Vorlesung Analysis II

June 27, 2025

Teil 2: Topollogische Grundbegriffe in metrischen Räumen

an15: Zusammenhang in metrischen Räumen

Stichworte: zusammenhängend (zush)⇔ wegszush.⇔ polygonslzush.

Literatur: [Königsberger], Kapitel 1.5

15.1. Einleitung: Der Begriff "zusammenhängend" wird für metrische Räume definiert und mit "wegzusammenhängend" und "polygonalzusammenhängend" identifiziert, was über "Verbindungen" zwischen zwei Punkten erklärt wird.

15.2. Motivation: Es ist zunächst leichter definieren, was "nicht zusammenhängend" ist.

15.3. Vereinbarung: (R, δ) sei metrischer Raum, $M \subseteq R$, damit ist $(M, \delta_{rM\times M})$ metrischer Raum.

15.4. Def.: R heißt nicht zusammenhängend (kurz: zush.)
$:\Leftrightarrow \exists O_1, O_2 \subset R, O_2 \neq \emptyset \neq O_2 : R = O_1 \dot{\cup} O_2$
R heißt zush.:⇔ R ? nicht zush.
M heißt zush.:⇔ $(M, \delta_{rM\times M})$ zush.

15.5. Satz: Vor.: $R \xrightarrow{f} S$ stetig, R,S metrische Räume, R zush.
Beh.: f(R) zush. "Bilder zush. Mengen sind zush."
Bew.: Ann.: $f(R) = S_1 \cup S_2$ mit $S_1 \cap S_2 = \emptyset, S_1, S_2 \subset f(R)$,
d.h. $\exists O_1, O_2 \subset S$ mit $S_1 = O_1 \cap f(R), S_2 = O_2 \cap f(R)$, $O_1 \cap O_2 = \emptyset$.
Betr. $f^{-1}(S_1 \cup S_2)$=$f^{-1}(O_1 \cup O_2)$ =$f^{-1}(O_1) \cup f^{-1}(O_2)$ offen, =R.
Da R zush., folgt $f^{-1}(O_1) = \emptyset$ oder $f^{-1}(O_2) = \emptyset$, d.h. $S_1 = \emptyset v S_2 = \emptyset$,
so dass also f(R) zush. ist.

□