Vorlesung Analysis II

June 27, 2025

Teil 2: Topologische Grundbegriffe in metrischen Räumen

an14: Weierstraßscher Approximationssatz (WAS)

Stichworte: Supremumsnorm auf Kompakter Menge, WAS mit Polynome

Literatur: [Königsberger, Analysis 1], Kapitel 15/16.

14.1. Einleitung: Die Bedeutung der Kompaktheit als topologische Eigenschaft ist für die Mathematik nicht zu unterschätzen. In diesem Kapitel zeigen wir als Anwendung davon den Weierstraßschen Approximationssatz (für Polynome und trigonomische Polynome), und insb., dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

14.2. Motivation: Stetige Funktion lassen sich auf Kompakten Mengen beliebig genau durch Polynome approximieren. Dies besagt der WAS.

14.3. Vereinbarung: Sei $K \subseteq \mathbb{R}$ Kompakt, $f \in \phi(k, \mathbb{C}), \epsilon{>}0$.
Wie betrachten die gleichmäßige Konvergenz von f durch Funktionenfolgen auf K, zunächst mit Polynomen über $\mathbb{C}$, nähmlich in der Supremumsnorm auf K.

14.4. Def.: Für $f \in \phi(K, \mathbb{C})$ sei $|| \cdot ||_K : \phi(K, \mathbb{C}) \to \mathbb{R}_{\supseteq 0}$, $||f||_K$:=sup$\{|f(x)|; x \in K\}$
die Supremumsnorm auf K.

14.5. Bem.: Weil K Kompakt, ex. $||f||_K$ immer und ist stets beschränkt (d.h. $\exists \mathbb{R}_{\supseteq 0}$), und weiter ist das Supremum ein Maximum, vgl. an 13.13/14. Das Maximum von $\{|f(x)|; x \in K\}$ ist eindeutig bestimmt, kann aber in verschiedenen Stellen $x \in K$ angenommen werden. Weiter ist $|| \cdot ||_K$ eine Norm.

14.6. Weierstraßscher Approximationssatz (WAS):
Vor.: $K \subseteq \mathbb{R}$ Kompakt, $f \in \phi(K, \mathbb{C})$, $\epsilon{>}0$.
Beh.: $\exists p \in \mathbb{C}[X] : ||f - p||_K {<} \epsilon$.

Einige Vorbereitungen zum Beweis, der in 14.11. geführt wird.

14.7. Def.: Sei $\overline{\mathcal{O} := \mathcal{P}(K)}$:=$\{f : K \to \mathbb{R}; f\text{stetig}, \forall \epsilon{>}0 \exists p \in \mathbb{R}[X] : ||f - p||_K {<} \epsilon\}$
die Menge aller (reellen) stetigen Funktionen auf K, die sich auf K beliebig genau durch (reelle) Polynome approximieren lassen.

Zunächst analysieren wir $\overline{\mathcal{P}}$:

14.8. Hilfssatz: $\overline{\mathcal{P}}$ ist eine Unteralgebra von $\phi(K, \mathbb{R})$,

d.h. $\overline{\mathcal{P}}$ ist UVR und $f,g \in \overline{\mathcal{P}} \Rightarrow f \cdot g \in \overline{\mathcal{P}}$.
Bew.: $f,g \in \overline{\mathcal{P}}, \epsilon>0 \Rightarrow \exists p,q \in \mathbb{R}[X] : ||f-p||_K<\epsilon$.
Dann:

$$||(f+g)-(p+q)||_K \leq ||f-p||_K + ||g-q||_K \leq 2\epsilon \quad (1)$$
$$\text{und} ||f \cdot g - p \cdot q||_K \leq ||f-p||_K \cdot ||q||_K + ||g-q||_K \cdot ||f||_K \quad (2)$$
$$\leq \epsilon(||q||_K + ||f||_K) \leq \epsilon(\epsilon + \underbrace{||g||_K + ||f||_K}_{\text{beschränkt, s. 14.5.}}) \xrightarrow{\epsilon \to 0} 0. \quad (3)$$

□

14.9. Hilfssatz: $f,g \in \overline{\mathcal{P}} \Rightarrow |f|, \max(f,g), \min(f,g) \in \overline{\mathcal{P}}$.
Bew.: Es ist $\max(f,g) = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|)$,
$\min(f,g) = \frac{1}{2}(f+g-|f-g|)$,
also gen. z.z.: $\overline{\mathcal{P}} \ni |f|$, falls $f \in \overline{\mathcal{P}}$.
Dazu sei Œ$f \neq 0 \Rightarrow ||f||_K \neq 0$, betr. also $\phi := \frac{f}{||f||_K}$, z.z.:$|\phi| \in \overline{\mathcal{P}}$.
⌜Bem.: $|x| \leq 1 \Rightarrow \sqrt{x^2} = |x| = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (x^2-1)^n$, dies ist klar für $|x|<1$, vgl. An 19.20.
Weiter Konvergiert die binomische Reihe gleichmäßig für $|x| \leq 1$, weil $|\binom{1/2}{n}| \leq C \cdot \frac{1}{n\sqrt{n}}$.⌝
Hier: $|\phi| \leq 1 \Rightarrow |\phi| = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (\phi^2-1)^n$.
Zu $\epsilon>0$ ex. Partialsumme P_N davon mit $|||\phi| - P_N||_K<\epsilon$
$\Rightarrow P_N \in \overline{\mathcal{P}}$, d.h. $\exists p \in \mathbb{R}[X] : ||P_N - p||_K<\epsilon$
$\Rightarrow |||\phi| - p||_K<2\epsilon$, d.h. $|\phi| \in \overline{\mathcal{P}}$.

