Vorlesung Analysis II

July 10, 2025

Teil 1: Differentialgleichung im $\mathbb{R}^n$

an4: Mehrdimensionales Ableiten

Stichworte: Richtungsableitung, partielle Ableitung, totale Ableitung, Klein-o

Literatur: [Hoff], Kapitel 9.4

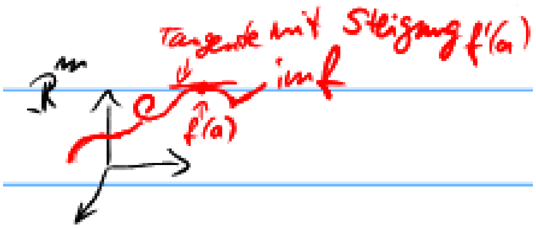
4.1. Einleitung: Wir führen den Differenzierbarkeitsbegriff für Funktionen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ein: über Richtungableitungen entlang der Koordinatenachsen gelangen wir zu partiellen Ableitungen. Wir definieren die totale Ableitung und sehen, wie diese mit den partiellen Ableitungen der Komponentenfunktionen berechnet werden kann. Die "Linearsierung" von f ergibt also die Matrix $Df(a) \in \mathbb{R}^{mxn}$ so, dass $f(x) \approx f(a) + Df(a) \cdot (x - a)$ in gute Näherung ist.

4.2 Konvention: Betrachte Funktionen $f : U \to \mathbb{R}^m$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^n$.
Sei $a \in U$ ein innerer Punkt von U, d.h. $\exists S > 0 : U_a^s \subseteq U$.
Man könnte D füt die Definitionsmenge von f schreiben, tun dies aber wegen Verwechslungsgefahr mit den anderen D's in diesen Kapitel nicht.

4.3. Hatten: im Fall n=m=1 ist $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ die Ableitung. $(\mathbb{R} \supseteq U \ni x \to a)$

4.4. Falls $n > 1$, ist x-a ein Vektor und der Differentialquotient nicht bildbar.

4.5. Falls n=1, $m \geq 1$, ist $\frac{1}{x-a} \cdot (f(x) - f(a))$ der (m-dimensionale) Differenzenquotient $\in \mathbb{R}^m$, und Df(a):=$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ die Ableitung. $(\mathbb{R} \supseteq U \ni x \to a)$



Sind $f_1, ..., f_m$ die Komponentenfunktionen von f, d.h. $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$ für alle x $\in U \subseteq \mathbb{R}$, also die $f_i : U \to \mathbb{R}, f_i := pr_i \circ f$, so ist

$$\frac{1}{x-a}\cdot(f(x)-f(a)) = \frac{1}{x-a}\cdot\begin{pmatrix} f_1(x)-f_1(a) \\ \vdots \\ f_m(x)-f_m(a)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f_1(x)-f_1(a))/(x-a) \\ \vdots \\ (f_m(x)-f_m(a))/(x-a)\end{pmatrix} \xrightarrow{x\to a} \begin{pmatrix} f_1'(a) \\ \vdots \\ f_m'(a)\end{pmatrix}, \quad (1)$$

falls alle Komponentenfunktionen f_i diffbar in a sind.

Wir erhalten $Df(a) = \begin{pmatrix} f_1'(a) \\ \vdots \\ f_m'(a)\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ in diesem Fall und schreiben auch f'(a) für Df(a).

4.6 **Bsp.:** Betrachten $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, f(x) := \begin{pmatrix} x \\ x^2\end{pmatrix}$. also :$f_1(x) = x, f_2(x) = x^2, f_1'(x) = 1, f_2(x) = 2x$, wir erhalten f'(a)=$\begin{pmatrix} f_1'(a) \\ f_2'(a)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2a\end{pmatrix}$ für $a \in \mathbb{R}$.

