Hoffmann

Analysis für Wirtschaftswissenschaftler und Ingenieure

Springer
Lehrbuch

Springer-Lehrbuch

Springer
Berlin
Heidelberg
New York
Barcelona
Budapest
Hong Kong
London
Mailand
Paris
Tokyo

Dieter Hoffmann

Analysis für Wirtschaftswissenschaftler und Ingenieure

Mit 108 Abbildungen

Springer

Professor Dr. Dieter Hoffmann
Universität Konstanz
Fakultät für Mathematik
Universitätsstr. 10
Postfach 5560
D-78434 Konstanz

ISBN-13: 978-3-540-60108-1 e-ISBN-13: 978-3-642-79909-9
DOI: 10.1007/978-3-642-79909-9

Die Deutsche Bibliothek - CIP-Einheitsaufnahme
Hoffmann, Dieter:
Analysis für Wirtschaftswissenschaftler und Ingenieure / Dieter Hoffmann. -
Berlin ; Heidelberg ; New York ; Barcelona ; Budapest ; Hong Kong ; London ; Mailand ;
Paris ; Tokyo :
Springer, 1995
(Springer-Lehrbuch)
ISBN-13: 978-3-540-60108-1

43/2202-5 4 3 2 1 0 - Gedruckt auf säurefreiem Papier

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Das vorliegende Buch gibt eine allgemeine Einführung in die Analysis für Wirtschaftswissenschaftler und Ingenieure — und allgemeiner für Studierende mit Mathematik als Nebenfach, so etwa auch in den Bereichen Informatik und Sozialwissenschaft. Es kann gewinnbringend für *alle* Studiengänge, die mit einer mindestens zweisemestrigen Einführung in die Analysis beginnen, herangezogen werden. Dem **Lernenden** werden mathematisch ‚saubere' und leistungsfähige Methoden an die Hand gegeben, was die praktische Arbeit wesentlich erleichtert. Der **Lehrende** findet ein solides und ansprechendes Buch, das er zur Orientierung oder als Begleittext ohne Vorbehalte empfehlen kann.

Gleich zu Beginn sei ausdrücklich gesagt: Vokabeln wie etwa ‚Leser' sollten stets als ‚Leser*in* und Leser' verstanden werden. Sprachliche Spielereien wie ‚LeserInnen' oder ‚der (die) Leser(in)' und ähnliches finde ich unschön und wenig sinnvoll. Auch wenn ich das nicht fortwährend durch sprachliche Klimmzüge betone: *Die weiblichen Leser des Buches sind mir herzlich willkommen.*

Der immer stärkeren Mathematisierung (Stichworte *Modellierung, Quantifizierung* und *Validierung*) vieler Wissensbereiche und der nahezu universellen Anwendbarkeit von Mathematik wird mit einer modernen und eleganten Darstellung des Stoffes Rechnung getragen.

Alle Studenten der Wirtschaftswissenschaften — und vieler Studiengänge mit Mathematik als Nebenfach oder wesentlicher Grundlage — *müssen* einen Mathematik-Kurs belegen. Sie tun dies allerdings selten aus Neigung, sondern sehen es in der überwiegenden Zahl eher als notwendiges und lästiges Übel an. Ich würde mich freuen, wenn ich einige doch für diesen Stoff erwärmen, einzelne vielleicht sogar begeistern könnte. Das wesentlich stärkere Gewicht der Mathematikausbildung ist heute erforderlich, da die Denk- und Arbeitsweise in sehr vielen Gebieten in den letzten Jahrzehnten zunehmend mathematisch geprägt wurde.

Ohne eine exakte und dadurch zuverlässige — begriffliche und praktisch-methodische — Beherrschung der wichtigsten analytischen Grundbegriffe ist eine erfolgreiche Arbeit in den angesprochenen Bereichen kaum noch möglich. Kein Student der Wirtschafts- oder Ingenieur-Wissenschaften kann es sich heute leisten, sich vor der intensiven Beschäftigung mit Mathematik zu drücken.

Das vorliegende Buch will das erforderliche Wissen und Können vermitteln. Es kann den *Lernenden* von Beginn des Studiums an begleiten und Grundlage oder Ergänzung zu der Einführung in die Analysis im Grundstudium bieten. Es bietet eine gute Basis für die Beschäftigung mit weiterführenden oder allgemeineren Themen und vor allem für die vielfältigen Anwendungen.

Das Buch kann so insgesamt auch dem *Lehrenden*, der die zu präsentierenden Themen und Methoden stärker dem heutigen mathematischen Stand anpassen will und eine konzise und mathematisch konsequente Darstellung schätzt, eine gute Hilfe und zuverlässiger Wegweiser sein.

Ich habe mich immer wieder bemüht, dem Leser neben den praktischen Fertigkeiten auch die wesentlichen Ideen nahezubringen, ihn zum Mitdenken zu animieren. Dies hat die Darstellung stark geprägt.

Zu allen Themen finden sich im Text zahlreiche, meist vollständig durchgerechnete, illustrative **Beispiele**. Die große Fülle der ausgeführten Beispiele — insgesamt sind es 222 — zeigt ausgiebig das *„Wie“*, der sonstige Text erläutert das *„Warum“*. Daneben gibt es zu den einzelnen Kapiteln genügend viele — mit Bedacht ausgewählte — **Übungen**. Diese sollte man ganz besonders beachten; denn *„Übung macht den Meister!“* Hier geht es in erster Linie darum, das im Text Dargestellte gründlich einzuüben. Die Aufgaben enthalten hingegen bewußt relativ wenige Ergänzungen und weiterführende Gedanken, und nur gelegentlich — mit entsprechender Anleitung — Beweisausführungen. Die einzelnen Übungen bieten unterschiedliche Schwierigkeitsgrade, wobei schwierigere durch Hinweise oder geeignete Anleitungen ‚entschärft‘ sind. Instruktive, sorgfältig ausgewählte und ausgeführte **Abbildungen** tragen zur Veranschaulichung des Stoffes bei und erleichtern so das Verständnis des Textes.

Auf ein detailliertes Durchgehen der Gliederung des Buches verzichte ich. Das sehr ausführlich gehaltene Inhaltsverzeichnis gibt vorweg genügend Übersicht. Es seien nur einige Besonderheiten des Textes erwähnt:

- Die frühzeitige Einführung und ausgiebige Handhabung komplexer Zahlen bietet vielfältige Vorteile für den Aufbau der Analysis und wesentliche Erleichterung für die praktische Rechnung und wird daher konsequent betrieben. Der reelle Weg ist meist viel beschwerlicher als der, der durchs Komplexe führt. (Man findet dies demgemäß auch in einigen anderen Lehrbüchern ausgeführt.) Dies wird dann insbesondere in Abschnitt 7.8 bei den Differentialgleichungen sowie in 8.7 und 8.8 bei den Differenzengleichungen deutlich: Die Rechnungen werden wesentlich einfacher, wenn man statt mit den trigonometrischen Funktionen $\sin(\lambda t)$ und $\cos(\lambda t)$ nur mit der Exponentialfunktion $e^{\lambda t}$ rechnet und zuläßt, daß λ komplex ist. Dem mühsamen Rechnen mit den Additionstheoremen der trigonometrischen Funktionen (und deren Folgerungen) steht — über die EULERsche Formel — der einfache Umgang mit der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion gegenüber.

- Neben dem eigentlichen RIEMANN-Integral, das wegen des einfachen Bezugs zur Anschauung gewählt wurde, und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, dem entscheidenden Bindeglied zwischen Differentiation und Integration, wird in Kapitel 5 auch das ‚uneigentliche' RIEMANN-Integral angemessen berücksichtigt. Abschließend werden noch exemplarisch numerische Gesichtspunkte kurz angesprochen.

- Anders als in vielen sonstigen Lehrbüchern für die ersten beiden Semester wird schon ein kurzer Einblick in die Gebiete **Gewöhnliche Differentialgleichungen** und **Differenzengleichungen** gegeben, da beide von besonderer Bedeutung für zahlreiche Anwendungen sind. Gerade hierbei wird das Ineinandergreifen von Theorie und Praxis besonders augenfällig. Zudem kann man bei den linearen Differential- und Differenzengleichungen gut das fruchtbare Zusammenspiel linearalgebraischer und analytischer Methoden verdeutlichen.

- Lineare Differential- und Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten werden konsequent mit der **Operatormethode** — recht durchsichtig und natürlich — behandelt. Die Ansätze zu diesem sehr leistungsfähigen Zugang sind schon recht alt; der Kern der Ideen findet sich bereits bei BOOLE (1877). Die Methode ist andererseits aber, gerade in anwendungsorientierten Darstellungen, leider noch viel zu wenig verbreitet.

  Die durchgerechneten Beispiele in 7.8, 8.7 und 8.8 machen deutlich, daß diese Methodik neben dem Gewinn an Durchsicht insbesondere für das praktische Vorgehen ganz wesentliche Vorteile bietet.

- Den einzelnen Kapiteln werden kurz **Lernziele** vorangestellt, am Ende steht jeweils ein **Rückblick**. Dabei wird auch verdeutlicht, welche Sätze ‚nur' wesentlich für den Aufbau und die Entwicklung der Analysis sind und welche andererseits besondere Bedeutung für die praktische Handhabung haben.

Schließlich ist es — gerade in diesem Gebiet — unmöglich, ein irgendwie vollständiges **Literaturverzeichnis** zu geben. Ich habe Bücher verschiedenen Niveaus berücksichtigt, aber bei weitem nicht alles aufgeführt, was man aufführen könnte. Die Berücksichtigung bzw. Nichtberücksichtigung im Literaturverzeichnis bedeutet keine besondere Wertung.

Im Laufe der Jahre habe ich viele Analysis-Bücher gelesen, hier und dort Anregungen aufgenommen, und speziell viele Bücher für die „Mathematical Reviews" aus diesem Bereich referiert. So ist sicher manche Idee und Formulierung ‚hängengeblieben' und wurde im Laufe der Jahre für die verschiedenen

Vorlesungen verwertet, ohne daß ich das noch im einzelnen genau weiß und zurückverfolgen kann. Daher kann ich es nur in wenigen Fällen noch **zitieren**. Der Inhalt ist im Kopf geblieben aber nicht mehr das „Woher". Ich hoffe, daß niemand sich ärgert, weil er nicht ausdrücklich zitiert wurde. Vieles ist dabei natürlich einfach ‚Folklore'.

Zur **inhaltlichen und didaktischen Konzeption** ist folgendes zu sagen: Das Buch baut im Wesentlichen auf dem Stoff der gymnasialen Oberstufe oder vergleichbarer Vorbildung auf, ohne diesen allerdings vorauszusetzen. Es soll den Lernenden in den ersten beiden Semestern begleiten und wird sicher auch später noch zuverlässiger Ratgeber und Nachschlagemöglichkeit sein. Es ist durchaus auch zum Selbststudium geeignet, erfordert dann aber aktives Mitdenken.

Wie weiter unten erläutert, ist das Konzept auch ‚Fachhochschul-erprobt'. Daher ist das Buch auch für den **Einsatz an Fachhochschulen**, selbst mit anderer Interessenausrichtung, bestens geeignet.

Die Darstellung ist weit entfernt davon, eine bloße Sammlung von Kochrezepten zu sein. Gerade die mathematisch strenge Herleitung zentraler Ideen und durchgehend präzise Formulierung und Darstellung fördern entscheidend Verständnis und Durchblick und geben so erst die gewünschte Sicherheit bei der Anwendung. An den Stellen, wo ein vollständiger strenger Beweis aber — bedingt durch den relativen Schwierigkeitsgrad (für den angesprochenen Leserkreis) — nicht ratsam schien, wird entweder ein möglicher Beweis grob skizziert oder ein Literaturverweis gegeben. Reine Routineüberlegungen und Ergänzungen werden dagegen meist nur beispielhaft ausgeführt oder auch ganz ohne Beweis notiert, damit die Darstellung nicht langatmig wird.

An die Lehrenden

Das Konzept des Buches basiert auf langjährigen Erfahrungen mit recht verschiedenartigen Veranstaltungen aus dem Gesamtspektrum der Analysis. Neben vielen Vorlesungen aus dem Gebiet der Analysis für Mathematik- und Physikstudenten der Anfangssemester bis hin zum Aufbaustudium an der Universität Konstanz habe ich seit 1978 im Rahmen von Lehraufträgen häufig Vorlesungen zur Analysis im Fachbereich Informatik der Fachhochschule Konstanz für die Studiengänge Technische Informatik und Wirtschaftsinformatik mit begleitenden Übungen gehalten. Hierbei und auch schon ansatzweise bei einer früheren Vorlesung „Höhere Mathematik für Elektrotechniker und Physiker" ist die Überzeugung gewachsen, daß es besser (und möglich) ist, *eine* wohldurchdachte und ausgereifte *allgemeine Einführung in die Analysis* mit Beispielen aus verschiedenen Lehr- und Anwendungsgebieten zu geben, als für jede Anwendungsrichtung ein eigenes Buch anzubieten.

Gerade durch die Anforderung, Analysis auf sehr verschiedenen Niveaus bei unterschiedlichen Ausrichtungen und zum Teil noch deutlich auseinander liegenden Eingangsvoraussetzungen zu lehren, ist im Laufe der Zeit vieles mehrfach überarbeitet, geglättet, verbessert und ergänzt worden und auf diese Weise ein — mathematisch und didaktisch — überzeugendes und bewährtes Konzept entstanden. Leistungsfähige und zugkräftige Methoden erwachsen in dieser Darstellung aus dem Zusammenspiel zwischen mathematisch ‚richtiger' Sichtweise, die Eleganz und Transparenz nach sich zieht, und ständiger Anwendungsorientierung.

Ich bin überzeugt, daß mein Buch langfristig neben den Büchern von BÖHME und GAL ET AL. im gleichen Verlag einen festen Platz im Angebot einnehmen wird. Im Vergleich etwa zu BÖHME liegen das mathematische Niveau und damit der Anspruch an eigenständiges Denken und Verfolgen der Ideen hier doch wesentlich höher. Das soll bitte nicht als Abwertung verstanden werden; es werden lediglich unterschiedliche Zielgruppen, bei mir deutlich selbständigere und motiviertere Studenten, angesprochen. Und ich meine, es muß beide Arten von Büchern für die unterschiedlichen Zielgruppen geben. Im Vergleich zu GAL ET AL. sind bei mir die Themen, Schwerpunkte und Zugangsweisen doch an vielen Stellen wesentlich anders.

Da ich nach dem ursprünglichen Konzept mehrfach auch an der Fachhochschule Konstanz für Studenten der Wirtschaftsinformatik gelesen und insgesamt sehr viel positive Rückmeldung bekommen habe, ist sichergestellt, daß ich niveaumäßig nicht *zu* hoch liege; der größte Teil der angesprochenen Studenten dürfte weder über- noch unterfordert werden. Gerade die häufig von Studenten gestellte Frage: „Warum gibt es das nicht als Buch?" hat den Entschluß stark mitbeeinflußt, dieses Buchprojekt anzugehen.

Es ist kein Buch für mich oder die Kollegen, sondern vor allem für die Lernenden, andererseits aber kein Nürnberger Trichter. Die Lernenden werden von mir ein Stück des Weges an der Hand geführt, sie bekommen die Schönheiten am Wegesrand gezeigt, sie werden allerdings nicht getragen!

Sicher ist es von der mathematischen Konzeption und der ‚Eleganz' her deutlich besser als viele Bücher mit vergleichbarer Zielgruppe auf dem Markt. Aber natürlich werden auch weiterhin viele Studenten lieber tausend Seiten bei XYZ lesen als gut dreihundert von Hoffmann; denn die letzteren sind mathematisch deutlich anspruchsvoller und daher anstrengender; aber die Anstrengung lohnt sich!

Der Lehrende wird mit Rücksicht auf den meist ‚dichten' Stundenplan gelegentlich auswählen und hier und dort Abstriche machen müssen. So habe ich selbst an der Fachhochschule bei Wirtschaftsinformatikern die Überlegung über FOURIER-Reihen, bei Technikern die über Differenzengleichungen aus Zeitgründen weggelassen. Viele Dozenten werden es begrüßen, wenn sie in Ruhe und mit Geduld Schwerpunkte darstellen können und für den nicht behandelten oder zu kurz gekommenen Stoff auf einen soliden und ansprechenden Begleittext verweisen können, in dem keine faulen Kompromisse auf Kosten von Gründlichkeit und Vollständigkeit eingegangen sind.

Gegenüber dem oft rein ‚mechanischen' Trainieren von Rechenregeln und Vorgehensweisen und der Beschränkung auf einige einfache Plausibilitätsüberlegungen in manchen anderen Darstellungen bemühe ich mich, — neben der Beherrschung des Kalküls — stets Einblick und volles Verständnis zu vermitteln.

Da sich das Buch nicht vorrangig an Studierende der Mathematik oder auch Physik wendet, hat es — in Umfang, Tiefe und Stoffauswahl — deutlich andere und wesentlich bescheidenere Ziele als etwa die beiden sehr schönen *zweibändigen* Einführungen in die Analysis von H. HEUSER und W. WALTER. Beide empfehle ich interessierten Studenten, insbesondere auch wegen der bewundernswerten Fülle der Geschichtsbezüge und Anwendungen, zur ergänzenden und weiterführenden Lektüre. Auch das im Springer-Verlag vor wenigen Jahren erschienene Buch von KÖNIGSBERGER liegt vom Anspruch her — wegen der anderen Zielgruppe — insgesamt auf einem mathematisch höheren Niveau.

Kapitel 9 unterscheidet sich in der Darstellung etwas von den ersten acht Kapiteln. Es werden dort nur einige einführende Ideen vorgestellt; denn für den Gebrauch zu und neben Vorlesungen habe ich insgesamt einen realistischen Zeitplan im Auge und mußte mich so beschränken!

An die Lernenden

Mathematik lernt man — wie fast alles im Leben — durch eigenes Tun. Auch beispielsweise für das Autofahren reicht es ja nicht, die Verkehrsregeln zu kennen und die Gebrauchsanleitung durchzulesen. Man sollte beim Durcharbeiten eines Mathematikbuches Bleistift, Papier und einen großen Papierkorb parat haben und fleißig nutzen.

Ich habe bewußt unterschiedliche Notierungsweisen benutzt, um inhaltliches Denken zu fördern, so zum Beispiel statt $y = y(x)$ eher $s = s(t)$ geschrieben, wenn s den Weg und t die Zeit beschreibt.

Bei den mathematischen Methoden ist man leicht geneigt, den auf ersten Blick simpel erscheinenden den Vorzug zu geben, wird dann aber oft mit viel Aufwand bei der praktischen Rechnung bestraft. Ein Vergleich mit Sachverhalten aus dem täglichen Leben mag dies verdeutlichen: Natürlich kann man das Loch für einen Dübel mühsam mit Hammer und Dübelbohrer in eine Betonwand schlagen. Will man allerdings einige Regale aufhängen, so empfiehlt es sich, den Umgang mit einem modernen Bohrhammer zu erlernen. Ebenso ist es natürlich gesund, Treppen zu steigen. Wenn man aber in einem Wolkenkratzer oben wohnt, lohnt es sich, eine eventuelle Phobie gegen Aufzüge zu überwinden.

Ausdrücklich sei gesagt: Die Länge der Darstellung eines einzelnen Themas in der Vorlesung oder in einem Buch entspricht nur selten dem zeitlichen Aufwand, der für das Durcharbeiten bis zum wirklichen Verständnis erforderlich ist. Zum Beispiel könnte der Grenzwertbegriff in wenigen Zeilen beschrieben werden, aber erst nach viel Übung wird dieser zentrale Begriff in der Regel wirklich verstanden. Andererseits bereiten ausführlich dargestellte

Anwendungsbeispiele meist keine Verständnisschwierigkeiten und nur wenig Mühe.

Die *axiomatische Einführung der reellen Zahlen* wird einigen sicher sehr große Schwierigkeiten machen, sie kann ohne allzu großen Verlust für die Anwendungen weggelassen werden. Andererseits bringt sie aber viel Einsicht in den Gesamtaufbau der Analysis. Die ‚komplexe Situation' wird anschließend gleich mitberücksichtigt, wenn keine wesentliche Zusatzüberlegung erforderlich ist. Dies liefert vielfältige Vorteile!

Zum Gebrauch des Buches:

□ soll das Ende eines Beweises optisch hervorheben. Mit „$\surd$" habe ich gelegentlich Überlegungen ‚abgehakt'. Manche Dinge habe ich $\boxed{\text{eingerahmt}}$, um sie optisch stärker hervorzuheben. Natürlich gehört etwa bei Symbolen oder Notierungsweisen der Rahmen nicht dazu. In Beweisen habe ich oft ‚linke Seite' und ‚rechte Seite' mit ‚*l.S.*' bzw. ‚*r.S.*' abgekürzt. Häufig habe ich einzelne Wörter oder Formulierungen mit einfachen Anführungsstrichen versehen: Dabei handelt es sich meist um eigentlich noch zu präzisierende Dinge.
Die Beispiele im Text sind abschnittsweise numeriert.

Dank

Gern benutze ich diese Gelegenheit, um noch einmal all denen zu danken, die mich bei der Erstellung des Buches unterstützt haben. Nur wenige davon will ich namentlich besonders erwähnen:

Das gesamte Manuskript haben kritisch durchgesehen die Herren RÜDIGER SANDMANN und Diplom-Mathematiker MARKUS SIGG. Beide waren mir eine große Hilfe, manchmal ermunternd, gelegentlich recht kritisch, immer der Sache dienend. (Die Verantwortung für eventuell noch verbliebene Fehler liegt natürlich bei mir.) Frau MARGARETA STEINERT hat erste Versionen einzelner Teile des Textes in LaTeX geschrieben.

Herrn Diplom-Mathematiker RAINER JANßEN verdanke ich als gutem Freund Anregungen und manchen Rat. Besonderen Dank schulde ich Herrn Diplom-Physiker ARND KRÖNIG, der mit großer Umsicht, selbständig und professionell viele der graphischen Vorlagen — meist direkt in POSTSCRIPT — erstellt hat und auf fast alle meiner Zusatzwünsche (und zum Teil ‚Marotten') mit „kein Problem" bereitwilligst einging.
In der Endphase hat mich Herr FREDERIK BOETIUS unterstützt und insbesondere Symbol- und Stichwortverzeichnis selbständig, mit mathematischem Überblick und großer Sorgfalt erstellt. Herr Diplom-Mathematiker FRANZ MAUCH hat bei Computermacken, Soft- und Hardware-Problemen und diesbezüglichen Fragen oft sachkundig geholfen.

Nicht zuletzt gilt mein besonderer Dank auch dem Leiter der Pla-

nung Wirtschaftswissenschaften des SPRINGER–Verlages, Herrn DR. PETER SCHUSTER, der das Buch in das Verlagsprogramm aufgenommen und den Verzug bei der Fertigstellung der Vorlage geduldig, ohne lästiges Mahnen, hingenommen hat.

Zum Schluß möchte ich allgemein, besonders aber auch den Fachleuten und Kennern, sagen: Ich würde mich über persönliche Reaktionen sehr freuen. Verbesserungsvorschläge, Hinweise auf Fehler(chen), Anregungen und konstruktive Kritik sind willkommen — aber selbst Lob kann ich gut vertragen!

Getröstet habe ich mich bei der scheinbar nicht enden wollenden Arbeit am Manuskript mit:

> *„So eine Arbeit wird eigentlich nie fertig, man muß sie für fertig erklären, wenn man nach Zeit und Umständen das möglichste getan hat."*
>
> J.W. VON GOETHE, Italienische Reise, 17. März 1787

Kapitel 1

Grundlagen

Lernziel

Mengen ermöglichen präzise und einfache Formulierungen von komplizierten Sachverhalten und tragen so zur ökonomischen Darstellung vieler Dinge bei. Daher haben einfache Sprechweisen mit Mengen Eingang in sehr verschiedene Wissensbereiche gefunden. Bei der Behandlung von Mengen beschränken wir uns auf eine ‚naive' Auffassung.

Die *Grundbegriffe* des Abschnitts 1.1 muß man beherrschen. Das gleiche gilt für die Abschnitte 1.2 und 1.3 *über Aussagen und Abbildungen.* Da diese Dinge immer wieder vorkommen, lernt man das im Laufe der Zeit — fast — von alleine. Logische Begriffe wie beispielsweise „Syllogismus" habe ich der Vollständigkeit halber angegeben; man sollte die Namen dafür nicht lernen. Wichtig ist nur, den entsprechenden Sachverhalt zu kennen.

Wenn Sie glauben zu wissen, was *reelle Zahlen* sind, können Sie den Abschnitt 1.4 getrost überschlagen. Für die Praxis müssen Sie damit nur umgehen können. Wenn Sie aber den hier dargestellten Aufbau der Analysis von Grund auf verstehen wollen, dann sollten Sie sich durch diesen Abschnitt hindurchbeißen. Den Umgang mit *Ungleichungen* muß man ausgiebig einüben. Aus 1.5 sind die *vollständige Induktion* als Beweisverfahren, die *rekursive Definition* und der *Binomische Satz* — zumindest in den einfachen Spezialfällen — zu beherrschen. Für die rationalen (Abschnitt 1.6) und komplexen Zahlen (Abschnitt 1.9) gilt das oben für die reellen Zahlen Gesagte entsprechend: Sie müssen in erster Linie damit umgehen können. Dazu helfen — ganz besonders auch für die komplexen Zahlen — die *Übungen.*

Aus Abschnitt 1.8 sollten Sie die *Darstellung reeller Zahlen* auf der Zahlengeraden und die Schreibweise im Dezimalsystem behalten. Die dort als Hilfsmittel eingesetzte *Geometrische Summenformel* müssen Sie sich besonders gut einprägen.

Die vorbereitenden *Stetigkeitsüberlegungen* in Abschnitt 1.10 werden wir an vielen Stellen später gewinnbringend einsetzen. Es ist gut, wenn man das schon frühzeitig versteht.

Einige der folgenden einführenden Abschnitte werden manchen vielleicht lästig sein. Aber denken Sie daran: Auch im Sport ist die Aufwärmgymnastik (heute „stretcht" man eher) vielen unbequem, aber zur Erzielung optimaler Leistungen nahezu unentbehrlich, zumindest sehr förderlich. Auch bei der Nutzung eines neuen Gerätes oder Computerprogrammes möchte man meist lieber gleich anfangen, statt die Gebrauchsanleitung erst mühsam zu studieren; dafür geht dann eben manchmal einiges schief — und man flucht auf das Gerät bzw. das Programm. (Manche meinen gar, daß es von mangelndem Selbstbewußtsein zeugt, wenn man Gebrauchsanleitungen liest.)

Falls Sie allerdings den Eindruck haben, daß Sie vieles aus dem 1. Kapitel schon — zum Beispiel von der Schule her — genügend kennen, können Sie ohne weiteres gleich bei Kapitel 2 beginnen und nur bei Bedarf zurückblättern. Gerade zu Beginn werden sich Unterschiede in der Vorbildung stark bemerkbar machen; doch das gibt sich dann bald.

In den Abschnitten 1.1 und 1.2 habe ich einige Ideen aus [TINHOFER] verwertet, die mir zum Einstieg gefallen haben.

Ich habe mich besonders bei den einführenden Dingen bemüht, den doch relativ trockenen Stoff durch viele nicht-mathematische Beispiele etwas aufzulockern.

1.1 Mengen und ihre Verknüpfungen

Wir benutzen Mengen ‚naiv' und nur in ‚unproblematischen' Situationen, lediglich im Sinne einer Sprache zur klaren und kurzen Formulierung mathematischer Sachverhalte. Wir erörtern keine diesbezüglichen Grundlagenfragen und machen insbesondere *keine* ‚Mengenlehre'! Die Bedeutung des Wortes *„Menge"* wollen wir allein durch den Umgang mit vielen konkreten Beispielen erlernen. Wir begnügen uns dabei mit einem intuitiven Verständnis.

Der Mathematiker Georg CANTOR (1845 - 1918) umschrieb 1895 den Begriff ‚Menge' wie folgt:

> Eine *„Menge"* ist eine *Zusammenfassung* von *wohlunterschiedenen* Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.

Wohlunterschieden setzt vorweg eine Festlegung über Gleichheit voraus. Für jedes Objekt muß dadurch feststehen, ob es zu einer bestimmten Menge gehört oder nicht.

Wir beginnen mit einigen Beispielen:

(B1) Die Buchstaben $a, b, c, \ldots, x, y, z$ ergeben — zusammengefaßt —

das lateinische Alphabet. Das lateinische Alphabet ist also eine Menge von 26 Objekten, den Buchstaben a bis z.

(B2) Die Gesamtheit der Personen, die in Konstanz am 08.08.1943 ihren ersten Wohnsitz hatten.

(B3) Die Zusammenfassung von Geburtsdatum, Geburtsort, Geburtsland, Familienstand, Beruf und Wohnadresse gibt — wenn man einmal die Reihenfolge, die natürlich hier eigentlich wichtig ist, außer acht läßt — eine Menge von Personalien eines Einwohners.

Das erste Beispiel zeigt schon deutlich, daß die Festlegung von Gleichheit von entscheidender Bedeutung ist: Gehört „A“ oder „**a**“ auch zu der angegebenen Menge? Es muß also zum Beispiel hier vorweg geklärt sein, ob der — irgendwie geschriebene — Buchstabe „a“ gemeint ist oder nur der genau wie in der obigen Auflistung notierte (Groß- und Kleinschreibung unterscheiden, gleiche Größe, gleicher Schrifttyp, ...).

Wir gehen bei den meisten der einführenden Beispiele — insbesondere bei denen aus dem Alltagsbereich — davon aus, daß der ‚Rahmen‘ von vornherein geklärt ist, ohne daß dies in jedem Fall präzise ausgeführt wird. Natürlich muß man im Bedarfsfall die Gleichheit und eventuelle ‚Rahmenbedingungen‘ exakt festlegen. Was genau ist etwa ein *‚schnelles Auto‘*, eine *‚Frau, die Klavier spielt‘*, ein *‚Mann mit kurzen Haaren‘* oder gar ein *‚flotter Käfer‘* ?

Auch die Pünktchen in der Auflistung des ersten Beispiels sind ja nicht so ohne weiteres verständlich; sie beruhen auf der Annahme, daß jeder Leser wohl weiß, was ausgelassen ist, gehen also von einem gewissen Vorverständnis aus. Dies wird vielleicht deutlicher, wenn man etwa an die entsprechende Situation mit kyrillischer oder gar chinesischer Schrift denkt.

In der Mathematik kommen häufig Mengen von Zahlen oder ‚Punkten‘ (im ‚Raum‘ oder in der ‚Ebene‘) vor, zum Beispiel bei den Zahlen:

(B4) Die *Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen*: $1, 2, 3, 4, \ldots$

(B5) Die Menge der geraden natürlichen Zahlen: $2, 4, 6, \ldots$

Bei Begriffen wie ‚Ebene‘ oder ‚Raum‘ gehe ich hier zunächst von einem bei den meisten Lesern wohl vorhandenen Vorverständnis aus. Für die präzise Definition benötigen wir den Begriff ‚Produktmenge‘, den wir noch in diesem Abschnitt erläutern werden.

Ich weise ausdrücklich auf einen wesentlichen Unterschied zum Gebrauch des Wortes ‚Menge‘ in der Alltagssprache hin: ‚Eine ganze Menge Mist‘ meint dort gewöhnlich ‚viel Mist‘. In der Mathematik jedoch ist die Frage, wieviel Objekte zu einer Menge zusammengefaßt werden, belanglos.

Die zu einer Menge zusammengefaßten Objekte heißen *„Elemente“* dieser Menge.

Wir notieren Mengen häufig mit großen (lateinischen) Buchstaben, etwa

$$A, B, C, \dots ; \quad M_1, M_2, \dots$$

und Elemente oft mit kleinen (lateinischen) Buchstaben, beispielsweise

$$a, b, c, \dots ; \quad m_1, m_2, \dots \quad .$$

Ist x Element einer Menge M, so schreiben wir: $\boxed{x \in M}$.
Wir lesen dies als: x *gehört zu* M, x *ist Element von* M, M *enthält* x (und ähnlich).

Ist y nicht Element einer Menge M, so schreiben wir: $\boxed{y \notin M}$
und lesen dies entsprechend.

<u>Gleichheit von Mengen:</u> Zwei Mengen A und B heißen *„gleich"*, wir notieren natürlich $\boxed{A = B}$, wenn sie die gleichen Elemente enthalten.
(D.h.: Jedes Element von A kommt in B vor und umgekehrt. Auf die ‚Reihenfolge' der Elemente kommt es also nicht an!)

(B6) Für $M := \{a, b, c, \dots, x, y, z\}$ gilt: $\underline{i \in M, \quad 1 \notin M}$

Hier trat zum erstenmal das Zeichen „:=" (*‚definitionsgemäß gleich'*) auf. Dies bedeutet: Was beim Doppelpunkt steht, wird durch die andere — als bekannt angesehene — Seite definiert.

Wir haben in diesem Fall die Menge durch *‚Aufzählung'* (hier mit Punkten, die Auslassungen andeuten) beschrieben, die einzelnen Elemente durch Kommata getrennt und das Ganze in geschweifte Klammern eingeschlossen.

(B7) Für $I\!N := \{1, 2, 3, \dots\}$ gilt: $\underline{0 \notin I\!N, \quad 1995 \in I\!N}$

Aus schon vorhandenen Mengen A und B erhält man weitere Mengen durch:

(a) **Aussondern**:

$$\begin{aligned} T &:= \{x \mid x \in A \text{ und } x \text{ hat Eigenschaft } E\} \\ &= \{x \in A \mid x \text{ hat Eigenschaft } E\} \end{aligned}$$

Wir lesen die erste Gleichung etwa als: T *ist* (definitionsgemäß) *die Menge der* x, *für die gilt:* $x \in A$ *und* x *hat die Eigenschaft* E. Häufig notiert man dabei auch „ : " statt „ | ". (Das hängt meist nur davon ab, welches Zeichen in der entsprechenden Situation optisch besser gliedert.)

(B8) $\{2, 4, 6, \dots\} = \{n \in I\!N \mid n \text{ ist gerade}\}$

(b) **Durchschnittsbildung**: $A \cap B := \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$
Gelesen wird dies als *„Durchschnitt" von* A *und* B oder A *„geschnitten" mit* B.

(B9) A sei die Menge aus (B1) und $B := \{a, i, j, *, +, \text{rot}, 13, k\}$; dann ist $A \cap B = \{a, i, j, k\}$.

(c) **Vereinigungsbildung**: $A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$
Dies liest man als *„Vereinigung" von A und B* oder *A „vereinigt" mit B*. Hierbei ist es sehr wichtig, die Bedeutung des Wortes *„oder"* genau festzulegen: Es ist — wenn nichts anderes deutlich gesagt wird — in der Mathematik immer *im nicht ausschließenden Sinne* (lateinisch ‚vel') gemeint, es kann also auch beides — oben somit $x \in A$ und $x \in B$ — gelten.

(B10) Wenn ein Mann seiner Ehefrau zum Hochzeitstag einen Pelzmantel *oder* eine Perlenkette als Geschenk anbietet, so meint er das wohl meist ausschließend (lateinisch ‚aut'), eins von beiden, aber nicht beide. Der Ehefrau wäre aber wohl die Interpretation als nicht ausschließendes ‚oder' (mindestens ein Geschenk, möglicherweise aber auch beide) vermutlich lieber: Warum nicht Pelzmantel und Perlenkette?

Herr SIGG rügte dies als „ganz verstaubte Klischees" und schlug folgendes Beispiel vor: Im China-Restaurant gehört zum Mittagsmenü in der Regel Suppe oder Frühlingsrolle, aber nicht beides. Der Ober erwartet, wenn er fragt „Suppe oder Frühlingsrolle?" auch nicht „ja" oder „beides" als Antwort.

(B11) Für $A := \{1,2,3,7\}$ und $B := \{3,4,5,6,7\}$ ist
$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7\}$.

(d) **Differenzbildung** (bei Mengen): $A \setminus B := \{x \in A \mid x \notin B\}$
$A \setminus B$ wird meist als *„A minus B"* oder *„A ohne B"* gelesen.

(B12) A und B wie in (B 11): $A \setminus B = \{1,2\}$, $B \setminus A = \{4,5,6\}$.

Die Menge, die gar kein Element enthält, bezeichnen wir als *„leere Menge"* und notieren sie mit $\emptyset$. (Ist die leere Menge gerade Ihre Geldbörse — in naheliegender Weise als Menge aufgefaßt —, so ist das natürlich unschön. Daß die Menge der Flöhe in einem Bett leer ist, ist hingegen meist wünschenswert.) Bei den Mengenbildungsprozessen (a), (b) und (d) kann es vorkommen, daß die resultierende Menge leer ist, selbst wenn die Ausgangsmengen Elemente enthalten. Auch aus diesem Grund ist es also zweckmäßig, die leere Menge in die Überlegungen über Mengen einzubeziehen.

Zwei Mengen A und B heißen *„disjunkt"*, wenn sie kein gemeinsames Element enthalten, wenn also $A \cap B = \emptyset$ gilt.

Mengen sind als neue Objekte selbst Gegenstand unseres Interesses. Ihnen kommen Eigenschaften zu, die vollkommen verschieden sein können von den Eigenschaften ihrer Elemente:

(B13) (a) Eine Bibliothek kann umfangreich sein, ohne daß jedes (oder irgendein) Element, also ein Buch, umfangreich ist.

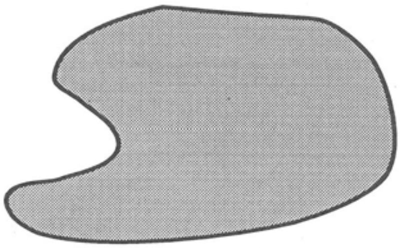
(b) Die Aussagen über eine Kreisscheibe: „rund, symmetrisch, hat Radius R, den Mittelpunkt M, ...“ machen für die einzelnen Elemente (Punkte) wenig Sinn.

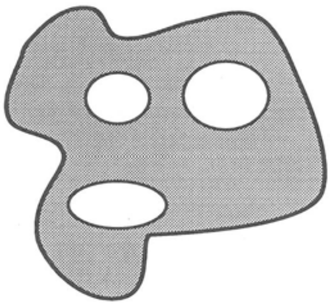
(c) Ein Menü kann reichhaltig sein, ohne daß ein einzelner Gang reichhaltig ist.

Eine Menge, deren Elementeanzahl man durch eine natürliche Zahl oder 0 angeben kann, heißt *„endlich“*. Alle andere Mengen heißen *„unendlich“*. — Wir wollen für unendliche Mengen den Anzahlbegriff nicht noch weiter ‚auffächern‘. Für eine Menge M notieren wir mit $\# M$ die Anzahl der Elemente von M.

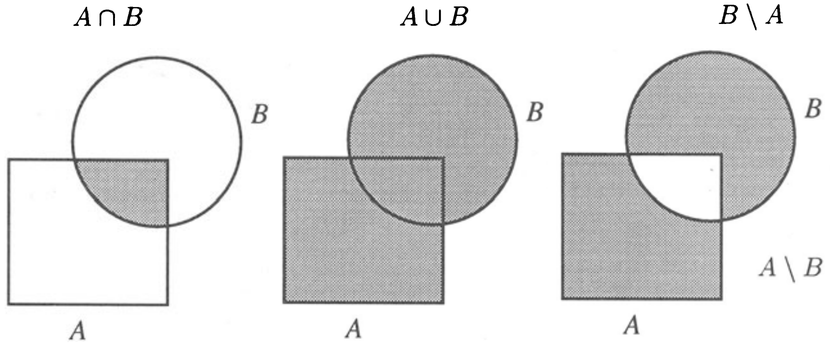
(B14) $\#\{1,3,7,8\} = 4, \quad \#\{a,b,c,\ldots,x,y,z\} = 26, \quad \# I\!N = \infty,$
$\#\{x \mid x \text{ Primzahl}, x \text{ größer als } 3, x \text{ kleiner als } 5\} = \#\emptyset = 0$
Hier haben wir erstmals das Zeichen „∞“ für ‚unendlich‘ benutzt.

Mengen von Punkten in einer Ebene lassen sich oft suggestiv durch eine Zeichnung darstellen: (Dabei muß gelegentlich die Zeichnung noch erläutert werden: Gehört etwa der ‚Rand‘ zu der skizzierten Menge, ist der schraffierte Bereich gemeint oder gerade der Rest usw.)





Oft werden auch beliebige Mengen (oder Aussagen) vorteilhaft in der Ebene veranschaulicht:



Eine Menge A heißt *„Teilmenge"* oder *„Untermenge"* einer Menge B, wenn A nur Elemente besitzt, die auch zu B gehören. Wir lesen dies auch als: *A ist in B enthalten, B enthält A*, B ist *„Obermenge"* zu A, *B umfaßt A* und notieren $A \subset B$ oder auch $B \supset A$. Das Zeichen „$\subset$" sprechen wir auch als *„Inklusion"* an.

A heißt *„echte Teilmenge"* von B, notiert als $A \subsetneqq B$, wenn $A \subset B$ und $A \neq B$ gelten. (Jedes Element von A gehört auch zu B, aber B enthält (mindestens) ein Element, das nicht zu A gehört.)

Ich möchte ausdrücklich darauf hinweisen, daß in vielen anderen Darstellungen die Bezeichnungen „$\subseteq$" oder auch „$\subseteqq$" für die Inklusion, bei der also Gleichheit möglich ist, und „$A \subset B$" gerade für die Aussage, daß A echte Teilmenge von B ist, verwendet werden.

Für beliebige Mengen A, B, C gelten:

$\emptyset \subset A, \quad A \cap B \subset A, \quad A \subset A \cup B, \quad A \subset A$

$A = B$ *ist gleichbedeutend mit* $A \subset B$ *und* $B \subset A$.

Wenn $A \subset B$ *und* $B \subset C$ *gelten, dann gilt auch* $A \subset C$.

(Über die Aussage der zweiten Zeile wird i. a. der Nachweis der Gleichheit von Mengen geführt.)

Potenzmenge: Ist A eine Menge, dann heißt die Menge aller Teilmengen von A *„Potenzmenge"* von A; wir notieren sie mit $\mathbb{P}(A)$.

(B15) Für $A := \{1,2,3\}$ gilt

$$\mathbb{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, A\}.$$
$$\mathbb{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}.$$

Produktmenge: A und B seien Mengen. Die Menge aller *„geordneten Paare"* (a,b) mit $a \in A$ und $b \in B$ heißt *„Produktmenge"* oder *„Paarmenge"* oder *„cartesisches Produkt"* (von A und B). a heißt *„erste Komponente"* (und b entsprechend *„zweite Komponente"*) des geordneten Paares (a,b). Oft notiert man auch $\binom{a}{b}$ statt (a,b). Wir bezeichnen diese Menge mit $A \times B$, also

$$A \times B := \{(a,b) : a \in A \text{ und } b \in B\}.$$

Ein geordnetes Paar ist ein — aus den beiden Einträgen gebildetes — neues Objekt, bei dem es (in der Regel) entscheidend auf die Reihenfolge der Komponenten ankommt, wie schon aus den nachfolgenden Beispielen deutlich wird:

(B16) (a) Für $A := \{\text{Karo, Herz, Pique, Kreuz}\}$,

$B := \{7, 8, 9, 10, \text{As, Dame, König, Bauer}\}$ erhält man als Produktmenge $A \times B$ gerade

$$\{(\text{Karo,7}),\ (\text{Karo,8}), \ldots ,(\text{Karo,Bauer}), \ldots ,(\text{Kreuz,Bauer})\}.$$

Die erhaltene Paarmenge entspricht also genau den Karten beim Skatspiel.

(b) Würfelt man mit zwei unterscheidbaren Würfeln (z. B. weiß und schwarz), so erhält man als mögliche Ergebnisse: $(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,1),\ldots,(2,6),\ldots,(6,6)$. Die Menge aller Ergebnisse ist demnach $\{1,2,\ldots,6\} \times \{1,2,\ldots,6\}$.

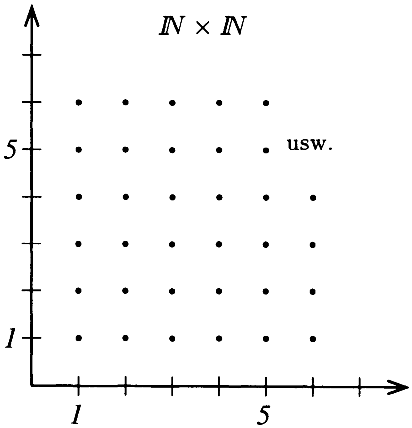
(c) Wenn ich mich morgens anziehe, so habe ich oft (u. a.) das ‚Problem', welches Hemd ich zu welcher Hose anziehe. Ich muß aus der Menge $A \times B$ auswählen, wenn A := {meine Hosen} und B := {meine Hemden}. Hier sieht man besonders deutlich, daß es bei der Paarbildung auf die Reihenfolge ankommt: Eine Hose kommt an die erste Stelle (unten), ein Hemd an die zweite Stelle (oben); denn umgekehrt paßt es nicht, zumindest sieht's nicht gut aus.

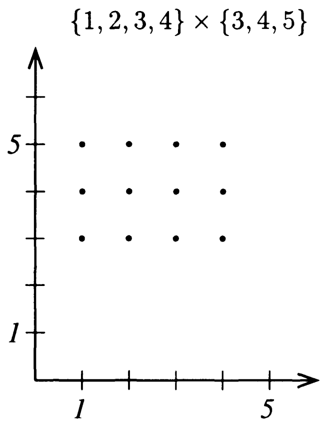
Gleichheit von Paaren: Für $(a,b),(c,d) \in A \times B$ legen wir fest:

$(a,b) = (c,d)$ genau dann, wenn $a = c$ und $b = d$.

(In Beispiel (b) z. B. ist demnach $(1,2) \neq (2,1)$.)

Die **Veranschaulichung durch Punktmengen in der Ebene** ist wohl von der Schule her noch hinreichend vertraut oder wird sonst durch die beiden folgenden Beipiele klar:





Allgemeiner definiert man für $n \in I\!N$ und Mengen $A_1, \ldots, A_n$ entsprechend:

$$\prod_{\nu=1}^{n} A_\nu := A_1 \times \cdots \times A_n := \{(a_1,\ldots,a_n) : a_\nu \in A_\nu \quad (\nu = 1,\ldots,n)\}.$$

$(a_1,\ldots,a_n)$ heißt *„n-Tupel"* mit der *„ν-ten Koordinate"* (oder *„Kompo-*

nente") a_ν (für $\nu = 1, \ldots, n$). Auch in dieser allgemeineren Situation notiert man oft $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ statt $(a_1, \ldots, a_n)$.

Das Ganze ist hier — und bei ähnlichen Gegebenheiten im folgenden — für $n = 1$ natürlich ‚richtig' zu lesen:

$$\prod_{\nu=1}^{n} A_\nu := A_1 \times \cdots \times A_n := A_1 \quad \text{und} \quad (a_1, \ldots, a_n) := \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} := a_1 .$$

Zwischen (a_1) und a_1 unterscheiden wir dabei im allgemeinen nicht!

Sind die Mengen A_ν alle gleich einer festen Menge A, so notiert man auch

$$A^n := \prod_{\nu=1}^{n} A_\nu, \qquad \text{also zum Beispiel} \qquad A^2 := A \times A .$$

Daß auch hier die Reihenfolge der Einträge (i. a.) sehr wichtig ist, sieht man beispielsweise an ‚Konfektionsmaßen': $(85, 70, 80) \neq (70, 80, 85)$.

1.2 Aussagen und Quantoren

Eine *„Aussage"* ist ein sprachliches Gebilde, von dem man entscheiden kann, ob es *wahr* oder *falsch* ist.

(B1) (a) FCKWs enthalten Fluor, Chlor, Kohlenstoff und Wasserstoff.

(b) $17 \in I\!N$

(c) Onkel Otto hat eine Glatze.

(d) Das Weihnachtsfest wird in diesem Jahr am 05.05. gefeiert.

Auch hier gehen wir bei Beispielen aus dem Alltagsbereich — wie schon bei den Mengen erläutert — davon aus, daß der ‚Rahmen' und der situative Kontext irgendwie geklärt sind. Deutlich sieht man diese Notwendigkeit, gegebenenfalls Dinge vorweg zu präzisieren, etwa am Beipiel (c): Onkel Otto selbst wird sich vielleicht gegen diese krasse Formulierung wehren: „Ich habe keine Glatze, sondern nur ..." und dabei beschönigendere Worte für die schwindende Haarpracht finden.

Es kommt *nicht* darauf an, daß wir (ich, Sie oder Tante Anna) entscheiden können, ob eine Aussage wahr oder falsch ist, sondern darauf, daß eine solche Entscheidung prinzipiell möglich ist. Jeder Aussage läßt sich also einer der *„Wahrheitswerte"* wahr (**w**) oder falsch (**f**) zuordnen.

(B2) (e) „Hallo, Freunde!"

(f) „Was kostet das?"

(g) „Nicht naschen!"

(h) $x + 3 = 8$

Diese vier — durchaus sinnvollen — sprachlichen Gebilde sind *keine* Aussagen.

Auch „□ ist eine Großstadt" ist keine Aussage. Erst wenn das Zeichen „□" durch den Namen eines Objektes ersetzt wird, ergibt sich eine Aussage. □ nennt man eine *„Variable"*. Sie dient in dem aufgeführten sprachlichen Gebilde zur Darstellung einer Informationslücke. Mit Hilfe von Variablen können wir ein Schema bauen, das nach Ersetzen der Variablennamen durch Objektnamen Aussagen liefert. So ein Schema nennen wir eine *„Aussageform"*. (Auch das Beispiel (h) enthält demnach eine Aussageform (mit der Variablen x).)

Aus „□ ist eine Großstadt" gewinnen wir zum Beispiel die Aussagen:

w: Berlin ist eine Großstadt, Hamburg ist eine Großstadt

f: Kleinkleckersdorf ist eine Großstadt, Kartoffel ist eine Großstadt

Meist werden Symbole wie „x", „y", „z", ... statt „□" (oder ...) als Variablennamen verwendet.

Zusammensetzen von Aussagen $P, Q, R, \ldots$ seien Aussagen

(Konjunktion)	$\boldsymbol{P \wedge Q}$	ist genau dann wahr, wenn P und Q wahr sind.
(Disjunktion)	$\boldsymbol{P \vee Q}$	ist genau dann wahr, wenn mindestens eine der Aussagen P und Q wahr ist. Es handelt sich also um *„oder" im nicht ausschließenden Sinne* (lateinisch ‚vel'). Für das „ausschließende oder" (lateinisch ‚aut') führen wir kein gesondertes Symbol ein.
(Negation)	$\boldsymbol{\neg P}$	ist genau dann wahr, wenn P falsch ist.
(Implikation)	$\boldsymbol{P \Rightarrow Q}$	(Alternativ schreibt man dafür auch: $\boldsymbol{Q \Leftarrow P}$, $\boldsymbol{P \curvearrowright Q}$ oder $\boldsymbol{Q \curvearrowleft P}$.) Gelesen wird diese Aussage als: *„Wenn P, dann Q"*, *„Aus P folgt Q"*, *„P impliziert Q"*, *„Q ist notwendig für P"*, *„P ist hinreichend für Q"*, ... $P \Rightarrow Q$ ist genau dann wahr, wenn P falsch ist oder P und Q wahr sind. [1]
(Äquivalenz)	$\boldsymbol{P \Leftrightarrow Q}$	(Hierzu findet man häufig auch die Notierung: $\boldsymbol{P \curvearrowleft\!\!\curvearrowright Q}$.) Man liest: *„P genau dann, wenn Q"*, *„P dann und nur dann, wenn Q"* oder *„P und Q sind äquivalent"*. $P \Leftrightarrow Q$ ist genau dann wahr, wenn P und Q wahr sind oder P und Q falsch sind, wenn also P und Q den gleichen Wahrheitswert haben.

Es gibt Aussageverbindungen, die nur auf Grund ihrer logischen Struktur immer wahr sind, unabhängig davon, wie man die Wahrheitswerte auf die darin vorkommenden Aussagen verteilt (und natürlich auch unabhängig vom

[1] Daß aus einer falschen Aussage ‚alles' folgt, ist gewiß gewöhnungsbedürftig. Schauen Sie sich dazu zum Beispiel die Übungsaufgabe (3) an.

Inhalt solcher Aussagen):

Allgemeingültige Aussagen, Tautologien:

$\boldsymbol{P} \vee (\neg \boldsymbol{P})$	(Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten)
$\neg (\boldsymbol{P} \wedge (\neg \boldsymbol{P}))$	(Gesetz der Kontradiktion)
$((\boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{Q}) \wedge (\boldsymbol{Q} \Rightarrow \boldsymbol{R})) \Rightarrow (\boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{R})$	(Gesetz vom Syllogismus)
$\boldsymbol{P} \Leftrightarrow (\neg (\neg \boldsymbol{P}))$	(Gesetz der doppelten Verneinung)
$(\boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{Q}) \Leftrightarrow ((\neg \boldsymbol{Q}) \Rightarrow (\neg \boldsymbol{P}))$	(Gesetz der Kontraposition)

Wir haben hier — beispielsweise — Klammern zur Trennung von Aussagen benutzt. Will man derartige Trennzeichen vermeiden oder zumindest reduzieren, dann muß man dazu Regeln über Prioritäten festlegen, wie sie etwa bei algebraischen Ausdrücken (‚Punktrechnung geht vor Strichrechnung') von der Schule her bekannt sind.

„Ein Tennispieler der ‚top ten' verdient gut."

„Ein Tennispieler der ‚top ten' hat am letzten Wochenende geheiratet."

sind Sätze unserer Umgangssprache, die zwar gleich gebildet sind, aber — prinzipiell — durchaus verschiedene Aussagen machen:
Den ersten Satz versteht man wohl meist so, daß *jeder* Tennispieler der ‚top ten' gut verdient. Bei dem zweiten Satz meint man hingegen, daß (mindestens) *ein* Tennispieler der ‚top ten' am letzten Wochenende geheiratet hat.

Die mathematische Logik stellt eine Sprache und damit auch eine Symbolik bereit, die es ermöglicht, solche Unterschiede besonders deutlich zu machen:

$A(x), B(x)$ seien Aussageformen (M Menge und $x \in M$):

$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{M}\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$: Für *alle* $x \in M$ gilt $A(x)$.

$\exists \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{M}\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$: Es *existiert* (mindestens) ein $x \in M$, für das $A(x)$ gilt.

Wir nennen gelegentlich $\forall$ *„Allquantor"* und $\exists$ *„Existenzquantor"*.
Manche Autoren schreiben statt „$\forall x \in M\ A(x)$" auch „$\bigwedge_{x \in M} A(x)$" beziehungsweise „$\bigvee_{x \in M} A(x)$" für die Existenzaussage.

Manchmal wollen wir bei der Existenzaussage betonen, daß *genau ein* Element (*ein und nur ein*, d.h. eins, aber nicht mehrere) mit der beschriebenen Eigenschaft existiert. Dafür notieren wir:

$\dot{\exists}\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{M}\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$: Es gibt *genau ein* $x \in M$, das die Aussage $A(x)$ erfüllt.

Wir stellen für den Umgang mit diesen neuen Notierungsweisen einige

Grundregeln, die wohl unmittelbar einsichtig sind, zusammen:

$$\begin{aligned}
\forall x \in M \ A(x) &\iff \neg\left(\exists x \in M \ \neg A(x)\right)\\
\exists x \in M \ A(x) &\iff \neg\left(\forall x \in M \ \neg A(x)\right)\\
\forall x \in M \ \left(A(x) \wedge B(x)\right) &\iff \left(\forall x \in M \ A(x)\right) \wedge \left(\forall x \in M \ B(x)\right)\\
\exists x \in M \ \left(A(x) \vee B(x)\right) &\iff \left(\exists x \in M \ A(x)\right) \vee \left(\exists x \in M \ B(x)\right)
\end{aligned}$$

Für die folgenden drei Aussagen seien M, N Mengen und $A(x,y)$ eine Aussageform $\quad ((x,y) \in M \times N)$:

$$\begin{aligned}
\forall x \in M \ \left(\forall y \in N \ A(x,y)\right) &\iff \forall y \in N \ \left(\forall x \in M \ A(x,y)\right)\\
\exists x \in M \ \left(\exists y \in N \ A(x,y)\right) &\iff \exists y \in N \ \left(\exists x \in M \ A(x,y)\right)\\
\exists x \in M \ \left(\forall y \in N \ A(x,y)\right) &\implies \forall y \in N \ \left(\exists x \in M \ A(x,y)\right)
\end{aligned}$$

Die der dritten Regel entsprechende Aussage, wenn man $\wedge$ durch $\vee$ ersetzt, ist (in der Richtung von links nach rechts) falsch:

$$\forall x \in M \ \left(A(x) \vee B(x)\right) \quad \not\Longrightarrow \quad \left(\forall x \in M \ A(x)\right) \vee \left(\forall x \in M \ B(x)\right)$$

Ebenso wird die der vierten Aussage entsprechende Aussage (in der Richtung von rechts nach links) falsch, wenn man $\vee$ durch $\wedge$ ersetzt:

$$\exists x \in M \ \left(A(x) \wedge B(x)\right) \quad \not\Longleftarrow \quad \left(\exists x \in M \ A(x)\right) \wedge \left(\exists x \in M \ B(x)\right)$$

Beides wird sofort klar, wenn man das folgende Beispiel betrachtet:

(B3) Es sei $M := \{\text{Einwohner von Konstanz am } 24.12.1995\}$,
$A(x)$ bedeute: x ist weiblich, $B(x)$ bedeute: x ist männlich $(x \in M)$.

Speziell auch bei der siebten Regel ist es ganz wichtig, sich zu verdeutlichen, daß die ‚Umkehrung' nicht gilt:

$$\exists x \in M \ \left(\forall y \in N \ A(x,y)\right) \quad \not\Longleftarrow \quad \forall y \in N \ \left(\exists x \in M \ A(x,y)\right)$$

Da dieser Sachverhalt erfahrungsgemäß vielen Schwierigkeiten macht, will ich ihn besonders ausführlich erläutern:

Auf der linken Seite heißt es: Es gibt ein (generelles) x in M, das die Eigenschaft $A(x,y)$ für jedes y in N hat. Rechts steht dagegen, daß zu jedem $y \in N$ ein (meist ‚privates') $x \in M$ mit $A(x,y)$ existiert. Den wesentlichen Unterschied erkennt man gut in den folgenden Situationen:

(B4) (a) Zu jedem Topf gibt es einen passenden Deckel, aber es gibt nicht *einen* Deckel, der auf alle Töpfe paßt (wenn diese unterschiedliche Größe haben).

(b) Jedes Kind hat eine Mutter (die möglicherweise schon verstorben ist). Es gibt aber nicht *eine* Frau, die diese Eigenschaft (Mutter zu sein) für alle Kinder hat.

(c) Wenn die Bedienung in der Kneipe zur Abrechnung an einen Tisch kommt, so ist es ihr wichtig, daß für jedes (an diesem Tisch getrunkene) Bier sich eine Person findet, die dieses bezahlt. Der andere Sachverhalt kommt beispielsweise an einem Geburtstag vor, wenn einer zur Feier des Tages alle Biere bezahlt.

Mit den oben notierten ersten beiden Grundregeln (und dem Gesetz von der doppelten Verneinung) kann man beliebig komplizierte Aussagen ganz einfach negieren (Quantoren ‚rumdrehen' und Negationszeichen ‚durchschieben').

‚Automatische' Negation von Aussagen: Zum Beispiel:

$$\begin{aligned} \neg\big(\forall x \in M\ \exists y \in N\ A(x,y)\big) &\iff \exists x \in M\ \neg\big(\exists y \in N\ A(x,y)\big) \\ &\iff \exists x \in M\ \forall y \in N\ \neg A(x,y) \end{aligned}$$

Der aufmerksame Leser wird bemerkt haben, daß wir hier schon einige Klammern weggelassen haben. Dies werden wir auch im folgenden häufig tun, wenn keine Mißverständnisse zu befürchten sind.

1.3 Abbildungen und ihre Eigenschaften

Unter einer *„Abbildung" von* einer Menge A *in* eine Menge B versteht man eine Vorschrift, die *jedem* Element von A *genau ein* Element von B zuordnet.

Als Namen für solche Zuordnungsvorschriften wählt man oft die Zeichen „f", „g", „h", ... oder „F", „G", „H", ...

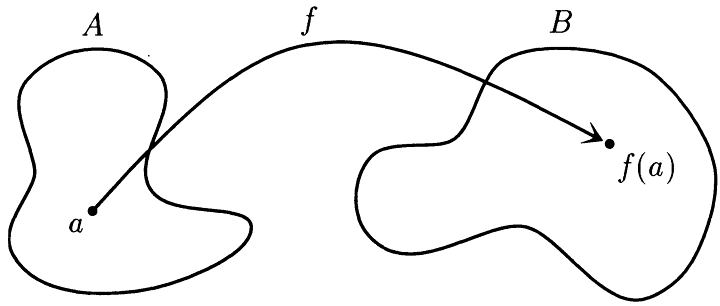
Eine Abbildung f von A nach B bezeichnet man kurz durch eine der folgenden vier Notierungsweisen:

$$f : A \longrightarrow B\,, \qquad A \xrightarrow{f} B\,, \qquad \begin{array}{ccccc} f & : & A & \longrightarrow & B \\ & & \rotatebox[origin=c]{90}{$\in$} & & \rotatebox[origin=c]{90}{$\in$} \\ & & a & \longmapsto & f(a) \end{array} \qquad \text{oder} \qquad A \ni a \longmapsto f(a) \in B$$

(Ist es klar, um welche Mengen A und B es sich handelt, so spricht man kurz von einer Abbildung f; statt „Abbildung" sagt man auch *„Funktion"*, besonders dann, wenn A und B Mengen von Zahlen sind.

Wir haben hier das Zeichen „$\in$" gedreht, was wir auch bei ähnlichen Notierungsweisen gelegentlich ohne besonderen Kommentar machen; dies sollte von sich aus verständlich sein.)

Oft veranschaulicht man Sachverhalte über Abbildungen durch eine Skizze, wie etwa:



Für eine Abbildung $f : A \longrightarrow B$ bezeichnen wir

A als *„Definitionsbereich"*, B als *„Zielbereich"*,

$A \ni a$ als *„Argument"* oder *„Urbild"* von $f(a)$, das wir als *„Funktionswert"* oder *„Bild"* (von a unter f) ansprechen.

Für $C \subset A$: $\quad f(C) := \{f(a) : a \in C\}$ *„Bild(menge)"* von C.

$f^{-1}(D) := \{a \in A : f(a) \in D\}$ *„Urbild(menge)"* von $D \subset B$.

(Durch $f^{-1}(D)$ wird in keiner Weise eine ‚Umkehrabbildung' oder dergleichen definiert!)

Oft wird auch der Definitionsbereich als Teilmenge einer vorab betrachteten Grundmenge X definiert und mit D_f bezeichnet. $f(D_f)$ heißt dann *„Wertebereich"*.

(B1) (a) $X := \{\text{Frauen in Konstanz}\}$, f ordne jeder Frau aus X die Anzahl ihrer Kinder zu. $f : X \longrightarrow \mathbb{N}_0$, wobei $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$

(b) f ordne jedem Element von $\mathbb{N}^2$ die Summe der Komponenten zu: $\quad f((n,m)) := n + m \quad$ oder

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{N}^2 & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & \text{\rotatebox{90}{$\in$}} & & \text{\rotatebox{90}{$\in$}} \\ & (n,m) & \longmapsto & n+m \end{array}$$

Statt „$f((n,m))$" notieren wir in der Regel kürzer „$f(n,m)$".

(c) $X := \{\text{Hörer einer (bestimmten) Vorlesung}\}$,
$D_f := \{\text{Teilnehmer an der zugehörigen Klausur}\}$,
$B := \{1,2,3,4,5,6\}$,
f ordne jedem Teilnehmer sein Klausurergebnis ($\in B$) zu.

(d) In einer automatischen Wetterstation werden mit Hilfe einer gleichmäßig rotierenden Walze z.B. die Temperaturen in Abhängigkeit von der Zeit aufgetragen.

Zwei *Abbildungen* betrachten wir als *„gleich"*, wenn ihre Definitionsbereiche, Zielbereiche und Zuordnungsvorschriften übereinstimmen!

Das ist ähnlich wie bei einer Reise: Es kommt (u.a.) auf Abfahrtsort, Zielort und Art der Fortbewegung an.

A, B seien Mengen und $f : A \longrightarrow B$:

$$f \text{ „}\textit{injektiv}\text{“} \;:\Longleftrightarrow\; \forall\,(x,y) \in A^2 \quad \big(f(x) = f(y) \implies x = y\big)$$

$$\begin{aligned} f \text{ „}\textit{surjektiv}\text{“} \;&:\Longleftrightarrow\; \forall\, b \in B\ \exists\, a \in A\ f(a) = b \\ &\Longleftrightarrow\; f(A) \supset B \quad (\Longleftrightarrow\; f(A) = B) \end{aligned}$$

$$f \text{ „}\textit{bijektiv}\text{“} \;:\Longleftrightarrow\; f \text{ injektiv} \wedge f \text{ surjektiv}$$

Statt *„injektiv“* wird auch oft *„eineindeutig“* gesagt, und statt *„surjektiv“* spricht man auch von einer Abbildung von A *„auf“* B.

Eine injektive Abbildung notiert man gelegentlich kurz mit $\boxed{f : A \hookrightarrow B}$, entsprechend $\boxed{f : A \twoheadrightarrow B}$ für eine surjektive und $\boxed{f : A \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow B}$ für eine bijektive Abbildung. Wir werden diese Notierungsweisen aber nicht benutzen.

Veranschaulicht man eine Abbildung $f : A \longrightarrow B$ graphisch und dabei die Zuordnung als Menge von Pfeilen, so bedeutet *surjektiv*, daß bei jedem $b \in B$ (mindestens) ein Pfeil endet (jedes $b \in B$ kommt einmal als Wert dran). Die *Injektivität* erkennt man dann daran, daß bei keinem $b \in B$ mehr als ein Pfeil endet (verschiedene Argumente haben verschiedene Bilder).

(B2) (a) $\begin{array}{ccc} f : I\!\!N & \longrightarrow & I\!\!N \\ \text{\rotatebox{90}{$\in$}} & & \text{\rotatebox{90}{$\in$}} \\ n & \longmapsto & n+1 \end{array}$ $\qquad$ $\begin{array}{ccc} g : I\!\!N_0 & \longrightarrow & I\!\!N \\ \text{\rotatebox{90}{$\in$}} & & \text{\rotatebox{90}{$\in$}} \\ n & \longmapsto & n+1 \end{array}$

$f \neq g$ (denn die Definitionsbereiche sind verschieden), f ist injektiv, nicht surjektiv; g ist bijektiv.

(b) $\begin{array}{ccc} f : I\!\!N & \longrightarrow & I\!\!N \\ \text{\rotatebox{90}{$\in$}} & & \text{\rotatebox{90}{$\in$}} \\ n & \longmapsto & n^2 \end{array}$ $\qquad$ $\begin{array}{ccc} g : I\!\!N & \longrightarrow & I\!\!N \\ \text{\rotatebox{90}{$\in$}} & & \text{\rotatebox{90}{$\in$}} \\ n & \longmapsto & (n-1)(n-1)+2n-1 \end{array}$

$f = g$, f ist injektiv, nicht surjektiv.

(c) $\begin{array}{ccc} f : I\!\!N & \longrightarrow & I\!\!N \\ \text{\rotatebox{90}{$\in$}} & & \text{\rotatebox{90}{$\in$}} \\ n & \longmapsto & 1 \end{array}$ $\qquad$ $\begin{array}{ccc} g : I\!\!N & \longrightarrow & \{1\} \\ \text{\rotatebox{90}{$\in$}} & & \text{\rotatebox{90}{$\in$}} \\ n & \longmapsto & 1 \end{array}$

$f \neq g$ (da Zielbereiche verschieden), f ist nicht injektiv und nicht surjektiv, g ist surjektiv, aber nicht injektiv.

(d) $\begin{array}{ccc} f : I\!\!N & \longrightarrow & I\!\!N \\ \text{\rotatebox{90}{$\in$}} & & \text{\rotatebox{90}{$\in$}} \\ j & \longmapsto & j \end{array}$ $\qquad$ $\begin{array}{ccc} g : \{1,2,\ldots,10\} & \longrightarrow & I\!\!N \\ \text{\rotatebox{90}{$\in$}} & & \text{\rotatebox{90}{$\in$}} \\ j & \longmapsto & j \end{array}$

$f \neq g$ (da Definitionsbereiche verschieden), f ist bijektiv, g ist injektiv, aber nicht surjektiv.

Zusammensetzung (Hintereinanderausführung) **von Abbildungen**:
A, B, C, D, E, F seien Mengen und $f : A \longrightarrow B$, $g : C \longrightarrow D$, $h : E \longrightarrow F$:

$$D_{g\circ f} := \{x \in A : f(x) \in C\}, \quad \boldsymbol{gf} := \boldsymbol{g \circ f} : \begin{array}{ccc} D_{g\circ f} & \longrightarrow & D \\ \cup\!\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\!\shortmid \\ x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$$

Bemerkung *Es gilt* $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f =: h \circ g \circ f,$
insbesondere $D_{h\circ(g\circ f)} = D_{(h\circ g)\circ f}$.

Es kommt also bei der Zusammensetzung von mehreren Abbildungen nicht darauf an, wie geklammert wird. Ich führe den <u>Beweis</u>, den Sie aber getrost überschlagen oder vergessen dürfen, aus:

$$\begin{aligned}
x \in D_{h\circ(g\circ f)} &\iff x \in D_{g\circ f} \wedge (g \circ f)(x) \in D_h = E \\
&\iff x \in D_f = A \wedge f(x) \in D_g = C \wedge g(f(x)) \in E \\
x \in D_{(h\circ g)\circ f} &\iff x \in D_f = A \wedge f(x) \in D_{h\circ g} \\
&\iff x \in D_f = A \wedge f(x) \in D_g = C \wedge g(f(x)) \in D_h = E
\end{aligned}$$

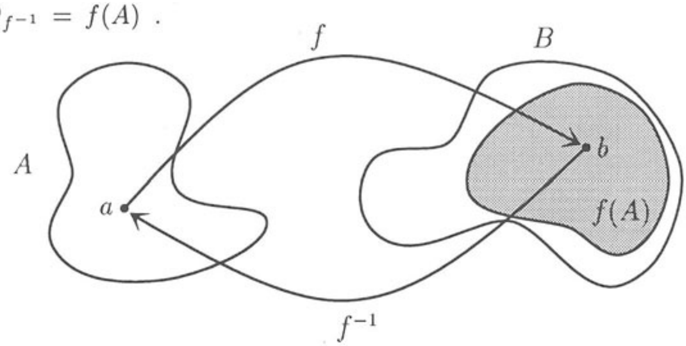
Für solche x gilt: $(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)))$
$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$. □

Wir benutzen im gesamten Text mehrfach die folgenden beiden
Bezeichnungen: $id_A : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A \\ \cup\!\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\!\shortmid \\ a & \longmapsto & a \end{array}$ und $\mathfrak{F}(A, B) := \{f \mid f : A \longrightarrow B\}$

Wir sprechen id_A als *„Identität auf A"* oder als *„identische Abbildung auf A"* an. $\mathfrak{F}(A, B)$ ist die Menge aller Abbildungen von A in B.

Umkehrabbildung:

A, B seien Mengen und $f : A \longrightarrow B$ eine *injektive* Abbildung.
Für alle $b \in f(A)$ existiert dann *eindeutig* ein $a \in A$ mit $f(a) = b$. Die Abbildung, die jedem $b \in f(A)$ gerade dieses $a \in A$ zuordnet, bezeichnen wir mit $\boxed{f^{-1}}$ und sprechen von der *„Umkehrabbildung zu f"*. Es gilt also insbesondere $D_{f^{-1}} = f(A)$.



Nach Definition von f^{-1} gilt offenbar:

(0) $\quad f(a) = b \iff f^{-1}(b) = a \quad$ für $(a,b) \in A \times f(A)$.

