Vorlesung Analysis II

June 27, 2025

Teil 3: Gewöhnliche Differentialgleichungen

an17: DGLn mit "getrennten Variablen"

Stichworte: DGL mit getrennten Variablen, AWA, Beispiele

Literatur [Hoffmann], Kapitel 7.2

17.1. Einleitung: Wir untersuchen DGLn mit "getrennten Variablen" x und y.

17.2. Motivation: wir behandeln DGLn, wo sich alle Terme y und ihren Ableitungenauf die eine Seite, und die Terme mit x auf die andere Seite bringen lassen. Nach einer solchen "Variablentrennung" ist die DGL leicht lösbar Integration.

17.3. Verinbarung: Wir betrachtten DGLn der Form

$$\boxed{y' = \frac{f(x)}{g(y)}} \qquad *$$

Annahmen: $i_1.i_2 \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle,
$f : i_1 \to \mathbb{R}$ stetig, $g : i_2 \to \mathbb{R}$ stetig mit $g(s) \neq 0$ für $s \in i_2$.

17.4. Aufgabe: Zu den Anfangswerten $a \in i_1$ und $b \in i_2$ suchen wir ein $IV i \subseteq \mathbb{R}$ mit $a \in i \subseteq i_1$ und eine auf i def. Lsg. y von $*$ mit y(a)=b.
"AWA"=Anfangswertaufgabe

17.5. Grobe Idee: Umformung zu $y'(t)g(y(t)) = f(t)$
und Integration: $\int_a^x y'(t)g(y(t))dt = \int_a^x f(t)dt$.
Die Substitution $s := y(t)$ ergibt auf der l.s. gerade $\int_{y(a)}^{y(x)} g(s)ds$,
was dann nach y(x) aufgelöst wird.

17.6. Bemerkung:
(1.) Durch "Variazion" von a und b werden alle Lsgn. erfasst.
(2.) Eine Lsg. von $*$ ist automatisch stetig diff'bar.

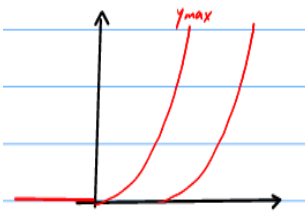
17.7. Setze F(x):=$\int_a^x f(t)dt (x \in i_1)$, G(y):=$\int_b^y g(s)ds (y \in i_2)$-
Da g in i_2 keine Nst. hat (und daher Konstantes VZ hat, denn g ist stetig), ist G streng monoton (isoton oder antiton).
G ist stetig diff'bar, für $i_3 := G(i_2)$ ist also G:$I_2 \to i_3$ bijektiv.
Nach An12.2./an8.8. ist $G^{-1} : i_3 \to i_2$ stetig diff'bar, und ebenso streng monoton.

17.8. **Feststellung:** Für eine auf einem IV (Intervall) i, $a \in i \subseteq i_1$, def. diff'bare Fkt. y mit $y(t) \in i_2 (t \in i)$ ist die AWA äquivalent zu $\boxed{G(y(x))F(x), x \in i}$ $\Leftrightarrow$ $y(x) = G^{-1}(F(x)) = (G^{-1} \circ F)(x)$, $x \in i$.
Ist nun i_0 das "maximale" IV mit $a \in i_0 ßsubseteqi_1$ und $F(x) \in i_3, x \in i_0$,
dann gilt: $y_0 := G^{-1} \circ F_{ri_0}$ ist Lsg. der AWA.
Jede andere Lsg. der AWA entsteht durch Einschränkung.

17.9. **Bsp.:** $\boxed{y' = -\frac{x}{y}}$, $y>0, \to$ nehmen $i_2 = \mathbb{R}, f(x) = -x, i_2 =]0, \infty[, g(y) = y$
und bel. $a \in i_1, b \in i_2$, erhalten: $2F(x) = -x^2 + a^2, 2G(y) = y^2 - b^2$,
und somit $i_3 = G(i_2) =]-\frac{1}{2}b^2, \infty[$. mit $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ ergibt sich $i_0 =]-r, r[$.
Die Forderung G(y(x))=F(x) liefert $y(x)^2 - b^2 = -x^2 + a^2 \Rightarrow y(x) = \sqrt{r^2 - x^2}, x \in i_0$.

17.10. **Bsp.:** $\boxed{y' = \sqrt{y}}$, $y \geq 0, y(0) = 0 \to$ Nehmen $i_1 = \mathbb{R}, i_2 =]0, \infty[$,
f(x):=1 $(x \in i_1)$, $g(s) := s^{\frac{-1}{2}}$ $(s \in i_2)$.
• Für b=0 sind wegen $0 \notin i_2$ obige Überlegung nicht anwendbar.
• Falls $a \in i_1, b \in i_2$: Setze F(x):= $\int_b^y f(t)dt =$x-a, $x \in i_1$,
G(y):=$\int_b^y s^{-1/2}ds = 2(\sqrt{y} - \sqrt{b})$, $y \in i_2$,
$i_3 (:= G(i_2)) =]-2\sqrt{b}, \infty[, i_0 =]a - 2\sqrt{b}, \infty[$,
$y_0(x) := G^{-1}(F(x)) = \frac{1}{4}(x - a + 2\sqrt{b})^2$, $x \in i_0$.
Mit $\alpha := a - 2\sqrt{b}$ liefert dann y(x):=$\begin{cases} 0, x \leq \alpha \\ \frac{1}{4}(x - \alpha), x>\alpha \end{cases}$ einer Lsg. auf ganz $\mathbb{R}$.

17.11. **Bem. zu 17.10:** Falls $\alpha \geq 0$, erhält man eine Lsg.
Es ex. also lokal (hier z.B. um die 0 herum) unendlich viele Lsgn. der AWA,
diese liegen zwischen der "Kleinsten" Lsg. $y_{min} = 0$ und der "größten" Lsg. $y_{max}(x) := \begin{cases} 0, x \leq 0 \\ \frac{1}{4}x^2, x>0. \end{cases}$



17.12. **Bsp.:** $\boxed{y' = y^2}$, $y(0) = b>0. \to$ Nehmen $i_1 = \mathbb{R}, i_2 =]0, \infty[m$
f(x)=1 $(x \in i_1)$, $g(s) = s^{-2} (s \in i_2)$, a=0.
Setzen $F(x) = \int_0^x f(t)dt = x, x \in i_1$,
$G(y) = \int_b^y s^{-2}ds = \frac{1}{b} - \frac{1}{b}, y \in i_2$,

$i_3 = G(i_2) =]-\infty, \frac{1}{b}[= i_0$, $y_0(x) := G^{-1}(F(x)) = G^{-1}(x) = \frac{b}{1-bx}$, $x \in i_0$.
Beachten: Die Lsgn. besitzen individuelle maximale existenz IVe, obwohl die DGL mit völlig regulären Funktionen gebildet wird.