_a} \exists V \in \tilde{\mathcal{U}_b}$:U∩$V = \emptyset$,
d.h. verschiedene Punkte in T besitzen disjunkte Umgebungen.
Man nennt dies die Trennungseigenschaft, auch: R ist Hausdroff-Raum/hausdorffsch
→"Hausdorffsches Trennungsaxiom"/"T2-Trennungsaxiom"
Bew.:
Wähle $U = B_a^\epsilon, B_b^\epsilon mit\ \epsilon = \frac{1}{2}\delta(a,b)$.

$\square$

11.4 Fazit: Metrische Räume sind hausdorffsch.



Eine leichte Verallgemeinerung ermöglicht es uns nun, von Umgebungen zu sprechen.
11.5 Def.: $U \subseteq R$ heißt Umgebung von a, falls $\exists B_a^\epsilon \subseteq U$.
Setze $\mathcal{U}_a := \{U \subseteq R; B_a^\epsilon \subseteq U$ für geeignetes $\epsilon > 0\}$,
die Menge aller Umbegungen von a.
Bem.:(B0)-(B4) in 11.3 gelten dann analog.
11.6 Def.: $U \subseteq R$ heißt offen (d.h. offenen Teilmenge), wenn $\forall_u \in U : U$ ist Umgebung von u. **11.7 Bsp.:** B_a^ϵ ist offen wegen (B3).

11.8 Def.: Setze $\mathcal{O} := \{U \leq R; U \text{offen}\}$, die Mende aller offenen (Teil-)mengen von R.

11.9 Bsp.: in $R = \mathbb{R}$ (als normierter VR bzgl. $|\cdot|$, dann also Raum bzgl. $\delta(x,y) = |x-y|$), sind offene Intervalle offene Mengen, aber auch beliebige Vereinigung offener Intervalle offen. Schnitte endlich vieler solcher offener Mengen sind wieder solche, nicht aber Schnitte unendlich vieler, denn z.B. ist $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}]-\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}[= \{0\}$ keinbe offene Menge, obwohl alle IVe $]-\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}[$ offen sind.

11.10 Eigenschaften offener Mengen in R:
$(\mathcal{O}_1) \emptyset \in \mathcal{O}, U_i \in \mathcal{O}, i \in I \Rightarrow \bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{O}$, d.h. øund die beliebige Vereinigung offener Mengen ist offen.
⌜Denn: $a \in \bigcup_{i\in I} U_i \Rightarrow$ ß$\exists i \in I : a \in U \Rightarrow B_a^{\epsilon_i} \subseteq U_i \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$.⌝
$(\mathcal{O}_2) R \in \mathcal{O}$, $U_i \in \mathcal{O}, i \in \{1, ..., n\} \Rightarrow \bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{O}$, d.h. der Schnitt endlich vieler offener Mengen ist offen.
⌜Denn: Œ n=2(sonst VI).

$a \in B_a^{\varepsilon_1} \in \mathcal{U}_a, \quad a \in B_a^{\varepsilon} \in \mathcal{U}_a$
$\Rightarrow B_a^{\min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)} = B_a^{\varepsilon_1} \cap B_a^{\varepsilon_2} \subseteq U_1 \cap U_2$. ⌟
11.3(B2)

11.12 Bez.: Eine MEnge R mit einer Menge $\mathcal{O}$ von Teilmengen von R derart, dass die Eigenschaften $(O_1), (O_2)$ gelten, heißt topologischer Raum.
In diesem Fall heißt$\mathcal{O}$ auch eine Topologie auf/von R.
Das Teilgebiet der Mathematik, in dem topologische Räume untersucht werden, nennt man Topologie.