Weiter erhält man:

(1) $\quad \forall a \in A \quad f^{-1}(f(a)) = a$

(2) $\quad \forall b \in f(A) \quad f\left(f^{-1}(b)\right) = b$

(3) $\quad f^{-1} : f(A) \longrightarrow A$ ist bijektiv

(4) $\quad \left(f^{-1}\right)^{-1} = f$

Der Beweis von (1) und (2) ist unmittelbar durch (0) gegeben. (3): Nach (1) ist f^{-1} surjektiv, nach (2) ist f^{-1} injektiv; denn (1) zeigt, daß zu beliebigem $a \in A$ gerade $f(a)$ ein Urbild unter f^{-1} ist, und (2) liefert, daß für $b_1, b_2 \in f(A)$ aus $f^{-1}(b_1) = f^{-1}(b_2)$ (durch Anwendung von f) $b_1 = b_2$ folgt. (4): Nach Definition der Umkehrabbildung ist der Definitionsbereich von $\left(f^{-1}\right)^{-1}$ das Bild von $D_{f^{-1}} = f(A)$ unter f^{-1}, also nach (1) gerade $A = D_f$. Für $a \in A = D_f$ und $b := f(a)$ zeigt (0) zunächst $f^{-1}(b) = a$ und weiter (jetzt angewendet auf f^{-1} statt f) $b = \left(f^{-1}\right)^{-1}(a)$. □

Im Zusammenhang mit der Umkehrabbildung tritt eine — allgemein übliche — Doppelbezeichnung auf, die ich kurz erläutern möchte: Einerseits bezeichnet $f^{-1}(B')$ für $B' \subset B$ das Urbild von B' unter f, andererseits — falls f injektiv ist und $B' \subset f(A)$ gilt — das Bild von B' unter der Umkehrabbildung f^{-1}. Zunächst sind das natürlich zwei verschiedene Dinge. Wir notieren jedoch hierzu die

Bemerkung *Ist f injektiv und $B' \subset f(A)$, dann stimmen das Bild von B' unter f^{-1} und das Urbild von B' bezüglich f überein.*

Die Bezeichnungen sind also, wenn beide Bildungen sinnvoll sind, konsistent; die Doppelbezeichnung ist daher nicht störend. Für diejenigen Leser, die es ganz genau wissen wollen, notiere ich einen Beweis: Ein Element $a \in A$ liegt im Bild von B' unter f^{-1} genau dann, wenn es ein $b \in B'$ mit $f^{-1}(b) = a$ gibt. Nach (0) ist dies gleichbedeutend dazu, daß es ein $b \in B'$ gibt mit $f(a) = b$, und das bedeutet gerade, daß a im Urbild von B' bezüglich f liegt. □

Graph einer Abbildung:

Von der Schule her dürfte den meisten Lesern die graphische Darstellung von Funktionen zumindest in einfachen Spezialfällen vertraut sein: Man trägt die einzelnen Wertepaare in einem Koordinatensystem in der x-y-Ebene ein. Dem entspricht allgemeiner:

Sind A, B Mengen und $f : A \longrightarrow B$ eine Abbildung, so bezeichnet man

$$G(f) := \{(a, f(a)) : a \in A\}$$

als „*Graphen von* f“.

Einschränkung von Abbildungen:

Oft kommt es vor, daß man eine gegebene Abbildung nur auf einem Teilbereich des Definitionsbereiches betrachtet, etwa weil einen die anderen Bereiche nicht interessieren oder sie bewußt ausgeschlossen werden sollen. Seien dazu wieder A, B Mengen und $f : A \longrightarrow B$ eine Abbildung. Für eine Menge $A' \subset A$ bezeichnen wir die Abbildung, die auf diesem Teilbereich mit f übereinstimmt, als „*Einschränkung von* f *auf* A'“ und notieren

$$f_{/A'} := f_{/} : \begin{array}{ccc} A' & \longrightarrow & B \\ \Psi & & \Psi \\ a & \longmapsto & f(a) \end{array}$$

1.4 Die reellen Zahlen

Für die klassische Analysis sind die „*reellen Zahlen*“ von entscheidender Bedeutung; sie bilden ihr Fundament. Daher müssen wir uns vorweg relativ ausführlich mit ihnen beschäftigen. Denn auch für diejenigen, die die Mathematik lediglich als Hilfswissenschaft benutzen, ist die Beherrschung der reellen Zahlen unentbehrlich.

Der scheinbar naheliegende Weg, die reellen Zahlen ‚von unten‘ her zu beschreiben, das heißt die natürlichen Zahlen zu den ganzen Zahlen und dann weiter zu den rationalen Zahlen zu erweitern und schließlich die reellen Zahlen einzuführen, ist aufwendig und langwierig, nicht gerade einfach (die Schwierigkeit liegt im letzten Schritt!) und für den angesprochenen Leserkreis eigentlich unzumutbar. Auch die Idee, die reellen Zahlen als Dezimalbrüche oder als ‚Punkte‘ auf der ‚Zahlengeraden‘ zu definieren, führt zu nicht unerheblichen Schwierigkeiten, wenn der Aufbau mathematisch exakt sein soll.

Stattdessen beschreiben wir *axiomatisch*, was wir unter reellen Zahlen verstehen wollen, und kümmern uns dabei nicht um diesbezügliche Existenz- und Eindeutigkeitsüberlegungen. Wir stellen einige grundlegenden Eigenschaften, der reellen Zahlen, „*Axiome*“ genannt, zusammen, die wir nicht weiter diskutieren und hinterfragen wollen, quasi als unumstößliche Grundwahrheiten oder Ansammlung von Gesetzen. Allein darauf zurückgreifend, entwickeln wir dann alles weitere streng deduktiv. Natürlich wird man dabei bemüht sein, mit wenigen, einfachen und übersichtlichen Grundeigenschaften auszukommen und das Wesentliche herauszukristallisieren.

Dieses Vorgehen ist weit verbreitet, weil es ökonomisch ist und vielfältige Vorteile bietet. Wenn Sie dabei zunächst einmal Schwierigkeiten haben, so ist das völlig normal; diese Vorgehensweise ist nicht einfach! Gegebenenfalls sollten Sie den ganzen Abschnitt nur überfliegen und später darauf zurückkommen oder nur gelegentlich zurückblättern, statt an dieser Stelle zu viel Zeit aufzuwenden. Werfen Sie aber auch nicht zu früh das Handtuch!

Nur nebenbei sollten Sie zur Kenntnis nehmen, daß eine logisch saubere Fundierung der reellen Zahlen mit einem konstruktiven Aufbau, ausgehend von den natürlichen Zahlen, möglich ist.

Neben vertrauten Regeln über Addition, Multiplikation und Anordnung (Ungleichungen) tritt als entscheidende zusätzliche Forderung das Axiom der *„Vollständigkeit"*, dessen Behandlung wir aber, weil dieses Gesetz deutlich schwieriger als die anderen ist, zunächst etwas zurückstellen.

Bei diesem axiomatischen Vorgehen muß der Bezug zur Anschauung und zu dem von der Schule her Vertrauten im nachhinein hergestellt werden. Manche Dinge, die selbstverständlich scheinen, müssen dann noch bewiesen werden.

1.4.1 Axiome und erste Folgerungen

Bei den folgenden Axiomen kommen u.a. Begriffe wie *„Kommutativität"* und *„Assoziativität"* für Addition und Multiplikation vor. Man ist leicht geneigt, diese wichtigen Eigenschaften als banal anzusehen. Deshalb weise ich vorweg darauf hin, daß es ein besonderer Glücksfall ist, wenn Operationen kommutativ und assoziativ sind, weil dann der Umgang mit ihnen besonders einfach wird. Die *Kommutativität* bedeutet, daß es bei der Verknüpfung von je zwei Elementen nicht auf die Reihenfolge ankommt, zum Beispiel im folgenden $a + b = b + a$ oder $a \cdot b = b \cdot a$ für reelle Zahlen a und b. Schon die Subtraktion liefert ein Beipiel für eine Operation, die nicht kommutativ ist; denn es ist $3 - 5 \neq 5 - 3$. Auch bei der Zusammensetzung von Wörtern hat man keine Kommutativität, es kommt auf die Reihenfolge an: Ein Hausmädchen ist etwas anderes als ein Mädchenhaus. Natürlich ist auch bei fast allen Vorgängen im täglichen Leben beim zeitlichen Ablauf die Reihenfolge wesentlich: Beim Autofahren tritt man zuerst die Kupplung und legt erst dann den Gang ein. (Der Versuch der umgekehrten Reihenfolge führt zu einem anderen Ergebnis.) Diejenigen, die sich vor Jahren mit dem RUBIK–Cube („Zauberwürfel") beschäftigt haben, wissen, daß die Schwierigkeit in der hochgradigen Nicht–Kommutativität der einzelnen Operationen liegt; es kommt entscheidend auf die Reihenfolge an.

Die *Assoziativität* bedeutet, daß bei der Verknüpfung von drei Elementen die Art der Klammersetzung keine Rolle spielt: Für reelle Zahlen hat man zum Beispiel: $(a + b) + c = a + (b + c)$ (Assoziativität der Addition) und entsprechend $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (Assoziativität der Multiplikation). Auch hier liefert wieder die Subtraktion ein einfaches und wichtiges Beispiel einer Operation für Zahlen, die nicht assoziativ ist: $(9 - 7) - 2 \neq 9 - (7 - 2)$. Beispiele aus dem sprachlichen Bereich, die deutlich machen, daß die Art der Klammerung ganz wesentlich ist, sind etwa: ‚Mädchenhandelsschule', ‚Kindergartenfest‘ und ‚Urinsekten‘.

Nach diesen langen Vorbemerkungen stellen wir nun die **Axiome der Reellen Zahlen** zusammen:

Es sei $\mathbb{R}$ eine nicht–leere Menge, die wir im folgenden als *„Menge der reellen Zahlen“* ansprechen.

Daneben seien zwei Abbildungen — *„Addition“* und *„Multiplikation“* —

$$\begin{array}{ccccccc} + : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} & \text{und} & \cdot : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} & \\ (a,b) \longmapsto a+b & & (a,b) \longmapsto a\cdot b =: \boldsymbol{ab} & \text{gegeben.} \end{array}$$

Schließlich sei noch eine Teilmenge $\mathbb{P}$ von $\mathbb{R}$ ausgezeichnet, die wir als *„Menge der positiven reellen Zahlen“* bezeichnen.

Es gelten für die Addition auf $\mathbb{R}$ die folgenden vier Gesetze:

(A1) $\forall a,b,c \in \mathbb{R} \quad (a+b)+c = a+(b+c) =: \boldsymbol{a+b+c}$
(*„Assoziativität der Addition“*)

(A2) $\forall a,b \in \mathbb{R} \quad a+b = b+a$ (*„Kommutativität der Addition“*)

(A3) $\exists\, \mathbf{0} \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} \forall a \in \mathbb{R} \quad a+0=a \\ \forall a \in \mathbb{R} \quad \exists\, \boldsymbol{-a} \in \mathbb{R} \quad a+(-a) = 0 \end{cases}$ (*„Null* oder *Nullelement“*)
(A4)

(*„Inverses Element zu a bezüglich +“*, meist gelesen als *„minus a“*)

Für die Multiplikation gelten ganz analog — bis auf die Sonderstellung der Null — :

(M1) $\forall a,b,c \in \mathbb{R} \quad (a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c) =: \boldsymbol{a\cdot b\cdot c} =: \boldsymbol{abc}$
(*„Assoziativität der Multiplikation“*)

(M2) $\forall a,b \in \mathbb{R} \quad a\cdot b = b\cdot a$ (*„Kommutativität der Multiplikation“*)

(M3) $\exists\, \mathbf{1} \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ $\begin{cases} \forall a \in \mathbb{R} \quad a\cdot 1 = a \\ \forall a \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \quad \exists\, \boldsymbol{a^{-1}} \in \mathbb{R} \quad a\cdot a^{-1} = 1 \end{cases}$ (*„Eins* oder *Einselement“*)
(M4)

(*„Inverses Element zu a bezüglich ·“*, meist gelesen als *„a hoch minus* 1*“*)

Für die Verbindung von Addition und Multiplikation gelte:

(D) $\forall a,b,c \in \mathbb{R} \quad a\cdot(b+c) = (a\cdot b) + (a\cdot c)$ (*„Distributivität“*)

Die Menge $\mathbb{P}$, die die *„Anordnung“* beschreibt, erfülle die Gesetze:

(P1) Für jede reelle Zahl a gilt genau eine der drei Aussagen:
$a = 0, \quad a \in \mathbb{P}$ oder $-a \in \mathbb{P}$

(P2) $a \in \mathbb{P} \wedge b \in \mathbb{P} \Longrightarrow a+b \in \mathbb{P}$

(P3) $a \in \mathbb{P} \wedge b \in \mathbb{P} \Longrightarrow a\cdot b \in \mathbb{P}$

Als letztes Axiom gelte die schon angesprochene *„Vollständigkeit“*:

(V)	*Jede nicht-leere nach oben beschränkte Teilmenge reeller Zahlen besitzt eine kleinste obere Schranke.*

Zu diesem System von Axiomen ist nun zunächst einiges zu kommentieren, erläutern und ergänzen:

Die Mathematiker haben für diese Art der Beschreibung der reellen Zahlen eine sehr gelehrt klingende kurze Formulierung: Kennzeichnung von *„$\mathbb{R}$ als vollständiger, archimedisch angeordneter Körper“*. Damit möchte ich aber niemand erschrecken; das dürfen Sie getrost gleich wieder vergessen!

Zum Beispiel bei dem Distributivgesetz ist man von der Schule her gewohnt, die Klammern rechts wegzulassen, also kürzer $a \cdot b + b \cdot c$ oder nur $ab + bc$ statt $(a \cdot b) + (a \cdot c)$ zu notieren, weil man vereinbart: *Punktrechnung geht vor Strichrechnung.* Hier soll also die Multiplikation stärker ‚binden‘ als die Addition. Man erspart sich viele lästige Klammern, wenn man vereinbart, was zuerst ausgerechnet wird, falls keine Klammern gesetzt sind.

Das Axiom **(V)** lassen wir, wie schon erwähnt, für eine Weile außer acht! Wir kommen erst später darauf zurück.

Wir beschränken uns zunächst einmal auf $(\mathbb{R}, +)$ mit den Axiomen **(A1) bis (A4)** und ziehen allein aus diesen vier Gesetzen Folgerungen. Mathematiker sagen dafür: *„$(\mathbb{R}, +)$ ist eine abelsche (*oder *kommutative) Gruppe“.*

Wir benutzen natürlich die vertrauten Sprechweisen: Für $a + b$ heißen a und b *„Summanden“* und $a + b$ *„Summe“.*

Kommutativität und Assoziativität haben wir schon vorweg hinreichend kommentiert. Wir beschäftigen uns daher jetzt vorrangig mit (A3) und (A4):

(1) Bemerkung *Das Nullelement ist — durch (A3) — eindeutig bestimmt.*

Es gibt also nur *eine* Null, wir können daher von *dem* Nullelement sprechen.

Der <u>Beweis</u> ist ganz einfach: Ist auch $0' \in \mathbb{R}$ ein Nullelement, so gilt also insbesondere $0 + 0' = 0$ $(*)$ und so $0 \underset{(*)}{=} 0 + 0' \underset{(A2)}{=} 0' + 0 \underset{(A3)}{=} 0'$. □

(2) Bemerkung *Zu gegebenem $a \in \mathbb{R}$ ist das Inverse bezüglich + — durch (A4) — eindeutig bestimmt.*

Wir können daher von *dem* Inversen (bezüglich +) zu a sprechen.

Auch hierzu ist der <u>Beweis</u> nicht schwierig: Ist auch a' ein Inverses bezüglich + zu a, so gilt also $a + a' = 0$ $(\diamond)$. So hat man $-a \underset{(A3)}{=} (-a) + 0 \underset{(\diamond)}{=} (-a) + (a + a') \underset{(A1)}{=} ((-a) + a) + a' \underset{(A2)}{=} (a + (-a)) + a' \underset{(A4)}{=} 0 + a' \underset{(A2)}{=} a' + 0 \underset{(A3)}{=} a'$. □

(3) Bemerkung *Zu gegebenen $a, b \in \mathbb{R}$ existiert eindeutig ein $x \in \mathbb{R}$, das die Gleichung $a + x = b$ erfüllt.*

Dieses x notieren wir als $\boldsymbol{b-a}$ und lesen „b *minus* a“.

Die Abbildung, die jedem Paar $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ den Wert $b-a$ zuordnet, bezeichnen wir als *„Subtraktion“*. Den einzelnen Wert $b-a$ spricht man auch als *„Differenz“* an.

Beweis: Man rechnet sofort nach, daß $x := (-a)+b$ *eine* Lösung der angegebenen Gleichung ist, und hat so die *Existenz*: $a+x = a+\big((-a)+b\big) \underset{(A1)}{=} \big(a+(-a)\big)+b \underset{(A4)}{=} 0+b \underset{(A2)}{=} b+0 \underset{(A3)}{=} b$. Für die *Eindeutigkeit* geht man von einer Lösung x, also $a+x = b$, aus und rechnet: $x \underset{(A3)}{=} x+0 \underset{(A2)}{=} 0+x \underset{(A2),(A4)}{=} \big((-a)+a\big)+x \underset{(A1)}{=} (-a)+(a+x) = (-a)+b$ □

Wir haben gleichzeitig mitbewiesen

(4) $\forall a,b \in \mathbb{R} \quad b-a = (-a)+b =: \boldsymbol{-a+b} = b+(-a) \quad (\diamond)$,

speziell $\quad 0-a = -a+0 = -a$

Die Kommutativität und Assoziativität für die Addition vermerken wir bei den folgenden Beweisen nicht mehr gesondert, da der Gebrauch inzwischen vertraut sein dürfte.

(5) Folgerung $\quad \forall a \in \mathbb{R} \quad -(-a) = a$

$\forall a,b \in \mathbb{R} \quad -(a+b) = -b+(-a) \underset{(\diamond)}{=} -b-a$

Beweis: Einerseits hat man $(-a)+a = a+(-a) \underset{(A4)}{=} 0$, andererseits $(-a)+\big(-(-a)\big) \underset{(A4)}{=} 0$, also nach der Bemerkung (3) die erste Behauptung.
$-(a+b)$ ist die — nach obigem eindeutig bestimmte — Lösung der Gleichung $a+b+x=0$. So genügt zu zeigen: $a+b+\big(-b+(-a)\big) = 0$:

$$l.S. = a+\big[b+\big(-b+(-a)\big)\big] = a+\big[\big(b+(-b)\big)+(-a)\big]$$
$$\underset{(A4)}{=} a+\big[0+(-a)\big] \underset{(A3)}{=} a+(-a) \underset{(A4)}{=} 0$$

Wir betrachten jetzt $(\mathbb{R},+,\cdot)$ mit den Axiomen **(A1) bis (A4), (M1) bis (M4) und (D)** und ziehen aus diesen Gesetzen weitere Folgerungen.

Mathematiker sagen dafür: „$(\mathbb{R},+,\cdot)$ *ist ein (kommutativer) Körper*“.

Wir benutzen auch hier die vertrauten Sprechweisen: Für $a \cdot b$ heißen a und b *„Faktoren“* und $a \cdot b$ *„Produkt“*.

(6) Bemerkung *Das Einselement ist — durch (M3) — eindeutig bestimmt.*

Es gibt also nur *eine* Eins, wir können daher von *dem* Einselement sprechen.

(7) Bemerkung *Zu gegebenem $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist das Inverse bezüglich $\cdot$ — durch (M4) — eindeutig bestimmt.*

Wir können daher von *dem* Inversen (bezüglich $\cdot$) zu a sprechen.

Die Beweise dieser beiden Bemerkungen entsprechen völlig denen zu (1) und (2); ich führe sie daher nicht noch einmal gesondert aus.

(8) Bemerkung *Zu gegebenen* $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *und* $b \in \mathbb{R}$ *existiert eindeutig ein* $x \in \mathbb{R}$, *das die Gleichung* $a \cdot x = b$ *erfüllt.*

Dieses x bezeichnen wir als $\frac{b}{a}$ oder $b : a$ und lesen *„b dividiert durch a“.* Auch hier enspricht der Beweis dem zu (3) Gezeigten und liefert zusätzlich:

(9) *Für alle* $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *und* $b \in \mathbb{R}$ *gilt* $\frac{b}{a} = a^{-1} \cdot b = b \cdot a^{-1}$,

speziell $\frac{1}{a} = a^{-1}$.

Wir haben — wie allgemein üblich — keine Klammer um a^{-1} gesetzt. Die Abbildung, die jedem Paar $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$ den Wert $ab^{-1} = \frac{a}{b}$ zuordnet, bezeichnen wir als *„Division“*. Den einzelnen Wert $\frac{a}{b}$ spricht man als *„Quotient“* oder *„Bruch“* an, a als *„Zähler“* und b als *„Nenner“* .

(10) Bemerkung $\forall a \in \mathbb{R} \qquad a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$

Beweis: Es genügt — wegen (M2) — die Gleichung $a \cdot 0 = 0$ zu zeigen: Man hat $a \cdot 0 \underset{(A3)}{=} a \cdot (0 + 0) \underset{(D)}{=} a \cdot 0 + a \cdot 0$, also mit (A3) und Bemerkung (3) die Behauptung. □

(11) Bemerkung *Für* $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *gilt* $a^{-1} \neq 0$ *und* $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$.

Beweis: Nach (M4) und (M3) ist $aa^{-1} = 1 \neq 0$, also nach (10) $a^{-1} \neq 0$. $a^{-1}a \underset{(M2)}{=} aa^{-1} \underset{(M4)}{=} 1$ und $a^{-1}\left(a^{-1}\right)^{-1} \underset{(M4)}{=} 1$ zeigen mit der Eindeutigkeit (8) $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$. □

(12) Bemerkung *Für* $a, b \in \mathbb{R}$ *gilt:* $ab = 0 \iff a = 0 \vee b = 0$.

Das Gleiche noch einmal in Worten: *Ein Produkt von reellen Zahlen ist genau dann Null, wenn mindestens ein Faktor Null ist.*

Beweis: Die Richtung von rechts nach links ist durch (10) gegeben. Für die andere Implikation ist man im Fall $a = 0$ fertig. Für $a \neq 0$ erhält man: $0 \underset{(10)}{=} a^{-1} \cdot 0 = a^{-1}(ab) \underset{(M1)}{=} (a^{-1}a)b \underset{(M2),(M4)}{=} 1b \underset{(M2),(M3)}{=} b$ □

(13) Bemerkung *Für* $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$: $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = a^{-1}b^{-1}$

Auch hier kann der Beweis wieder weggelassen werden, weil er genau nach dem Muster des Beweises zu (5) verläuft. Dabei ist nur zu berücksichtigen, daß nach (12) hier das Produkt ab auch von 0 verschieden ist.

(14) Bemerkung *Für* $a, b \in \mathbb{R}$: $(-a)b = -(ab) = a(-b)$, $(-1)b = -b$,
$(-a)(-b) = ab$

Beweis: $-(ab)$ ist die eindeutige Lösung der Gleichung $ab + x = 0$. Also muß für die erste Gleichung nur $ab + (-a)b = 0$ nachgewiesen werden: $ab + (-a)b \underset{(M2)}{=} ba + b(-a) \underset{(D)}{=} b\big(a + (-a)\big) \underset{(A4)}{=} b0 \underset{(10)}{=} 0$. Der Beweis der zweiten Gleichung folgt daraus durch Vertauschung von a und b unter Berücksichtigung von (M2). Die dritte Gleichung ergibt sich nun mit $a := 1$. Nach dem gerade Bewiesenen ist $(-a)(-b) = -\big(-(ab)\big) \underset{(5)}{=} ab$. □

(15) Bemerkung *Für* $a, b, c \in \mathbb{R}$: $c\,(b - a) = c\,b - c\,a$

Wir erinnern noch einmal an die Verabredung: *‚Punktrechnung' (Multiplikation und Division) geht vor ‚Strichrechnung' (Addition und Subtraktion).* Die rechte Seite ist also als $(cb) - (ca)$ zu verstehen.

<u>Beweis:</u> $l.S. \underset{(4)}{=} c\big(b + (-a)\big) \underset{(D)}{=} cb + c(-a) \underset{(14)}{=} cb + \big(-(ca)\big) \underset{(4)}{=} cb - ca$ □

Ausdrücklich betonen möchte ich, daß das Inverse Element zu 0 bezüglich $\cdot$, dessen Existenz oben gerade *nicht* gefordert wurde, gar nicht existieren kann; denn sonst hätte man $0 \cdot 0^{-1} = 1 \underset{(M3)}{\neq} 0$ im Widerspruch zu (10). In der Schule lernt man das meist in der Form *„Durch* 0 *darf man nicht dividieren!"* und hat dann Schwierigkeiten, dieses ‚Verbot' einzusehen, weil es nicht begründet wird.

1.4.2 „Bruchrechnen"

Allein aus der Definition des Quotienten $\frac{a}{b}$ für $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$ lassen sich einfach alle Regeln über das **„Bruchrechnen"** herleiten. Wir notieren die wichtigsten:

Für $a, e \in \mathbb{R}$ *und* $b, c, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *gelten:*

(α) $\frac{1}{-b} = -\frac{1}{b}$ (β) $\frac{b}{b} = 1$ (γ) $\frac{a}{1} = a$

(δ) $\frac{a}{b} = \frac{e}{d} \iff ad = be$ (ε) $\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b}$ (ζ) $\frac{a}{b} \cdot \frac{e}{d} = \frac{a \cdot e}{b \cdot d}$

(η) $\frac{a}{b} \pm \frac{e}{d} = \frac{ad \pm be}{bd}$ (ϑ) $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$

(δ) beschreibt die *Gleichheit von Brüchen: Brüche sind genau dann gleich, wenn die ‚Überkreuzprodukte' gleich sind.*

(ε) beschreibt von links nach rechts das *Kürzen*, von rechts nach links das *Erweitern* von Brüchen.

(ζ) und (η) zeigen, wie Brüche multipliziert, addiert und subtrahiert werden. Dabei sind Formeln mit $\pm$ natürlich immer so zu lesen, daß auf beiden Seiten gleichzeitig + oder gleichzeitig − zu nehmen ist. (ϑ) schließlich belegt — in Verbindung mit (ζ) — : *Ein Bruch (hier* $\frac{a}{b}$*) wird durch einen Bruch (hier*

$\frac{c}{d}$*) dividiert, indem man mit dem ‚Kehrwert' (hier also* $\frac{d}{c}$ *) multipliziert.*

Wir beweisen exemplarisch und ausführlich (δ), (ζ) und (η) und überlassen die Beweise der restlichen Aussagen, die alle nach dem gleichen Muster verlaufen, den mathematisch interessierten Lesern als Übungsaufgabe.

<u>Beweis:</u> <u>(δ):</u> Nach (8) gilt $\frac{a}{b} = \frac{e}{d}$ genau dann, wenn $b \cdot \frac{e}{d} = a \quad \odot$. Hat man dies, so liefert die Multiplikation dieser Gleichung mit d — unter Berücksichtigung von (M1) und (8) — $be = ad$. Ausgehend von $be = ad$ ergibt sich — unter Berücksichtigung von (M1) und (9) — $\odot$ nach Multiplikation mit d^{-1}. <u>(ζ):</u> $\frac{ae}{bd}$ ist die eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung $(bd) \cdot x = ae$. (Nach (12) ist dabei $bd \neq 0$.) Andererseits gilt $bd \cdot \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{e}{d}\right) \underset{(M1),(M2)}{=} \left(b \cdot \frac{a}{b}\right)\left(d \cdot \frac{e}{d}\right) = ae$. <u>$(\eta)$:</u> Die $r.S.$ ist die eindeutige Lösung der Gleichung $(bd)x = ad \pm be$. Die $l.S.$ erfüllt auch diese Gleichung; denn $(bd)\left[\frac{a}{b} \pm \frac{e}{d}\right] \underset{(M2),(D),(15)}{=} (db)\frac{a}{b} \pm (bd)\frac{e}{d} \underset{(M1),(M2)}{=} ad \pm be$ □

Wir haben in diesem und dem vorangehenden Teilabschnitt allein ausgehend von den Axiomen (A1) bis (A4), (M1) bis (M4) und (D) viele — von der Schule her — bereits vertraute Gesetze hergeleitet. Der entscheidende Vorteil dieses Vorgehens aber ist, daß all diese Folgerungen immer schon dann gelten, wenn nur die oben aufgeführten Axiome erfüllt sind, zum Beipiel später bei den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ und insbesondere den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. Deshalb können wir dann ab Abschnitt 1.9 in allen drei Bereichen — $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ und besonders auch $\mathbb{C}$ — wie ‚gewohnt' rechnen.

1.4.3 Das Rechnen mit Ungleichungen und absoluten Beträgen

Für die **Anordnung** in $\mathbb{R}$ hatten wird als erstes gefordert:

(P1) Für jede reelle Zahl a gilt genau eine der drei Aussagen:

$a = 0$, $\quad a \in \mathbb{P}$ oder $-a \in \mathbb{P}$.

Wir notieren dazu die folgenden *Bezeichnungen* und *Sprechweisen* für reelle Zahlen a, b:

a *„positiv"* $:\Longleftrightarrow$ $a \in \mathbb{P}$, $\qquad a$ *„negativ"* $:\Longleftrightarrow$ $-a \in \mathbb{P}$.

$a < b \;:\Longleftrightarrow\; b > a \;:\Longleftrightarrow\; b - a \in \mathbb{P}$; dies lesen wir als:

a *„kleiner"* b oder b *„größer"* a.

Hier — und entsprechend bei den weiteren Aussagen — sagen wir beispielsweise statt a *„kleiner"* b auch ausführlicher a *„ist kleiner als"* b und ähnlich.

$a \leq b \;:\Longleftrightarrow\; b \geq a \;:\Longleftrightarrow\; a < b \,\vee\, a = b\,;$ hierzu sagen wir: a *„kleiner gleich"* b oder b *„größer gleich"* a.

(P2) beschreibt die ,Verträglichkeit' der Positivität mit der Addition, (P3) die mit der Multiplikation.

Wir listen die wichtigsten **Eigenschaften** der Beziehung ,<' auf, wobei wir jetzt alle Eigenschaften von $\mathbb{R}$ außer (V) benutzen:

Für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *hat man:*

(0) *Es gilt genau eine der drei Aussagen:* $a = b$, $a < b$ *oder* $a > b$.

(1) $a > 0 \Longleftrightarrow a$ *positiv*

(2) $a < b \wedge b < c \Longrightarrow a < c$

(3) $a < b \Longrightarrow a + c < b + c$

(3') $a < b \wedge c < d \Longrightarrow a + c < b + d$

(4) $a < b \wedge c > 0 \Longrightarrow ac < bc$

(4') $0 < a < b \wedge 0 < c < d \Longrightarrow ac < bd$

(5) $a < b \Longleftrightarrow -b < -a$

(6) $a < b \wedge c < 0 \Longrightarrow ac > bc$

(7) $a < 0 \wedge c < 0 \Longrightarrow ac > 0$

(7') $b > 0 \wedge c < 0 \Longrightarrow bc < 0$

(8) $a \neq 0 \Longrightarrow aa > 0$

(8') $1 > 0$

(9) $a > 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{a} > 0$ *(für* $a \neq 0$*)*

(9') $0 < a < b \Longrightarrow 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

(10) $(0 < b \wedge aa < bb) \Longrightarrow a < b$

(11) $a < b \Longrightarrow \exists c \in \mathbb{R} \quad a < c < b$

Vier dieser Eigenschaften seien noch einmal ausdrücklich in Worten formuliert:

(4) *Der ,Sinn einer Ungleichung' bleibt erhalten, wenn man mit einer positiven Zahl multipliziert.*

(6) *Der Sinn einer Ungleichung ,dreht sich um', wenn man mit einer negativen Zahl multipliziert.*

(7) *Das Produkt zweier negativer Zahlen ist positiv.*

(7') *Das Produkt einer negativen Zahlen mit einer positiven Zahl ist negativ.*

Wir führen auch hier die Beweise aus. Natürlich müssen Sie später nur das Umgehen mit Ungleichungen beherrschen und nicht gerade die Beweise von (0) bis (11). Diese sind aber eine nützliche Übung für allgemeine Beweistechniken und gleichzeitig für die Handhabung von Ungleichungen. Je mehr Sicherheit man dann im Umgang mit solchen Schlußweisen hat, desto weniger wird man die einzelnen Schritte isoliert durchführen und begründen; doch zu Beginn ist es sehr lehrreich, dies zu tun:

(0) folgt direkt aus (P1), angewendet auf $b-a$, unter Beachtung von $-(b-a) = a-b$. (1): $a > 0 \iff a = a - 0 \in I\!P \underset{\text{Def.}}{\iff} a$ positiv. (2): $l.S. \implies b-a,\, c-b \in I\!P \underset{(P2)}{\implies} c-a = (c-b)+(b-a) \in I\!P$.

Wir schreiben für die $l.S.$ auch kürzer $\boldsymbol{a < b < c}$.

Für (3) ist nur zu beachten, daß $(b+c)-(a+c) = b-a$ gilt. (3') folgt natürlich aus (3) durch zweimaliges Anwenden: $a+c \underset{(3)}{<} a+d \underset{(3)}{<} b+d$. (4) folgt mit (P3) aus $bc - ac = (b-a)c \in I\!P$, und das ergibt (4') . Bei (5) genügt es, die Implikation ‚$\implies$' zu zeigen, da $-(-w) = w$ für jede reelle Zahl w ist. Diese Richtung ist aber direkt durch $-a-(-b) = b-a \in I\!P$ gegeben. (6): $-c \in I\!P$: Daher gilt nach (4): $-(ca) = (-c)a < (-c)b = -(cb) \underset{(5)}{\implies} cb < ca$. (7) ist Spezialfall von (6) mit $b := 0$ und (7') ebenso mit $a := 0$. (8): Ist $a > 0$, so folgt $aa > 0$ nach (P3), im anderen Fall — $a < 0$ — folgt die Behauptung nach (7). (8'): Da $1 \neq 0$ ist, folgt $1 = 1 \cdot 1 > 0$ nach (8). (9): Auch hier genügt es — wegen $a = \left(a^{-1}\right)^{-1}$ — wieder, die Implikation ‚$\implies$' zu zeigen: Da $a \neq 0$ ist, folgt zunächst $\frac{1}{a} = a^{-1} \neq 0$, also $\frac{1}{a} > 0$ oder $\frac{1}{a} < 0$. Weil $a \cdot \frac{1}{a} = 1 > 0$ gilt, ist nach (7') nur $\frac{1}{a} > 0$ möglich. (9'): Aus der $l.S.$ folgt $0 < \frac{a}{b} < 1$ durch Multiplikation mit $\frac{1}{b} > 0$ nach (9) und (4), dann die Behauptung durch Multiplikation mit $\frac{1}{a} > 0$. (10): Wir schließen hier *indirekt*: Wäre die Behauptung falsch, so hätte man unter Berücksichtigung von $aa \neq bb$ die Ungleichung $a > b$, folglich nach (4') im *Widerspruch* zur Voraussetzung $aa > bb$. Der Beweis von (11) ist nur deshalb überraschend aufwendig, weil bei dem gewählten Zugang zu den reellen Zahlen im Moment einige selbstverständlich erscheinende Dinge noch nicht — allein aus den Axiomen für $I\!R$ heraus — begründet sind: $2 := 1+1 > 0$ nach (P2), daher ist mit (9) auch $\frac{1}{2}$ positiv. $2a = (1+1)a = a+a \underset{(3)}{<} a+b \underset{(3)}{<} b+b = 2b$. Hieraus folgt nach Multiplikation mit $\frac{1}{2}$ dann $a < \frac{1}{2}(a+b) < b$ nach (4). □

Ich notiere noch zwei weitere Eigenschaften, wobei die zweite etwas aus dem bisherigen Rahmen fällt und ihr ‚Sinn' erst bei den späteren Grenzwertüberlegungen deutlich werden wird:

(12) $\quad -a = a \iff a = 0$

(13) $\quad \bigl(\forall \varepsilon \in I\!\!P \;\; a \le b + \varepsilon\bigr) \implies a \le b$

Bei Aussagen wie (13) läßt man meist die Klammern weg und schreibt also nur $\forall \varepsilon \in I\!\!P \;\; a \le b + \varepsilon \implies a \le b$. Da dies erfahrungsgemäß dann aber häufig mißverstanden wird, habe ich doch Klammern gesetzt.

<u>(12)</u> ist in der Richtung von rechts nach links trivial, da $0 + 0 = 0$. Der <u>Beweis</u> der anderen Richtung ist ganz einfach: $l.S. \implies 0 = a + a \underset{\text{s.o.}}{=} 2a \underset{2 \neq 0}{\implies} a = 0$. Zu <u>(13)</u> schließen wir wieder indirekt: Wäre die Behauptung falsch, demnach $a > b$, so hätte man nach (11) für ein geeignetes $t \in I\!\!R$ die Ungleichung $b < t < a$. Für $\varepsilon := t - b > 0$ erhielte man $b + \varepsilon = t < a$ im Widerspruch zur Voraussetzung. □

> Ich habe die *Anordnung* in $I\!\!R$ über das *Positivsein* — Zugehörigkeit zu $I\!\!P$ — beschrieben und darüber ‚kleiner' und ‚größer' definiert und zugehörige Aussagen bewiesen. Man kann natürlich ebensogut davon ausgehen, daß auf $I\!\!R$ allgemein eine Kleinerbeziehung $<$ mit entsprechenden Eigenschaften gegeben ist.

Bei der späteren Veranschaulichung reeller Zahlen auf der ‚Zahlengeraden' — man vergleiche hierzu den Abschnitt 1.8 — möchte man von dem *„Abstand"* zwischen zwei Punkten reden können. Dies sollte natürlich eine nicht-negative Zahl (0 oder positiv) sein. Dazu dient die folgende Definition des *absoluten Betrages*, der später dann zu einer gegebenen Zahl den Abstand des zugehörigen Punktes vom Nullpunkt 0 beschreibt:

$$\textit{Für } a \in I\!\!R \textit{ sei} \qquad |a| := \left\{ \begin{array}{rl} a\,, & \textit{falls } a \ge 0 \\ -a\,, & \textit{falls } a < 0 \end{array} \right\}$$

$|a|$ wird gelesen als: *„absoluter Betrag"* von a oder meist kurz *„Betrag"* von a, manchmal auch a *„absolut"*.

Bezeichnen wir noch für zwei reelle Zahlen $x\,, y$

$$\max(x,y) := \left\{ \begin{array}{ll} x\,, & \textit{falls } x \ge y \\ y\,, & \textit{falls } x \le y \end{array} \right\} \qquad (\textit{„Maximum" von } x,\, y)$$

$$\min(x,y) := \left\{ \begin{array}{ll} y\,, & \textit{falls } x \ge y \\ x\,, & \textit{falls } x \le y \end{array} \right\} \qquad (\textit{„Minimum" von } x,\, y)\,,$$

so gilt für $a \in I\!\!R$ offenbar $\qquad |a| = \max(a, -a) \ge 0 \qquad (*)$

und damit $\qquad |a| = |-a|\,. \qquad \binom{*}{*}$

Wir stellen die wichtigsten **Eigenschaften des Betrages** auf $I\!\!R$ zusammen:

[B1] $\quad |a| = 0 \iff a = 0 \qquad$ *(„Definitheit")*

[B2] $\quad |a + b| \le |a| + |b| \qquad$ *(„Dreiecksungleichung")*

[B3] $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

[B4] $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, *falls* $b \neq 0$

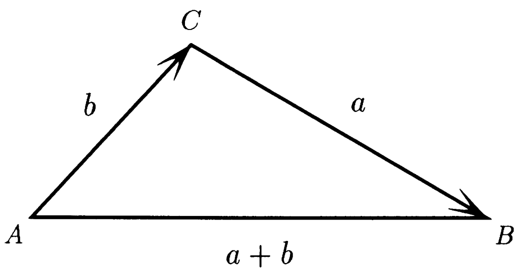
[B5] $|a - b| = |b - a|$ („*Symmetrie*")

[B6] $\big|\,|a| - |b|\,\big| \leq |a - b| \leq |a| + |b|$

[B7] $|a - c| \leq |a - b| + |b - c|$

Bei dieser Auflistung haben wir die Angabe „$\forall\, a, b, c \in I\!R$" weggelassen und werden dies auch im folgenden dann meist tun, wenn keine Mißverständnisse zu befürchten sind.

Die Bezeichnung *„Dreiecksungleichung"* wird erst verständlich, wenn man die Abstände von ‚Vektoren' in der ‚Ebene' oder im ‚Raum' betrachtet:



Der ‚direkte' Weg von A nach B längs $a + b$ ist höchstens so lang wie die Summe der beiden Wege längs b und a.

Den Wert $|a - b|$ bezeichnen wir als *„Abstand"* von a nach b. Wegen [B5] können wir — symmetrisch — von dem *„Abstand zwischen a und b"* sprechen.

Auch hier üben wir den Umgang mit dem neuen Begriff dadurch ein, daß wir alle Beweise ausführen: [B1]: ‚$\Longleftarrow$': Ist $a = 0$, so ist auch $-a = 0$, also $|a| = \max(a, -a) = 0$. ‚$\Longrightarrow$': Ist $|a| = 0$, so ist nach Definition des Betrages $a = 0$ oder $-a = 0$, also $a = 0$. [B2]: Nach $(*)$ hat man $a \leq |a| \;\wedge\; b \leq |b|$, also mit (3') $a + b \leq |a| + |b|$. Ebenso folgt $-a \leq |a| \;\wedge\; -b \leq |b|$, somit $-(a + b) = -a + (-b) \leq |a| + |b|$; zusammen: $|a + b| \underset{(*)}{=} \max\big(a + b, -(a + b)\big) \leq |a| + |b|$. [B3]: Im Falle $a \geq 0 \wedge b \geq 0$ ist auch $ab \geq 0$, also $|ab| = ab = |a||b|$. Hieraus liest man die Beweise für die anderen drei Fälle — $a \geq 0 \wedge b < 0$, $a < 0 \wedge b \geq 0$ und $a < 0 \wedge b < 0$ — unter Beachtung von $\binom{*}{*}$ und $-(ab) = (-a)b = a(-b)$ ab. [B4] folgt einfach aus [B3]; denn $\frac{|a|}{|b|}$ ist die eindeutige Lösung der Gleichung $|b| \cdot x = |a|$, andererseits gilt $|b|\left|\frac{a}{b}\right| \underset{[B3]}{=} |b \cdot \frac{a}{b}| = |b|$.

[B5] ist wegen $b-a = -(a-b)$ unmittelbar durch $\binom{*}{*}$ gegeben. Die zweite Ungleichung von [B6] folgt aus [B2] und $\binom{*}{*}$: $|a-b| = |a+(-b)| \underset{[B2]}{\leq} |a| + |-b| \underset{\binom{*}{*}}{=} |a| + |b|$. Die Abschätzung nach ‚unten' ergibt sich wie folgt: $|a| = |(a-b)+b| \underset{[B2]}{\leq} |a-b|+|b| \Longrightarrow |a|-|b| \leq |a-b|$, durch Vertauschung von a und b folgt daraus $-(|a|-|b|) = |b|-|a| \leq |b-a| \underset{[B5]}{=} |a-b|$, zusammen — über $(*)$ —: $\big|\,|a|-|b|\,\big| \leq |a-b|$.

[B7]: $l.S. = |(a-b)+(b-c)| \underset{[B2]}{\leq} r.S.$ □

1.5 Die natürlichen und die ganzen Zahlen

Der Mathematiker L. KRONECKER pflegte zu sagen: *„Die natürlichen Zahlen hat der liebe Gott geschaffen, alles andere ist Menschenwerk."*

Kennt man die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen schon, so wird man als eine wichtige und kennzeichnende Eigenschaft ansehen, daß 1 eine natürliche Zahl ist und innerhalb dieser Menge immer um 1 weitergezählt werden kann, mithin

$$(*) \qquad 1 \in \mathbb{N} \quad \textit{und} \quad n \in \mathbb{N} \Longrightarrow n+1 \in \mathbb{N}\,,$$

und die Menge in diesem Sinne minimal ist.

Zunächst haben dann aber ein irgendwie schon gegebenes $\mathbb{N}$ und die axiomatisch eingeführte Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ wenig miteinander zu tun.

Falls man die natürlichen Zahlen *nicht* schon als gegeben ansehen will, so läßt sie sich innerhalb $\mathbb{R}$ wie folgt präzise definieren:

Teilmengen von $\mathbb{R}$, die die obige Eigenschaft $(*)$ haben, nennt man *‚induktiv'* und führt dann $\mathbb{N}$ als ‚kleinste' induktive Menge ein.

Vielen wird dieses Vorgehen vermutlich äußerst umständlich erscheinen — und sie haben damit ja auch irgendwie recht! Doch haben Sie etwas Nachsicht mit den ach so ‚pingeligen' Mathematikern, die die Grundlagen gerne ‚gesichert' haben. Wenn nicht, dann überschlagen Sie die nächsten Zeilen bis zum Prinzip der vollständigen Induktion!

1.5.1 Vollständige Induktion, rekursive Definiton

Eine Teilmenge M von $\mathbb{R}$ heiße *„induktiv"* genau dann, wenn gilt:

$1 \in M \qquad$ und $\qquad a \in M \Longrightarrow a+1 \in M$

Offenbar gibt es induktive Mengen, zum Beispiel $\mathbb{R}$ und $\mathbb{P}$.

Definition $\mathbb{N} := \{x \in \mathbb{R} : x \text{ gehört zu jeder induktiven Teilmenge von } \mathbb{R}\}$

Die Elemente aus $\mathbb{N}$ heißen *„natürliche Zahlen"*.

$\mathbb{N}$ ist dann offenbar die *kleinste induktive Teilmenge von* $\mathbb{R}$.

Einige einfache Eigenschaften von $\mathbb{N}$ sind scheinbar evident, erfordern aber bei dem hier gewählten Zugang eigentlich einen Beweis. Dies führen wir jedoch nicht mehr aus und freuen uns, daß wir solche lästigen Arbeiten den Mathematikern überlassen dürfen. Mit den

Bezeichnungen $\quad \mathbf{2} := 1+1, \quad \mathbf{3} := 2+1, \quad \mathbf{4} := 3+1, \quad \ldots$

gilt $\quad \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

Die Tatsache, daß $\mathbb{N}$ die *kleinste* induktive Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist, ergibt sofort die

Folgerung $\quad T \subset \mathbb{N} \;\wedge\; T \;\; \textit{induktiv} \quad \Longrightarrow \quad T = \mathbb{N}$

Es sei nun $A(n)$ eine Aussageform $(n \in \mathbb{N})$. Mit $T := \{n \in \mathbb{N} : A(n)\}$ liefert dann die Folgerung das wichtige

Prinzip der vollständigen Induktion:

$$\boxed{\Big[A(1) \;\wedge\; \forall k \in \mathbb{N} \;\; \big(A(k) \Longrightarrow A(k+1)\big)\Big] \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}\; A(n)}$$

In Worten: *Gilt* $A(1)$ *und folgt aus der Gültigkeit* $A(k)$ *für eine natürliche Zahl* k *stets die Gültigkeit* $A(k+1)$ *für die nachfolgende Zahl* $k+1$, *so gilt die Aussage* $A(n)$ *für alle natürlichen Zahlen* n.

Üblicherweise bezeichnet man hierbei $A(1)$ als *„Induktionsanfang“* oder auch *„Induktionsverankerung“*, den Schluß $\big(A(k) \Longrightarrow A(k+1)\big)$ als *„Induktionsschritt“* und dabei $A(k)$ als *„Induktionsannahme“*.

Die vollständige Induktion ist nur eine Beweismethode, sie zeigt in der Regel *nicht*, wie man die entsprechende Behauptung findet!

Ein schönes Standard-Beispiel, durch das die der vollständigen Induktion zugrundeliegende Idee besonders klar wird, ist das folgende: Stellt man **Dominosteine** nebeneinander hochkant, parallel und mit den Breitseiten zueinander gewandt auf, so kann man *alle* dadurch zum Umfallen bringen, daß man — in einer vorher festgelegten Richtung — den ersten Stein umwirft und bei der Aufstellung beachtet, daß der Abstand von einem Stein zum nächsten immer kleiner als die halbe Länge eines Steines ist. Das Umwerfen des ersten Steines *(„Induktionsanfang“)* bewirkt, daß der Prozeß überhaupt in Gang kommt. Die Bedingung über den Abstand sichert, daß jeder fallende Stein seinen ‚Nachfolger‘ mit umwirft *(„Induktionsschritt“)*.

Wir sehen uns zwei erste <u>Beispiele</u> zur vollständige Induktion an:

(B1) $\quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad 1+2+\cdots+n = \frac{1}{2}\,n\,(n+1)$

Zum <u>Beweis</u> bezeichnen wir für $n \in \mathbb{N}$ die entsprechende Aussage mit $A(n)$. $\quad A(1):\quad l.S. = 1,\quad r.S. = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2 = 1$

$A(k) \Longrightarrow A(k+1):\quad 1+2+\cdots+k+(k+1) \underset{A(k)}{=} \frac{1}{2}\,k\,(k+1)+(k+1)$

$= (\frac{1}{2}k + 1)(k+1) = \frac{1}{2}(k+2)(k+1) = \frac{1}{2}(k+1)\big((k+1)+1\big)$ □

Natürlich ist auch mir bekannt, daß man diese Aussage auf andere Weise — wie schon der zehnjährige GAUSS seinem Lehrer vormachte — einfacher gewinnen kann; doch hier wollen wir ja stattdessen gerade das Prinzip der vollständigen Induktion einüben.

(B2) $\forall n \in \mathbb{N} \qquad 1+3+5+\cdots+(2n-1) = n\cdot n$

Man kann die Aussage von (B2) recht einfach aus (B1) herleiten; doch auch hier soll der Beweis ja stattdessen ein eigenständiges Beispiel zur vollständigen Induktion sein:

Wir bezeichnen wieder zum Beweis für $n \in \mathbb{N}$ die entsprechende Aussage mit $A(n)$. $\quad A(1):\quad l.S. = 1 = r.S.$

$A(k) \Longrightarrow A(k+1):\quad 1+3+5+\cdots+(2k-1)+\big(2(k+1)-1\big)$

$\underset{A(k)}{=} k\cdot k + 2k + 1 = (k+1)\cdot(k+1)$ □

Bei den Dominosteinen ist unmittelbar klar, daß entsprechend nur alle Steine ab dem 7. umfallen, wenn man statt des ersten den 7. umstößt.

So kann auch allgemein an die Stelle von 1 eine beliebige natürliche Zahl oder auch 0 als Startelement ℓ für den Induktionsanfang treten, wobei dann natürlich die Behauptung entsprechend nur für alle natürlichen Zahlen $n \geq \ell$ gilt: Mit der

Definiton $\quad \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ *und für* $\ell \in \mathbb{N}_0$:

$$\mathbb{N}_\ell := \{\ell, \ell+1, \ell+2, \dots\} = \{n \in \mathbb{N}_0 : n \geq \ell\}$$

erhält man das **Modifizierte Prinzip der vollständigen Induktion**

$$\boxed{\Big[A(\ell) \quad \wedge \quad \forall k \in \mathbb{N}_\ell \quad \big(A(k) \Longrightarrow A(k+1)\big)\Big] \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}_\ell\ A(n)}$$

dadurch, daß man es mit $B(n) := A(n+\ell-1) \quad (n \in \mathbb{N})$ unmittelbar auf die spezielle Version zurückführt.

Statt der ausführlichen Formulierung *„Beweis durch vollständige Induktion“* sagen wir — auch im modifizierten Fall — oft kürzer *„induktiver Beweis“* und ähnlich.

Gelegentlich höre ich von Studenten, die die ersten Beispiele für Beweise durch vollständige Induktion mit ungläubigem Staunen gesehen haben, daß man *damit* ja wohl *alles* beweisen könne. Um die Verwirrung dann voll zu machen, bringe ich meistens das folgende Beispiel einer offensichtlich falschen Aussage, die ich induktiv ‚beweise‘:

(B3) *Alle reellen Zahlen sind gleich.* Nanu! Nanu?

‚Beweis': Es genügt offenbar, die folgende reduzierte Aussage zu zeigen: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: *Je n reelle Zahlen sind gleich.*
Dies ‚beweisen' wir durch vollständige Induktion: Für $n = 1$ ist die Aussage sicher richtig. Der Schluß von k auf $k+1$ ergibt sich für beliebiges $k \in \mathbb{N}$ wie folgt: Hat man $k+1$ reelle Zahlen $r_1, r_2, \ldots, r_k, r_{k+1}$, so sind die ersten k dieser Zahlen $r_1, r_2, \ldots, r_k$ nach Induktionsvoraussetzung gleich und ebenso die k letzten $r_2, \ldots, r_k, r_{k+1}$. Dann sind aber auch alle $k+1$ Zahlen gleich:

$$\overbrace{r_1, \underbrace{r_2, \ldots, r_k}^{\textit{alle gleich}}, r_{k+1}}_{\textit{alle gleich}} \qquad \square$$

„Wo liegt der Fehler?" frage ich dann meist und bekomme zum Teil recht abenteuerliche Erklärungsversuche, doch nur selten die richtige Antwort. *Sie* haben natürlich sofort erkannt — auch ohne hier weitergelesen zu haben — , daß der *Fehler im Schluß von 1 auf 2* liegt. Denn das oben so suggestiv aussehende Klammern klappt dann offensichtlich nicht, weil in diesem Fall kein Element mehr zu *beiden* Teilmengen gehört! Es ist natürlich andererseits auch klar, daß man damit alles bewiesen hätte: Wären je zwei Zahlen schon gleich, dann müßten auch alle Zahlen untereinander gleich sein.

Ich habe dieses Beispiel auch hier aufgeführt, um deutlich zu machen, daß es ganz wichtig ist, darauf zu achten, daß der Induktionsschritt von k auf $k+1$ wirklich für *jedes* k funktioniert! Auch das sieht man schon sehr schön an den Dominosteinen: Wenn nur an einer einzigen Stelle der Abstand zwischen zwei benachbarten Steinen zu groß ist, wird der gesamte Prozeß dort unterbrochen und die nachfolgenden Steine fallen nicht mehr um (wenn die Unterlage nicht gerade zu wackelig ist und ...).

Rekursive Definition

Die *rekursive Definition*, auch *Definition* oder *Konstruktion durch vollständige Induktion* genannt, ist heute den meisten schon durch Programmier-Erfahrung bestens vertraut: Man legt fest, wie gestartet wird *(Anfangswert)* und zusätzlich, wie es weitergehen soll, wenn man schon bis zu einer bestimmten Stelle gelangt ist *(Rekursionsformel* oder *Rekursionsvorschrift).*

Zum Beispiel ist der Ausdruck $1 + 2 + \cdots + n$ in (B1), besonders die Pünktchen darin, mathematisch keineswegs exakt, und vielleicht ist der eine oder andere Leser schon in (B1) darüber gestolpert — denn, wie ist das beispielsweise für $n = 1$ zu lesen?

Dies läßt sich durch *„rekursive Definition"* präzisieren. Wir wollen dieses Definitionsprinzip aber nicht besonders begründen, sondern ‚naiv' rangehen, da es unmittelbar einsichtig zu sein scheint. Wer es an dieser Stelle doch genauer wissen will, kann zum Beispiel in [BARNER/FLOHR I] nachsehen.

Es sei
$$\begin{array}{rcl} x: \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \cup\!\!\!\! \shortmid & & \cup\!\!\!\! \shortmid \\ j & \longmapsto & x_j \end{array}$$

Wir nennen allgemein solche auf $\mathbb{N}$ definierten Abbildungen *„Folgen"*, x_j das j-te *„Glied"* mit *„Index"* j (für $j \in \mathbb{N}$) und notieren sie oft auch in der Form $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$.

Für ein (festes) $k \in \mathbb{N}$ wollen wir den Ausdruck $x_k + \cdots + x_n$, also die Summe der Folgenglieder mit Indizes k bis n, rekursiv definieren und benutzen dafür das neue Zeichen

$$\sum_{\nu=k}^{n} x_\nu$$

Definition $\displaystyle\sum_{\nu=k}^{k} x_\nu := x_k\,, \quad \sum_{\nu=k}^{n+1} x_\nu := \left(\sum_{\nu=k}^{n} x_\nu\right) + x_{n+1} \qquad (n \in \mathbb{N}_k)$

Wir lesen dies als *„Summe der x_ν für $\nu = k$ bis n"* oder ähnlich.

Für mache Zwecke ist noch nützlich,

$$\sum_{\nu=k}^{n} x_\nu := 0 \quad \text{für } \mathbb{N} \ni n < k \qquad \text{(„leere Summe")}$$

zu vereinbaren.

Der *„Summationsindex"* ν in $\sum\limits_{\nu=k}^{n} x_\nu$ hat keine besondere Bedeutung. Er dient als Platzhalter und kann insbesondere durch irgendein anderes Zeichen (nur nicht gerade k und n) ersetzt werden, zum Beispiel:

$$\sum_{\nu=k}^{n} x_\nu = \sum_{j=k}^{n} x_j = \sum_{p=k}^{n} x_p = \sum_{\square=k}^{n} x_\square = \sum_{\heartsuit=k}^{n} x_\heartsuit = \sum_{Z=k}^{n} x_Z$$

Ich selbst habe die Angewohnheit, jeweils den ‚passenden' griechischen Buchstaben zu wählen, also hier ν zu n, an anderen Stellen beispielsweise κ zu k, λ zu l oder μ zu m, aber das ist nicht mehr als eine persönliche Vorliebe und Systematik.

Bei solchen Summen kann man — aufgrund des Assoziativ- und Kommutativ-Gesetzes — *beliebig vertauschen und Klammern setzen.* Den Beweis dieser Aussage, der keineswegs trivial ist, lassen wir wieder weg. Dafür haben wir unsere Mathematiker!

Mit dieser neuen Schreibweise lauten die beiden aufgeführten Beispiele:

(B4) $\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum\limits_{\nu=1}^{n} \nu = \frac{1}{2}\, n\,(n+1)$

(B5) $\forall n \in \mathbb{N} \qquad \displaystyle\sum_{\nu=1}^{n} (2\nu - 1) = n \cdot n$

In gleicher Weise definieren wir *„Produkte“* $\prod_{\nu=k}^{n} x_\nu$:

Definition $\displaystyle\prod_{\nu=k}^{k} x_\nu := x_k\,, \quad \prod_{\nu=k}^{n+1} x_\nu := \left(\prod_{\nu=k}^{n} x_\nu\right) \cdot x_{n+1} \qquad (n \in I\!N_k)$

Dies lesen wir natürlich entsprechend als *„Produkt der x_ν für $\nu = k$ bis n“* oder ähnlich.

Auch hier benutzen wir gelegentlich analog

$$\prod_{\nu=k}^{n} x_\nu := 1 \quad \text{für } I\!N \ni n < k \qquad \textit{(„leeres Produkt“)}$$

Die obige Folgerung aus dem Assoziativ- und Kommutativ-Gesetz, daß man *beliebig vertauschen und Klammern setzen* kann, gilt sinngemäß auch für solche allgemeinen Produkte.

Bei Summen und Produkten wird — für $\ell \in I\!N$ — oft der kleine Trick der *„Indexverschiebung“* benutzt:

$$\sum_{\nu=k}^{n} x_\nu = \sum_{\nu=k+\ell}^{n+\ell} x_{\nu-\ell} \qquad \text{und} \qquad \prod_{\nu=k}^{n} x_\nu = \prod_{\nu=k+\ell}^{n+\ell} x_{\nu-\ell}$$

Besonders wichtig sind noch die folgenden speziellen Produkte, einerseits (für ein $n \in I\!N$) das Produkt der ersten n natürlichen Zahlen *(„Fakultät“)* und zum anderen das Produkt von n gleichen Zahlen *(„Potenz“)*:

$$n! := \prod_{\nu=1}^{n} \nu\,, \qquad \text{ergänzt durch} \qquad 0! := 1$$

Für $a \in I\!R$ und $x_\nu := a \quad (\nu \in I\!N)$

$$a^n := \prod_{\nu=1}^{n} x_\nu\,, \qquad \text{ergänzt durch} \qquad a^0 := 1$$

$$\text{Ist } I\!R \ni a \neq 0\,, \text{ so setzen wir noch} \quad a^{-n} := \frac{1}{a^n}\,.$$

Natürlich hätten wir a^n auch rekursiv — ohne Benutzung des allgemeinen Produktes — direkt durch

$$a^0 := 1\,, \quad a^{n+1} := a^n \cdot a \quad (n \in I\!N_0)$$

definieren können.

a^n lesen wir als *„a hoch n“* und sprechen a als *„Basis“*, n als *„Exponenten“* an.

Die wichtigsten Regeln über das Rechnen mit solchen Potenzen sind — für $a, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $n, m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{rclcrcl} (a\,b)^n & = & a^n\,b^n & \qquad & a^n\,a^m & = & a^{n+m} \\ \left(\frac{a}{c}\right)^n & = & \frac{a^n}{c^n} & & \frac{c^n}{c^m} & = & c^{n-m} \\ (a^n)^m & = & a^{n\,m} & & & & \end{array}$$

Die (Induktions-)<u>Beweise</u> dieser wohl vertrauten Aussagen überlassen wir einer Übungsaufgabe. Wir formulieren diese fünf Gesetze, die man beherrschen muß, ausdrücklich auch noch einmal in Worten:

Potenzen mit gleichem Exponenten werden multipliziert, indem man die Basen multipliziert (und den Exponenten beibehält).

Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem die man Exponenten addiert (und die Basis beibehält).

Potenzen mit gleichem Exponenten werden dividiert, indem man die Basen dividiert (und den Exponenten beibehält).

Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem man die Exponenten subtrahiert (und die Basis beibehält).

Potenzen werden potenziert, indem man die Exponenten multipliziert.

Schränkt man die Addition und die Multiplikation auf die Menge der natürlichen Zahlen ein, so gelten — entprechend modifiziert —:

(A1), (A2), (M1), (M2), (D)

(M3): $\exists\, 1 \in \mathbb{N} \quad \forall a \in \mathbb{N} \quad a \cdot 1 = a$

$\mathbb{N} \subset \mathbb{P}$ [(P1), (P2), (P3) sind damit hier trivial]

(V) (ist *hier* wenig interessant)

Die Menge der *„ganzen Zahlen"* wird wie folgt definiert:

$$\mathbb{Z} := \mathbb{N}_0 \cup \{-m \mid m \in \mathbb{N}\}$$

Für $\mathbb{Z}$ gelten — wieder mit den eingeschränkten Operationen — zusätzlich zu den für $\mathbb{N}$ notierten Eigenschaften:

(A3): $\exists\, 0 \in \mathbb{Z} \quad \forall a \in \mathbb{Z} \quad a + 0 = a$

(A4): $\forall a \in \mathbb{Z} \quad \exists\, -a \in \mathbb{Z} \quad a + (-a) = 0$

Natürlich gilt *nicht* $\mathbb{Z} \subset \mathbb{P}$.

Für die *Abschätzung von Potenzen* ist die folgende Überlegung oft von Nutzen:

BERNOULLIsche Ungleichung

Vor.: $\mathbb{R} \ni a > -1$, $n \in \mathbb{N}_0$

Beh.: 1) $(1+a)^n \geq 1 + n \cdot a$

2) Falls $a \neq 0$ *und* $n \geq 2$: $(1+a)^n > 1 + n \cdot a$

Beweis: Im Fall $a = 0$ ist nichts zu zeigen. Ist $a \neq 0$, so hat man für $n = 0, 1$ Gleichheit: $(1+a)^n = 1 + na$. Für $n \in \mathbb{N}$ ergibt sich dann induktiv die Behauptung; denn:

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n \cdot \underbrace{(1+a)}_{>0} \geq (1+na)(1+a) = 1 + (n+1)a + na^2 >$$

$1 + (n+1)a$. (Hierbei haben wir bei der ersten Abschätzung die Induktionsvoraussetzung eingesetzt.) □

Abschließend vermerken wir noch, daß natürlich auch *mehrere* Startelemente neben einer Rekursionsvorschrift gegeben sein können. Wir führen dies nicht allgemein aus, sondern notieren dazu lediglich ein Beispiel:

(B6) $a_1 := a_2 := 1, \quad a_n := a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n \in \mathbb{N}_3)$ liefert:
$a_3 = 2, \quad a_4 = 3, \quad a_5 = 5, \quad a_6 = 8, \quad a_7 = 13, \ldots$

1.5.2 Binomial-Koeffizienten, Binomischer Satz

Den meisten Lesern wird von der Schule her zumindest noch die Formel

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a, b \in \mathbb{R})$$

vertraut sein. Für höhere Potenzen — $(a+b)^n$ — gibt es entsprechende Formeln, die aber nicht mehr ganz so einfach sind. Zur Herleitung betrachten wir zunächst die *„Binomial-Koeffizienten"*: Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$

$$\binom{\alpha}{n} := \frac{\prod_{\nu=0}^{n-1} (\alpha - \nu)}{n!} \qquad \left(= \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdots (\alpha - n + 1)}{1 \cdot 2 \cdots n} \right)$$

Es stehen also sowohl im Nenner wie auch im Zähler Produkte aus n Faktoren, unten von 1 an jeweils um 1 aufwärts, oben von α an um 1 abwärts.

Mit den obigen Vereinbarungen hat man:

(1) $$\binom{\alpha}{0} = 1, \qquad \binom{\alpha}{1} = \alpha \qquad \text{und} \qquad \binom{n}{n} = 1.$$

Ist α aus $\mathbb{N}_0$ und kleiner als n, so steht oben ein Faktor 0, also:

(2) Für $\mathbb{N}_0 \ni m < n$ gilt $\binom{m}{n} = 0$.

(3) Für $\mathbb{N}_0 \ni m \geq n$ hat man $\binom{m}{n} = \dfrac{m!}{n!\,(m-n)!} = \dbinom{m}{m-n}$.

Den Beweis der ersten Gleichung liest man — durch Erweitern mit $(m-n)!$ — unmittelbar aus der Definition ab. Daraus folgt dann die zweite Gleichung, da der Nenner symmetrisch in n und $m - n$ ist.

(4) Bemerkung $$\binom{\alpha}{n} + \binom{\alpha}{n+1} = \binom{\alpha+1}{n+1}$$

Zum Beweis rechnet man einfach die linke Seite aus:

$$\begin{aligned} l.S. &= \frac{\prod\limits_{\nu=0}^{n-1}(\alpha-\nu)}{n!} + \frac{\prod\limits_{\nu=0}^{n}(\alpha-\nu)}{(n+1)!} = \frac{[(n+1)+(\alpha-n)]\prod\limits_{\nu=0}^{n-1}(\alpha-\nu)}{(n+1)!} \\ &= \frac{[\alpha+1]\prod\limits_{\nu=0}^{n-1}[(\alpha+1)-(\nu+1)]}{(n+1)!} = \frac{[\alpha+1]\prod\limits_{\nu=1}^{n}[(\alpha+1)-\nu]}{(n+1)!} = r.S. \qquad \square \end{aligned}$$

Diese Formel erlaubt eine bequeme sukzessive Berechnung der Binomial-Koeffizienten $\binom{m}{n}$ für $\mathbb{N}_0 \ni m \geq n$ durch das als „PASCAL*sches Dreieck*" bezeichnete Schema:

$$\begin{array}{ccccccccccccl} & & & & & 1 & & & & & & & \binom{0}{0} \\ & & & & 1 & & 1 & & & & & & \binom{1}{n} \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \binom{2}{n} \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \binom{3}{n} \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \binom{4}{n} \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \binom{5}{n} \\ . & . & . & & . & & . & & . & . & . & & . \end{array}$$

(3) liefert die Symmetrie des Schemas, (1) daß ‚außen' lauter Einsen stehen. (4) bedeutet, daß jeder Koeffizient im ‚Inneren' sich als Summe der beiden (rechts und links) oberhalb stehenden Koeffizienten ergibt.

Diese Koeffizienten dienen nicht nur zur Formulierung des folgenden Satzes, sondern spielen bei vielen Überlegungen der Kombinatorik und in der Wahrscheinlichkeitsrechnung eine wesentliche Rolle.

Binomischer Satz

Vor.:	$a, b \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}_0$
Beh.:	$(a+b)^n = \sum\limits_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} a^{n-\nu} b^\nu$

Beweis: Für $n = 0$ ist $l.S. = 1$ und $r.S. = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$. Für den Schluß von n auf $n+1$ rechnet man wie folgt:

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= (a+b)^n (a+b) \underset{(n)}{=} \Big(\sum_{\nu=0}^{n} \tbinom{n}{\nu} a^{n-\nu} b^\nu\Big)(a+b) \\ &= \sum_{\nu=0}^{n} \tbinom{n}{\nu} a^{n+1-\nu} b^\nu + \sum_{\nu=0}^{n} \tbinom{n}{\nu} a^{n-\nu} b^{\nu+1} \\ &= \tbinom{n}{0} a^{n+1} b^0 + \sum_{\nu=1}^{n} \tbinom{n}{\nu} a^{n+1-\nu} b^\nu + \sum_{\nu=0}^{n-1} \tbinom{n}{\nu} a^{n-\nu} b^{\nu+1} + \tbinom{n}{n} a^0 b^{n+1} \\ &= a^{n+1} + \sum_{\nu=1}^{n} \tbinom{n}{\nu} a^{n+1-\nu} b^\nu + \sum_{\nu=1}^{n} \tbinom{n}{\nu-1} a^{n+1-\nu} b^\nu + b^{n+1} \\ &\underset{(4)}{=} a^{n+1} + \sum_{\nu=1}^{n} \tbinom{n+1}{\nu} a^{n+1-\nu} b^\nu + b^{n+1} = \sum_{\nu=0}^{n+1} \tbinom{n+1}{\nu} a^{n+1-\nu} b^\nu \qquad \square \end{aligned}$$

1.6 Die rationalen Zahlen

Wir führen die *„rationalen Zahlen"* als Brüche von ganzen Zahlen ein. Dabei kann der — von 0 verschiedene — Nenner als natürliche Zahl vorausgesetzt werden, indem wir nötigenfalls mit -1 erweitern.

Definition $\mathbb{Q} := \left\{x \in \mathbb{R} \mid \exists q \in \mathbb{N}\, \exists p \in \mathbb{Z} \;\; x = \frac{p}{q}\right\}$

Die Regeln über das „Bruchrechnen" (vgl. 1.4.2) zeigen:

$$a, b \in \mathbb{Q} \implies a+b,\; ab,\; -a \in \mathbb{Q}$$
$$a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \implies a^{-1} \in \mathbb{Q}$$

Für $\mathbb{Q}$ gelten daher (mit der eingeschränkten Addition und Multiplikation und $\mathbb{P} \cap \mathbb{Q}$ statt $\mathbb{P}$) die Regeln:
$(A1)$ – $(A4)$, $(M1)$ – $(M4)$, (D) und (P1), (P2), (P3) entsprechend; jedoch *nicht* (V).

Wir zeigen zu der letzten Aussage zunächst nur:

$$\boxed{\textit{Es existiert kein } x \in \mathbb{Q} \textit{ mit } x^2 = 2\,.}$$

Beweis: Ist $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = 2$, so kann — wegen $x^2 = (-x)^2$ — davon ausgegangen werden, daß x positiv ist. Dazu existieren p, $q \in \mathbb{N}$ mit $x = \frac{p}{q}$ und p, q ‚teilerfremd' (nötigenfalls kürzen!). Es gilt $2q^2 = x^2q^2 = p^2$. Demnach ist p gerade, also $p = 2m$ mit einem $m \in \mathbb{N}$. Das liefert $2q^2 = (2m)^2 = 4m^2$, somit $q^2 = 2m^2$, also auch q gerade. Damit ist 2 Teiler von p und q im Widerspruch zur angenommenen Teilerfremdheit. □

Der Zusammenhang dieser Aussage mit (V) wird durch Satz (7) aus Abschnitt 1.7 ersichtlich werden.

1.7 Zum Vollständigkeitsaxiom

Die Überlegungen dieses Abschnitts sind nicht einfach. Wenn Sie damit zu Beginn Schwierigkeiten haben, so ist das völlig normal. Sie müssen nicht jede Einzelheit verstehen. Selbst wenn Sie den ganzen Abschnitt weglassen, können Sie noch das meiste aus den anderen Kapiteln erlernen. Manche Dinge versteht man allerdings nur dann ganz richtig, wenn man diesen Abschnitt durchgearbeitet hat. Versuchen Sie es also zumindest!

(V) *Jede nicht-leere nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt eine kleinste obere Schranke.*

Hierzu sind zunächst einige Dinge zu erläutern:

Es seien $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$:

Bezeichnung a heißt *„obere Schranke"* zu M genau dann, wenn $x \leq a$ für jedes $x \in M$ gilt.

Wir schreiben für diese Aussage auch kürzer $\boxed{M \leq a}$ oder $\boxed{a \geq M}$.