4.7 **Fall n >1:** Mit $a \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ und der Konvention, dass a ein innerer Punkt von U ist, können wir und mit $x \in U$ aus verschiedenen Richtungen an a annähern, Ist etwa $v \in \mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ ein Vektor, der uns die "Richtung" der Ableitung angeben soll, so wollen wir f "in diese Richtung" ableiten, d.h. die Funktion f_v:$\begin{cases}]-s,s[\to \mathbb{R}^m \\ t \rightarrowtail f(a+tv)\end{cases}$
in ($t_0 =$)0 ableiten, und haben die Fragestellung auf 4.5 zurückgeführt. Dabei ist s>0 geeignet so, dass $U_a^{s||v||} \subseteq U$ ist (damit auch a$\pm sv \in U$ ist). Hier ist es üblich, den Richtungsvektor auf 1 zu normieren, d.h. $||v|| = 1$ vorauszusetzen, damit wir in der Bedingung an s einfach $U_a^s \subseteq U$ schreiben können.

4.8 **Def.:** Das Ergebnis $D_vf(a)$:=$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\cdot(f(a+tv)-f(a)) \in \mathbb{R}^m$, d.h. $D_vf(a) := f_v'(0)$, heißt Richtungsableitung von f in a in Richtung v.
Diese beschreibt also das Wachstum von f entlang der Geraden $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$
g(t):=a+tv (in Parameterform mit $t \in \mathbb{R}$ als Parameter).

4.9 **Bsp.:**$\bullet f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix} \rightarrowtail \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ 2x^2\end{pmatrix}$ soll in $a = \begin{pmatrix} -3 \\ 4\end{pmatrix}$ abgeleitet werden, und zwar entlang $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1\end{pmatrix}$ (es sei $||\cdot|| = ||\cdot||_\infty$).

dazu bilden wir $f_v : t \rightarrowtail f(a+tv) = f\begin{pmatrix} -3+t \\ 4+t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2t \\ -7 \\ 2(-3+t)^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{v,1}(t) \\ f_{v,2}(t) \\ f_{v,3}(t)\end{pmatrix}, \begin{cases} f_{v,1}(t) = 2 \\ f_{v,2}(t) = 0 \\ f_{v,3}(t) = 4(-3+t)\end{cases}$

deren Ableitung ist

$$D_{\begin{pmatrix} 1 \\ 1\end{pmatrix}} f\begin{pmatrix} -3 \\ 4\end{pmatrix}'(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4\cdot(-3+0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -7\end{pmatrix}.$$

• Dasselbe f soll entlang der Koordinatenachsen $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0\end{pmatrix} =: e_1$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1\end{pmatrix} =: e_2$ in $a = \begin{pmatrix} -3 \\ 4\end{pmatrix}$ abgeleitet werden. haben $f_{e_1} : t \rightarrowtail f(a+te_1) = f\begin{pmatrix} -3+t\cdot 1 \\ 4+t\cdot 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t \\ -7+t \\ 2(-3+t)^2\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} f_{e_1,1}(t) = 1 \\ f_{e_2,2}(t) = 1 \\ f_{e_3,3}(t) = 4(-3+t)\end{cases}$

mit Abl. $\underline{\underline{D_{e_1} f \begin{cases} -3 \\ 4 \end{cases}}} = f'_{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -12 \end{pmatrix}$,

und mit $f_{e_2} : t \rightarrowtail f(a + te_2) = f\begin{pmatrix} -3t \cdot 0 \\ 4 + t \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t \\ -7-t \\ 18 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} f_{e_2,1}(t) = 1 \\ f_{e_2,2}(t) = 1 \\ f_{e_2,3}(t) = 4(-3+t) \end{cases}$

SCHAU NACH WAS HIER RICHTIG IST E 2 ODER E 1-3!!!!!!!!!!

mit Ableitung $\underline{\underline{D_{e_1} f \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}}} = f'_{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4.10 **<u>Def.:</u>** Für $j \in \{1, ..., n\}$ heißt die Richtungsableitung $\underline{D_j f(a) = \frac{\delta f}{\delta x_j}} := \underline{D_{e_j} f(a)} \in \mathbb{R}^m$ von f in a in Richtung des j-ten Kanonischen Einheitsvektors $e_j = (0, ..., 0, 1(\text{setlle j}), 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n$ (d.h. in richtung der j-ten Koordinatenachse)
dir <u>j-te partielle ableitung von f in a</u>.