11.13 Beobachtung: Seien $||\cdot||^{(1)}$ **und** $||\cdot||^{(2)}$ zwei Normen auf $\mathbb{R}^n$, nach 10.10 sind diese äquivalent, d.h. $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : ||\cdot||^{(1)} \leq \alpha ||\cdot||^2 \leq \beta ||\cdot||^1$.
Daraus folgt $\delta^{(1)} \leq \alpha\delta^{(2)} \leq \alpha\beta\delta^{(1)}$ für die zugehörige Metriken.
Somit ist $(B_z^\epsilon)^{(1)} \supseteq \frac{1}{\alpha}(B_z^\epsilon)^{(2)} \supseteq \frac{1}{\alpha\beta}(B_z^\epsilon)^{(1)}$ für alle $z \in \mathbb{R}^n, \epsilon > 0$,
bzw.$(B_z^\epsilon)^1 \subseteq \alpha(B_z^\epsilon)^{(2)} \subseteq \alpha\beta(B_z^\epsilon)^{(1)}$.
Es ergibt sich,dass $\mathcal{O}^{(1)} = \mathcal{O}^{(2)}$ ist, die von den beiden Normen induzierten Topologien sind also gleich!
Zum Studium Topologischerr Fragen auf $\mathbb{R}^n$ fixiert man deswegen irgeneine Norm $||\cdot||$ auf $\mathbb{R}^n$.

Wir studieren im folgenden topologische Grundeigenschaften im metrischen Raum (R, δ)
11.14 **Def.:** Sei $M \subseteq R, a \in R$ geg.
Dann heißt a Häufungspunkt von M (kurz: HP von M)
$:\Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{U}_a, (U \backslash \{a\}) \cap M \neq \emptyset$. (Vgl. auch Def. in An 10.2).

11.15 **Bezeichnung:** $\dot{M} := \{a \in R; a\text{HP von M}\}$.

11.16 **Def.:** $M \subseteq R$ heißt abgeschlossen (Kurz:abg.):$\Leftrightarrow$ $\mathcal{C}M :=$ R\M offen,
d.h. wenn $\mathcal{C}M$(das Komplement von M) in R eine offenen Teilmenge von R ist.

11.17 **Bezeichnung:** $\mathcal{A} := \{M \subseteq R; \text{M Abgeschlossene Teilmenge von R}\}$
sei die Menge aller abg. Teilmengen von R.

11.18. Eigenschaften abgeschlossener Mengen:
$(A_1) R \in \mathcal{A}$, $A_i \in \mathcal{A}, i \in I \Rightarrow \bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$, ⌜wegen$(O_1)$⌝
d.h. R ist abg. und beliebige Durchschnitte abg. Mengen sind abg.
$(A_2) \emptyset \in \mathcal{A}$, $A_i \in \mathcal{A}, i \in \{1, ..., n\} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$, ⌜wegen$(O_2)$⌝
d.h.$\emptyset$ist abg. und endliche Vereinigungen abg. Mengen sind abg.

11.19 **Bem.:** (A_2) gilt nicht für unendlich viele A_i,
denn z.B. in $\mathbb{R}$ ist $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [\frac{1}{n}, 1] =]0, 1]$ nicht abg., obwohl jedes Intervall $[\frac{1}{n}]$ abg. ist.
11.20 **Bem.:** Es gibt Mengen, die (Gleichzeitig) offen und abg. sind, z.B $\emptyset$und R.

11.21 **Bem.:** Für $M \subseteq R$ gilt: $M \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \dot{M} \subseteq M$.
Bew.:

$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{C}M \in \mathcal{O} &\Leftrightarrow \forall a \in \mathcal{C}M \exists U \in \mathcal{U}_a && : U \subseteq \mathcal{C}M && (1)\\
&\Leftrightarrow \forall a \in \mathcal{C}M \exists U \in \mathcal{U}_a && : U \cap \mathcal{U} = \emptyset && (2)\\
&\Leftrightarrow \text{''''} && : (U \backslash \{a\}) \cap M = \emptyset && (3)\\
&\Leftrightarrow \mathcal{C}M \subseteq \mathcal{C}\dot{M} \Leftrightarrow \dot{M} \subseteq M && && (4)
\end{aligned}$$

□

11.22 **Def.:** Sei $M \subseteq R, a \in R$.
Der Punkt a heißt innerer Punkt von M $\Leftrightarrow \exists U \in \mathcal{U}_a : U \subseteq M$. (vgl. an 4.2)

11.23 **Def.:** Sei $M \subseteq R$, dann heißt $\mathring{M}$ oder auch M^o:=$\{a \in R, \text{a innerer Punkt von M}\}$ das Innere von M
und $\overline{M} := \{a \in R; \forall \epsilon{>}0 : B_a^\epsilon \cap M \neq \emptyset\}$ die Menge Der Berührungspunkte von M.

