Teil 1: Differentialgleichung im $\mathbb{R}$

---

an1: Der $\mathbb{R}^n$ als normierter Vektorraum
Stichworte: $\mathbb{R}^n$ mit Normen $||\cdot||_\infty, ||\cdot||_2$, (Folgen)Konvergenz , GWSätze, Projektionen

---

Literatur: [Hoff], Kapitel 9.1
Hier und im gesamten Skript steht [Hoff] für das Buch
Dieter Hoffmann: Analysis für Wirtschaftswissenschaftler und Ingenieure,
Siehe auch die Literaturangaben auf der Website der Vorlesung zur Analysis II
in diesem Buch finden Sie bestimmte Skript teile ausführlicher aufgeschrieben.

1.1. Bedingungsanleitung der Vorlesung "Analysis II" (wie schon in "Analysis I"):
-vor jedem Termin erscheint auf der Website Kurzfristig ein neues Kurz-Skriptteil zur nächsten Vorlesungssitzung. Sie können einen Vorab-Blick hineinwerfen.
-Besuchen Die unbedingt die Vorlesungstermine! Das Skript wird dort ausführlich erklärt, erläutert , entwickelt und veranschaulicht. Der Stoff ist ohne den zugehörigen mündlichen Ergänzungen nicht zu erfassen.
-Lesen die zusätzlich ergänzende Literatur im Selbststudium, etwa die angegebene Literatur, was gier Häufig das Buch [Hoff] ist.
Überlegen Sie selbstständig die angegebenen Übungsvorschläge, die mit dem Übungssmiley Ü markiert sind. Sprechen Sie mit anderen darüber.
-Besuchen Die regelmäßig das Tutorium/Ihre Übungsgruppe, um weitere Beispiele Kennenzulernen und fleißig zu üben. -Das Skript enthält einen Farbcode: Gelb für Notationen/Bezeichnungen,
rot unterstrichen werden Begriffdefinitionen und Namen wichtiger Sätze,
blau unterstrichen werden Referenznummern und Zitierungen,
grün unterstrichen werden Behauptungen/Sätze/Lemmas/Korollare,
orange unterstrichen werden wesentliche Beweisideen.
In Analysis II geht es in erster Linie um die mehrdimensionale Analysis. Es wird davon ausgegangen, dass Sie die grundlegendsten Begriffe der Linearen Algebra I und Analysis I beherrschen oder parappep zur veranstaltung "Analysis II" aneignen. Im Anhang dieses Kapitels finden Sie eine Kurzzusammenfassung der für uns wichtigsten Inhalte der LAI (andere werden bei Bedarf später dargestellt).

1.2Einleitung: wir stellen einige Arbeitsdefinitionen(insbesondere Normen) in diesem Kapitel bereit, die als Grundlage für Funktionen, die von mehr als nur einer Variablen abhängen, dienen. Für Grenzwerte müssen wir "Abstände" zwischen Argumenten und Funktionswerten messen können, wofür Normen eingeführt werden, Viele Überlegungen der eindimensionalen Analysis können so fast wörtlich auf die mehrdimensionale Situaltion übertragen werden.

1.3 Vereinbarung: wir wollen Abbildungen von Teilmenden des $\mathbb{R}^n$ in den $\mathbb{R}^m$ betrachten, m,n$\in \mathbb{N}$.
Haben:

$$\{\mathbb{R}^n = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \alpha_x \in \mathbb{R}\}, \text{ schreiben auch oft } (\alpha_1, ..., \alpha_n)^T \tag{1}$$

Zu $\mathbb{R}^n \to x = (\xi_1, ..., \xi_n)^T, y = (\eta_1, ..., \eta_n)^T \in \mathbb{R}^n$ setze das (Standard-)Skalarprodukt $<x,y>:=<x|y>:=\sum_{j=1}^n \xi_j \eta_j$.