M heißt *„nach oben beschränkt"* genau dann, wenn (innerhalb der reellen Zahlen) eine obere Schranke zu M existiert.

Ist M nach oben beschränkt, so existieren natürlich unendlich viele obere Schranken zu M. Das Axiom (V) sichert dann die Existenz einer *kleinsten* — und damit optimalen — oberen Schranke. Diese — offenbar existiert immer *höchstens* eine — bezeichnen wir als

„Supremum zu M" oder kurz „**sup** M".

Für $s \in I\!R$ gilt also:

$$s = \sup M \iff M \leq s \ \wedge \ [M \leq t \Longrightarrow s \leq t].$$

Denn der erste Teil der rechten Aussage bedeutet, daß s eine obere Schranke zu M ist, der zweite Teil beschreibt, daß s unter all den oberen Schranken t die kleinste ist.

Wenn eine Zahl $a \in \boldsymbol{M}$ existiert mit $M \leq a$, so ist diese eindeutig bestimmt; wir bezeichnen dann:

$$a =: \mathbf{max}\, M\,, \quad \text{gelesen als „}\textit{Maximum von M}\text{"}.$$

Zur Erläuterung dieser Begriffe vermerken wir:

a) *Falls* $\max M$ existiert, dann gilt $\max M = \sup M$.

b) Für jede nicht-leere *endliche* Teilmenge von $I\!R$ existiert offenbar das Maximum. (Genau genommen, müßte man das noch durch Induktion über die Anzahl von M zeigen).

c) Zum Beispiel existiert das Maximum der Menge $\{x \in I\!R \mid 0 \leq x < 1\}$ *nicht*; wohl aber das Supremum, nämlich 1.

Entsprechend sind — durch ‚Umkehrung' aller Ungleichungen — die Begriffe *„untere Schranke"*, *„nach unten beschränkt"*, $\boxed{M \geq a}$, $\boxed{a \leq M}$, *„Infimum zu M"* oder kurz „**inf** M", *„Minimum von M"* bzw. „**min** M" erklärt.
M *„beschränkt"* $:\iff$ M nach oben und nach unten beschränkt.

Wir stellen erste grundlegende Folgerungen aus (V) zusammen:

(1) „ARCHIMEDES-**Eigenschaft**" *$I\!N$ ist nicht nach oben beschränkt.*

$$\left(\iff \neg\left(\exists a \in I\!R\, \forall n \in I\!N \ \ n \leq a\right) \iff \boxed{\forall a \in I\!R\, \exists n \in I\!N \ \ n > a}\right)$$

<u>Beweis:</u> Wäre $I\!N$ nach oben beschränkt, so hätte man nach (V) die Existenz von $I\!R \ni s := \sup I\!N$ (Man beachte, daß $I\!N$ nicht leer ist, da $1 \in I\!N$).

Dann wäre $s-1$ keine obere Schranke zu $\mathbb{N}$, also existierte ein $n^* \in \mathbb{N}$ mit $n^* > s-1$, daher $\underbrace{n^*+1}_{\in \mathbb{N}} > s$: Widerspruch □

(2) Folgerung $\forall a \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon \in \mathbb{P}\ \exists n \in \mathbb{N} \quad n \cdot \varepsilon > a$

Beweis: Nach (1) existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{a}{\varepsilon}$. □

(3) Folgerung $\forall \varepsilon \in \mathbb{P}\ \exists n \in \mathbb{N} \quad (0 <)\ \frac{1}{n} < \varepsilon$

Beweis: Nach (2) existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \cdot \varepsilon > 1$ □

(4) Folgerung $\forall x \in \mathbb{R}\ \dot{\exists}\, n \in \mathbb{Z} \quad n \leq x < n+1$

Wir bezeichnen dieses n als $[x]$ und lesen es als *„größte ganze Zahl $\leq x$"*.

Beweis: Eindeutigkeit: Falls $n, m \in \mathbb{Z}$ mit $n \leq x < n+1$, $m \leq x < m+1$ und $n \neq m$: Œ $n < m$:[2] $n+1 \leq m \leq x < n+1$: Widerspruch

Existenz: Ist $x \geq 0$, so existiert nach (1) ein $m \in \mathbb{N}$ mit $x < m$. Die Menge $\{k \in \mathbb{N} : x < k\}$ ist somit nicht leer, hat also ein kleinstes Element p. $n := p-1$ leistet dann das Gewünschte. Ist $x < 0$, so existiert nach (1) ein $k \in \mathbb{N}$ mit $x+k \geq 0$. Die Anwendung des ersten Falls auf $x+k$ liefert dann die Behauptung. □

(5) Folgerung *Zu $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ existiert ein $r \in \mathbb{Q}$ mit $a < r < b$.*

Man sagt für diesen Sachverhalt auch: *„$\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$."*

Beweis: Nach (3) existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $0 < \frac{1}{n} < b-a$; mit $[na] \leq na < [na]+1 =: m\ (\in \mathbb{Z})$ hat man $a < \frac{m}{n} =: r$ und $m-1 \leq na$, daher $r = \frac{m}{n} = \frac{m-1}{n} + \frac{1}{n} \leq a + \frac{1}{n} < a + (b-a) = b$. □

(6) Folgerung *Jede reelle Zahl läßt sich beliebig genau durch rationale Zahlen ‚approximieren'.*

Präziser: *Zu jeder vorgegebenen positiven ‚Toleranz' ε gibt es eine rationale Zahl, die von der gegebenen reellen Zahl um höchstens ε abweicht.*

Formal: $\forall a \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists r \in \mathbb{Q} \quad |a-r| \leq \varepsilon$

Zum Beweis hat man in (5) nur $a-\varepsilon$ und $a+\varepsilon$ zu betrachten. □

Wir haben bei diesen Überlegungen einige kleine Schritte weggelassen, die — streng genommen — noch bewiesen werden müßten. Die mathematisch besonders interessierten Leser seien dazu auf Übungsaufgabe (2) verwiesen.

Abschließend zeigen wir noch, daß aus (V) die Existenz ‚beliebiger' Wurzeln folgt:

[2] Hier habe ich erstmals das Zeichen Œ benutzt, das als Abkürzung für *„Ohne Einschränkung"* zu lesen ist. Es soll ausdrücken, daß die Durchführung des Beweises auf einen wesentlichen Fall beschränkt wird, aus dem sich die gesamte Aussage leicht ergibt.

Bezeichnung $\mathbb{R}_+ := \mathbb{P} \cup \{0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$, gelesen als Menge der *nicht-negativen reellen Zahlen*.

(7) Satz

Vor.: $a \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$
Beh.: $\dot{\exists}\, b \in \mathbb{R}_+ \quad b^n = a$

Wir bezeichnen dieses b als $a^{\frac{1}{n}}$ oder $\sqrt[n]{a}$, gelesen als *„n-te Wurzel von a"*; speziell noch $\sqrt{a} := \sqrt[2]{a}$, gelesen *„Wurzel (*oder *Quadratwurzel) von a"*.

Ich führe den Beweis aus, obwohl er sicher vielen als recht kompliziert erscheinen wird. (Ehe Sie sich da zu sehr festbeißen, sollten Sie den Beweis lieber überschlagen.)

Œ kann $a \in \mathbb{P}$ und $n \geq 2$ angenommen werden. Die Eindeutigkeit liest man ab aus: $0 < b_1 < b_2 \Longrightarrow b_1^n < b_2^n$, was sich aus den Überlegungen in 1.4.3 sofort induktiv ergibt. Zur Existenz betrachten wir die Menge $A := \{x \in \mathbb{R} : x^n < a\}$. A ist nicht leer, da $0 \in A$. Es existiert nach (1) ein $k \in \mathbb{N}$ mit $a \leq k \overset{\checkmark}{\leq} k^n$. Daher ist A durch k nach oben beschränkt. Wir setzen: $b := \sup A$. Da $0 \in A$ ist, gilt $0 \leq b$. Wir zeigen: $b^n = a$:
Falls $b^n < a$: Dann existiert $\varepsilon \in \mathbb{P}$ mit $\varepsilon < \dfrac{a - b^n}{n \cdot a} = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{b^n}{a}\right) < 1$; damit $\frac{b^n}{a} < 1 - n \cdot \varepsilon \underset{\text{(Bernoulli)}}{\leq} (1-\varepsilon)^n$, also $\left(\frac{b}{1-\varepsilon}\right)^n < a$ und daher $\frac{b}{1-\varepsilon} \in A$ im Widerspruch zu $\frac{b}{1-\varepsilon} > b = \sup A$.
Falls $b^n > a$: Dann existiert $\varepsilon \in \mathbb{P}$ mit $\varepsilon < \dfrac{b^n - a}{n \cdot b^n} = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{a}{b^n}\right) < 1$; damit $\frac{a}{b^n} < 1 - n \cdot \varepsilon \underset{\text{(Bernoulli)}}{\leq} (1-\varepsilon)^n$, also $a < \big((1-\varepsilon)\,b\big)^n$ und daher $(1-\varepsilon)b$ obere Schranke zu A im Widerspruch zu $(1-\varepsilon)b < b = \sup A$. □

Die Regeln über das Rechnen mit Potenzen übersetzen sich direkt zu entsprechenden Regeln für das **Rechnen mit Wurzeln**, zum Beispiel:

Für $a, b \in \mathbb{R}_+$, $c \in \mathbb{P}$ und $n, m \in \mathbb{N}$:

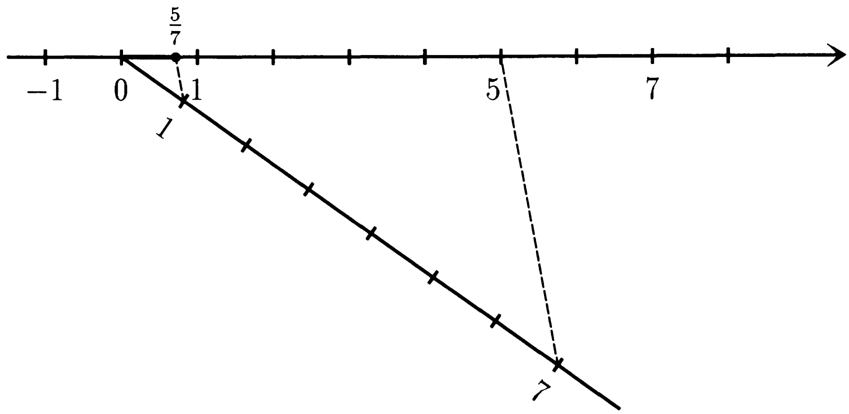
$$\sqrt[n]{a\,b} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} \qquad \sqrt[n\cdot m]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{c}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{c}}$$

Die einfachen Beweise bleiben Ihnen als Übungsaufgabe überlassen.

1.8 Darstellungen reeller Zahlen

Beim praktischen Umgang mit reellen Zahlen ist eine *Veranschaulichung* auf der sogenannten *„Zahlengeraden"* für viele Überlegungen sehr hilfreich.

Auf einer ‚Geraden' wird ein beliebiger ‚Punkt' als ‚Nullpunkt' 0 markiert. Nach Festlegung einer festen positiven Länge als Einheit erhält man die Lage einer natürlichen Zahl n auf der Zahlengeraden, indem man die Einheit ab dem Nullpunkt n-fach nach ‚rechts' abträgt, entsprechend $-n$ durch Abtragen nach ‚links'. Die Lage der rationalen Zahlen erhält man über den ‚Strahlensatz', wie am Beispiel $\frac{5}{7}$ durch die folgende Skizze verdeutlicht:



Für rationale Zahlen a, b, c bedeutet dann $a < b$, daß — für die entsprechenden Punkte — a ‚links' von b bzw. b ‚rechts' von a liegt, und $a < c < b$, daß c ‚zwischen' a und b liegt.

Wenn diese Veranschaulichung auch oft zur Orientierung nützlich ist, so darf sie dennoch — streng genommen — *nicht* als Beweismittel verwendet werden; denn beispielsweise sind die Begriffe ‚Gerade' und ‚Punkt' von uns gar nicht präzise definiert worden. Wir werden daher die Beweise allein basierend auf den Axiomen der reellen Zahlen führen und dies gelegentlich ergänzend durch eine Zeichnung veranschaulichen, um das Verständnis zu unterstützen. Ohne Zweifel ist dabei die Anschauung zum Einprägen mathematischer Aussagen sehr hilfreich.

Für das praktische Rechnen mit reellen Zahlen ist eine geeignete und die Rechnung erleichternde Darstellung äußerst wichtig. Selbst schon innerhalb der natürlichen Zahlen hat das auf die BABYLONIER zurückgehende *„Stellenwertsytem"* gegenüber ‚naiven' Möglichkeiten, wie etwa entsprechend viele Striche zu machen, Schnüre mit Knoten heranzuziehen oder geeigneten ‚Bündelungen' (z.B. Fünfer-Päckchen), vielfältige Vorteile. Im *„Zehnersystem"* oder *„Dezimalsystem"* gibt es ‚Einer', ‚Zehner', ‚Hunderter'. Der ‚Wert' einer *„Ziffer"* hängt von der Position in der ‚Darstellung' einer Zahl ab.

Für den Umgang mit Computern haben daneben *„Dualzahlen"* und *„Hexadezimalzahlen"* eine besondere Bedeutung erlangt. Obwohl die folgenden Überlegungen ohne wesentliche Änderung für eine beliebige ‚Basis' durchgeführt werden könnten, habe ich sie nur speziell im vertrauten Zehnersystem ausgeführt; denn manche Leser haben vielleicht mit der allgemeinen Situation

— durch die ungewohnte Bezeichnungsweise — zu Beginn noch Schwierigkeiten. Wir kommen erst später darauf zurück.

Wir betrachten die *„Ziffern“*

$$0\,,1\,,2\,,3\,,4\,,5\,,6\,,7\,,8\,,9$$

und erinnern noch einmal daran, daß $2 := 1+1\,, 3 := 2+1\,, \ldots\,, 9 := 8+1$ eingeführt wurde.

Mit der Bezeichnung $10 := 9+1$ betrachten wir für $k \in \mathbb{Z}$ und Ziffern $a_\nu \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ für $\mathbb{Z} \ni \nu, n \geq -k$

$$s_n := \sum_{\nu=-k}^{n} a_\nu \cdot 10^{-\nu}\,.$$

Wir zeigen als erstes

(∗) $\{s_n : \mathbb{Z} \ni n \geq -k\}$ ist nach oben beschränkt.

Zum Beweis dieser Aussage zieht man zweckmäßigerweise die folgende **„Geometrische Summenformel“** heran, die wir noch an vielen Stellen entscheidend benutzen werden, und die Sie sich daher besonders gut merken sollten.

$$\boxed{\textit{Für } q \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \textit{ und } n \in \mathbb{N}_0: \qquad \sum_{\nu=0}^{n} q^\nu = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}\,.}$$

Offensichtlich hat man als

Folgerung *Für* $0 < q < 1$ *und* $n \in \mathbb{N}_0$ *ist:* $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{n} q^\nu < \frac{1}{1-q}\,.$

Den Beweis dieser Summenformel führen wir induktiv: (Eine weitere einfache Beweismöglichkeit wird in den Übungen behandelt.)

Für $n = 0$ ist $l.S. = q^0 = 1 = \frac{1-q}{1-q} = r.S.$

Für den Induktionsschluß von n auf $n+1$ rechnet man:

$$\sum_{\nu=0}^{n+1} q^\nu = \sum_{\nu=0}^{n} q^\nu + q^{n+1} \underset{(n)}{=} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + \frac{q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} = \frac{1-q^{(n+1)+1}}{1-q} \qquad \square$$

Der Beweis von (∗) ist nun durch einfache Abschätzung gegeben:

$$(\bullet) \quad s_n \leq 9 \cdot \sum_{\nu=-k}^{n} 10^{-\nu} = 9 \cdot 10^k \sum_{\nu=0}^{n+k} 10^{-\nu} = 9 \cdot 10^k \sum_{\nu=0}^{n+k} (10^{-1})^\nu < 10^{k+1}\,.$$

Hierbei haben wir im letzten Schritt mit $q := \frac{1}{10}$ die obige Folgerung herangezogen, was $\sum_{\nu=0}^{n+k} (10^{-1})^\nu < \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10}{9}$ ergibt. $\square$

Nach (V) existiert daher (in $\mathbb{R}$) $s := \sup\{s_n : \mathbb{Z} \ni n \geq -k\}\,.$

Statt der rechten Seite schreibt man meist

$$\sum_{\nu=-k}^{\infty} a_\nu\, 10^{-\nu} .$$

Hierdurch wird weder eine Zahl „∞" (‚unendlich') eingeführt, noch eine ‚Summe von unendlich vielen Summanden'! $\sum\limits_{\nu=-k}^{\infty} a_\nu\, 10^{-\nu}$ ist nur eine kurze, allgemein übliche — nicht sonderlich glückliche — Notierungsweise für: $\sup\left\{ \sum\limits_{\nu=-k}^{n} a_\nu\, 10^{-\nu} \;:\; \mathbb{Z} \ni n \geq -k\right\}$. (Man könnte ja statt „$\infty$" zum Beispiel ein „♡" oben hinschreiben oder auch gar nichts.)

Zunächst hat man trivialerweise:

$$s_n \;\leq\; s_{n+1} \;\leq\; s \qquad (\mathbb{Z} \ni n \geq -k) .$$

Für $\mathbb{Z} \ni m > n$ gilt weiter — in ($\bullet$) $k := -(n+1)$ setzen —

$$s_m \;=\; s_n \;+\; \sum_{\nu=n+1}^{m} \cdots \;<\; s_n + 10^{-n} ,$$

also auch

$$s \;\leq\; s_n + 10^{-n} \qquad (\mathbb{Z} \ni n \geq -k) .$$

Die reelle Zahl s ist also durch s_n bis auf einen ‚Fehler' von höchstens 10^{-n} bestimmt.

Wir notiern s_n auch — wie üblich und allen längst vertraut — als: $\boxed{a_{-k} \cdots a_0 \,.\, a_1 \cdots a_n}$, falls $k \in \mathbb{N}_0$, speziell $\boxed{a_{-k} \cdots a_0}$, falls noch $n = 0$ $(s \in \mathbb{N}_0)$, und $\boxed{0 \,.\, a_1 \cdots a_n}$, falls $k \leq -1$ $(s \leq 1)$.

s schreiben wir auch in der Form $\boxed{a_{-k} \cdots a_0 \,.\, a_1 \cdots a_n \cdots}$, falls $k \in \mathbb{N}_0$, und entprechend für $k \leq -1$.

(B1) $1995 = 1 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$

Weniger gelehrt: 1 Tausender, 9 Hunderter, 9 Zehner und 4 Einer.

(B2) $3.04 = 3 \cdot 10^0 + 0 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} = 3 + \frac{4}{100}$

Wir zeigen nun, daß umgekehrt zu jedem $x \in \mathbb{R}_+$ eine solche *„Dezimalbruchdarstellung"* existiert. Zusammen bedeutet dies, daß $\mathbb{R}_+$ — und damit $\mathbb{R}$, wenn wir noch ein ‚Vorzeichen' zulassen — gerade die Gesamtheit dieser *„Dezimalbrüche"* ist. Dazu zeigen wir vorab den auch später benötigten

Hilfssatz *a) Vor.:* $\mathbb{R} \ni q > 1$ *Beh.:* $\forall K \in \mathbb{P}\; \exists n \in \mathbb{N} \quad q^n > K$

b) Vor.: $\mathbb{P} \ni q < 1$ *Beh.:* $\forall \varepsilon \in \mathbb{P}\; \exists n \in \mathbb{N} \quad q^n < \varepsilon$

Beweis: a) $q^n = \big(1 + (q-1)\big)^n \underset{\text{(Bernoulli)}}{\geq} 1 + n(q-1) > n(q-1)$;
damit ist diese Behauptung nach (2) aus 1.7 gegeben.

b) Nach a) existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $\left(\frac{1}{q}\right)^n > \frac{1}{\varepsilon}$ □

Beginnend mit $k := \min\{\kappa \in \mathbb{N}_0 : x < 10^{\kappa+1}\}$ konstruieren wir (rekursiv) Ziffern $a_\nu \in \{0, \cdots, 9\}$ für $\mathbb{Z} \ni \nu \geq -k$ so, daß mit

$$(\otimes) \quad x_n := \sum_{\nu=-k}^{n} a_\nu\, 10^{-\nu} \quad \text{gilt:} \quad x_n \leq x < x_n + 10^{-n} \quad (\mathbb{Z} \ni n \geq -k):$$

$n = -k \quad a_{-k} := \max\{b \in \mathbb{N}_0 : b\,10^k \leq x\} \quad (\in \{0, \cdots, 9\})$; dann gilt:

$$x_{-k} = a_{-k}\, 10^k \leq x < (a_{-k} + 1)\, 10^k = x_{-k} + 10^k .$$

Hat man die a_ν für $\mathbb{N} \ni n \geq \nu \geq -k$ schon so bestimmt, daß $(\otimes)$ gilt, dann definieren wir — falls noch $x_n < x$ — entsprechend

$$a_{n+1} := \max\{b \in \mathbb{N}_0 : b\,10^{-(n+1)} + x_n \leq x\} \quad (\in \{0, \cdots, 9\})$$

und erhalten:

$$x_{n+1} = x_n + a_{n+1}\, 10^{-(n+1)} \leq x < x_n + (a_{n+1}+1)\, 10^{-(n+1)} = x_{n+1} + 10^{-(n+1)}.$$

Noch zu zeigen ist, falls der Prozeß nicht abbricht:

$$x = \sup\{x_n : \mathbb{Z} \ni n \geq -k\} \quad \left(= \sum_{\nu=-k}^{\infty} a_\nu\, 10^{-\nu} \right)$$

Beweis: Nach $(\otimes)$ ist x eine obere Schranke zu $\{x_n : \cdots\}$, also $s := \sup\{x_n : \mathbb{Z} \ni n \geq -k\} \leq x$. Zu $\varepsilon \in \mathbb{P}$ existiert nach dem Hilfssatz ein $n \in \mathbb{N}$ mit $10^{-n} < \varepsilon$; nach $(\otimes)$ somit

$$x < x_n + 10^{-n} < s + \varepsilon ;$$

über (13) aus Teilabschnitt 1.4.3 folgt daraus $x \leq s$. □

Der Beweis scheint schwierig zu sein, doch er folgt genau der einfachen Idee, wie man eine bestimmte Summe Geld bereitstellt: Wenn ich etwa $x := 143.71$ DM zu zahlen haben, bedeutet die Festlegung der obigen Größe k, daß ich gerade keine Tausender, wohl aber Hunderter benötige. $a_{-k} = 1$ liefert die Anzahl der Hunderter; denn 2 Hunderter wären gerade zuviel. Im nächsten Schritt werden dann die 4 Zehner ausgewählt, da 4 reichen und 5 zuviel wären, usw.

Hier liegt der Einwand nahe, daß man das ja schon vorher weiß, weil es aus der notierten Dezimaldarstellung direkt ablesbar ist. Doch das läßt sich leicht modifizieren: Stellen Sie sich beispielsweise einen Behälter mit entsprechend vielen Pfennigen vor, die sie ‚umtauschen' wollen.

Noch deutlicher wird das Verfahren vielleicht, wenn man sich etwa die Berechnung von $\sqrt{2}$ ansieht:

$1^2 = 1 < 2 < 4 = 2^2$, also beginnt die Dezimaldarstellung von $\sqrt{2}$ mit $1.$
$1.4^2 = 1.96 < 2 < 2.25 = 1.5^2$ liefert dann $1.4\cdots$
$1.41^2 = 1.9881 < 2 < 2.0164 = 1.42^2$ ergibt $1.41\cdots$
$1.414^2 = 1.999396 < 2 < 2.002225 = 1.415^2$ zeigt $1.414\cdots$
usw.

1.9 Komplexe Zahlen

1.9.1 Einführung der komplexen Zahlen

Die Menge der reellen Zahlen läßt in mancherlei Hinsicht noch Wünsche offen; insbesondere stört, daß nicht jedes ‚Polynom' eine (reelle) Nullstelle hat. Das einfachste und wichtigste Beispiel ist

$$P(x) := x^2 + 1 .$$

Dieser Nachteil ist so gewichtig, daß man meinte, eine Zahl „i" erfinden zu müssen, für die gilt

$$i^2 + 1 = 0 .$$

Schon in den Bezeichnungen *„imaginär"* (eingebildet) und *„komplex"* (verwickelt) wird deutlich, daß man sich *früher* dabei nicht ganz wohl fühlte.

In der Vorlesung lese ich dazu oft ein paar Zeilen aus Robert MUSIL „Die Verwirrungen des Zöglings Törleß" vor:

> *„ ... Ja. Das ist doch gar nicht so schwer. Man muß nur festhalten, daß die Quadratwurzel aus negativ Eins die Rechnungseinheit ist."*
>
> *„Das ist es aber gerade. Die gibt es doch gar nicht. Jede Zahl, ob sie nun positiv ist oder negativ, gibt zum Quadrat erhoben etwas Positives. Es kann daher gar keine wirkliche Zahl geben, welche die Quadratwurzel von etwas Negativem wäre."*
>
> *„Ganz recht; aber warum sollte man nicht trotzdem versuchen, auch bei einer negativen Zahl die Operation des Quadratwurzelziehens anzuwenden? Natürlich kann dies dann keinen wirklichen Wert ergeben, und man nennt doch auch deswegen das Resultat nur ein imaginäres. Es ist so, wie wenn man sagen würde: hier saß sonst immer jemand, stellen wir ihm also auch heute einen Stuhl hin; und selbst wenn er inzwischen gestorben wäre, so tun wir doch, als ob er käme."*
>
> ....
>
> *„Wie soll ich das ausdrücken? Denk doch nur einmal so daran: In solch einer Rechnung sind am Anfang ganz solide Zahlen, die Meter oder Gewichte oder irgend etwas anderes Greifbares darstellen können und wenigstens wirkliche Zahlen sind. Am Ende der Rechnung stehen ebensolche. Aber diese beiden hängen miteinander durch etwas zusammen, das es gar nicht gibt. Ist das nicht wie eine Brücke, von der nur Anfangs- und Endpfeiler vorhanden sind und die man dennoch so sicher überschreitet, als ob sie ganz dastünde? Für mich hat so eine Rechnung etwas Schwindliges: als ob es ein Stück des Weges weiß Gott*

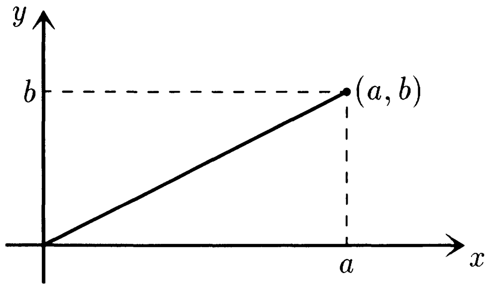
> *wohin ginge. Das eigentlich Unheimliche ist mir aber die Kraft, die in solch einer Rechnung steckt und einen so festhält, daß man doch wieder richtig landet.“*

Der für uns entscheidende Grund, komplexe Zahlen zu betrachten, ist aber nicht der oben angesprochene ‚Defekt‘, sondern die Tatsache, daß der Umgang mit komplexen Zahlen viele Rechnungen ganz wesentlich erleichtert und manche Überlegungen erst durchsichtig und verständlich macht. Hier lohnt sich die Mühe, etwas Neues zu lernen, ganz besonders!

Wir werden sehen, daß sich die komplexen Zahlen als *einfache und konkrete mathematische Objekte* einführen lassen. Dazu betrachten wir:

Definition $\mathbb{C} := \mathbb{R}^2 \quad \big(= \{(x,y) : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}\big)$
(Menge der *„komplexen Zahlen“*)

Anschaulich:



Um die Bezeichnung *„Zahl“* zu rechtfertigen, zeigen wir, daß man mit diesen Paaren reeller Zahlen ‚vernünftig‘ rechnen kann. Dazu definieren wir *„Gleichheit“*, *„Addition“* und *„Multiplikation“* in $\mathbb{C}$. Für $(x_1,y_1)\,,\,(x_2,y_2) \in \mathbb{C}$:

Definition
$$\begin{array}{lcl} (x_1,y_1) = (x_2,y_2) & :\Longleftrightarrow & x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2 \\ (x_1,y_1) + (x_2,y_2) & := & (x_1 + x_2\,,\, y_1 + y_2) \\ (x_1,y_1) \cdot (x_2,y_2) & := & (x_1 x_2 - y_1 y_2\,,\, x_1 y_2 + x_2 y_1) \end{array}$$

Dabei ist uns die Gleichheit von Paaren schon aus 1.1 bekannt. Die Addition ist gerade die *Vektoraddition* (im $\mathbb{R}^2$) und damit aus der Vorlesung über Lineare Algebra vertraut. Wir zeigen:

$(\mathbb{C},+,\cdot)$ *erfüllt (A1) - (A4), (M1) - (M4) und (D).*

Damit gelten alle Regeln, die wir allein aus den Axiomen (A1) - (A4), (M1) - (M4) und (D) (für $\mathbb{R}$) bewiesen haben, auch in $\mathbb{C}$! Wir übernehmen die darauf gegründeten *Definitionen* und *Bezeichnungen* entsprechend. Speziell sind so *„Subtraktion (Differenzen)“* und *„Division (Quotienten, Brüche)“* für komplexe Zahlen durch die Überlegungen in den Teilabschnitten 1.4.1 und 1.4.2 — gleich mit den wichtigsten Regeln — gegeben.

Beweisskizze: Die Gesetze (A1) bis (A4) können wir aus der Linearen Algebra als bekannt voraussetzen. Wir listen sie nur noch einmal auf. Es seien dazu $(x_\nu,y_\nu),(x,y) \in \mathbb{C} \quad (\nu = 1,2,3)$:

$$\begin{array}{lrcl}
(A1) & \big((x_1,y_1)+(x_2,y_2)\big)+(x_3,y_3) & = & (x_1,y_1)+\big((x_2,y_2)+(x_3,y_3)\big)\\
(A2) & (x_1,y_1)+(x_2,y_2) & = & (x_2,y_2)+(x_1,y_1)\\
(A3) & (x,y)+(0,0) & = & (x,y)\\
(A4) & (x,y)+(-x,-y) & = & (0,0)
\end{array}$$

Für die Multiplikation bestätigt man — durch problemloses Nachrechnen — entsprechend:

$$\begin{array}{lrcl}
(M1) & \big((x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2)\big)\cdot(x_3,y_3) & = & (x_1,y_1)\cdot\big((x_2,y_2)\cdot(x_3,y_3)\big)\\
(M2) & (x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2) & = & (x_2,y_2)\cdot(x_1,y_1)\\
(M3) & (x,y)\cdot(1,0) & = & (x,y)\\
(M4) & (x,y)\cdot\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{-y}{x^2+y^2}\right) & = & (1,0)\,, \qquad \textit{falls } (x,y)\neq(0,0)
\end{array}$$

Zusätzlich hat man das Distributivgesetz:

$$\text{(D)}\quad \big((x_1,y_1)+(x_2,y_2)\big)\cdot(x_3,y_3) = (x_1,y_1)\cdot(x_3,y_3) + (x_2,y_2)\cdot(x_3,y_3)$$

Auch hier führen wir die einfache Rechnung nicht aus. □

Zu beachten ist, daß in $\mathbb{C}$ *keine* Ordnungsrelation definiert ist, Begriffe wie *„größer"* und *„kleiner"* also keinen Sinn haben!

Einbettung von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$:

Für die Abbildung $\omega: \begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C}\\ \cup\!\!\!\!| & & \cup\!\!\!\!|\\ x & \longmapsto & (x,0)\end{array}$ hat man (mit $u,v\in\mathbb{R}$):

ω ist injektiv;

$$\begin{array}{ll}
\omega(u+v)=\omega(u)+\omega(v)\,, & \omega(0) = (0,0)\,,\\
\omega(u\cdot v)=\omega(u)\cdot\omega(v)\,, & \omega(1) = (1,0)\,.
\end{array}$$

Es ist also völlig gleichgültig, ob wir mit x (in $\mathbb{R}$) oder mit $\omega(x)$ (in $\mathbb{C}$) rechnen; daher schreiben wir im folgenden auch „$\boldsymbol{x}$" statt „$(x,0)$", insbesondere also „**0**" statt „$(0,0)$" und „**1**" statt „$(1,0)$". Wir *identifizieren* so $\mathbb{R}$ mit $\{(x,0) : x\in\mathbb{R}\} = \{\omega(x) : x\in\mathbb{R}\} = \omega(\mathbb{R})$, das heißt wir unterscheiden x und $\omega(x)$ nicht mehr!

Es gelten $(0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) = -1$ und
$(x,y) = (x,0)+(0,y) = (x,0)\cdot(1,0)+(0,1)\cdot(y,0)$.

Mit $\boxed{i := (0,1)}$ folgen daher $\boxed{i^2 = -1}$ und

$$\boxed{(x,y) = x+iy} \qquad (\text{für } x,y\in\mathbb{R})\,.$$

In dieser Darstellung bedeuten dann die *Addition und Multiplikation komplexer Zahlen*:

$$\begin{aligned}(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) &= (x_1 + x_2) + i \cdot (y_1 + y_2)\,,\\ (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i \cdot (x_1 y_2 + x_2 y_1)\,.\end{aligned}$$

1.9.2 Konjugiert komplexe Zahlen, Beträge, Real- und Imaginärteil

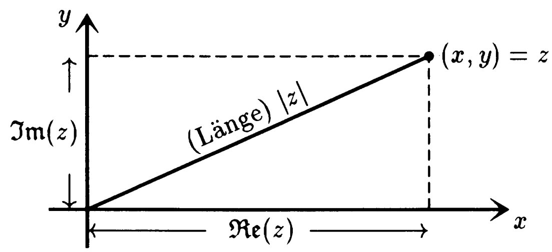
Für $x, y \in \mathbb{R}$ und $\mathbb{C} \ni z := x + i\,y$ heißen

$\overline{z} := x - i\,y$ die zu z *„konjugiert komplexe Zahl"*,

x *„Realteil"* von z, notiert als $\mathfrak{Re}(z)$,

y *„Imaginärteil"* von z, notiert als $\mathfrak{Im}(z)$, und

$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ *„Betrag"* oder *„Länge"* von z.



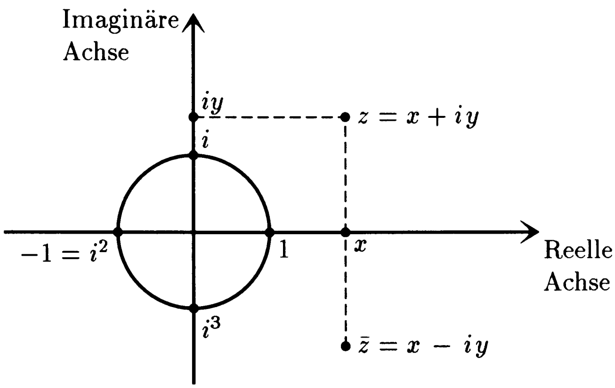
Wegen $|(x,0)| = \sqrt{x^2 + 0^2} = |x|$ $(x \in \mathbb{R})$ stimmen die Länge von x (in $\mathbb{R}$) und die von $\omega(x)$ (in $\mathbb{C}$) überein. Wir können daher das gleiche Symbol — $|\ |$ — benutzen.

Wir nennen noch z *„rein imaginär"* genau dann, wenn $\mathfrak{Re}(z) = 0$.

Offenbar gelten: $\mathfrak{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ und

$$\mathfrak{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})\,.$$

Die nachfolgende Abbildung sollten Sie sich ganz genau ansehen, das darin Dargestellte müssen Sie verstehen und beherrschen:



Mit den bereitgestellten Bezeichnungen folgen (für $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$) sofort die

(1) Regeln a) $z \cdot \overline{z} = |z|^2, \quad \overline{\overline{z}} = z, \quad |z| = |\overline{z}|$

b) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

c) *Für* $z \neq 0$: $\quad z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}, \quad (\overline{z})^{-1} = \overline{z^{-1}}$

d) $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z} \iff \mathfrak{Im}(z) = 0 \iff \mathfrak{Re}(z) = z$

Zur Einübung des Umgangs mit komplexen Zahlen führen wir die einfachen Beweise aus:

a): $z \cdot \overline{z} = (x+iy) \cdot (x-iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$, $\overline{\overline{z}} = \overline{x - iy} = x + iy = z$, $|z| = |\overline{z}|$ liest man direkt aus der Definition des Betrages oder aus den beiden gerade gezeigten Eigenschaften ab: $|\overline{z}|^2 = \overline{z}\,\overline{\overline{z}} = \overline{z}z = |z|^2$.

b): Hierzu schreiben wir $z_\nu = x_\nu + iy_\nu$ mit $x_\nu, y_\nu \in \mathbb{R}$ $(\nu = 1, 2)$ und rechnen: $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{(x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)} = (x_1 \pm x_2) - i(y_1 \pm y_2) = (x_1 - iy_1) \pm (x_2 - iy_2) = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$.

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)}$$
$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) - i(x_1 y_2 + x_2 y_1) = (x_1 - iy_1) \cdot (x_2 - iy_2) = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

c): Die erste Aussage resultiert aus a); denn a) zeigt $z \cdot \dfrac{\overline{z}}{|z|^2} = 1$; die zweite Aussage folgt aus: $1 = \overline{1} = \overline{z\,z^{-1}} \underset{b)}{=} \overline{z}\,\overline{z^{-1}}$.

d): $i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ impliziert $z = x + iy \in \mathbb{R} \iff y = 0$. Daraus ergibt sich die ganze Aussage. □

Wir stellen die wichtigsten **Eigenschaften des Betrages** auf $\mathbb{C}$ zusammen:

[B0]	$\lvert z\rvert \geq 0$	*(„Positivität")*
[B1]	$\lvert z\rvert = 0 \iff z = 0$	*(„Definitheit")*
[B2]	$\lvert z_1 + z_2\rvert \leq \lvert z_1\rvert + \lvert z_2\rvert$	*(„Dreiecksungleichung")*
[B3]	$\lvert z_1 \cdot z_2\rvert = \lvert z_1\rvert \cdot \lvert z_2\rvert$	
[B4]	$\left\lvert \dfrac{z_1}{z_2} \right\rvert = \dfrac{\lvert z_1\rvert}{\lvert z_2\rvert}$, *falls* $z_2 \neq 0$	
[B5]	$\lvert z_1 - z_2\rvert = \lvert z_2 - z_1\rvert$	*(„Symmetrie")*
[B6]	$\big\lvert \lvert z_1\rvert - \lvert z_2\rvert \big\rvert \leq \lvert z_1 - z_2\rvert \leq \lvert z_1\rvert + \lvert z_2\rvert$	
[B7]	$\lvert z_1 - z_3\rvert \leq \lvert z_1 - z_2\rvert + \lvert z_2 - z_3\rvert$	(wobei noch $z_3 \in \mathbb{C}$)

Beweis: [B0] und [B1] können unmittelbar aus der Definition des Betrages von z abgelesen werden: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$ und

$|z| = 0 \iff |z|^2 = 0 \iff x^2 + y^2 = 0 \iff x = y = 0 \iff z = 0$.

[B3] folgt mit (1.a) und (1.b): $|z_1 \cdot z_2|^2 \underset{(1.a)}{=} (z_1 \cdot z_2)\,\overline{(z_1 \cdot z_2)} \underset{(1.b)}{=}$

$(z_1 \cdot z_2)(\overline{z_1} \cdot \overline{z_2}) = (z_1 \cdot \overline{z_1})(z_2 \cdot \overline{z_2}) \underset{(1.a)}{=} |z_1|^2\,|z_2|^2 = \big(|z_1|\,|z_2|\big)^2$

[B2] dürfte aus der Linearen Algebra bekannt sein. Will man *nicht* darauf zurückgreifen, so kann wie folgt geschlossen werden:

Zunächst gilt: $\mathfrak{Re}(z_1\,\overline{z_2}) \le |z_1\,\overline{z_2}| \underset{[B3]}{=} |z_1|\,|\overline{z_2}| \underset{(1.a)}{=} |z_1|\,|z_2|$. Mit (1) rechnet man weiter: $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = |z_1|^2 + z_1\,\overline{z_2} + z_2\,\overline{z_1} + |z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\mathfrak{Re}(z_1\,\overline{z_2}) + |z_2|^2 \underset{(\text{s.o.})}{\le} |z_1|^2 + 2|z_1|\,|z_2| + |z_2|^2 = \big(|z_1| + |z_2|\big)^2$, also $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$.

In 1.4 haben wir (für $\mathbb{R}$) gezeigt, daß die Eigenschaften [B4] bis [B7] aus den Eigenschaften [B1] bis [B3] folgen; also gelten sie auch hier (in $\mathbb{C}$). □

Bezeichnung $M \subset \mathbb{C}$ *„beschränkt“* $:\iff \exists\, \alpha \in \mathbb{P} \quad \forall z \in M \quad |z| \le \alpha$

Wichtig ist wieder, daß dieser Begriff im Spezialfall $M \subset \mathbb{R}$ mit der bisherigen Bezeichnung übereinstimmt!

1.10 ‚Stetigkeit‘ der Grundoperationen (in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$)

Die Fragestellung dieses abschließenden Abschnitts mag vielen Lesern zu Beginn vielleicht ‚akademisch‘ erscheinen. Doch sie bereitet eine allgemeine und zentrale Überlegung, die der ‚Stetigkeit‘, vor: In vielen Bereichen — auch des täglichen Lebens! — möchte man sicher sein, daß sich ‚kleine‘ Veränderungen in irgendwelchen ‚Eingabegrößen‘ ‚wenig‘— also gerade nicht ‚chaotisch‘— auf das Ergebnis auswirken.

Insbesondere bei dem heute verbreiteten Umgang mit EDV-Anlagen oder auch Taschenrechnern ist das eine wichtige Fragestellung, da Zahlen — etwa $\sqrt{2}$ oder $\frac{1}{13}$ — durch Näherungswerte (‚abbrechende‘ Dezimalzahlen, Maschinenzahlen) realisiert werden. Und man möchte *vorweg* wissen, wie sich das im ungünstigsten Fall auf das Ergebnis einer Rechnung auswirken kann.

Es seien dazu $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{K}$.

$\mathbb{K}$ soll also entweder die Menge der reellen oder die der komplexen Zahlen sein. Durch diese Schreibweise vermeiden wir, viele gleichartige Überlegungen doppelt auszuführen. Man beachte auch die gegenüber 1.9 veränderte Bezeichnung: Hier können a, b, c, x, y und z je nach Bedarf reelle oder komplexe Zahlen sein.

(1) $\boxed{|(x+y) - (a+b)| \le |x-a| + |y-b|}$

Beweis: $l.S. = |(x-a)+(y-b)| \underset{[B2]}{\leq} r.S.$ □

(1') $\boxed{|(x-y)-(a-b)| \leq |x-a|+|y-b|}$

Beweis: $l.S. = |(x-a)-(y-b)| \underset{[B6]}{\leq} r.S.$ □

Sieht man x als *„Näherungswert"* für a, und y als *„Näherungswert"* für b, so beschreiben

$$\Delta x := |x-a| \qquad \text{und} \qquad \Delta y := |y-b|$$

die *„absoluten Fehler"*.

Für den absoluten Fehler des Ergebnisses (der Addition oder Subtraktion) $\Delta(x \pm y) := |(x \pm y) - (a \pm b)|$ gilt nach (1) bzw. (1'):

$$\Delta(x \pm y) \leq \Delta x + \Delta y .$$

Diese Ungleichung erlaubt eine Aussage darüber, wie nahe $x \pm y$ bei $a \pm b$ liegt, wenn die Güte der Näherungen x (von a) und y (von b) bekannt sind. Wir können also eine Aussage darüber machen, wie sich Fehler in den Eingabegrößen auf deren Summe und Differenz auswirken.

Für die Multiplikation, Division und Betragsbildung erhalten wir:

(2) $\boxed{|(x \cdot y)-(a \cdot b)| \leq |a| \cdot |y-b| + |b| \cdot |x-a| + |x-a|\,|y-b|}$

Beweis: $x \cdot y = \big(a+(x-a)\big) \cdot \big(b+(y-b)\big)$ zeigt:
$l.S. = |a \cdot (y-b) + (x-a) \cdot b + (x-a) \cdot (y-b)| \leq r.S.$ □

Dieses Resultat beschreibt man zweckmäßig durch Betrachtung der *„relativen Fehler"*: Für die meisten Fragestellungen ist bei Fehlerbetrachtungen der Bezug zur Größenordnung der zu messenden Größe wichtig. Zum Beispiel sind Fehler der Größenordnung 10 cm in der Astronomie unbedeutend, in der Chirurgie aber meist eine Katastrophe.

Sind a und b von 0 verschieden, dann betrachten wir die

„relativen Fehler" $\quad \delta x := \dfrac{|x-a|}{|a|} = \dfrac{\Delta x}{|a|}, \qquad \delta y := \dfrac{|y-b|}{|b|} = \dfrac{\Delta y}{|b|}.$

Für den relativen Fehler des Ergebnisses (der Multiplikation)

$\delta(x \cdot y) := \dfrac{|(x \cdot y) - (a \cdot b)|}{|a \cdot b|} = \dfrac{\Delta(x \cdot y)}{|a \cdot b|}$ gilt nach (2):

$$\delta(x \cdot y) \leq \delta x + \delta y + \delta x \cdot \delta y .$$

Sind δx und δy ‚klein' (beispielsweise $\leq 10^{-8}$), so ist der Term $\delta x \cdot \delta y$ ‚sehr klein' (in dem Beispiel $\leq 10^{-16}$), *näherungsweise* kann man dann *abschätzen* — wir schreiben dafür „$\preceq$ "— :

$$\delta(x \cdot y) \preceq \delta x + \delta y .$$

(3) $\boxed{\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| \le \frac{2}{|a|^2} \cdot |x-a|, \qquad \textit{falls } a \neq 0 \textit{ und } |x-a| \le \frac{|a|}{2}}$

<u>Beweis:</u> $|x| = |a + (x-a)| \underset{[B6]}{\ge} |a| - |x-a| \ge \frac{|a|}{2}$. Das liefert ($x \neq 0$ und) $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|x-a|}{|x|\,|a|} \le \frac{2}{|a|^2} \cdot |x-a|$. □

Nach [B6] hat man:

(4) $\boxed{\big||x| - |a|\big| \le |x-a|}$

In allen fünf Fällen können wir <u>grob</u> sagen:
Liegt x nahe bei a und y nahe bei b, dann liegt auch
$x+y$ $\left(x-y,\, x\cdot y,\, \frac{1}{x},\, |x|\right)$ nahe bei $a+b$ $\left(a-b,\, a\cdot b,\, \frac{1}{a},\, |a|\right)$.
<u>Präziser</u>: $x+y$ $(\dots)$ liegt *beliebig nahe* bei $a+b$ $(\dots)$, wenn nur x *hinreichend nahe* bei a und y *hinreichend nahe* bei b liegt.

<u>Quantitative Beschreibung</u>: Für jedes $\varepsilon > 0$ gelten:

(1), (1')
Vor.: $0 < \delta \le \varepsilon/2, \quad |x-a| < \delta,\ |y-b| < \delta$
Beh.: $\big|(x \pm y) - (a \pm b)\big| \le \varepsilon$

(2)
Vor.: $0 < \delta \le \min\left(1,\, \frac{\varepsilon}{|a|+|b|+1}\right), \quad |x-a| < \delta,\ |y-b| < \delta$
Beh.: $|x\,y - a\,b| \le \varepsilon$

<u>Beweis:</u> *l.S.* $\le |a|\,|y-b| + |b|\,|x-a| + |x-a|\,|y-b| \le |a|\,\delta + |b|\,\delta + \delta^2 \underset{\delta\le 1}{\le} \big(|a|+|b|+1\big)\,\delta \le \varepsilon$ □

(3)
Vor.: $a \neq 0; \quad 0 < \delta \le \min\left(\frac{|a|}{2},\, \frac{|a|^2}{2}\,\varepsilon\right), \quad |x-a| < \delta$
Beh.: $x \neq 0$ *und* $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| \le \varepsilon$

(4)
Vor.: $0 < \delta \le \varepsilon; \quad |x-a| < \delta$
Beh.: $\big||x| - |a|\big| < \varepsilon$

Allen Fällen ist folgender Sachverhalt gemeinsam:
Zu *jedem* $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit der Eigenschaft: Sind die ‚Eingabewerte' um höchstens δ verschieden, dann liegen die ‚Ausgabewerte' um höchstens ε auseinander.

In den Abschnitten 3.4 und 9.3 werden wir Überlegungen dieser Art ganz allgemein unter dem Stichwort *„Stetigkeit"* anstellen.

Intervalle, Umgebungen: Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ bezeichnen wir:

$$\begin{array}{lcll}
[a, b] & := & \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} & \textit{„abgeschlossenes Intervall“} \\
[a, b[& := & \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} & \textit{„halboffenes Intervall“} \\
]a, b] & := & \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} & \textit{„halboffenes Intervall“} \\
]a, b[& := & \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} & \textit{„offenes Intervall“}
\end{array}$$

Neben diesen ‚beschränkten‘ Intervallen kommen oft noch die folgenden ‚unbeschränkten‘ Intervalle vor:

$$\begin{array}{lcl}
[a, \infty[& := & \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\} \\
]a, \infty[& := & \{x \in \mathbb{R} : a < x\} \\
]-\infty, a] & := & \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\} \\
]-\infty, a[& := & \{x \in \mathbb{R} : x < a\} \\
]-\infty, \infty[& := & \mathbb{R}
\end{array}$$

(Auch hierdurch wird keine ‚Zahl‘ ∞ (oder $-\infty$) eingeführt! Wir könnten ebensogut zum Beispiel „$[a, \rightarrow [$“ oder „$[a, \uparrow [$“ statt „$[a, \infty[$“ schreiben.)

Ist noch $\varepsilon > 0$, dann bezeichnen wir

$$\mathcal{U}_a^\varepsilon :=]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$$

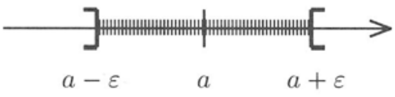
als reelle *„ε-Umgebung von a“*; also

$$\mathcal{U}_a^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}.$$

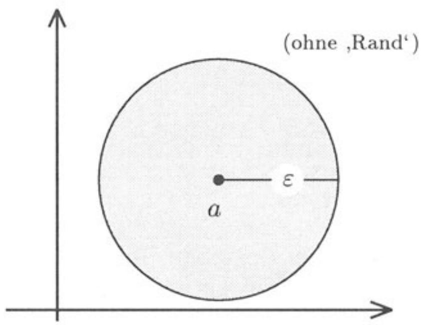
Diese Beschreibung von $\mathcal{U}_a^\varepsilon$ können wir ohne weiteres auf $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $a \in \mathbb{C}$ übertragen:

$$\mathcal{U}_a^\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} : |x - a| < \varepsilon\} \quad \textit{„komplexe } \varepsilon\textit{-Umgebung von } a\textit{“.}$$

Anschaulich:



$a \in \mathbb{R}$: *Reelle ε-Umgebung von a*



$a \in \mathbb{C}$: *Komplexe ε-Umgebung von a*

Die ‚Stetigkeit‘ der Operationen $+, -$ und $\cdot$ können wir damit auch wie folgt — für $a, b \in \mathbb{K}$ — beschreiben:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \quad \left[x \in \mathcal{U}_a^\delta \wedge y \in \mathcal{U}_b^\delta \implies x \pm y \in \mathcal{U}_{a \pm b}^\varepsilon\right]$$

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \quad \left[x \in \mathcal{U}_a^\delta \wedge y \in \mathcal{U}_b^\delta \implies x \cdot y \in \mathcal{U}_{a \cdot b}^\varepsilon \right]$$

In Worten: *Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ derart, daß $x \pm y$ (bzw. $x \cdot y$) in der ε-Umgebung von $a \pm b$ (bzw. $a \cdot b$) liegt, wenn x in der δ-Umgebung von a und y in der δ-Umgebung von b liegt.*

Die ‚Stetigkeit' von $\mathbb{K} \setminus \{0\} \ni x \longmapsto \frac{1}{x}$ läßt sich mit Umgebungen — für ein $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ — wie folgt ausdrücken:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \quad \left[x \in \mathcal{U}_a^\delta \implies x \neq 0 \quad \textit{und} \quad \frac{1}{x} \in \mathcal{U}_{\frac{1}{a}}^\varepsilon \right]$$

Entsprechend kann die ‚Stetigkeit' der Betragsbildung — an einer Stelle $a \in \mathbb{K}$ — durch

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \quad \left[x \in \mathcal{U}_a^\delta \implies |x| \in \mathcal{U}_{|a|}^\varepsilon \right]$$

beschrieben werden.

Zum Abschluß dieses Kapitels noch zwei kleine *Anmerkungen*:

Für $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $a, b \in \mathbb{K}$ schreiben wir beispielsweise oft nur „$a > b$", wenn „$a, b \in \mathbb{R} \wedge a > b$" gemeint ist, ebenso nur „$a > 0$", wenn „$a \in \mathbb{R} \wedge a > 0$" korrekter wäre. Statt „$\forall \varepsilon \in \mathbb{P}$" notieren wir häufig „$\forall \varepsilon > 0$" (‚vergessen' also, die Zugehörigkeit von ε zu $\mathbb{R}$ noch besonders zu erwähnen).

Die beiden Spezialfälle des *Binomischen Satzes*

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

habe ich nicht gesondert notiert, weil Ihnen das sicher von der Schule her noch vertraut ist. Manchmal wird in diesem Zusammenhang die einfache Formel

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

noch als *„dritte binomische Formel"* bezeichnet.

Rückblick

Dieses erste Kapitel war ungewöhnlich umfangreich, an einigen Stellen relativ abstrakt und dadurch für manche Leser wohl schwierig. Eine Fülle von neuen Begriffen war aufzunehmen und zu verarbeiten. Wenn da noch die eine oder andere Verständnislücke sein sollte, so können Sie dennoch getrost weitermachen. Vieles wird in den nachfolgenden Kapiteln etwas einfacher, weil mehr ‚gerechnet' wird. Manche — zu Beginn abstrakt anmutenden — Dinge werden durch den dauernden Umgang mit ihnen vertraut. Es ist dazu sicher sinnvoll, von Zeit zu Zeit noch einmal ins 1. Kapitel zurückzugehen und entsprechende Teile erneut sorgfältig anzusehen.

Kapitel 2

Funktionen einer reellen Variablen

Lernziel

In diesem Kapitel werden als spezielle Abbildungen *reellwertige Funktionen einer reellen Variablen* betrachtet. Sie gehören sicher für Theorie und Praxis zu den wichtigsten Objekten, die wir zu betrachten haben. Einiges davon sollte Ihnen — zumindest so ungefähr — von der Schule schon vertraut und zum Teil noch gegenwärtig sein.

An manchen Stellen wird jedoch, um langatmige Wiederholungen zu vermeiden, gleich der *komplexe Fall* — für die Variablen und die Werte von Funktionen — einbezogen.

Ganz wichtig sind als Funktionen einfacher Bauart *Polynome* und *Rationale Funktionen.*

Zur Auswertung von Polynomen sehen wir uns das HORNER-Schema und daran anschließend die Umrechnungen in verschiedene *Stellenwertsysteme* an. Zur Vereinfachung von rationalen Funktionen benötigen wir immer wieder die *Division mit Rest* oder *Polynomdivision.*

Die Lösungsformel für quadratische Gleichungen (*„p-q-Formel“*) sollte Ihnen schon vertraut sein.

Dieses Kapitel dürfte vielen Lesern insgesamt wenig Mühe machen. Alle ausgeführten Überlegungen müssen Sie — nach Einübung — beherrschen!

2.1 Der Funktionsbegriff

2.1.1 Definition und erste Beispiele

Es sei $D \subset \mathbb{R}$. Eine Abbildung $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ bezeichnet man als *„Funktion“*, genauer *„reellwertige Funktion einer reellen Variablen“*. Jedem

x einer gewissen Teilmenge D von $\mathbb{R}$, die wir *„Definitionsbereich"* von f nennen, wird eine also eindeutig bestimmte reelle Zahl $f(x)$ zugeordnet.

Wir beginnen mit einigen **Beispielen**:

(B1) $D := \mathbb{R}$, $\quad f: \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \Psi & & \Psi \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$

(B2) $D := \mathbb{R}$, $\quad f: \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \Psi & & \Psi \\ y & \longmapsto & \dfrac{y^3+3y+5}{y^2+1} \end{array}$

(B3) $D := \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$, $\quad f: \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \Psi & & \Psi \\ t & \longmapsto & \dfrac{t^3+3t+5}{t^2-1} \end{array}$

(B4) $D := \left[-17, \frac{4}{13}\right]$, $\quad f: \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \Psi & & \Psi \\ \alpha & \longmapsto & \alpha + 33.1 \end{array}$

(B5) $D := \mathbb{R}$, $\quad f(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 1, & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

(B6) $D := \left\{2, 17, \frac{1}{13}, \sqrt[3]{29}\right\}$,

x	2	17	$\frac{1}{13}$	$\sqrt[3]{29}$
$f(x)$	5	28	$-\sqrt{5}$	$\frac{3}{113}$

(B7) $D :=]0, 1[$, für $x \in D$ sei $f(x)$ die Anzahl der Ziffern 7 in der Dezimalbruchdarstellung von x, falls diese endlich ist, sonst -88.

Es wurden bewußt auch einige ‚krumme' Beispiele aufgeführt, um deutlich zu machen, daß eine Funktion f *nicht notwendig*

> *durch eine ‚algebraische Formel' angebbar,*
> *durch ‚gleichartige' Bedingungen beschreibbar,*
> *praktisch handhabbar* sein muß
> (ich weiß beispielsweise nicht, welchen ‚Wert' $f(\sqrt{73})$ in (B7) hat).

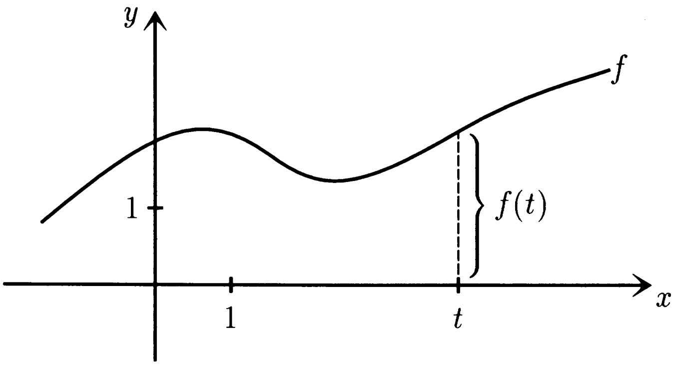
Oft ist eine Funktion f nur durch eine Rechenvorschrift — ohne Angabe eines Definitionsbereiches — gegeben. Wir *vereinbaren*, daß dann immer, wenn nichts anderes ausdrücklich gesagt wird, der **‚maximale' Definitionsbereich** gemeint ist.

2.1.2 Graphische Darstellung von Funktionen

Ist $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, so kann man einen Überblick über den Verlauf erhalten, wenn man den *„Graphen“* der Funktion zeichnet. In Abschnitt 1.3 hatten wir definiert:

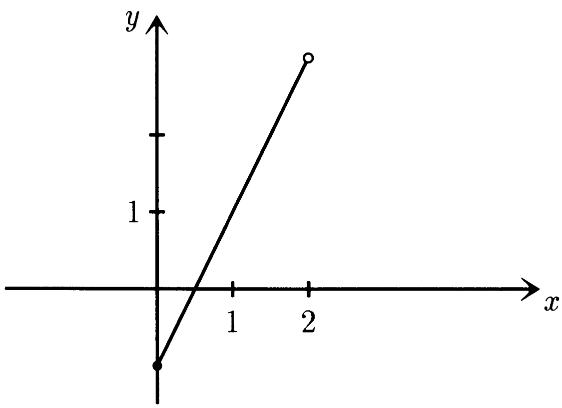
$$G(f) := \{ (x, f(x)) : x \in D \} \qquad (\subset \mathbb{R}^2) .$$

Dies läßt sich oft mit Hilfe eines kartesischen Koordinatensystems veranschaulichen:



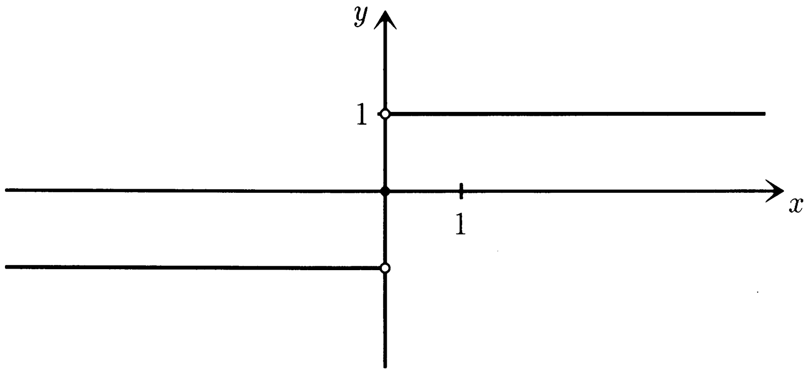
Drei erste **Beispiele** zum Einüben:

(B8) $D := [0, 2[, \qquad f(x) := -1 + 2x \quad (x \in D)$



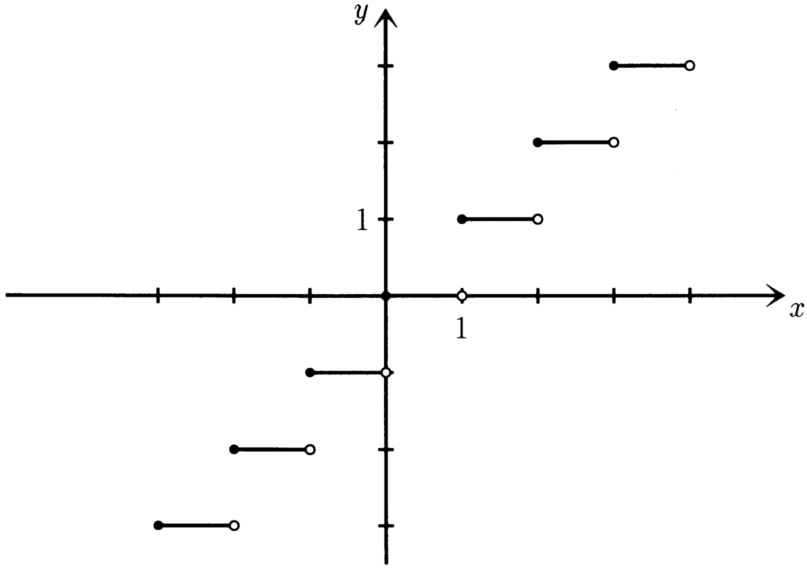
Bei diesem Beispiel soll durch den ausgefüllten ‚Punkt‘ bei $(0, -1)$ optisch besser wahrnehmbar gekennzeichnet werden, daß der entsprechende Punkt noch zum Graphen gehört; während der durch einen kleinen (offenen) Kreis markierte Punkt bei $(2, 3)$ nicht mehr zum Graphen gehört. Dies wollen wir auch bei weiteren graphischen Darstellungen so handhaben.

(B9) $D := \mathbb{R}, \qquad f(x) := \operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$



(B10) $D := \mathbb{R}, \qquad f(x) := [x] := \max\{m \in \mathbb{Z} : m \leq x\}$

Man bezeichnet diese Funktion auch als „Gauss-*Klammer*“.



2.1.3 Grundeigenschaften von Funktionen

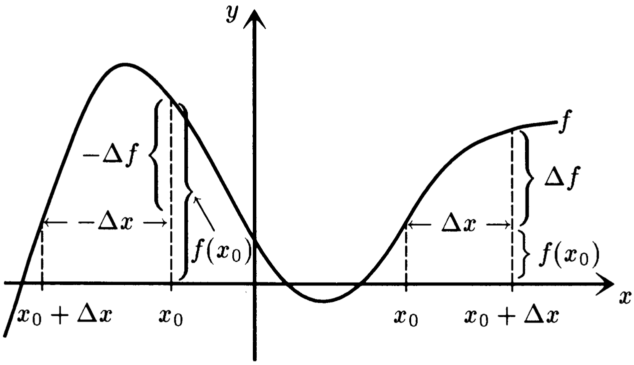
Es seien $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

Für $x_0 \in D$ und $x = x_0 + \Delta x \in D$ mit $\Delta x \neq 0$ bezeichnen wir

$$\Delta f := f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Der Quotient $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ liefert dann die *„Steigung"* der Sehne zwischen $(x_0, f(x_0))$ und $(x, f(x))$.

Machen Sie sich das ausreichend an Hand der nachfolgenden Graphik klar, in der rechts der Fall $\Delta x > 0$, links der Fall $\Delta x < 0$ eingezeichnet ist:



Wir nennen — für eine Teilmenge T von D — f genau dann
„streng monoton wachsend in T" oder *„streng isoton in T"*,
wenn $f(x_1) < f(x_2)$,
„monoton wachsend in T" oder *„isoton in T"*, wenn $f(x_1) \leq f(x_2)$,
„streng monoton fallend in T" oder *„streng antiton in T"*,
wenn $f(x_1) > f(x_2)$,
„monoton fallend in T" oder *„antiton in T"*, wenn $f(x_1) \geq f(x_2)$
für alle $x_1, x_2 \in T$ mit $\boxed{x_1 < x_2}$ gilt;
„streng monoton in T", wenn f streng isoton oder streng antiton in T ist;
„monoton in T", wenn f isoton oder antiton in T ist.
Für $T = D$ läßt man den Zusatz ‚in T' meist weg.

Die Monotonie läßt sich mit Hilfe von ‚Differenzenquotienten' beschreiben:

(1) *a) f streng isoton in T* $\iff \forall x_1, x_2 \left(\in T,\, x_1 \neq x_2\right) \; \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$

b) f isoton in T $\iff$ ... " ... $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0$

c) f streng antiton in T $\iff$ ... " ... $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$

d) f antiton in T $\iff$ ... " ... $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq 0$

Geringfügig anders formuliert:

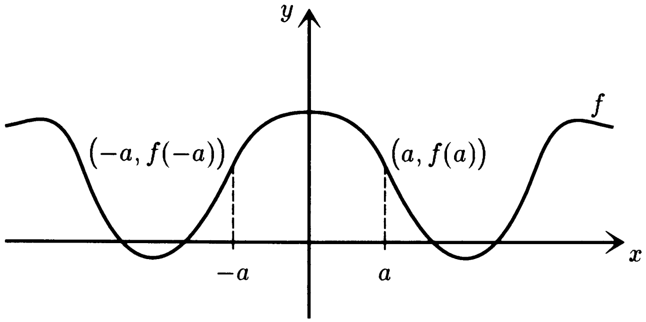
$$\begin{array}{lcl}
\textbf{(2)}\ f \textit{ streng isoton in } T & \Longleftrightarrow & \forall x_0 \in T\, \forall \Delta x \neq 0 \left[x_0 + \Delta x \in T \Longrightarrow \dfrac{\Delta f}{\Delta x} > 0 \right] \\
\quad f \textit{ isoton in } T & \Longleftrightarrow & \cdots \quad " \quad \cdots \left[\ \cdots \ " \ \cdots \Longrightarrow \dfrac{\Delta f}{\Delta x} \geq 0 \right] \\
\quad f \textit{ streng antiton in } T & \Longleftrightarrow & \cdots \quad " \quad \cdots \left[\ \cdots \ " \ \cdots \Longrightarrow \dfrac{\Delta f}{\Delta x} < 0 \right] \\
\quad f \textit{ antiton in } T & \Longleftrightarrow & \cdots \quad " \quad \cdots \left[\ \cdots \ " \ \cdots \Longrightarrow \dfrac{\Delta f}{\Delta x} \leq 0 \right]
\end{array}$$

Zur Untersuchung von Funktionen ist es hilfreich, wenn man *vorweg* etwas über **Symmetrie-Eigenschaften** weiß; denn man kann sich dadurch die Arbeit erheblich erleichtern.

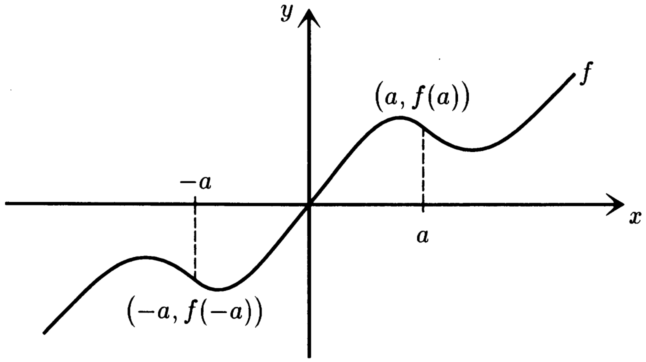
f heißt *„gerade“* $:\Longleftrightarrow \forall x \in D \ \left[-x \in D \wedge f(-x) = f(x) \right]$

f heißt *„ungerade“* $:\Longleftrightarrow \forall x \in D \ \left[-x \in D \wedge f(-x) = -f(x) \right]$

Bei einer *geraden Funktion* ist der *Graph symmetrisch zur* y *-Achse*, bei einer *ungeraden Funktion* ist er *symmetrisch zum Koordinatenursprung*. In beiden Fällen muß man also nur die Funktionswerte für $D \ni x \geq 0$ berechnen, die anderen bekommt man dann ‚geschenkt‘. Auch diesen Sachverhalt sollte man anschaulich vor Augen haben:



Gerade Funktion



Ungerade Funktion

Eine weitere Möglichkeit, den Arbeitsaufwand bei der Berechnung und Diskussion von Funktionen zu reduzieren, ist der Nachweis, daß eine Funktion *periodisch* ist. Für $p \in \mathbb{P}$ heißt p *„Periode von f“* und f *„periodisch* (mit der Periode p)“ genau dann, wenn

$$\forall x \in D \quad \left[x + p \in D \ \wedge \ f(x+p) = f(x)\right]$$

gilt. Hier muß man die Funktionswerte nur in einem Teilbereich der Länge p berechnen, die restlichen Werte ergeben sich dann schon daraus! Wichtige Beispiele dazu werden wir insbesondere — mit den trigonometrischen Funktionen — in den Abschnitten 3.3.2, 4.6 und 4.7 und bei den FOURIER-Reihen in Abschnitt 6.4 betrachten.

Zur Beschreibung von Funktionen ist es oft noch nützlich zu wissen, daß man in folgendem Sinne **Beschränktheit** hat. Für ein $\alpha \in \mathbb{R}$ heißt f genau dann:

„durch α nach oben beschränkt“, wenn der Wertebereich von f durch α nach oben beschränkt ist, das heißt: $\forall x \in D \quad f(x) \leq \alpha$,

„durch α nach unten beschränkt“, wenn der Wertebereich von f durch α nach unten beschränkt ist, das heißt: $\forall x \in D \quad f(x) \geq \alpha$,

„nach oben beschränkt“, wenn ein $\gamma \in \mathbb{R}$ so existiert, daß f durch γ nach oben beschränkt ist,

„nach unten beschränkt“, wenn ein $\gamma \in \mathbb{R}$ so existiert, daß f durch γ nach unten beschränkt ist,

„beschränkt“, wenn es sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist.

2.1.4 Verknüpfung von Funktionen

Wir hatten in Abschnitt 1.3 schon ganz allgemein die *Zusammensetzung von Abbildungen* definiert. Hier wollen wir uns das *speziell für reellwertige Funktionen einer reellen Variablen* noch einmal ausführlich und ergänzend ansehen.

Damit wir aber nachher das Ganze nicht noch einmal für die komplexe Situation gesondert aufschreiben müssen, notieren wir diese Überlegungen gleich doch geringfügig allgemeiner, nämlich — mit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ — für $\mathbb{K}$-wertige Funktionen einer Variablen in $\mathbb{K}$. Sollte Ihnen das noch nicht geheuer sein, bleiben Sie im Moment einfach noch bei der reellen Situation, lesen also überall $\mathbb{R}$ statt $\mathbb{K}$. Bei den Beispielen beschränken wir uns ohnehin hier noch auf den reellen Fall.

