Teil 3: Gewöhnliche Differentialgleichungen

an16: Differentialgleichungen ind Richtungsfelder

Stichworte: DGL, gewöhnliche DGL, Lösungsfunktion, Fragestellungen, Richtungsfelder

Literatur:[Hoffmann], Kapitel 7.1

16.1. Einleitung: Wir geben die Definition einer Differentialgleichung als Funktionalglg. zwischen gesuchten Fkt. y=y(x), der VAriablen x und Ableitungen con y.

16.2. Motivation: Gleichungen mit einer Funktion y und ihrer Ableitungen y',y",... nennt man Differentialgleichungen, Wir möchten solche nach y "auflösen", also Methoden zum Auffinden der Lösungsfunktion für y erarbeiten. Darin soll y in nur einer rellen Variablen x erklärt sein. Wir schreiben kurz GDL für "differentialgleichung".

16.3. Def.: Sei $k \in \mathbb{N}, \emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{C}^{k+1}, F : D \to \mathbb{C}$.
Dann heißt eine Glg. der Form
(*) $F(x, y, y', y'', ..., y^{(k)}) = 0$
eine gewöhnliche Differentialgleichung. (Identifiziere $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$)
16.4. Gesucht: ein $IV j \subseteq \mathbb{R}, y : j \to \mathbb{C}$ k-mal diff'bar
mit: $\forall x \in j : (x, y(x), y'(x), ..., y^{(k)}(x)) \in D$
und $\forall x \in f :$ (*)

16.5. Bez.: (1) y heißt dann eine Lösung von (*) (in j), Kurz: Lsg..
man sagt, y "erfüllt die" DGL oder "genügt der" DGL.
(2) Kann (*) speziell ind der Form $y^k = \phi(x, y, y', ..., y^{k-1})$ geschrieben werden, dann heißt die DGL explizit,
und k heißt die Ordnung der DGL.

16.6. Bsp.: y'=10y ist explizit von 1. Ordnung, eine Lsg$\neq$ 0 ist $y(x) = 163e^{10x}$.

16.7. Fragen:
1. Existiert eine Lsg.? Existiert eine "lokale" Lsg.?
2. Falls ja: Wie gewinnt man eine Lsg.?
3. Falls ja: Eindeutigkeit?(mehrere Lösungen)
4. Maximale Lsg? (bzgl. Fortsetzung der Def. menge j)
5. Abhängigkeit der Lsgn. von Parametern?
6. Charakterisierung der Lsgn.?

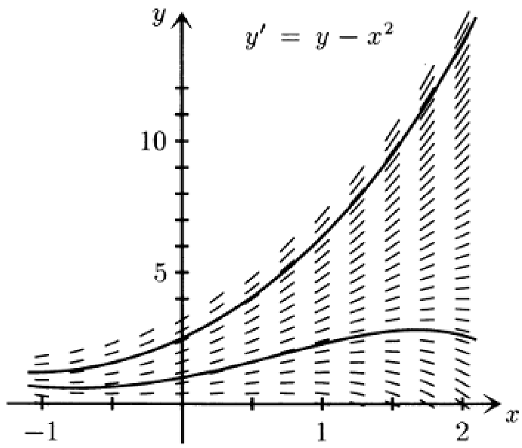
Zu 1./2.: Bsp unlösbare DGL: $(y')^2 + 1 = 0$
Bsp. lösbare DGL: $y' = \phi(x) \Rightarrow y(x) = \int^x \phi(x)dx$ Stammfkt. von ϕ, nicht immer leicht!
Zu 3.: Eindeutigkeit ist i.a. sinnvoll bei Vorgabe von Anfangswerten, man spricht von Anfangswerteaufgaben (AWA),
Auch: von Anfangswertproblemen (AWP).
•y'=10y kann unter Vorgabe von y(0)=163 eindeutig gelöst werden, diese ist dann $y(x) = 163e^{10x}$.
• Bsp.: $y' = \sqrt{y}(y \geq 0)$ hat unter Vorgabe von y(0)=0(lokal)unendlich viele Lsgn., vgl. Bsp. 17.10.