1.4 Def

$$\text{Für } x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)^T \in \mathbb{R}^n \text{ sei } \quad \|x\| := \quad \|x\|_\infty := \max\{|\xi_j| \mid j \in \{1, \ldots, n\}\} = \max_{1 \in j \in n} |\xi_j|$$

1.5Bem.: $||\cdot||_\infty$ ist eine Norm im $\mathbb{R}^n$, d.h. die Maximumsnorm $||\cdot||_\infty : \mathbb{R} \to [0, \infty[$ mit

$$\begin{aligned} &(N1) x \neq 0 \Rightarrow ||x||_\infty \neq 0 && (definitheit) \\ &(N2) ||\alpha x||_\infty = |\alpha| \cdot ||x||_\infty \\ &(N3) ||x+y||_\infty \leq ||x||_\infty + ||y||_\infty && (Dreiecksungleichung) \end{aligned}$$

Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$, x, y $\in \mathbb{R}^n$.
Bew.: im $||\cdot|| \subseteq [0,\infty[$ und (N_1) ist an Def. 1.4 ablesbar. (N3): Für jedes j $\in$ {1,...,n} ist $|\xi_j + y_j| \leq |\xi_j| + y_j| \leq ||x||_\infty + ||y||_\infty$, also $||x+y||_\infty \leq ||x||_\infty + ||y||_\infty$.
(N2): $|\alpha \xi_j| = \alpha||\xi_j| \leq |\alpha| \cdot ||x||_\infty$, also$||\alpha x||_\infty \leq |\alpha| \cdot ||x||_\infty \circledast$.
Damit ist $||x||_\infty =$(ohne Einschränkung $\alpha \neq 0$)$||\frac{1}{\alpha} \cdot \alpha x||_\infty \leq \circledast |\frac{1}{\alpha} \cdot ||\alpha x||_\infty$, also $|\alpha| \cdot ||x||_\infty \leq ||\alpha x||_\infty$. Mit$\circledast$ folgt "=". $\square$

Neben $||\cdot||_\infty$ betrachtet man oft auch die "2-Norm" bzw Norm, die aus dem

Standard-Skalarprodukt entsteht:

1.6 **<u>Def.:</u>** Für x $= (\xi_1, ..., \xi_m)^T \in \mathbb{R}^m$ sei $||x||_2 := <x, x>^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j=1}^n |\xi_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j=1}^n \xi_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$
die Norm/2-Norm/euklidische Norm.
Für x,y $\in \mathbb{R}^n$ ist $||x-y||_2 = ||y-x||_2$ der euklidische Abstand zwischen x und y. Diese Definition für $||x||_2$ als "Abstand" von x zu σ =(0,...,0) $\in \mathbb{R}^n$ ist näher an der Anschauung als $||\cdot||_\infty$. Hingegen ist $||\cdot||_\infty$ einfacher handzuhaben, wenn Gegebenheiten auf den eindimensionalen Fall zurückgeführt werden soll. Wegen folgender Tatsache macht es für die Grenzwertbildung/Stetigkeit/Differenzierbarkeit keinen wesentlichen Unterschied, mit welcher der Normen $||\cdot||_\infty$ oder $||\cdot||_2$ gearbeitet wird:

1.7. **<u>Beh.:</u>** Für x $\in \mathbb{R}^n$ ist $||x||_\infty \leq ||x||_2 \leq \sqrt{n}||x||_\infty$.
<u>Bew:</u> Für j $\in \{1, ..., n\}$ gilt $|\xi_j| = (|\xi_j|^2)^{\frac{1}{2}} \leq (\sum_{j=1}^n |\xi_j|^2)^{\frac{1}{2}} = ||x||_2$, also $||x||_\infty \leq ||x||_2$.
· Weiter gilt $||x||_2 = (\sum_{j=1}^n |\xi_j|^2)^{\frac{1}{2}} \leq (\sum_{j=1}^n ||x||_\infty^2)^{\frac{1}{2}} = (n||x||_\infty^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n}||x||_\infty$.□

<u>Bem.:</u> Es ist klar, dass aufgrund 1.7 auch $||\cdot||_2$ eine Norm ist, d.h $(N1)-(N3)$ gelten auch für $||\cdot||_2$.

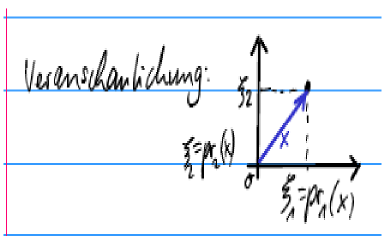
1.8 **<u>Def.:</u>** Konvergenz von Folgen: Sei $(x_n)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^n$ eine Folge von Punkten x_k im $\mathbb{R}^n$. Denn Konvergiert (x_k) gegen n $\in \mathbb{R}^n$, Notation: $x_k \xrightarrow{k\to\infty} a$ bzw. $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$, falls $\forall\epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall k \geq n_0 : ||x_k - a||_\infty < \epsilon$