Es seien

$$D_f \subset \mathbb{K},\ D_g \subset \mathbb{K} \quad \text{und} \quad f : D_f \longrightarrow \mathbb{K},\ \ g : D_g \longrightarrow \mathbb{K} \ .$$

Definitionen

a) $D_{g\circ f} := \{x \in D_f : f(x) \in D_g\}$, $\quad gf := g \circ f : \begin{array}{ccc} D_{g\circ f} & \longrightarrow & I\!\!K \\ \cup\!\!\!\mid & & \cup\!\!\!\mid \\ x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$

Wir sprechen von *„Zusammensetzung"*, *„Verknüpfung"* oder *„Hintereinanderausführung"* der beiden Abbildungen f und g, wobei natürlich die Reihenfolge streng zu beachten ist.

b) $D_{f\pm g} := D_f \cap D_g$, $\quad f \pm g : \begin{array}{ccc} D_{f\pm g} & \longrightarrow & I\!\!K \\ \cup\!\!\!\mid & & \cup\!\!\!\mid \\ x & \longmapsto & f(x) \pm g(x) \end{array}$

Also $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ $(x \in D_f \cap D_g)$ und analog für die Subtraktion.

c) $D_{f\cdot g} := D_f \cap D_g$, $\quad f \cdot g : \begin{array}{ccc} D_{f\cdot g} & \longrightarrow & I\!\!K \\ \cup\!\!\!\mid & & \cup\!\!\!\mid \\ x & \longmapsto & f(x) \cdot g(x) \end{array}$

d) $D_{\frac{f}{g}} := \{x \in D_f \cap D_g : g(x) \neq 0\}$, $\quad \frac{f}{g} : \begin{array}{ccc} D_{\frac{f}{g}} & \longrightarrow & I\!\!K \\ \cup\!\!\!\mid & & \cup\!\!\!\mid \\ x & \longmapsto & \frac{f(x)}{g(x)} \end{array}$

Wir lesen $f+g$ als *„Summe"* der Funktionen f und g und entsprechend $f-g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ als *„Differenz"*, *„Produkt"*, *„Quotient"* der Funktionen f und g.

Auch hier soll ein ausführliches **Beispiel** zum besseren Verstehen beitragen (es sei dabei $I\!\!K := I\!\!R$):

(B11) $D_f := I\!\!R_+$, $\quad f(x) := \sqrt{x}$, $\quad D_g := I\!\!R \setminus \{-1, 1\}$, $\quad g(x) := \dfrac{1}{x^2-1}$,
$D_{f\pm g} = D_{f\cdot g} = D_f \cap D_g = \{x \in R_+ : x \neq 1\} = [0,1[\, \cup \,]1,\infty[$;
für $x \in D_f \cap D_g$ hat man: $(f+g)(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{x^2-1}$,
$(f-g)(x) = \sqrt{x} - \dfrac{1}{x^2-1}$ und $(f \cdot g)(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2-1}$. Weiter gilt:
$D_{\frac{f}{g}} = \{x \in D_f \cap D_g : g(x) \neq 0\} = D_f \cap D_g = [0,1[\, \cup \,]1,\infty[$;
für $x \in [0,1[\, \cup \,]1,\infty[$ ist: $\dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \sqrt{x}\,(x^2-1)$. (Hier ist der Definitionsbereich von $\dfrac{f}{g}$ verschieden von dem maximalen Definitionsbereich, den man erhält, wenn man von der durch die rechte Seite definierten Funktion ausgeht!)

$$D_{\frac{g}{f}} = \{x \in D_g \cap D_f \,:\, f(x) \neq 0\} =]0,1[\,\cup\,]1,\infty[\,,$$

$$\frac{g}{f}(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{x}\,(x^2-1)}$$

$$D_{g\circ f} = \{x \in D_f \,:\, f(x) \in D_g\} = \{x \in I\!\!R_+ \,:\, \sqrt{x} \neq -1,1\} =$$

$\{x \in I\!\!R_+ \,:\, x \neq 1\} = [0,1[\,\cup\,]1,\infty[\,;$ für $x \in [0,1[\,\cup\,]1,\infty[$ ist

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}\,) = \frac{1}{(\sqrt{x}\,)^2-1} = \frac{1}{x-1}\,.$$

$$D_{f\circ g} = \{x \in D_g \,:\, g(x) \in D_f\} = \{x \in I\!\!R : x \neq -1,1 \wedge \frac{1}{x^2-1} \geq 0\}$$

$$= \{x \in I\!\!R \,:\, x < -1 \vee x > 1\} =]-\infty,-1[\,\cup\,]1,\infty[\,;$$

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x^2-1}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad (x \in D_{f\circ g})$$

2.2 Ganzrationale Funktionen (Polynome)

Für $I\!\!K \in \{I\!\!R, \mathbb{C}\}$ heißt eine Funktion $P : I\!\!K \longrightarrow I\!\!K$ *„ganzrational"* oder *„Polynom"*, manchmal auch *„Polynomfunktion"*, genau dann, wenn $n \in I\!\!N_0$ und $a_0, a_1, \ldots, a_n \in I\!\!K$ existieren mit

$$P(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu\, x^\nu \quad \left(= a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \cdots + a_n\, x^n\right) \qquad \text{für alle } x \in I\!\!K\,.$$

Wir zeigen als erstes, daß *diese* Art der Darstellung eines Polynoms im wesentlichen eindeutig ist. (Nur im wesentlichen; denn man kann natürlich immer noch endlich viele Terme mit Koeffizienten 0 hinzufügen!) Diese ‚Eindeutigkeit' begründet dann das noch sehr oft zu nutzende Verfahren des *„Koeffizientenvergleichs"*.

(1) Satz von der ‚Eindeutigkeit' der Polynomdarstellung

Es seien $n, m \in I\!\!N_0$ *und* $a_0, \ldots, a_n \in I\!\!K$ *sowie* $b_0, \ldots, b_m \in I\!\!K$. *Für alle* $x \in I\!\!K$ *gelte:*

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu\, x^\nu = \sum_{\mu=0}^{m} b_\mu\, x^\mu\,.$$

Dann folgt: $a_\nu = b_\nu \quad (\nu = 0, \ldots, n)$ *und* $b_\mu = 0 \quad (n < \mu \leq m)$, *wenn wir Œ* $n \leq m$ *annehmen.*

Der Beweis, den Sie sich nicht unbedingt ansehen müssen, kann induktiv über die anschließend noch behandelte *„Division mit Rest"* geführt werden, was den Übungen überlassen bleibt, oder etwa wie folgt:

Wir setzen $c_\nu := b_\nu - a_\nu \quad (\nu = 0, \ldots, n)$ und $c_\mu := b_\mu \quad (n < \mu \leq m)$.

Zu zeigen ist somit: $c_\mu \overset{!}{=} 0 \quad (\mu = 0, \ldots, m)$. Offenbar gilt

$Q(x) := \sum\limits_{\mu=0}^{m} c_\mu x^\mu = 0$ für alle $x \in I\!K$. Annahme: Nicht alle $c_\mu = 0$. Wir betrachten dann $k := \min\{\mu \in \{0, \ldots, m\} : c_\mu \neq 0\}$, also
$0 = |Q(x)| = \left| \sum\limits_{\mu=k}^{m} c_\mu x^\mu \right| \geq |c_k x^k| - \left| \sum\limits_{\mu=k+1}^{m} c_\mu x^\mu \right|$. Für
$0 < |x| \leq 1$ hat man $\left| \sum\limits_{\mu=k+1}^{m} c_\mu x^\mu \right| \leq \sum\limits_{\mu=k+1}^{m} |c_\mu|\,|x|^\mu \leq \sum\limits_{\mu=k+1}^{m} |c_\mu|\,|x|^{k+1} =$
$c\,|x|^{k+1}$ mit $c := \sum\limits_{\mu=k+1}^{m} |c_\mu|$. Zusammen gilt:
$0 \geq |c_k|\,|x|^k - c|x|^{k+1} = |x|^k\left(|c_k| - c|x|\right)$. Für $0 < |x|$ hinreichend klein ist aber $c|x| < |c_k|$, also $r.S. > 0$ Widerspruch. □

Wir bezeichnen nun für ein Polynom P (in obiger Darstellung) als *„Grad von P"*, notiert als $\operatorname{grad}(P)$, den höchsten ‚vorkommenden' Exponenten (bei x), der zu einem von 0 verschiedenen Koeffizienten gehört, also

$$\operatorname{grad}(P) := \max\left\{\{\nu \in \{0, \ldots, n\} : a_\nu \neq 0\} \cup \{0\}\right\}.$$

Die $a_0, \ldots, a_m$ heißen *„Koeffizienten"* von P.

2.2.1 Das Horner-Schema

Es seien $I\!N \ni m$ und P Polynom vom Grade m mit $P(x) = \sum\limits_{\mu=0}^{m} a_\mu x^\mu$ (zu gegebenen Koeffizienten $a_0, \ldots, a_m \in I\!K$) und $\alpha \in I\!K$.
Wir suchen ein *numerisch geeignetes Verfahren zur Bestimmung von* $P(\alpha)$.
Dazu schreiben wir $P(\alpha)$ als

$$P(\alpha) = \Big(\cdots\big((a_m\alpha + a_{m-1})\alpha + a_{m-2}\big)\alpha + \cdots + a_1\Big)\alpha + a_0$$

und erhalten folgenden **Algorithmus** zur Berechnung von $P(\alpha)$:

Horner

1. $b_m := a_m$
2. *Für* $\mu = m-1, \ldots, 0$ *sei* $b_\mu := b_{\mu+1}\alpha + a_\mu$.
Dann ist $b_0 = P(\alpha)$.

Man übersieht sofort, daß sich dieser Algorithmus in jeder gängigen Programmiersprache sehr einfach in ein Programm umsetzen läßt: Man hat nur eine einfache Schleife.

Setzt man $Q(x) := b_m x^{m-1} + \cdots + b_2 x + b_1 \quad (x \in I\!K)$, *dann gilt*

$$(*) \qquad P(x) = (x-\alpha)\,Q(x) + P(\alpha).$$

Beweis: $(x-\alpha)\,Q(x) + P(\alpha) = \left(\sum\limits_{\mu=1}^{m} b_\mu x^{\mu-1}\right)(x-\alpha) + b_0$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\mu=1}^{m} b_\mu\, x^\mu \;-\; \sum_{\mu=1}^{m} \alpha\, b_\mu\, x^{\mu-1} + b_0 \;=\; \sum_{\mu=1}^{m} b_\mu\, x^\mu \;-\; \sum_{\mu=0}^{m-1} \alpha\, b_{\mu+1}\, x^\mu + b_0 \\
&= \sum_{\mu=0}^{m} b_\mu\, x^\mu \;-\; \sum_{\mu=0}^{m-1} \alpha\, b_{\mu+1}\, x^\mu \;=\; b_m\, x^m + \sum_{\mu=0}^{m-1} \left(b_\mu - \alpha\, b_{\mu+1}\right) x^\mu \\
&= a_m\, x^m + \sum_{\mu=0}^{m-1} a_\mu\, x^\mu \;=\; P(x)
\end{aligned}
\qquad \square
$$

Zur ‚Handrechnung' eignet sich folgendes Schema:

$$
\begin{array}{rcccccc|}
\multirow{2}{*}{$+\Big\{$} & a_m & a_{m-1} & a_{m-2} & \cdots\cdots\cdots & a_1 & a_0 \\
 & \| & \alpha\, b_m & \alpha\, b_{m-1} & \cdots\cdots\cdots & \alpha\, b_2 & \alpha\, b_1 \\
\hline
 & \nearrow & \nearrow & \nearrow & & \nearrow & \nearrow \\
 & b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \cdots\cdots\cdots & b_1 & \boxed{b_0 \;=\; P(\alpha)}
\end{array}
$$

In der ersten Zeile stehen die Koeffizienten von P, in der dritten Zeile die Koeffizienten von Q und der Wert $P(\alpha)$.

(B1) $m = 4,\ \alpha = 2,\ P(x) = 2x^4 - 3x^2 + 2x + 1$

2	0	−3	2	1
	4	8	10	24
2	4	5	12	$\boxed{25 = \mathrm{P}(2)}$

(∗) bedeutet also hier:

$2x^4 - 3x^2 + 2x + 1 = \left(2x^3 + 4x^2 + 5x + 12\right)(x-2) + 25\,.$

Ist α *„Nullstelle"* von P, also $P(\alpha) = 0$, so liefert das HORNER-Verfahren auch die *Abspaltung eines „Linearfaktors"*; denn dann ist

$$P(x) \;=\; Q(x)\,(x-\alpha)\,.$$

Wir setzen $P_1 := Q$ und $P_0 := P$; damit lautet (∗):
$P_0(x) = (x-\alpha)\,P_1(x) + P_0(\alpha)$; dabei gilt $\operatorname{grad}(P_1) = m-1$.
Wendet man nun den HORNER-Algorithmus wiederum auf P_1 an, so erhält man mit einem Polynom P_2 vom Grade $m-2$:
$P_1(x) = (x-\alpha)\,P_2(x) + P_1(\alpha)$ und entsprechend weiter insgesamt Polynome P_μ vom Grade $m-\mu$ $(\mu = 0, 1, \ldots, m)$ mit

$$P_\mu(x) \;=\; (x-\alpha)\,P_{\mu+1}(x) + P_\mu(\alpha) \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, m-1)\,.$$

Insbesondere hat man $\operatorname{grad}(P_m) = 0$, also P_m konstant und daher
$P_m(x) = P_m(0) = a_m \quad (x \in \mathbb{R})$.

Zusammen folgt:

$$
\begin{aligned}
P_0(x) &= (x-\alpha)\big((x-\alpha)\,P_2(x) + P_1(\alpha)\big) + P_0(\alpha) \\
&= (x-\alpha)^2\,P_2(x) + (x-\alpha)\,P_1(\alpha) + P_0(\alpha) \\
&= (x-\alpha)^2\big((x-\alpha)\,P_3(x) + P_2(\alpha)\big) + (x-\alpha)\,P_1(\alpha) + P_0(\alpha) \\
&= (x-\alpha)^3\,P_3(x) + (x-\alpha)^2\,P_2(\alpha) + (x-\alpha)\,P_1(\alpha) + P_0(\alpha) \\
&= \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
&= \sum_{\mu=0}^{m} P_\mu(\alpha)\,(x-\alpha)^\mu
\end{aligned}
$$

So hat sich die **Entwicklung von P nach Potenzen von** $(x-\alpha)$ ergeben. Wir erläutern das zugehörige **vollständige** HORNER**-Schema** nur an obigem Beispiel:

(B2)

$$
\begin{array}{cccccl}
2 & 0 & -3 & 2 & 1 & \\
 & 4 & 8 & 10 & 24 & \\
\hline
2 & 4 & 5 & 12 & & \boxed{25 = P_0(\alpha)} \\
 & 4 & 16 & 42 & & \\
\hline
2 & 8 & 21 & & \boxed{54 = P_1(\alpha)} & \\
 & 4 & 24 & & & \\
\hline
2 & 12 & & \boxed{45 = P_2(\alpha)} & & \\
 & 4 & & & & \\
\hline
2 & \boxed{16 = P_3(\alpha)} & & & & \\
\| & & & & & \\
a_4 = & \boxed{P_4(\alpha)} & & & &
\end{array}
$$

Die Entwicklung nach Potenzen von $(x-2)$ lautet also hier:

$$P(x) = 2(x-2)^4 + 16(x-2)^3 + 45(x-2)^2 + 54(x-2) + 25\,.$$

(2) Satz *Für $m \in \mathbb{N}$ gilt:*

Jedes Polynom P vom Grade m hat höchstens m Nullstellen.

Beweis: Ist $\alpha \in \mathbb{K}$ Nullstelle von P, dann ist $P(x) = (x-\alpha)\,Q(x)$ mit einem Polynom Q vom Grade $m-1$. Daraus folgt die Behauptung offenbar induktiv. □

Weiter ergibt die Möglichkeit, für jede Nullstelle den entsprechenden Linearfaktor abzuspalten und so den Grad jeweils um 1 zu reduzieren, sofort die

(3) Folgerung *Für $\mathbb{N} \ni k \le m \in \mathbb{N}$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ gilt: Ist P Polynom vom Grade m mit $P(\alpha_\kappa) = 0$ für $\kappa = 1, \ldots, k$, so hat man*

$$P(x) = (x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_k)\,R(x)$$

mit einem Polynom R vom Grade $m-k$.

Sind hierbei $\alpha := \alpha_1 = \cdots = \alpha_k$, so heißt α Nullstelle der *„Vielfachheit“* k, für $k \geq 2$ auch *„mehrfache“* Nullstelle.
Ist speziell $k = m$, so gilt

$$P(x) = a_m \prod_{\mu=1}^{m} (x - \alpha_\mu),$$

wenn a_m der ‚höchste‘ Koeffizient, das heißt der bei x^m, ist.

2.2.2 Stellenwertsysteme

Um Zahlen darzustellen, benutzen wir täglich ein *„Stellenwertsystem“* mit der Basis Zehn *(Dezimalsystem)*, indem wir als *„Ziffern“* die zehn verschiedenen Zeichen $0, 1, 2, \ldots, 9$ verwenden.

Ich hatte schon in Abschnitt 1.8 darauf hingewiesen, daß statt der Zahl 10 irgendein $B \in \mathbb{N}_2$ als Basis genommen werden kann und dabei $2, 8, 10$ und 16 die häufig verwendeten Basen sind.

Darstellung zur Basis B für $B \in \mathbb{N}_2$:
‚Wie in Abschnitt 1.8‘ kann jede reelle Zahl x in der Form

$$x = \sigma\left(a_n B^n + a_{n-1} B^{n-1} + \cdots + a_1 B^1 + a_0 + a_{-1} B^{-1} + a_{-2} B^{-2} + \cdots\right)$$

mit $\sigma \in \{+, -\}, n \in \mathbb{N}_0$ und $\mathbb{N}_0 \ni a_\nu \leq B - 1$ $(\mathbb{Z} \ni \nu \leq n)$, die wir als *„Ziffern“ zur Basis B* bezeichnen, dargestellt werden.
Wir schreiben dafür kurz

$$x =: \sigma\,(a_n\, a_{n-1} \,\cdots\, a_1\, a_0 \,.\, a_{-1}\, a_{-2} \,\cdots)_B\,,$$

lassen σ oft weg, wenn es $+$ ist, notieren also auch kürzer

$$(\cdots)_B \qquad \text{statt} \qquad +(\cdots)_B\,.$$

Speziell im Falle $B = 10$ lassen wir auch die Angabe B und die Klammern meist weg, schreiben demnach in der Regel

$$(a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \cdots)_{10} =: a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \cdots\,.$$

In Spezialfällen, wie etwa $a_\nu = 0$ für $\mathbb{Z} \ni \nu < 0$ (d.h. nur ‚ganzzahliger Teil‘), benutzen wir auch kürzere Notierungsweisen, zum Beispiel

$$\sigma(a_n\, a_{n-1} \,\cdots\, a_1\, a_0)_B \quad \text{und} \quad (a_n\, a_{n-1} \,\cdots\, a_1\, a_0)_B\,.$$

Es ist nun natürlich wichtig, mühelos von einem in ein anderes Stellenwertsystem umrechnen zu können:

(1) *Die Ziffern im ‚ganzzahligen Teil‘ von x (in der Darstellung zur Basis B) erhält man als Reste bei der wiederholten Division durch B.*

Beweis:
$$\begin{aligned} x &= a_n B^n + a_{n-1}B^{n-1} + \cdots + a_1 B^1 + a_0 \\ &= \big(a_n B^{n-1} + a_{n-1}B^{n-2} + \cdots + a_1\big)B + \boxed{a_0} \end{aligned}$$

Bei der ersten Division durch B ergibt sich also als Rest a_0, bei der zweiten a_1 usw. □

(B3) $B = 8$, $x = 10973$

$$\begin{array}{rcrll} 10973 : 8 &=& 1371 & \text{Rest} & 5 \\ 1371 : 8 &=& 171 & \text{Rest} & 3 \\ 171 : 8 &=& 21 & \text{Rest} & 3 \\ 21 : 8 &=& 2 & \text{Rest} & 5 \\ && & \text{Rest} & 2 \end{array} \qquad \text{daher } \boxed{x = (25335)_8}$$

(2) *Die Ziffern des ‚nichtganzzahligen Anteils' einer Zahl (in der Darstellung zur Basis B) erhält man durch die ganzzahligen Anteile der Produkte, die bei der sukzessiven Multiplikation mit B entstehen.*

Diesen etwas komplizierten Satz versteht man wohl besser, wenn man sich den Beweis ansieht und dann Beispiele rechnet:

Beweis:
$$\begin{aligned} x &= a_{-1}B^{-1} + a_{-2}B^{-2} + a_{-3}B^{-3} + \cdots \\ xB &= \boxed{a_{-1}} + \big(a_{-2}B^{-1} + a_{-3}B^{-2} + \cdots\big) \end{aligned}$$

Im ersten Schritt ergibt sich a_{-1} als ganzzahliger Anteil von xB, dann durch Anwendung auf den eingeklammerten Anteil entsprechend a_{-2} usw. □

(B4) $B = 2$, $x = \frac{1}{5}$ $(= 0.2)$

$$\begin{array}{lllllll} \mathbf{2}\times / & 0.2 & 0.4 & 0.8 & \cancel{1}.6 & \cancel{1}.2 & 0.4 & \cdots \\ & 0. & 0.0 & 0.00 & 0.001 & 0.0011 & 0.00110 & \cdots \end{array}$$

also $\boxed{x = (0.00110011\cdots)_2}$

(B5) $B = 16$, $x = \frac{1}{5}$ $(= 0.2)$

$$\begin{array}{llllll} \mathbf{16}\times / & 0.2 & \cancel{3}.2 & \cancel{3}.2 & \cancel{3}.2 & \cdots \\ & 0. & 0.3 & 0.33 & 0.333 & \cdots \end{array}$$

somit $\boxed{x = (0.333\cdots)_{16}}$

(3) *Die Umrechnung einer natürlichen Zahl aus der Darstellung zur Basis B ($\neq 10$) ins Dezimalsystem macht man zweckmäßig mit dem* HORNER-*Verfahren*:

(B6) $(2017)_8 = 2\cdot 8^3 + 0\cdot 8^2 + 1\cdot 8^1 + 7$

$$\begin{array}{rrrr|} 2 & 0 & 1 & 7 \\ & 16 & 128 & 1032 \\ \hline 2 & 16 & 129 & \boxed{1039} \end{array}$$

2.2.3 Das Rechnen mit Polynomen

Bemerkung *Summe und Differenz zweier Polynome P und Q ergeben jeweils wieder ein Polynom. Der Grad von $P \pm Q$ ist dabei höchstens gleich dem Maximum von* $\operatorname{grad}(P)$ *und* $\operatorname{grad}(Q)$.

Beweis: Mit $n := \operatorname{grad}(P)$ und $m := \operatorname{grad}(Q)$ hat man Darstellungen $P(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu$, $Q(x) = \sum_{\mu=0}^{m} b_\mu x^\mu$. Ist Œ $n \le m$, so setzen wir

$a_\nu := 0$ $(n < \nu \le m)$, erhalten $P(x) = \sum_{\nu=0}^{m} a_\nu x^\nu$ und

$(P \pm Q)(x) = P(x) \pm Q(x) = \sum_{\nu=0}^{m} (a_\nu \pm b_\nu) x^\nu$, also $\operatorname{grad}(P \pm Q) \le m$. □

Bemerkung *Das Produkt zweier Polynome P und Q ist wieder ein Polynom. Ist weder P noch Q das Nullpolynom, dann gilt*

$$\operatorname{grad}(PQ) = \operatorname{grad}(P) + \operatorname{grad}(Q).$$

Beweis: Mit P und Q wie oben hat man:

$$(PQ)(x) = P(x)\,Q(x) = \Big(\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu\Big)\Big(\sum_{\mu=0}^{m} b_\mu x^\mu\Big)$$

$$= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)\,x^1 + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)\,x^2 + \cdots + \overbrace{a_nb_m}^{\neq 0}\, x^{n+m},$$

also $\operatorname{grad}(PQ) = n + m = \operatorname{grad}(P) + \operatorname{grad}(Q)$. □

Satz („Division mit Rest")

Vor.: *P, Q seien Polynome mit* $1 \le \operatorname{grad}(Q)$

Beh.: *Es existieren eindeutig Polynome S und R mit* $\operatorname{grad}(R) < \operatorname{grad}(Q)$ *derart, daß* $P = SQ + R$.

Beweis: *Eindeutigkeit:* Sind R_κ, S_κ Polynome mit $\operatorname{grad}(R_\kappa) < \operatorname{grad}(Q)$ $(\kappa = 1,2)$ und $S_1Q + R_1 = P = S_2Q + R_2$, dann gilt
$R_1 - R_2 = (S_2 - S_1)\,Q$. Falls $S_2 = S_1$: $R_1 = R_2$ (fertig); sonst:
$\operatorname{grad}(r.S.) = \operatorname{grad}(S_2 - S_1) + \operatorname{grad}(Q) \ge \operatorname{grad}(Q)$,
$\operatorname{grad}(l.S.) \le \max(\operatorname{grad}(R_1), \operatorname{grad}(R_2)) < \operatorname{grad}(Q)$. Widerspruch!

Existenz: Ist $\operatorname{grad}(P) < \operatorname{grad}(Q)$, dann leisten $S := 0$ und $R := P$ das Gewünschte. Im anderen Fall gehen wir aus von Darstellungen $P(x) = \sum_{\mu=0}^{m} b_\mu x^\mu$, $Q(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu$ mit $a_n \neq 0$. Es gilt dann $n \le m$.

Mit $k := m - n$ erhält man $\frac{b_m}{a_n} x^k Q(x) = \frac{b_m}{a_n} x^{m-n} \left(a_n x^n + \cdots\right)$
$= b_m x^m +$ (Polynom vom Grade $\le m - 1$), also

$P_1(x) := P(x) - \frac{b_m}{a_n} x^k Q(x) =: \sum_{\mu=0}^{m-1} b_\mu^{(1)} x^\mu$ (Polynom vom Grade $\le m-1$).

Ebenso (falls $k \ge 1$): $P_2(x) := P_1(x) - \frac{b_{m-1}^{(1)}}{a_n} x^{k-1} Q(x) =: \sum_{\mu=0}^{m-2} b_\mu^{(2)} x^\mu$

(Polynom vom Grade $\le m - 2$); schließlich

$$P_{k+1}(x) := P_k(x) - \frac{b_n^{(k)}}{a_n} x^0 Q(x) =: R(x) \quad \text{(Polynom vom Grade } \leq n-1\text{)}.$$

Das gibt

$$P(x) = P_1(x) + \frac{b_m}{a_n} x^k Q(x) = P_2(x) + \frac{b_{m-1}^{(1)}}{a_n} x^{k-1} Q(x) + \frac{b_m}{a_n} x^k Q(x)$$

$$= \cdots = \underbrace{\left(\frac{b_m}{a_n} x^k + \frac{b_{m-1}^{(1)}}{a_n} x^{k-1} + \cdots + \frac{b_n^{(k)}}{a_n} \right)}_{=:\, S(x)} Q(x) + R(x)\,. \qquad \square$$

(B7) $P(x) := 8x^4 + 5x^3 + 3x + 2\,, \quad Q(x) := 4x^2 - 5x + 1$

$$\begin{aligned}
P_1(x) &:= P(x) - \boxed{\tfrac{8}{4} x^2} Q(x) &&= P(x) - \left(8x^4 - 10x^3 + 2x^2\right) \\
&&&= 15x^3 - 2x^2 + 3x + 2 \\
P_2(x) &:= P_1(x) - \boxed{\tfrac{15}{4} x} Q(x) &&= P_1(x) - \left(15x^3 - \tfrac{75}{4}x^2 + \tfrac{15}{4}x\right) \\
&&&= \tfrac{67}{4}x^2 - \tfrac{3}{4}x + 2 \\
P_3(x) &:= P_2(x) - \boxed{\tfrac{67}{16}} Q(x) &&= P_2(x) - \left(\tfrac{67}{4}x^2 - \tfrac{335}{16}x + \tfrac{67}{16}\right) \\
&&&= \tfrac{323}{16}x - \tfrac{35}{16} =: R(x), \qquad \text{also:}
\end{aligned}$$

$$P(x) = \underbrace{\left(2x^2 + \tfrac{15}{4}x + \tfrac{67}{16}\right)}_{S(x)} Q(x) + \underbrace{\tfrac{323}{16}x - \tfrac{35}{16}}_{R(x)}$$

Das gesamte Verfahren läßt sich **schematisch** ebenso **darstellen** wie das Verfahren zur Division von reellen Zahlen. Und das ist nun etwas, was Sie sich unbedingt gut einprägen müssen, da es sehr oft benötigt wird! Ich erläutere die Vorgehensweise an dem vorangehenden Beipiel. Wir schreiben dazu zweckmäßig auch die fehlenden Summanden mit den Koeffizienten 0 auf:

$$\begin{array}{lcl}
\overbrace{\left(\boxed{8x^4} + 5x^3 + 0x^2 + 3x + 2\right)}^{P(x)} : \overbrace{\left(\boxed{4x^2} - 5x + 1\right)}^{Q(x)} & = & \overbrace{2x^2 + \frac{15}{4}x + \frac{67}{16}}^{S(x)} \\
-\underline{\left(8x^4 - 10x^3 + 2x^2\right)} & & \\
\qquad \boxed{15x^3} - 2x^2 + 3x + 2 & & (= P_1(x)) \\
\qquad -\underline{\left(15x^3 - \tfrac{75}{4}x^2 + \tfrac{15}{4}x\right)} & & \\
\qquad\qquad \boxed{\tfrac{67}{4}x^2} - \tfrac{3}{4}x + 2 & & (= P_2(x)) \\
\qquad\qquad -\underline{\left(\tfrac{67}{4}x^2 - \tfrac{335}{16}x + \tfrac{67}{16}\right)} & & \\
\qquad\qquad\qquad \tfrac{323}{16}x - \tfrac{35}{16} & & (= R(x))
\end{array}$$

Im ersten Schritt wird also der Term von $P(x)$ mit dem höchsten Grad — hier $8x^4$ — durch den entsprechenden Term von $Q(x)$ — $4x^2$ — dividiert und dann das Ergebnis — $2x^2$ — mit $Q(x)$ multipliziert und von $P(x)$ subtrahiert. Dann verfährt man mit dem verbleibenden Polynom —

$15x^3 - 2x^2 + 3x + 2$ — ebenso. Das Verfahren endet, wenn der Grad des ‚Restpolynoms' kleiner als der von Q ist.

2.2.4 Nullstellen von Polynomen

Es sei P Polynom vom Grade $m \in \mathbb{N}_0$

$$P(x) = \sum_{\mu=0}^{m} a_\mu x^\mu$$

mit $a_\mu \in \mathbb{R}$ $(\mu = 0, \ldots, m)$ und $a_m \neq 0$, falls $m \neq 0$.

Im Fall $\boxed{m = 0}$ hat P die einfache Gestalt $\boxed{P(x) = a_0 \qquad (x \in \mathbb{R})}$ — der Graph von P ist hier eine ‚Parallele' zur x-Achse in der ‚Höhe' a_0 — und die Bestimmung der Nullstellen ist somit trivial:

$$\begin{array}{lll} a_0 = 0 & : & \text{alle } x \in \mathbb{R} \text{ sind Nullstellen,} \\ a_0 \neq 0 & : & \text{kein } x \in \mathbb{R} \text{ ist Nullstelle.} \end{array}$$

Auch im Fall $\boxed{m = 1}$, also $\boxed{P(x) = a_1 x + a_0 \qquad (x \in \mathbb{R})}$, — hier ist der Graph von P eine Gerade, a_1 gibt die Steigung und a_0 den ‚Abschnitt' auf der y-Achse — ist die Bestimmung der Nullstelle trivial:

Genau $x := -\frac{a_0}{a_1}$ ist Nullstelle.

Im Fall $\boxed{m = 2}$ schreiben wir — um an vielleicht vertrautere Notierungsweisen anzuschließen — $a := a_2$ $(\neq 0)$, $b := a_1$ und $c := a_0$.

P ist also dann von der Gestalt $\boxed{P(x) = a\,x^2 + b\,x + c \qquad (x \in \mathbb{R})}$.

Der Graph einer solchen Funktion heißt *„Parabel"*; diese ist im Fall $a > 0$ nach oben, im Fall $a < 0$ nach unten geöffnet.

Man rechnet nun wie folgt *(„quadratische Ergänzung")*:

$$\begin{aligned} P(x) &= a\left[x^2 + \tfrac{b}{a}x + \tfrac{c}{a}\right] = a\left[x^2 + 2\tfrac{b}{2a}x + \left(\tfrac{b}{2a}\right)^2 + \tfrac{c}{a} - \left(\tfrac{b}{2a}\right)^2\right] \\ &= a\left[\left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 + \left(\tfrac{c}{a} - \left(\tfrac{b}{2a}\right)^2\right)\right] \end{aligned}$$

$P(x) = 0$ bedeutet also gerade $\left[\;\cdots\;\right] = 0$, somit $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$; dies ist $\boxed{\text{für } x \in \mathbb{R}}$ nur möglich, *falls* $\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} \geq 0$. In diesem Fall hat man $x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}$, somit

$$\boxed{x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}\,.$$

!

Oft ‚normiert' man den höchsten Koeffizient zu 1, klammert also a aus, und erhält mit $p := \frac{b}{a}$, $q := \frac{c}{a}$ für das ‚normierte' Polynom $\boxed{P(x) = x^2 + px + q \quad (x \in \mathbb{R})}$ dann die sogenannte „p-q-**Formel**":

!

$$\boxed{x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}} \, .$$

Falls Sie diese Formel noch nicht kennen sollten, müssen Sie sie schleunigst lernen und möglichst nie mehr vergessen; denn sie wird sehr oft benötigt! (Vermutlich waren Sie dann in der Schule gelegentlich nicht ganz aufmerksam — vielleicht gerade krank oder gar ein wenig verliebt !?) Manche Lehrer sprechen auch von *„Mitternachtsformel"*, weil man sie selbst dann noch können sollte, wenn man nachts aus dem Schlaf geweckt wird.

Mit $D := b^2 - 4ac$ sind also für die *„quadratische Gleichung"*

$$ax^2 + bx + c = 0$$

— im Hinblick auf *reelle* Lösbarkeit — drei Fälle möglich:

1. $D < 0$: Es existiert keine (reelle) Lösung.
2. $D = 0$: Genau $x_1 := x_2 := -\dfrac{b}{2a}$ ist Lösung.
3. $D > 0$: Genau $x_1 := \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ und $x_2 := \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ sind die beiden verschiedenen Lösungen.

Im (zweiten und) dritten Fall schreibt man meist:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \, .$$

Hier gilt dann — nach der abschließenden Aussage aus 2.2.1 —

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \, .$$

Im ‚normierten Fall' ($a = 1$) ergibt sich nach Ausmultiplizieren der rechten Seite durch Koeffizientenvergleich der **Satz von** VIETA:

$$b = -(x_1 + x_2) \qquad \textit{und} \qquad c = x_1 \cdot x_2 \, .$$

Der Ausdruck $D = b^2 - 4ac$, dessen Vorzeichen den Lösungstyp festlegt, wird als *„Diskriminante"* bezeichnet.

Auch für Polynome dritten und vierten Grades gibt es noch — jedoch deutlich kompliziertere — Formeln, die es erlauben, die Nullstellen aus den Polynomkoeffizienten zu berechnen. Für Polynome höheren Grades (als 4) sind derartige Formeln *grundsätzlich unmöglich*! Die Nullstellen von solchen Polynomen können im allgemeinen nur näherungsweise berechnet werden. Näherungsverfahren, die es erlauben, jede gewünschte Genauigkeit zu erreichen, sind zum Beispiel *„Regula falsi“* und „NEWTON-*Verfahren*“, die ich aber hier nicht behandeln möchte.

Hat man schon eine Nullstelle, so spaltet man zunächst den zugehörigen Linearfaktor ab *(„ausklammern“)* und erhält so ein Polynom mit reduziertem Grad. Zu beachten ist dabei insbesondere der Fall, daß der konstante Term entfällt ($a_0 = 0$), weil dann sofort eine Nullstelle durch $x = 0$ gegeben ist.

Zur Bestimmung einer ersten Nullstelle hilft — im nichttrivialen Fall $m \geq 2$ — *bei ganzzahligen Koeffizienten* oft die Bemerkung weiter:

Für ein normiertes Polynom $(a_m = 1)$ *ist jede ganzzahlige Nullstelle Teiler des konstanten Terms.*

Denn für eine Nullstelle $z \in \mathbb{Z}$ ist $z^m + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$,
also $a_0 = z \cdot (-a_1 - \cdots - z^{m-1})$ mit $(\cdots) \in \mathbb{Z}$.

Es gibt eine Reihe von zusätzlichen Überlegungen für spezielle Typen von Polynomen, auf die ich jedoch nicht weiter eingehe. Hinweisen möchte ich nur noch darauf, daß zum Beispiel die *„biquadratische Gleichung“*

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

durch die Substitution $z := x^2$ in die quadratische Gleichung

$$az^2 + bz + c = 0$$

übergeht. Zu beachten ist dabei dann aber, daß nur Lösungen $z \geq 0$ der quadratischen Gleichung — über $x = \pm\sqrt{z}$ — reelle Lösungen der biquadratischen Gleichung liefern.

Ein paar Beispiele sollen wieder die dargestellten Überlegungen einüben:

(B8) $\boxed{x^4 - x^3 - 2x^2 = 0}$

Hier klammert man x^2 aus und untersucht dann $x^2 - x - 2 = 0$. Die p-q-Formel liefert

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases} .$$

Die gesuchten Nullstellen sind also: 0 (doppelt), 2 und -1. Natürlich kann dies mit etwas Übung auch ohne Rechnung aus dem Satz von VIETA abgelesen werden: Das Produkt der beiden von 0 verschiedenen Nullstellen muß -2, die Summe 1 ergeben.

(B9) $\boxed{x^4 + x^2 - 6 = 0}$

Diese Gleichung ist biquadratisch. Die Substitution $z := x^2$ führt auf die quadratische Gleichung $z^2 + z - 6 = 0$ mit den Lösungen $z_1 = -3$ und $z_1 = 2$. Da z_1 negativ ist, liefert nur z_2 Lösungen der Ausgangsgleichung: $x_{1,2} \pm\sqrt{2}$. Die *„Faktorisierung"* des quadratischen Ausdrucks $z^2 + z - 6 = (z+3)(z-2)$ zeigt noch $x^4 + x^2 - 6 = \left(x^2+3\right)\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)$.

(B10) $\boxed{x^3 - x^2 + x - 1 = 0}$

Der Grad der linken Seite ist 3; wir versuchen, eine Lösung gezielt zu ‚raten': Der konstante Term -1 hat nur die Teiler 1 und -1, also kommen nur diese als ganzzahlige Lösungen in Frage. Einsetzen ergibt, daß 1 Nullstelle ist. Die Abspaltung des zugehörigen Linearfaktors $(x-1)$ liefert dann $x^3 - x^2 + x - 1 = (x-1)(x^2+1)$. Da $x^2 + 1 \geq 1 > 0$ gilt, ist 1 somit die einzige reelle Nullstelle.

2.3 (Gebrochen) Rationale Funktionen

Sind P und Q Polynome, wobei Q nicht das Nullpolynom ist, dann heißt

$$\begin{array}{cccc} f: & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \cup\!\!\!| & & \cup\!\!\!| \\ & x & \longmapsto & \frac{P(x)}{Q(x)} \end{array}$$

mit $D := \left\{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\right\}$ *„rationale Funktion"*.

f ist also gerade $\frac{P}{Q}$ im Sinne von Teilabschnitt 2.1.4.

Ist dabei $\operatorname{grad}(Q) \geq 1$ und P nicht das Nullpolynom, dann sprechen wir von einer *„gebrochen rationalen Funktion"*. Ist $\operatorname{grad}(P) < \operatorname{grad}(Q)$, dann sagen wir auch: $\frac{P}{Q}$ ist *„echter Polynombruch"*.

An dieser Stelle sehen wir uns nur die (additive) *„Zerlegung einer rationalen Funktion in ein Polynom und einen echten Polynombruch"* an. Die weitere Diskussion rationaler Funktionen führen wir später, wenn die geeigneten Hilfsmittel — insbesondere die Grenzwertbildung — bereitstehen!

Satz *Vor.:* *P, Q und D wie oben mit* $\operatorname{grad}(Q) \geq 1$
Beh.: *Es existieren eindeutig Polynome S und R mit* $\operatorname{grad}(R) < \operatorname{grad}(Q)$ *und*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \qquad \text{für } x \in D\,.$$

Beweis: Dies folgt offenbar unmittelbar aus dem Satz über „Division mit Rest". □

(B1) $P(x) := -x^3 - 3x^2 + x + 3, \quad Q(x) := x^2 + 5x + 6$

$$Q(x) = 0 \iff x = -\tfrac{5}{2} \pm \sqrt{\tfrac{25}{4} - 6} = -\tfrac{5}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}} = \begin{cases} -3 \\ -2 \end{cases} .$$

$$f(x) = \frac{-x^3 - 3x^2 + x + 3}{x^2 + 5x + 6} \quad \text{für } x \in D := \mathbb{R} \setminus \{-2, -3\} .$$

Die Nullstellen von f sind gerade die Nullstellen des Zählers P, die in D liegen. Die Nullstellen von P erhält man zum Beispiel wieder — das führe ich hier nicht mehr aus — über die Teiler (± 1, ± 3) des konstanten Terms zu: $1, -1$ und -3; also $P(x) = -(x^2-1)(x+3)$. Die Nullstellen von f sind also ‚nur': 1 und -1.

Für $x \in D$ (!) können wir die Darstellung von f durch Kürzen vereinfachen:

$$f(x) = \frac{-(x-1)(x+1)(x+3)}{(x+2)(x+3)} = \frac{-x^2+1}{x+2} .$$

Der maximale Definitionsbereich der durch die rechte Seite gegebenen Funktion ist größer als der von f, nämlich $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
Die Division mit Rest liefert:

$$\begin{array}{l}
(-x^2 + 0x + 1) \ : \ (x+2) \quad = \quad \boxed{-x + 2 - \dfrac{3}{x+2}} \\
\underline{-(-x^2 - 2x)\qquad} \\
\qquad\quad 2x + 1 \\
\qquad \underline{-(2x + 4)} \\
\qquad\qquad -3
\end{array}$$

Rückblick

Dieses kurze Kapitel dürfte den meisten Lesern leicht gefallen sein; denn es wurde doch etwas mehr als vorher ‚gerechnet', und an vielen Stellen waren gewiß Vorkenntnisse von der Schule her hilfreich. Auf die *Grundeigenschaften von Funktionen* kommen wir noch ausgiebig zurück, wenn zusätzliche Begriffsbildungen — insbesondere Grenzwert, Stetigkeit und Differenzierbarkeit — bereitstehen.

Die in diesem Kapitel behandelten Verfahren und Rechentechniken gehören zu den besonders wichtigen grundlegenden Hilfsmitteln. Sie sollten sich eingehend damit auseinandersetzen, bis Sie diese souverän beherrschen. Da ist nichts überflüssig!

Für die Lösbarkeit von *Polynom-Gleichungen* und für die *graphische Darstellung* war die Unterscheidung $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ganz entscheidend. Für viele andere Rechnungen war sie unerheblich, wenn ich mich auch an manchen Stellen, wo das eigentlich nicht erforderlich gewesen wäre, noch auf den reellen Fall beschränkt habe; denn ich weiß, daß das Rechnen im Komplexen vielen zu Beginn Schwierigkeiten macht. Doch das wird sich — hoffentlich — geben!

der Lernphase gehe ich sehr behutsam vor. Aber Sie müssen sich in jedem Fall hier durchbeißen und Sicherheit im Umgang mit den neuen Begriffen erwerben!

Anschließend sollten Sie insbesondere in der Lage sein,

- die Definition der Konvergenz von Folgen und Reihen zu formulieren und die Konvergenz bei konkreten Beispieln nachzuprüfen,
- die Stetigkeit in einem Punkt und die globale Stetigkeit zu beschreiben und Funktionen auf Stetigkeit zu untersuchen,
- den Konvergenzradius einer gegebenen Potenzreihe zu bestimmen,

und bei allem wissen, wozu das gut ist!

3.1 Folgen

3.1.1 Definitionen

Eine *„Folge“* ist ganz allgemein eine auf $\mathbb{N}$ definierte Abbildung. Eine Folge f ordnet also jeder natürlichen Zahl n einen Wert $f(n)$ zu.
Wir beschränken uns hier auf *reell- und komplexwertige Folgen*, also

$$\begin{array}{rcl} f: \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \Psi & & \Psi \\ n & \longmapsto & f(n) \end{array}$$

mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. (Wenn Sie sich mit den komplexen Zahlen noch immer nicht so recht angefreundet haben, bleiben Sie einfach — vorläufig — bei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.)

<u>Schreibweisen:</u> Statt „f“ schreibt man häufig „a“ oder „b“ usw. und statt $a(n)$ meist a_n. Oft wird auch (a_n) an Stelle von a geschrieben.

Um einen intuitiven Eindruck von einer gegebenen Folge zu gewinnen, notiert man gelegentlich die ersten *„Glieder“* explizit:

$$a_1,\, a_2,\, a_3,\, \ldots \quad .$$

Die nachfolgenden Beispiele sollten Sie sich ganz genau ansehen, auch wenn Sie im Moment vielleicht den Eindruck haben, daß das nur Spielerei ist:

(B1) $\begin{array}{rcl} a: \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R}\,, \\ \Psi & & \Psi \\ n & \longmapsto & 0 \end{array}$ also $a(n) = a_n = 0 \quad (n \in \mathbb{N})$ oder — expliziert notiert — : $0, 0, 0, \ldots$

(B2) $\begin{array}{rcl} a: \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R}\,, \\ \Psi & & \Psi \\ n & \longmapsto & n-3 \end{array}$ also $a(n) = a_n = n-3 \quad (n \in \mathbb{N})$ oder — expliziert notiert — : $-2, -1, 0, 1, 2, \ldots$

(B3) $a(n) = \begin{cases} m\,, & \text{falls} \quad n = 2 \cdot m \qquad \text{mit einem} \quad m \in \mathbb{Z} \\ m\,, & \text{falls} \quad n = 2 \cdot m + 1 \quad \text{mit einem} \quad m \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Hier rechnen wir ausführlich:

$$\begin{array}{lll} n = 1 = 2 \cdot 0 + 1 & : & a(1) = a_1 = 0 \\ n = 2 = 2 \cdot 1 & : & a(2) = a_2 = 1 \\ n = 3 = 2 \cdot 1 + 1 & : & a(3) = a_3 = 1 \\ n = 4 = 2 \cdot 2 & : & a(4) = a_4 = 2 \\ n = 5 = 2 \cdot 2 + 1 & : & a(5) = a_5 = 2 \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots & : & \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \end{array}$$

Explizit geschrieben ist die Folge daher : $0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ \ldots$.

Einige Leser werden sicher bemerkt haben, daß diese Folge mit der Funktion [ ] aus (B10) des Teilabschnitts 2.1.2 viel einfacher geschrieben werden kann:

$$a(n) = \left[\frac{n}{2}\right] \qquad (n \in \mathbb{N})\,.$$

(B4) $a(n) := q^n \quad (n \in \mathbb{N})$ mit einem $q \in \mathbb{K}$ *(„geometrische Folge“)*: $q,\ q^2,\ q^3,\ q^4,\ q^5,\ \ldots$

(B5) $a(n) := \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} \qquad (n \in \mathbb{N}):\quad 1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \ldots$

Speziell sind für Folgen (als spezielle Funktionen) die Begriffe aus 2.1.3 — für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ — erklärt:

„(streng) monoton wachsend (isoton)“, *„(streng) monoton fallend (antiton)“*, *„(durch α) nach oben beschränkt“*, *„(durch α) nach unten beschränkt“*, *„beschränkt“*, ...

Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ heißt eine Folge (a_n) genau dann *„beschränkt“*, wenn die Menge $\{a_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist, d.h. mit einem $S \geq 0$

$$|a_n| \leq S \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ gilt.}$$

Die Folge in (B1) ist : monoton wachsend, *nicht* streng monoton wachsend, monoton fallend, *nicht* streng monoton fallend, durch 0 nach unten beschränkt, durch 0 nach oben beschränkt, aber auch z.B. durch 17.3 nach oben beschränkt (fragen Sie aber bitte nicht: „Warum gerade 17.3?“), ...

Die Folge in (B2) ist : streng monoton wachsend, *nicht* nach oben beschränkt, nach unten z.B. durch -2 beschränkt.

Die Folge in (B3) ist : monoton wachsend, nach unten durch 0 beschränkt, *nicht* streng monoton wachsend, *nicht* nach oben beschränkt.

Die Folge in (B4) ist für $0 < q < 1$: streng monoton fallend, nach oben durch

q beschränkt, nach unten durch 0 beschränkt.

Die Folge in (B5) ist : nach oben durch 1 beschränkt, nach unten durch $-\frac{1}{2}$ beschränkt, *nicht* monoton.

Hinweisen möchte ich noch darauf, daß Folgen natürlich auch einen anderen *„Startindex"* als 1 haben können: Oft werden Folgen zum Beispiel ab 0 gezählt, es sind dann also auf $\mathbb{N}_0$ definierte $\mathbb{K}$-wertige Abbildungen.

3.1.2 Konvergenz von Folgen

Wir kommen jetzt erstmals zum wichtigsten — aber zu Beginn wohl auch schwierigsten — Begriff der Analysis, dem der *Konvergenz* und des *Grenzwertes*:

Vor der exakten Definition wollen wir ein paar Vorüberlegungen machen, um ein Gefühl für den neuen Begriff zu bekommen:

Von den beiden Folgen

$$a_n := \frac{1}{n+3} \quad (n \in \mathbb{N}), \qquad \text{also} \quad \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \ldots$$

$$\text{und} \quad (-1)^{n+1}\frac{1}{n^2} \quad (n \in \mathbb{N}), \qquad \text{also} \quad 1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{16}, \ldots$$

wird man doch intuitiv etwa sagen, sie *‚streben gegen* 0‘. Was soll aber nun diese Aussage präzise bedeuten?:

Vielleicht wird man als erste Beschreibung versuchen (für eine Folge (a_n) und eine Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$):

(a_n) strebt gegen α, wenn die Glieder a_n dem Wert α *immer näher* kommen.

Aber auch die Glieder der Folge $1 + \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{5}, 1 + \frac{1}{6}, 1 + \frac{1}{7}, \ldots$ kommen der Zahl 0 immer näher; doch werden wir gewiß nicht sagen, daß diese Folge gegen 0 strebt (sondern gegen 1!).

Eine andere Möglichkeit, unser intuitives Verständnis des ‚Grenzwertes‘ zu erfassen, wäre etwa folgende:

(a_n) strebt gegen α, wenn die Glieder a_n dem Wert α *beliebig nahe* kommen.

Betrachtet man jedoch die Folge $(a_n) := \left(n^{(-1)^n}\right)$, also $1, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, 6, \frac{1}{7}, \ldots$, so kommen auch hier Glieder a_n dem Wert 0 beliebig nahe; aber wir werden keinesweg sagen wollen, daß die Folge gegen 0 strebt; denn da stören die Folgenglieder $2, 4, 6, \ldots$ doch gewaltig!

Man könnte deshalb als nächstes versuchen:

(a_n) strebt gegen α, wenn die Glieder a_n der Zahl α *beliebig nahe* kommen und zusätzlich a_{n+1} stets mindestens so nahe bei α liegt wie a_n.

Doch auch hiermit treffen wir unsere intuitive Vorstellung nicht. Denn die

Folge $(a_n) := \left(\frac{1+(-1)^n}{n}\right)$, also $0, 1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, \ldots$ erfüllt diese Bedingung nicht. Trotzdem werden vermutlich auch Sie meinen, daß sie gegen 0 strebt!

Auf die richtige Idee kann man kommen, wenn man sich zum Beispiel an das *Verfahren zur Bestimmung der Dezimaldarstellung von* $\sqrt{2}$ erinnert:

$$\begin{array}{rlr}
1 < \sqrt{2} < 2\,, & \text{da} & 1^2 = 1 < 2 < 4 = 2^2 \\
1.4 < \sqrt{2} < 1.5\,, & \text{da} & 1.4^2 = 1.96 < 2 < 2.25 = 1.5^2 \\
1.41 < \sqrt{2} < 1.42\,, & \text{da} & 1.41^2 = 1.9881 < 2 < 2.0164 = 1.42^2 \\
1.414 < \sqrt{2} < 1.415\,, & \cdots & \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots \\
1.4142 < \sqrt{2} < 1.4143\,, & \cdots & \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots \\
1.41421 < \sqrt{2} < 1.41422\,, & \cdots & \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots
\end{array}$$

Von der so (linke Spalte) entstehenden Folge (a_n) der Zahlen

$$1,\ 1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ 1.4142,\ 1.41421,\ \ldots$$

werden wir doch sagen, sie strebe gegen $\sqrt{2}$. Damit meinen wir, daß die Folge $\sqrt{2}$ approximiert, und zwar beliebig genau. *„Beliebig genau"* soll heißen, mit beliebig kleinem Fehler: Wenn immer eine Genauigkeit vorgeschrieben ist, z.B. 10^{-5}, so können wir die Berechnung so weit treiben, daß von einem gewissen Folgeglied ab alle anschließenden einen Fehler $< 10^{-5}$ aufweisen. Die Approximation 1.4142 ist hier noch zu schlecht; denn wir können nur abschätzen

$$|1.4142 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1.4142 < 1.4143 - 1.4142 = 10^{-4}\,.$$

Ab dem nächsten Schritt $(n \geq 6)$ gilt jedoch

$$|a_n - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - a_n < \sqrt{2} - a_6 < 1.41422 - 1.41421 = 10^{-5}\,.$$

Wir werden nun α *Grenzwert der Folge* (a_n) nennen, *wenn der Fehler dadurch beliebig klein gemacht werden kann, daß* n *genügend groß gewählt wird.*

Dabei ist zu beachten: Der Fehler soll nicht nur für *ein* hinreichend großes n klein sein, sondern von einem n ab *für alle folgenden* Glieder!

Wir geben jetzt die genaue **Definition des Grenzwertes**:

Es seien $\alpha \in \mathbb{K}$ *und* $(a_n) := a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$. α *heißt „Grenzwert" der Folge* (a_n) *genau dann, wenn für jedes* $\varepsilon > 0$ *ein* $N \in \mathbb{N}$ *so existiert, daß* $\|a_n - \alpha\| < \varepsilon$ *für alle* $n \geq N$ *gilt.*

Wir sagen dafür auch

(a_n) *„konvergiert"* (oder *„strebt"*) *gegen* α und notieren

$\boxed{a_n \longrightarrow \alpha \quad (n \longrightarrow \infty)}$ oder $\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha}$.

Gelegentlich lassen wir „$(n \longrightarrow \infty)$“ dabei auch weg!

> Die ersten beiden Seiten dieses Teilabschnitts 3.1.2 habe ich im Kern — und an einigen Stellen auch in den Formulierungen — dem Skript [FISCHER] entnommen, weil mir das sorgfältig motivierende Vorgehen dort recht gut gefallen hat.

Auch hier wieder einige instruktive Beispiele, die Sie tunlichst nicht übergehen sollten. Wir beginnen mit den beiden zu Beginn des Unterabschnitts betrachteten Folgen. Beachten Sie bei diesen Beispielen (und auch später), daß *für den Konvergenznachweis nicht erforderlich* ist, *ein ‚optimales' N zu finden*; man kann meist recht grob abschätzen!

(B6) $\boxed{a_n := \dfrac{1}{n+3}}$ $(n \in \mathbb{N})$, also $\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \ldots$

Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ existiert nach der Folgerung (3) aus 1.7 ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Für $\mathbb{N} \ni n \geq N$ gilt somit $|a_n - 0| = |a_n| = \frac{1}{n+3} \leq \frac{1}{N+3} < \frac{1}{N} < \varepsilon$. Damit ist gezeigt: $\boxed{a_n \longrightarrow 0}$.

(B7) $\boxed{(-1)^{n+1}\,\dfrac{1}{n^2}}$ $(n \in \mathbb{N})$, also $1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{16}, \ldots$

Mit dem gleichen N zu gegebenem ε wie in (B6) rechnet man: $|a_n - 0| = |a_n| = \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$. Also auch hier: $\boxed{a_n \longrightarrow 0}$.

(B8) $\boxed{a_n := \dfrac{2n}{n+2}}$ $(n \in \mathbb{N})$, also $\frac{2}{3}, \frac{4}{4}, \frac{6}{5}, \frac{8}{6}, \frac{10}{7}, \ldots$

(Die Mahnung meines Grundschullehrers, ‚immer' zu kürzen, habe ich hier bewußt nicht beachtet.) Wir zeigen: $\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = 2}$.

Dazu muß man natürlich erst einmal auf 2 als ‚Kandidaten' für den Grenzwert kommen. Doch das ist bei diesem Beispiel gar nicht schwierig: Für $n = 1000$ erhält man beispielsweise: $a_{1000} \approx 1.996$.
$|a_n - 2| = \left|\frac{2n}{n+2} - 2\right| = \left|\frac{2n}{n+2} - \frac{2n+4}{n+2}\right| = \frac{4}{n+2}$. Zu $\varepsilon > 0$ existiert — wieder nach der o.a. Folgerung (3) — ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{4}$.
Für $\mathbb{N} \ni n \geq N$ gilt somit $|a_n - 2| = \frac{4}{n+2} < \frac{4}{n} \leq \frac{4}{N} < \varepsilon$.

Eine Folge (a_n) heißt *„konvergent“*, falls ein $\alpha \in \mathbb{K}$ existiert mit $a_n \longrightarrow \alpha$, sonst *„divergent“*.

(B9) $\boxed{a_n := n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$: (a_n) *ist divergent.* (siehe unten!)

(B10) $\boxed{a_n := (-1)^n}$ $(n \in \mathbb{N})$: (a_n) *ist divergent.*

<u>Beweis:</u> Wäre (a_n) konvergent mit Grenzwert $\alpha \in \mathbb{K}$, so hätte

man beispielsweise zu $\varepsilon := \frac{1}{2}$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - \alpha| \le \varepsilon$ für $\mathbb{N} \ni n \ge N$, also für solche n: $2 = |a_n - a_{n+1}| \le |a_n - \alpha| + |\alpha - a_{n+1}| \le 2\varepsilon \le 1$ Widerspruch! □

Die Divergenz der Folge aus (B9) folgt unmittelbar aus dem

(1) Satz *Jede konvergente Folge ist beschränkt.*

Denn nach der ARCHIMEDES-Eigenschaft (vgl. Abschnitt 1.7) ist $\mathbb{N}$ — und damit die Folge aus (B9) — nicht beschränkt.

Beweis des Satzes: Ist (a_n) eine konvergente Folge und α ihr Grenzwert, so existiert zu $\varepsilon := 1$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - \alpha| \le 1$ für $\mathbb{N} \ni n > N$, also für solche n: $|a_n| \le |\alpha| + 1$. Es verbleibt nur noch, die restlichen *endlich vielen* Folgenglieder betraglich abzuschätzen. So liefert

$$K := \max\{\,|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_N|, |\alpha| + 1\,\}$$

eine Schranke für die gesamte Folge: $|a_n| \le K \quad (n \in \mathbb{N})$. □

(2) Satz *Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig.*

Beweis: Gilt für eine Folge (a_n) mit $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$: $a_n \longrightarrow \alpha$ und $a_n \longrightarrow \beta$, so existieren zu $\varepsilon > 0$ zwei Indizes $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n \ge N_1$ und entsprechend $|a_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n \ge N_2$. Mit $N := \max\{N_1, N_2\}$ gilt dann $|\alpha - \beta| \le |\alpha - a_N| + |a_N - \beta| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Hier liefert nun (13) aus Teilabschnitt 1.4.3 $|\alpha - \beta| = 0$, also $\alpha = \beta$. □

Wir sprechen daher im folgenden bei einer konvergenten Folge meist von *„dem"* statt von *„einem"* Grenzwert.

Mit den in Abschnitt 1.10 eingeführten *ε-Umgebungen* läßt sich der Grenzwert α einer Folge (a_n) auch wie folgt erklären:

$$a_n \longrightarrow \alpha :\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \ge N \quad a_n \in \mathcal{U}_\alpha^\varepsilon$$

Das bedeutet also, daß in jeder gegebenen ε-Umgebung von α ab einem gewissen Index alle Glieder der Folge liegen, also *für alle bis auf endlich viele Indizes.* Man sagt dafür oft auch *„für fast alle Indizes"*, *„fast alle a_n liegen in $\mathcal{U}_\alpha^\varepsilon$"* oder auch nur *„für hinreichend großes n"*. Hier und in ähnlichen Fällen notieren wir — wie allgemein üblich — kurz „$\forall n \ge N$" statt etwa „$\forall n\ (\in \mathbb{N},\ n \ge N)$", gehen also implizit von $n \in \mathbb{N}$ aus.

Die gegebene strenge Fassung des Grenzwertbegriffes gelang erst zu Beginn des 19. Jahrhunderts. Man findet sie erstmals in CAUCHYS *„Cours d'analyse"* (1821).

Sicher werden einige meinen — und das durchaus zu Recht —, daß der *Nachweis von Konvergenz bzw. Divergenz* und das Finden des Grenzwertes wenig systematisch vor sich geht. Manche werden vielleicht respektlos sagen: „Das ist ja ein furchtbares Gefummel!“ Wir werden deshalb im nächsten Teilabschnitt Grundregeln bereitstellen, die die *Konvergenzüberlegungen weitgehend automatisieren*:

3.1.3 Das Rechnen mit Grenzwerten (Grundregeln)

Es seien $\left\| \begin{array}{l} \mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}, \\ (a_n)\,,\ (b_n)\,,\ (c_n)\,,\ \ldots \quad \mathbb{K}\text{-wertige Folgen} \quad \text{und} \\ c\,,\ \alpha\,,\ \beta\,,\ \ldots \quad \text{Zahlen (aus } \mathbb{K}). \end{array} \right.$

Als *Handwerkszeug für den Konvergenznachweis* beweisen wir die nachfolgenden **Grundregeln**:

[0] $a_n = \alpha \quad (n \in \mathbb{N}) \quad \Longrightarrow \quad a_n \longrightarrow \alpha$

[1] $a_n \longrightarrow \alpha \wedge b_n \longrightarrow \beta \quad \Longrightarrow \quad a_n + b_n \longrightarrow \alpha + \beta$

[1'] $a_n \longrightarrow \alpha \wedge b_n \longrightarrow \beta \quad \Longrightarrow \quad a_n - b_n \longrightarrow \alpha - \beta$

[2] $a_n \longrightarrow \alpha \wedge b_n \longrightarrow \beta \quad \Longrightarrow \quad a_n \cdot b_n \longrightarrow \alpha \cdot \beta$

[2'] $a_n \longrightarrow \alpha \quad \Longrightarrow \quad c \cdot a_n \longrightarrow c \cdot \alpha$

[3] $a_n \longrightarrow \alpha \wedge b_n \longrightarrow \beta \wedge \beta \neq 0,\ b_n \neq 0 \ (n \in \mathbb{N}) \quad \Longrightarrow \quad \frac{a_n}{b_n} \longrightarrow \frac{\alpha}{\beta}$ [1]

[4] $a_n \longrightarrow \alpha \quad \Longrightarrow \quad |a_n| \longrightarrow |\alpha|$

[5] $a_n \longrightarrow 0 \wedge (b_n)$ *beschränkt* $\quad \Longrightarrow \quad a_n \cdot b_n \longrightarrow 0$

Beweis: [0] ist trivial, [2'] folgt unter Beachtung von [0] unmittelbar aus [2]. [1'] ergibt sich aus [1] und [2'] mit $c := -1$. [1], [2], [3] und [4] fließen einfach aus den Überlegungen zur *Stetigkeit der Grundoperationen* (Abschnitt 1.10). Es sei dies beispielhaft für [1] ausgeführt: Zu $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ so, daß

$$x \in \mathcal{U}_\alpha^\delta \wedge y \in \mathcal{U}_\beta^\delta \Longrightarrow x + y \in \mathcal{U}_{\alpha+\beta}^\varepsilon .$$

Es existieren nun $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ derart, daß $a_n \in \mathcal{U}_\alpha^\delta$ für $n \geq N_1$ und entprechend $b_n \in \mathcal{U}_\beta^\delta$ für $n \geq N_2$. Ist $n \geq N := \max\{N_1, N_2\}$, so folgt also $a_n + b_n \in \mathcal{U}_{\alpha+\beta}^\varepsilon$. [5]: Ist K eine positive Schranke zu $\{|b_n| : n \in \mathbb{N}\}$, so existiert zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n| \leq \frac{\varepsilon}{K}$, falls $n \geq N$. Für solche n ist $|a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \leq \varepsilon$. □

[1] sei — exemplarisch — zusätzlich noch in Worten formuliert:

[1] Ist $\beta \neq 0$, dann folgt aus $b_n \to \beta$ schon $b_n \neq 0$ für n hinreichend groß (vgl. (3) aus Abschnitt 1.10).

Die Summe (a_n+b_n) zweier konvergenter Folgen (a_n) und (b_n) ist konvergent, und der Grenzwert der Summenfolge ist gerade die Summe der beiden einzelnen Grenzwerte:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) \;=\; \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n\,.$$

Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ hat man ergänzend noch die **Grundregeln**:

[6] $a_n \longrightarrow \alpha \wedge b_n \longrightarrow \beta \wedge a_n \le b_n \;(n \in \mathbb{N}) \implies \alpha \le \beta$

[7] $a_n \longrightarrow \alpha \wedge b_n \longrightarrow \alpha \wedge a_n \le c_n \le b_n \;(n \in \mathbb{N}) \implies c_n \longrightarrow \alpha$

Beweis: [6]: Nach [1'] gilt: $d_n := b_n - a_n \longrightarrow \delta := \beta - \alpha$. Es ist also $\delta \ge 0$ zu zeigen: Wäre $\delta < 0$, so hätte man zu $\varepsilon := -\frac{\delta}{2}$ (>0) ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|d_n - \delta| \le \varepsilon$, speziell also $d_n \le \delta + \varepsilon = \frac{\delta}{2}$ im Widerspruch zu $d_n \ge 0$.
[7]: Zu $\varepsilon \ge 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\alpha - \varepsilon \le a_n \le c_n \le b_n \le \alpha + \varepsilon$ für $n \ge N$, also $|c_n - \alpha| \le \varepsilon$. □

Sie haben bei der Argumentation zu [7] vielleicht bemängelt, daß man zunächst doch nur *separat* ein N_1 zu a_n und ein N_2 zu b_n hat, ab dem die gewünschte Abschätzung gilt. Aber mit dem bereits mehrfach praktizierten Übergang zu $\boldsymbol{N := \max\{N_1, N_2\}}$ sieht man, daß Œ gleich von einem *gemeinsamen* N ausgegangen werden kann. Dies werden wir im folgenden meistens stillschweigend tun.

In der Vorlesung versuche ich, [7] auf folgende Weise etwas plausibel zu machen: Drei Studenten der Juristerei, die ganz schön gebechert haben, machen sich gemeinsam auf den Heimweg ins gleiche Studentenwohnheim. Die beiden, die noch ein klein wenig nüchterner sind, nehmen den dritten, der arge Probleme hat, zwischen sich. Und wenn die beiden das Ziel erreichen, ist so der dritte automatisch auch angekommen.

Den nachfolgenden Beispielen sollten Sie besondere Aufmerksamkeit widmen; denn sie werden als ‚Basis' für Konvergenzüberlegungen immer wieder herangezogen:

(B11) Für $k \in \mathbb{N}$ ist $\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0}$.

Im Fall $k = 1$ besagt das — unter Beachtung der Monotonie — gerade die Folgerung (3) aus Abschnitt 1.7. Dann ergibt sich die allgemeine Aussage durch Vollständige Induktion über k mit der Grundregel [2] (vgl. dazu auch die Argumentation zu (B7)).

(B12) Für $q \in \mathbb{K}$ mit $|q| < 1$ gilt: $\boxed{q^n \longrightarrow 0}$ für $n \longrightarrow \infty$.

Dies besagt gerade (im nichttrivalen Fall $(q \neq 0)$) der Hilfssatz aus Abschnitt 1.8, wenn man noch $|q^n| = |q|^n \le |q|^N$ für $n, N \in \mathbb{N}$ mit $n \ge N$ beachtet.

(B13) $$\boxed{\frac{7n^3 - 4n^2 + 18}{4n^3 + 16n} \longrightarrow \frac{7}{4}}$$

Die einfache Argumentation bei diesem Beispiel und dem folgenden kommt dauernd vor. Prägen Sie sich diese daher gut ein! Ich verzichte hier darauf, den entsprechenden Sachverhalt gesondert als allgemeines Prinzip aufzuschreiben.

$$\frac{7n^3 - 4n^2 + 18}{4n^3 + 16n} = \frac{n^3\left(7 - 4\frac{1}{n} + 18\frac{1}{n^3}\right)}{n^3\left(4 + 16\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{7 - 4\frac{1}{n} + 18\frac{1}{n^3}}{4 + 16\frac{1}{n^2}} \longrightarrow \frac{7}{4}$$

Nach (B11) gelten $\frac{1}{n} \to 0$ und $\frac{1}{n^3} \to 0$. Mit der Grundregel [2'] folgen dann $-4\frac{1}{n} \to 0$ und $18\frac{1}{n^3} \to 0$. Nach [1] (und [0]) ergibt sich so für den Zähler $7 - 4\frac{1}{n} + 18\frac{1}{n^3} \longrightarrow 7$. In gleicher Weise erhält man für den Nenner $4 + 16\frac{1}{n^2} \longrightarrow 4$ und dann schließlich nach [3] die Behauptung. □

Ihnen ist sicher aufgefallen, daß häufig Folgen auftreten, die speziell gegen 0 konvergieren. Solche Folgen haben einen besonderen Namen, sie heißen *„Nullfolgen“*.

(B14) $$\boxed{\frac{7n^3 - 4n^2 + 18}{4n^5 + 16n^3} \longrightarrow 0}$$

Hier klammert man im Zähler die höchste Potenz n^3 und entsprechend im Nenner n^5 aus:

$$\frac{7n^3 - 4n^2 + 18}{4n^5 + 16n^3} = \frac{n^3\left(7 - 4\frac{1}{n} + 18\frac{1}{n^3}\right)}{n^5\left(4 + 16\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{7 - 4\frac{1}{n} + 18\frac{1}{n^3}}{4 + 16\frac{1}{n^2}}.$$

Der zweite Faktor strebt, wie wir oben gesehen haben, gegen $\frac{7}{4}$; $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ ist Nullfolge. Nach [2] folgt dann die Behauptung. □

Ganz pfiffige Leser haben vielleicht schon bemerkt, daß es bei solchen *„rationalen Folgen“* nur auf die *Terme mit den höchsten Potenzen im Zähler und im Nenner* ankommt.

Bevor man einfach irgendwie drauflosrechnet, sollte man sich die zu untersuchende Folge immer erst einmal genau ansehen. Zum Beispiel ist der Nachweis von

(B15) $$\boxed{\lim_{j\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 + (-1)^{2j+1}\right) = 0}$$

trivial; denn in der Klammer steht immer 0. Haben Sie das auch gleich gesehen?

Neben den Beispielen, die sich routinemäßig mit den Grundregeln erledigen lassen, gibt es auch solche, bei denen ein kleiner Trick erforderlich ist.

Für die weiteren Überlegungen müssen Sie sich nicht unbedingt alle Tricks, wohl aber die Aussage der nachfolgenden beiden Beispiele merken:

(B16) Für jedes $c > 0$ gilt: $\boxed{\sqrt[n]{c} \longrightarrow 1}$

Beweis: Ist $c \geq 1$, so betrachtet man $\delta_n := \sqrt[n]{c} - 1 \geq 0$. Mit der BERNOULLIschen Ungleichung (aus Abschnitt 1.5) ergibt sich $c = (1 + \delta_n)^n \geq 1 + n\,\delta_n$, und man erhält so über $\delta_n < \frac{c}{n} \longrightarrow 0$ in diesem Fall die Behauptung. Ist hingegen $0 < c < 1$, dann wendet man das gerade Bewiesene auf $d := \frac{1}{c}$ an, hat also $\sqrt[n]{d} \longrightarrow 1$ und daher — mit [3] — $\sqrt[n]{c} = \frac{1}{\sqrt[n]{d}} \longrightarrow 1$. □

Das nächste Beispiel verblüfft vielleicht noch mehr als das vorangehende. Dementsprechend müssen wir beim Beweis auch etwas geschickter vorgehen:

(B17) $\boxed{\sqrt[n]{n} \longrightarrow 1}$

Beweis: Für $\mathbb{N} \ni n \geq 2$ und $\delta_n := \sqrt[n]{n} - 1 > 0$ ist nach dem Binomischen Satz $n = (1 + \delta_n)^n > 1 + \binom{n}{2}\delta_n^2$. Das zeigt $n - 1 > \frac{1}{2}n(n-1)\delta_n^2$, woraus $\frac{2}{n} > \delta_n^2$, also zunächst $\delta_n^2 \longrightarrow 0$ und weiter $\big($mit $\delta_n^2 < \varepsilon^2 \Longrightarrow \delta_n < \varepsilon$ für $\varepsilon > 0\big)$ $\delta_n \longrightarrow 0$ fließt. Das ist die Behauptung. □

Oft werden Folgen nicht durch eine explizite Zuordnungsvorschrift, sondern durch eine *Rekursionsformel* und einen *Anfangswert* definiert. Ein Standardbeispiel dazu ist das **BABYLONische Wurzelziehen**:

Satz *Vor.: Es seien $c > 0$ und $x_0 > 0$ beliebig.*

Bez.: $x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{c}{x_n}\right) \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$

Beh.: $x_n \longrightarrow \sqrt{c} \qquad (n \longrightarrow \infty)$

Für den Beweis zeigen wir zunächst die auch sonst vielfach nützliche Abschätzung des *„geometrischen Mittels“* durch das *„arithmetische Mittel“*:

Hilfssatz *Für $\mathbb{R} \ni a, b \geq 0$ ist* $\qquad \sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a + b)$.