11.24 **Bem.:** $\mathring{M}$ ist die maximale offene Teilmenge von M,
d.h. $\mathring{M}$ offen und ($\mathring{M} \subseteq \tilde{M} \subseteq M$ mit $\tilde{M}$ offen $\rightarrow \mathring{M} = \tilde{M}$).
Es folgt: M=$\mathring{M} \Leftrightarrow M$ offen.

11.25 **Bew.:**· $\mathring{M} = \{a \in R; \exists \epsilon_a{>}0 : B_a^{\epsilon_a} \subseteq M\} = \bigcup_{a \in \mathring{M}} \underbrace{B_a^{\epsilon_a}}_{\text{offen}}$ ist offen.

·"$M = \mathring{M} \Rightarrow M$ offen" ist klar, da $\mathring{M}$ offen.
· Sei M offen, d.h. $\forall a \in M \exists \epsilon_a{>}0 : B_a^{\epsilon_a} \subseteq M \Rightarrow a \in M\mathring{M}$, also ist $;\subseteq \mathring{M}$.
Da $\mathring{M} \subseteq$ M klar ist, folgt M $= \mathring{M}$.

□

11.26. Beh.: $\mathcal{C}\overline{M} = (\mathcal{C}M)^\circ$, insb. $\mathcal{C}\overline{\mathcal{C}M} = \mathring{M}$.
Bew.:

$$a \in \mathcal{C}\overline{M} \Leftrightarrow \neg\forall\epsilon{>}0 : B_a^\epsilon \cap M \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists\epsilon{>}0 : B : a^\epsilon \cap M = \emptyset \tag{5}$$
$$\Leftrightarrow \exists\epsilon{>}0 : B_a^\epsilon \subseteq \mathcal{C}M \Leftrightarrow a \in (\mathcal{C}M)^\circ. \tag{6}$$

□

11.27. Beh.: $\overline{M} \subseteq R$ ist stets abg., und zwar ist $\overline{M}$ die kleinste abg. Menge in R, die M enthält, d.h.: M abg. $\Leftrightarrow M = \overline{M}$. „" $\Rightarrow$ "$\mathcal{C}\overline{M} = (\mathcal{C}M)^\circ = \mathcal{C}M$" $\Leftarrow$ " $: \mathcal{C}M = \mathcal{C}\overline{M} = (\mathcal{C}M)^\circ$ ˆ

11.28 Beh.: $\overline{M} = M \cup \dot{M}$, deswegen heißt $\overline{M}$ auch die abgeschlossene Hülle von M bzw. der (topologische) Abschluss von M.

11.29. Def.: $a \in R$ heißt Randpunkt von $M \in R$ $:\Leftrightarrow \forall\epsilon{>}0 : M \cap B_a^\epsilon \neq \emptyset \neq \mathcal{C}M \cup B_a^\epsilon$.
Bez.: δM:$\{a \in R;$ a Randpunkt von M$\}$ heißt der Rand von M.

11.30. Beh.: $\delta M = \delta(\mathcal{C}M)$, $\delta\overline{M} = \overline{M} \cap \overline{\mathcal{C}M}$.

11.31 Beh.: $\overline{M} = \mathring{M} \cup \delta M$, $R = \mathring{M} \cup \delta M \cup (M\mathcal{C}M)^\circ$. $\leftarrow$ denn $R = \overline{M} \cup \mathcal{C}\overline{M} = \overline{M} \cup (\mathcal{C}M)^\circ = \mathring{M} \cup \delta M \cup (\mathcal{C}M)^\circ$.

11.32. Bsp.:

$$\bullet = [0,1[\subseteq \mathbb{R} \Rightarrow \mathring{M} =]0,1[, \overline{M} = [0,1], \delta M\{0,1\}. \bullet M = [0,1[^2 \subseteq \mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathring{M} =]0,1[^2, \overline{M}[0,1]^2, \delta M = \{0\}x[0,1] \cup \{1\} \tag{7}$$