Vorlesung Analysis II

June 26, 2025

Teil 2: Topologische Grundbegriffe in metrischen Räumen

an14: Weierstraßscher Approximationssatz (WAS)

Stichworte: Supremumsnorm auf Kompakter Menge, WAS mit Polynome

Literatur: [Königsberger, Analysis 1], Kapitel 15/16.

14.1. Einleitung: Die Bedeutung der Kompaktheit als topologische Eigenschaft ist für die Mathematik nicht zu unterschätzen. In diesem Kapitel zeigen wir als Anwendung davon den Weierstraßschen Approximationssatz (für Polynome und trigonomische Polynome), und insb., dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

14.2. Motivation: Stetige Funktion lassen sich auf Kompakten Mengen beliebig genau durch Polynome approximieren. Dies besagt der WAS.

14.3. Vereinbarung: Sei $K \subseteq \mathbb{R}$ Kompakt, $f \in \phi(k, \mathbb{C}), \epsilon{>}0$.
Wie betrachten die gleichmäßige Konvergenz von f durch Funktionenfolgen auf K, zunächst mit Polynomen über $\mathbb{C}$, nähmlich in der Supremumsnorm auf K.

14.4. Def.: Für $f \in \phi(K, \mathbb{C})$ sei $|| \cdot ||_K : \phi(K, \mathbb{C}) \to \mathbb{R}_{\supseteq 0}$, $||f||_K{:=}\sup\{|f(x)|; x \in K\}$
die Supremumsnorm auf K.

14.5. Bem.: Weil K Kompakt, ex. $||f||_K$ immer und ist stets beschränkt (d.h. $\exists \mathbb{R}_{\supseteq 0}$), und weiter ist das Supremum ein Maximum, vgl. an 13.13/14. Das Maximum von $\{|f(x)|; x \in K\}$ ist eindeutig bestimmt, kann aber in verschiedenen Stellen $x \in K$ angenommen werden. Weiter ist $|| \cdot ||_K$ eine Norm.

14.6. Weierstraßscher Approximationssatz (WAS):
Vor.: $K \subseteq \mathbb{R}$ Kompakt, $f \in \phi(K, \mathbb{C})$, $\epsilon{>}0$.
Beh.: $\exists p \in \mathbb{C}[X] : ||f - p||_K{<}\epsilon$.

Einige Vorbereitungen zum Beweis, der in 14.11. geführt wird.

14.7. Def.: Sei $\overline{\mathcal{O} := \overline{\mathcal{P}(K)}}{:=}\{f : K \to \mathbb{R}; f \text{stetig}, \forall \epsilon{>}0 \exists p \in \mathbb{R}[X] : ||f - p||_K{<}\epsilon\}$
die Menge aller (reellen) stetigen Funktionen auf K, die sich auf K beliebig genau durch (reelle) Polynome approximieren lassen.

Zunächst analysieren wir $\overline{\mathcal{P}}$:

14.8. Hilfssatz: $\overline{\mathcal{P}}$ ist eine Unteralgebra von $\phi(K, \mathbb{R})$,

d.h. $\overline{\mathcal{P}}$ ist UVR und $f, g \in \overline{\mathcal{P}} \Rightarrow f \cdot g \in \overline{\mathcal{P}}$.
Bew.: $f, g \in \overline{\mathcal{P}}, \epsilon > 0 \Rightarrow \exists p, q \in \mathbb{R}[X] : ||f - p||_K < \epsilon$.
Dann:

$$
\begin{aligned}
||(f+g) - (p+q)||_K &\leq ||f-p||_K + ||g-q||_K \leq 2\epsilon && (1)\\
\text{und} ||f \cdot g - p \cdot q||_K &\leq ||f-p||_K \cdot ||q||_K + ||g-q||_K \cdot ||f||_K && (2)\\
&\leq \epsilon(||q||_K + ||f||_K) \leq \epsilon(\epsilon + \underbrace{||g||_K + ||f||_K}_{\text{beschränkt, s. 14.5.}}) \xrightarrow{\epsilon \to 0} 0. && (3)
\end{aligned}
$$

□

14.9. Hilfssatz: $f, g \in \overline{\mathcal{P}} \Rightarrow |f|, \max(f,g), \min(f,g) \in \overline{\mathcal{P}}$.
Bew.: Es ist $\max(f,g) = \frac{1}{2}(f + g + |f-g|)$,
$\min(f,g) = \frac{1}{2}(f + g - |f-g|)$,
also gen. z.z.: $\overline{\mathcal{P}} \ni |f|$, falls $f \in \overline{\mathcal{P}}$.
Dazu sei Œ$f \neq 0 \Rightarrow ||f||_K \neq 0$, betr. also $\phi := \frac{f}{||f||_K}$, z.z.:$|\phi| \in \overline{\mathcal{P}}$.
⌜Bem.: $|x| \leq 1 \Rightarrow \sqrt{x^2} = |x| = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (x^2 - 1)^n$, dies ist klar für $|x| < 1$, vgl. An 19.20.
Weiter Konvergiert die binomische Reihe gleichmäßig für $|x| \leq 1$, weil $| \binom{1/2}{n} | \leq C \cdot \frac{1}{n\sqrt{n}}$.⌝
Hier: $|\phi| \leq 1 \Rightarrow |\phi| = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (\phi^2 - 1)^n$.
Zu $\epsilon > 0$ ex. Partialsumme P_N davon mit $|||\phi| - P_N||_K < \epsilon$
$\Rightarrow P_N \in \overline{\mathcal{P}}$, d.h. $\exists p \in \mathbb{R}[X] : ||P_N - p||_K < \epsilon$
$\Rightarrow |||\phi| - p||_K < 2\epsilon$, d.h. $|\phi| \in \overline{\mathcal{P}}$.

□

14.10. Hilfssatz: $f \in \phi(K, \mathbb{R})$, gegebenes $x \in K, \epsilon > 0$.
Beh.: $\exists q \in \overline{\mathcal{P}}$: (a) $q(x) = f(x)$
(b) $q \leq f + \epsilon$ auf K.
Bew.: $\forall z \in K$ wähle affinlineares $l_z(y) = ay + b$, also $l_z \in \overline{\mathcal{P}}$,
mit $l_z(x) = f(x), l_z(z) = f(z)$.
l_z stetig $\Rightarrow \in$ offenes IV $I_Z \ni Z$ mit $l_Z \leq f + \epsilon$ auf I_Z.
Ferner: $K \subseteq \bigcup_{z \in K} I_Z$ ist überdeckung $\Rightarrow \in z_1, ..., z_n : K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} I_{z_j}$.
Sei q:=$\min\{l_{z_i}; j \in \{1, ..., n\}\}$. Dann gilt:
q erfüllt (a) und (b), denn jedes $z \in K$ liegt in einem I_{z_j}. Ferner $q \in \overline{\mathcal{P}}$ nach Hilfssatz 14.9.

14.11. Beweis des Weierstraßschen Approximatinssatzes:
1. Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, d.h. $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$ Kompakt.
$\forall x \in K$ wähle $q_x \in \overline{\mathcal{P}}$ nach Hilfssatz 14.10.