Beweis des Hilfssatzes: Aus $0 \leq (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ folgt $4ab \leq a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ und daraus $2\sqrt{ab} \leq a + b$. □

Beweis des Satzes: Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist offenbar $x_n > 0$. Wir zeigen:

$$(*) \qquad \sqrt{c} \leq x_n \leq \sqrt{c} + \frac{x_1}{2^{n-1}} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Für $n \in \mathbb{N}$ ist $x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{c}{x_{n-1}}\right) \underset{\text{(Hfs)}}{\geq} \sqrt{c}$. Die zweite Ungleichung erhalten wir induktiv: Für $n = 1$ ist sie trivial, da dann $r.S. = \sqrt{c} + x_1$.

Für den Schluß von n auf $n+1$ rechnet man $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{c}{x_n}\right) \underset{(n)}{\leq} \frac{1}{2}\left(\sqrt{c} + \frac{x_1}{2^{n-1}} + \frac{c}{x_n}\right) \underset{(1.\ \text{Ungl.})}{\leq} \frac{1}{2}\left(\sqrt{c} + \frac{x_1}{2^{n-1}} + \frac{c}{\sqrt{c}}\right) = \sqrt{c} + \frac{x_1}{2^n}$. Aus $(*)$ folgt die Behauptung; denn $\left|x_n - \sqrt{c}\right| = x_n - \sqrt{c} \leq \dfrac{x_1}{2^{n-1}} \longrightarrow 0$ □

Dies ist nicht nur eine abstrakte Konvergenzaussage, sondern zudem eine brauchbare *Fehlerabschätzung.*

Wir berechnen zur Verdeutlichung — ausgehend von dem Startwert $x_0 := 1$ — einen Näherungswert zu $\sqrt{2}$ bei ‚8-stelliger Rechnung':

(B18)

n	x_n
0	1.0 00 00 00
1	1.5 00 00 00
2	1.4 16 66 67
3	1.4 14 21 57
4	1.4 14 21 36
5	1.4 14 21 36

Wir haben schon gesehen, daß jede konvergente Folge beschränkt ist. Kommt noch Monotonie hinzu, so gilt auch die Umkehrung:

Satz *Vor.:* (a_n) *sei isoton und (nach oben) beschränkt*

Bez.: $\sigma := \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

Beh.: $a_n \longrightarrow \sigma$

Für diesen Sachverhalt notieren wir auch kurz und suggestiv $\boxed{a_n \uparrow \sigma}$ bzw. $\boxed{a_n \uparrow}$, wenn allein die Isotonie ausgedrückt werden soll.

Beweis: Zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ist $\sigma - \varepsilon$ *keine* obere Schranke; denn σ ist ja gerade die *kleinste* obere Schranke. Also existiert ein $N := N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $a_N > \sigma - \varepsilon$. Wegen der vorausgesetzten Monotonie gilt für $\mathbb{N} \ni n \geq N$ auch $\sigma \geq a_n > \sigma - \varepsilon$, somit $|a_n - \sigma| \leq \varepsilon$. □

Entsprechend hat man:

Satz *Vor.:* (a_n) *sei antiton und (nach unten) beschränkt*

Bez.: $\tau := \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

Beh.: $a_n \longrightarrow \tau$

Hier schreiben wir $\boxed{a_n \downarrow \tau}$ bzw. $\boxed{a_n \downarrow}$.

Den Beweis hierzu führt man ganz analog oder liest ihn — besser — durch Betrachtung von $(-a_n)$ aus dem vorangehenden Satz ab: Ist (a_n) antiton, so ist $(-a_n)$ isoton. Es gilt also

$$-a_n \uparrow \sup\{-a_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}\,,$$

was offenbar gerade

$$a_n \downarrow -\sup\{-a_n \,:\, n \in \mathbb{N}\} \stackrel{\surd}{=} \inf\{a_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$$

bedeutet. □

Eine der wichtigsten Zahlen der Analysis ist die EULER*sche Zahl* e, die wir im folgenden Beispiel einführen:

(B19) Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei

$$x_n := \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\nu!}\,.$$

Ist $\nu \in \mathbb{N}$, so gilt offenbar $\nu! \geq 2^{\nu-1}$; denn im Falle $\nu = 1, 2$ hat man Gleichheit und ‚anschließend' wird jeweils links mit einer Zahl ≥ 3, rechts aber nur mit 2 multipliziert. So folgt die Abschätzung

$$x_n = 1+\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu!} \leq 1+\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{2^{\nu-1}} = 1+\sum_{\nu=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu} < 1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3$$

Dies zeigt, daß die Folge — durch 3 — nach oben beschränkt ist. Sie ist zudem offenbar streng isoton; denn es kommt ja bei jedem Schritt ein positiver Summand hinzu. Nach dem obigen Satz existiert also

$$e := \sup\{x_n \,:\, n \in \mathbb{N}\} = \lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{1}{\nu!}$$

und liegt im Intervall $[2.5\,,\,3]$, da $2.5 = x_2 \leq x_n \leq 3$ für $n \in \mathbb{N}_3$ ist.

Diejenigen Leser, die eine andere Definition von e kennen, nämlich als Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

sollten sich noch ein wenig gedulden. Wir werden später — mit den geeigneten Hilfsmitteln — ganz einfach den Zusammenhang zu der hier gegebenen Definition herstellen.

Ich habe die Zahl e über die o.a. Folge (x_n) eingeführt, da diese ungewöhnlich schnell konvergiert, während $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ dies nur äußerst langsam tut. Um ein Gefühl dafür zu bekommen, sollten Sie mit diesen beiden Folgen einfach etwas auf Ihrem Taschenrechner ‚spielen' und mit dem richtigen Wert

$$e = 2.71\,82\,81\,82\,84\,59\,\ldots$$

vergleichen!

Wir ergänzen noch unsere **Grundregeln** um Aussagen über den *Zusammenhang von Konvergenz in $\mathbb{C}$ und in $\mathbb{R}$*:

Dazu seien (a_n), (b_n) reellwertige Folgen und α, β reelle Zahlen.
Für $c_n := a_n + ib_n$ $(n \in \mathbb{N})$ und $\gamma := \alpha + i\beta$ gelten dann:

[8] *Die Folge (c_n) ist genau dann konvergent mit Grenzwert γ, wenn* $a_n \longrightarrow \alpha$ *und* $b_n \longrightarrow \beta$.

[9] $c_n \longrightarrow \gamma \implies \overline{c_n} \longrightarrow \overline{\gamma}$

[8] besagt: *Eine komplexe Folge konvergiert genau dann, wenn die Folgen aus den zugehörigen Realteilen und die aus den Imaginärteilen konvergieren. In diesem Fall ergibt sich ihr Grenzwert aus denen der Folgen der Realteile und der Imaginärteile.*

Beweis: [9] ist ganz einfach; denn $|\overline{c_n} - \overline{\gamma}| = |\overline{c_n - \gamma}| = |c_n - \gamma| \longrightarrow 0$.
Zum Beweis von [8] zieht man in beiden Richtungen [1] und [2'] heran:
$a_n \longrightarrow \alpha \;\wedge\; b_n \longrightarrow \beta \implies c_n = a_n + ib_n \longrightarrow \alpha + i\beta = \gamma$.
Für die andere Richtung beachtet man noch [9]:
$a_n = \mathfrak{Re}(c_n) = \frac{1}{2}(c_n + \overline{c_n}) \longrightarrow \frac{1}{2}(\gamma + \overline{\gamma}) = \mathfrak{Re}(\gamma) = \alpha$. Die Aussage über den Imaginärteil ergibt sich analog. □

3.1.4 Bestimmte Divergenz

Es ist zweckmäßig, unter den divergenten reellwertigen Folgen solche noch besonders zu kennzeichnen, die ein in folgendem Sinne ‚bestimmtes' Verhalten zeigen. Für eine $\mathbb{R}$-wertige Folge (a_n) definieren wir:

$$\boxed{a_n \longrightarrow \infty \quad (n \longrightarrow \infty)} \;:\iff \forall K > 0\; \exists N \in \mathbb{N}\; \forall n \geq N \quad a_n \geq K\,,$$

$$\boxed{a_n \longrightarrow -\infty \quad (n \longrightarrow \infty)} \;:\iff \forall K > 0\; \exists N \in \mathbb{N}\; \forall n \geq N \quad a_n \leq -K\,.$$

In beiden Fällen nennen wir (a_n) *„bestimmt divergent"* und präzisieren gelegentlich im ersten Fall *„bestimmt divergent gegen* ∞*"* und im zweiten Fall *„bestimmt divergent gegen* $-\infty$*"*. Offenbar ist eine bestimmt divergente Folge divergent; denn sie ist ja nicht einmal beschränkt. Die Angabe „$(n \longrightarrow \infty)$" lassen wir oft wieder weg, wenn der Sachverhalt unmißverständlich bleibt.

Bemerkung
(a) $0 \neq a_n \longrightarrow \infty \implies \frac{1}{a_n} \longrightarrow 0$
(a') $0 \neq a_n \longrightarrow -\infty \implies \frac{1}{a_n} \longrightarrow 0$
(b) $0 < a_n \longrightarrow 0 \implies \frac{1}{a_n} \longrightarrow \infty$
(b') $0 > a_n \longrightarrow 0 \implies \frac{1}{a_n} \longrightarrow -\infty$

Beweis: (a), (a'): Zu $\varepsilon > 0$ existiert in beiden Fällen ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$|a_n| \geq \frac{1}{\varepsilon}$ für $n \geq N$. Das bedeutet aber gerade $\left|\frac{1}{a_n}\right| \leq \varepsilon$ für solche n.
(b): Zu $K > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $(0 <)\, a_n \leq \frac{1}{K}$ für $n \geq N$. Für solche n gilt also $\frac{1}{a_n} \geq K$. (b') ergibt sich analog. □

Oft notiert man diese Aussagen kurz — suggestiv, jedoch sicher auch mißverständlich — in der Form:

$$\boxed{\frac{1}{\infty} = 0}\,, \quad \boxed{\frac{1}{-\infty} = 0}\,, \quad \boxed{\frac{1}{0+} = \infty} \quad \text{und} \quad \boxed{\frac{1}{0-} = -\infty}\,.$$

Wir sehen uns zwei kleine Beispiele zur Einübung dieser Überlegungen an:

(B20) $\boxed{\text{Für } x > 1:\quad x^n \longrightarrow \infty}$

Denn nach (B12) ist $\left(\frac{1}{x^n}\right) = \left(\left(\frac{1}{x}\right)^n\right)$ Nullfolge, außerdem gilt $x^n > 0$. So liefert Regel (b) die Behauptung. □

(B21) Für $k \in \mathbb{N}$ gilt $\boxed{n^k \longrightarrow \infty}$;

denn (B11) zeigte $\dfrac{1}{n^k} \longrightarrow 0$. Wieder liefert Regel (b) — unter Beachtung von $n^k > 0$ — das Gewünschte. □

Von den weiteren Regeln für den Umgang mit bestimmt divergenten Folgen führe ich nur noch zwei aus. Die restlichen überlasse ich Ihnen als Übungsaufgaben.

Ist auch (x_n) eine reellwertige Folge, so gelten für $a \in \mathbb{R}$:

Bemerkung *(c) Falls* $a > 0$: $a_n \longrightarrow a \wedge x_n \longrightarrow \infty \Longrightarrow a_n \cdot x_n \longrightarrow \infty$

(c') Falls $a < 0$: $a_n \longrightarrow a \wedge x_n \longrightarrow \infty \Longrightarrow a_n \cdot x_n \longrightarrow -\infty$

<u>Beweis:</u> (c) : Ist $K > 0$, so gelten für hinreichend großes n nacheinander: $a_n \geq \frac{a}{2}$, $x_n \geq \frac{2K}{a}$, also $a_n x_n \geq K$. — Den kleinen Trick mit dem Übergang von N_1, N_2 zu $N := \max\{N_1, N_2\}$ wollte ich ja nicht mehr erwähnen. (c') folgt wieder in gleicher Weise oder aus (c) durch Multiplikation mit -1. □

(B22) $\boxed{\dfrac{4n^5 + 16n^3}{7n^3 - 4n^2 + 18} \longrightarrow \infty}$

<u>Beweis:</u> Will man das nicht direkt auf (B14) zurückführen, so klammert man wieder im Zähler die höchste Potenz n^5 und entsprechend im Nenner n^3 aus:

$$\frac{4n^5 + 16n^3}{7n^3 - 4n^2 + 18} = \frac{n^5\left(4 + 16\frac{1}{n^2}\right)}{n^3\left(7 - 4\frac{1}{n} + 18\frac{1}{n^3}\right)} = n^2 \cdot \frac{4 + 16\frac{1}{n^2}}{7 - 4\frac{1}{n} + 18\frac{1}{n^3}}\,.$$

Der zweite Faktor strebt, wie wir schon wissen, gegen $\frac{4}{7}$; (n^2) ist bestimmt divergent gegen ∞. So liefert (c) die Behauptung. □

3.1.5 CAUCHY–Kriterium

Bei dem Versuch, die Konvergenz einer gegebenen Folge aufzuzeigen, macht es manchmal Schwierigkeiten, daß man die Zahl, die als Grenzwert nachgewiesen werden soll, noch gar nicht kennt.

Für *monotone Folgen* lieferte die Beschränktheit eine einfache Charakterisierung von Konvergenz ohne Bezug auf den Grenzwert.

Ziel dieses Teilabschnitts ist es, für *allgemeine* Folgen ein *Konvergenzkriterium* bereitzustellen, *in dem der Grenzwert nicht vorkommt.* (Die Feststellung etwa, ob ein Paar ein Kind hat, ist ja auch möglich, ohne den Namen oder irgendwelche speziellen Eigenschaften des Kindes zu kennen!) — Eine solche Bedingung liefert der Begriff der CAUCHY-*Folge.*

Wenn man schon weiß, daß eine Folge konvergiert, dann ist es manchmal leichter, *im nachhinein* auch ihren Grenzwert zu finden.

Die Überlegungen dieses Teilabschnitts sind nicht einfach. Wenn Sie damit zu große Schwierigkeiten haben, sollten Sie sich nicht lange damit aufhalten; zeigen Sie dann „*Mut zur Lücke!*“ und gehen einfach zum nächsten Abschnitt über.

Es seien
$\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$,
(a_n) eine $\mathbb{K}$-wertige Folge und α Zahl (aus $\mathbb{K}$).

Die Konvergenz von (a_n) gegen α besagt, daß die Glieder a_n für hinreichend große n beliebig nahe bei α liegen; dann liegen sie aber auch untereinander beliebig nahe zusammen. Diese ‚*Verdichtungseigenschaft*‘ ist gerade für die Konvergenz charakteristisch:

Definition *(a_n) heißt „CAUCHY-Folge“ genau dann, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ so existiert, daß für $n, m \geq N$ stets $|a_n - a_m| < \varepsilon$ gilt.*

Wir beginnen mit zwei einfachen Bemerkungen:

Bemerkung *Jede konvergente Folge ist* CAUCHY-*Folge.*

Beweis: Ist α Grenzwert der Folge (a_n), so existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ derart, daß $|a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq N$ gilt. Für $n, m \geq N$ liefert dann die Dreiecksungleichung

$$|a_n - a_m| = |(a_n - \alpha) + (\alpha - a_m)| \leq |a_n - \alpha| + |\alpha - a_m| < \varepsilon . \qquad \square$$

Bemerkung *Jede* CAUCHY-*Folge ist beschränkt.*

Der Beweis folgt genau der Idee, die schon beim Nachweis der Beschränktheit von konvergenten Folgen ausgeführt wurde: Ist (a_n) eine CAUCHY-Folge, so existiert zu $\varepsilon := 1$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a_m| \leq 1$ für $n, m \geq N$, also (mit $m := N$) für solche n: $|a_n| \leq |a_N| + 1$. Es verbleibt wieder nur, noch die restlichen *endlich vielen* Folgenglieder (im Fall $N \geq 2$) betraglich abzuschätzen. So liefert

$$K := \max\{\,|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N-1}|, |a_N| + 1\,\}$$

eine Schranke für die gesamte Folge: $|a_n| \leq K \quad (n \in \mathbb{N})$. □

Satz (CAUCHY-**Kriterium**) *Jede* CAUCHY-*Folge ist konvergent.*

Wir haben also insgesamt eine *notwendige und hinreichende Bedingung für die Konvergenz einer Folge* gewonnen, in der der Grenzwert nicht vorkommt. Auch für diese Aussage, wonach in $\mathbb{K}$ jede CAUCHY-Folge konvergent ist, sagt man: *„$\mathbb{K}$ ist vollständig“.*

Der Beweis dieses Satzes ist nicht einfach. Ich notiere ihn dennoch, und zwar für die mathematisch besonders interessierten Leser:

Beweis: Es sei (a_n) eine CAUCHY-Folge. Wir betrachten zunächst den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: Mit (a_n) ist auch die durch $b_n := \sup\{a_\nu : \nu \geq n\} \quad (n \in \mathbb{N})$ definierte Folge beschränkt. Es existiert also

$$\lambda := \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad b_n \downarrow \lambda\,.$$

Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $(\lambda \leq)\, b_N \leq \lambda + \varepsilon$ und $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$, falls $n, m \geq N$. Für $k \geq N$ ist dann $a_k \leq b_k \leq b_N \leq \lambda + \varepsilon$. Nach Definition von b_N gibt es ein $n_0 \geq N$ mit $\lambda - \frac{\varepsilon}{2} \leq a_{n_0}$. Damit hat man $\lambda - \varepsilon \leq a_{n_0} - \frac{\varepsilon}{2} < a_k$, zusammen $|a_k - \lambda| \leq \varepsilon$.

Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ zerlegt man a_n für $n \in \mathbb{N}$ in Real- und Imaginärteil: $x_n := \mathfrak{Re}(a_n)$ und $y_n := \mathfrak{Im}(a_n)$. Wegen

$$|x_n - x_m|\,,\ |y_n - y_m| \leq |a_n - a_m| \qquad (n, m \in \mathbb{N})$$

sind (x_n) und (y_n) (reellwertige) CAUCHY-Folgen und so nach dem gerade Gezeigten konvergent; mithin konvergiert (nach [8]) auch die Folge (a_n) . □

Ich erläutere an einem Beispiel, wie man das sinnvoll einsetzen kann:

(B23) Eine Folge (x_n) sei rekursiv definiert durch

$$x_0 := 1 \quad \text{und} \quad x_{n+1} := \frac{1}{1 + x_n} \qquad (n \in \mathbb{N}_0)\,.$$

Dann gilt offenbar $x_n > 0$, damit also $x_n \leq 1$ und weiter $x_n \geq \frac{1}{2}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ kann man folglich abschätzen:

$$\begin{aligned}|x_{n+k+1} - x_{n+1}| &= \left|\frac{1}{1+x_{n+k}} - \frac{1}{1+x_n}\right| = \left|\frac{x_n - x_{n+k}}{(1+x_{n+k})(1+x_n)}\right| \\ &\leq \frac{|x_{n+k} - x_n|}{(1+\frac{1}{2})^2} = \frac{4}{9}\,|x_{n+k} - x_n|\,.\end{aligned}$$

Daraus folgt induktiv sofort:

$$|x_{n+k} - x_n| \leq \left(\tfrac{4}{9}\right)^n |x_k - x_0| \leq \frac{1}{2}\left(\tfrac{4}{9}\right)^n \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)\,.$$

Deshalb ist (x_n) eine CAUCHY-Folge, und so existiert ein $a \in \mathbb{R}$ mit $x_n \longrightarrow a$. Jetzt liest man — für $n \longrightarrow \infty$ — aus der Rekursionsformel ab: $a = \dfrac{1}{1+a}$, also $a^2 + a - 1 = 0$, was — da a ja positiv sein muß — den Grenzwert $a = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ liefert. □

3.2 Reihen

3.2.1 Definitionen und erste Beispiele

Jeder Folge (a_n) (reeller oder komplexer Zahlen) können wir ihre *Summenfolge* (s_n), definiert durch die *„Partialsummen"* $s_n := \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \quad (n \in \mathbb{N})$, zuordnen. Diese Folge dieser Partialsummen bezeichnen wir als *„Reihe"* (der a_ν), die einzelnen a_n auch als *„Summanden"*.

Wir stellen diese Überlegungen hier für Folgen, die bei 1 beginnen, dar. Natürlich können wieder beliebige andere ‚Startindizes' auftreten!

Ist (s_n) konvergent (mit Grenzwert a), dann notieren wir dies als

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \ \textit{konvergent} \quad \text{bzw.} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu = a\,.$$

Wir benutzen dafür auch Sprechweisen wie: *„Die ‚Reihe' $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ ist konvergent (mit Wert a)."* Falls (s_n) divergent ist, sagen wir: *„Die ‚Reihe' $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ ist divergent."* Ist (s_n) *bestimmt divergent*, dann notieren wir auch

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu = \infty \quad \text{bzw.} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu = -\infty\,.$$

Auf die Benennung des Summationsindexes kommt es natürlich auch hier — bei der Notierung von Reihen — wieder nicht an, es ist zum Beispiel:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu = \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_\lambda = \sum_{j=1}^{\infty} a_j = \sum_{\heartsuit=1}^{\infty} a_\heartsuit = \cdots\,.$$

Es wäre abwegig, in einer Reihe eine Summe mit unendlich vielen Summanden zu sehen. Eine solche Auffassung würde jeglichen klaren Sinnes entbehren und leicht zu Trugschlüssen führen. Eine Reihe ist nichts anderes als die Folge der Partialsummen und das entspreche Summensymbol $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ nur eine abkürzende Bezeichnung für „Folge der Partialsummen" (s_n) bzw. — gegebenenfalls — für den „Grenzwert der Folge der Partialsummen" usw.

(B1) Von zentraler Bedeutung für viele Überlegungen ist die Formel für die **„geometrische Reihe"**:

Für $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$ gilt: $$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}}$$

Beweis: Für $n \in \mathbb{N}$ hat man bekanntlich $\sum\limits_{\nu=0}^{n} q^\nu = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$, woraus man unmittelbar die Behauptung abliest; denn hier strebt $|q^{n+1}| = |q|^{n+1}$ gegen 0. □

(B2) Für $\mathbb{R} \ni q \geq 1$ ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \infty$ (also bestimmt divergent).

Beweis: Hier hat man $\sum\limits_{\nu=0}^{n} q^\nu \geq (n+1)\cdot 1 \longrightarrow \infty \quad (n \to \infty)$. □

(B3) $$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1}$$

Beweis: $$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \left\{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right\} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n}$$ $$= 1 - \frac{1}{N+1} \longrightarrow 1 \quad (N \longrightarrow \infty)$$ □

Wegen der besonderen Wichtigkeit soll das CAUCHY–**Kriterium** hier noch einmal **für Reihen** umformuliert werden:

Satz $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ *ist konvergent* $\iff \left\{ \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \ \forall k \in \mathbb{N}_0 \\ \quad \left|\sum\limits_{j=n}^{n+k} a_j\right| < \varepsilon \end{array}\right.$

Lax bedeutet dies: Die (endlichen) Teilsummen werden *beliebig klein*, wenn nur die ‚Startindizes' hinreichend groß sind.

Folgerung $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ *ist konvergent* $\implies a_n \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$

(B4) Für $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| \geq 1$ ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ divergent.

Beweis: nach Folgerung, da (q^n) keine Nullfolge ist. □

Warnung: Umgekehrt folgt aus $a_n \longrightarrow 0$ *nicht* $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j$ konvergent.

Z. B.: $a_n := \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ liefert eine Nullfolge, aber $\sum\limits_{\nu=n}^{2n} \frac{1}{\nu} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$.

Die somit als *divergent* erkannte Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ heißt *„harmonische Reihe"*.

3.2.2 Das Rechnen mit Reihen

Es seien $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $\alpha \in \mathbb{K}$ und (a_n), (b_n) $\mathbb{K}$-wertige Folgen mit $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$, $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} b_\nu$ konvergent:

(1) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \pm b_\nu) \begin{cases} \textit{konvergent} \\ = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \pm \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} b_\nu \end{cases}$

(2) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha\, a_\nu \begin{cases} \textit{konvergent} \\ = \alpha \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \end{cases}$

(3) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu = \sum\limits_{\nu=1}^{N} a_\nu + \sum\limits_{\nu=N+1}^{\infty} a_\nu$

Die Beweise folgen unmittelbar aus den Grundregeln für die Konvergenz von Folgen, angewendet auf die entsprechenden Partialsummen. □

3.2.3 Absolut konvergente Reihen

Ist (a_n) eine Folge (reeller oder komplexer Zahlen), dann heißt $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ *„absolut konvergent"*, wenn die Reihe der Beträge $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu|$ konvergent ist.

Satz *Vor.:* $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ *absolut konvergent*

Beh.: $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ *konvergent und* $\left|\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu\right| \leq \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu|$

Beweis: Aus $\left|\sum\limits_{\nu=n}^{n+k} a_\nu\right| \leq \sum\limits_{\nu=n}^{n+k} |a_\nu|$ folgt mit dem CAUCHY–Kriterium die behauptete Konvergenz. Die ergänzende Abschätzung ergibt sich dann mit: $s_n \longrightarrow s \implies |s_n| \longrightarrow |s|$. □

(B5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ ist ein Beispiel für eine *konvergente Reihe*, die *nicht absolut konvergent* ist.

(Den Konvergenznachweis führen wir in Abschnitt 3.2.5.)

3.2.4 Konvergenzkriterien (für absolute Konvergenz)

Der direkte Konvergenznachweis ist i.a. sehr aufwendig; daher wurde eine große Zahl von *hinreichenden Kriterien* entwickelt. Wir stellen einige der wichtigsten vor. (a_n), (b_n), (c_n) seien dazu wieder Folgen (reeller oder komplexer Zahlen).

(1) Majorantenkriterium

Vor.: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$ *absolut konvergent;* $N \in \mathbb{N}$

$|a_n| \leq |b_n| \quad (n \geq N)$

Beh.: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *(absolut) konvergent*

Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$ heißt in diesem Fall eine *„Majorante"* zur Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

(1') Minorantenkriterium

Vor.: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n| = \infty; \quad N \in \mathbb{N}$

$|b_n| \leq |a_n| \quad (n \geq N)$

Beh.: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n| = \infty$

Hier bezeichnen wir natürlich entsprechend die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$ als *„Minorante"* zur Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Der <u>Beweis</u> von (1) und (1') folgt — da eine isotone Folge genau dann konvergiert, wenn sie (nach oben) beschränkt ist — unmittelbar aus:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|c_n| \text{ konvergent} \iff \left(\sum_{n=1}^{N}|c_n|\right) \text{ beschränkt}$$

$$\iff \exists M \in \mathbb{P}\ \forall N \in \mathbb{N}\ \sum_{n=1}^{N}|c_n| \leq M. \qquad \square$$

(B6) Für $\mathbb{N} \ni k \geq 2$ ist die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}$ konvergent.

<u>Beweis:</u> Für $n > 1$ ist $n(n-1) \leq n^2 \leq n^k$, also $\dfrac{1}{n^k} \leq \dfrac{1}{n(n-1)}$.

Wegen $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \underset{(B3)}{=} 1$ liefert das Majorantenkriterium die behauptete Konvergenz. □

(2) Wurzelkriterium

Vor.: $0 \le q < 1\,, \quad N \in \mathbb{N}, \quad \sqrt[n]{|a_n|} \le q \quad (n \ge N)$

Beh.: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *(absolut) konvergent*

Beweis: Aus $|a_n| \le q^n$ $(n \ge N)$ folgt mit (1) und (B1) die Behauptung. □

(3) Quotientenkriterium

Vor.: $0 \le q < 1\,, \quad N \in \mathbb{N}, \quad |a_{n+1}| \le q \cdot |a_n| \quad (n \ge N)$

Beh.: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *(absolut) konvergent*

Beweis: Für $n > N$ folgt $|a_n| \le q^{n-N}|a_N|$; so erhält man wieder mit (1) und (B1) die Behauptung. □

Ist $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so kann die letzte Voraussetzung als $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \le q$ geschrieben werden, was die Bezeichnung des Kriteriums erklärt.

(B7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ ist (absolut) konvergent.

Beweis:
$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\,\frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \underset{(\text{Bernoulli})}{\le} \frac{1}{1+n\cdot\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \quad (\underset{(3)}{\Longrightarrow} \text{Beh.})$$
□

(B8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$ ist absolut konvergent für $x \in \mathbb{K}$:

Beweis: Ist $x \in \mathbb{K}$ fest, so gilt $\sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{n^n}\right|} = \frac{|x|}{n} \le \frac{1}{2}$ für n hinreichend groß. $(\underset{(2)}{\Longrightarrow}$ Beh.) □

(B9) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ist absolut konvergent für $x \in \mathbb{K}$:

Beweis: Ist $x \in \mathbb{K}$ fest, so gilt $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x|^{n+1}\,n!}{(n+1)!\,|x|^n} = \frac{|x|}{n+1} \le \frac{1}{2}$ für n hinreichend groß (und $x \neq 0$). $(\underset{(3)}{\Longrightarrow}$ Beh.) □

Sollten Sie noch nicht genügend sicher im Umgang mit Reihen sein, ‚rechnen' Sie lieber noch einmal alle Beispiele sorgfältig durch, ehe Sie zum nächsten Teilabschnitt übergehen.

3.2.5 Alternierende Reihen, LEIBNIZ–Kriterium

Hat eine reelle Folge abwechselnd nicht–negative und nicht–positive Glieder, so heißt die zugehörige Reihe *„alternierend"*. Für solche Reihen zeigen wir das

LEIBNIZsche **Kriterium**

Vor.: (a_n) *(reelle) Folge mit* $a_n \downarrow 0$ *(antitone Nullfolge)*

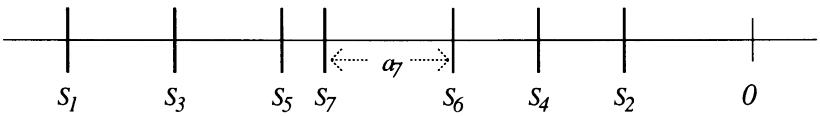
Beh.: 1. $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu}\, a_{\nu} \begin{cases} \textit{ist konvergent} \\ =:\ S \end{cases}$

2. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ *gilt:* $\left| S - \sum\limits_{\nu=1}^{n}(-1)^{\nu}\, a_{\nu} \right| \leq a_{n+1}$.

Bricht man die Berechnung der Reihe nach dem n–ten Glied ab, so ist der dadurch gemachte Fehler — betragsmäßig — also höchstens so groß wie das erste nicht berücksichtigte Glied. Die Fehlerabschätzung liefert so ein für die praktische Rechnung wichtiges *Abbruchkriterium.*

Ich habe das Kriterium so formuliert, daß die Reihe mit einem negativen Glied ‚startet'. Natürlich sind auch — Multiplikation mit -1 ! — alternierende Reihen erfaßt, bei denen das erste Glied positiv ist.

Die ungefähre Idee eines Beweises wird schon erkennbar, wenn man die ersten Partialsummen $S_k := \sum\limits_{\kappa=1}^{k}(-1)^{\kappa}\, a_{\kappa}$ $(k \in \mathbb{N})$ aufzeichnet:



Für die mathematisch stärker interessierten Leser führe ich den Beweis aber noch aus: Man hat: $S_{2(n+1)} - S_{2n} = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0$,

$$S_{2n} = -a_1 + \underbrace{(a_2 - a_3)}_{\geq 0} + \cdots + \underbrace{(a_{2n-2} - a_{2n-1})}_{\geq 0} + \underbrace{a_{2n}}_{\geq 0} \geq -a_1 .$$

Daher existiert $a := \lim\limits_{n \to \infty} S_{2n}$. Entsprechend ergibt sich die Existenz von $b := \lim\limits_{n \to \infty} S_{2n+1}$ aus $S_{2n+3} - S_{2n+1} = -a_{2n+3} + a_{2n+2} \geq 0$ und

$$S_{2n+1} = \underbrace{(-a_1 + a_2)}_{\leq 0} + \cdots + \underbrace{(-a_{2n-1} + a_{2n})}_{\leq 0} - a_{2n+1} \leq -a_{2n+1} \leq 0 .$$

$S_{2n+1} - S_{2n} = -a_{2n+1} \longrightarrow 0$ liefert $a = b =: S$. Nach obigem hat man $S_{2n} \downarrow S \uparrow S_{2n+1}$, insbesondere $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$. Die noch ausstehende

Fehlerabschätzung ergibt sich nun wie folgt:
$|S - S_{2n}| = S_{2n} - S \leq S_{2n} - S_{2n+1} = a_{2n+1}$,
$|S - S_{2n+1}| = S - S_{2n+1} \leq S_{2n+2} - S_{2n+1} = a_{2n+2}$. □

Aus diesem Kriterium liest man zum Beispiel direkt ab:

(B10) *Die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ *ist konvergent.*

Ich erinnere noch einmal daran, daß sie *nicht* absolut konvergent ist.

3.3 Potenzreihen

3.3.1 Definition, Konvergenzradius

Es seien ‖ (a_n) eine Folge (reeller oder komplexer Zahlen) und $x_0 \in \mathbb{K}$.

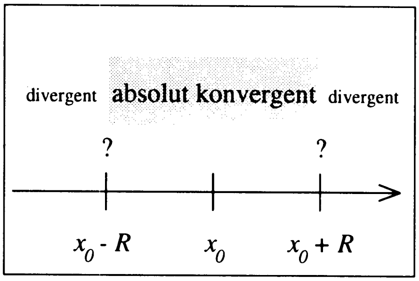
Eine Reihe der Form $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n}$ (für $x \in \mathbb{K}$) heißt *„Potenzreihe"* um den *„Entwicklungspunkt"* x_0 mit *„Koeffizienten"* (a_n).

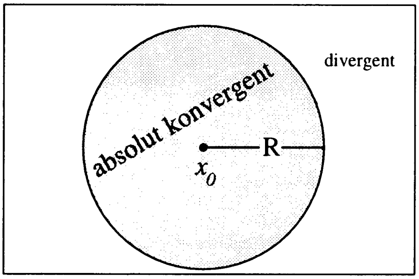
Satz *Entweder ist* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ *für alle* $x \in \mathbb{K}$ *absolut konvergent, oder es existiert ein* $0 \leq R < \infty$ *mit*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \begin{cases} \textit{absolut konvergent} & \textit{für } x \in \mathbb{K} \textit{ mit } |x - x_0| < R\,, \\ \textit{divergent} & \textit{für } x \in \mathbb{K} \textit{ mit } |x - x_0| > R\,. \end{cases}$$

Für positives (endliches) R bedeutet dies

im Reellen **im Komplexen**:





Setzt man im ersten Fall formal $R := \infty$ [1], dann läßt sich der Satz wie folgt umformulieren:

[1] und ergänzt die Anordnung auf $\mathbb{R}$ (bei sinngemäßer Übertragung aller damit gebildeten Notierungsweisen) durch $-\infty < \alpha < \infty$ für $\alpha \in \mathbb{R}$

Satz *Es existiert ein* $0 \le R \le \infty$ *(„**Konvergenzradius**") mit*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \begin{cases} \text{absolut konvergent} & \text{für } x \in \mathbb{K} \text{ mit } |x-x_0| < R\,, \\ \text{divergent} & \text{für } x \in \mathbb{K} \text{ mit } |x-x_0| > R\,. \end{cases}$$

<u>Beweis:</u> <u>1. Fall</u>: $\forall x \in \mathbb{K} \setminus \{x_0\}$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ divergent: $\underline{R := 0}$.

<u>2. Fall</u>: Sei $x^* \in \mathbb{K} \setminus \{x_0\}$ so gewählt, daß $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x^*-x_0)^n$ konvergent ist. Wir setzen $r := |x^*-x_0|$ (>0) und haben dann $a_n(x^*-x_0)^n \longrightarrow 0$, also $|a_n|\,r^n \longrightarrow 0$; insbesondere existiert deshalb ein $M > 0$ derart, daß $|a_n|\,r^n \le M$ $(n \in \mathbb{N})$. Für $x \in \mathbb{K}$ mit $|x-x_0| < r$ gilt somit $\left|a_n(x-x_0)^n\right| = |a_n|\,r^n \left(\frac{|x-x_0|}{r}\right)^n \le M\left(\frac{|x-x_0|}{r}\right)^n$, also $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ absolut konvergent. Wir setzen nun $\underline{R := \infty}$, falls $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ für alle $x \in \mathbb{K}$ konvergent ist $\left(\underset{s.o.}{\Longrightarrow} \forall x \in \mathbb{K} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \text{ absolut konvergent}\right)$, und sonst: $R := \sup\left\{|x-x_0| \,:\, x \in \mathbb{K} \wedge \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \text{ konvergent}\right\}$. □

<u>Anmerkung</u>: Die einzigen Punkte, in denen *keine allgemeine Aussage* über das Konvergenzverhalten gemacht werden können, sind — falls $0 < R < \infty$ — für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ die ‚Randpunkte' $x_0 - R$ und $x_0 + R$. Tatsächlich treten dort alle möglichen Fälle ein (siehe unten!). Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ sind alle Punkte auf dem ‚Rand' des Konvergenzkreises gesondert zu untersuchen.

Zur **Berechnung von R**:

(1) Ist $a_n \neq 0$ *und die Folge* $\left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}\right)$ *konvergent, dann ist*

$$\boxed{R = \lim_{n \longrightarrow \infty} \left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}\right)}\,.$$

(1') Ist $a_n \neq 0$ *und die Folge* $\left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}\right)$ *bestimmt divergent, so ist* $R = \infty$.

(2) Ist die Folge $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$ *konvergent, dann hat man*

$$\boxed{R = \left(\lim_{n \longrightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1}}\,, \quad \text{falls } \lim_{n \longrightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \neq 0\,,$$

und $R = \infty$, *sonst.*

(2') Ist $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$ *bestimmt divergent, so gilt* $R = 0$.

Beweis: (1) $\dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \longrightarrow a \quad (\geq 0)$; für $x \neq x_0$:

$\left|\dfrac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n}\right| = \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\,|x-x_0|$. Falls $a = 0$: $r.S. \longrightarrow \infty$: Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ ist somit nicht konvergent $\big($also $R = 0 \quad (= a)\big)$.

Falls $a \neq 0 : r.S. \longrightarrow \frac{1}{a}\,|x-x_0|$; $\frac{1}{a}\,|x-x_0| < 1 \iff |x-x_0| < a$; nach dem Quotientenkriterium folgt hier: $R = a$.

(1') $\dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \longrightarrow \infty$: für $x \neq x_0$ hat man in diesem Fall

$\left|\dfrac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n}\right| = \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\,|x-x_0| \longrightarrow 0$, also Konvergenz der Potenzreihe und somit $R = \infty$.

(2) und (2') ergeben sich entsprechend mit

$\sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} = \sqrt[n]{|a_n|}\,|x-x_0|$ aus dem Wurzelkriterium. □

Bei den folgenden drei Beispielen sei jeweils $x_0 = 0$ und $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

(B1) $a_n := 1 \quad (n \in \mathbb{N}_0)$: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ hat *Konvergenzradius* 1.

Für $|x| < 1$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$. Für $x = 1, -1$ nicht konvergent.

(B2) $\left.\begin{array}{lll} a_n & := & \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N}) \\ a_0 & := & 0 \end{array}\right\}$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$ hat *Konvergenzradius* 1.

Für $x = 1$ nicht konvergent (harmonische Reihe), für $x = -1$ konvergent (‚alternierende' harmonische Reihe).

(B3) $a_0 := 0,\ a_n := \dfrac{1}{n^2} \quad (n \in \mathbb{N})$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} x^n$ *hat Konvergenzradius* 1.

Für $x = 1, -1$ konvergent, da $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ Majorante.

3.3.2 Die Funktionen exp, sin, cos, Sin, Cos — Teil I

Für $x \in \mathbb{C}$ ist nach (B9) aus Abschnitt 3.2 die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ absolut konvergent. Wir definieren damit:

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos(x) := \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Mit der ersten Reihe sind natürlich auch die beiden anderen — nach dem Majorantenkriterium — (absolut) konvergent.

Diese drei Funktionen — *„Exponentialfunktion"*, *„Sinus"* und *„Cosinus"* — gehören zu den wichtigsten Funktionen der Mathematik und ihrer Anwendungen. Die Definition über die Reihe führt rasch zu den grundlegenden Eigenschaften dieser Funktionen. Erst später stellen wir den Bezug zu den ‚geometrischen Charakterisierungen' und anderen — vom Schulunterricht her bekannten — Definitionsmöglichkeiten her. sin und cos sprechen wir auch als *„trigonometrische Funktionen"* an; sie sind für die Beschreibung von Schwingungsvorgängen unentbehrlich.

Mit einem Satz über Reihenmultiplikation kann man leicht die *Funktionalgleichung der Exponentialfunktion*

$$\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$$

und daraus die Additionstheoreme für sin und cos herleiten. Daraus folgen dann ‚alle' anderen bekannten Eigenschaften. Wir beweisen dies jedoch erst — noch einfacher — in dem Kapitel über differenzierbare Abbildungen. Hier begnügen wir uns daher mit einigen einfachen Grundeigenschaften dieser Funktionen:

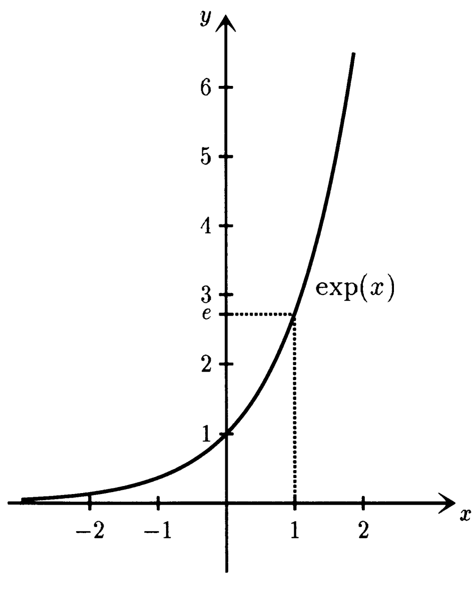
Nach (B19) aus 3.1.3 hat man zunächst:

(1) $e = \exp(1)$.

Unmittelbar aus der Definition (von exp) liest man schon ab:

(2) $\exp(0) = 1$ *und* $\exp$ *in* $[0, \infty[$ *streng monoton wachsend.*

Der *Graph der Exponentialfunktion* sei schon hier skizziert:



Entsprechend ergeben die Definitionen der trigonometrischen Funktionen unmittelbar:

(3) $\sin(0) = 0$ *und* $\sin : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *ungerade,*

(4) $\cos(0) = 1$ *und* $\cos : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *gerade.*

Mit Hilfe der Exponentialfunktion können die sogenannten *„Hyperbelfunktionen"* definiert werden, die einerseits in der Technik (z.B. Kettenlinie, speziell Hochspannungsleitungen) Bedeutung haben, andererseits u.a. für die Bestimmung von Stammfunktionen (vgl. Abschnitt 5.1) nützlich sind:
Für $x \in \mathbb{C}$:

$$\operatorname{Sin}(x) := \frac{1}{2}\big(\exp(x) - \exp(-x)\big)$$

„hyperbolischer Sinus", „Sinus hyperbolicus",

$$\operatorname{Cos}(x) := \frac{1}{2}\big(\exp(x) + \exp(-x)\big)$$

„hyperbolischer Cosinus", „Cosinus hyperbolicus".

Andere Schreibweisen sind **sinh** und **𝔖𝔦𝔫** bzw. **cosh** und **ℭ𝔬𝔰**.

Unmittelbare Folgerungen aus den Definitionen sind wieder:

(5) $\operatorname{Sin}(0) = 0$ *und* $\operatorname{Sin} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *ungerade,*

(6) $\operatorname{Cos}(0) = 1$ *und* $\operatorname{Cos} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *gerade.*

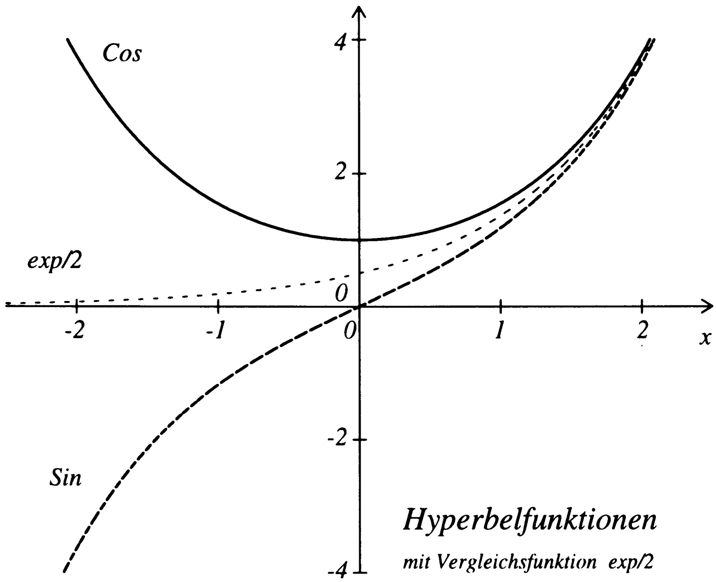
Die folgende Aussage zeigt, daß die Hyperbelfunktionen die ‚Parameterdarstellung' einer gleichseitigen Einheitshyperbel liefern, und erklärt damit die Bezeichnung dieser Funktionen:

(7) $\big(\operatorname{Cos}(x)\big)^2 - \big(\operatorname{Sin}(x)\big)^2 = 1$

<u>Beweis:</u> $l.S. = \big(\operatorname{Cos}(x) - \operatorname{Sin}(x)\big)\big(\operatorname{Cos}(x) + \operatorname{Sin}(x)\big) = \exp(-x)\exp(x) = \exp(0) = 1$ □

Wir haben bei diesem Beweis die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion, die wir erst in 4.6 beweisen werden, schon vorweg benutzt, um hier zumindest schon den Namen ‚Hyperbelfunktionen' zu begründen.

Der Verlauf der Hyperbelfunktionen wird besonders deutlich, wenn man die beiden Graphen im Vergleich zu dem der Funktion $\frac{1}{2}\exp$ aufzeichnet:



3.4 Grenzwerte von Funktionen, Stetigkeit

3.4.1 Grenzwerte von Funktionen

Der Grenzwertbegriff, den wir speziell für Folgen und Reihen schon kennengelernt haben, ist — in seiner allgemeinen Fassung — wohl der wichtigste Begriff der Analysis, aber gewiß auch nicht der einfachste:

<u>Annahmen:</u>
$\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $\ell \in \mathbb{K}$, $x_0 \in \mathbb{K}$,
$D \subset \mathbb{K}$, $f : D \longrightarrow \mathbb{K}$;
es existieren $x_0 \neq x_n \in D$ $(n \in \mathbb{N})$ mit $x_n \longrightarrow x_0$.

Die Bedingung der letzten Zeile bedeutet, daß x_0 aus dem Definitionsbereich D heraus durch von x_0 verschiedene Punkte beliebig gut approximierbar ist, oder laxer ausgedrückt: Man kommt mit Punkten aus D beliebig nahe an x_0 heran. Dafür wird oft auch gesagt: x_0 ist *„Häufungspunkt zu D“*. Wir wollen das Verhalten der Funktion f bei Annäherung an die Stelle x_0 — unabhängig von dem Wert, den f eventuell in x_0 hat — beschreiben. Dazu muß man mit Punkten aus dem Definitionsbereich D überhaupt erst einmal nahe an x_0 herankommen.

Definition $\boxed{f(x) \longrightarrow \ell \quad (x \to x_0)}$ $:\Longleftrightarrow$ $\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell}$ $:\Longleftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in D\ \left[0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon\right]$$

Wir sagen dafür auch $f(x)$ *„konvergiert"* oder *„strebt"* gegen ℓ, wenn x gegen x_0 strebt, und sprechen von ℓ als *„Grenzwert"* von f für den Grenzübergang x gegen x_0.

Mit den in Abschnitt 1.10 eingeführten Umgebungen gilt offenbar:

Bemerkung $f(x) \longrightarrow \ell \quad (x \to x_0) \quad \Longleftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in D \setminus \{x_0\} \; \left[x \in \mathcal{U}_{x_0}^{\delta} \Longrightarrow f(x) \in \mathcal{U}_{\ell}^{\varepsilon} \right]$$

Wir zeigen als erstes, daß man diese neue Begriffsbildung auf die Konvergenz von Folgen zurückführen und damit dann alle für Folgen schon gezeigten Ergebnisse — ohne erneuten Beweis — einfach übertragen kann:

(1) Satz *$f(x) \longrightarrow \ell \; (x \to x_0)$ gilt genau dann, wenn für jede Folge (x_n) mit $x_n \in D \setminus \{x_0\}$ $(n \in I\!N)$ aus $x_n \longrightarrow x_0 \quad (n \to \infty)$ für die Folge der Bilder $f(x_n) \longrightarrow \ell \quad (n \to \infty)$ folgt.*

Den Beweis dieses Satzes stelle ich etwas zurück und notiere zuerst die angesprochenen Folgerungen aus den Ergebnissen der Teilabschnitte 3.1.2 und 3.1.3 unter den zusätzlichen

Annahmen: $\left\| \begin{array}{l} f(x) \longrightarrow \ell \quad (x \to x_0), \quad \alpha \in I\!K \quad \text{und} \\ g(x) \longrightarrow k \quad (x \to x_0) \quad \text{für } g: D \longrightarrow I\!K \text{ und ein } k \in I\!K \end{array} \right.$

als **Grundregeln** für das Rechnen mit Grenzwerten von Funktionen:

[1] *Ein Grenzwert ist — falls er existiert — eindeutig.*

[2] $\lim\limits_{x \to x_0} (f + g)(x) = \ell + k = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

[3] $\lim\limits_{x \to x_0} (f - g)(x) = \ell - k = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) - \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

[4] $\lim\limits_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = \ell \cdot k = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

[5] $\lim\limits_{x \to x_0} (\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot \ell = \alpha \cdot \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

[6] $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = |\ell| = |\lim\limits_{x \to x_0} f(x)|$

[7] *Ist $k \neq 0$ und $g(x) \neq 0$ für $x \in D \setminus \{x_0\}$, so gilt noch:*

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{\ell}{k} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} .$$

[8] $f(x) \leq g(x) \quad (x \in D) \quad \Longrightarrow \quad \ell \leq k$, *also* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \leq \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

Zu [7]: Aus $k \neq 0$ folgt schon $g(x) \neq 0$ für x ‚nahe bei' x_0, genauer für $x \in D$ mit $0 < |x - x_0| < \delta$ für ein geeignetes $\delta > 0$, und das reicht natürlich für die Grenzwertaussage.

Zu [8]: Entsprechend genügt hier die Abschätzung $f(x) \leq g(x)$ für x ‚nahe bei' x_0.

Ich zeige beispielhaft nur, wie [2] mit dem obigen Satz aus der entsprechenden Aussage für Folgenkonvergenz folgt; die anderen Aussagen ergeben sich mit analoger Argumentation:

Beweis: Ist (x_n) eine beliebige Folge mit Elementen aus $D \setminus \{x_0\}$ und $x_n \longrightarrow x_0$ $(n \to \infty)$, so erhält man $f(x_n) \longrightarrow \ell$ und $g(x_n) \longrightarrow k$ nach (1). Dann gilt — nach der entsprechenden Aussage für Folgen — $(f+g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n) \longrightarrow \ell + k$, also — wieder nach (1) —: $(f+g)(x) \longrightarrow \ell + k$ für $x \to x_0$. □

Nun kommen wir zu dem Beweis von (1): In der einen Richtung ist auszugehen von $f(x) \longrightarrow \ell$ $(x \to x_0)$. Zu $\varepsilon > 0$ hat man also ein $\delta > 0$ derart, daß $|f(x) - \ell| < \varepsilon$, falls $x \in D$ und $0 < |x - x_0| < \delta$. Für eine Folge (x_n) mit $x_n \in D \setminus \{x_0\}$ $(n \in \mathbb{N})$ und $x_n \longrightarrow x_0$ $(n \to \infty)$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x_0| < \delta$ für $n \geq N$. Für solche n ist demnach $|f(x_n) - \ell| < \varepsilon$; das zeigt: $f(x_n) \longrightarrow \ell$. Die andere Richtung zeigen wir *indirekt*: Wäre die Behauptung falsch, so hätte man — Sie erinnern sich hoffentlich daran, wie solche Aussagen negiert werden; sonst müßten Sie noch einmal in Abschnitt 1.2 nachsehen! — ein $\varepsilon > 0$ so, daß zu jedem $\delta > 0$ ein $x \in D$ mit $0 < |x - x_0| < \delta$ und $|f(x) - \ell| \geq \varepsilon$ existierte. Zu einem solchen ε kann dann zu $\delta := \frac{1}{n}$ ein $x_n \in D$ mit $0 < |x_n - x_0| < \delta$ und $|f(x_n) - \ell| \geq \varepsilon$ gewählt werden. Das gibt $x_n \longrightarrow x_0$ und $f(x_n) \not\longrightarrow \ell$ Widerspruch! □

Bisher haben wir nur den Fall behandelt, daß x_0 und ℓ zu $\mathbb{K}$ gehören. Für beide wollen wir jetzt noch — im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ — allgemeiner den Fall bestimmter Divergenz mit zulassen. Um eine einheitliche Definition zu erhalten und knappe Notierungsweisen zu ermöglichen, definieren wir noch *ε-Umgebungen von ∞ und von $-\infty$*:

Für $\varepsilon > 0$ seien:
$$\begin{aligned} \mathcal{U}^{\varepsilon}_{\infty} &:= \left\{x \in \mathbb{R} : x > \tfrac{1}{\varepsilon}\right\} = \left]\tfrac{1}{\varepsilon}, \infty\right[\quad \text{und} \\ \mathcal{U}^{\varepsilon}_{-\infty} &:= \left\{x \in \mathbb{R} : x < -\tfrac{1}{\varepsilon}\right\} = \left]-\infty, -\tfrac{1}{\varepsilon}\right[. \end{aligned}$$

Die Definition ist in dieser Weise sinnvoll; denn wenn ε klein ist, dann ist $\frac{1}{\varepsilon}$ groß, und für eine Folge (x_n) in $\mathbb{R}$ gilt beispielsweise:

$$x_n \longrightarrow \infty \iff \forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N \;\; x_n \in \mathcal{U}^{\varepsilon}_{\infty} .$$

Wir machen für die folgenden Überlegungen die

Annahmen:
$$\left\| \begin{array}{l} D \subset \mathbb{R}, \quad f : D \longrightarrow \mathbb{R}, \\ x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\} \quad \text{und} \quad \ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}; \\ \text{es existieren } x_0 \neq x_n \in D \quad (n \in \mathbb{N}) \text{ mit } x_n \longrightarrow x_0 . \end{array} \right.$$

Mit den gerade eingeführten Umgebungen lautet nun unsere allgemeine

Definition $\boxed{f(x) \longrightarrow \ell \quad (x \to x_0)}$ $:\Longleftrightarrow$ $\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell}$ $:\Longleftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in D \setminus \{x_0\} \; \left[x \in \mathcal{U}_{x_0}^{\delta} \Longrightarrow f(x) \in \mathcal{U}_{\ell}^{\varepsilon} \right]$$

Auch dieser allgemeine Fall läßt sich auf Konvergenz — bzw. bestimmte Divergenz — von Folgen zurückführen:

(2) Satz *$f(x) \longrightarrow \ell$ $(x \to x_0)$ gilt genau dann, wenn für jede Folge (x_n) mit $x_n \in D \setminus \{x_0\}$ $(n \in \mathbb{N})$ aus $x_n \longrightarrow x_0$ $(n \to \infty)$ für die Folge der Bilder $f(x_n) \longrightarrow \ell$ $(n \to \infty)$ folgt.*

Der Beweis kann von dem zu (1) direkt übernommen werden, wenn nur immer $x \in \mathcal{U}_{x_0}^{\delta}$ statt $|x - x_0| < \delta$ usw. geschrieben wird. □

Bei beliebigem x_0 gelten zunächst für ℓ und k aus $\mathbb{R}$ die obigen **Regeln [1] bis [8]** *unverändert.*

Für das Rechnen mit ‚uneigentlichen' Grenzwerten gelten — auch bei beliebigem x_0! — zudem wieder die in suggestiver Kurzform notierten Regeln:

$$\boxed{\frac{1}{\infty} = 0}\,, \quad \boxed{\frac{1}{-\infty} = 0}\,, \quad \boxed{\frac{1}{0+} = \infty} \quad \text{und} \quad \boxed{\frac{1}{0-} = -\infty}\,.$$

Diese Kurzformen will ich übungshalber noch einmal ‚übersetzen':

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \quad \wedge \quad f(x) > 0 \;\; (x \in D) \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \infty$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \quad \wedge \quad f(x) < 0 \;\; (x \in D) \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$$

Auch hier genügt es natürlich wieder, daß die Vorzeichen-Bedingungen nur im Durchschnitt von D mit einer geeigneten Umgebung von x_0 erfüllt sind.

Des weiteren hat man:

Für $a > 0$ $\quad \boxed{a \cdot \infty = \infty}\,, \quad \boxed{a \cdot (-\infty) = -\infty}\,,$

Für $a < 0$ $\quad \boxed{a \cdot \infty = -\infty}\,, \quad \boxed{a \cdot (-\infty) = \infty}\,,$

$\boxed{\infty \cdot \infty = \infty}\,, \quad \boxed{(-\infty) \cdot (-\infty) = \infty}\,,$

$\boxed{\infty \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \infty = -\infty}\,,$

Für $a \in \mathbb{R}$ $\quad \boxed{a + \infty = \infty + a = \infty}\,, \quad \boxed{a + (-\infty) = -\infty + a = -\infty}\,.$

Zum Beispiel bedeutet die erste Aussage — aber das ist Ihnen ja schon von den entsprechenden Übungen zu 3.1.4 vertraut, oder doch noch nicht ?? — :

Ist noch $g : D \longrightarrow I\!R$, so gilt:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \in I\!P \quad \wedge \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = \infty$$

Schon bei den Beispielen zur Folgenkonvergenz hatten wir gesehen, daß es bei *rationalen Folgen* für Konvergenzüberlegungen nur auf die *Terme mit den höchsten Potenzen im Zähler und im Nenner* ankommt. Eine entsprechende Aussage gilt auch bei *rationalen Funktionen* — für die Grenzübergänge $x \longrightarrow \infty$ und $x \longrightarrow -\infty$ — und dies soll im folgenden Beispiel, das Sie sich unbedingt gut einprägen müssen, präzisiert werden:

(B1) *Es seien* $n, m \in I\!N_0$, $a_\nu \in I\!R$ $(\nu = 0, \ldots, n)$, $a_n \neq 0$,
$b_\mu \in I\!R$ $(\mu = 0, \ldots, m)$, $b_m \neq 0$ *und*

$$f(x) := \frac{\sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu}{\sum\limits_{\mu=0}^{m} b_\mu x^\mu} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

für $x \in D := \left\{ x \in I\!R : \sum\limits_{\mu=0}^{m} b_\mu x^\mu \neq 0 \right\}$. *Dann gilt:*

$$\boxed{\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \begin{cases} \frac{a_n}{b_n}, & \textit{falls } n = m \\ 0, & \textit{falls } m > n \\ \infty, & \textit{falls } m < n \textit{ und } \operatorname{sgn}(a_n) = \operatorname{sgn}(b_m) \\ -\infty, & \textit{falls } m < n \textit{ und } \operatorname{sgn}(a_n) \neq \operatorname{sgn}(b_m) \end{cases}}$$

<u>Beweis:</u> Hier klammert man wieder in Nenner und Zähler die höchsten Potenzen von x aus und erhält so für $0 \neq x \in D$

$$f(x) = \frac{x^n \left(a_n + a_{n-1} \frac{1}{x} + \cdots + a_1 \frac{1}{x^{n-1}} + a_0 \frac{1}{x^n} \right)}{x^m \left(b_m + b_{m-1} \frac{1}{x} + \cdots + b_1 \frac{1}{x^{m-1}} + b_0 \frac{1}{x^m} \right)} .$$

Die Terme mit Potenzen von $\frac{1}{x}$ streben gegen 0 und daher der Ausdruck in der Klammer im Zähler gegen a_n , der im Nenner gegen b_m , und daraus liest man — mit den gerade bereitgestellten Regeln — alles ab. □

Ich verzichte darauf, dies entsprechend für den Übergang $x \longrightarrow -\infty$ gesondert zu formulieren.

Ganz kurz betrachten wir noch:

Einseitige Grenzwerte

Unter der <u>Annahme</u>, daß zu einem $x_0 \in I\!R$ eine Folge (x_n) in D mit $x_n < x_0$

und $x_n \longrightarrow x_0 \quad (n \to \infty)$ existiert (x_0 muß von links aus durch Elemente von D approximierbar sein), führen wir als erstes *„linksseitige Grenzwerte"* ein:

Definition $\boxed{f(x) \longrightarrow \ell \quad (x_0 > x \to x_0)}$ $:\Longleftrightarrow$ $\boxed{\lim\limits_{x_0 > x \to x_0} f(x) = \ell}$

$$:\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in D\, \left[0 < x_0 - x < \delta \Longrightarrow f(x) \in \mathcal{U}_\ell^\varepsilon\right]$$

Hierbei ist $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ zugelassen.

Statt $\lim\limits_{x_0 > x \to x_0} f(x)$ wird auch $\boxed{\lim\limits_{x \to x_0 -} f(x)}$ geschrieben.

Natürlich hat man ganz analog — Übergang $x \longmapsto -x$, d.h. Spiegelung an der y-Achse — unter der Voraussetzung, daß nun eine Folge (x_n) in D mit $x_n > x_0$ und $x_n \longrightarrow x_0 \quad (n \to \infty)$ existiert, *„rechtsseitige Grenzwerte"*:

Definition $\boxed{f(x) \longrightarrow \ell \quad (x_0 < x \to x_0)}$ $:\Longleftrightarrow$ $\boxed{\lim\limits_{x_0 < x \to x_0} f(x) = \ell}$

$$:\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in D\, \left[0 < x - x_0 < \delta \Longrightarrow f(x) \in \mathcal{U}_\ell^\varepsilon\right]$$

Hier wird entsprechend statt $\lim\limits_{x_0 < x \to x_0} f(x)$ auch $\boxed{\lim\limits_{x \to x_0 +} f(x)}$ notiert.

(B2) $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$

Es ist $f(0) = 0$, $\lim\limits_{0 < x \to 0} f(x) = 1$ und $\lim\limits_{0 > x \to 0} f(x) = -1$.

(B3) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1} \qquad \left(x \in D := \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}\right)$

$f(1)$ ist gar nicht erklärt! $\lim\limits_{x \to 1+} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to 1-} f(x) = -\infty$.

Ich führe den <u>Beweis</u> für die erste der beiden Grenzwertaussagen beispielhaft einmal ganz ausführlich aus: Für $x \in D$ kann

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x-1} \cdot \frac{1}{x+1}$$

geschrieben werden. Strebt nun x von rechts $(x > 1)$ gegen 1, so strebt $x - 1$ von rechts gegen 0, also $\dfrac{1}{x-1}$ gegen ∞ nach der Regel $\dfrac{1}{0+} = \infty$. Andererseits konvergiert $\dfrac{1}{x+1}$ gegen $\frac{1}{2}$. So folgt $f(x) \longrightarrow \infty$ nach der Regel $a \cdot \infty = \infty$ für $a > 0$. □

Der Beweis für die andere Grenzwertaussage ergibt sich völlig analog. Prägen Sie sich diese Argumentationsweise gut ein und vergessen Sie die zugehörigen Übungsaufgaben nicht!

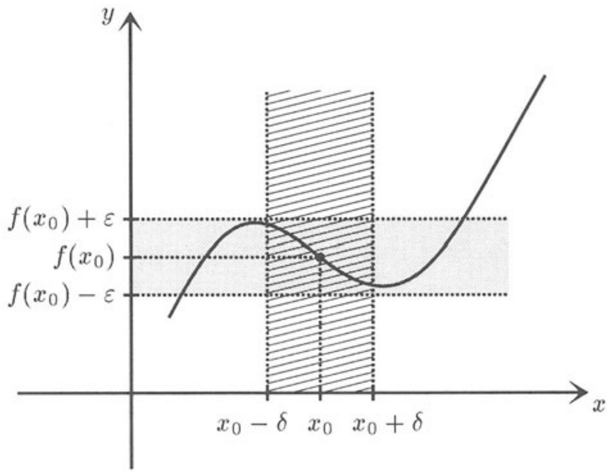
3.4.2 Stetigkeit, Zwischenwertsatz

Annahmen: $\|$ $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $D \subset \mathbb{K}$, $f, g : D \longrightarrow \mathbb{K}$ und $x_0 \in D$

Definition *f in x_0 stetig* $:\Longleftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in D \quad \big[|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \big]$$

Diesen wichtigen Sachverhalt sollten Sie sich an Hand der folgenden Zeichnung — für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ — ausgiebig klarmachen:



Die Definition der Stetigkeit sieht so ähnlich aus wie die des Grenzwertes von Funktionen. Der entscheidende Unterschied ist jedoch, daß hier x_0 zu D gehören muß und ℓ nicht irgendetwas, sondern gerade der Funktionswert $f(x_0)$ an der Stelle x_0 ist. Offenbar hat man die:

Bemerkung *Ist x_0 Häufungspunkt zu D, dann gilt:*

$$f \text{ in } x_0 \text{ stetig} \iff f(x) \longrightarrow f(x_0) \quad (x \longrightarrow x_0)\,.$$

Zur Vereinfachung machen wir für die folgenden Stetigkeitsbetrachtungen die — nicht erforderliche — zusätzliche Annahme, daß x_0 Häufungspunkt zu D ist; dies ist in ‚fast allen' vorkommenden Fällen ohnehin gegeben. Mit den Grundregeln für das Rechnen mit Grenzwerten von Funktionen hat man so über die obige Bemerkung sofort:

Satz *(1)* f, g *stetig in* $x_0 \implies f+g,\; f-g,\; f\cdot g$ *stetig in* x_0

(2) f *stetig in* $x_0 \;\wedge\; \alpha \in \mathbb{K} \implies \alpha \cdot f$ *stetig in* x_0

(3) f, g *stetig in* x_0 *und* $g(x_0) \neq 0 \implies \frac{f}{g}$ *stetig in* x_0

Zu (3) beachten wir: Ist g in x_0 stetig und $g(x_0) \neq 0$, dann gibt es ein

$\delta > 0$ so, daß $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt. Denn zu $\varepsilon := |g(x_0)| > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit $\big|g(x) - g(x_0)\big| < \varepsilon$ für $x \in D \cap \mathcal{U}^{\delta}_{x_0}$; für solche x ist $g(x) \neq 0$. Die Funktion $\frac{f}{g}$ ist daher zumindest in $D \cap \mathcal{U}^{\delta}_{x_0}$ definiert.

Das ganz einfache <u>Beweisverfahren</u> verdeutliche ich exemplarisch an der ersten Behauptung von (1): Die Voraussetzung bedeutet nach der vorangehenden Bemerkung gerade

$$f(x) \longrightarrow f(x_0) \quad \wedge \quad g(x) \longrightarrow g(x_0) \qquad (x \longrightarrow x_0)\,;$$

also gilt nach der Grundregel [2]

$$(f+g)(x) \;=\; f(x)+g(x) \;\longrightarrow\; f(x_0)+g(x_0) \;=\; (f+g)(x_0)\,,$$

was — wieder nach der gleichen Bemerkung — die Stetigkeit von $f+g$ im Punkte x_0 liefert. □

Ergänzend benötigen wir oft noch die in gleicher Weise aus Grundregel [6] folgende:

Bemerkung *(4)* f *stetig in* $x_0 \implies |f|$ *stetig in* x_0

Hierbei ist natürlich mit $|f|$ die Funktion $f: \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & [0,\infty[\\ \cup\!\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\!\shortmid \\ x & \longmapsto & |f(x)| \end{array}$ gemeint.

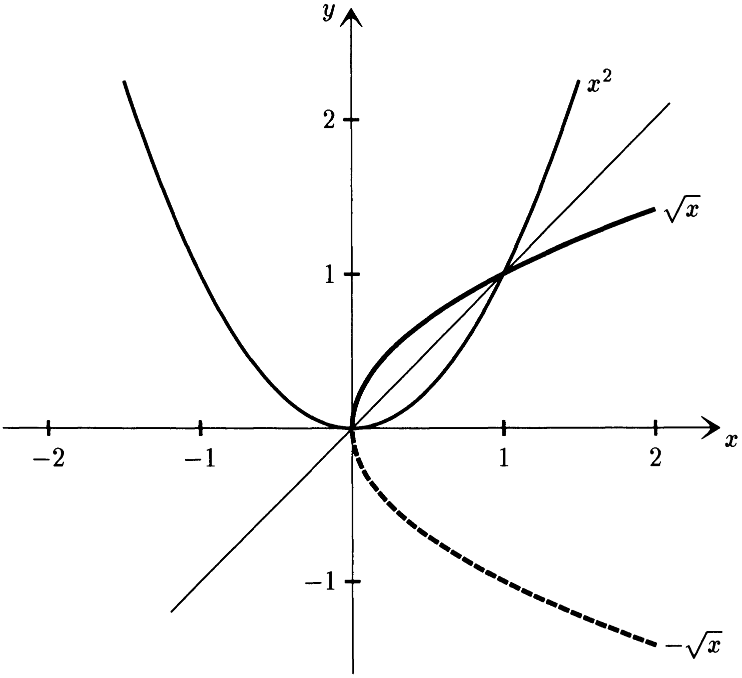
Definition *Für $\emptyset \neq T \subset D$ heißt f „in T stetig“ genau dann, wenn f in jedem Punkt von T stetig ist, und „stetig“ oder auch „global stetig“ genau dann, wenn f im ganzen Definitionsbereich D stetig ist.*

(B4) Die durch $\boxed{f(x) := \sqrt{x}}$ für $x \in D := [0,\infty[$ definierte „*Wurzelfunktion*“ ist stetig.

Dies kann nicht — wie sonst meist — einfach mit den gerade bereitgestellten Regeln (1) bis (4) gezeigt werden, sondern erfordert einen ‚direkten‘ Nachweis:

Für $x_0 = 0$ leistet $\delta := \varepsilon^2$ zu $\varepsilon > 0$ das Gewünschte; denn $|x - x_0| = x < \varepsilon^2$ liefert $\big|f(x) - f(x_0)\big| = \big|\sqrt{x} - \sqrt{0}\big| = \sqrt{x} < \varepsilon$.
Für $x_0 \neq 0$ ist $\big|f(x) - f(x_0)\big| = \big|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}\big| = \dfrac{|x - x_0|}{\big|\sqrt{x} + \sqrt{x_0}\big|} \leq \dfrac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}}$. Hier ergibt also $\delta := \sqrt{x_0}\cdot\varepsilon$ die gewünschte Implikation:
$|x - x_0| < \delta \implies \big|f(x) - f(x_0)\big| < \varepsilon$. □

Die folgende Abbildung zeigt neben dem *Graphen der Wurzelfunktion* noch die Graphen der beiden — damit eng verbundenen — Funktionen $\mathbb{R} \ni x \longmapsto x^2$ und $[0, \infty[\ni x \longmapsto -\sqrt{x}$:



Die Beschreibung des Grenzwertes von Funktionen durch Folgenkonvergenz in Satz (1) liefert mit der vorletzten Bemerkung die *Äquivalenz von Stetigkeit und „Folgenstetigkeit"*:

(2) Satz *f ist an der Stelle x_0 genau dann stetig, wenn für jede Folge (x_n) mit $x_n \in D$ $(n \in \mathbb{N})$ aus $x_n \longrightarrow x_0$ $(n \to \infty)$ für die Folge $\big(f(x_n)\big)$ der Bilder $f(x_n) \longrightarrow f(x_0)$ $(n \to \infty)$ folgt.*

Dieser Satz ist in *beiden* Richtungen nützlich: Weiß man schon etwas über entsprechende Folgenkonvergenz, so kann man Stetigkeit erschließen. Hat man andererseits die Stetigkeit einer Funktion, so erhält man Konvergenzaussagen für passende Folgen.

