Vorlesung Analysis II

May 23, 2025

Teil 1: Differnetialrechnung im $\mathbb{R}^n$

an2: Geometrie von Funktionen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit m=1 und n=1
Stichworte: Affine Räume, Parameter- und Normdarstellung, Funktionen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
textbfLiteratur:}setulcolorblue [Hoff], Kapitel 9.2

2.1Einleitung: Nach Kurzer Überlegung zur Darstellung affin-Linearer Objekte im $\mathbb{R}^n$, also Geraden, Ebenen, Hyperebenen,... arbeiten wir an der geometrischen Anschauung von Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, die affinlinear oder nicht affinlinear sind. Wir betrachten insbesondere $\mathbb{R}$-wertiger (auch: reellwertiger) Funktionen, d.h. solche Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit n = = 1, sowie auch "Kurvenartige Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ mit m = 1.

2.2Affine Räume im $\mathbb{R}^n$: Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$, so heißt a+U für ein $a \in \mathbb{R}^n$ ein (d-dimensionaler) affiner Raum, wenn dim U=d ist. (Man kann a einen Aufpunkt von a+U nennen.)
Es gibt folgende Atren zur Beschreibung der El. von a+U:
2.3 •Parameterfarstellung: Ist u die Lineare Hülle von Vektoren $v_1, ..., v_r$, d.h. U= L($v_1, ..., v_r$) := $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_r v_r; \alpha_1, ..., \alpha_r \in \mathbb{R} = \mathbb{R}v_1 + ... + \mathbb{R}v_r$, d.h. die Menge aller Linearkombinationen $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i$ der $v_1, ..., v_r$, auch: der Span der $v_1, ..., v_r$ geschrieben $span(v_1, ..., v_r)$,
bzw. auch: das Lineare Erzeugnis der $v_1, ..., v_r$ geschrieben$<v_1, ..., v_r>$($\leftarrow$ keine skalarproduktklammern, sondern "Erzeugnissklammern"!)
Dann ist a+U = a+L$(v_1, ..., v_r) = a + \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_r v_r; \alpha_1, ..., \alpha_r \in \mathbb{R}$

Sind $v_1, ..., v_r$ Linear unabhängig, gilt dim(a+U)=dim U = r, die $v_1, ..., v_r$ heißen dann Richtungsvektoren.
Für r= dim U = 1 ist die eine Gerade $a + \mathbb{R}v_1 = a + tv_1; t \in \mathbb{R}^n$, "in Richtung" $v_1 \in \mathbb{R}^n, v_1 \neq 0$, und mit Aufpunkt $a \in \mathbb{R}^n$. Für r=dim U = 2 ist dies eine Ebene $a + \mathbb{R}v_1 + \mathbb{R}v_2 = a + tv_1 + sv2; t, s \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^n$ mit zwei (linear unabh.) Richtungsvektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ und Aufpunkt $a \in \mathbb{R}$. Usw.
Eine besonders einfache Darstellung ist im Fall dim U = n-1 möglich, den zugehörigen affinen Raum nennen wir eine Hyperebene in $\mathbb{R}^n$:

2.4• Normalendarstellung(einer Hyperebene im $\mathbb{R}^n$):
Sei $H_{c,a} := x \in \mathbb{R}^n | <x, c> = \alpha$ für $c \in \mathbb{R}^n, c \neq 0$, und $\alpha \in \mathbb{R}$.
Sei $p \in H_{c,\alpha}$ irgenein Punkt dieser Menge, d.h. es gelte $<p, c> = \alpha$.
Dann ist $H_{c,\alpha} = p + U$ mit einem Untervektorraum $U \subseteq \mathbb{R}^n$, für den dim U = n-1 ist, denn: $U = ker f$ für die Lineare Abb. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \to <x, c>$
$\_x \in H_{c,\alpha} \Leftrightarrow <x, c> = \alpha \Leftrightarrow <x - p, c> = \alpha - <\underbrace{<p, c>}_{\alpha} \Leftrightarrow x = p + n$ mit $n \in ker f\hat{}$

dabei ist $imf = \mathbb{R}$, also $dimU = dimkerf = n - dimimf = n - 1$
Mit U = ker f = $u \in \mathbb{R}; <u, c> = 0 =: c^{\perp}$ folgt, dass die $u \in U$ genau die Vektoren im $\mathbb{R}^n$ sind, die senkrecht auf c stehen, bzw. wir haben $U^{\perp} = \mathbb{R}c$. Ü
Da c senkrecht zu jedem Punkt von U ist, heißt c Normalenvektor von $H_{c,\alpha}$. Denn eine Gerade $p + \mathbb{R}c \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt Normale von $H_{c,\alpha}$ und steht senkrecht auf $H_{c,a}$.

2.5 • Ein Spezialfall der Normalendarstellung ist die Hessesche Normalform: $H_{c,\alpha}$ mit $||c|| = 1$ (wo der Normalenvektor auf 1 normiert ist).
Die Formel in 2.8 und 2.9 werden dann noch einfacher.

