Vorlesung Analysis II

June 20, 2025

Teil 2: Topologische Grundbegriffe in metrischen Räumen

an13: Stetigkeit, Kompaktheit

Stichworte: Stetigkeit, Bilder Kompakter mengen sind Kompakt, gleichmäßig stetig

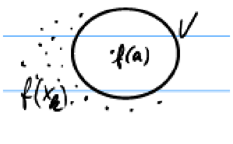
Literatur: [Forster], Kapitel 3

13.1. Einleitung: Wir verallgemeinern den Stetigkeitsbegriff auf metrische Räume. Die grundlegenden Eigenschaften stetiger Abbildungen werden gezeigt. Die Bedeutung des Kompaktheitsbegriffs wird deutlich, u.a. in dem Satz, dass Bilder Kompakter mengen wieder Kompakt sind, als Verallg. des Satzes vom Min./Max.

13.2. Vereinbarung: Seien (R,S(←rho)), (ρ, σ(←sigma)) metrische Räume, $f : R \to S$.

13.3. Def.: f heißt stetig in $a \in R$:$\Leftrightarrow \forall \epsilon{>}0 \exists \delta{>}0 \forall x \in R : S(x,a){<}\delta \Rightarrow \sigma(f(x), f(a)){<}\epsilon$.
$\Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{U}_{f(a)} \exists U \in \mathcal{U}_a : f(U) \subseteq V$.
f heißt stetig (auf R): $\Leftrightarrow \forall a \in R : f$ stetig in a
f heißt stetig in $D \subset (R,S)$:$\Leftrightarrow f_{rD}$ stetig.
⌜dabei gilt: D $\subseteq (R,S) \Leftrightarrow (D, S_{rD\times D})$ metrischer Raum⌝

13.4. Bem.: f in a stetig$\Leftrightarrow \forall x_k \to a : f(x_k) \to f(a)$.
Bew.: "$\Leftrightarrow$": Gelte $x_k \to a, V \in \mathcal{U}_{f(a)}$.
Beh.: Für fast alle k gilt $f(x_k) \subseteq V$.
Denn: Nach Vor. $\exists U \in \mathcal{U}_a : f(U) \subseteq V$(Œ$U = B_a^\epsilon$).
In B_a^ϵ liegen fast alle x_k, also liegen in V fast alle $f(x_k)$.
Da v beliebig, folgt: $f(x_k) \to f(a)$.
"$\Leftarrow$": Ann.: f nicht stetig. Konstruktion : $\exists V \in \mathcal{U}_{f(a)} \forall U \in \mathcal{U}_a : f(U) \nsubseteq V$,
Œ$U = B_a^{1/k} : \exists x_k \in B_a^{1/k}, f(x_k) \notin V$
$x_k \to a$, aber $f(x_k) \nrightarrow f(a)$.



□