Den folgenden wichtigen Satz, daß eine stetige Funktion auf einem abgeschlossenen beschränkten Intervall immer ihr Maximum und Minimum annimmt (was natürlich heißen soll, daß der Wertebereich ein Maximum und Minimum hat), will ich nicht beweisen. Ein Beweis läßt sich auf verschiedene Weisen zwar relativ kurz führen, dürfte aber für den angesprochenen Leserkreis entbehrlich sein. Man findet ihn in jedem Analysisbuch für Mathematiker, so zum Beispiel bei KÖNIGSBERGER und WALTER.

(3) Satz über Annahme von Extremwerten

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ *mit* $a < b$ *und* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig.*
Dann existieren Stellen u, v *in* $[a, b]$ *mit*

$$\begin{aligned} f(u) &= \min\{f(x) : x \in [a, b]\} \qquad \textit{und} \\ f(v) &= \max\{f(x) : x \in [a, b]\}. \end{aligned}$$

Insbesondere ist f *also beschränkt.*

Zu den wichtigsten Sätzen über reellwertige stetige Funktionen gehört die Aussage, daß solche Funktionen alle ‚Zwischenwerte' annehmen. Dies präzisiert und trifft den Kern der oft zu lesenden sehr vagen Beschreibung stetiger Funktionen, daß man diese ‚ohne abzusetzen zeichnen kann':

Zwischenwertsatz (ZWS)

Vor.: $a, b \in \mathbb{R}$ *mit* $a < b$ *und* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig.*

Beh.: Liegt t *zwischen* $f(a)$ *und* $f(b)$, *dann existiert ein* $x \in [a, b]$ *mit* $f(x) = t$.

Beweis: (konstruktiv!) Œ sei $f(a) < t < f(b)$. (Hat man jeweils ‚>' statt ‚<', so wendet man die gewonnene Aussage auf die Funktion $-f$ an.) Zu $a_0 := a$ und $b_0 := b$ seien a_n, b_n und c_n wie folgt rekursiv definiert: $c_n := \frac{1}{2}(a_n + b_n)$; ist $f(c_n) = t$, so ist man schon fertig. Im anderen Fall

setzt man $\begin{cases} a_{n+1} := a_n, & b_{n+1} := c_n, \quad \text{falls } f(c_n) > t \\ a_{n+1} := c_n, & b_{n+1} := b_n, \quad \text{falls } f(c_n) < t. \end{cases}$

Wenn niemals $f(c_n) = t$ auftritt, also das Verfahren nicht schon nach endlich vielen Schritten zu einer Lösung führt, erhält man so monotone beschränkte Folgen, für die gilt:

$a_n \uparrow u$, $b_n \downarrow v$ für geeignete $u, v \in [a, b]$. Wegen $|a_n - b_n| = b_n - a_n = 2^{-n}(b - a) \longrightarrow 0$ ist $u = v$. Zusammen gilt daher $f(u) = f(v) \longleftarrow f(b_n) > t > f(a_n) \longrightarrow f(u)$, also $f(u) = t$. □

Haben $f(a)$ und $f(b)$ verschiedene Vorzeichen, dann sichert dieser Satz die *Existenz einer Nullstelle* von f. Der Beweis — basierend auf der einfachen Idee der fortgesetzten Halbierung des Intervalls — gibt dabei ein konstruktives, leicht zu programmierendes und numerisch brauchbares Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle.

3.4.3 Unstetigkeiten

Annahmen: ‖ $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$,
‖ $D \ni x_0$ Häufungspunkt zu D

Ist f in x_0 nicht stetig, man sagt dann *„unstetig"* (in x_0), so kann das verschiedene Gründe haben:

1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ *existiert in* $\mathbb{R}$, ist aber *verschieden von* $f(x_0)$.

   Eine solche Stelle heißt *„hebbare Unstetigkeitsstelle"* oder *„Einsiedlerpunkt"*. Durch Abänderung des Funktionswertes an der Stelle x_0 zu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ wird die Funktion stetig in x_0, die Unstetigkeit an dieser Stelle wird so ‚behoben'. Man spricht dann von *„stetiger Ergänzung"*.

2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \in \{\infty, -\infty\}$.

   Hier ist natürlich eine stetige (reellwertige) Ergänzung *nicht* möglich.

3. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ *existiert nicht* in $\mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$.

   In diesem Fall können wir noch unterteilen in die beiden Fälle:

   (a) Es existieren die beiden einseitigen Grenzwerte $\lim\limits_{x_0 > x \to x_0} f(x)$ und $\lim\limits_{x_0 < x \to x_0} f(x)$ in $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$; diese sind aber verschieden. Hier spricht man von einer (endlichen oder unendlichen) *„Sprungstelle"*.

   (b) Mindestens einer der beiden einseitigen Grenzwerte $\lim\limits_{x_0 > x \to x_0} f(x)$ und $\lim\limits_{x_0 < x \to x_0} f(x)$ existiert nicht, selbst wenn Werte in $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ zugelassen sind.

Oft werden noch ‚Lücken' fälschlicherweise als Unstetigkeiten bezeichnet.

$$\mathbb{R} \ni a \text{ heißt } \textit{„Lücke"} :\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Es existieren } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ mit } \alpha < \beta, \\ a \in \,]\alpha, \beta[\, \setminus D, \ \ ]\alpha, \beta[\, \setminus \{a\} \subset D \\ \text{und } \lim\limits_{x \to a} f(x) \text{ existiert in } \mathbb{R}. \end{array} \right\}$$

In einer Lücke ist f nicht definiert, die Frage nach der Stetigkeit stellt sich also an einer solchen Stelle gar nicht! Natürlich kann man auch hier nach stetiger Ergänzung fragen.

Auf Beispiele zu Unstetigkeiten gehe ich noch ein, wenn wir — in Kapitel 4 — mit den nötigen zusätzlichen Hilfsmitteln *Kurvendiskussionen* ganz allgemein behandeln.

Rückblick

In diesem Kapitel wurden die für die Analysis zentralen Begriffe der *Konvergenz* und *Stetigkeit* eingeführt. Konvergenz bezieht sich dabei auf *Folgen, Reihen, Potenzreihen* und *Funktionen.*

Der Konvergenznachweis stellte sich für *monotone Folgen* als besonders einfach heraus.

Bei der Stetigkeit war die *globale* von der *in einem Punkt* (oder in einem Teilbereich) zu unterscheiden.

Beide Eigenschaften — Konvergenz und Stetigkeit — konnten meist routinemäßig durch *Grundregeln* oder bereitgestellte Hilfsmittel nachgewiesen werden; im Einzelfall war jedoch eine direkte Untersuchung auf der Grundlage der Definition erforderlich.

Beim Vorliegen von *Divergenz* ist noch gesondert nach *bestimmter Divergenz* zu fragen.

Für die — im allgemeinen — mit den Hilfsmitteln des nächsten Kapitels anzugehenden *„Kurvendiskussionen“* muß man Sicherheit im Umgang mit *Grenzwerten von Funktionen*, auch einseitigen, und mit *Unstetigkeiten* haben.

Die Formel für die *geometrische Reihe* müssen Sie im Schlaf beherrschen. (Selbst Herr Schluckspecht (vgl. Übungsaufgabe zu 4.6) konnte diese bei seiner Vernehmung durch die Polizei noch richtig lallen.)

Für die Handhabung von *Potenzreihen* ist der *Konvergenzradius* die entscheidende Größe zur Bestimmung des Bereichs, in dem Konvergenz vorliegt. Zur *Berechnung des Konvergenzradius* wurden geeignete Formeln bereitgestellt.

Erste Bekanntschaft haben wir schon mit der *Exponentialfunktion*, den *trigonometrischen Funktionen* und den *Hyperbelfunktionen* gemacht, was wir bald noch ausgestalten werden.

Kapitel 4

Differentialrechnung

Lernziel

Ich hatte schon im letzten Kapitel darauf hingewiesen, daß für den praktischen Umgang mit Funktionen der in diesem Kapitel zu behandelnde Begriff der *Differenzierbarkeit* meist wesentlich nützlicher als der der Stetigkeit ist. (Man benötigt dazu allerdings zumindest den Grenzwertbegriff, so daß die Überlegungen des vorangehenden Kapitels keineswegs überflüssig sind.) Insbesondere können über die Differenzierbarkeit zugkräftige Folgerungen für das *‚lokale Verhalten'* von Funktionen bereitgestellt werden. Zentrales Hilfsmittel dazu ist der *Mittelwertsatz*, der eine Verbindung zwischen den Werten der Ableitung und denen der Funktion herstellt.

Sie müssen in der Lage sein, eine vorgelegte Funktion auf *Differenzierbarkeit* zu untersuchen und — gegebenenfalls — ihre *Ableitung* zu bestimmen.

Der *Nachweis der Differenzierbarkeit* direkt über die Definition ist meist viel zu umständlich, muß aber im Ausnahmefall auch durchgeführt werden können. Es werden daher wieder *Grundregeln* hergeleitet, die die Differenzierbarkeit in den meisten Fällen routinemäßig erschließen lassen. Einige der Grundregeln sind jedoch komplizierter als die entsprechenden für Grenzwert und Stetigkeit.

In diesem Kapitel sollten Sie insbesondere die Bedeutung der Ableitung für das *‚momentane Änderungsverhalten'* einer Funktion verstehen und die Gleichung der *Tangente* an eine gegebene Kurve bestimmen können, die — analytisch interpretiert — die *Approximation durch eine inhomogen lineare Funktion, also ein Polynom 1. Grades*, und so erste *Näherungsaussagen* liefert.

Mit diesem Rüstzeug können dann in einfacher Weise entscheidende *zusätzliche Aussagen über die Exponentialfunktion, die trigonometrischen Funktionen und die Hyperbelfunktionen* gewonnen werden. Mit einer Überlegung zur *Differentiation von Umkehrfunktionen* ergibt sich anschließend zum

Beispiel ein bequemer Zugang zur *Logarithmusfunktion* mit ihren wichtigsten Eigenschaften.

Weitere Fragestellungen, mit denen Sie nach dem Durcharbeiten dieses Kapitels vertraut sein müssen, sind:

- *Konvexität und Konkavität* — Krümmungsverhalten
- *Extremwertaufgaben* (Mini-Max-Probleme)
- *Kurvendiskussionen*
- *Differentiation von Potenzreihen*
- *Polarkoordinaten-Darstellung komplexer Zahlen* mit der komplexen Exponentialfunktion — oder ersatzweise mit den trigonometrischen Funktionen

Bevor Sie zum nächsten Kapitel übergehen, müssen Sie mit all diesen Dingen sicher umgehen können!

4.1 Die Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten

Annahmen: $-\infty \le \alpha < \beta \le \infty$[1], $D :=]\alpha, \beta[$,
$a, b \in D$ mit $a < b$ und $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$

Die *‚Ableitung‘* dient dazu, das *Wachtumsverhalten* einer Funktion — geometrisch das Steigen und Fallen eines Graphen — quantitativ zu erfassen.

Ein grobes Maß dafür, wie sich die Funktionswerte von f beim Durchlaufen des Intervalls $[a, b]$ ändern, ist die Differenz der Funktionswerte in den Endpunkten

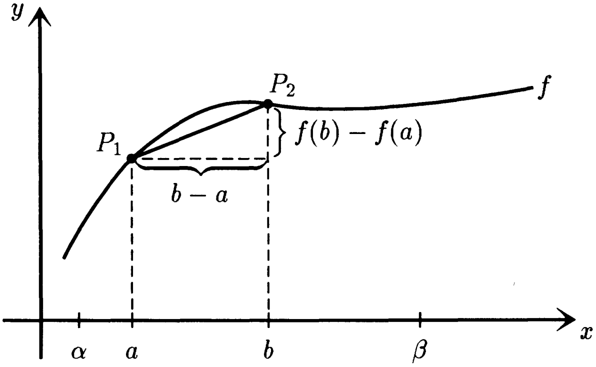
$$f(b) - f(a)\,.$$

Das *‚durchschnittliche Wachstum‘* von f beim Übergang von a zu b, d.h. die Änderung der Funktionswerte pro Einheit, ergibt sich, wenn man durch die Länge des Intervalls $[a, b]$ dividiert:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,.$$

Diesen Ausdruck nennt man *„Differenzenquotient“*. Geometrisch bedeutet er, wie die nachfolgende Zeichnung verdeutlicht, die *‚Steigung‘* der Geraden durch die beiden Punkte $P_1 := (a, f(a))$ und $P_2 := (b, f(b))$:

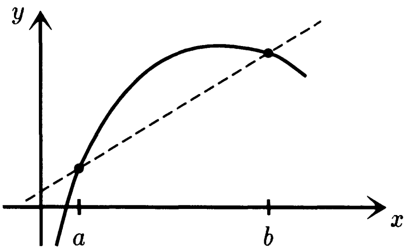
[1] Nach der Fußnote auf Seite 102 bedeutet dies $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ mit $\alpha < \beta$.

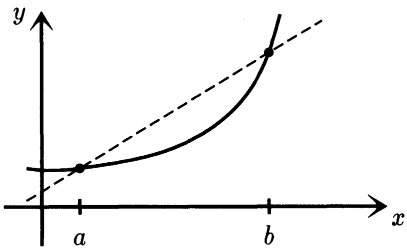


(B1) (a) Wenn f den zurückgelegten Weg in Abhängigkeit von der Zeit x beschreibt, so erhält man die *Durchschnittsgeschwindigkeit.*

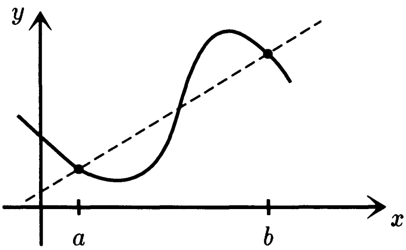
(b) *Durchschnittliche Kosten* liefert der Differenzenquotient, wenn f die Kosten (Geldeinheiten) in Abhängigkeit von der Anzahl x der Mengeneinheiten erfaßt.

Der Differenzenquotient $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ hängt nur von den Werten von f in a und b ab; er sagt nichts darüber aus, wie sich die Werte von f beim Durchlaufen des Intervalls $[a, b]$ ändern. In den beiden nachfolgend gezeichneten Fällen kommt der gleiche Differenzenquotient heraus, obwohl die Funktionen recht unterschiedliches Aussehen haben:





Auch im nächsten Fall eines S-förmigen Graphen erhält man den gleichen Differenzenquotienten:



Wir kommen also nicht umhin, uns noch aussagekräftigere Hilfsmittel zusätzlich zu verschaffen.

Um zunächst präzisere Information in der ‚Umgebung' einer Stelle a aus $]\alpha, \beta[$ zu erhalten, fixieren wir diesen Punkt und betrachten den *Differenzenquotienten für ‚kleine' Intervalle um* a, also für $h \neq 0$ mit $a + h \in]\alpha, \beta[$:

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} .$$

(B2) $\boxed{f(x) := x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = 2a + h$$

Für $h \longrightarrow 0$ strebt dieser Differenzenquotient gegen $2a$; es liegt daher nahe, die Zahl $2a$ als *„Steigung" des Graphen von f im* Punkte $(a, f(a))$ zu bezeichnen.

Definition *Existiert der Grenzwert des Differenzenquotienten*

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \textit{für} \quad 0 \neq h \longrightarrow 0\,, \quad {}^{o}$$

dann heißt f „in a differenzierbar", der Grenzwert wird mit $f'(a)$ bezeichnet, gelesen als „Ableitung von f in a".

[o] Zu beachten ist: Für hinreichend kleine $|h|$ gehört $a+h$ zu $]\alpha, \beta[$.

(B3) $\boxed{f(x) := mx + n}$ $(x \in \mathbb{R};\ m, n \in \mathbb{R}$ fest)

Hier ist offenbar $f'(a) = m$; speziell für $m = 0$ also $f'(a) = 0$.

(B4) $\boxed{f(x) := |x|}$ $(x \in \mathbb{R})$

Für $a = 0$ existiert der Grenzwert des Differenzenquotienten *nicht*, die *Betragsfunktion* ist demnach *in* 0 *nicht differenzierbar*; denn

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & , \quad \text{falls } x > 0 \\ -1 & , \quad \text{falls } x < 0 \end{cases} .$$

(B5) Für $\boxed{f(x) := x^3}$ $(x \in \mathbb{R})$ ist $f'(a) = 3a^2$;

denn hier rechnet man:

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{(a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3) - a^3}{h} \\ &= 3a^2 + 3ah + h^2 \longrightarrow 3a^2 \quad (0 \neq h \to 0) . \end{aligned}$$

(B6) $\boxed{f(x) := \frac{1}{x}}$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$

Für $a \neq 0$ und $0 \neq h$ mit $a + h \neq 0$ resultiert aus

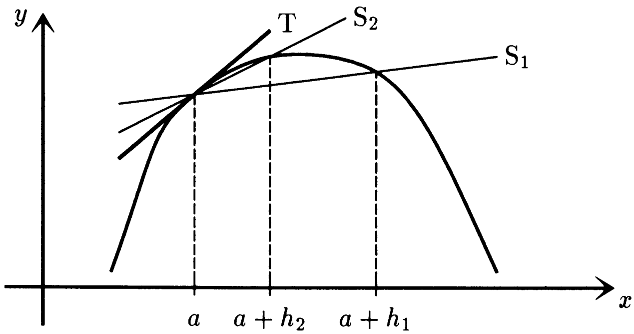
$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = \frac{-h}{a(a+h)h} = \frac{-1}{a(a+h)}$$

mit $h \longrightarrow 0$: $\quad f'(a) = -\frac{1}{a^2}$.

Die Bedeutung des mathematischen Begriffs der Ableitung liegt darin, daß man mit seiner Hilfe viele für die Anwendungen wichtige Begriffe klären und die zugehörigen Größen einer quantitativen Bestimmung zugänglich machen kann. Bekannteste Beispiele sind:

(B7) Tangente

Die Tangente ergibt sich als ‚Grenzlage' der Sekanten:



Die *„Sekante"* durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(a + h, f(a + h))$ hat für $h \neq 0$ als Gerade die einfache Gleichung

$$y = f(a) + \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot (x - a) ;$$

denn ihre Steigung ist $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ und sie nimmt an der Stelle a den Wert $f(a)$ an. Daraus ergibt sich mit $h \longrightarrow 0$, falls f an der Stelle a differenzierbar ist, die

Gleichung der „Tangente": $\boxed{y = f(a) + f'(a)(x - a)}$.

(B8) Momentangeschwindigkeit

Wir betrachten einen sich geradlinig bewegenden Körper, dessen Position als Funktion der Zeit durch $s : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben sei. Für einen Zeitpunkt $t_0 \in \mathbb{R}$ und $h \neq 0$ liefert

$$\frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h}$$

die *Durchschnittsgeschwindigkeit* des Körpers zwischen den Zeitpunkten t_0 und $t_0 + h$.

Wenn s in t_0 differenzierbar ist, versteht man unter der *„Momentangeschwindigkeit“* oder *„Geschwindigkeit“* des Körpers zu diesem Zeitpunkt die Ableitung $s'(t_0)$ von s in t_0.

Die Geschwindigkeit ist also die Ableitung der Positionsfunktion.

(B9) Lineare Approximation

Die Tangente $t(x) := f(a) + f'(a)(x-a)$ *approximiert den Graphen von* f *in einer Umgebung von* a:

Nach Definition von $f'(a)$ gilt für $0 \neq h \longrightarrow 0$:

$\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \longrightarrow f'(a)$, also $\left|\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a)\right| \longrightarrow 0$.

Zu $\varepsilon > 0$ existiert somit ein $\delta > 0$ derart, daß für $h \in \mathbb{R}$ mit $0 < |h| \leq \delta$ die Abschätzung $\left|\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a)\right| \leq \varepsilon$ gilt und $a+h$ in $]\alpha, \beta[$ liegt.

Für ein solches δ hat man dann für alle $h \in \mathbb{R}$ mit $|h| \leq \delta$: $a+h \in]\alpha, \beta[$ und

$$|f(a+h) - f(a) - f'(a)h| \leq \varepsilon\,|h|.$$

Mit $x := a+h$ kann dies umgeschrieben werden zu

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R}\ \ [\,|x-a| \leq \delta \implies \\ (*)\quad & x \in]\alpha, \beta[\ \wedge\ |f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)| \leq \varepsilon\,|x-a|\,], \\ & \text{d.h. } |f(x) - t(x)| \leq \varepsilon\,|x-a|. \end{aligned}$$

Hat man nun irgendeine Gerade g, die nicht parallel zur y-Achse ist, also $g(x) := m(x-a) + n$ $(x \in \mathbb{R})$ mit $m, n \in \mathbb{R}$, für die $(*)$ entsprechend gilt, d.h.:

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R}\ \ [\,|x-a| \leq \delta \implies \\ & x \in]\alpha, \beta[\ \wedge\ |f(x) - g(x)| \leq \varepsilon\,|x-a|\,], \end{aligned}$$

so ist f in a differenzierbar mit $f'(a) = m$ und $f(a) = n$, also $g(x) = t(x)$.

<u>Beweis:</u> 1. $x := a$ liefert $f(a) = g(a) = n$.

2. Zu ε und δ wie oben und $0 < |x-a| \leq \delta$ gilt

$x \in]\alpha, \beta[\ \wedge\ \big|f(x) - \big(f(a) + m(x-a)\big)\big| \leq \varepsilon\,|x-a|$, also

$\left|\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} - m\right| \leq \varepsilon$, somit $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \longrightarrow m \quad (x \longrightarrow a)$. □

Wir hätten also auch — zwar weniger anschaulich, aber für manche Beweise handlicher — die Ableitung über den folgenden Satz definieren können:

Satz *f ist in a genau dann differenzierbar, wenn ein $m \in \mathbb{R}$ existiert mit:* $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$:

$|x-a| \le \delta \implies x \in]\alpha, \beta[\ \wedge \ \left| f(x) - \big(f(a) + m(x-a)\big) \right| \le \varepsilon \, |x-a|$.

In diesem Fall gilt : $m = f'(a)$.

Für den Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit hat man:

Satz *f in a differenzierbar $\implies$ f in a stetig.*

Beweis: Hier ist zu zeigen, daß $f(x)$ gegen $f(a)$ für $x \longrightarrow a$ strebt. Dies liest man direkt aus obigem Satz mit dem Grenzübergang $x \longrightarrow a$ ab. □

Daß umgekehrt eine in a stetige Funktion dort *nicht* notwendig auch differenzierbar ist, zeigt das Beispiel der Betragsfunktion in $a := 0$ (vgl. dazu (B4)).

4.2 Differentiationsregeln (Ableitungskalkül)

Um nicht, wie in den obigen Beispielen, Ableitungen immer ‚zu Fuß' ausrechnen zu müssen, stellen wir einige Differentiationsregeln zusammen; dies unter den

Annahmen:
- $D \subset \mathbb{R}$; $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$;
- $\alpha, \beta, a \in \mathbb{R}$ mit $\alpha < a < \beta$ und $]\alpha, \beta[\subset D$;
- f, g differenzierbar in a

(1) Linearität der Ableitung

Für $c, d \in \mathbb{R}$ ist $cf + dg$ differenzierbar in a mit

$$\boxed{(cf + dg)'(a) = cf'(a) + dg'(a)} \; .$$

Spezialfälle dieser Aussage sind offenbar:

(1a)	cf	differenzierbar in a und	$(cf)'(a)$	$=$	$cf'(a)$,
(1b)	$f+g$	differenzierbar in a und	$(f+g)'(a)$	$=$	$f'(a) + g'(a)$,
(1c)	$f-g$	differenzierbar in a und	$(f-g)'(a)$	$=$	$f'(a) - g'(a)$.

Beweis: Für $h \neq 0$ hinreichend klein gilt:

$$\frac{(cf+dg)(a+h) - (cf+dg)(a)}{h} = \frac{c\big(f(a+h) - f(a)\big) + d\big(g(a+h) - g(a)\big)}{h}$$

$$= c\,\frac{f(a+h) - f(a)}{h} + d\,\frac{g(a+h) - g(a)}{h} \longrightarrow cf'(a) + dg'(a) \quad (h \to 0) \ □$$

(2) Produktregel

Das Produkt $f \cdot g$ ist in a differenzierbar, und es gilt:

$$\boxed{(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)} \; .$$

Beweis: Für $h \neq 0$ hinreichend klein:

$$\frac{(fg)(a+h)-(fg)(a)}{h} = \frac{f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a)}{h} =$$

$$\frac{\big(f(a+h)-f(a)\big)\,g(a+h) + f(a)\big(g(a+h)-g(a)\big)}{h} =$$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\,g(a+h) + f(a)\,\frac{g(a+h)-g(a)}{h}$$

$$\longrightarrow f'(a)g(a) + f(a)g'(a) \qquad (h \longrightarrow 0)$$

□

(3) Quotientenregel

Ist $g(a) \neq 0$ °, *so ist* $\frac{f}{g}$ *in* a *differenzierbar und es gilt:*

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}}\,.$$

° Dann existiert ein $\delta > 0$ mit $x \in D$ und $g(x) \neq 0$ für $|x-a| < \delta$.

Beweis: $$\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(a)}{x-a} = \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{x-a} = \frac{\frac{f(x)\,g(a)-g(x)\,f(a)}{g(x)\,g(a)}}{x-a} =$$

$$\frac{1}{g(x)\,g(a)}\left\{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\,g(a) - \frac{g(x)-g(a)}{x-a}\,f(a)\right\}$$

$$\longrightarrow \frac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{(g(a))^2} \qquad (a \neq x \longrightarrow a)$$

□

Besonders leistungsfähig ist die folgende Aussage über die *Differentiation zusammengesetzter Funktionen*:

(4) Kettenregel

Vor.: $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ *mit* $\gamma < \delta$,

$f(]\alpha,\beta[) \subset]\gamma,\delta[$ *und* $h:]\gamma,\delta[\longrightarrow \mathbb{R}$

(Die Funktion $h \circ f$ *ist somit zumindest auf* $]\alpha,\beta[$ *definiert.)*

Beh.: Ist f *in* a *und* h *in* $f(a)$ *differenzierbar, so ist* $h \circ f$ *in* a *differenzierbar, und es gilt:*

$$\boxed{(h\circ f)'(a) = h'(f(a))\,f'(a)}\,.$$

Ich führe den *Beweis* von (4), der zweckmäßig die Charakterisierung aus dem vorletzten Satz von Abschnitt 4.1 heranzieht, nicht aus, weise jedoch auf folgenden verbreiteten *falschen* ‚Beweis' hin:

$$\frac{h(f(x)) - h(f(a))}{x-a} = \frac{h(f(x)) - h(f(a))}{f(x)-f(a)} \cdot \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \longrightarrow h'(f(a))\,f'(a)$$

unter Berücksichtigung von $f(x) \longrightarrow f(a)$ für $a \neq x \longrightarrow a$.

(Sie haben vermutlich gleich gesehen, daß der ‚Beweis' deshalb nicht in Ordnung ist, weil $f(x) = f(a)$ für $a \neq x$ sein kann.)

4.3 Beispiele

(B1) **Potenzregel** Für $f(x) := x^n \quad (x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N})$ gilt:

$$f'(a) = n a^{n-1} \qquad (a \in \mathbb{R}) .$$

<u>Beweis:</u> (durch vollständige Induktion) Der Fall <u>$n = 1$</u> ist aus (B3) des Abschnitts 4.1 schon bekannt, ergibt sich aber auch aus der Definition in trivialer Weise: $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = 1 = 1a^0 = n a^{n-1}$.

<u>$n \rightsquigarrow n+1$</u>: $f(x) = x^{n+1} = g(x)h(x)$ mit $g(x) := x^n$, $h(x) := x$.

Mit der Produktregel erhält man: $f'(a) = g'(a)h(a) + g(a)h'(a)$ $\underset{(n)}{=} n a^{n-1} a + a^n \cdot 1 = (n+1)a^n = (n+1)a^{(n+1)-1}$. □

(B2) $P(x) = \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu \quad (\cdots):\qquad P'(a) = \sum\limits_{\nu=1}^{n} \nu a_\nu a^{\nu-1}$

Dies liest man aus (B1) und der Linearität der Ableitung ab.

(B3) $f(x) := \dfrac{(3x^2+7)^{23}}{x^2+1}$

Hier sind (B1), die Quotientenregel und — für die Ableitung des Zählers — die Kettenregel heranzuziehen:

$$f'(a) = \frac{23\,(3a^2+7)^{22} \cdot 6a \cdot (a^2+1) - (3a^2+7)^{23} \cdot 2a}{(a^2+1)^2} = \cdots$$

(B4) $f(x) := \sqrt{x} \quad (x \geq 0):\qquad f'(a) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}} \quad$ (für $a > 0$)

<u>Beweis:</u> $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \dfrac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{(x - a)(\sqrt{x} + \sqrt{a})} =$ $\dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \longrightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{a}} \quad (a \neq x \longrightarrow a)$ □

Achten Sie darauf, daß hier „$a > 0$" und nicht „$a \geq 0$" steht. Die Wurzelfunktion ist in 0 zwar stetig, nicht aber differenzierbar!

4.4 Satz von ROLLE und verallgemeinerter Mittelwertsatz; lokales Verhalten

In diesem Abschnitt erarbeiten wir die entscheidenden Hilfsmittel, die es erlauben, mit Hilfe von Ableitungen Aussagen über das *lokale Verhalten von Funktionen* — insbesondere über Wachsen, Fallen und Extremwerte — einfach zu erhalten; dies unter den

<u>Annahmen:</u> $\left\| \begin{array}{l} -\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty, \ ]\alpha, \beta[=: D_1 \subset D \subset \mathbb{R}, \\ f : D \longrightarrow \mathbb{R}, \ a \in D \end{array} \right.$

Wichtige Folgerungen gewinnt man, wenn eine Funktion nicht nur an einer Stelle, sondern in einem ganzen Intervall differenzierbar ist. Zur Präzisierung dieses Sachverhalts dient die folgende

Definition *f in D_1 differenzierbar:* $\Longleftrightarrow \forall t \in D_1$ *f in t differenzierbar.* Gilt dies, so kann die *„Ableitung" von f in D_1* definiert werden durch:

$$\begin{array}{ccc} f' : D_1 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \Psi & & \Psi \\ t & \longmapsto & f'(t) \end{array} .$$

Für sehr viele Bereiche ist die Frage nach dem kleinsten Wert einer Funktion *(„Minimum")* oder dem größten *(„Maximum")* entscheidend. Oft begnügt man sich dabei damit, nicht den maximalen Wert insgesamt, sondern den verglichen nur mit den Werten zu Argumenten aus einer geeigneten Umgebung zu finden. Man sagt dann *„lokales Maximum"* bzw. *„lokales Minimum"*. — Der derzeit weltbeste Weitspringer ist sicher auch der beste Weitspringer seines Heimatdorfes. Aber der beste von Kleinkleckersdorf ist nicht unbedingt gleich der beste der ganzen Welt!

Definition

1) f hat in a „lokales Maximum" $:\Longleftrightarrow$
$\exists \delta > 0 \ \forall x \in D \quad |x - a| \leq \delta \Longrightarrow f(x) \leq f(a)$

1') f hat in a „lokales Minimum" $:\Longleftrightarrow$
$\exists \delta > 0 \ \forall x \in D \quad |x - a| \leq \delta \Longrightarrow f(x) \geq f(a)$

2) f hat in a „lokales Extremum" $:\Longleftrightarrow$
f hat in a lokales Minimum oder Maximum

3) f „wächst in a" $:\Longleftrightarrow$
f ist in einer Umgebung von a streng isoton $\Longleftrightarrow$
$$\exists \delta > 0 \ \forall x \in D \ \left\{ \begin{array}{lcl} a - \delta < x < a & \Longrightarrow & f(x) < f(a) \\ a < x < a + \delta & \Longrightarrow & f(x) > f(a) \end{array} \right\}$$

3') f „fällt in a" $:\Longleftrightarrow$
f ist in einer Umgebung von a streng antiton $\Longleftrightarrow$
$$\exists \delta > 0 \ \forall x \in D \ \left\{ \begin{array}{lcl} a - \delta < x < a & \Longrightarrow & f(x) > f(a) \\ a < x < a + \delta & \Longrightarrow & f(x) < f(a) \end{array} \right\}$$

(1) Bemerkung *Vor.: f in $a \in D_1$ differenzierbar mit $f'(a) > 0$*
Beh.: f wächst in a.

Beweis: Der Differenzenquotient $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ strebt für $x \longrightarrow a$ gegen die positive Zahl $f'(a)$, muß also für x ‚nahe' bei a selbst positiv sein; das ist schon die Behauptung. Ich führe das noch einmal etwas genauer aus: Zu $\varepsilon := \dfrac{f'(a)}{2} > 0$ existiert ein $\delta > 0$ derart, daß $x \in D_1$ und $\left|\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)\right| \leq \varepsilon$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $0 < |x-a| \leq \delta$ gilt. Für solche x ist dann $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq \varepsilon > 0$. □

Durch Übergang von f zu $-f$ folgt aus (1) sofort:

(1') Bemerkung *Vor.: f in $a \in D_1$ differenzierbar mit $f'(a) < 0$*
Beh.: f fällt in a.

(2) Bemerkung

Vor.: f in $a \in D_1$ differenzierbar,
f hat in a lokales Extremum
Beh.: $f'(a) = 0$

Beweis: Da die Funktion f in a ein lokales Extremum hat, wächst sie dort weder noch fällt sie. Nach (1) und (1') folgt somit die Behauptung. □

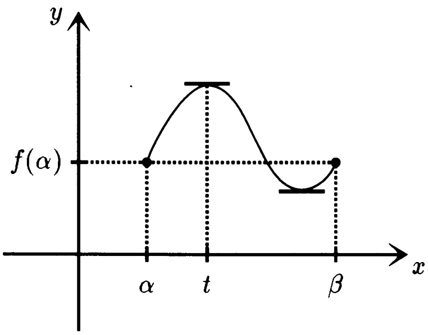
Zusatz Die *Umkehrung* von (2) *gilt nicht* !!

Dies zeigt beispielsweise die Abbildung $\begin{array}{ccc} f: \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \cup\!\!\!\!\mid & & \cup\!\!\!\!\mid \\ x & \longmapsto & x^3 \end{array}$ an der Stelle 0.

(3) Satz von Rolle

Vor.: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha < \beta$, $f : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig,
f in $]\alpha, \beta[$ differenzierbar, $f(\alpha) = f(\beta)$

Beh.: Es existiert ein $t \in]\alpha, \beta[$ mit $f'(t) = 0$.



Beweis: Nach Satz (3) aus Teilabschnitt 3.4.2 existieren $u, v \in [\alpha, \beta]$ mit $f(u) \leq f(x) \leq f(v)$ für $x \in [\alpha, \beta]$. Sind u, v Endpunkte — also

$\{u, v\} \subset \{\alpha, \beta\}$ — , dann ist — wegen $f(\alpha) = f(\beta)$ — die Funktion f konstant und so die Behauptung trivial. Sonst sei Œ $v \in]\alpha, \beta[$; nach obiger Bemerkung (2) gilt dann: $f'(v) = 0$. □

Aus dem Satz von ROLLE folgt nun leicht der

(4) Verallgemeinerte Mittelwertsatz

Vor.: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *mit* $\alpha < \beta$, $f, g : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig,*
f, g *in* $]\alpha, \beta[$ *differenzierbar,*
$\forall x \in]\alpha, \beta[\quad g'(x) \neq 0$

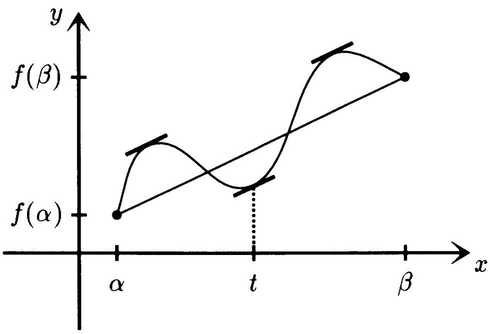
Beh.: $\exists t \in]\alpha, \beta[\quad \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} = \dfrac{f'(t)}{g'(t)}$

Anmerkung: 1) Nach dem Satz von ROLLE ist $g(\beta) - g(\alpha) \neq 0$!
2) Für $g(x) := x \quad (x \in [\alpha, \beta])$ ergibt sich der

(4') Mittelwertsatz (MWS)

Vor.: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *mit* $\alpha < \beta$, $f : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig,*
f *in* $]\alpha, \beta[$ *differenzierbar*
Beh.: Es existiert ein $t \in]\alpha, \beta[$ *mit* $f(\beta) - f(\alpha) = f'(t)\,(\beta - \alpha)$

Die *Differenz der Funktionswerte wird beschrieben durch die Ableitung an einer geeigneten Stelle multipliziert mit der Differenz der Argumente.* Weiß man also etwas über die Ableitung im gesamten Intervall, dann kann man Aussagen darüber machen, *wie sich Änderungen in den Argumenten auf die Funktionswerte auswirken können: „Fehlerfortpflanzung".*



Beweis (des verallgemeinerten Mittelwertsatzes):
Wir betrachten die Hilfsfunktion

$$h(x) := \big(f(x) - f(\alpha)\big) - \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} \big(g(x) - g(\alpha)\big) .$$

Für diese gilt: $h : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, $h(\alpha) = h(\beta) = 0$, h in

$]\alpha, \beta[$ differenzierbar. Also existiert nach Satz von ROLLE ein $t \in]\alpha, \beta[$ mit $h'(t) = 0$; das ist gerade die Behauptung. □

(5) Folgerung *Vor.:* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *mit* $\alpha < \beta$, $f : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig,*
f *in* $]\alpha, \beta[$ *differenzierbar,*
$\forall x \in]\alpha, \beta[\quad f'(x) = 0$

Beh.: f *ist konstant.*

Beweis: Für $\alpha \le \alpha' < \beta' \le \beta$ gilt nach dem MWS: $f(\beta') = f(\alpha')$. □

(6) Folgerung *Vor.:* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *mit* $\alpha < \beta$, $f : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig,*
f *in* $]\alpha, \beta[$ *differenzierbar*

Beh.: 1) f *ist isoton* $\Longleftrightarrow \forall x \in]\alpha, \beta[\quad f'(x) \ge 0$

2) $\forall x \in]\alpha, \beta[\; f'(x) > 0 \Longrightarrow f$ *ist streng isoton.*

Beweis: 1) $\Longrightarrow$: (indirekt) nach (1')
$\Longleftarrow$: Nach MWS existiert zu $\alpha \le x_1 < x_2 \le \beta$ ein $t \in]x_1, x_2[$ mit $f(x_2) - f(x_1) = f'(t)(x_2 - x_1) \ge 0$.
2) folgt wie „1), $\Longleftarrow$" mit dem MWS. □

4.5 Differentiation von Potenzreihen

Es seien || (a_n) eine Folge reeller Zahlen und $x_0 \in \mathbb{R}$.

Für die *„Potenzreihe"* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ (um den *„Entwicklungspunkt"* x_0 mit *„Koeffizienten"* (a_n)) hatten wir in 3.3.1 gezeigt:

Satz *Es existiert ein* $0 \le R \le \infty$ (**„Konvergenzradius"**) *mit*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \begin{cases} \textit{absolut konvergent} & \textit{für } x \in \mathbb{R} \textit{ mit } |x - x_0| < R\,, \\ \textit{divergent} & \textit{für } x \in \mathbb{R} \textit{ mit } |x - x_0| > R\,. \end{cases}$$

Sehr wichtig (für den hier gewählten Aufbau) ist der

Satz (a) $\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n(x - x_0)^{n-1}$ *hat auch den Konvergenzradius* R.

(b) *Definiert man* $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ *für* $x \in \mathbb{R}$ *mit* $|x - x_0| < R$, *dann gilt:*

f *ist differenzierbar und* $$\boxed{f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n(x - x_0)^{n-1}}\,.$$

Potenzreihen dürfen also ‚gliedweise' differenziert werden.

Ich möchte auf einen — mit den jetzt zur Verfügung stehenden Mitteln doch etwas mühsamen — Beweis (für (b)) verzichten! (Man vergleiche hierzu beispielsweise [BARNER/FLOHR I], [HEUSER I] oder [KÖNIGSBERGER I].) Einfacher ließe sich dieser Satz mit den Hilfsmitteln aus Kapitel 5 beweisen. Teil (a) folgt im wesentlichen aus $\sqrt[n]{n} \longrightarrow 1$.

4.6 Die Funktionen exp, sin, cos, Sin, Cos - Teil II

In 3.3.2 hatten wir definiert $\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Hier beschränken wir uns — wegen der Differenzierbarkeitsüberlegungen — auf $x \in \mathbb{R}$. Mit den bereitgestellten Hilfsmitteln dieses Kapitels erhalten wir recht einfach die wichtigsten *Eigenschaften der Exponentialfunktion, der Hyperbelfunktionen und der trigonometrischen Funktionen.* Nach 4.5 ist zunächst:

(1) exp *differenzierbar und* $\boxed{\exp' = \exp}$.

<u>Beweis:</u> $\exp'(x) \underset{4.5}{=} \sum_{n=1}^{\infty} n\,\frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x)$ □

Trivial ist:

(2) $\exp(0) = 1$

Als nächstes zeigen wir:

(3) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp(x)\exp(-x) = 1$, *also insbesondere*:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp(x) \neq 0 \quad \wedge \quad \boxed{\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}}\,.$$

<u>Beweis:</u> Wir betrachten die durch $g(x) := \exp(x)\exp(-x) \quad (x \in \mathbb{R})$ gegebene Hilfsfunktion. Sie ist differenzierbar mit $g'(x) \underset{(1)}{=} \exp(x)\exp(-x) + \exp(x)(-\exp(-x)) = 0$. Nach (5) aus Abschnitt 4.4 folgt: $g(x) = g(0) = \exp(0)\exp(-0) \underset{(2)}{=} 1$. □

(4) $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp(x) > 0}$; exp *ist streng isoton.*

<u>Beweis:</u> Wegen (1) genügt nach (6) aus Abschnitt 4.4 der Nachweis von: $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp(x) > 0$. <u>Annahme:</u> Existiert ein $t \in \mathbb{R}$ mit $\exp(t) < 0$, so existiert nach dem Zwischenwertsatz, da $\exp(0) = 1 > 0$, ein $u \in \mathbb{R}$ mit $\exp(u) = 0$ im <u>Widerspruch</u> zu (3). (Will man den Zwischenwertsatz hier nicht heranziehen, so kann man diese Teilüberlegung auch aus (3) ablesen; denn für $x \geq 0$ ist $\exp(x) \geq \exp(0) = 1$.) □

Die folgende Überlegung *charakterisiert die Exponentialfunktion durch* *ihre Differentialgleichung*:

(5) Bemerkung *Ist* $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *differenzierbar mit* $h' = h$, *dann gilt:* $\forall\, x \in \mathbb{R} \quad h(x) = h(0)\exp(x)$.

Insbesondere ist also exp *eindeutig durch (1) und (2) bestimmt!*

Beweis: Hier hilft uns die Funktion $g(x) := h(x)\exp(-x)$ $(x \in \mathbb{R})$ weiter: g ist differenzierbar mit $g'(x) = h'(x)\exp(-x) + h(x)(-\exp(-x)) = 0$, also $g(x) = g(0) \underset{(2)}{=} h(0)$; mit (3) folgt die Behauptung. □

Mit den Überlegungen aus (B19) des Abschnitts 3.1 haben wir:

(6) $\exp(1) = e \in [2.5, 3]$.

Ganz besonders wichtig ist die

(7) Funktionalgleichung der Exponentialfunktion

$$\boxed{\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R})} \ .$$

Beweis: Für festes $y \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Funktion: $h(x) := \exp(x+y)$ $(x \in \mathbb{R})$. h ist differenzierbar mit $h'(x) = \exp(x+y) = h(x)$, also — nach (5) — $h(x) = h(0)\exp(x) = \exp(y)\exp(x)$. □

Induktiv erhält man nun:

(8) *Für* $n \in \mathbb{N}$ *ist:* $\exp(n) = e^n > 2^n$ *und* $\exp(-n) = \left(\frac{1}{e}\right)^n < \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Daraus liest man in Verbindung mit (4) ab:

(9) $\lim\limits_{x \to \infty} \exp(x) = \infty$ *und* $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$.

Berücksichtig man noch den Zwischenwertsatz, so hat man:

(10) $\exp(\mathbb{R}) =]0, \infty[$.

In Abschnitt 3.3 hatten wir die *„Hyperbelfunktionen"*

$$\mathfrak{Sin}(x) := \sinh(x) := \operatorname{Sin}(x) := \frac{1}{2}\big(\exp(x) - \exp(-x)\big)$$

(„hyperbolischer Sinus", „Sinus hyperbolicus"),

$$\mathfrak{Cos}(x) := \cosh(x) := \operatorname{Cos}(x) := \frac{1}{2}\big(\exp(x) + \exp(-x)\big)$$

(„hyperbolischer Cosinus", „Cosinus hyperbolicus")

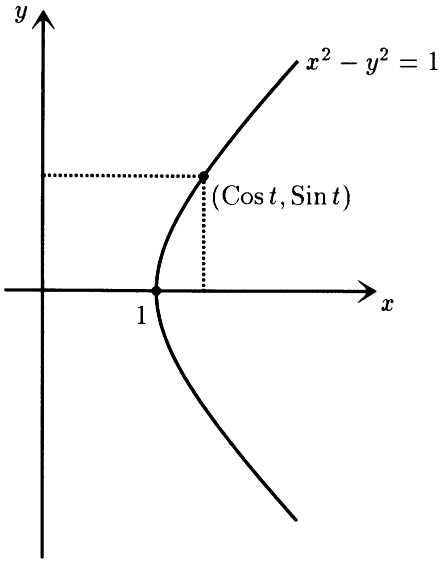
definiert, die wir hier nur für reelles Argument — $x \in \mathbb{R}$ — betrachten. Unmittelbare Folgerungen aus der Definition waren:

(11) $\operatorname{Sin}(0) = 0$ *und* $\operatorname{Sin}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *ungerade,*

$\operatorname{Cos}(0) = 1$ *und* $\operatorname{Cos}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *gerade.*

Weiter hatten wir gesehen — und dabei die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion schon vorweg eingesetzt — , daß die Hyperbelfunktionen die ‚Parameterdarstellung' einer gleichseitigen Einheitshyperbel liefern:

(12) $\left(\operatorname{Cos}(x)\right)^2 - \left(\operatorname{Sin}(x)\right)^2 = 1$



Weiter liest man nun aus der Definition der Hyperbelfunktionen mit (1) ab:

(13) Sin *und* Cos *differenzierbar mit* $\operatorname{Sin}' = \operatorname{Cos}$ *und* $\operatorname{Cos}' = \operatorname{Sin}$.

Zusätzlich ergeben die oben hergeleiteten Eigenschaften (4) und (9) der Exponentialfunktion nun:

(14) $\lim\limits_{x \to \infty} \operatorname{Sin}(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \operatorname{Cos}(x) = \infty$ *und*

Sin (auf $\mathbb{R}$) *streng monoton wachsend.*

In Teilabschnitt 3.3.2 hatten wir noch — für $x \in \mathbb{C}$ — die *trigonometrischen Funktionen* definiert durch:

$$\sin x := \sin(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x := \cos(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Unmittelbar aus der Definition konnten wir ablesen:

(15) $\sin 0 \;=\; 0$ *und* $\sin : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *ungerade,*

$\cos 0 \;=\; 1$ *und* $\cos : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *gerade.*

Über 4.5 erhalten wir — für die auf $\mathbb{R}$ eingeschränkten Funktionen, die wir in der Notierung nicht unterscheiden — wieder ganz einfach:

(16) sin *und* cos *sind differenzierbar mit* $\boxed{\sin' \;=\; \cos\,,\quad \cos' \;=\; -\sin}$.

<u>Beweis:</u> $\sin'(x) \underset{4.5}{=} \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)\,\frac{x^{2n}}{(2n+1)!} \;=\; \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{x^{2n}}{(2n)!} \;=\; \cos x\,;$

$$\cos'(x) \underset{4.5}{=} \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,2n\,\frac{x^{2n-1}}{(2n)!} \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\,\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \;=\; -\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \;=\; -\sin x \qquad \square$$

Eine der wichtigsten Formeln für das Arbeiten mit den *trigonometrischen Funktionen* ist die „EULERsche **Formel**“ :

(17) Satz $\boxed{\exp(iz) \;=\; \cos(z) \;+\; i\,\sin(z)}$ $\quad (z \in \mathbb{C})$

<u>Beweis:</u> $\exp(iz) \;=\; \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!} \;=\; \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,i^n\,z^n$

$$= \sum_{n\ \text{gerade}} \cdots \;+\; \sum_{n\ \text{ungerade}} \cdots$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{z^{2m}}{(2m)!} \;+\; i\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{z^{2m+1}}{(2m+1)!} \;=\; \cos(z) \;+\; i\,\sin(z) \quad \square$$

In diesem Zusammenhang notiert man oft auch e^v statt $\exp(v)$ (für $v \in \mathbb{C}$).

Speziell liefert die EULERsche Formel:

(18) Für $x, y \in \mathbb{R}$: $\boxed{e^{x+iy} \;=\; e^x(\cos y \;+\; i\sin y)}$.

<u>Beweis:</u> $l.S. \;=\; e^x\,e^{iy} \underset{(17)}{=} r.S.$ $\square$

Wir haben bei diesem Beweis die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion für *komplexes* Argument benutzt, obwohl wir sie nur für reelles Argument bewiesen haben. Dies ist aber keine wesentliche Lücke.

Mit diesen Überlegungen gewinnt man nun eine ganz einfache und leicht zu merkende Herleitung der *„Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen“*:

$$\underline{\cos(x+y)} \;+\; i\,\boxed{\sin(x+y)} \underset{(17)}{=} \exp(i(x+y)) \;=\; \exp(ix)\exp(iy)$$

$$\underset{(17)}{=} (\cos x \;+\; i\sin x)\,(\cos y \;+\; i\sin y)$$

$$= \underline{\cos x\cos y \;-\; \sin x\sin y} \;+\; i\,\boxed{(\cos x\sin y \;+\; \sin x\cos y)}$$

Durch Trennung in Real- und Imaginärteil liest man — für $x, y \in \mathbb{R}$ — die **Additionstheoreme für cos und sin** ab:

(19)
$$\boxed{\begin{array}{rcl} \sin(x+y) &=& \sin x \cos y + \cos x \sin y \\ \cos(x+y) &=& \cos x \cos y - \sin x \sin y \end{array}}$$

(20) *Für* $x \in \mathbb{R}$ *gilt:* $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$.

Beweis: Die Ableitung der durch $\varphi(x) := (\sin x)^2 + (\cos x)^2$ $(x \in \mathbb{R})$ definierten Funktion an der Stelle x ist: $\varphi'(x) = 2\sin x \cos x + 2\cos x(-\sin x) = 0$; daher ist φ konstant. $\varphi(x) = \varphi(0) = 1$ liefert die Behauptung. □

Für $z \in \mathbb{C}$ liest man aus (18) und (20) ab:

(21) $|e^z| = e^{\mathfrak{Re}(z)}$

Die Zahl π definieren wir *nicht* über den Kreisumfang, sondern $\pi/2$ *als kleinste positive Nullstelle von* cos . Den Zusammenhang zur Kreisberechnung und anderen geometrischen Überlegungen stellen wir erst später her.

(22) *Es existiert eindeutig ein* $t \in]0, 2[$ *mit*
$\cos t = 0$ *und* $\cos x > 0$ *für* $0 \le x < t$.
Bezeichnung: $\pi := 2t$

Beweis: $\cos 2 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!}$, also $\cos 2 - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!}$. Auf die rechte Seite wollen wir das LEIBNIZsche Kriterium aus 3.2.5 anwenden, müssen also noch zeigen, daß $\frac{2^{2(n+1)}}{(2(n+1))!} \le \frac{2^{2n}}{(2n)!}$ ist. Dies ist offenbar äquivalent zu: $(2n)!\,2^2 \le (2n+2)!$, also zu $4 \le (2n+2)(2n+1)$: $\surd$

Nach dem LEIBNIZ-Kriterium hat man:

$$\left|\cos 2 - 1 + \frac{2^2}{2!}\right| \le \frac{2^4}{4!} = \frac{2}{3}, \quad \text{daher } \cos 2 \le -1 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3} < 0 .$$

Der Zwischenwertsatz gibt — mit $\cos 0 = 1$ — die Existenz einer Nullstelle von cos im Intervall $]0, 2[$.

$$t := \inf\left\{s \in]0, 2[\;:\; \cos s = 0\right\}$$

liefert dann — ich führe das nicht mehr genau aus — die Behauptung. □

Unter Berücksichtigung von (15) gilt nun

$\sin'(x) \underset{(16)}{=} \cos(x) > 0$ für $-\pi/2 < x < \pi/2$, somit:

(23) *Die Funktion* sin *ist auf dem Intervall* $\left[-\pi/2, \pi/2\right]$ *streng isoton.*

(20) und $\cos(\pi/2) = 0$ zeigen $\sin(\pi/2) \in \{-1, 1\}$; wegen
$0 \underset{(15)}{=} \sin 0 \underset{(23)}{<} \sin(\pi/2)$ folgt:

(24) $\sin(\pi/2) = 1$

Die Additionstheoreme liefern nun:

(25) $\sin(x + \pi/2) = \cos x$ *und* $\cos(x + \pi/2) = -\sin x$.

Hieraus fließen dann nacheinander:

(26) $\sin(x + \pi) = -\sin x$ *und* $\cos(x + \pi) = -\cos x$

(27) $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ *und* $\cos(x + 2\pi) = \cos x$.

Speziell für $z = \pi$ erhält man nun aus der EULERschen Formel — unter Berücksichtigung von $\cos\pi \underset{(26)}{=} -\cos 0 \underset{(15)}{=} -1$ und $\sin\pi \underset{(26)}{=} -\sin 0 \underset{(15)}{=} 0$ — die wichtige Beziehung:

(28) $$\boxed{e^{i\,\pi} = -1} \; .$$

Nach (23) und (26) ist sin auf $[\pi/2, 3\pi/2]$ streng antiton; mit (25) gilt somit:

(29) *Die Funktion* cos *ist auf dem Intervall* $\big[0, \pi\big]$ *streng antiton.*

Die Lage der *Nullstellen der trigonometrischen Funktionen* beschreibt:

(30) *Für* $x \in \mathbb{R}$: $\sin x = 0 \iff \exists m \in \mathbb{Z} \quad x = m\pi$

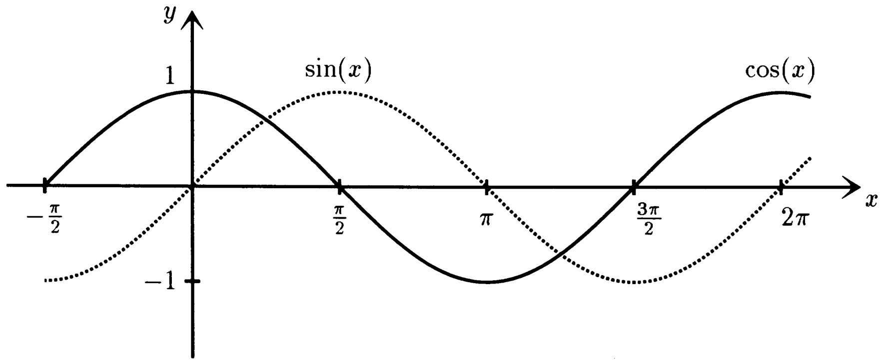
$$\cos x = 0 \iff \exists m \in \mathbb{Z} \quad x = (2m + 1)\frac{\pi}{2}$$

<u>Beweis:</u> <u>1. Zeile:</u> „$\Longleftarrow$“ ergibt sich induktiv aus (15) und (26).

„$\Longrightarrow$“: Mit $m := \left[\frac{x}{\pi}\right]$ gilt $\mathbb{Z} \ni m \leq \frac{x}{\pi} < m + 1$, also $x = m\pi + y$ für ein $y \in [0, \pi[$. Wegen $\sin x = 0$ ist dann — unter Beachtung von (26) (genauer natürlich induktiv!) — auch $\sin y = 0$. Nach (22), (23) und (25) muß dann $y = 0$, also $x = m\pi$, sein.

Die <u>2. Zeile</u> erhält man aus der ersten über (25). □

Mit den bisherigen Überlegungen können wir die *Graphen der trigonometrischen Funktionen* schon grob wie folgt zeichnen:



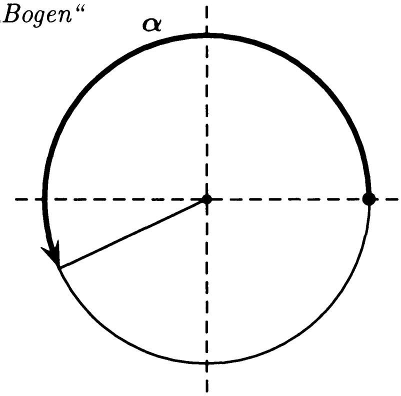
(31) Bemerkung *Für* $0 \le t < 2\pi$ *‚durchläuft‘* $(\cos t, \sin t)$ *genau einmal den* „Einheitskreis“ $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

<u>Beweis:</u> Nach (20), (23), (29) und Zwischenwertsatz unter Beachtung von: $\cos t \ge 0 \iff t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right[$ und $\sin t \ge 0 \iff t \in [0, \pi]$. □

Den Bezug des Arguments in den trigonometrischen Funktionen zur *„Länge des Kreisbogens“* stellen die abschließenden Überlegungen dieses Abschnitts her. Diese sind nicht ganz einfach! Sie sollten dennoch versuchen, die Argumentation weitgehend zu verstehen, da viele Teile — insbesondere (33) und (34) — auch an anderen Stellen benötigt werden und insgesamt der Umgang mit den trigonometrischen Funktionen eingeübt wird:

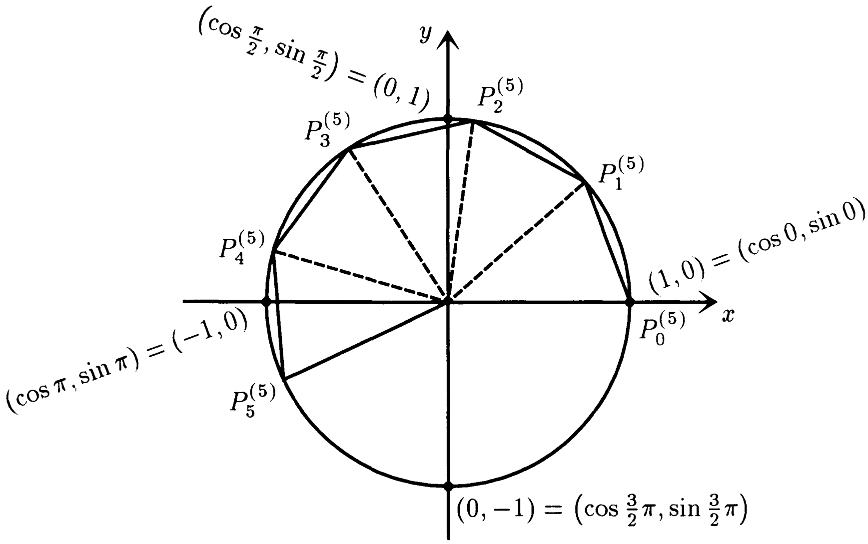
Für $0 \le \alpha \le 2\pi$ betrachten wir den *„Bogen“*

$$\{(\cos t, \sin t) : 0 \le t \le \alpha\}$$



Für $n \in \mathbb{N}$ wird dieser Bogen unterteilt durch die $n+1$ Punkte

$$P_k^{(n)} := \left(\cos\left(k\,\tfrac{\alpha}{n}\right), \sin\left(k\,\tfrac{\alpha}{n}\right)\right) \qquad (k = 0, \dots, n).$$



Verbindet man diese Punkte, so erhält man einen *„Polygonzug"* $\mathfrak{P}_n$ mit Länge $\ell(\mathfrak{P}_n) = \sum_{k=1}^{n} \left| P_k^{(n)} - P_{k-1}^{(n)} \right|$. Es ist naheliegend, die *„Länge des Bogens"* durch den Grenzwert der Längen dieser eingeschriebenen Polygonzüge zu definieren. Dafür gilt:

$$\textbf{(32)} \qquad \lim_{n\to\infty} \ell(\mathfrak{P}_n) = \alpha .$$

Für den <u>Beweis von (32)</u> berechnen wir zunächst den Abstand zwischen zwei beliebigen Punkten auf dem Einheitskreis: Für $a,\, b \in I\!R$, $P := (\cos a,\, \sin a)$ und $Q := (\cos b,\, \sin b)$ ist $|P - Q|^2 = (\cos a - \cos b)^2 + (\sin a - \sin b)^2$.

Zur Umformung dieses Ausdrucks zeigen wir:

$$\textbf{(33)} \qquad \begin{aligned} \cos a - \cos b &= 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{b-a}{2}\right) , \\ \sin b - \sin a &= 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{b-a}{2}\right) . \end{aligned}$$

<u>Beweis:</u> Aus dem Additionstheorem für den Cosinus

$$\cos(x+y) = \cos x\, \cos y - \sin x\, \sin y$$

folgt durch Übergang $y \longmapsto -y$ unter Berücksichtigung von (15)

$$\cos(x-y) = \cos x\, \cos y + \sin x\, \sin y .$$

Durch Subtraktion gewinnt man aus diesen beiden Formeln:
$\cos(x-y) - \cos(x+y) = 2\sin x\, \sin y$ und so für $x := \frac{1}{2}(a+b)$, $y := \frac{1}{2}(b-a)$ die erste Behauptung.

Entprechend ergibt die Subtraktion der beiden Formeln

$$\sin(x \pm y) = \sin x\, \cos y \pm \cos x\, \sin y$$

$\sin(x+y) - \sin(x-y) = 2\cos x \sin y$ und so mit x, y wie oben die zweite Aussage. $\square$

Hiermit erhält man:

$$|P - Q|^2 = 4\left[\left(\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{b-a}{2}\right)\right)^2 + \left(\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{b-a}{2}\right)\right)^2\right]$$

$$\underset{(20)}{=} 4\left(\sin\left(\frac{b-a}{2}\right)\right)^2, \quad \text{folglich } |P - Q| = 2\left|\sin\left(\frac{b-a}{2}\right)\right| ; \quad \text{daher}$$

$$\ell(\mathfrak{P}_n) = 2\sum_{k=1}^{n}\left|\sin\left(\frac{\alpha}{2n}\right)\right| = 2n\left|\sin\left(\frac{\alpha}{2n}\right)\right| = \alpha\left|\frac{\sin(\frac{\alpha}{2n})}{\frac{\alpha}{2n}}\right| \longrightarrow \alpha \quad (n\to\infty),$$

wie die nachfolgende Grenzwertüberlegung zeigt:

$$\textbf{(34)} \qquad \frac{\sin h}{h} \longrightarrow 1 \qquad (h \longrightarrow 0)$$

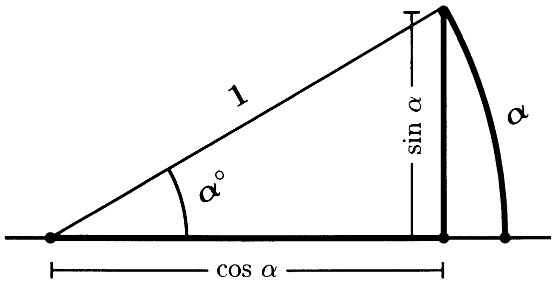
Beweis: $\dfrac{\sin h}{h} = \dfrac{\sin h - \sin 0}{h - 0} \longrightarrow \sin'(0) = \cos 0 = 1 \quad (0 \neq h \to 0)$ □

Nach (32) stimmt also das über (22) ‚abstrakt' definierte π mit dem überein, das man aus der Berechnung des Kreisumfangs (vgl. dazu auch Kapitel 5) erhält.

Teilt man den Einheitskreis — wie üblich — in 360 Grad (360°) ein, so entspricht der gesamte Kreisumfang 2π also gerade diesen 360°. Daher gilt für $0 \leq \beta \leq 360$

$$\boxed{\beta^\circ \;\hat{=}\; \frac{2\pi}{360}\beta = \frac{\pi}{180}\beta},$$

also zum Beispiel $90^\circ \;\hat{=}\; \frac{\pi}{2}$, $180^\circ \;\hat{=}\; \pi$ und $45^\circ \;\hat{=}\; \frac{\pi}{4}$.



Bezeichnen wir zur Unterscheidung die *trigonometrischen Funktionen der Geometrie*, die sich auf Grad beziehen, vorübergehend mit $\widetilde{\sin}$ und $\widetilde{\cos}$ dann gelten offenbar für $0 \leq \beta < 360$ die Beziehungen:

$$\boxed{\widetilde{\sin}(\beta^\circ) = \sin\left(\frac{\pi}{180}\beta\right), \quad \widetilde{\cos}(\beta^\circ) = \cos\left(\frac{\pi}{180}\beta\right)},$$

also zum Beispiel: $\widetilde{\sin}(45^\circ) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Diese Unterscheidung im Argument ist insbesondere auch beim Umgang mit Taschenrechnern zu berücksichtigen. Bei diesen werden zum Beispiel die beiden Funktionen „$\widetilde{\sin}$" und „sin" meist mit dem gleichen Symbol bezeichnet. Die Nichtbeachtung der unterschiedlichen Argumente — Grad oder ‚Bogenmaß' — liefert dann oft recht verwirrende Resultate!

Aus Überlegungen zur Kreisberechnung, oder auch über (22) mit dem im Beweis zum Zwischenwertsatz beschriebenen Verfahren zur Nullstellenbestimmung, erhält man den Wert:

$$\pi = 3.14\,159\,265 \cdots .$$

Ich führe das hier nicht aus.

4.7 Die Funktionen tan, cot, Tan, Cot

Mit den Funktionen Sinus und Cosinus definieren wir als weitere *trigonometrische Funktionen* noch *„Tangens“* und *„Cotangens“*:

Definition *Mit* $D_{\tan} := \mathbb{R} \setminus \left\{(2m+1)\frac{\pi}{2} \ : \ m \in \mathbb{Z}\right\}$ *sei*

$$\begin{array}{rcl} \tan : D_{\tan} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \cup\!\!\!| & & \cup\!\!\!| \\ x & \longmapsto & \dfrac{\sin x}{\cos x} \end{array} ,$$

mit $D_{\cot} := \mathbb{R} \setminus \{m\pi \ : \ m \in \mathbb{Z}\}$ *entsprechend*

$$\begin{array}{rcl} \cot : D_{\cot} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \cup\!\!\!| & & \cup\!\!\!| \\ x & \longmapsto & \dfrac{\cos x}{\sin x} \end{array} .$$

Statt „**tan**“ und „**cot**“ werden auch die Bezeichnungen „**tg**“ und „**ctg**“ verwendet.

Aus den Überlegungen zu den trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus in Abschnitt 4.6 fließen für den Tangens sofort:

(1) *Die Funktion* tan *ist ungerade,* π*-periodisch und differenzierbar.*

$$\tan 0 \ = \ 0\,, \qquad \tan'(x) \ = \ 1 + (\tan x)^2 \ = \ \frac{1}{(\cos x)^2} \qquad (x \in D_{\tan})$$

<u>Beweis:</u> Die Differenzierbarkeit und die Formel für die Ableitung folgen mit (16), (20) aus Abschnitt 4.6 und der Quotientenregel: Für $x \in D_{\tan}$ gilt

$$\begin{aligned} \tan'(x) \ &= \ \frac{\sin'(x)\cos x \ - \ \sin x \cos'(x)}{(\cos x)^2} \ = \ \frac{\cos x \cos x \ - \ \sin x\,(-\sin x)}{(\cos x)^2} \\ &= \ \frac{(\cos x)^2 + (\sin x)^2}{(\cos x)^2} \,. \end{aligned}$$

Für die erste Darstellung kürzt man durch $(\cos x)^2$, für die zweite zieht man (20) aus Abschnitt 4.6 heran. Die restlichen Aussagen folgen mit (15) und (26) aus 4.6. □

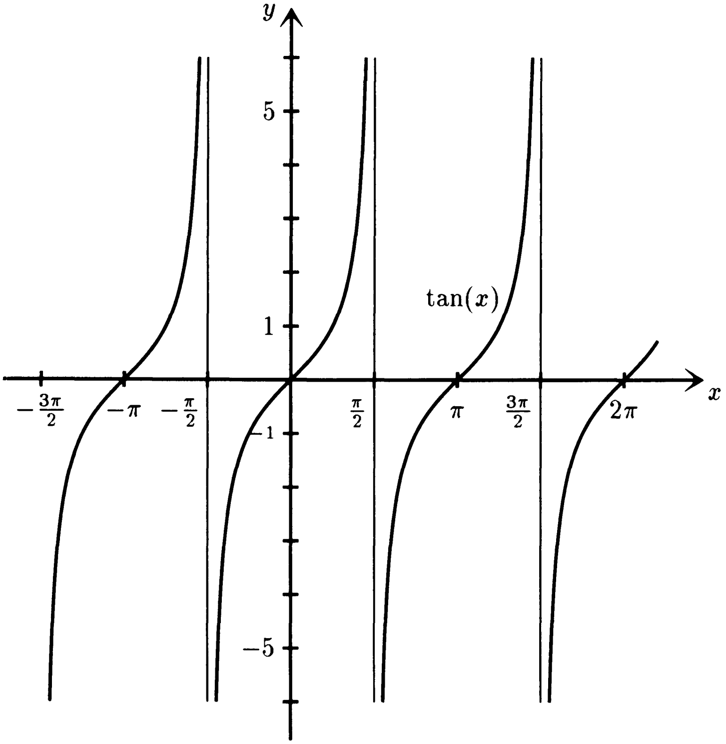
Nach (1) ist die Ableitung des Tangens immer positiv, daher gilt:

(2) *Die Funktion* tan *ist auf* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *streng isoton.*

Für $\frac{\pi}{2} > x \longrightarrow \frac{\pi}{2}$ streben $\sin x$ gegen 1 und $\cos x$ aus dem Positiven heraus gegen 0. Daraus folgt — mit (1) — :

(3) $\displaystyle\lim_{\frac{\pi}{2} > x \to \frac{\pi}{2}} \tan x \ = \ \infty$ *und* $\displaystyle\lim_{-\frac{\pi}{2} < x \to -\frac{\pi}{2}} \tan x \ = \ -\infty\,.$

Der *Graph von Tangens* ist auf der nächsten Seite abgebildet.



Die einfache Übertragung dieser Überlegungen auf den Cotangens überlasse ich den interessierten Lesern als Übungaufgabe.

Wir definieren als weitere *„Hyperbelfunktionen"* entsprechend den *„hyperbolischen Tangens"* und *„hyperbolischen Cotangens"*:

$$\operatorname{Tan} x := \operatorname{Tan}(x) := \frac{\operatorname{Sin}(x)}{\operatorname{Cos}(x)} \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{„\textit{Tangens hyperbolicus}"},$$

$$\operatorname{Cot} x := \operatorname{Cot}(x) := \frac{\operatorname{Cos}(x)}{\operatorname{Sin}(x)} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) \qquad \text{„\textit{Cotangens hyperbolicus}"}.$$

Andere Schreibweisen sind **tanh** und $\mathfrak{Tan}$ bzw. **coth** und $\mathfrak{Cot}$.