1.9. **<u>Beh.:</u>** Die Aussage mit $||\cdot||_2$ statt $||\cdot||_\infty$ ist hierzu äquivalent.
<u>Bew.:</u> Gilt Konvergenz $x_k \xrightarrow{h\to\infty} a$ bzgl. $||\cdot||_\infty$, so folgt
$\forall\epsilon > 0 \exists n_0 \forall k \geq n_0 : ||x_k - a||_2 \leq (1.7) \sqrt{n} \cdot ||x_k - a||_\infty < \sqrt{n}\frac{\epsilon}{\sqrt{n}} = \epsilon$,
und es gilt Konvergenz bzgl. $||\cdot||_2$, so folgt analog
$\forall\epsilon > 0 \exists m_0 \forall k \geq n_0 : ||x_k - a||_\infty \leq (1.7) ||x_k - a||_2 < \epsilon$.□
<u>Bem.:</u> Aufgrund dieser Beh. sagt man, dass $||\cdot||_2$ und $||\cdot||_\infty$ (zueinander) äquivalente Normen sind, was mit 1.7 ausgedrückt wird.
Wortwörtlich ergeben sich die Grundeigenschaften für Konvergenz wie in Analysis I:
1.10 **<u>Bem.:</u>**
(1) $x_k \to a, x_k \to b \Rightarrow a = b$ (Eindeutigkeit des GWes, vgl.an5,18(1))

(2) $x_k \to a, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha x_k \to \alpha a$ (Grenzwertsätze, vgl.an5,26)
(3) $x_k \to a, y_k \to b \Rightarrow x_k + y_k \to a + b$ (Grenzwertsätze, vgl.an5,26)
Bew.: (1): $0 \leq ||a-b|| = ||a - x_k + x_k + b|| \leq$ (N3, Dreiecksungleichung)$||a - x_k|| + ||x - b|| \xleftarrow{k\to\infty} 0 + 0 = 0$
$\Rightarrow ||a-b|| = 0 \xRightarrow{N1} a = b.$

(2): $||\alpha x_k - \alpha a|| = (N2)|\alpha| \cdot ||x_k - a|| \to 0.$
(3): $||(x_k + y_k) - (a+b) \leq$ (dreiecksungleichung)$||x_k - a|| + ||y_k - b|| \to 0 + 0 = 0$ $\square$

Nützlich zum Arbeiten mit dem $\mathbb{R}^n$ sind die Projektionsabbildungen.
1.11.Def.: Die Abblidung $pr_j = \pi_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $pr_j(x) := \xi_j$ heißt (j-te) Projektion/ Projektion auf die j-te Koordinate/Komponente des Vektors $x \in \mathbb{R}^n$.



Bem.:• Die Abb. pr_j ist eine Lineare Abb.
• Bei $x_k \to a$ erspart uns die Notation $pr_j(x_k)$ die benutzung von Doppelindezes "ξ_{kj}". Konvergenz im $\mathbb{R}^n$ gilt Komponentenweise, d.h für jede Koordinate einzeln:
1.12Bem.: Im $\mathbb{R}^n$ gilt: $x_k \xrightarrow{k\to\infty} a \Leftrightarrow \forall_j \in 1,...,n : pr_j(x_k) \to pr_j(a)$.
Bew.: Für j steht fest und alle k ist $|pr_j(x_k) - pr_j(a)| \leq ||x_k - a||_\infty$, was "$\Rightarrow$" zeigt. Wegen $||x_k - a||_\infty = \max_{1\leq j\leq n} pr_j(x_k) - pr_j(a)$ folgt "$\Leftarrow$". $\square$

1.13. Bem.: Aus der Linearen Algebra I/II ist bekannt (vgl Anhang Nr.6.), dass es neben dem (euklidischen) Standardskalarprodukt noch mehr Skalarprodukte $<,>$ gibt, die dann gemäß der Setzung $||x|| := <x,x>$ noch andere Normen induzieren, Ob und wie sich das auswirkt, untersuchen wir in Teil 2 Dieser Vorlesung, wo wir allgemeinr normierte Vektorräume und Metrische Räume zulassen und deren Analysis erarbeiten werden. In diesen teil 1 beschränken wir uns zunächst auf den Fall $\mathbb{R}^n$, in Teil 2 wird also der "höhere Standpunkt" untersucht. Teil 3 der Vorlesung behandelt dann gewöhnliche Differentialgleichungen.