Vorlesung Analysis II

July 4, 2025

Teil 3: Gewöhnliche Differentialgleichungen

textbf an 19: Bernoullische und Euler-homogene DGL

Stichworte: Bernoullische DGL, (Euler-)homogene DGL

Literatur: [Hoffmann], Kapitel 7.4/5

19.1. Einleitung: Die Bernoullische DGL ist eine spezielle Version der Linearen DGL 1. Ordnung und wird darauf zurückgeführt. Die Euler-Homogene DGL ist ein DGL 1. Ordnung mit einem Term abhängig von $\frac{y}{x}$ auf der rechten Seite und kann auf eine DGL mit getrennten Variablen zurückgeführt werden.

19.2. Def.: Die DGL $\boxed{y' = f(x)y + g(x)y^\alpha}$ (*), $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$,
heißt Bernoullische DGL, wobeie f,g: j $\to \mathbb{R}$ stetig, j ein IV.
(Für α=1 ist dies eine homogene Lineare DGL 1. Ordnung, für $\alpha = 0$ die (inhomogene) Lineare DGL 1. Ordnung.)

19.3. Vereinbarung: Betrachten nur Lösungen y:$j_0 \to \mathbb{R}, j_0 \subseteq j$ Teil IV mit y(x)>0 für $x \in j_0$
(für spezielle α ginge es, auch y(x)≤0 zuzulassen. Sofern $0^\alpha = 0$ definiert ist, ist auch y = 0 Lösung.)

19.4. Satz: Die Transformation $u(x) = y(x)^{1-\alpha}$, $x \in j_0$, liefert: y Lsg. von (*)⇔ u löst auf j_0 die Lineare DGL
$\boxed{u' = (1-\alpha)f(x)u + (1-\alpha)g(x)}$ (+), $u(x)>0, x \in j_0$.

19.5. Bew.: "⇒": Ist y Lsg. von (*), dann gilt für u:

$$\begin{aligned} ' &= (1-\alpha)y^{-\alpha}y' = (1-\alpha)y^{-\alpha}[f(x)y + g(x)y^\alpha] && (1)\\ &= (1-\alpha)f(x)u + (1-\alpha)g(x). && (2) \end{aligned}$$

"⇐": Ist u Lsg. von (+), folgt

$$\begin{aligned} y' = \frac{1}{1-\alpha}u^{\frac{1}{1-\alpha}-1}u' &= \frac{1}{1-\alpha}u^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}[(1-\alpha)f(x)u + (1-\alpha)g(x)] && (3)\\ &= f(x)u^{\frac{1}{1-\alpha}} + g(x)u^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = f(x)y + g(x)x^\alpha. && (4) \end{aligned}$$

$\square$

19.6. Bsp.: $y' = xy - 3xy^2, y(0) = \frac{1}{4}$.
Mit $\alpha = 2$, $u(x) = y(x)^{-1} = \frac{1}{y(x)}$ in einem IV $j_0 \subseteq \mathbb{R}, 0 \in j_0$, $y(x)>0$ für $x \in j_0$ transformieren wir die DGL um in
$u' = -xu + 3x, u(0) = 4$. ⌜$u' = (\frac{1}{y}' = -\frac{xy}{y^2} + 3x = -xu + 3x)$⌝
Nach Bsp. 18.8. ist $u(x) = b\exp(-\frac{1}{2}x^2) + 3$ die aöög. Lsg. dieser DGL, die Lösung der ursprünglichen DGL für y ist dann y(x)=$\frac{1}{u(x)} = \frac{1}{3+\exp(-x^2/2)}$.

19.7. Def.: Die DGL $\boxed{y' = f(\frac{y}{x})}$ (*)
wird meist als "homogene" DGL bezeichnet.
Um Verwechslungen mit Homogenität bei linearen DGLn auszuschließen, nennen wir sie Euler-homogene DGL.

19.8. Verfahren: Die Substitution $u = \frac{y}{x}$ für $x \neq 0$ bzw. y=xu liefert $f(u) = u + xu'$, also $u' = \frac{f(u)-u}{x}$, eine DGL mit "getrennten Variablen".

19.9. Bsp.: $y' = \frac{x-y}{x}, y(2) = 3$.
Die r.s. ist $= 1 - \frac{y}{x}$, mit $f(u) := 1 - u$ ergibt die Substitution y=xu die AWA $u' = \frac{1-2u}{x}, u(2) = \frac{3}{2}$.
Für $x>0, u>\frac{1}{2}$, berechnen wir nach 17.5. ⌜dort mit $f(x) = \frac{1}{x}, g(u) = \frac{1}{1-2u}$⌝:

$$\int_{3/2}^{u(x)} \underbrace{\frac{1}{1-2x}}_{0} ds \stackrel{!}{=} \int_2^x \frac{1}{t} dt, \text{ folglich } -\frac{1}{2}\ln(2s-1)\Big|_{3/2}^{u(x)} \stackrel{!}{=} \ln(x) - \ln(2)$$

bzw. $\ln(2u(x) - 1) - \ln(2) \stackrel{!}{=} 2(\ln(2) - ln(x))$.
Also ist $2u(x) - 1 = e^{3\ln(2) - 2\ln(x)} = 2^3 x^{-2}$, also $2u(x) = \frac{8}{x^2} + 1$,
dies führt zu $u(x) = \frac{4}{x^2} + \frac{1}{2}$ und schließlich zu $y(x) = xu(x) = \frac{4}{x} + \frac{x}{2} = \frac{8+x^2}{2x}$.
⌜Probe: $y' = -\frac{4}{x^2} + \frac{1}{2} \stackrel{!}{=} 1 - \frac{1}{x}\underbrace{(\frac{4}{x} + \frac{x}{2})}_{y} \checkmark, y(2) = \frac{8+4}{4} = 3\checkmark$⌝