2.6 Bsp. zur Normalendarstellung:

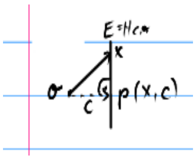
Eine Ebene E im Raum $\mathbb{R}^3$ kann in der Form $E = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}; \underbrace{\gamma_1\xi_1 + \gamma_2\xi_2 + \gamma_3\xi_3}_{=<x,c>} = \alpha$ dargestellt werden;

c= $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$ ist darin der Normalenvektor, d.h. $c \perp E$.

Die Eben $E = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3; 3x - 2y - z = 2$ z.b. steht senkrecht auf c= $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
In dieser Form nennt man die Normalendarstellung auch oft Koordinatendarstellung von E. Anderes Bsp. $E = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3; x = 0$ ist die y-z-Ebene, und $E = (w, x, y, z) \in \mathbb{R}^4; w - 3x - y + 4z = 10$ ist die (3-dim) Hyperevene im $\mathbb{R}^4$, die senkrechte zu $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ ist.

2.7Schul bsp. zur Normalendarstellung: Eine Gerade g in der Ebene $\mathbb{R}^2$ ist auch eine "Hyperebene" im $\mathbb{R}^2$, da dim g =1=2-1 gilt.
Eine Normalendarstellung lautet dann $g = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; < \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} > = \alpha$ für $\gamma_1, \gamma_2, \alpha \in \mathbb{R}$, d.h. wird beschrieben durch die Gleichung $\gamma_1 x + \gamma_2 y = \alpha \Leftrightarrow (\gamma_2 \neq 0) y = -\frac{\gamma_1}{\gamma_2}x + \frac{\alpha}{\gamma_2} \leftarrow$ Geradengleichung der Schule mit Steigung m = $\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$, und c =$\frac{\alpha}{\gamma}$ als y-Achsenabschnitt.
Sogar an eine "Schulglg." $1 \cdot y = mx + c$ für eine Gerade kann man also den Normalenvektor $\begin{pmatrix} -m \\ 1 \end{pmatrix}$ ablesen, der senkrecht auf der Geraden g (mit Richtungsvektor $\begin{pmatrix} m \\ 1 \end{pmatrix}$) steht: $< \begin{pmatrix} -m \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} > = -m + m = 0$.

2.8 **Rechen mit der Hesseschen Normalform:** Sei $E = H_{c,\alpha} \subseteq \mathbb{R}^n$ geg., so ist der Abstand von 0 zu $H_{c,\alpha}$ gegeben als $dist(0, H_{c,\alpha}) = \frac{|\alpha|}{||c||}$.
• Ist außerdem $||c|| = 1$, ist dieser Abstand also $=|\alpha|$.
Bew.: Sei $x \in H_{c,\alpha}$ beliebig. Der gesuchte Abstand ist die Länge von p(x,c), also $dist(0, H_{c,\alpha}) = ||p(x,c)|| = ||\frac{|<x,c>|}{||c||} = \frac{|\alpha|}{||c||}$.$\square$



Bsp.: $H\begin{pmatrix}1\sqrt{2}\\1\sqrt{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y = -7$(hier: $||c|| = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 1$) hat den Abstand $|\alpha| = |-7| = 7$ vom Ursprung ist nicht der y-Achsenabschnitt.

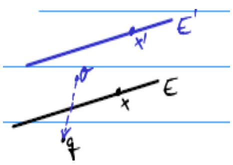
2.9 **2.Beh.:** Ist $H_{c\alpha} \in \mathbb{R}^n$ geg., so ist der Abstand von (irgendeinem) $q \in \mathbb{R}^n$ zu $H_{c,\alpha}$ gegeben als

$$dist(q, H_{c,\alpha}) = \frac{|<q,c> - a <}{||c||}. \tag{1}$$

Bew.: Betr. die um q verschobene Ebene $E' = x'; x' + q \in E$, dann ist der gesuchte Abstand der von 0 zu E', für ein $x' \in E'$ also $= ||p(x',c)|| = [\rightarrow x' + q = x \in E]||p(x-q,c)||$

$$= ||\frac{<x-q,c>}{<c,c>} \cdot c|| = ||\frac{<x,c>}{||c||^2} \cdot c - \frac{<q,c>}{||c||^2} \cdot c|| = \frac{1}{||c||} \cdot |\alpha - <q,c>|. \tag{2}$$

$\square$



2.10Bsp.: Abstand von q $= \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} zuH_{\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix},5} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2; 2x + 3y = 5$ist

$$\frac{|<q,c> - \alpha|}{||c||} = \frac{|1 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 - 5|}{\sqrt{2^2+3^2}} = \frac{|2-6-5|}{\sqrt{13}} = \frac{9}{\sqrt{13}}. \tag{3}$$

