Vorlesung Analysis II

July 1, 2025

Teil 2: Topollogische Grundbegriffe in metrischen Räumen

an15: Zusammenhang in metrischen Räumen

Stichworte: zusammenhängend (zush)$\Leftrightarrow$ wegszush.$\Leftrightarrow$ polygonslzush.

Literatur: [Königsberger], Kapitel 1.5

15.1. Einleitung: Der Begriff "zusammenhängend" wird für metrische Räume definiert und mit "wegzusammenhängend" und "polygonalzusammenhängend" identifiziert, was über "Verbindungen" zwischen zwei Punkten erklärt wird.

15.2. Motivation: Es ist zunächst leichter definieren, was "nicht zusammenhängend" ist.

15.3. Vereinbarung: (R, δ) sei metrischer Raum, $M \subseteq R$, damit ist $(M, \delta_{r M\times M})$ metrischer Raum.

15.4. Def.: R heißt nicht zusammenhängend (kurz: zush.)
$:\Leftrightarrow \exists O_1, O_2 \subset R, O_2 \neq \emptyset \neq O_2 : R = O_1 \dot{\cup} O_2$
R heißt zush.$:\Leftrightarrow$ R ? nicht zush.
M heißt zush.$:\Leftrightarrow (M, \delta_{r M\times M})$ zush.

15.5. Satz: Vor.: $R \xrightarrow{f} S$ stetig, R,S metrische Räume, R zush.
Beh.: f(R) zush. "Bilder zush. Mengen sind zush."
Bew.: Ann.: $f(R) = S_1 \cup S_2$ mit $S_1 \cap S_2 = \emptyset, S_1, S_2 \subset f(R)$,
d.h. $\exists O_1, O_2 \subset S$ mit $S_1 = O_1 \cap f(R), S_2 = O_2 \cap f(R)$, $O_1 \cap O_2 = \emptyset$.
Betr. $f^{-1}(S_1 \cup S_2)$=$f^{-1}(O_1 \cup O_2)$ =$f^{-1}(O_1) \cup f^{-1}(O_2)$ offen, =R.
Da R zush., folgt $f^{-1}(O_1) = \emptyset$ oder $f^{-1}(O_2) = \emptyset$, d.h. $S_1 = \emptyset v S_2 = \emptyset$,
so dass also f(R) zush. ist.

$\square$

15.6. Hilfssatz(*): R zush. $\Leftrightarrow$ Jede stetige Abb. $f : R \to \mathbb{Z}$ ist Konstant.
Bew.: "$\Rightarrow$": Nach 15.5. ist f(R) zush. Teilmenge von $\mathbb{Z}$.
Da jede Teilmenge von $\mathbb{Z}$ offen ist, sind Teilmengen von $\mathbb{Z}$ mit $\geq$ 2 El. nicht zush.
$\Rightarrow \in a \in \mathbb{Z} : f(R) = \{a\}$, d.h. f ist Konstant.
"$\Leftarrow$": Sei jede stetige Abb. $R \to \mathbb{Z}$ Konstant.
z.z: $\forall X \in \mathcal{O}(R), \emptyset \neq X \neq R : R\backslash X \notin \mathcal{O}(R)$.
Dazu sei X so, betr. $f_X : R \to \mathbb{Z}, f_X(x) := \begin{cases} 1, x \in X \\ 0, x \in R\backslash X \end{cases}$, also ist f_X unstetig, da nicht Konstant.

Daher ex. $U \in \mathcal{O}(\mathbb{Z}) : f_X^{-1}(U) =: A$ nicht offen, z.z.: $R \setminus X \overset{!}{=} A$ nicht offen.
Sei dazu Œ$U = \{0,1\}$. (1) Haben $U \neq \emptyset$, sonst $A = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ offen $\lightning$.
(2) Haben $U \neq \{0,1\}$, sonst $A = f^{-1}(\{0,1\}) = R$ offen $\lightning$.
(3) Haben $U \neq \{1\}$, sonst $A = f^{-1}(\{1\}) = X$ offen $\lightning$.
(4) Also notwendig $U = \{0\}$, dann ist $R \setminus X = f^{-1}(\{0\}) = A$ nicht offen.

□

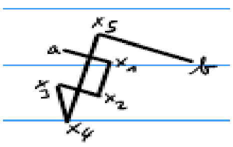
Betr. ab jetzt den Spezialfall $R = \mathbb{R}^n$, und eine Metrik S(von Norm induziert):
15.7. Def.: $M \subset \mathbb{R}^n$, M zush. $\Leftrightarrow$: Gebiet,
d.h. wir nennen eine offene zusammenhängende Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ein Gebiet.

15.8. Def.: M wegzush.: $\Leftrightarrow \forall a, b \in M \exists \phi : [u, v] \to M$ stetig mit $\phi(m) = a, \phi(v) = l$, wo $[u, v] \subseteq \mathbb{R}$, z.b. $u = 0, v = 1$. $\circ\phi$ heißt Weg von a nach b.⌝

15.9. Bsp.: Eine Strecke $\overline{ab} \subseteq \mathbb{R}^n$ ist $\overline{ab} = \{\phi(t); t \in [0,1]\}$ mit der stetigen Fkt. $\phi(t) := a + t(b - a)$, wo $\phi(0) = a, \phi(1) = b$.
Damit ist z.B. $\mathbb{R}^n$ wegzush.