4.11 **<u>Bem.:</u>** • Für m=1 erhält man dies Ableitung $\in \mathbb{R}$ durch Ableiten nach der j-ten Variable, denn

$$D_{e_j} f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(a + te_j) - f(a)) \tag{2}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \cdot (f(..., a_{j-1}, a_j + t \cdot 1, a_{j+1}, ...) - f(..., a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, ...)), \tag{3}$$

4.12 **<u>Bsp.:</u>** $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2x + y^3 - z^2$. Sei $j \in \{1, 2, 3\}, a = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}$.

Dann ist

$$D_{e_2} f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f \begin{pmatrix} u \\ v + t \cdot 1 \\ w \end{pmatrix} - f \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}). \tag{4}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \cdot (2u + (v + t)^3 - w^2 - (2u + v^3 - w^2)) \tag{5}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \cdot (t^3 + 3vt^2 + 3v^2 t) = \underline{3v^2} \frac{\delta f}{\delta y}(\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}), \tag{6}$$

entsprechend $D_{e_1} f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \underline{2}$, $D_{e_2} f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{\delta f}{\delta z}(\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}) = \underline{-2\text{w}}$.

4.13. **<u>Bem.:</u>** Ist $f : U \to \mathbb{R}^m$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^n$, so erhält man die j-te partille Ableitung $\frac{\delta f}{\delta x_j}$ durch Bilden der j-ten partiellen Ableitung der Komponentenfunktion $f_1, ..., f_m$, nähmlich: ist $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$ mit $f_i : U \to \mathbb{R}, f_i = pr_i \circ f$,

so ist $D_{e_j} f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \cdot (\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}(a + te_j) - \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}(a)) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \cdot \begin{pmatrix} f_1(a + t \cdot e_j) - f_1(a) \\ \vdots \\ f_m(a + t \cdot e_j) - f_m(a) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} D_{e_j} f_1(a) \\ D_{e_j} f_2(a) \\ \vdots \\ D_{e_j} f_m(a) \end{pmatrix}$, bzw. $\frac{\delta f}{\delta x_j} = \begin{pmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta x_j} \\ \vdots \\ \frac{\delta f_m}{\delta x_j} \end{pmatrix}$, jede Komponente f_j wird nach der j-ten Variablen abgeleitet!

4.14. Bsp.: nochmal 4.9., d.h. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrowtail \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \\ 2x^2 \end{pmatrix}$.

Es sollen die partiellen Ableitung berechnet werden. Laut 4.13. ist (einfacher als in 4.9.): $D_1 f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\delta f}{\delta x} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4x \end{pmatrix}, D_2 f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\delta f}{\delta y} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

also $D_1 f \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix}, D_2 f \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4.15. Beobachtung: Kennt man alle partillen Ableitung, ist auf Anhieb nicht klar, ib die Funktion f "mehrdimensional§ differenzierbar ist, denn f kann partiell diffbar in Richtung aller $e_1, ..., e_n$ in a sein, aber so, dass f noch nicht einmal stetig in a ist:

4.16. Bsp.: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{, falls } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ 0 & \text{, falls } x = y = 0, a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{cases}$

Die beiden partiellen Ableitungen sind $D_1 f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{1}{t} (f \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} - \underbrace{f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=0}) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{1}{t} \cdot 0 = 0$ und $D_2 f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$

$\lim\limits_{t \to 0} \frac{1}{t} (f \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} - \underbrace{f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=0}) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{1}{t} \cdot 0 = 0$,

aber $\lim\limits_{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}} f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ existiert nicht,

weil $f \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{x \to 0} 0$, aber $f \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \xrightarrow{x \to 0} \frac{1}{2} \neq 0$. Hier ist y=x gewählt, bzw die Richtung $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$!
an verschiedenen Richtungen können verschiedene Funktionsgrenzwerte herauskommen, d.h. f ist unstetig in $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, s. auch Bsp. 3.22.