$\square$

2.11geometrische Anschauung von Funktionen$f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $\varnothing \neq D \subseteq \mathbb{R}^n, m, n \in \mathbb{N}$.
Der Graph von f ist G(f):=

$$(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+m}; x \in D = (\xi_1, ..., \xi_n, f(\xi_1, ..., \xi_m)); (\xi_1, ..., \xi_n)^T \in D \subseteq \mathbb{R}^{n+m}, \tag{4}$$

wir "verkleben" die Koordinaten von x mit denen von f(x) zu Vektoren im$\mathbb{R}^{n+m}$.
(1)Fall m=1, d.h. eine $\mathbb{R}$-wertige/reellwertige Funktion, auch Skalarfeld genannt.
Für n=2 läßt sich G(f) oftmals als "Fläche" im$\mathbb{R}^3$ deuten, für die man bei festen $c \in \mathbb{R}$ die "Niveaulinie" $x \in D; f(x) = c$ vom Niveau c betrachten kann (wie Höhenlinien bei Wanderkarten).
Dabei macht man "Horizontalschnitte", d.h man schneidet den Graphen G(f) mit der Ebene der Glg. $\xi_3 = c(d.h."z = c")$ und projiziert den Schnitt auf die $\xi_1 - \xi_2$-Ebene (bzw. xy-Ebene).

(a)Bsp.: Für die Halbkugelfläche $f : (x, y); x^2 + y^2 \leq 1 \to \mathbb{R}, (x, y) \to \sqrt{1 - x^2 - y^2}$
Sind die Niveaulinien

$$\text{von Niveau c:} \begin{cases} \emptyset, & c > 0, c < 0 \\ 0, & c = 1 \\ x, y \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1 - c^2, & 0 \leq c < 1 \leftarrow Kreisevomradius\sqrt{1-c} \end{cases} \tag{5}$$

$\rightsquigarrow G(f) = ?$ Ü

(b) Bsp.: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ affin-Linear, d.h. $f(\xi_1, ..., \xi_n)$[Eigendlich: $f\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$] $= \alpha_1\xi_1 + ... + \alpha_n\xi_n + ß$ mit $\alpha_1, ..., \alpha_n, ß \in \mathbb{R}$. Der Graph G(f)= $(\xi_1, ..., \xi_n, ß + \sum_{i=1}^n \alpha_i\xi_i)^T; \xi_1, ..., \xi_n \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ ist (i.a) eine n-dim Hyperebene im $\mathbb{R}^{n+1}$ mit der Gleichung $-\sum_{i=1}^n \alpha_i\xi_i + \xi_{n+1} = ß$.
(c) Die Schnitte des Graphen G(f) einer Fkt. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit den Koordinatenhyperebenen, die jeweils durch eine Glg. $\xi_z = 0, 1 \leq i \leq n$, gegeben sind, sind "Vertikalschnitte". Bei n=2 hat man da die xy - Ebene der Glg. z=0, die xz-Ebeene der Glg. y=0, und x=0 ist die yz-Ebene, die zu geh. Vertikalschnitte sind $(x, y, 0)^T; f(x, y) = 0, (x, 0, f(x, 0))^T; x \in \mathbb{R}, (0, y, f(0, y))^T; y \in \mathbb{R}$.

(2)Fall n=m: $f : D \to \mathbb{R}^n$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt Vektorfeld.
(3)Fall n=1: etwa $f : I \to \mathbb{R}^m$, wo $I \subseteq \mathbb{R}^1$ ein Intervall ist. Der Graph ist ein "Kurvenähnliches" Gebilde in $\mathbb{R}^{1+n}$, die Funktionswerte in $\mathbb{R}^m$ können mit der Projektionsalb, $pr_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ aus 1.11 Komponentnenweise betrachtet werden durch $f_i := pr_i \circ f, f_i : I \to \mathbb{R}$ für $1 \leq i \leq m$.
Diese Funktionen können mit den Methoden der Analysis I untersucht werden, z.b Untersuchung auf Differenzierbarkeit (f ist diffbar, wenn alle f_i diffbar, sodass wir in diesem Fall von einer Kurve sprechen wollen, vgl. 4.5).

2.12Def.: Sind $pr_1, ..., pr_m$ die Projektionsabb. $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, und $f : D \to \mathbb{R}^m, D \subseteq \mathbb{R}^n$, dann heißt $f_i := pr_i \circ f : D \to \mathbb{R}$ die i-te Komponentenfunktion (auch Koordinatenfunktion) von f, wo $1 \leq i \leq m$ ist. Damit gilt $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$.
Viele Eigenschaften von Funktionen f mit $\mathbb{R}^m$ als Zielmenge können mit ihren Komponentenfunktionen (leichter) untersucht werden, da diese Skalarfelder sind.

2.13Bsp.: Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine Lineare Abb. (im Sinne der Linearen Algebra),
also $f(x) = A \cdot x$ mit einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{mxn}$, etwa $A = (\alpha_{ij})$.
Die m Komponentenfkt. sind $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f_i(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}\xi_j$, wo $1 \leq i \leq m$.
Der Graph jeder einzelnen Komponentenfunktion ist (i.a.) eine Hyperebene im $\mathbb{R}^{n+1}$ mit der Gleichung $\xi_{n+1} = \sum_{j=1}^n a_{ij}\xi_j$, und der Gesamtgraph G(f) Wird durch die m Gleichungen $\xi_{n+i} = \sum_{j=1}^n a_{ij}\xi_j$ beschrieben.