□

14.10. Hilfssatz: $f \in \phi(K,\mathbb{R})$, gegebenes $x \in K, \epsilon>0$.
Beh.: $\exists q \in \overline{\mathcal{P}}$: (a) $q(x) = f(x)$
(b) $q \leq f + \epsilon$ auf K.
Bew.: $\forall z \in K$ wähle affinlineares $l_z(y) = ay+b$, also $l_z \in \overline{\mathcal{P}}$,
mit $l_z(x) = f(x), l_z(z) = f(z)$.
l_z stetig $\Rightarrow \in$ offenes IV $I_Z \ni Z$ mit $l_Z \leq f + \epsilon$ auf I_Z.
Ferner: $K \subseteq \bigcup_{z \in K} I_Z$ ist überdeckung $\Rightarrow \in z_1, ..., z_n : K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} I_{z_j}$.
Sei q:=$\min\{l_{z_i}; j \in \{1,...,n\}\}$. Dann gilt:
q erfüllt (a) und (b), denn jedes $z \in K$ liegt in einem I_{z_j}. Ferner $q \in \overline{\mathcal{P}}$ nach Hilfssatz 14.9.

14.11. Beweis des Weierstraßschen Approximatinssatzes:
1. Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, d.h. $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$ Kompakt.
$\forall x \in K$ wähle $q_x \in \overline{\mathcal{P}}$ nach Hilfssatz 14.10.
q_x stetig $\Rightarrow \exists$ offenes IV $I_x \ni x, f - \epsilon \leq q_x$ auf I_x ⌜wg. 14.10a⌝
K Kompakt $\Rightarrow \exists x_1, ..., x_n$ mit $K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} I_{x_j}$.
Sei $g := \max_{j \in \{1,...,n\}} q_{x_j} \Rightarrow g \geq f - \epsilon$ auf ganz K.
$\xRightarrow{14.10(b)} g \leq f + \epsilon$, also $||f-g||_K \leq \epsilon$, d.h. $g \in \overline{\mathcal{P}}$ nach Hilfssatz 14.9.
$\Rightarrow \exists p \in \mathcal{P} : ||g-p||_k<\epsilon$
$\Rightarrow ||f-p||_K \leq ||f-g||_K + ||g-p||_k<2\epsilon$.
2. Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, d.h. $K \subseteq \mathbb{C}$ Kompakt.

Wähle $u, v \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ mit $||\mathcal{P}ef - u||_k + <\epsilon$ und $||\mathcal{Y}mf - v||_K ßtextlesse\epsilon$.
Sei p:=u+iv $\in \mathcal{P}(\mathbb{C})$, wo $i = \sqrt{-1}$.
$\Rightarrow ||f - p||_K \leq ||\mathcal{P}ef - u||_K + ||\mathcal{Y}mf - v||_K < 2\epsilon$.

□

14.12. Bem.: Der WAS 14.6. zeigt, dass Potenzreihen gleichmäßig Konvergieren auf Kompakten Mengen innerhalb des Konvergenzintervalls (Fall $\mathbb{R}$) bzw. Konvergenzkreises (Fall $\mathbb{C}$). Auf dem offenen Kgz. IV/Kreis liegt i.a. Keine Kgz. vor.

Der WAS für 2π-periodische Funktionen.
14.12. Def.: • f heißt 2π-periodisch:$\Leftrightarrow \forall x : f(x + 2\pi) = f(x)$.
• Ein trigonomisches Polynom vom $Grad \leq n$ ist ein Term vor der Form T(x):=$\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$, die $c_k \in \mathbb{C}$.

14.13. Diese bilden einen $\mathbb{C} - VR$ und haben eine cos-sin-Darstellung:
Löse Gleichungssystem für a_k, b_k mit $k \geq 1$:
$c_0 = \frac{a_0}{2}, c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k), c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k)$,
also $a_0 = 2c_0, a_k = c_k + c_{-k}, b_k = i(c_k - c_{-k})$, es folgt:
T(x)= $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$.

14.14. Beh.:• Die Koeffizienten c_k in T (und damit $a_n und b_k$) sind eindeutig.
• Konsequenz: T reellwertig $\Leftrightarrow \forall k \overline{c_k} = -c_k \Leftrightarrow \forall k : a_k, b_k \in \mathbb{R}$.