(4) Tan : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *ist ungerade und differenzierbar mit*

$$\operatorname{Tan} 0 = 0 \qquad \textit{und} \qquad \operatorname{Tan}'(x) = 1 - \big(\operatorname{Tan}(x)\big)^2 = \frac{1}{\big(\operatorname{Cos}(x)\big)^2}\,.$$

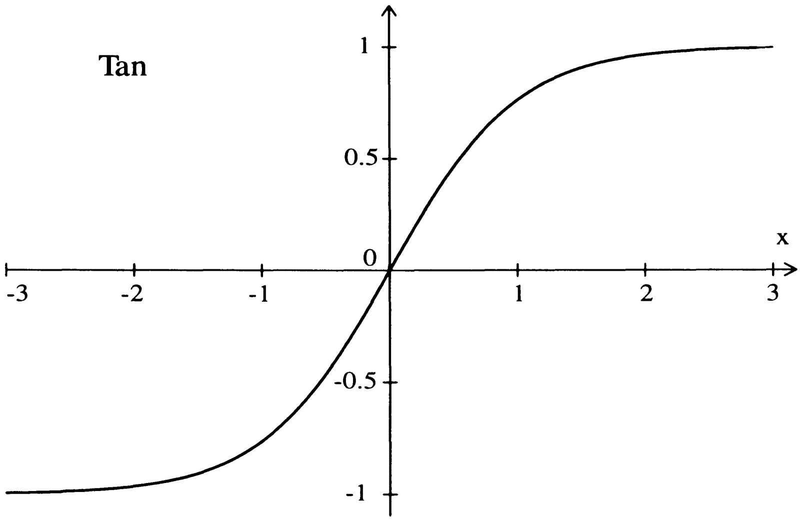
<u>Beweis:</u> (5), (6) und (7) aus 3.3.2 und (13) aus 4.6 ergeben mit der Quotientenregel sofort die Behauptung. □

(5) Tan *ist auf* $\mathbb{R}$ *streng isoton.*

<u>Beweis:</u> Die Ableitung ist nach (4) durchweg positiv. □

(6) $\lim_{x \to \infty} \operatorname{Tan} x = 1\,, \qquad \lim_{x \to -\infty} \operatorname{Tan} x = -1$

Beweis: Aus $\operatorname{Tan} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x}{e^x} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$ liest man — mit (4) — die Behauptung wegen $e^{-2x} \longrightarrow 0 \quad (x \longrightarrow \infty)$ direkt ab. □



Ich überlasse es wieder den mathematisch interessierten Lesern , diese Überlegungen als Routine-Übungsaufgabe auf den — weniger gebrauchten — hyperbolischen Cotangens zu übertragen.

4.8 Differentiation der Umkehrfunktion

Der folgende Satz zur Differentiation der Umkehrfunktion ergibt einen bequemen Zugang zu weiteren wichtigen Funktionen, u.a. zu der *Logarithmusfunktion* mit ihren charakteristischen Eigenschaften.

Satz *Vor.:* $\alpha, \beta, a \in \mathbb{R}$ *mit* $\alpha < a < \beta$,

$f : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig, streng isoton*, $b := f(a)$,

f *in* a *differenzierbar mit* $f'(a) \neq 0$

Beh.: $g := f^{-1}$ *ist in* b *differenzierbar mit* $\boxed{g'(b) = \frac{1}{f'(a)}}$.

Natürlich gilt der Satz entsprechend — Übergang $f \longmapsto -f$ — für eine *streng antitone Funktion*!

Die Umkehrfunktion zu f existiert wegen der strengen Monotonie. Der *Definitionsbereich der Umkehrfunktion ist der Wertebereich der ursprünglichen*

Funktion, also hier — mit dem Zwischenwertsatz — gerade $[f(\alpha), f(\beta)]$.

Anschaulich ist der Sachverhalt unmittelbar einsichtig:
Der *Übergang zur Umkehrfunktion bedeutet für die Graphen eine Spiegelung an der Geraden $y = x$ (Winkelhalbierende im 1. und 3. Quadranten)*; denn für $u \in [\alpha, \beta]$ und $v \in [f(\alpha), f(\beta)]$ gilt: $v = f(u) \iff u = g(v)$, und bei der angegebenen Spiegelung geht der Punkt (u, v) gerade in den Punkt (v, u) über. (Die Umkehrfunktion wird in der Regel wieder im ursprünglichen Koordinatensystem — mit x als Argument und y als Wert — dargestellt.)

Beweis: Ist $y \in [f(\alpha), f(\beta)] \setminus \{b\}$ und $x := g(y)$ $(\neq a)$ so hat man für den Differenzenquotienten:

$$\frac{g(y) - g(b)}{y - b} = \frac{x - a}{f(x) - f(a)} \longrightarrow \frac{1}{f'(a)} \qquad (x \longrightarrow a) .$$

Es ist also nur noch zu zeigen, daß $x \longrightarrow a$ aus $y \longrightarrow b$ folgt, also die *Stetigkeit der Umkehrfunktion.* Auf den Beweis dieser Teilaussage gehe ich nicht ein; ich verweise dazu beispielsweise auf [HEUSER I]. □

(1) In Abschnitt 4.6 hatten wir gesehen:

$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow]0, \infty[$ streng isoton und differenzierbar mit $\exp' = \exp$.

Die *Umkehrfunktion* $\exp^{-1}$ bezeichnen wir mit **ln**, gelesen *„natürlicher Logarithmus“*, *„logarithmus naturalis“* oder *„Logarithmusfunktion“*. Statt **ln** ist auch die Bezeichnung **log** gebräuchlich.

Die in Abschnitt 4.6 gezeigten Eigenschaften der Exponentialfunktion liefern:

$\ln :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *mit* $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$,

für $x, y \in]0, \infty[$: $\boxed{\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y}$ *und daher*

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y, \quad \textit{speziell}$$

$$\ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\ln y.$$

Der obige Satz zeigt:

Die Logarithmusfunktion ist differenzierbar mit $\boxed{\ln'(x) = \frac{1}{x}}$;

folglich ist $\ln :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *streng isoton.*

Für die Annäherung an die Grenzen des Definitionsbereiches hat man:

$$\lim_{x \to 0} \ln x = -\infty, \qquad \lim_{x \to \infty} \ln x = \infty .$$

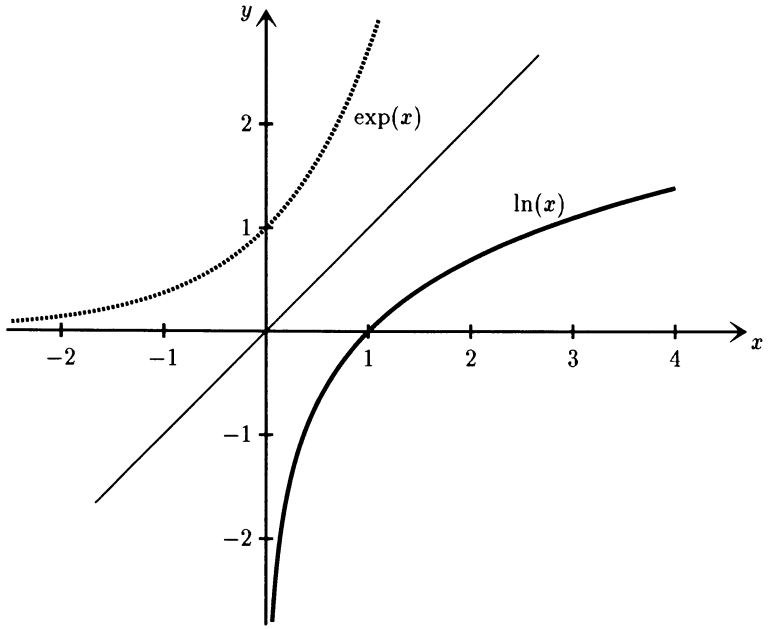
Beweis: $\ln :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, da $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow]0, \infty[$ bijektiv.

$\ln 1 = 0$ und $\ln e = 1$ folgen aus $\exp 0 = 1$ und $\exp 1 = e$.

Mit $u := \ln x$ und $v := \ln y$ hat man $x = \exp(u)$ und $y = \exp(v)$, also $x \cdot y = \exp(u) \cdot \exp(v) = \exp(u + v)$, somit $\ln(x \cdot y) = u + v =$

$\ln x + \ln y$. $\ln x = \ln\left(\frac{x}{y}\cdot y\right) = \ln\left(\frac{x}{y}\right) + \ln y$ liefert damit die nächste Aussage; $x := 1$ ergibt dann die folgende.
Für $s := \ln x$ ist $x = \exp(s)$, also $\ln'(x) = \dfrac{1}{\exp'(s)} = \dfrac{1}{\exp(s)} = \dfrac{1}{x}$.
$\ln(e^n) = n \ln e = n$ $(n \in \mathbb{N})$ liefert mit der Isotonie von ln die zweite Grenzwertaussage, und daraus folgt über $\ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\ln y$ die erste. □

Den *Graphen der Logarithmusfunktion* sollten Sie gut vor Augen haben:



(2) In Abschnitt 3.1 hatte ich schon die alternative Definitionsmöglichkeit von e angesprochen. Hier erhält man nun den Zusammenhang ganz einfach:

$$\boxed{e = \lim_{n \longrightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

Beweis: $n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \dfrac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln 1}{\frac{1}{n}} \longrightarrow \ln'(1) = 1$ ergibt $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln(1 + \frac{1}{n})\right) \longrightarrow \exp(1) = e \qquad (n \longrightarrow \infty)$ □

(3) Für $a > 0$ definieren wir die *allgemeine „Potenzfunktion“* durch:

$$a^x := \exp(x \ln a) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Diese Definition erfordert eine *Rechtfertigung*; denn es ist die Übereinstimmung mit den schon in Abschnitt 1.5 definierten Werten für spezielle Exponenten $x \in \mathbb{Z}$ zu zeigen:

Beweis: Für $n \in I\!N$ ist $\exp(n \ln a) \underset{4.6}{=} (\exp(\ln a))^n = a^n$, wobei jeweils die Potenz im Sinne von Abschnitt 1.5, also als iterierte Multiplikation, steht. Weiter gilt: $\exp(-n \ln a) \underset{4.6}{=} \dfrac{1}{\exp(n \ln a)} = \dfrac{1}{a^n} = a^{-n}$. □

Für den Umgang mit diesen allgemeinen Potenzen notieren wir :

α) $a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}$ $\quad (x_1, x_2 \in I\!R)$

β) $e^x = \exp(x \cdot \ln e) = \exp(x)$ $\quad (x \in I\!R)$

γ) Die durch $f(x) := a^x \quad (x \in I\!R)$ definierte Funktion f ist differenzierbar mit Ableitung $f'(x) = \ln(a) a^x$.

δ) Die durch $g(x) := x^a \quad (x > 0, a \in I\!R)$ definierte Funktion g ist differenzierbar mit Ableitung $g'(x) = a x^{a-1}$.

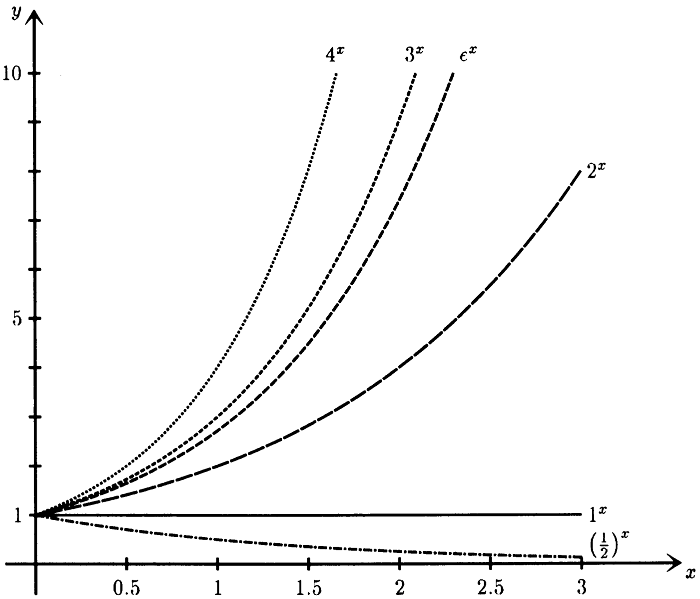
Teil β) zeigt, daß die schon in 4.6 statt $\exp(x)$ benutzte Notierungsweise e^x für $x \in I\!R$ zu der obigen Definition paßt.

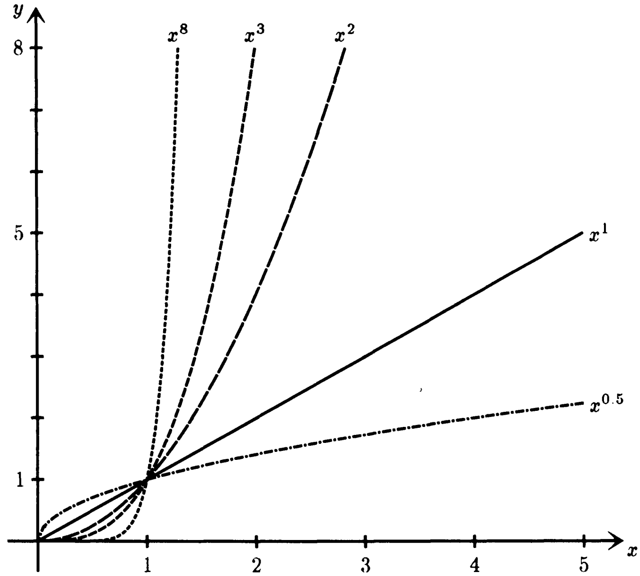
Beweis: α): $l.S. = \exp(x_1 \ln a) \cdot \exp(x_1 \ln a) \underset{4.6}{=} \exp((x_1 + x_2) \ln a) = r.S.$

γ) folgt unmittelbar aus der Kettenregel. Zu δ) rechnet man entsprechend wegen $g(x) = \exp(a \ln x)$: $g'(x) = x^a \cdot a \dfrac{1}{x} \underset{\alpha)}{=} a x^{a-1}$. □

Es sollte Sie nicht wundern, daß es Schwierigkeiten gibt, wenn die beiden obigen — ähnlich aussehenden — Funktionen f und g verwechselt werden. Es sind sehr verschiedene Funktionen!

Zum besseren Verständnis zeigen die folgenden beiden Abbildungen die Graphen von f (für die Werte $a = 0.5, 1, 2, e, 3$ und 4) und von g (für die Werte $a = 0.5, 1, 2, 3$ und 8) für positive x:





(4) Wir hatten in 4.6 weiter gesehen:

$\mathrm{Sin} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, streng isoton und surjektiv.

Daher existiert die Umkehrfunktion $\mathrm{Sin}^{-1} =: \mathbf{Ar\,Sin}$, gelesen *„Area Sinus hyperbolicus"*, und $\mathrm{Ar\,Sin} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *ist differenzierbar mit*

$$\mathrm{Ar\,Sin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} .$$

<u>Beweis:</u> $\mathrm{Ar\,Sin}'(x) \underset{(\mathrm{Satz})}{=} \dfrac{1}{\mathrm{Sin}'(t)} = \dfrac{1}{\mathrm{Cos}\,t} = \dfrac{1}{\sqrt{(\mathrm{Sin}\,t)^2+1}} =$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ $(x := \mathrm{Sin}\,t)$ □

Die Beweise der nachfolgenden fünf Aussagen ergeben sich in gleicher Weise. Ich führe diese daher nicht mehr gesondert aus.

(5) $\mathrm{Cos}_{/} : [0, \infty[\longrightarrow [1, \infty[$ differenzierbar, streng isoton und surjektiv.

Somit existiert die Umkehrfunktion $\left(\mathrm{Cos}_{/}\right)^{-1} =: \mathbf{Ar\,Cos}$, gelesen *„Area Cosinus hyperbolicus"*, und Ar Cos *ist differenzierbar* auf $]1, \infty[$ (dazu beachten: $\mathrm{Cos}_{/}$ ist auf $]0, \infty[$ differenzierbar mit Ableitung $\neq 0$) *mit*

$$\mathrm{Ar\,Cos}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} .$$

(6) $\mathrm{Tan} : \mathbb{R} \longrightarrow]-1, 1[$ differenzierbar, streng isoton und surjektiv.

Also existiert $\mathrm{Tan}^{-1} =: \mathbf{Ar\,Tan}$, gelesen *„Area Tangens hyperbolicus"*, und ArTan *ist differenzierbar* auf $]-1,1[$ *mit*

$$\mathrm{ArTan}'(x) = \frac{1}{1-x^2}\,.$$

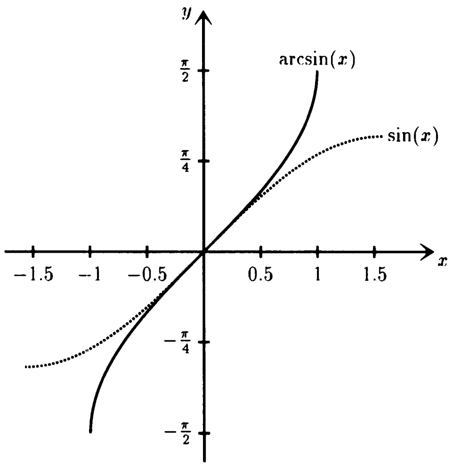
(7) $\sin_{/}\ :\ [-\pi/2,\pi/2] \longrightarrow [-1,1]$ differenzierbar, streng isoton und surjektiv. Daher existiert $(\sin_{/})^{-1} =:$ **arcsin**, gelesen *„Arcus Sinus“*, und arcsin *ist* auf $]-1,1[$ *differenzierbar mit*

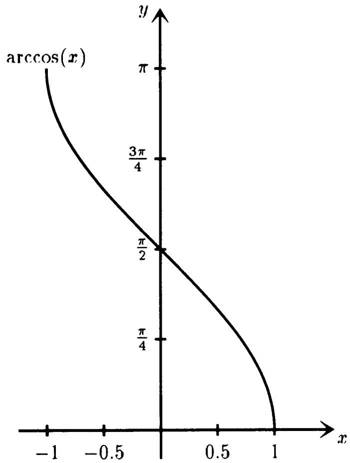
$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Natürlich kann hier — und in den beiden nachfolgenden Beispielen — auch ein anderes Grundintervall der Länge π, auf dem die Funktion streng monoton ist, gewählt werden. Die vorgestellten speziellen Umkehrfunktionen werden gelegentlich als *„Hauptzweig“* (von arcsin, arccos bzw. arctan) bezeichnet.

(8) $\cos_{/}\ :\ [0,\pi] \longrightarrow [-1,1]$ differenzierbar, streng antiton und surjektiv. So existiert $(\cos_{/})^{-1} =:$ **arccos**, gelesen *„Arcus Cosinus“*, und arccos *ist* auf $]-1,1[$ *differenzierbar mit*

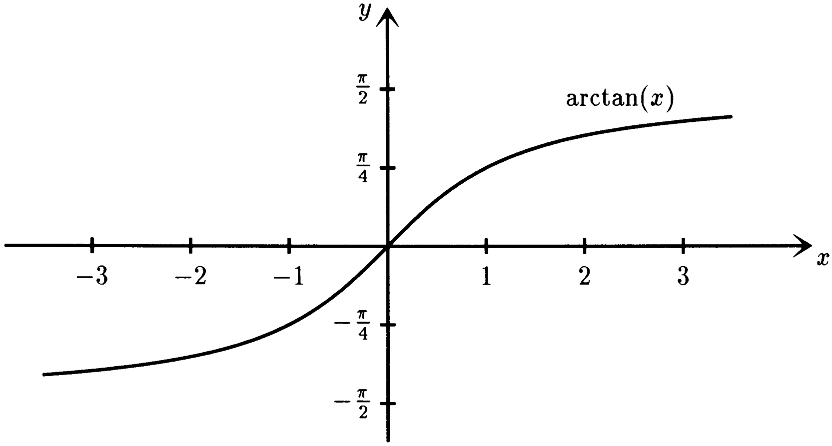
$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$





(9) $\tan_{/}\ :\ ]-\pi/2,\pi/2[\longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, streng isoton und surjektiv. Folglich existiert $(\tan_{/})^{-1} =:$ **arctan**, gelesen *„Arcus Tangens“*, und arctan *ist* auf $\mathbb{R}$ *differenzierbar mit*

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}\,.$$



4.9 Höhere Ableitungen

Wir haben gesehen, daß die Ableitung die *momentane Veränderungsrate* liefert und so lokale Aussagen über Wachsen, Fallen und Extremwerte erlaubt. Entsprechend wird die zweite Ableitung lokale Aussagen über das *Krümmungsverhalten* — *Konvexität, Konkavität, Wendepunkte* — ermöglichen.

Wir definieren zunächst allgemein *höhere Ableitungen*, und zwar unter den

Annahmen: $\left\|\begin{array}{l} -\infty \le \alpha_1 < \beta_1 \le \infty, \ ]\alpha_1, \beta_1[=: D_1 \subset D \subset \mathbb{R}, \\ f : D \longrightarrow \mathbb{R}, \ a \in D_1 . \end{array}\right.$

Wenn f in D_1 differenzierbar ist, kann die Ableitung selbst

$$f' : D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$$

— als eigenständige Funktion — wiederum auf Differenzierbarkeit untersucht werden: Ist f' in a differenzierbar, so bezeichnet man

$$f''(a) := f^{(2)}(a) := (f')'(a)$$

als *„zweite Ableitung von f in a"* und sagt: *„f ist in a zweimal differenzierbar"*. Falls f' in $D_2 := \,]\alpha_2, \beta_2[$ mit gewissen $\alpha_1 \le \alpha_2 < \beta_2 \le \beta_1$ differenzierbar ist, dann betrachten wir die *„zweite Ableitung von f"* :

$$\begin{array}{ccc} f'' : D_2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \cup\!\!\!\!\!\!\;\shortmid & & \cup\!\!\!\!\!\!\;\shortmid \\ x & \longmapsto & f''(x) . \end{array}$$

Analog werden Ableitungen höherer *‚Ordnung'* als 2 definiert; genauer natürlich rekursiv: Für ein $n \in \mathbb{N}$ heißt f in a *„$(n+1)$-mal differenzierbar"* genau dann, wenn f mit geeigneten $\alpha_1 \le \alpha_n < a < \beta_n \le \beta_1$ in

$D_n := \,]\alpha_n, \beta_n[$ n-mal differenzierbar ist und die Ableitung von $f^{(n)}$ in a noch existiert. Man notiert dann:

$$f^{(n+1)}(a) := \left(f^{(n)}\right)'(a)\,.$$

f heißt — für ein offenes Intervall $I \subset D_n$ — *„in I $(n+1)$-mal differenzierbar"* genau dann, wenn f in jedem $x \in I$ $(n+1)$-mal differenzierbar ist. Ist $I = D$, so sagen wir auch kürzer: f ist *„$(n+1)$-mal differenzierbar"*.

Mit $T \subset D$ heißt f (in a, in T) *„beliebig oft differenzierbar"* genau dann, wenn für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: f ist (in a, in T) n−mal differenzierbar.

(B1) Die Momentangeschwindigkeit $v(t)$ zur Zeit t hatten wir als $s'(t)$ definiert, wenn s die Position (eines sich geradlinig bewegenden Körpers) in Abhängigkeit von der Zeit t beschreibt. Die momentane Geschwindigkeitsänderung ist gegeben durch

$$v'(t) = s''(t) \qquad (\text{„}\mathit{Beschleunigung}\text{"})\,.$$

(B2) Eine Funktion, die an einer Stelle differenzierbar ist, muß dort nicht zweimal differenzierbar sein:

$f(x) := x\,|x|$ $(x \in \mathbb{R})$ ist in $\mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) = 2\,|x|$, also in 0 *nicht* zweimal differenzierbar.

Gelegentlich wird die Funktion f selbst auch als *„0-te Ableitung"* bezeichnet und $f^{(0)} := f$ notiert.

Ich gehe noch kurz auf die verbreitete Beschreibung von Ableitungen durch *„Differentialquotienten"* ein, die ich höchstens als laxe Notierungsweise und für einige Merkregeln nutzen möchte: Statt $f^{(n)}$ sieht man häufig die Schreibweisen

$$\frac{d^n}{dx^n} f = \frac{d^n f}{dx^n} = \left(\frac{d}{dx}\right)^n f\,,$$

gelesen beispielsweise als *„d hoch n nach dx hoch n von f"*, speziell für $n = 1$:

$$\frac{d}{dx} f = \frac{df}{dx} = \left(\frac{d}{dx}\right) f\,.$$

Mit $y = f(x)$ wird stattdessen oft auch

$$\frac{d^n y}{dx^n} \quad \text{bzw.} \quad \frac{dy}{dx}$$

geschrieben. Um die Stelle a, an der die Ableitung gebildet wird, zu kennzeichnen, schreibt man zum Beispiel

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n f\,\Bigg|_{x\,=\,a} \qquad \text{oder} \qquad \left(\frac{d}{dx}\right)^n f\,(a)\,.$$

Mit $y = f(x)$ und $z = h(y)$ kann man sich dann die *Kettenregel* in der Form

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

und die Ableitung der *Umkehrfunktion* — $x = x(y)$ — als

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{x'(y)}$$

merken. Sie sehen also in dieser Kurzform wie einfache *Regeln über Bruchrechnen* aus.

4.10 Konvexität, Konkavität

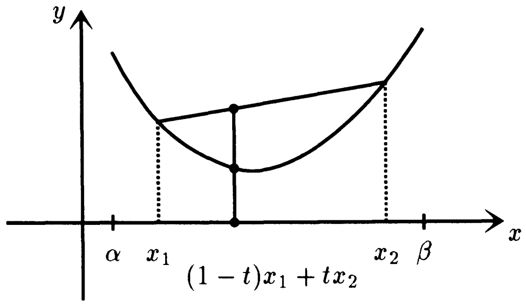
Annahme: $\| \; -\infty < \alpha < \beta < \infty, \;\; [\alpha, \beta] \subset D \subset I\!R, \;\; f : D \longrightarrow I\!R$

Definition *f heißt auf $[\alpha, \beta]$ „konvex" genau dann, wenn für alle $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$ und $t \in \,]0, 1[$*

$$f\big((1-t)x_1 + tx_2\big) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$$

gilt. Hat man jeweils sogar „<", so heißt f auch genauer „streng konvex".

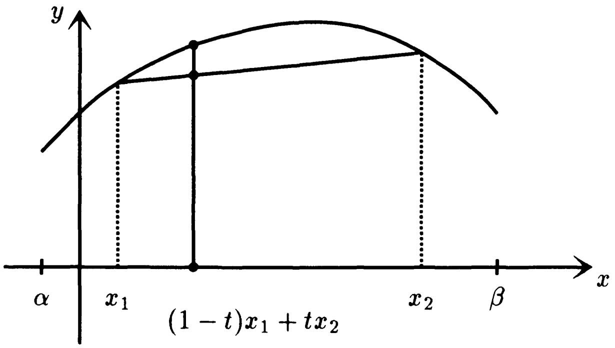
Die Konvexitätsbedingung läßt sich *anschaulich* wie folgt beschreiben: Der Graph von f liegt stets unterhalb (im unscharfen Sinne) der Verbindungsstrecke von je zwei Punkten des Graphen (über $[\alpha, \beta]$). Wenn Sie sich etwa vorstellen, in Richtung positiver x-Achse längs des Graphen zu fahren, dann beschreiben Sie eine *Linkskurve*.



Definition *f heißt auf $[\alpha, \beta]$ „konkav" genau dann, wenn für alle $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$ und $t \in \,]0, 1[$*

$$f\big((1-t)x_1 + tx_2\big) \geq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$$

gilt. Hat man jeweils sogar „>", so heißt f auch genauer „streng konkav".



Offenbar gilt: f *(streng) konkav* $\iff$ $-f$ *(streng) konvex.*

Wir können uns daher auf *Überlegungen zur Konvexität* beschränken:

Satz *Vor.: f differenzierbar*

Beh.: a) f konvex $\iff$ f' isoton

b) f streng konvex $\Longleftarrow$ f' streng isoton

Beweis: Für $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$ mit $x_1 < x_2$, $t \in]0,1[$ und $x := (1-t)x_1 + tx_2$ gilt $t = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ und daher $1 - t = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$. Die Konvexitätsbedingung

$$(1-t)f(x) + tf(x) = f(x) \overset{!}{\leq} (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$$

kann umgeschrieben werden zu

$$(1-t)\big(f(x) - f(x_1)\big) \leq t\big(f(x_2) - f(x)\big)$$

und so weiter zu einer Bedingung für die Differenzenquotienten:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \qquad (x_1 < x < x_2),$$

daß also die Durchschnittssteigung nach rechts hin zunimmt.

$\Longrightarrow$: $x \to x_1$ und $x \to x_2$ liefern: $f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2)$.

$\Longleftarrow$: Nach dem Mittelwertsatz existieren $\tau_1 \in]x_1, x[$ und $\tau_2 \in]x, x_2[$ mit $\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\tau_1) \leq f'(\tau_2) = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$;
für b) ist $f'(\tau_1) < f'(\tau_2)$ zu beachten. □

Folgerung *Vor.: f zweimal differenzierbar*

Beh.: a) f konvex $\iff \forall x \in]\alpha, \beta[\quad f''(x) \geq 0$

b) f streng konvex $\Longleftarrow \forall x \in]\alpha, \beta[\quad f''(x) > 0$

Beweis: Dies liest man unmittelbar aus dem vorangehenden Satz in Verbindung mit (6) aus Abschnitt 4.4, angewendet auf f', ab. □

Definition *Ist* $a \in]\alpha, \beta[$ *und für* $\alpha < \alpha_1 < a < \beta_1 < \beta$ *geeignet* f *auf* $[\alpha_1, a]$ *streng konvex und auf* $[a, \beta_1]$ *streng konkav bzw.* f *auf* $[\alpha_1, a]$ *streng konkav und auf* $[a, \beta_1]$ *streng konvex, so heißt* $(a, f(a))$ *„Wendepunkt".*

4.11 Anwendungen

4.11.1 Kurvenuntersuchungen

Um eine ungefähre Vorstellung vom ‚Verlauf' des Graphen einer Funktion f zu bekommen, macht man eine *„Kurvenuntersuchung"* (auch *„Kurvendiskussion"* genannt), in der wesentliche Aspekte von f untersucht und herausgearbeitet werden, um damit insbesondere auch eine aussagekräftige Skizze des Graphen erstellen zu können. Wesentliche Hilfsmittel werden dabei die in den Abschnitten 4.4. und 4.10 bereitgestellten Überlegungen sein.

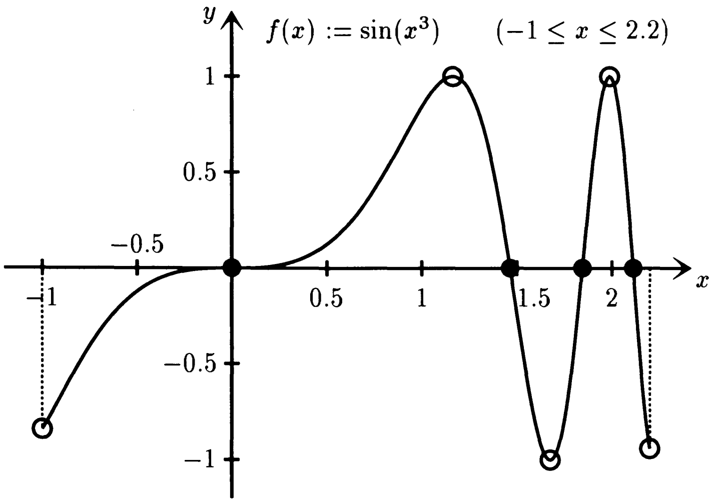
Es ist nützlich, bei einer Kurvenuntersuchung systematisch vorzugehen und sich grob etwa an folgendem **Schema** zu orientieren, wobei jedoch im Einzelfall auch eine andere Reihenfolge zweckmäßig sein kann:

1. (Maximalen) *Definitionsbereich* D von f bestimmen; eventuell auch *Wertebereich*.
2. Untersuchung, ob die Funktion *gerade, ungerade* oder *periodisch* ist. (Dies führt gegebenenfalls zu einer Reduktion des zu untersuchenden Bereichs!)
3. *Nullstellen* bestimmen (eventuell nur näherungsweise).
4. Einzelne (‚vernünftig' ausgewählte) Funktionswerte berechnen: *„Wertetabelle"*.
5. *Monotonieverhalten*: Teilintervalle aufsuchen, in denen f (streng) *monoton* ist.
   Dazu — falls f differenzierbar ist — die *Ableitung* f' berechnen.
6. Lokale und globale *Extremwerte* bestimmen.
7. Grenzverhalten an speziellen Stellen untersuchen. (Unstetigkeiten, Lücken, Rand, ...)
8. *Asymptoten* (und Position des Graphen zu Asymptoten)
9. *Krümmungsverhalten*: (Konvexität, Konkavität, Wendepunkte). Dazu gegebenenfalls die *zweite Ableitung* f'' heranziehen.
10. *Skizze* oder *Zeichnung* erstellen.

Ich möchte zunächst einige Punkte ergänzend kommentieren und dann Beispiele bringen:

<u>Zu 4.</u>: Was ich mit ‚vernünftig' meine, soll nur an nachfolgendem Bildchen etwas verdeutlicht werden.

Würde man ‚zufällig' nur die mit ● markierten Funktionswerte berechnen, so wäre das höchst unvernünftig; man bekäme durch diese Punkte alleine ein völlig schiefes Bild vom Verlauf der Funktion. Durch Hinzunahme der mit ○ markierten Funktionswerte hat man schon wesentlich bessere Information. Es kommt also darauf an, — in einem zu präzisierenden Sinne — charakteristische Werte zu finden.



<u>Zu 6.</u>: Für $a \in D$ heißt $f(a)$ *„globales Maximum"* (oder auch *„absolutes Maximum"*) genau dann, wenn $f(x) \leq f(a)$ für alle $x \in D$ gilt. Andere Sprechweisen dafür sind: *„f hat in a ein globales Maximum"* oder *„f nimmt an der Stelle a ein globales Maximum (mit Wert $f(a)$) an"*. Die vereinzelt zu lesende Formulierung „a ist globales Maximum" sollte man nicht verwenden.

Entsprechend sind die Begriffe *„globales Minimum"*, *„absolutes Minimum"* und damit dann *„globale* oder *absolute Extremwerte"* definiert.

An Stelle von *„Minimum"* und *„Maximum"* sagt man gelegentlich auch *„Tiefpunkt"* und *„Hochpunkt"*.

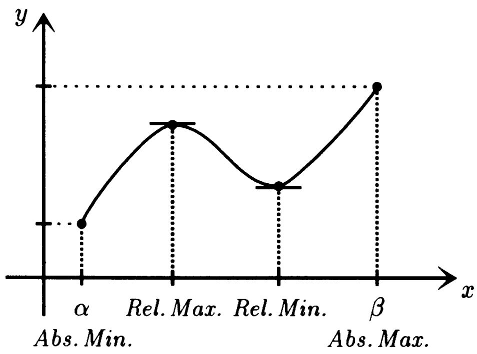
Statt von *„lokalen"* spricht man auch von *„relativen"* Extremwerten.

Die Suche nach Extremwerten hat von der Fragestellung her zunächst *nichts* mit Ableitungen zu tun. Doch *wenn* die zu untersuchende Funktion differenzierbar ist, liefert die Ableitung — über (2) aus Abschnitt 4.4 — meist ein mächtiges Instrument.

(B1) Die Funktion $f(x) := |x|$ $(x \in \mathbb{R})$ hat *im Punkt* 0 offenbar ein absolutes *Minimum* mit Wert 0; denn alle anderen Funktionswerte sind größer als 0. f ist jedoch *in* 0 *nicht differenzierbar*!

(B2) Die *Ableitung* der Funktion $f(x) := x^3$ $(x \in \mathbb{R})$ *ist* 0 im Punkte 0. Die Funktion f hat jedoch in 0 *kein Extremum* (nicht relativ und erst recht nicht absolut); denn sie ist auf ganz $\mathbb{R}$ streng isoton.

(B3) Die Funktion der nachfolgenden Abbildung hat relative Extrema im ‚Innern' — mit waagerechter Tangente, also über Nullstellen der Ableitung auffindbar. Die *absoluten Extremwerte* liegen jedoch *am ‚Rande'*.



Ist $D \supset [\alpha, \beta]$ mit $-\infty < \alpha < a < \beta < \infty$ und f *in* $]\alpha, \beta[$ *differenzierbar*, dann gilt (nach (2) aus 4.4):

Hat f in a ein lokales Extremum, so ist $f'(a) = 0$.

Da jedes globale Extremum, das im Innern angenommen wird, insbesondere ein lokales ist, kommen also — unter diesen Voraussetzungen — *für ein absolutes Extremum im Falle $D = [\alpha, \beta]$* nur noch die Stellen

$$\alpha, \beta \text{ und alle } a \in]\alpha, \beta[\text{ mit } f'(a) = 0$$

in Frage! (Dazu (B1), (B2) und (B3) beachten!) Oft reduziert sich dadurch die Extremwertsuche auf wenige Kandidaten.

Als zusätzliche *hinreichende* Bedingung wird (viel zu) oft noch die Bedingung $f''(a) < 0$ (für ein relatives Maximum) herangezogen:

(1) Bemerkung *Vor.: $f :]\alpha, \beta[\longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, in a zweimal differenzierbar; $f'(a) = 0, \quad f''(a) < 0$*

Beh.: f hat in a ein relatives Maximum.

Diese Bedingung ist häufig recht unhandlich. Viel einfacher sieht man das Gewünschte meist mit:

(2) *Vor.:* $f : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig,*
f *in* $]\alpha, a[$ *und in* $]a, \beta[$ *differenzierbar,*
$\forall x \in]\alpha, a[\; f'(x) \geq 0\,, \quad \forall x \in]a, \beta[\; f'(x) \leq 0$
Beh.: f *hat in* a *ein relatives Maximum.*

(2') *Gilt in dritten Zeile der Voraussetzung zu (2) stärker*
$\forall x \in]\alpha, a[\; f'(x) > 0\,, \quad \forall x \in]a, \beta[\; f'(x) < 0\,,$
so hat f *in* a *sogar ein „striktes Maximum“, das heißt:*
$f(x) < f(a)$ *für alle* $x \in [\alpha, \beta] \setminus \{a\}$.

Beweis (von (2) und (2')): Nach (6) aus Abschnitt 4.4 ist f auf $[\alpha, a]$ (streng) isoton und auf $[a, \beta]$ (streng) antiton. □

Beweis (von (1): Nach (1') aus 4.4 fällt f' in a; wegen $f'(a) = 0$ gilt daher für x hinreichend nahe bei a:
$f'(x) > 0$, falls $x < a$, und $f'(x) < 0$, falls $x > a$, und so nach (2') — sogar verschärft — die Behauptung. □

Durch Übergang von f zu $-f$ erhält man die entsprechenden Aussagen für *Minima*; ich führe das nicht explizit aus.

Zu 8.: Es seien $a, b \in \mathbb{R}$:

Die (nicht-senkrechte) Gerade g, definiert durch $g(x) := ax+b$, heißt *„Asymptote (für $x \to \infty$)“* [bzw. (für $x \to -\infty$)], genau dann, wenn (∞ Häufungspunkt zu D ist und)

$$f(x) - g(x) \longrightarrow 0 \qquad (x \longrightarrow \infty) \quad [\text{bzw. } (x \longrightarrow -\infty)]\,,$$

wenn also für große x die Funktion f relativ gut durch die i.allg. einfachere Funktion g beschrieben wird, oder — geometrisch ausgedrückt — sich der Graph von f an die Gerade g ‚anschmiegt‘.

Die durch $x = a$ definierte (senkrechte) Gerade heißt *„Asymptote (für $x \longrightarrow a$)“* genau dann, wenn (a Häufungspunkt zu D ist und) $|f(x)| \longrightarrow \infty$ für $x \longrightarrow a$.

Manchmal betrachtet man noch entsprechende *„einseitige Asymptoten“*, worauf ich jedoch nicht gesondert eingehen möchte.

Zur *Bestimmung von a und b* (im ersten Fall) kann man allgemein wie folgt vorgehen:

Aus $f(x) - g(x) = f(x) - ax - b \longrightarrow 0 \quad (\cdots)$ folgt
$\dfrac{f(x)}{x} \longrightarrow a \quad (\cdots)$, und dann ist $b = \lim\limits_{\cdots} \big(f(x) - ax\big)$.

Bei rationalen Funktionen gewinnt man Asymptoten oft einfacher durch Division mit Rest.

(B4) $\boxed{f(x) := \frac{2x^2 - 7x + 6}{x - 1} \qquad (x \neq 1)}$

Für die beiden Grenzübergänge $x \longrightarrow \infty$ und $x \longrightarrow -\infty$ rechnet man nach dem oben beschriebenen Verfahren: $\frac{f(x)}{x} = \frac{2x^2 - 7x + 6}{x^2 - x} \longrightarrow 2 =: a$ und weiter $f(x) - ax =$ $\frac{2x^2 - 7x + 6}{x - 1} - \frac{2x^2 - 2x}{x - 1} = \frac{-5x + 6}{x - 1} \longrightarrow -5 =: b$; demnach ist $g(x) := 2x - 5$ Asymptote.

Dies ergibt sich etwas einfacher durch Division mit Rest:

$$\frac{2x^2 - 7x + 6}{x - 1} = 2x - 5 + \frac{1}{x - 1}.$$

Der Rest $\frac{1}{x-1}$ strebt gegen 0 und ist für große x (‚rechts') positiv. Daher liegt die Asymptote rechts unterhalb des Graphen von f, entprechend links oberhalb.

(B5) Zu $\boxed{f(x) := \frac{1}{x} \qquad (x \neq 0)}$

ist offenbar die y–Achse $(x = 0)$ Asymptote für $x \longrightarrow 0$ und die x–Achse $(y = 0)$ für $x \longrightarrow \infty$ bzw. $x \longrightarrow -\infty$.

<u>Zu 10.</u>: Ob man nur eine grobe Skizze oder eine sehr genaue Zeichnung erstellt, hängt natürlich von den jeweiligen Anforderungen und besonders auch von den zur Verfügung stehenden Hilfsmitteln ab. Wenn heute Computerprogramme hierzu auch sehr große Hilfe bieten, so sollte man doch übungshalber wenigstens einige Skizzen von Hand erstellen.

Zum Abschluß dieses Teilabschnitts noch einige **Beispiele**:

(B6) $\boxed{f(x) := \frac{x - 2}{(2x - 5)^2}}$

1. $\frac{5}{2}$ ist die einzige Nullstelle des Nenners; daher ist der maximale *Definitionsbereich* $D = \mathbb{R} \setminus \{2.5\}$.
2. Die Funktion ist weder gerade noch ungerade noch periodisch.
3. Einzige *Nullstelle* ist 2 (als Nullstelle des Zählers).
4. Die kleine *Wertetabelle*

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	$-\frac{4}{81}$	$-\frac{3}{49}$	$-\frac{2}{25}$	$-\frac{1}{9}$	0	1	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{4}{49}$

gibt — wie wir gleich sehen werden — nur ein noch ziemlich ‚schiefes' Bild vom Verlauf des Graphen!

5. Die *Ableitung* berechnet sich (nach der Quotientenregel) zu:

$$f'(x) = \frac{(2x-5)^2 - (x-2)2(2x-5)2}{(2x-5)^4} = \frac{-2x+3}{(2x-5)^3}.$$

Für das *Monotonieverhalten* benötigt man das *Vorzeichen von* $f'(x)$, was man einfach etwa durch folgende kleine Tabelle erschließt, wobei man die Vorzeichen in Zähler und Nenner ohne Rechnung sieht, da durch $-2x+3$ und $2x-5$ jeweils Geraden beschrieben werden:

	$\longleftarrow$	$3/2$	$\longleftrightarrow$	$5/2$	$\longrightarrow$
$-2x+3$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$(2x-5)^3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	*nicht def.*	$-$

f ist demnach *in* $]-\infty, 3/2[$ *und in* $]5/2, \infty[$ *streng antiton, in* $]3/2, 5/2[$ *streng isoton.*

6. *Extremwerte*: f hat nach 5. in $3/2$ ein *relatives Minimum* mit Wert $f(3/2) = -1/8$.

7. *Grenzverhalten*: Für $x \longrightarrow \infty$ und $x \longrightarrow -\infty$ gilt $f(x) \longrightarrow 0$. Für $x \longrightarrow 2.5$ strebt der Zähler gegen eine positive Zahl und der Nenner — aus dem Positiven heraus — gegen 0, also $f(x) \longrightarrow \infty$.

   Ergänzend kann man daher nun feststellen: In $3/2$ liegt das *absolute Minimum*, und der *Wertebereich* ist $[-1/8, \infty[$.

8. *Asymptoten*: Die Überlegungen in 7. zeigten:

   Die *x-Achse ist waagerechte Asymptote.* Rechts von 2.5 liegt der Graph von f oberhalb, links von 2 unterhalb.

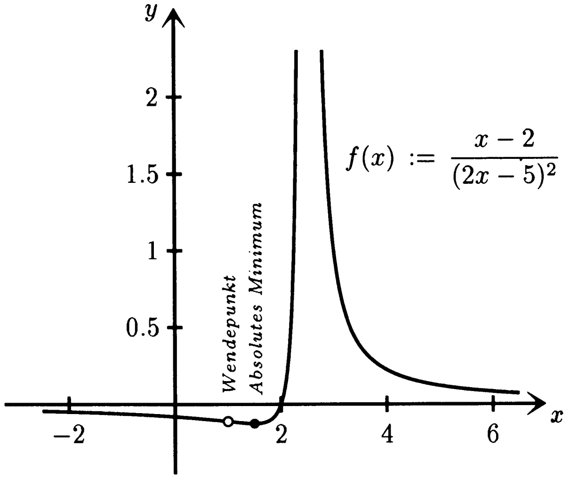
   Die senkrechte Gerade $x = 2.5$ *ist Asymptote.*

9. *Krümmungsverhalten*: Für die *zweite Ableitung* erhält man:

$$f''(x) = 8\,\frac{x-1}{(2x-5)^4}.$$

Sie ist also rechts von 1 positiv, links von 1 negativ. f ist somit *in* $]-\infty, 1]$ *streng konkav* und *in den Intervallen* $[1, 2.5[$ *und* $]2.5, \infty[$ *streng konvex.* In 1 liegt daher ein *Wendepunkt* mit Wert $f(1) = -1/9$.

10. *Zeichnung*:



(B7) $\boxed{f(x) := \sqrt{1-\cos x}}$

Dieses Beispiel soll verdeutlichen, daß es sehr hilfreich sein kann, sich die gegebene Funktion erst einmal etwas genauer anzusehen, statt einfach nur stur nach Schema vorzugehen!

Mit Cosinus ist die Funktion $\mathbb{R} \ni x \longmapsto 1 - \cos x$ bekannt, und daraus können dann schon sehr viele Dinge direkt abgelesen werden, wenn noch berücksichtigt wird, daß die Wurzelfunktion streng isoton ist:

1. Der *Definitionsbereich* D ist ganz $\mathbb{R}$; denn aus $\cos x \leq 1$ folgt $1 - \cos x \geq 0$. $\cos x$ variiert zwischen -1 und 1, also $1 - \cos x$ zwischen 0 und 2. Daher ist der *Wertebereich* von f gerade $[0, \sqrt{2}]$.
2. Mit cos ist auch f *2π-periodisch*; daher genügt die *Untersuchung* (zum Beispiel) *auf dem Intervall* $[0, 2\pi]$.
3. Die *Nullstellen* sind genau die Stellen, an denen cos den Wert 1 annimmt, also — im Intervall $[0, 2\pi]$ — 0 und 2π.
4. Kleine *Wertetabelle*:

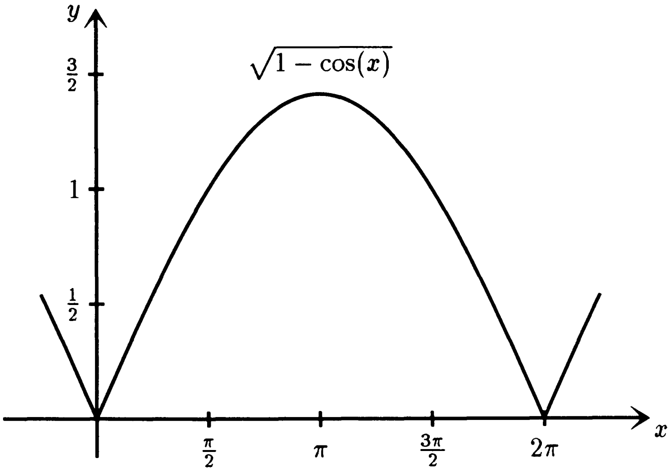
x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π
$f(x)$	0	y_1	1	y_2	$\sqrt{2}$	y_2	1	y_1	0

   mit $y_1 := \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}} \approx 0.541$ und $y_2 := \sqrt{1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}} \approx 1.307$.

5. f ist *auf* $[0, \pi]$ *streng isoton*, da cos dort streng antiton ist; entsprechend ist f *auf* $[\pi, 2\pi]$ *streng antiton.*
6. Nach 5. weiß man: f nimmt in 0 (und 2π) das *absolute Minimum* mit Wert 0 und in π das *absolute Maximum* mit Wert $\sqrt{2}$

an. Während man das Maximum auch — jedoch etwas mühsamer — über die Nullstellen der ersten Ableitung bestimmen könnte, versagt dies bei dem Minimum: f ist *in* 0 *nicht differenzierbar.*

7. Bei diesem Beispiel ist es nicht sinnvoll, irgendein *Grenzverhalten* zu untersuchen; denn die Funktion ist 2π-periodisch und auf dem gesamten Intervall $[0, 2\pi]$ stetig.
8. Die Funktion hat offenbar *keine Asymptoten.*
9. Auf das *Krümmungsverhalten* gehe ich hier nicht ein.
10. Zeichnung:



Die aus dem Graphen und auch aus der Wertetabelle erkennbare *Symmetrie zur Geraden* $x = \pi$ hätte man auch schon vorweg begründen und dann die Untersuchung sogar auf das Intervall $[0, \pi]$ beschränken können:

$\cos(\pi + x) = -\cos x = -\cos(-x) = \cos(\pi - x)$.

11. Eine weitere Möglichkeit, bei der Untersuchung dieser Funktion die erforderlichen Überlegungen zu reduzieren, wäre der Nachweis — über das Additionstheorem vom Cosinus — von:

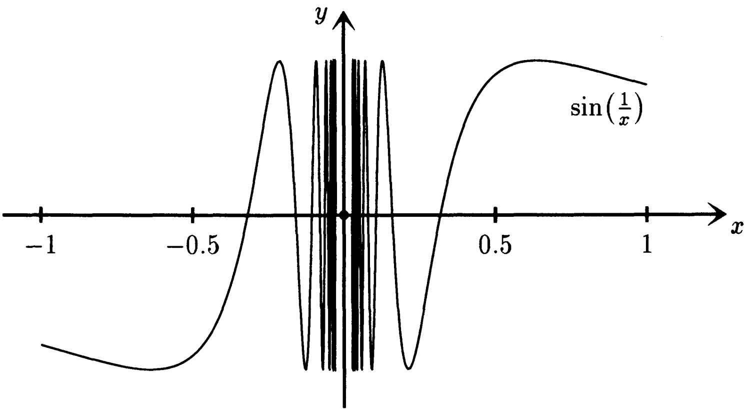
$$\sqrt{2}\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right| = \sqrt{1-\cos x}\ .$$

(B8) $$\boxed{f(x) := \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right), & (x \neq 0) \\ 0, & (x = 0) \end{cases}}$$

1. Der *Definitionsbereich* D ist $\mathbb{R}$, der *Wertebereich* offensichtlich $[-1, 1]$.

Bei diesem Beispiel gehe ich nur noch auf 7., 8. und 10. ein; denn viele der anderen Punkte lassen sich ganz einfach aus dem bekannten Verlauf von Sinus ablesen.

7. Für diese Funktion *existiert weder der links- noch der rechtsseitige Grenzwert in* 0; denn für $x_n := \dfrac{1}{(2n+\frac{1}{2})\pi}$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ gelten $f(x_n) = \sin\left((2n+\frac{1}{2})\pi\right) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$, $f(-x_n) = -1$ und $x_n \longrightarrow 0$. Für $z_n := \dfrac{1}{(2n-\frac{1}{2})\pi}$ $(n \in \mathbb{N})$ hat man entsprechend $f(z_n) = -1$, $f(-z_n) = 1$ und $z_n \longrightarrow 0$.
8. Für $x \longrightarrow \pm\infty$ strebt $\frac{1}{x}$ gegen 0, also auch $f(x)$. Die *x-Achse ist* demnach für diese beiden Grenzübergänge *waagerechte Asymptote*; nach rechts hin liegt der Graph schließlich oberhalb, links schließlich unterhalb der Asymptote.
10. Der engere Bereich um 0 wurde bei der folgenden *Zeichnung* ausgespart, weil sonst — wegen der dort immer dichter beieinander liegenden ‚Schleifen' — fast nur noch ein großer schwarzer Fleck erkennbar wäre.



(B9)
$$f(x) := \begin{cases} x \cdot \sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & (x \neq 0) \\ 0, & (x = 0) \end{cases}$$

Auch bei diesem Beipiel gehe ich nur auf wenige Teilaspekte ein:

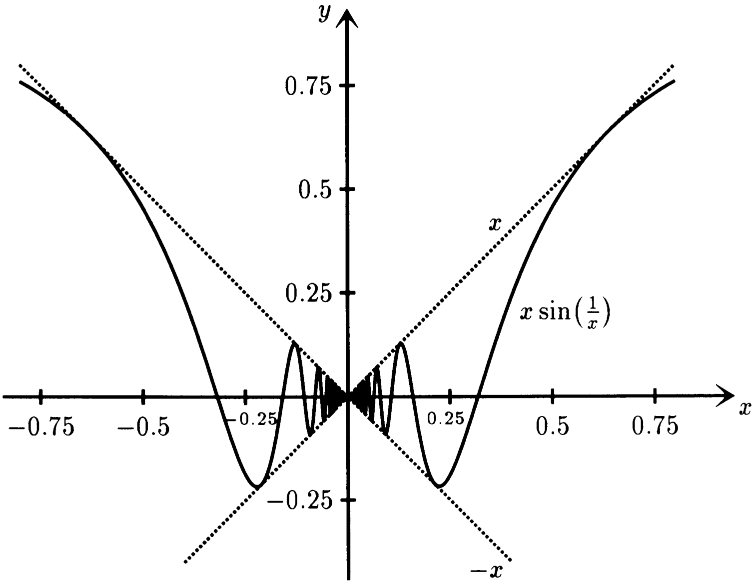
1. Der *Definitionsbereich* D ist wieder ganz $\mathbb{R}$.
2. f ist *gerade*; denn für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ hat man:
   $f(-x) = -x \sin\left(\dfrac{1}{-x}\right) = x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = f(x)$.
7. Der Faktor x ‚dämpft' bei 0 die ‚Schwingungen', und dadurch

wird — anders als im vorangehenden Beispiel — die Funktion f *in* 0 *stetig*, insbesondere existiert also der Grenzwert für $x \longrightarrow 0$:

$$|f(x) - f(0)| = |f(x)| \leq |x| \longrightarrow 0 \quad (\text{für } x \longrightarrow 0).$$

Der Begriff der Stetigkeit läßt also offensichtlich Möglichkeiten zu, die der naiven Anschauung doch etwas fremdartig und merkwürdig erscheinen.

10.



(B10) $\boxed{f(x) := \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}}$

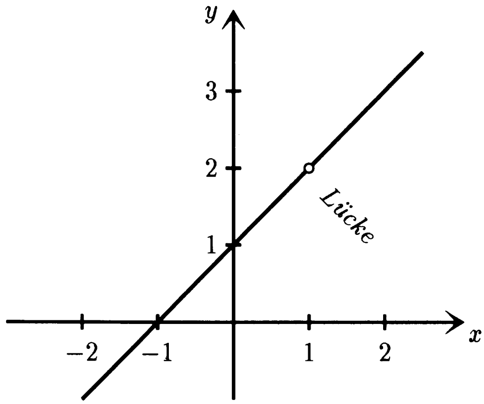
1. Der *Definitionsbereich* D ist $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Für $x \in D$ ist $f(x) = x+1$. Bis auf die Stelle 1, wo f nicht definiert ist, stimmt also f mit der durch $a(x) := x + 1 \quad (x \in \mathbb{R})$ gegebenen Geraden überein. Der *Wertebereich* ist gerade der Wertebereich von a ohne $a(1)$, also $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

   Eine weitere Diskussion erübrigt sich damit eigentlich, da f bis auf die Stelle 1 mit der Geraden a übereinstimmt und somit voll überblickt wird. Ich liste daher nur noch einige Punkte auf:

3. Einzige *Nullstelle* ist -1.
5. f ist überall *streng isoton* mit Steigung 1.
6. Es existieren — nach 5. — *keine Extrema*.
7. Bei 1 hat f eine *Lücke*. Die Funktion a ist gerade die, die man durch *stetige Ergänzung* von f erhält.

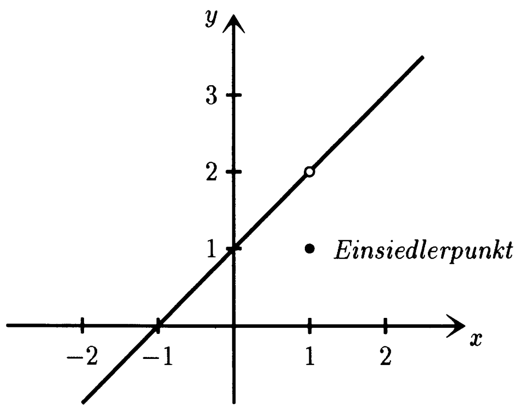
8. Für die beiden Grenzübergänge $x \longrightarrow \pm\infty$ ist a — trivialerweise — *Asymptote*.

10.



(B11) $$\boxed{f(x) := \begin{cases} x+1 \ , & (x \neq 1) \\ 1 \ , & (x = 1) \end{cases}}$$

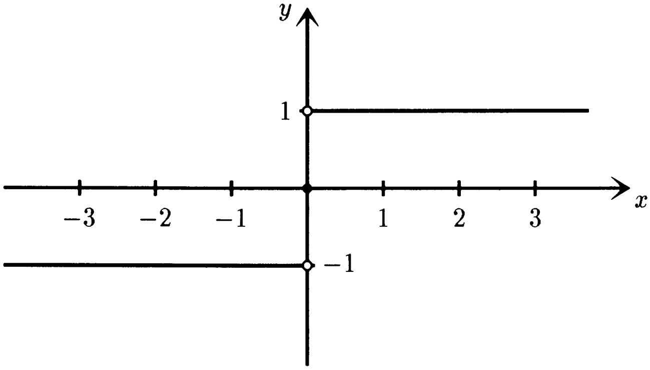
Hier gilt: $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2 \neq 1 = f(1)$;
1 ist also *hebbare Unstetigkeitsstelle* bzw. *Einsiedlerpunkt*.



(B12) $$\boxed{f(x) := \operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}}$$

Hier sind an der Stelle 0 die einseitigen Grenzwerte verschieden und zudem noch beide verschieden vom Funktionswert; 0 ist somit insbesondere *Sprungstelle*:

$$\lim_{0>x\to 0} f(x) = -1, \quad \lim_{0<x\to 0} f(x) = 1, \quad f(0) = 0.$$



Man könnte einwenden, daß solche Beispiele mit Unstetigkeiten, insbesondere Sprüngen, lediglich Ausgeburten von verqueren Mathematiker-Hirnen sind und im ‚richtigen Leben' gar nicht vorkommen. Dazu möchte ich beispielsweise nur erinnern an Dinge wie: Einschalt-Prozesse, Einkommensteuer in Abhängigkeit vom steuerpflichtigen Einkommen, Telefonkosten in Abhängigkeit von der Gesprächsdauer, Ankunftszeit am Zielort bei einer Busfahrt zum Flughafen in Abhängigkeit vom Erscheinen an der (Abfahrts-)Haltestelle des Busses.

4.11.2 Extremwertaufgaben

Meist finden sich *Extremwertaufgaben* in verkleideter Form, zu der erst eine Beschreibung durch eine geeignete Funktion, die auf Extrema zu untersuchen ist, zu finden ist. Die Schwierigkeit liegt erfahrungsgemäß mehr in diesem Schritt, aus einem oft in Worten formulierten Sachverhalt die richtige mathematische Beschreibung herauszukristallisieren, als in der Bestimmung der Extremwerte mit den Hilfsmitteln des vorangehenden Teilabschnittes. Drei einfache Beispiele sollen das Vorgehen erläutern:

(B13) *Gegeben sei eine positive Zahl S. Gesucht sind $x, y > 0$ mit $x + y = S$ derart, daß $x \cdot y$ maximal wird.*

Stellen Sie sich dazu zum Beispiel vor, daß Sie einen Draht der festen Länge $2S$ haben, mit dem Sie ein möglichst großes rechteckiges Grundstück einzäunen wollen (maximaler Flächeninhalt eines Rechtecks bei vorgegebenem Umfang):

Zunächst einmal verwirrt vielleicht, daß *zwei* Variable auftreten; doch das ist kein echtes Problem, da — aufgrund der Nebenbedingung $x + y = S$ — die eine durch die andere beschrieben werden kann: $y = S - x$; es ist also die Funktion $f(x) := x(S - x)$

im Intervall $[0, S]$ auf Maxima zu untersuchen. Die Ableitung ist $f'(x) = S - 2x$ (für $x \in]0, S[$), also: $f'(x) = 0 \iff x = \frac{S}{2}$. $f'(x)$ ist positiv für $x < \frac{S}{2}$ und negativ für $x > \frac{S}{2}$. Folglich ist f in $[0, \frac{S}{2}]$ streng isoton, in $[\frac{S}{2}, S]$ streng antiton. Daher nimmt f in $x = \frac{S}{2}$ das *(strikte) absolute Maximum* mit *Wert* $\frac{1}{4}S^2$ an. Für dieses x ist $y = \frac{S}{2} = x$.

Ich möchte noch darauf hinweisen, daß die Aufgabe auch ohne die in diesem Kapitel hergeleiteten Hilfsmittel ganz einfach — über quadratische Ergänzung (anschaulich Parabel!) — gelöst werden kann: Es ist $f(x) = -\left(\frac{S}{2} - x\right)^2 + \frac{1}{4}S^2$, und daraus liest man alles *ohne weitere Rechnung* ab, da $-\left(\frac{S}{2} - x\right)^2$ für $x = \frac{S}{2}$ den Wert 0 hat und sonst negativ ist.

(B14) *Gegeben sei eine positive Zahl P. Gesucht sind $x, y > 0$ mit $x \cdot y = P$ derart, daß $x + y$ minimal wird.*

Hier wird also beispielsweise bei fester Fläche ein Rechteck mit minimalem Umfang — $2(x+y)$ — gesucht.

Wegen $y = \frac{P}{x}$ ist die Funktion $f(x) := x + \frac{P}{x}$ für $x > 0$ auf Minima zu untersuchen: Die Ableitung ist $f'(x) = 1 - \frac{P}{x^2}$, also für $x > \sqrt{P}$ positiv und für $x < \sqrt{P}$ negativ. Für $x = \sqrt{P}$ erhält man somit das *absolute Minimum* mit Wert $2\sqrt{P}$. Für dieses x ist $y = \frac{P}{\sqrt{P}} = \sqrt{P} = x$.

(B15) Bezeichnet $K(x)$ die *Kosten*, die zur Produktion von x Einheiten eines bestimmten Gutes anfallen, und $E(x)$ den *Erlös* beim Verkauf, dann liefert $G(x) := E(x) - K(x)$ den entsprechenden *Gewinn*. Ein Produzent wird natürlich bestrebt sein, einen Wert x zu finden, der *maximalen Gewinn* liefert.

Nimmt man idealisierend an, daß x *kontinuierlich* veränderbar ist, d.h. beliebige Werte eines Intervalls annimmt, und K und E differenzierbar sind, dann kann die Aufgabe mit den Hilfsmitteln dieses Kapitels angegangen werden: Es muß also zunächst $G'(x) = 0$, also $K'(x) = E'(x)$, gelten: Der *„Grenzerlös"* $E'(x)$ und die *„Grenzkosten"* $K'(x)$ müssen an dieser Stelle übereinstimmen. Als ergänzendes hinreichendes Kriterium über die zweite Ableitung kennen wir: $G''(x) < 0$, das heißt $K''(x) > E''(x)$. (Die Steigung der Grenzerlösfunktion muß kleiner als die der Grenzkostenfunktion sein.) Setzt man $E(x) = \alpha x$ mit einem positiven α voraus (Erlös proportional zur verkauften Menge), so gilt $E''(x) = 0$. Die obige Bedingung ist also erfüllt, wenn $K''(x) > 0$ gilt, somit die *Kosten-*

funktion noch *konvex* in einer Umgebung von x ist. In konvexen Abschnitten der Kostenkurve sind also Punkte gesucht, deren Tangente parallel zur Erlöskurve ist, also die mit Steigung α.

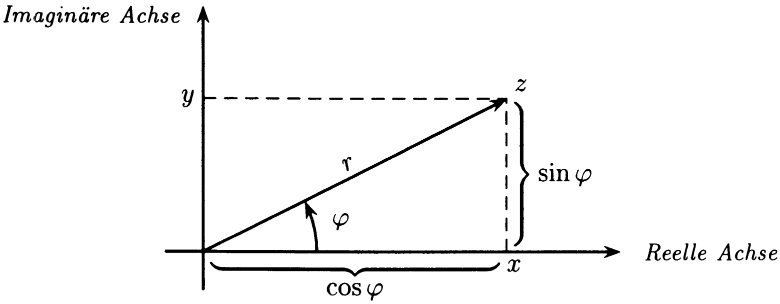
4.12 Polarkoordinatendarstellung komplexer Zahlen

Außer dem ‚cartesischen Koordinatensystem' benutzt man zur Beschreibung von Punkten aus $\mathbb{C}$ oft zweckmäßig ein *„Polarkoordinatensystem"*, in dem jede komplexe Zahl durch ihren Betrag r und einen Winkel φ beschrieben wird:

(1) Bemerkung *Ist* $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *(mit* $x, y \in \mathbb{R}$*), dann existieren eindeutig* $0 \leq \varphi < 2\pi$ *(„Argument von* z*")* *und* $0 < r < \infty$ *mit*

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r\exp(i\varphi) \quad (= re^{i\varphi}) .$$

Dabei gelten: $r = |z|$, $x = r\cos\varphi$ *und* $y = r\sin\varphi$.



Beweis: $\frac{z}{|z|}$ hat den Betrag 1; daher folgt — mit $r := |z|$ — die eindeutige Existenz eines solchen φ aus (31), Abschnitt 4.6. $|\exp(i\varphi)| = 1$ (dazu (21) aus 4.6 beachten!) zeigt, daß notwendig $r = |z|$ gilt. Damit folgt der Rest der letzten Zeile durch Vergleich von Real- und Imaginärteil. □

Aus (17) und (27) aus Abschnitt 4.6 ergibt sich:

Ist $z = r\exp(i\varphi)$, *so gilt auch* $z = r\exp\big(i(\varphi + 2k\pi)\big)$ *für jedes* $k \in \mathbb{Z}$.

(2) Bemerkung *a)* *Für* $z = r\exp(i\varphi)$ *ist* $\overline{z} = r\exp(i(-\varphi))$.

b) $\big(r_1\exp(i\varphi_1)\big)\big(r_2\exp(i\varphi_2)\big) = r_1 r_2 \exp\big(i(\varphi_1+\varphi_2)\big)$

c) **Formel von** MOIVRE *Für* $n \in \mathbb{N}$:

$$\big(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\big)^n = r^n\big(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\big)$$

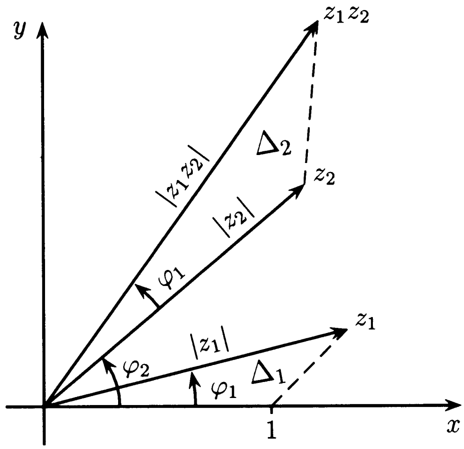
Beweis: a): $z = r\exp(i\varphi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, also
$\overline{z} = r(\cos\varphi - i\sin\varphi) = r(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)) = r\exp(i(-\varphi))$.
b): $l.S. = r_1r_2\left(\exp(i\varphi_1)\exp(i\varphi_2)\right) = r_1r_2\exp(i\varphi_1 + i\varphi_2) = r.S.$
c): Durch Induktion über n aus b). □

Teil b) liefert auch die Begründung für die in der folgenden Zeichnung skizzierte **Geometrische Konstruktion des Produktes** — die Beträge werden multipliziert, die Winkel addiert —:

Es seien $z_1 = r_1\exp(i\varphi_1)$ und $z_2 = r_2\exp(i\varphi_2)$. Wegen

$$\frac{|z_1z_2|}{|z_2|} = \frac{|z_1|}{1}$$

sind die beiden Dreiecke Δ_1 und Δ_2 ähnlich.
Durch eine ‚Drehstreckung' ergibt sich z_1z_2.



Definition *Für $a \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ heißt $z \in \mathbb{C}$ mit $z^n = a$ eine „n-te Wurzel aus a"; speziell für $a = 1$ auch „n-te Einheitswurzel".*

Es seien $a, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $a = \varrho\exp(i\psi)$ und $z = r\exp(i\varphi)$ $(\cdots)$.

Dann gilt: $z^n = a \iff r^n\exp(i(n\varphi)) = \varrho\exp(i\psi)$

$$\iff r^n = \rho \wedge n\varphi = \psi + 2k\pi \qquad (\text{für ein } k \in \mathbb{Z})$$

$$\iff z = \sqrt[n]{\varrho}\,\exp\left(i\left(\frac{\psi + 2k\pi}{n}\right)\right) \qquad (\text{für ein } k \in \mathbb{Z})$$

Unter diesen z_k sind die für $k = 0, \ldots, n-1$ paarweise verschieden und liefern schon alle Werte; also:

Bemerkung *Durch* $z_k := \sqrt[n]{\varrho}\,\exp\left(i\left(\dfrac{\psi + 2k\pi}{n}\right)\right) \quad (k = 0, \ldots, n-1)$

sind gerade alle n-ten Wurzeln aus a gegeben.

Speziell gilt somit:

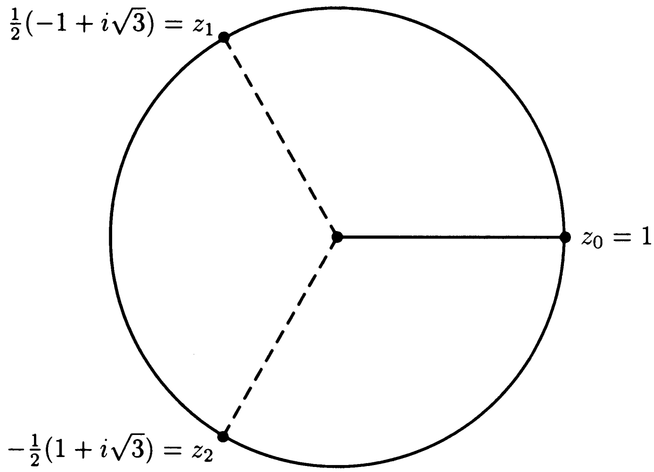
Bemerkung *Durch* $\exp\left(i\left(\dfrac{\psi + 2k\pi}{n}\right)\right) \quad (k = 0, \ldots, n-1)$

sind gerade alle n-ten Einheitswurzeln gegeben.

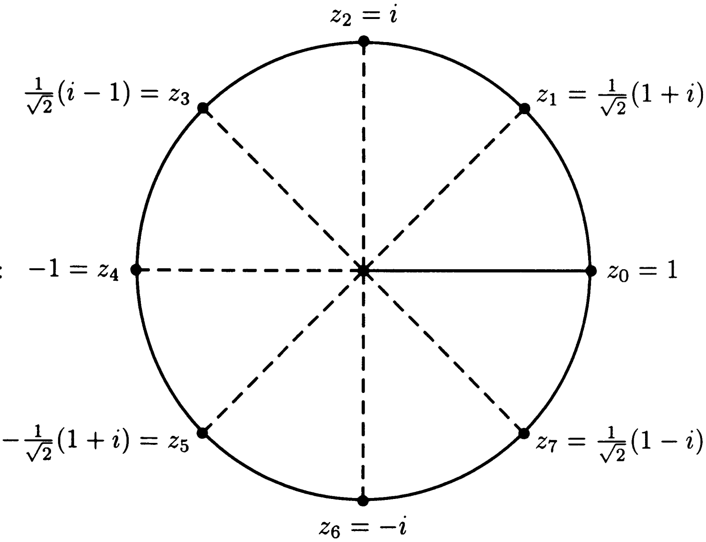
Ich erwähne nur am Rande, daß die Gleichung $z^n = 1$ *„Kreisteilungs-*

gleichung" heißt, was insbesondere durch die nachfolgenden beiden Beispiele plausibel wird:

(B1) $n = 3$:



(B2) $n = 8$:



Rückblick

In diesem Kapitel wurde der Begriff der *Differenzierbarkeit*, einer der bedeutendsten der Analysis — sowohl für die theoretische Erschließung als auch für die praktische Handhabung —, eingeführt und ausgiebig behandelt. Meistens konnte Differenzierbarkeit routinemäßig durch Grundregeln (*Ableitungskalkül*) und bereitgestellte Hilfsmittel erkannt werden; im Einzelfall war jedoch auch ein direkter Nachweis auf der Grundlage der Definition erforderlich.