15.10. Bem.: • Jede Konvexe Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist wegzush. (vgl. Def. in an 6.3.)
• Insb. ist jede Kugel $B_q^\epsilon \subseteq \mathbb{R}^n$ wegzush., da Konvex.

15.11. Def.: M polygonzush.:$\Leftrightarrow \forall a, b \in M : \exists a = x_0, x_1, ..., x_m = b \in M$:
$\forall J \in \{0, ..., m\} : \overline{x_j x_{j+1}} \subseteq M$,
$\Leftrightarrow \forall a, b \in M \exists x_1, ..., x_{m-1} \in M : \overline{ax_1}, \overline{x_1x_2}, ..., \overline{x_{m-1}b} \in M$.



Man nennt eibe solche Folge $a, x_1, x_2, ..., x_{m-1}, b$ oder auch $\overline{ax_1} \cup \overline{x_1x_2} \cup ... \cup \overline{x_{m-1}b}$ einen Streckenzug oder Polygonzug.

15.12. Satz: Vor.: $M \subset \mathbb{R}^n$. Beh.: M Gebiet $\Leftrightarrow$ M polygonzush. $\Leftrightarrow$ M wegzush.
Bew.(durch Ringschluss):
(i) Z.z.: M Gebiet $\Leftrightarrow$ M polygonzush.:
Sei $x \in M$ bel. Setze V=$V_x := \{b \in M; b$mit x durch Polygonzug verbindbar$\}$
$= \{b \in M; \exists x_1, ..., x_k \in M : \overline{bx_1} \cup \overline{x_1x_2} \cup ... \cup \overline{x_kx} \subseteq M\}$.
Da $a \in V$, ist $V \neq \emptyset$.
• Haben: V ist offen, d.h. $b \in V \overset{!}{\Leftrightarrow} \exists B_b^\epsilon \subseteq V$.
⌜Denn: M offen $\Rightarrow \exists \epsilon{>}0 : B_b^\epsilon \subseteq M$.
Sei $c \in B_b^\epsilon$. Wegen $\overline{bc} \subseteq B_b^\epsilon$ folgt dann $c \in V$, d.h. $B_b^\epsilon \subseteq V$.⌝
• Haben: V ist abg., d.h. CV ist offen.
Dazu betr. $B_b^\epsilon M$ für $b \in \dot{V}$.
Haben $B_b^\epsilon \setminus \{b\} \cap V \neq \emptyset$, wähle $c \in V \cap B_b^\epsilon, c \neq b$
$\Rightarrow \overline{vc} \subseteq B_b^\epsilon \Rightarrow b \in V$. Es folgt $\overline{V} = V \cup \dot{V} \subseteq V$, also $\overline{V} = V$, d.h. ist abg.
(ii): M polygonzush. $\Rightarrow$ M wegzush.: trivial, da Streckenzüge Wege sind.
(iii): M wegzush. $\Rightarrow$ M Gebiet:
Zeige: M zush. $\Leftarrow \forall x, y \in M \exists Z \subseteq M$:$x, y \in Z$, Z zush.

⌜Sei $f: M \to \mathbb{Z}$ stetig, $y \in M$. Ist $x \in M$ bel., so gibt es ein $Z \subseteq M, Z$ zush., $x, y \in Z$, nach Vor. Betr. f_{rZ}. Diese Abb. ist stetig, und da Z zush. ist, ist f_{rZ} Konstant nach Hilfssatz (*) 15.6."⇒".
Es folgt f(x)=f(y). Da $x, y \in M$ bel., ist f auf M konstant.
Mit Hilfssatz (*) 15.6. "⇒", folgt: M zush.⌝

Mit dieser Beh. folgt (iii), denn von x nach y führt eien Weg in M um jeden Punkt des Weges wähle eine ϵ-Umg. ganz in M. Setze Z als Vereinigung aller dieser ϵ-Umg.

Ü Eine Vereinigung nicht disjunkter zush. Mengen ist zush.

15.13. Kor.: $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}^1 : M$ zush. ⇔ M Intervall.
⌜denn IVe in $\mathbb{R}^1$ sind per Def. wegzusammenhängend⌝

15.14. Kor.: f:$R \to \mathbb{R}^1$ stetig, R zush. $\overset{15.6.}{\Rightarrow}$ f(R) zush. $\overset{15.4.}{\Rightarrow}$ f(R) Intervall.
Dies ist wieder der Satz von Min./Max. An9.30., es folgt der ZWS An9.29.

15.15. Bem.: Die Relation x y: ⇔ $\exists Z \subseteq M, Z$ zush.: $x, y \in Z$
ist auf $M \subseteq R$ (R ein metrischer Raum) eine Äquivalenzrelation ⌜reflexiv ✓ symmetrisch ✓ transitiv✓⌝auf M.
Haben auch x y $\Leftrightarrow x \in V_y \Leftrightarrow y \in V_x$ laut Beweis von 15.12. in $R = \mathbb{R}^n$.
Die Äquivalenzklassen sind zush. und abg. Da M disjunkte Vereinigung dieser Ä-Klassen ist, heißen duese due Zusammenhangskomponenten von M. Schränkt man eine stetige Fkt. $f: M \to \mathbb{Z}$ ein auf eine Zush. Komponente U,
so ist f_{rU} Konstant laut 15.6., und die Urbilder einpunktiger Mengen $\{a\} \subseteq \mathbb{Z}$ sind Vereinigungen von Zusammenhangskomponenten von M.