an3: Konvergenz, Funktionsgrenzwerte, Stetigkeit im $\mathbb{R}^n$ **Stichworter:** Funktionsgrenzwerte, Stetigkeit (Komponentenweise und partiell)

Literatur: [Hoff], Kapitel 9.3

3.1 Einleitung: Wir definieren Funktionsgrenzwerte bei Funktionen f von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$

3.2 Vereinbarung/Situation: Seien M,n $\in \mathbb{N}$, M $\subseteq \mathbb{R}^n$, f : D $\to \mathbb{R}^m$ und b $\in \mathbb{R}^m$. Als Norm benutzen wir die Maximumsnorm und schreiben deswegen $||\cdot||$ für $||\cdot||_\infty$. Weiter sei $a \in \mathbb{R}^n$ ein Häufungspunkt zu/von M, d.h $\forall \epsilon > 0 : \neq \{x \in M; ||x-a|| < \epsilon\} = \infty$ (vgl. An 10.2).
(Anmerkung $\{x \in M; ||x-a|| < \epsilon\} = U_a^\epsilon(M) \leftarrow$ ϵ-Umgebung um a, vgl. 3.14).
Dies bedeutet, dass a aus M heraus durch von a verschiedene Punkte x $\in M$ beliebig gut approximierbar ist, bzw. "man kommt mit Punkten aus M beliebig gut heran an a", und zwar aus "allen Richtungen" falls $\exists \epsilon > 0 : U_a^\epsilon(\mathbb{R}^n) \subseteq M$.
Wie in An 10.4 definieren wir dann den Funktionsgrenzwert:

3.3 Def.: In Situation 3.2 gilt: f(x) $\to$ b (für M$\ni$ x $\to$ a)
$: <=> \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \ \ \forall x \in M : ||x-a|| < \delta => ||f(x) - b|| < \epsilon$
Lesen "f(x) Konvergiert gegen b, wenn x (aus M heraus) gegen a geht/Konvergiert".
Wir nennen b $\in \mathbb{R}^m$ den Grenzwert (Kurz GW)von f(x) für $M \ni x \to a.$
Notation: f(x) $\xrightarrow{M \ni x \to a}$b oder $\lim_{n \ni x \to a} f(x) = b$ oder $\lim\limits_{x \to a | x \in M} f(x) = b.$

Umformulierung:$||f(x) - b|| \xrightarrow{M \ni x \to a} 0.$

3.4 Bem.: Falls M = D ist, hat die Bedingung "$x \in M$" Keine Weitere Bedeutung und kann weggelassen werden. Fehlt eine Bedingung, ist einfach m= D gemeint.

3.5 Funktionsgrenzwerte können Komponentenweise untersucht und gebildet werden:
Für $x \in D$ ist f(x) ein Element des $\mathbb{R}^m$, also Schreibbar in den Komponenten/Koordinaten
f(x)=$\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}$, den Komponentenfunktionen $f_1, ..., f_m : D \to \mathbb{R}$, nämlich $\forall i \in \{1, ..., m\} :$ $f_i := pr_i \circ f$.
Mit $b = (b_1, ..., b_m)^T \in \mathbb{R}^m$ gilt dann:
Beh.:

$$\begin{aligned} f(x) \xrightarrow{n \ni x \to a} b &\Leftrightarrow \forall i \in \{1, ..., m\} : f_i(x) \to b_i (n \ni x \to a) \\ &\Leftrightarrow \forall i : |f_i(x) - b_i| \to 0 (n \ni x \to a) \end{aligned} \tag{1}$$

Bew.: Für $z = (z_1, ..., z_m)^T \in \mathbb{R}^m, i \in \{1, ..., m\}$ gilt $|z_i - b_i| \leq ||z - b||_\infty \leq \sum_{i=1}^m |z_i - b_i|$.
□

3.6 Bem.: Mit 3.5 kann man sich also auf die kgz. der Komponentenfunktionen zurückziehen , falls das nützlich/schneller geht.

3.7 Bsp.: $D = \mathbb{R}^2 \backslash \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}, f(v) := \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, wenn $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in D$, also $f : D \to \mathbb{R}$.

Beh.: $f(v) \to 0$ (bei $D \ni v \to (0,0)^T =: 0$).
Bew.: $|f(v) - 0| = |f(v)| \leq \frac{||v||_2^2}{||v||_2} = ||v||_2 \to 0$.
Bei $\leq \frac{||v||_2^2}{||v||_2} \Leftarrow |xy| \leq$max$(x^2, y^2) = ||v||^2 \leq x^2 + y^2 = ||v||_2^2$.

$\square$

3.8Bsp.: