**Teil 1: Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$**

**an5: Partielle und totale Ableitungen**

**Stichworte: Funktionalmatrix, Gradient, Kettenregel, Richtungsableitungen**

**Literatur:**[Hoff], Kapitel 9.4

**5.1. Einleitung:** Die totale Ableitung liefert einen einfachen Weg, Richtungsableitungen zu berechnen. Wirdefinieren für m=1 den Gradienten und beweisen die allgemeine Kettenregel.

**5.2. Konvention:** Betrachten Funktionen $f : U \to \mathbb{R}^m$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^n$.
Sei $a \in U$ ein innerer Punkt von U, d.h. $\exists s{>}0 : U_a^s \subseteq U$.
Wir bezeichnen die Menge aller Richtungsvektoren $v \in \mathbb{R}^n$ mit $S^{n-1}$:=$\{v \in \mathbb{R}^n; ||v||_2 = 1\}$, die (n-1)-dimensionale Sphäre im $\mathbb{R}^n$.
• Für einen inneren Punkt $a \in U$ und ein $v \in S^{n-1}$ haben wir in an4.8
$D_v f(a) := \lim\limits_{0 \neq t \to 0} \frac{1}{t}(f(a+tv) - t(a))$
als Richtungsableitung von f in a in Richtung v definiert.
(Diese Def. benutzt, dass $a + tv \in U$ ist aööe $t \in \mathbb{R}$ mit hinreichend kleinen $|t|$)
•Speziell: Ist $v = e_i$ der i-te Einheitsvektor, so ist
$D_i f(a) = \frac{\delta f}{\delta \xi_i}(a) = f_{\xi_i}(a) := (D_{e_i} f)(a)$ die i-te partielle Ableitung.

**5.3. Satz:** Vor.: f in a diff'bar (d.h. total diff'bar), $v \in S^{n-1}$.
Beh.: f ist in Richtung v in a diff'bar und $(D_v f)$(a)=$\underbrace{(Df)(a)}_{\in \mathbb{R}^{mxn}} \cdot \underbrace{v}_{\in \mathbb{R}^n} = \underbrace{f'(a)(v)}_{\text{mit} f'(a) \in Hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \text{ausgedrückt, dh als lineare Abb.}}$

Bew.:$\frac{1}{t}(f(a{+}tv){-}f(a)) = \frac{1}{t}(f'(a)(tv){+}o(||tv||_2) = \underline{Bew.:}\frac{1}{t}(f(a{+}tv){-}f(a)) = \frac{1}{t}(f'(a)(tv){+}o(||tv||_2)) =$
$f'(a)(v) + \underbrace{\underbrace{\frac{|t| \cdot ||v||_2}{t}}_{\text{beschränkt}} \cdot \underbrace{\frac{o(||tv||_2)}{||tv||_2}}_{\xrightarrow{t \to 0} 0}}_{\xrightarrow{t \to 0} 0}.$

□