4.17. Motivation: Das richtige Konzept zum mehrdimensionalen Ableiten ist die totale Ableitung und ist die verallgemeinerung von An 11.4.3,
Erinnerung:
$f : U \to \mathbb{R}$ diff'bar in $a \in U \subseteq \mathbb{R}, U$ ein offenes Intervall
$\Leftrightarrow \exists A \in \mathbb{R} \exists r : U \to \mathbb{R}$ stetig, $r(a) = 0 : f(x) = f(a) + A \cdot (x - a) + r(x) \cdot (x - a)$,
mit der Interpretation: $f(x) - f(a) - A(x - a) = r(x) \cdot (x - a)$
geht schneller gegen 0 als $|x - a|$.
Auch der Satz von Taylor An 19.3 macht diese Aussage; nur wird dort "$r(x) \cdot (x - a)$" noch näher spezifiziert, was die Aussage der Diff'barkeit verfeinert.

Für eine Funktion, die "schneller gegen 0 geht als $|x-a|$", wird eine mehrdimensionale Definition wie folgt gegeben:
4.18. Def.: Für $\varphi : U \to \mathbb{R}^m, x \in U$ mit $\exists \epsilon{>}0 : U_a^\epsilon \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^n$ sei
$\varphi = \sigma(||x-a||) :\Leftrightarrow \frac{1}{||x-a||}\varphi(x) \xrightarrow{x \to a} 0$.
Sprich: $\varphi(x)$ ist "klein o" von $||x-a||$.
Diese Klein-o-Aussage ist eine Eigenschaft von φ.
Wenn das Symbol $o(||x-a||)$ in einer Formel vorkommt, steht dieses dort stellvertretend für eine Funktion, die diese "Klein-o"-Eigenschaft hat.

Somit geben wir die allgemeinste Def. für mehrdimensionale Diff'barkeit (für $\mathbb{R}^n \supseteq U \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$):
4.19. Def.: Geg. sei $f : U \to \mathbb{R}^m$ mit $\exists \epsilon{>}0 : U_a^\epsilon \subseteq U$.
• Dann heißt f in a diff'bar: $\Leftrightarrow \exists A \in \mathbb{R}^{mxn}$:
$f(x) = f(a) + A \cdot (x-a) + o(||x-a||)$ auf U.
• Ist f in a diff'bar, dann heißt $f'(a) = Df(a) := A \in \mathbb{R}^{mxn}$
die erste Ableitung bzw. totale Ableitung von f in a.

4.20. Bem.: Dabei ist A eindimensional bestimmt (laut Bem. 4.26 unten).

Beispiele: Hier sei stets $a \in U, \exists \epsilon{>}0 : U_a^\epsilon \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^n$.
4.21. Bsp.: f sei die Konstante Abb. $f : U \to \mathbb{R}^m, x \rightarrowtail c$ mit $c \in \mathbb{R}^m$ fest.
Dann ist f in $a \in U$ diff'bar und $f'(a) = \mathcal{O} \in \mathbb{R}^{mxn}$ (die m x n-Nullmatrix!).
Bew.: $f(x) = c = c + o \cdot (x-a) + o \leftarrow \in \mathbb{R}^m$ Nullvektor.

□

4.22. Bsp.: $f \in Hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, d.h. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear und $f(x) = Mx$ für $M \in \mathbb{R}^{mxn}$.
Dann ist f in $a \in \mathbb{R}^n$ diff'bar und f'(a)=M $\in \mathbb{R}^{mxn}$.
Bew.: $f(x) = Mx = M(x-a+a) = \underbrace{Ma}_{f(a)} + M(x-a) + o$.

□

Spezielles Bsp.: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, M := (1,1) \in \mathbb{R}^{1x2}$, f(x)=Mx=(1,1)$\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} = \xi_1 + \xi_2$
ist diff'bar in $a \in \mathbb{R}^2$ und $f'(a) = (1,1) \in \mathbb{R}^{1x2}$.