Man zeigt weitreichende Existenz- und Eindeutigkeitssätze, etwa den Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf (davon gibt es eine globale und eine lokale Version).

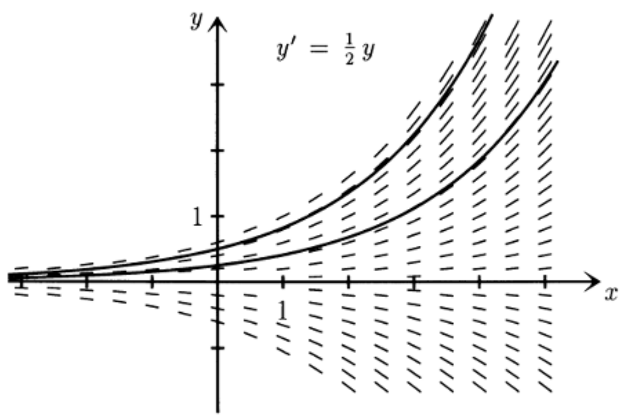
Zu 4.: Die Aufgabenstellung fragt nicht nach "Größe" von j. Interessant sind Lösungen auf möglichst große Intervall j.
Bsp.: $y' = y^2, y(0)c>0$, hier kann die Existenz nur "lokal" gesucht werden, vgl. Bsp. 17.12.
Zu 5.: Die Abhängigkeit der Lösungen von Eingabedaten ist relevant.
Zu 6.: Man sucht nach strukturellen Eigenschaften der Lösungsmenge.
Veranschaulichungen durch Richtungsfelder (für explizite DGL 1. Ordnung):

Vereinbarung: Betr. die DGL (*) $\boxed{y'\phi(x,y)}$.
Interpretation: ϕ ordner jedem Punkt $(x,y) \in D$, wo $\phi : D \to \mathbb{R}$, eine Steigung/Richtung zu.
Graphisch: Zeichne in (x,y) ein kleines Geradenstück dieser Richtung ein ("Linienelemente")
Das Ergebnis im Koordinatensystem ist ein Richungsfeld.
$\to$ Kurven, die in jedem (x,y) das dortige (vorgegebene) Linienelement als Tangent haben, entsprechen Lösungen der DGL.

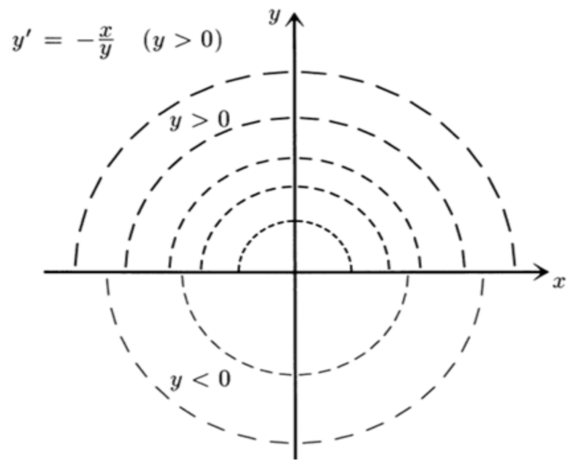
Bsp.: $y' = y - x^2$, Bild s. [Hoffmann, S. 236 in §7.1]



Bsp.: $y' = \frac{1}{2}y$ (die r.S. ϕ hängt nur von y ab)



Bsp: $y' = -\frac{x}{y}, y(a) = b>0$, hat als Lösung Halbkreise $y(x) = \sqrt{r^2 - k^2}, -r<x<r$, wo $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.



Bsp.: $y' = \frac{x}{y}, x>0, y(a) = b$, wo $a>0$, hat als Lösung Halbgeraden $y(x) = \frac{b}{a}x, x>0$.