Teil 1: Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$

an7: Satz von Taylor, Lokale Extrema

Stichworte: Satz von Taylor, Extrema, Kritische Stellen, Kriterien, Hessematrix

Literatur: [Hoff] Kapitel, 9.6/7, [Forster] Kapitel 7

7.1. Einleitung: Der Satz von Taylor in der mehrdimensionalen Version für Skalarfelder liefert Kriterien zur Erkennung von Extrema anhand Gradienten und Hessematrix.

7.2. Vor.: $f : U \to \mathbb{R}$ mit $U \subset \mathbb{R}^n, f \in \ell^{m+1}(U, \mathbb{R}), \overline{ax} \subseteq U$.
Bezeichnung: Für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n, \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ setze zur einfacheren Notation
$|\alpha|{:=}\alpha_1 + ... + \alpha_n$, $\alpha!{:=}\ \alpha_1! \cdots \alpha_n!$
$D^\alpha{:=}D_1^{\alpha_1} \circ D_2^{\alpha_2} \circ ... \circ D_n^{\alpha_n}$, $x^\alpha{:=}x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$, $X^\alpha{:=}X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n}$.
Man nennt α auch einen Multi-Index.
Damit kann jedes Polynom $P \in \mathbb{R}[X_1^-, ..., X_n^-]$, deg P=m, auch in der Kurzen Multi-Index-Schreibweise notiert werden als
$P = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n; |\alpha| \leq m} c_\alpha X^a$, d.h. $P(X_1-, ..., X_n) = \sum_{0 \leq \alpha_1, ..., \alpha_n \leq m, \alpha_1 + ... + \alpha_n \leq m} c_{(\alpha_1, ..., \alpha_n)} X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n}$.

Bsp.: $\sum_{|\alpha| \leq 2} \alpha! X^\alpha = \underbrace{0!X_1^0}_{\text{Grad 0}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} 1!X_i^1}_{\text{Grad 1}} + \underbrace{\sum_{1 \leq i \neq j \leq n} 1!1!X_i^1 X_j^1 + \sum_{i=1^n 2! X_i^2}}_{\text{Grad 2}}$

Damit kann der Satz von Taylor in einer Kurzgefassten Formel notiert werden:
7.3. Satz von Taylor: Unter der Vor. wie in 7.2 gilt:
Beh.: $\exists c \in \overline{ax}$:

$$\boxed{f(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{1}{\alpha!}(D^\alpha f)(a)(x-a)^\alpha + \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{1}{\alpha!}(D^\alpha f)(c)(x-a)^\alpha}$$

7.4. Bem.: Für m=0 lautet die Beh. $f(x) = f(a) + Df(c)(x-a)$ für ein $c \in \overline{ax}$, dies is die Aussage des MWS 6.4.

7.5. Kor.: Für m=1 lautet die Beh.
$f(x) = f(a) + <\text{grad } f(a), x-a> + \frac{1}{2}(x-a)^T H(f_i c)(x-a)$
mit der (laut dem Satz von Schwarz) symmetrischen Matrix $H(f_i c){:=}(D_i D_j f(c))_{n,n}$, die Hessematrix heißt; die zugehörige quadratische Form heißt Hesseform.
(Auch: Schreibweise Hess f(c) statt $H(f_i c)$ üblich.)
(Jede symmetrische Matrix A, wo $A^T = A$, definiert über $<x, Ax> = x^T Ax$ eine quadratische Form.)

7.6. Bem.: Ist P ein Polynom, $P \in \mathbb{R}[X_1, ..., X_n]$, deg P=m, dann ist $P \in \ell^\infty(\mathbb{R}^n)$ und P ist seine (eigene) Taylorreihe.

7.7. Beweis des Satzes 7.3 von Taylor:
1. Schritt: Für $\epsilon{>}0, t\ \in]-\epsilon, 1+\epsilon[\subseteq \mathbb{R}$ setze $g(t) := f(a + t(x-a))$ für festes x und a. Es ist also $g \in \ell^{m+1}(]-\epsilon, 1+\epsilon[)$.
Beh.: Für $k \subseteq m+1$ ist $\frac{d^k g}{dt^k}(t) \stackrel{!}{=} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha f(a + t(x-a))$.
Bew.: Setze zunächst y:=x-a$=:(\eta_1, ..., \eta_n)^T$.

Beh.: $\frac{d^k g}{dt^k}(t) = \sum_{i1,i,k=1}^{n} D_{i_k} D_{i_{k-1}} \cdots D_{i_1} f(a+ty)\eta_{i_1} \cdots \eta_{i_k}$.
Bew.: Vollständige Induktion über k:
k=1: $\frac{dg}{dt}(t) = \sum_{i=1}^{n} D_i f(a+ty)\eta_i$ nach Kettenregel 5.12
denn Df(z)=$(D_\eta f(z), ..., D_n f(z))$,
D(a+ty)=y=$(\eta_1, ..., \eta_n)^T$ $k \to k+1$: $\frac{d^{k+1} g}{dt^{k+1}}(t) = \sum_{i1,i,k=1}^{n} D_{i_k} D_{i_{k-1}} \cdots D_{i_1} f(a+ty)\eta_{i_1} \cdots \eta_{i_k})$