4.23. Bsp.: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} = \xi_1\xi_2$, ist diff'bar in jedem $a = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$,
und $f'\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix} = (\alpha_2, \alpha_1) \in \mathbb{R}^{1x2}$.
Bew.:

$$\begin{aligned} f(x) = \xi_1\xi_2 &= (\alpha_1 + (\xi_1 - \alpha_1))(\alpha_2 + (\xi_2 - \alpha_2)) && (7)\\ &= \alpha_1\alpha_2 + (\alpha_2, \alpha_1) \cdot \begin{pmatrix}\xi_1 - \alpha_1\\ \xi_2 - \alpha_2\end{pmatrix} + (\xi_1 - \alpha_1) \cdot (\xi_2 - \alpha_2) && (8)\\ &= f(a) + (\alpha_2, \alpha_1) \cdot (x-a) + (\xi_1 - \alpha_1) \cdot (\xi_2 - \alpha_2) && (9) \end{aligned}$$

mit $||(\xi_1 - \alpha_1) \cdot (\xi_2 - \alpha_2)|| \leq || \begin{pmatrix}\xi_1 - \alpha_1\\ \xi_2 - \alpha_2\end{pmatrix} ||_\infty^2 = o(||x-a||)$,
denn $\frac{1}{||x-a||} \cdot ||x-a||^2 = ||x-a|| \xrightarrow{x \to a} 0$.

$\square$

4.24 Bsp.: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = <x, x>$ ist diff'bar in jedem $a \in \mathbb{R}^n$,
under $f'(a) = <2a, \cdot> = 2a^T \in \mathbb{R}^{1xn}$.
Bew.:

$$\begin{aligned} f(x) &= <x, x> = <a + (x-a), a + (x-a)> & (10)\\ &= <a, a> + 2<a, x-a> + <x-a, x-a> & (11)\\ &= f(a) + 2a^T \cdot (x-a) + \underbrace{||x-a||_2^2}_{=o(||x-a||).} & (12) \end{aligned}$$

$\square$

Erste Eigenschaft des eindimensionalen Differenzierens übertragen sich:
4.25. Bem.: f in a diff'bar $\Rightarrow$ f in a stetig.
Bew.:

$$||f(x) - f(a)||_\infty \leq \underbrace{||A(x-a)||_\infty}_{\leq n \max_{i,j} |\alpha_{ij}| \cdot ||x-a||_\infty \xrightarrow{x \to 0} 0} + \underbrace{||o(||x-a||)||_\infty}_{\xrightarrow[x \to a]{} 0} \xrightarrow{x \to a} 0. \quad (13)$$

$\square$

4.26. Bem.: f in a diffbar $\Leftrightarrow \forall i \in \{1, ..., m\}$:$f_i = pr_j \circ f$:$D \to \mathbb{R}$ diff'bar in a und dabei gilt:
$f'(a) = \begin{pmatrix} f_1'(a) \\ \vdots \\ f_m'(a) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{mxn}$,
worinjede Ableitung $f_i'(a) \in \mathbb{R}^{1xn}$ ein Zeilenvektor ist. (Somit ist die Matrix f'(a) eindeutig bestimmt).
Bew.:"$\Rightarrow$": $\forall i \in \{1, ..., m\}$ ::
$pr_i \circ f(x) == pr_i(f(x)) = pr_i(f(a)) + pr_i(f'(a)(x-a)) + pr_i(o(||x-a||))$
d.h. $f_i(x) = f_i(a) + f_i'(a) \cdot (x-a) + o(||x-a||)$.
"$\Leftarrow$": $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(a) + f_1'(a)(x-a) + o(||x-a||) \\ \vdots \\ f_m(a) + f_m'(a)(x-a) + o(||x-a||) \end{pmatrix} = f(a) + \begin{pmatrix} f_1'(a) \\ \vdots \\ f_m'(a) \end{pmatrix} \cdot (x-a) + o(||x-a||)$.

$\square$