Bew.: • $c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} T(x)e^{-ikx}dx$, da: $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ilx}dx = \begin{cases} 1, l = k \\ 0, l \neq k \end{cases}$.

• T reellwertig $\Rightarrow \overline{c_k} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} T(x)e^{ikx}dx = c_{-k} \Rightarrow a_k = \mathcal{P}ec_k, b_k = \mathcal{Y}mc_k$.

□

14.15. WAS für 2π-periodische Funktionen:
Vor.: $f \in \phi(\mathbb{R}, \mathbb{C}), f 2\pi$-periodisch.
Beh.: $\forall \epsilon 0$ $\exists$ trigon. Pol. T: $||f - T||_{\text{sup}} < \epsilon$.
Bew.: Sei $\overline{\mathcal{T}}$:= $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$stetig, $2\pi -$ periodisch, appr'bar durch trigon. Pol.$\}$.
(a) $\overline{\mathcal{T}}$ ist Unteralgebra con $\phi(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
(b) $f, g \in \overline{\mathcal{T}} \Rightarrow |f|, \max(f, g), \min(f, g) \in \overline{\mathcal{T}}$
(c) f wie in WAS, $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists T \in \overline{\mathcal{T}}$: $\alpha T(x) = f(x)$, β T$\subseteq f + \epsilon$ auf $\mathbb{R}$
Hier: ersetzen l_z durch trgon. Pol. L_z mit $L_z(x) = f(x), L_z(z) = f(z)$.
Beweis dann analog wie in 14.11.

14.15. Bem.: Dieser Satz ist der Ausgangspunkt der Theorie der Fourierreihen, man kommt so zur Fourieranalysis, ein Teilgebiet der Analysis, wo trigonomische Approximationen untersucht werden. Die Fourieranalysis ist auch in physikalischen Anwendungen von Bedeutung.

Eine Mathematische Anwendung der Fourierreihentheorie:
14.16. Bsp.: Sei $f(x) = |x|$ für $-\pi \leq x \leq \pi$, setzee dies 2π-periodisch fort. Ans 14.13. erhalten wir die Fourierreihen $S_\infty f(x)$:= $\lim_{n\to\infty} T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$
Da f gerade, sind alle $b_k = 0, a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \cos(kx)dx, a_0 = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{2} = \pi$ ⌜14.13/14⌝
und für $k \geq 1$ ist

$\alpha_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \cos(kx)dx = (\frac{x}{k}\sin(kx)\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{k}\int_0^{\pi}\sin(kx)dx)$

$= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{k^2} \cos(kx)\Big|_0^\pi = \frac{2}{\pi k^2}(-1+(-1)^k) = \begin{cases} \frac{-4}{\pi k^2}, 2tk, \\ 0, 2/k \end{cases}$.

$\Rightarrow S_\infty f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^\infty \frac{cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}$, ist glm. Kgt. auf $\mathbb{R}$ und somit stetig. ⌜nach An18.9.(b)⌝
Nach dem Darstellungssatz 14.18 Kgt. $S_\infty f$ glm. gegen f.
für x=0 erhält man eine Gleichung für π,
nähmlich $\frac{pi^2}{8} = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Daraus folgt $\boxed{\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$
, denn $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} + \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(2n+1)^2}$
$\Rightarrow \frac{3}{4}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8} \Rightarrow \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3}\cdot\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}$.

14.17. Identitätssatz für Fourierreihen:
Vor.: $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f, g 2\pi$-periodisch und integrierbar auf $[0, 2\pi]$ stetig und mit gleichen Fourierkoeffizienten.
Beh.: f=g.

Bew.: $h := f - g$ hat laut Vor. die Fourierkoeff. 0, dann folgt $h \overset{!}{=} 0$,
denn: $T_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} \Rightarrow \int_0^{2\pi} hT_n(x)dx = \sum_{k=-n}^n c_k \underbrace{\int_0^{2\pi} be^{-ikx}dx}_{=0} = 0.$

Laut WAS 14.15. folgt $\exists (T_n) \Rightarrow h$.
$\Rightarrow \int_0^{2\pi} |h|^2 dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} hT_n dx = 0$. Da h stetig, ist $\overline{h}$ und $|h|^2$ stetig.
Wäre $h \neq 0$, folgte $\int_0^{2\pi} |h|^2 dx > 0 ↯$.

□

14.18. Darstellungssatz: Vor.: f wie in 14.17., S_∞ f kgt. glm. Beh.: $S_\infty f \Rightarrow f$.
Bew.: Sei g(x):= $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^n c_k l^{ikx} = s_\infty f(x)$. Nach An18.8.(b) ist g stetig.

Ferner ist der l-te Fourierkoeff. von g gleich $\frac{1}{2\pi} \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^n c_k \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{ikx}e^{-ilx}dx}_{7} = 2\pi\delta_{k,l} = c_k$,

dem k-ten Fourierkoeff. von f. mit 14.17 folgt f=g.

□