Mit Hilfe von Ableitungen konnte das *Wachtumsverhalten* einer Funktion *quantitativ erfaßt* werden, und es ergaben sich Folgerungen für das *lokale Verhalten* — insbesondere für *Monotonie* und *Extremwerte.*

Entsprechend ermöglichte die zweite Ableitung (lokale) Aussagen über das *Krümmungsverhalten — Konvexität, Konkavität, Wendepunkte.*

Erste Überlegungen über die *Exponentialfunktion*, die *trigonometrischen Funktionen* und die *Hyperbelfunktionen*, die wir in Kapitel 3 gemacht haben, konnten mit den neuen Hilfsmitteln entscheidend ausgestaltet werden. Hierzu wurde der Satz über *Differentiation von Potenzreihen* wesentlich benutzt. Als wichtige Aussagen für das Arbeiten mit der Exponentialfunktion und den trigonometrischen Funktionen haben wir die *Funktionalgleichung*, die EULER*sche Formel* und die *Additionstheoreme* kennengelernt.

Der ‚abstrakte' Zugang (über Potenzreihen) zu diesen Funktionen lieferte die wichtigen Eigenschaften mit relativ wenig Aufwand. (In den Kapiteln 7 und 8 werden wir insbesondere von der komplexen Exponentialfunktion ausgiebig Gebrauch machen.)

Bei der Differenzierbarkeit habe ich mich der Einfachheit halber auf Punkte in einem offenen Intervall (‚innere' Punkte) beschränkt; ich bin nicht auf *einseitige Differenzierbarkeit* eingegangen, was aber — da ja einseitige Grenzwerte behandelt wurden — eine bei Bedarf ganz einfach zu schließende Lücke ist.

Mit der Überlegung zur *Differentiation von Umkehrfunktionen* ergab sich ein bequemer Zugang zu weiteren Funktionen, u.a. zu der *Logarithmusfunktion* mit ihren wichtigsten Eigenschaften.

Als *Anwendungen* der Überlegungen dieses Kapitels sind wir insbesondere noch eingegangen auf:

- *Kurvendiskussionen*,
- *Extremwertaufgaben* (Mini-Max-Probleme) und
- *Polarkoordinaten-Darstellung komplexer Zahlen*.

Bevor Sie zu Kapitel 5 übergehen, sollten Sie den Ableitungskalkül sicher beherrschen, da speziell der Abschnitt 5.1 unmittelbar darauf aufbaut.

Kapitel 5

Integralrechnung

Lernziel

Die Begriffe *Stammfunktion (unbestimmtes Integral)*

$$\int^{x} f(t)\,dt$$

und *bestimmtes (eigentliches und uneigentliches) Integral*

$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{bzw. zum Beispiel} \qquad \int_0^\infty f(x)\,dx$$

— und deren geometrische Interpretationen als *Flächeninhalt* — sind verstanden und können auch für verschiedenartige Anwendungen, so zum Beispiel die *Volumenberechnung von Rotationskörpern*, eingesetzt werden. Die Grundregeln

- *Linearität*
- *Partielle Integration*
- *Substitutionsregel*

für das Aufsuchen von Stammfunktionen und zur Berechnung bestimmter Integrale werden beherrscht.

Die Bedeutung des *Fundamentalsatzes*, einerseits als entscheidendes Bindeglied zwischen Integration und Differentiation, andererseits als zentrales Hilfsmittel für die praktische Berechnung von Integralen, wird klar.

Die *Techniken zum Aufsuchen von Stammfunktionen* zu den behandelten Typen, speziell für beliebige *rationale Funktionen*, sind — mit Hilfe der gegebenen Anleitungen — geläufig.

Die dargestellten einfachen numerischen Gesichtspunkte, speziell zu *Trapez- und* SIMPSON-*Regel*, können praktisch umgesetzt werden.

Wesentliche Wurzeln für die Entstehung der Integralrechnung waren Probleme der allgemeinen *Inhaltsmessung*, insbesondere auch krummlinig begrenzter Bereiche. So dienen Integrale im einfachsten Fall zur Bestimmung von *Längen*, *Flächen* und *Volumina*. Dahinter verbergen sich in den verschiedenen Anwendungen Aufgaben wie zum Beispiel: Berechnung von Arbeit, Weg, Potential, Kosten, Erlös, Gewinn, Konsumenten- und Produzentenrente.

Die Berechnung von Integralen über die Definition (hier als RIEMANN-Integral) ist meist beschwerlich und viel zu aufwendig. Der *Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung* in 5.2.3 zeigt, daß *Stammfunktionen* (Funktionen, die eine gegebene Funktion als Ableitung haben) ein sehr leistungsfähiges Hilfsmittel liefern und dieses Vorgehen für stetige Integranden — prinzipiell — immer möglich ist. Die Bedeutung dieses Satzes für die Mathematik und ihre Anwendungen kann kaum überschätzt werden; er verbindet die beiden zentralen — ursprünglich und von der Fragestellung her völlig getrennten — Gebiete der Analysis: *Differential- und Integralrechnung.*

Eine wesentliche Aufgabe ist daher das *kalkülmäßige Aufsuchen von Stammfunktionen* für große Klassen von wichtigen Funktionen, was wir in Abschnitt 5.1 relativ ausführlich behandeln.

5.1 Stammfunktionen (unbestimmte Integrale)

5.1.1 Grundlagen

Aufgabe: *Gegeben:* j Intervall, $f : j \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetige* Funktion

Gesucht: Eine differenzierbare Funktion $F : j \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\boldsymbol{F'(x) = f(x)} \qquad \text{für } x \in j\,.$$

Das Problem ist also die *Umkehrung der Differentiation.*

In einfachsten Fällen kann man ein solches F sofort hinschreiben, z.B.:

$$\begin{array}{lllll}
f(x) = e^x & (x \in \mathbb{R}) & : & F(x) = e^x & \\
f(x) = 2x & (x \in \mathbb{R}) & : & F(x) = x^2 & \\
f(x) = \sin x & (x \in \mathbb{R}) & : & F(x) = -\cos x & \\
f(x) = \frac{1}{x} & (x > 0) & : & F(x) = \ln x & \\
f(x) = a & (x \in \mathbb{R}) & : & F(x) = ax & (a \text{ Konstante})
\end{array}$$

Definition *Ist j Intervall, $f : j \longrightarrow \mathbb{R}$ Funktion und $F : j \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Funktion mit*

$$F'(x) = f(x) \qquad (x \in j),$$

dann heißt F „Stammfunktion (Stf) zu f“.

<u>*Schreibweise:*</u> $F(x) = \int^x f(t)\,dt$ *(*„unbestimmtes Integral“*)*

Dies ist *keine Gleichung* im üblichen Sinne, sondern notiert nur die Aussage: F ist *eine* Stammfunktion zu f.

<u>Warnung:</u> $\int^x f(t)\,dt = F(x) \wedge \int^x f(t)\,dt = G(x)$ impliziert *nicht* $F(x) = G(x)$;

denn: F *Stf zu* f: G *Stf zu* $f \Longleftrightarrow F - G$ *konstant.*

Regel I

Vor.: $f, g : j \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig;* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
$\int^x (\alpha f + \beta g)(t)\,dt = \alpha \int^x f(t)\,dt + \beta \int^x g(t)\,dt$ *(„Linearität“)*

(In Worten: *Man erhält eine Stammfunktion zu $\alpha f + \beta g$, indem man eine Stammfunktion F zu f und eine Stammfunktion G zu g sucht und dann $\alpha F + \beta G$ bildet.*)

Der <u>Beweis</u> ist unmittelbar durch die Linearität der Differentiation gegeben. □

<u>Speziell</u>:

$$\begin{aligned}
&(a) \quad \int^x (f + g)(t)\,dt = \int^x f(t)\,dt + \int^x g(t)\,dt \\
&(b) \quad \int^x (f - g)(t)\,dt = \int^x f(t)\,dt - \int^x g(t)\,dt \\
&(c) \quad \int^x (\alpha f)(t)\,dt = \alpha \int^x f(t)\,dt
\end{aligned}$$

(B1) $f(x) = 2x,\ g(x) = \sin x,\quad h(x) = 7x + 2\sin x \qquad (x \in \mathbb{R})$

$$\int^x h(t)\,dt = \int^x \big(3.5\,f(t) + 2\,g(t)\big)\,dt = 3.5\,x^2 - 2\cos x \quad (+\ \text{Konstante})$$

Regel II

(„Partielle Integration“)
Vor.: $u, v : j \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig differenzierbar*
$\displaystyle\int^x u'(t)\,v(t)\,dt = u(x)\,v(x) - \int^x u(t)\,v'(t)\,dt$

<u>Beweis:</u> $(uv)'(t) = u'(t)v(t) + u(t)v'(t)$ (Produktregel), also

$$u(x)v(x) = \int^x u'(t)v(t)\,dt + \int^x u(t)v'(t)\,dt \qquad \square$$

(B2) *Gesucht: Stammfunktion zur Funktion* ln

$$\int^x \ln(t)\,dt = \int^x 1 \cdot \ln(t)\,dt \qquad \big(u(t) := t,\ v(t) := \ln(t)\big)$$

$$= x\ln x - \int^x t\,\frac{1}{t}\,dt = x\ln x - x \qquad (x>0)$$

Regel III

$$\boxed{\begin{array}{l}\textit{(Substitutionsregel)}\\ \textit{Vor.: } i,\ j \textit{ Intervalle, } f: i \longrightarrow \mathbb{R} \textit{ stetig}\\ \qquad \varphi : j \longrightarrow i \textit{ stetig differenzierbar}\\ \displaystyle\int^x f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int^{\varphi(x)} f(s)\,ds\end{array}}$$

<u>Beweis:</u> Ist F Stf zu f, dann gilt *(Kettenregel)*

$(F\circ\varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\,\varphi'(t) = f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$

$r.S. = F(\varphi(x)) = (F\circ\varphi)(x) = l.S.$ □

Man merkt sich diese Regel in der Form:

$s := \varphi(t)$, $\dfrac{ds}{dt} = \varphi'(t)$; ‚läuft' t bis x, dann läuft $s=\varphi(t)$ bis $\varphi(x)$.

Manchmal ist es günstiger, *anders* zu *substituieren*:
In einem Intervall, in dem φ' konstantes Vorzeichen hat (dazu genügt, daß φ' dort keine Nullstelle hat), ist φ umkehrbar. Mit der zugehörigen *Umkehrfunktion* ψ gilt $\boxed{\psi'(\varphi(t)) = \dfrac{1}{\varphi'(t)}}$, und III lautet dann (für ψ statt φ sowie s und t vertauscht): $\int^x f(\psi(s))\,\psi'(s)\,ds = \int^{\psi(x)} f(t)\,dt.$

Wertet man dies an der Stelle $\varphi(x)$ statt x aus, so erhält man:

Regel IIIa

$$\boxed{\int^{\varphi(x)} f(\psi(s))\,\psi'(s)\,ds = \int^x f(t)\,dt}$$

(B3) $\boxed{\int^x \sin(at+b)\,dt = ?}$ $\qquad (a\neq 0)$

$\varphi(t) := at+b, \quad f(x) := \sin x \qquad (\varphi'(t) = a)$

$$l.S. = \int^x f(\varphi(t))\,dt = \frac{1}{a}\int^x f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt \underset{\text{(III)}}{=} \frac{1}{a}\int^{\varphi(x)} f(s)\,ds$$
$$= \frac{1}{a}\big(-\cos(\varphi(x))\big) = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)$$

Die folgenden beiden Beispiele sind sehr wichtig:

(B4) *(Zu II:)* $\boxed{\int^x (1+t^2)^{-n}\,dt = ?}$ $\qquad (n\in\mathbb{N})$

$n=1: \quad \int^x (1+t^2)^{-1}\,dt = \arctan x \qquad$ (bekannt)

$$\begin{aligned}
\int^x (1+t^2)^{-n}\,dt &= \int^x 1\cdot(1+t^2)^{-n}\,dt \\
&\underset{(\mathrm{II})}{=} x(1+x^2)^{-n} - \int^x t\,(-n)(1+t^2)^{-(n+1)}2t\,dt \\
&= x(1+x^2)^{-n} + 2n\int^x \frac{(t^2+1)-1}{(1+t^2)^{n+1}}\,dt \\
&= x(1+x^2)^{-n} + 2n\int^x (1+t^2)^{-n}\,dt - 2n\int^x (1+t^2)^{-(n+1)}\,dt
\end{aligned}$$

Man erhält so die *Rekursionsformel:*

$$\boxed{\int^x (1+t^2)^{-(n+1)}\,dt = \frac{1}{2n}\,x(1+x^2)^{-n} + \frac{2n-1}{2n}\int^x (1+t^2)^{-n}\,dt}$$

(Diese und die folgende Formel sollte man nicht auswendig lernen. Man muß wissen, daß es solche Fomeln gibt, und sie anwenden können.)

(B5) *(Zu III:)* $\boxed{\int^x \frac{2b(t-\beta)+c}{\left((t-\beta)^2+\gamma^2\right)^m}\,dt = ?}$ $(m \in \mathbb{N}; b,c,\beta \in \mathbb{R}, \gamma > 0)$

$$l.S. = \underbrace{b\int^x \frac{2(t-\beta)}{\left((t-\beta)^2+\gamma^2\right)^m}\,dt}_{=:\,\mathbf{A}} + \underbrace{c\int^x \left((t-\beta)^2+\gamma^2\right)^{-m}\,dt}_{=:\,\mathbf{B}}$$

Mit $\varphi(t) := (t-\beta)^2+\gamma^2$, also $\varphi'(t) = 2(t-\beta)$, erhält man

$$A = \int^{\varphi(x)} \frac{1}{s^m}\,ds = \begin{cases} \ln\left((x-\beta)^2+\gamma^2\right) & , m = 1 \\ \frac{1}{1-m}\left((x-\beta)^2+\gamma^2\right)^{1-m} & , m \geq 2 \end{cases}$$

Mit $\varphi(t) := (t-\beta)/\gamma$, also $\varphi'(t) = 1/\gamma$, dann

$$B = \frac{1}{\gamma^{2m}}\int^x \frac{1}{\left(\left(\frac{t-\beta}{\gamma}\right)^2+1\right)^m}\,dt = \frac{1}{\gamma^{2m-1}}\int^{\varphi(x)} \frac{1}{(s^2+1)^m}\,ds\,, \quad \text{also}$$

auf (B4) zurückgeführt.

5.1.2 Integraltafel (Tabelle von Stammfunktionen)

Zur Erleichterung der weiteren Arbeit stellen wir die wichtigsten der bisher (aus Text und den zugehörigen Übungen) schon bekannten Stammfunktionen bzw. Ableitungen zusammen:

$f(x)$ $F'(x)$	$\int^x f(t)\,dt$ $F(x)$	Bemerkungen
x^α	$\frac{1}{\alpha+1}\,x^{\alpha+1}$	$x>0;\ \alpha\neq -1$ °
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$x\neq 0$
e^x	e^x	
$\ln x$	$x\ln x - x$	$x>0$
$\cos x$	$\sin x$	
$\sin x$	$-\cos x$	
$\frac{1}{(\cos x)^2} = 1+(\tan x)^2$	$\tan x$	$x\neq(2n+1)\frac{\pi}{2}\ (n\in\mathbb{Z})$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$\lvert x\rvert<1$
$\frac{1}{x^2+a^2}$	$\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)$	$a\neq 0$
$\pm\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}$	$\ln\left\lvert x\pm\sqrt{x^2+a}\right\rvert$	$a\neq 0,\ x^2+a>0$
$\operatorname{Cos} x$	$\operatorname{Sin} x$	
$\operatorname{Sin} x$	$\operatorname{Cos} x$	
$\frac{1}{(\operatorname{Cos} x)^2} = 1-(\operatorname{Tan} x)^2$	$\operatorname{Tan} x$	
$\frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{ArTan} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$	$\lvert x\rvert<1$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{ArCos} x$	$x>1$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{ArSin} x$	

° Natürlich können für spezielle α allgemeinere x zugelassen werden.

5.1.3 Integration rationaler Funktionen

In diesem Abschnitt werden wir ein Verfahren kennenlernen, welches gestattet, zu *jeder rationalen Funktion* systematisch — also ohne besondere Kunstgriffe — eine Stammfunktion zu finden.

Es ist sicher eleganter und durchsichtiger, die folgenden Überlegungen gleich ‚komplex' zu machen; doch die Erfahrung zeigt, daß dies doch sehr vielen Lesern erhebliche Schwierigkeiten bereitet. Daher rechnen wir ‚reell', obwohl *mir* das weniger gefällt.

Es seien P und Q Polynome (Q nicht konstant 0) und

$$R(x) := \frac{P(x)}{Q(x)} \qquad \left(x \in D_R := \{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}\right)$$

Bekannt (Division mit Rest) ist: Es existieren Polynome P_0, P_1, Q_1 mit $\operatorname{grad} P_1 < \operatorname{grad} Q_1$ so, daß $R(x) = P_0(x) + \dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)}$. Da wir für jedes Polynom P_0 sofort eine Stammfunktion angeben können, nehmen wir Œ an, daß schon $\underline{\operatorname{grad} P < \operatorname{grad} Q}$ gilt („*echter (Polynom–)Bruch*“).

In der (komplexen) Funktionentheorie beweist man sehr einfach den „**Fundamentalsatz der Algebra**“:

(Dieser Satz läßt sich auch ohne funktionentheoretische Hilfsmittel beweisen, der Beweis wird aber dann recht aufwendig.)

Vor.: Q (reelles) Polynom mit $\operatorname{grad} Q =: n \geq 1$ *und höchstem Koeffizient* 1

Beh.: Q läßt sich darstellen als Produkt

$$Q(x) = (x-\alpha_1)^{k_1} \cdots (x-\alpha_r)^{k_r} \left[(x-\beta_1)^2 + \gamma_1^2\right]^{m_1} \cdots \left[(x-\beta_s)^2 + \gamma_s^2\right]^{m_s}$$

mit $r, s \in \mathbb{N}_0, \quad k_\rho, m_\sigma \in \mathbb{N}, \quad \alpha_\rho, \beta_\sigma, \gamma_\sigma \in \mathbb{R}, \quad \gamma_\sigma > 0,$
α_ρ *paarweise verschieden,* $(\beta_\sigma, \gamma_\sigma)$ *paarweise verschieden*
und $k_1 + \cdots + k_r + 2(m_1 + \cdots + m_s) = n$.

Damit folgt nun — auch das notiere ich ohne Beweis — (für Q mit der o.a. Darstellung)

$$\begin{aligned} R(x) = {} & \left[\frac{a_{1,1}}{x-\alpha_1} + \cdots + \frac{a_{1,k_1}}{(x-\alpha_1)^{k_1}}\right] + \cdots + \left[\frac{a_{r,1}}{x-\alpha_r} + \cdots + \frac{a_{r,k_r}}{(x-\alpha_r)^{k_r}}\right] \\ & + \left[\frac{2b_{1,1}(x-\beta_1) + c_{1,1}}{(x-\beta_1)^2 + \gamma_1^2} + \cdots + \frac{2b_{1,m_1}(x-\beta_1) + c_{1,m_1}}{\left((x-\beta_1)^2 + \gamma_1^2\right)^{m_1}}\right] + \cdots + \\ & + \left[\frac{2b_{s,1}(x-\beta_s) + c_{s,1}}{(x-\beta_s)^2 + \gamma_s^2} + \cdots + \frac{2b_{s,m_s}(x-\beta_s) + c_{s,m_s}}{\left((x-\beta_s)^2 + \gamma_s^2\right)^{m_s}}\right] \end{aligned}$$

mit geeigneten reellen Zahlen $a_{\varrho,\kappa}$, $b_{\sigma,\mu}$ und $c_{\sigma,\mu}$.
Diese Darstellung heißt „**Partialbruchzerlegung**“ (von R).

Die Berechnung einer Stammfunktion von R ist damit reduziert auf die Berechnung von Stammfunktionen zu Funktionen folgenden Typs:

a) $\dfrac{1}{(x-\alpha)^k}$: *Stf* : $\begin{cases} \dfrac{1}{1-k}\,\dfrac{1}{(x-\alpha)^{k-1}} & \text{, falls } k > 1 \\ \ln|x-\alpha| & \text{, falls } k = 1 \end{cases}$

b) $\dfrac{2b(x-\beta) + c}{\left((x-\beta)^2 + \gamma^2\right)^m}$: (schon in (B 5) behandelt.)

‚Praxis' der Partialbruchzerlegung:

(0) (Gegebenenfalls) Division mit Rest (gibt Polynom + echten Bruch)

(1) Bestimmung der Nullstellen von Q mit Vielfachheiten
(gibt α_ρ, β_σ, γ_σ, k_ρ, m_σ)

(2) Bestimmung der Konstanten $a_{\rho,\kappa}$, $b_{\sigma,\mu}$, $c_{\sigma,\mu}$

(3) Berechnung der Stammfunktionen der Summanden (Typ a) oder b) !)

Zu (2): Möglichkeiten (Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten)

(a) allgemeine Methode: Mit $Q(x)$ erweitern, dann Koeffizientenvergleich: Gibt n lineare Gleichungen für n Unbekannte.

(b) spezielle Methoden: Zum Beispiel:

$R(x)(x-\alpha_1)^{k_1}\Big|_{x=\alpha_1}$ gibt a_{1,k_1} usw.

Wertevergleich für $x = c$

Limes für $x \to \infty$ vergleichen

nochmals Division mit Rest

... ...

Wir wollen das Ganze an einigen nicht-trivialen Beispielen ausgiebig erläutern und einüben:

(B6) $$\boxed{\frac{3x^5+9x^4-28x^3+13x^2+6x-59}{x^2+3x-10}} =: f(x)$$

(0) Division mit Rest:

$$\begin{array}{l}
\left(3x^5+9x^4-28x^3+13x^2+6x-59\right) : \left(x^2+3x-10\right) = 3x^3+2x+7+\dfrac{5x+11}{x^2+3x-10} \\
-\underline{(3x^5+9x^4-30x^3)} \\
\qquad\qquad 2x^3 \\
\qquad -\underline{(2x^3+6x^2-20x)} \\
\qquad\qquad 7x^2+26x \\
\qquad\quad -\underline{(7x^2+21x-70)} \\
\qquad\qquad\qquad 5x+11
\end{array}$$

(1) Nullstellen von $x^2+3x-10$: $2, -5$; daher Ansatz:

(2) $$\frac{5x+11}{x^2+3x-10} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+5} \qquad / \cdot (x^2+3x-10)$$

$5x+11 = a(x+5) + b(x-2)$; Koeffizientenvergleich ergibt:

$5 = a+b, \quad 11 = 5a-2b$: $a=3 \quad b=2$

(3) $f(x) = 3x^3+2x+7+\dfrac{3}{x-2}+\dfrac{2}{x+5}$, also ist (eine) Stf zu f:

$\frac{3}{4}x^4 + x^2 + 7x + 3\ln|x-2| + 2\ln|x+5|$.

(B7) $\boxed{\dfrac{15x^2+26x-5}{x^3+3x^2-4}} =: f(x)$

(0) entfällt, da schon echter (Polynom–)Bruch

(1) Nullstellen des Nenners: 1, −2, −2; daher <u>Ansatz</u>:

(2) $$\frac{15x^2+26x-5}{x^3+3x^2-4} = \frac{15x^2+26x-5}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+2}+\frac{c}{(x+2)^2}$$

$/ \cdot (x-1)$, dann $x=1$: $\qquad 4=a$

$/ \cdot (x+2)^2$, dann $x=-2$: $\qquad -1=c$

$x=0$: $\frac{5}{4} = -a+\frac{b}{2}+\frac{c}{4}$: $\qquad 11=b$

(3) $f(x) = \dfrac{4}{x-1}+\dfrac{11}{x+2}-\dfrac{1}{(x+2)^2}$, also Stf zu f:

$$4\ln|x-1| + 11\ln|x+2| + \frac{1}{x+2}$$

(B8) $\boxed{\dfrac{2x-7}{(x^2+1)(x^2-2x+4)}} =: f(x)$

(1) Die Nullstellen des Nenners sind wegen $x^2-2x+4 = (x-1)^2+3$ alle komplex; daher <u>Ansatz</u>:

(2) $$\frac{2x-7}{(x^2+1)(x^2-2x+4)} = \frac{ax+b}{x^2+1}+\frac{cx+d}{(x-1)^2+3}$$

$$\begin{aligned} 2x-7 &= (ax+b)(x^2-2x+4) + (cx+d)(x^2+1) \\ &= (a+c)x^3 + (-2a+b+d)x^2 + (4a-2b+c)x + (4b+d) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{llll} a+c=0, & -2a+b+d=0, & 4a-2b+c=2, & 4b+d=-7 \\ & -2a+b+d=0, & 3a-2b=2, & 4b+d=-7 \\ & & 3a-2b=2, & 2a+3b=-7 \end{array}$$

$6a-4b=4,\quad 6a+9b=-21\ :\quad 13b=-25 \qquad b=-\frac{25}{13}$

$2a = -7-3b = -7+\frac{75}{13} = -\frac{16}{13} \qquad a=-\frac{8}{13}$

$d = -7-4b = -\frac{91}{13}+\frac{100}{13} = \frac{9}{13} \qquad c=\frac{8}{13}$

$$f(x) = \tfrac{1}{13}\left(\frac{-8x-25}{x^2+1}+\frac{8x+9}{(x-1)^2+3}\right)$$

$$\begin{aligned} \int^x \frac{8t+25}{t^2+1}\,dt &= 4\int^x \frac{2t}{t^2+1}\,dt + 25\int^x \frac{1}{t^2+1}\,dt \\ &= 4\ln(x^2+1)+25\arctan x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int^x \frac{8t+9}{(t-1)^2+3}\,dt &= 4\int^x \frac{2(t-1)}{(t-1)^2+3}\,dt + 17\int^x \frac{1}{(t-1)^2+3}\,dt \\ &= 4\ln\left((x-1)^2+3\right) + \tfrac{17}{\sqrt{3}}\arctan\left(\tfrac{x-1}{\sqrt{3}}\right), \text{ also Stf zu } f: \end{aligned}$$

$$\tfrac{4}{13}\ln\left(\frac{x^2-2x+4}{x^2+1}\right) - \tfrac{25}{13}\arctan x + \tfrac{17}{13\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right)$$

(B9) $\boxed{\dfrac{x+2}{x^6+x^4-x^2-1}}$ $=:\ f(x)$

(1) $z := x^2, \quad z^3+z^2-z-1 = 0$: Nullstellen: $1, -1\ -1$

Der Nenner hat somit die Gestalt

$(x^2-1)(x^2+1)^2 = (x-1)(x+1)(x^2+1)^2$, daher Ansatz:

(2) $$\frac{x+2}{(x^2-1)(x^2+1)^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{cx+d}{x^2+1} + \frac{ex+f}{(x^2+1)^2}$$

$/ \cdot (x-1)$, dann $x=1$: $\quad \frac{3}{8} = a$

$/ \cdot (x+1)$, dann $x=-1$: $\quad -\frac{1}{8} = b$

$/ \cdot x$, dann $x \to \infty$: $\quad 0 = a+b+c \qquad -\frac{1}{4} = c$

$/ \cdot (x^2+1)$: $\quad \dfrac{x+2}{x^4-1} = \dfrac{x+2}{(x^2-1)(x^2+1)}$

$$= \frac{a(x^2-1+2)}{x-1} + \frac{b(x^2-1+2)}{x+1} + cx + d + \frac{ex+f}{x^2+1}$$

$$= \underline{ax} + a + \frac{2a}{x-1} + \underline{bx} - b + \frac{2b}{x+1} + \underline{cx} + d + \frac{ex+f}{x^2+1}$$

$$\underset{(0=a+b+c)}{=} a-b+d + \frac{2a}{x-1} + \frac{2b}{x+1} + \frac{ex+f}{x^2+1}$$

für $x \to \infty$: $\quad 0 = a-b+d = \frac{4}{8}+d \qquad d = -\frac{1}{2}$

$/ \cdot x$, dann $x \to \infty : 0 = 2a+2b+e = \frac{2}{4}+e \qquad e = -\frac{1}{2}$

$x = 0$: $-2 = -2a+2b+f = -\frac{3}{4} - \frac{1}{4} + f \qquad f = -1$

$$f(x) = \frac{3}{8}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{8}\frac{1}{x+1} + \frac{-\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}}{x^2+1} + \frac{-\frac{1}{2}x-1}{(x^2+1)^2};$$

daher Stf zu f:

(3) $$\tfrac{3}{8}\ln|x-1| - \tfrac{1}{8}\ln|x+1| - \tfrac{1}{8}\ln(x^2+1) - \tfrac{1}{2}\arctan x + \tfrac{1}{4}\frac{1}{x^2+1}$$
$$- \tfrac{1}{2}x\,\frac{1}{1+x^2} - \tfrac{1}{2}\arctan x \quad \text{(Rekursionsformel aus (B4) beachten!)}$$
$$= \frac{1}{8}\ln\left(\frac{|x-1|^3}{|x+1|\,(x^2+1)}\right) - \arctan x - \frac{1}{4}\,\frac{2x-1}{x^2+1}$$

5.1.4 Integration gewisser algebraischer Funktionen [1]

(1) $f(x) = \boxed{R\left(x, \sqrt[n]{\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)}$

---

[1] Eine Funktion $y = y(x)$ heißt *„algebraisch"* genau dann, wenn sie einer Gleichung der Form

$$a_n(x)y^n + \cdots + a_1(x)y + a_0(x) = 0$$

genügt, wobei a_ν Polynome (mit $a_n \neq 0$) sind und n eine natürliche Zahl ist. Insbesondere können also Wurzelausdrücke auftreten.

$\big(\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0;\ R$ rationale Funktion (von zwei Veränderlichen)$\big)$

Methode: $s := \sqrt[n]{\dfrac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}}$, dann ist $s^n = \dfrac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}$, also $t = \dfrac{\delta s^n - \beta}{-\gamma s^n + \alpha}$ und $t'(s) = n\, s^{n-1} \dfrac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(-\gamma s^n + \alpha)^2}$, damit ist dieses Problem zurückgeführt auf die Integration rationaler Funktionen.
Auch hierzu ein ausführliches Beispiel:

(B10) Stammfunktion zu $f(x) := \boxed{\dfrac{1}{x^2\left(\sqrt{\frac{x+1}{x}} + \sqrt[3]{\frac{x+1}{x}}\right)}}$

$$f(x) = R\left(x, \sqrt[6]{\frac{x+1}{x}}\right): \qquad s := \sqrt[6]{\frac{t+1}{t}}, \qquad s^6 = \frac{t+1}{t},$$

$$t = \frac{-1}{-s^6+1} = \frac{1}{s^6-1}, \qquad \frac{dt}{ds} = \frac{-6\,s^5}{\left(s^6-1\right)^2}$$

$$\int^x f(t)\,dt = \int^{\sqrt[6]{\frac{x+1}{x}}} \frac{\left(s^6-1\right)^2\left(-6\,s^5\right)}{\left(s^3+s^2\right)\left(s^6-1\right)^2}\,ds = -6 \int^{\sqrt[6]{\frac{x+1}{x}}} \frac{s^3}{s+1}\,ds$$

Division mit Rest liefert für den Integranden:

$s^3 : (s+1) = s^2 - s + 1 - \dfrac{1}{s+1}$, also als Stf zu f:

$$-6\left(\tfrac{1}{3}s^3 - \tfrac{1}{2}s^2 + s - \ln|s+1|\right)\Big|_{s=\sqrt[6]{\frac{x+1}{x}}}$$

$$= -2s^3 + 3s^2 - 6s + 6\ln|s+1|\ \Big|_{s=\sqrt[6]{\frac{x+1}{x}}}$$

Speziell erfaßt werden durch (1) (mit $\gamma = 0,\ \delta = 1$) Integrale der Form

$$\boxed{\int^x R\left(t, \sqrt{\alpha t + \beta}\,\right) dt}\ .$$

(2) $$\boxed{\begin{array}{c}\displaystyle\int^x R\left(t, \sqrt{at^2+2bt+c}\right) dt \ = ?\\ (a,b,c \in \mathbb{R}),\ R \text{ rationale Funktion (von 2 Veränderlichen)}\end{array}}$$

Der Fall $a = 0$ ist in (1) enthalten, daher **Œ** $\boldsymbol{a \neq 0}$:
$at^2 + 2bt + c = \frac{1}{a}\left[a^2t^2 + 2bat + ac\right] = \frac{1}{a}\left[(at+b)^2 + (ac - b^2)\right]$, also
Œ $\boldsymbol{ac - b^2 \neq 0}$:

(α) $a < 0, \quad ac - b^2 > 0:$,unmöglich' (Definitionsbereich ist leer)

(β) $a < 0, \quad ac - b^2 < 0:$ In den anderen drei Fällen gelingt mit

(γ) $a > 0, \quad ac - b^2 > 0:$ $s := \dfrac{at + b}{\sqrt{|ac - b^2|}}$

(δ) $a > 0, \quad ac - b^2 < 0:$ eine *Reduktion* auf die folgenden

Normalformen

$$\boxed{\begin{array}{l} \displaystyle\int^x R_1\left(t, \sqrt{1-t^2}\right) dt \\ \displaystyle\int^x R_1\left(t, \sqrt{1+t^2}\right) dt \\ \displaystyle\int^x R_1\left(t, \sqrt{t^2-1}\right) dt \end{array}}$$

(mit jeweils einer geeigneten rationalen Funktion R_1 (von zwei Veränderlichen)).

Einige Möglichkeiten zur Behandlung dieser Normalformen betrachten wir beispielhaft (mit entsprechenden Anleitungen) in den Übungsaufgaben (3) und (4).

5.1.5 Integration gewisser transzendenter Funktionen [2]

(1) $\boxed{\displaystyle\int^x R(e^t)\, dt} = \displaystyle\int^x R_1(e^t)\, e^t\, dt = \int^{e^x} R_1(s)\, ds$, also zurückgeführt

auf die Überlegungen aus Teilabschnitt 5.1.3. (Hier und beim folgenden Typ bezeichnen R und R_1 rationale Funktionen (einer Veränderlichen).)

(2) $\boxed{\displaystyle\int^x P(t)\, R(e^t)\, dt}$ (P Polynom)

Diesen Typ behandelt man mit partieller Integration, wobei man das Polynom jeweils differenziert (und so den Grad reduziert).

(3) $\boxed{\displaystyle\int^x R(\cos t, \sin t)\, dt}$ R und R_1 rationale Funkionen (von zwei Veränderlichen)

(a) **allgemeine Methode** (funktioniert immer, aber oft nicht vorteilhaft (vgl. zum Beispiel Übungsaufgaben (14.c)).

$$\cos t = \cos\left(\tfrac{t}{2} + \tfrac{t}{2}\right) = \frac{\left(\cos\frac{t}{2}\right)^2 - \left(\sin\frac{t}{2}\right)^2}{\left(\cos\frac{t}{2}\right)^2 + \left(\sin\frac{t}{2}\right)^2} = \frac{1 - \left(\tan\frac{t}{2}\right)^2}{1 + \left(\tan\frac{t}{2}\right)^2}$$

[2] Eine Funktion, die nicht algebraisch ist, heiß *„transzendent"*. Wichtige Vertreter transzendenter Funktionen sind die *trigonometrischen Funktionen*, die *Exponentialfunktion* und die *Hyperbelfunktionen* sowie deren Umkehrfunktionen.

$$\sin t \;=\; \sin\left(\tfrac{t}{2}+\tfrac{t}{2}\right) \;=\; \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{\left(\cos\frac{t}{2}\right)^2+\left(\sin\frac{t}{2}\right)^2} \;=\; \frac{2\tan\frac{t}{2}}{1+\left(\tan\frac{t}{2}\right)^2}$$

$s = \tan\frac{t}{2}$ (nach SPIVAK: „*The world's sneakiest substitution*“)

$t = 2\arctan s$ (evtl. *nicht* ‚Hauptzweig‘ !): $\qquad \frac{dt}{ds} = \frac{2}{1+s^2}$:

$$\int^{x} R(\cos t, \sin t)\,dt \;=\; \int^{\tan\frac{x}{2}} R\left(\frac{1-s^2}{1+s^2}, \frac{2s}{1+s^2}\right)\frac{2}{1+s^2}\,ds \;=$$

$$= \int^{\tan\frac{x}{2}} R_1(s)\,ds\,,$$ also auch wieder auf 5.1.3 zurückgeführt.

(b) Oft sind **spezielle Methoden** wesentlich günstiger; zwei Beispiele dazu behandeln wir (mit geeigneter Hilfestellung) in den Übungsaufgaben (9) und (10).

5.2 Bestimmtes Integral, Flächeninhalt

5.2.1 Vorüberlegungen zum Flächeninhalt

Bekannt: Flächeninhalt von Rechtecken (Produkt der Seitenlängen)

Gesucht: Flächeninhalt von allgemeineren — insbesondere krummlinig begrenzten — Flächen (z.B. Kreis)

Methode: Ausschöpfung von innen und außen durch (nichtüberlappende) Rechtecke. Genauer:

Wir bezeichnen mit $\boldsymbol{m(R)}$ den Flächeninhalt eines Rechtecks R.

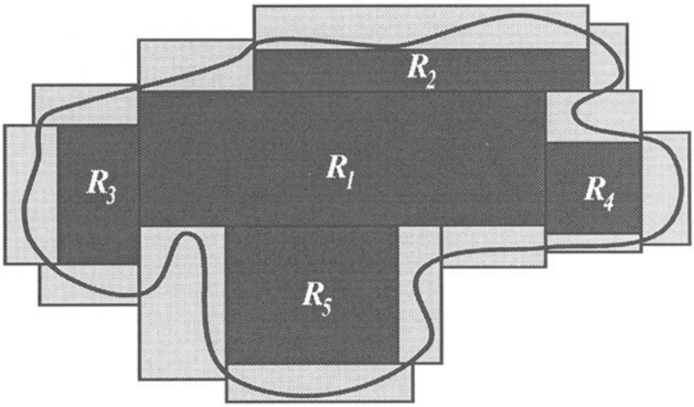
Definition *Eine Fläche F hat den Flächeninhalt $\boldsymbol{m(F)}$, wenn gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $n, k \in \mathbb{N}$ und (nicht überlappende) Rechtecke $R_1, \ldots, R_n, R_{n+1}, \ldots, R_{n+k}$ mit $\bigcup_{\nu=1}^{n} R_\nu \subset F \subset \bigcup_{\nu=1}^{n+k} R_\nu$,*

$$\sum_{\nu=1}^{n} m(R_\nu) \le m(F) \le \sum_{\nu=1}^{n+k} m(R_\nu) \quad \text{und} \quad \sum_{\nu=n+1}^{n+k} m(R_\nu) \le \varepsilon\,.$$

Lax ausgedrückt, bedeutet dies: F läßt sich beliebig genau von außen und innen in Rechtecke ‚einschließen‘.

In dem nachfolgend skizzierten Beispiel sei die zu bestimmende krummlinig begrenzte Fläche F. Die nicht bezeichneten (hellen) Rechtecke seien R_6 bis R_{18}. $a := m(R_1) + \cdots + m(R_5) \le m(F) \le m(R_1) + \cdots + m(R_{18}) =: b$. Der Flächeninhalt $m(F)$ liegt zwischen a und b; er ist hier bis auf $b - a = m(R_6) + \cdots + m(R_{18})$ bestimmt:

Beispiel:

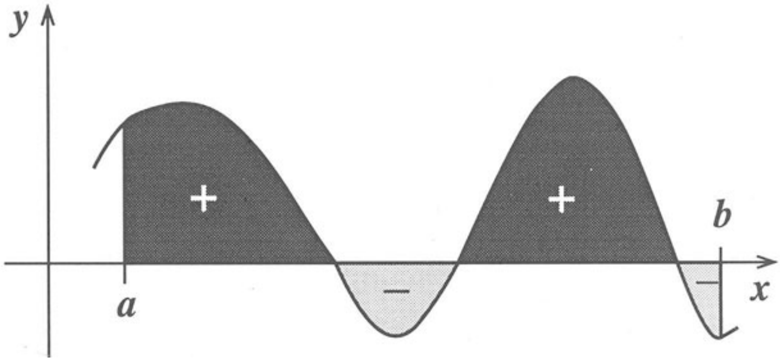


5.2.2 Definition des bestimmten Integrals („RIEMANN–Integral")

Sei $-\infty < a < b < \infty$ und $f : [a,b] \longrightarrow I\!R$ beschränkt.

Ziel: Wir wollen den Flächeninhalt der Fläche, die von der x–Achse, den Geraden $x = a$, $x = b$ und dem Graphen von f begrenzt wird, bestimmen. (Dabei soll der unterhalb der x–Achse liegende Anteil mit negativem Vorzeichen versehen werden.)

Beispiel:



Definition *f heißt „integrierbar (über $[a,b]$)" und $\int\limits_a^b f(x)\,dx := A$ genau dann, wenn gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existieren $n \in I\!N$, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, $u_\nu,\, o_\nu \in I\!R$ mit*

$$u_\nu \le f(x) \le o_\nu \quad \textit{für} \quad x_{\nu-1} \le x \le x_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n),$$

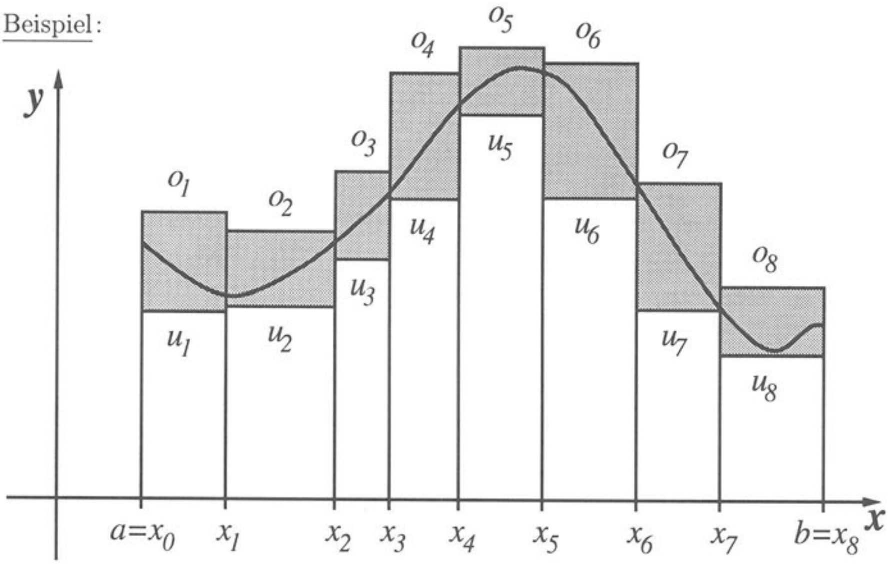
$$U := \sum_{\nu=1}^{n} u_\nu\,(x_\nu - x_{\nu-1}) \le A \le \sum_{\nu=1}^{n} o_\nu\,(x_\nu - x_{\nu-1}) =: O$$

und

$$O - U \leq \varepsilon .$$

Die übliche Bezeichnungsweise $\int_a^b f(x)\,dx$ — *„(bestimmtes) Integral von f über $[a,b]$“*, genauer „RIEMANN-*Integral*“, auch *„eigentliches* (RIEMANN-)*Integral*“ — geht auf Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1675) zurück. Das Integralzeichen $\int$ ist aus einem stilisierten S (für Summe) hervorgegangen. Für manche Dinge wäre beispielsweise die Notierung $\int_a^b f$ sinnvoller, insbesondere da die ‚Variable‘ x keine Rolle spielt (und somit durch irgendeine andere Variable ersetzt werden kann.) Die Funktion f sprechen wir auch als *„Integrand“* an, a und b als *„untere“* bzw. *„obere (Integrations-)Grenze“* und $[a,b]$ als *„Integrationsintervall“*.

Beispiel:



Der gesuchte Flächeninhalt ist mindestens so groß wie die Summe der Flächen der 8 nicht schraffierten Rechtecke $\left(\sum_{\nu=1}^{8} u_\nu\,(x_\nu - x_{\nu-1}) = U\right)$ und höchstens so groß wie diese Summe vermehrt um die Summe der Flächeninhalte der 8 schraffierten Rechtecke $\left(\sum_{\nu=1}^{8} u_\nu\,(x_\nu - x_{\nu-1}) + \sum_{\nu=1}^{8}(o_\nu - u_\nu)\,(x_\nu - x_{\nu-1}) = O\right)$. Durch die gegebene Unterteilung ist der gesuchte Flächeninhalt bis auf die Summe der Flächeninhalte der 8 schraffierten Rechtecke $(O - U)$ bestimmt.

Über integrierbare Funktionen und das zugehörige bestimmte Integral lassen sich die folgenden Sätze leicht beweisen. Ich verzichte auf die Durchführung, da keinerlei neuartige oder bemerkenswerte Idee eingeht:

(1) Linearität *Vor.: f, g integrierbar über $[a,b]$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*
Beh.: $\alpha f + \beta g$ integrierbar über $[a,b]$ und

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx\,.$$

Speziell gilt also:

$f+g$ über $[a,b]$ integrierbar und $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx\,,$

αf über $[a,b]$ integrierbar und $\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx\,.$

(2) Additivität bezüglich der Intervallgrenzen

Ist $-\infty < a < b < c < \infty$, so ist f genau dann über $[a,c]$ integrierbar, wenn f über $[a,b]$ und $[b,c]$ integrierbar ist. Es gilt dann:

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx \qquad (*)$$

Setzt man noch $\int_a^a f(x)\,dx := 0$ und $\int_d^e f(x)\,dx := -\int_e^d f(x)\,dx$ für $-\infty < e < d < \infty$, dann gilt $(*)$ *für beliebige $a, b, c \in \mathbb{R}$.*

(3) Integralabschätzung

Vor.: f, g, h seien über $[a,b]$ integrierbar mit $f \le g \le h$

Beh.: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b h(x)\,dx$

Speziell: *Vor.: Für $m, M \in \mathbb{R}$:* $m \le f(x) \le M \quad (x \in [a,b])$

Beh.: $\displaystyle m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$

5.2.3 Der Fundamentalsatz der Differential– und Integralrechnung

Satz *Vor.: $-\infty < a < b < \infty$, $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig*

Beh.: f ist integrierbar über $[a,b]$.

Beweis: Aus der Stetigkeit von f auf $[a,b]$ folgt: 1. f beschränkt und 2.: Zu $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$ so, daß $|f(x) - f(y)| \le \varepsilon$, falls $|x-y| \le \delta$.[3]

[3] Hier habe ich etwas gemogelt; denn diese Aussage der *„gleichmäßigen Stetigkeit"* müßte eigentlich noch bewiesen werden! Ich möchte jedoch darauf nicht eingehen.

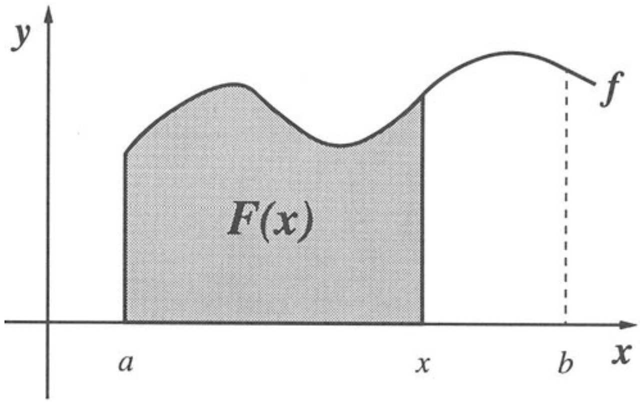
Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ wählt man nun $\delta > 0$ gemäß 2. und dazu
$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ mit $x_\nu - x_{\nu-1} \leq \delta \quad (\nu = 1, \ldots, n)$.
Für $o_\nu := \max\{f(x) : x_{\nu-1} \leq x \leq x_\nu\}$, $u_\nu := \min\{f(x) : x_{\nu-1} \leq x \leq x_\nu\}$ gilt nach 2. $o_\nu - u_\nu \leq \varepsilon$ und daher

$$\sum_{\nu=1}^{n} o_\nu(x_\nu - x_{\nu-1}) - \sum_{\nu=1}^{n} u_\nu(x_\nu - x_{\nu-1}) \leq \varepsilon(b-a). \qquad \square$$

Fundamentalsatz der Differential– und Integralrechnung

Vor.: $-\infty < a < b < \infty, \quad f : [a,b] \longrightarrow I\!R$ <u>*stetig*</u>
Bez.: $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt \qquad (x \in [a,b])$
Beh.: F ist differenzierbar und $F' = f$

Der Satz beinhaltet: Für eine stetige Funktion f liefert die zugehörige *‚Flächenfunktion'* F eine Stammfunktion:



Man findet in diesem Zusammmenhang gelegentlich auch die Redeweise: *„Integration glättet"*: Die Flächenfunktion einer stetigen Funktion ist stetig differenzierbar.

Zur Definition von F bemerken wir: f stetig auf $[a,b] \implies f$ stetig auf $[a,x]$, also nach dem vorangehenden Satz: f über $[a,x]$ integrierbar.

<u>Beweis:</u> Œ: $x \in [a,b]$, $h > 0$ mit $x + h \in [a,b]$

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right) \underset{(2)}{=} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt.$$

Nach (3) — aus (5.2.2) —hat man für diesen Ausdruck:

$$\min\{f(s) : x \leq s \leq x+h\} \leq \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt \leq \max\{f(s) : x \leq s \leq x+h\}.$$

Wegen der Stetigkeit von f streben die $l.S.$ und die $r.S.$ für $h \longrightarrow 0$ gegen $f(x)$, also auch $\frac{1}{h} \int\limits_x^{x+h} f(t)\,dt$. □

Folgerung (aus dem Fundamentalsatz)

> *Vor.:* $-\infty < a < b < \infty, \quad f : [a,b] \longrightarrow I\!R$ *stetig*
> *G Stammfunktion zu f*
>
> *Beh.:* $\displaystyle\int\limits_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a) =: \boldsymbol{G(x)}\Big|_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}}$

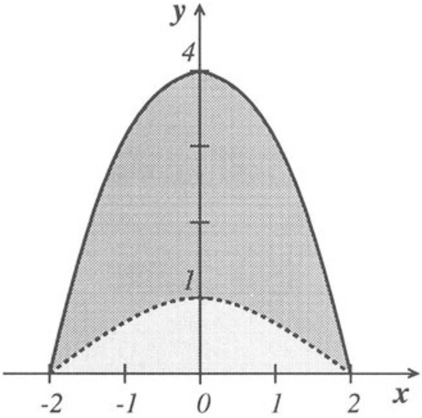
Beweis: Nach dem Fundamentalsatz wird durch (die Flächenfunktion) $F(x) := \int\limits_a^x f(t)\,dt$ eine Stammfunktion F zu f definiert. Da auch G Stammfunktion zu f ist, gilt $F(x) = G(x) + c$, also — wegen $F(a) = 0$ — $c = -G(a)$. Daher folgt $\int\limits_a^b f(t)\,dt = F(b) = G(b) + c = G(b) - G(a)$. □

(B1) Man berechne den Flächeninhalt der Fläche, die von den Graphen der beiden Funktionen $f(x) = -x^2 + 4$ und $g(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 1$ eingeschlossen wird.

$-x^2 + 4 = -\frac{1}{4}x^2 + 1 \iff 3 = \frac{3}{4}x^2 \iff 4 = x^2$
$\iff x = 2$ oder $x = -2$.

Die gesuchte Fläche ist:

$$\int\limits_{-2}^{2} f(x)\,dx - \int\limits_{-2}^{2} g(x)\,dx$$
$$= \int\limits_{-2}^{2} (f(x) - g(x))\,dx$$
$$= \int\limits_{-2}^{2} (-\tfrac{3}{4}x^2 + 3)\,dx$$
$$= -\tfrac{1}{4}x^3 + 3x\,\Big|_{-2}^{2} = 8$$



Substitutionsregel

Vor.: *i Intervall,* $-\infty < \alpha < \beta < \infty$, $f : i \longrightarrow I\!R$ *stetig*
$\varphi : [\alpha, \beta] \longrightarrow i$ *stetig differenzierbar*

Beh.: $\displaystyle\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(s)\,ds$

Man *merkt* sich diese Regel wieder ganz einfach in der Form: $s := \varphi(t)$, $\frac{ds}{dt} = \varphi'(t)$, ‚läuft' t von α bis β, dann $s = \varphi(t)$ von $\varphi(\alpha)$ bis $\varphi(\beta)$.

Beweis: Ist F Stammfunktion zu f, dann gilt nach der obigen Folgerung $\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(s)\,ds = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$. Nach (III) aus 5.1 (bzw. Kettenregel) ist $F(\varphi(x)) = \int\limits^{x} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$, also (wieder nach Folgerung) $\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$. □

(B2) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin(2t)\,dt \underset{[\varphi(t):=2t]}{=} \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \sin(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} \sin s\,ds$
$= \frac{1}{2}(-\cos s)\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2}(1+1) = 1$

Mittelwertsatz der Integralrechnung

Vor.: $-\infty < a < b < \infty$; $f, p : [a,b] \longrightarrow I\!R$ *stetig*
$p(x) \geq 0$ *für* $x \in [a,b]$

Beh.: Es existiert $\xi \in \,]a,b[$ *mit* $\int\limits_a^b f(x)\,p(x)\,dx = f(\xi)\int\limits_a^b p(x)\,dx$.

Beweis: Mit $m := \min\{f(x) : x \in [a,b]\}$ und $M := \max\{f(x) : x \in [a,b]\}$ hat man $m\,p(x) \leq f(x)p(x) \leq M\,p(x)$ $(x \in [a,b])$, also (nach Integralabschätzung)
$m\int\limits_a^b p(x)\,dx = \int\limits_a^b m\,p(x)\,dx \leq \int\limits_a^b f(x)\,p(x)\,dx \leq \int\limits_a^b M\,p(x)\,dx = M\int\limits_a^b p(x)\,dx$.
Nach dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen folgt daraus die Behauptung. □

5.2.4 Anwendungsbeispiele

1. Orthogonalitätsrelationen der trigonometrischen Funktionen

Wir berechnen für $n, m \in I\!N_0$ die Integrale

$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos(m\,x)\cos(n\,x)\,dx$, $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin(m\,x)\sin(n\,x)\,dx$, $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos(m\,x)\sin(n\,x)\,dx$.

Für das letzte Integral ist nur zu beachten, daß hier eine *ungerade* Funktion über ein zu 0 symmetrisches Intervall $([-\pi,\pi])$ integriert wird; somit gilt:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos(m\,x)\,\sin(n\,x)\,dx = 0\,.$$

Für die Berechnung der beiden anderen Integrale ziehen wir das Additionstheorem für cos heran:

(•) $$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b\,.$$

Durch Addition der beiden Gleichungen ergibt sich:

$$\cos a \cos b = \tfrac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right], \qquad \text{also}$$

$$\cos(mx)\cos(nx) = \tfrac{1}{2}\left[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right].$$

Für $k \in \mathbb{Z}$ ist $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos(k\,x)\,dx = \left\{\begin{array}{ll} 2\pi & \text{, falls } k=0 \\ 0 & \text{, falls } k \neq 0 \end{array}\right\}$. Zusammen:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos(m\,x)\cos(n\,x)\,dx = \left\{\begin{array}{rll} 0 & \text{, falls} & n \neq m \\ 2\pi & \text{, falls} & n = m = 0 \\ \pi & \text{, falls} & n = m \neq 0 \end{array}\right\}.$$

Aus (•) folgt durch Subtraktion: $\sin a \sin b = \tfrac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$; das liefert:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin(m\,x)\sin(n\,x)\,dx = \left\{\begin{array}{ll} \pi & \text{, falls } n = m \neq 0 \\ 0 & \text{, sonst} \end{array}\right\}.$$

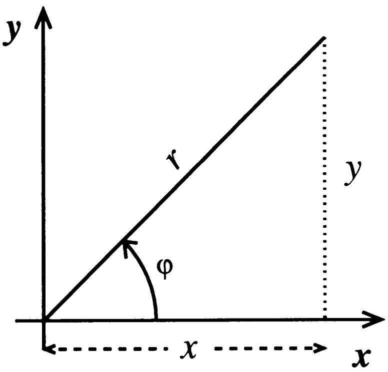
2. Leibniz**sche Sektorformel**

Wir erinnern an den *Zusammenhang zwischen Kartesischen Koordinaten und Polarkoordinaten:*

Ist $P = (x,y) \neq (0,0)$, dann ist P eindeutig bestimmt durch (r,φ) mit $0 < r$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$, wenn

$$\boldsymbol{x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi}\ .$$

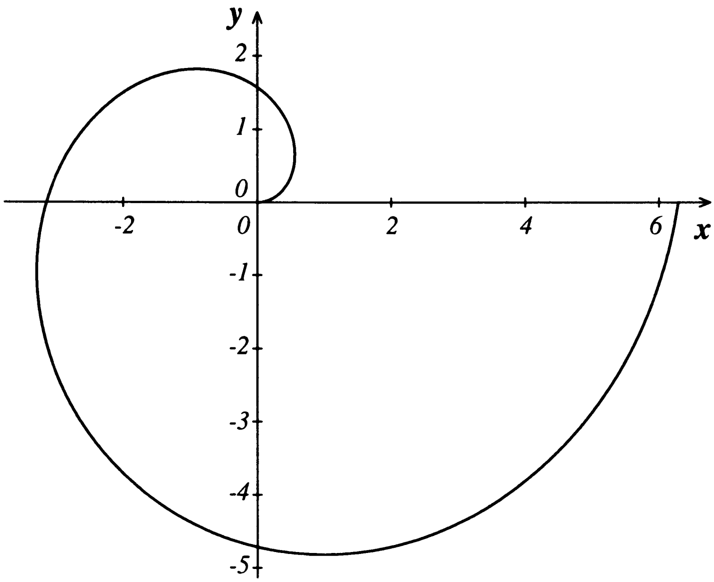
Umgekehrt: $r = \sqrt{x^2+y^2}$,
$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad (x \neq 0)$
('Hauptzweig', falls $x > 0$ und $y \geq 0$).



Eine *„Kurve“* sei in Polarkoordinaten gegeben:

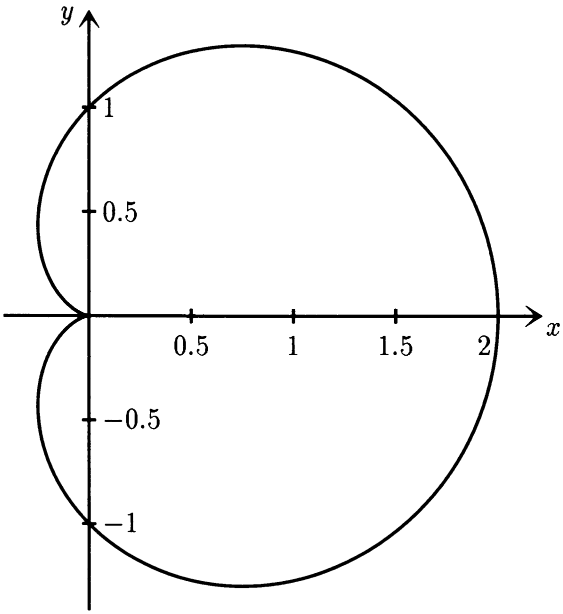
$\boxed{\boldsymbol{r = r(\varphi)}}$ für $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, wobei $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$.

(B3) $\boxed{r = \varphi}$ $(0 \leq \varphi \leq 2\,\pi)$ **(ARCHIMEDische Spirale)**

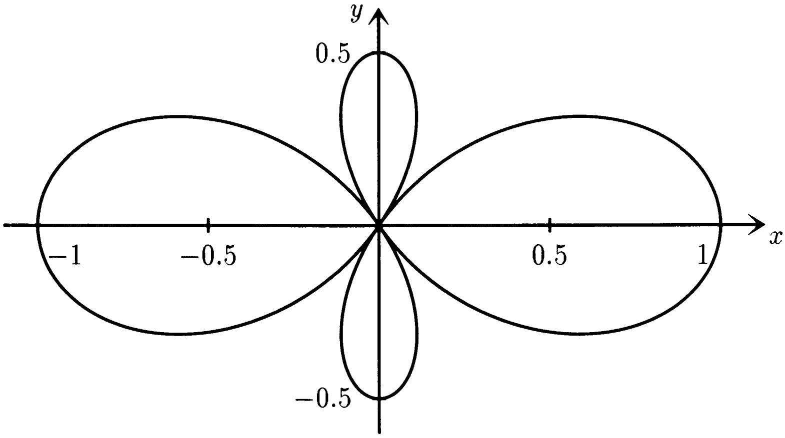


Da man in der Darstellung mit Polarkoordinaten doch sehr leicht ‚schöne' Kurven zeichnen kann, seien — bevor wir uns der LEIBNIZschen Sektorformel zuwenden — noch weitere Beispiele angeführt:

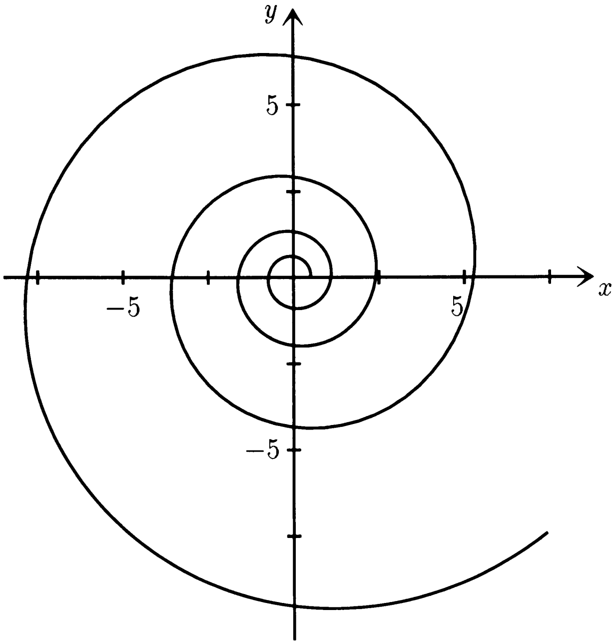
(B4) $\boxed{r = 1 + \cos(\varphi)}$ $(0 \leq \varphi \leq 2\,\pi)$ **(Kardioide)**



(B5) $\boxed{r = \frac{1}{2}\left(3\,(\cos(\varphi))^2 - 1\right)}$ $(0 \leq \varphi \leq 2\,\pi)$



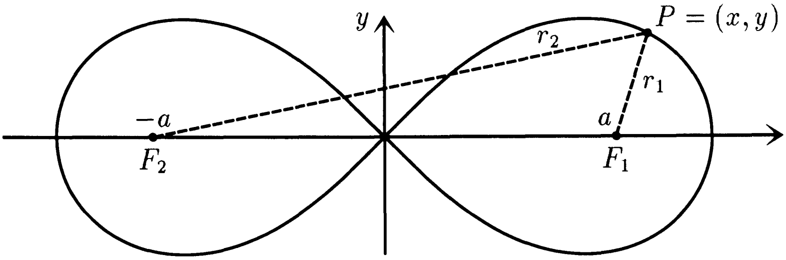
(B6) $\boxed{r = \frac{1}{2}\exp\left(\frac{\varphi}{8}\right)}$ $(0 \leq \varphi < \infty)$ **(Logarithmische Spirale)**



(Daß in diesem Beispiel *beliebige* (positive) *Winkel* auftreten, sollte auch ohne besondere Erläuterung verständlich sein.)

(B7) Lemniskate Dies ist der geometrische Ort aller Punkte P, für die gilt: Das Produkt der Abstände von zwei festen Punkten F_1, F_2 ist konstant $(=: a^2)$.

$$\boxed{r^2 = 2\,a^2\cos(2\,\varphi)} \qquad (0 \leq \varphi \leq 2\,\pi \;\text{ und }\; \cos(2\,\varphi) \geq 0)$$



Hier haben wir das Koordinatensystem so gewählt, daß
$F_1 = (a, 0)$, $F_2 = (-a, 0)$ gilt.

Wir wollen kurz zeigen, daß eine Lemniskate sich in der oben angegebenen Weise durch Polarkoordianten beschreiben läßt:

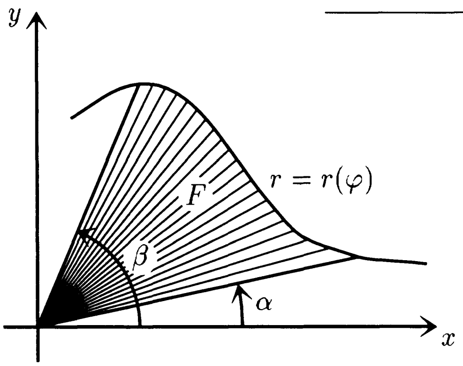
Mit r_1 und r_2 gemäß Zeichnung hat man:

$$\begin{aligned} r_1^2 &= (x-a)^2 + y^2, \quad r_2^2 = (x+a)^2 + y^2, \\ \underline{a^4} &= r_1^2\, r_2^2 = (x^2 - a^2)^2 + y^2\big((x-a)^2 + (x+a)^2\big) + y^4 \\ &= x^4 - 2a^2x^2 + \underline{a^4} + 2y^2x^2 + 2a^2y^2 + y^4 \\ 0 &= (x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) \end{aligned}$$

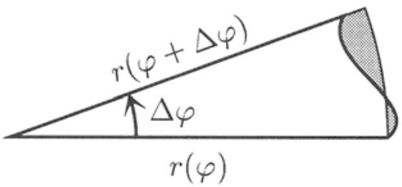
Damit ist insbesondere $x^2 \geq y^2$, also $|x| \geq |y|$, was zur notierten Einschränkung des Winkels φ führt.

Das Einsetzen von Polarkoordinaten ($x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$) liefert:

$$\begin{aligned} 0 &= r^4 - 2a^2r^2\big((\cos\varphi)^2 - (\sin\varphi)^2\big) \\ &= r^4 - 2a^2r^2\cos(2\varphi), \quad \text{also} \qquad r^2 = 2\,a^2\cos(2\,\varphi)\,. \end{aligned}$$ □



Gesucht ist die **Fläche** F **des Sektors**, den der Radiusvektor überstreicht, wenn sich das Argument φ von α nach β ändert.



Für kleine $\Delta\varphi$ gilt

$$\Delta F \approx \tfrac{1}{2}\, r(\varphi)^2\, \Delta\varphi$$

(Kreissektor mit Bogen $r(\varphi)\Delta\varphi$). Aufsummieren und $\Delta\varphi \to 0$ liefert dann: (Dies ist natürlich kein Beweis der folgenden Formel, sondern nur eine Plausibilitätsüberlegung, die sich aber zu einem korrekten Beweis ausgestalten läßt.)

$$\boxed{F = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r(\varphi)^2\, d\varphi}$$

(B8) Wir berechnen die von der Lemniskate umschlossene Fläche: Aus Symmetriegründen genügt es, die Fläche F_0 im 1. Quadranten zu berechnen. ($r^2 = 2a^2\cos(2\varphi)$: Für $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ist $\cos(2\varphi) = 0$, also $r = 0$; daher:)

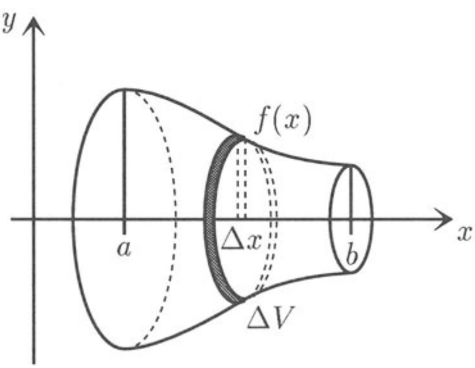
$$F_0 = \tfrac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} 2a^2\cos(2\varphi)\, d\varphi = a^2\tfrac{1}{2}\sin(2\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \tfrac{1}{2}a^2\,.$$

Die gesuchte Fläche ist somit $2a^2$.

3. Volumenberechnung von Rotationskörpern

Es seien $\left\| \begin{array}{l} -\infty < a < b < \infty\,, \\ f : [a,b] \longrightarrow I\!R \quad \text{stetig}\,. \end{array}\right.$

Die zwischen den Geraden $x = a$, $x = b$, dem Graphen von f und der x–Achse liegende Fläche möge um die x–Achse rotieren. Dabei entsteht ein *„Rotationskörper"*, dessen Volumen V wir bestimmen wollen:



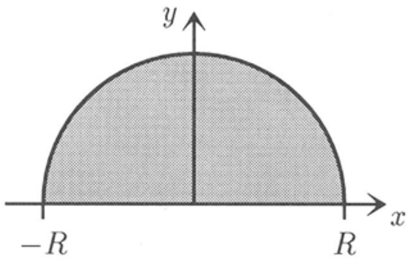
Auch hier machen wir uns die Berechnungsformel lediglich plausibel:
Wir denken uns den Körper in eine Summe von ‚Scheibchen' der Dicke Δx mit Volumen ΔV zerlegt. Dann gilt:

$$\Delta V \approx \pi f(x)^2 \Delta x$$

(Volumen eines Zylinders mit Radius $f(x)$ und Höhe Δx). Aufsummation und $\Delta x \to 0$ ergeben:

$$\boxed{V = \pi \int_a^b f(x)^2\,dx} \quad .$$

(B9) Berechnung des *Volumens einer Kugel* von Radius R:
Dazu setzen wir $a := -R$, $b := R$,
$f(x) := \sqrt{R^2 - x^2} \quad (-R \leq x \leq R)$ (Halbkreis)



$$V = \pi \int_a^b f(x)^2\,dx = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)\,dx = \pi(R^2 x - \tfrac{1}{3}x^3)\Big|_{-R}^{R} = \tfrac{4}{3}\,\pi\,R^3$$

5.3 Uneigentliche Integrale

In Teilabschnitt 5.2.2 wurde $\int_a^b f(x)\,dx$ nur für den Fall definiert, daß das Integrationsintervall $[a, b]$ *endlich* und die Funktion f auf $[a, b]$ *beschränkt* ist. Im folgenden wollen wir den *Integralbegriff* so *erweitern*, daß dem Symbol $\int_a^b f(x)\,dx$ auch für unendliche Integrationsintervalle oder unbeschränkte Funktionen in gewissen Fällen eine Bedeutung zukommt.

(B1) $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \;??}$

Für $0 < x \longrightarrow 1$ gilt $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \longrightarrow \infty$; im Sinne von 5.2.2 existiert das Integral $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ also *nicht* ! Für $0 < a < 1$ existiert aber $\int\limits_0^a \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ (im Sinne von 5.2.2) und hat den Wert $\arcsin a - \arcsin 0 = \arcsin a \longrightarrow \frac{\pi}{2}$ $(a \longrightarrow 1)$. Daher liegt es nahe, den Integralbegriff so zu erweitern, daß $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$ gilt.

(B2) $$\boxed{\int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \;??}$$

Da das ‚Integrationsintervall' nicht endlich ist, existiert das Integral im Sinne von 5.2.2. *nicht*! Für $0 < T < \infty$ existiert aber $\int\limits_0^T \frac{dx}{1+x^2} = \arctan T - \arctan 0 = \arctan T \longrightarrow \frac{\pi}{2}$ $(T \longrightarrow \infty)$.

Auch hier liegt es wieder nahe, den Integralbegriff so zu erweitern, daß $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$ gilt.

5.3.1 Definition des uneigentlichen Integrals

(1) Es sei $-\infty < a < b \le \infty$. Eine Funktion f heißt *uneigentlich integrierbar auf* $[a, b[$, wenn gilt: Für alle $a < \beta < b$ ist f integrierbar über $[a, \beta]$, und es existiert

$$\lim_{b>\beta\to b} \int\limits_a^\beta f(x)\,dx =: \int\limits_a^b f(x)\,dx =: \int\limits_a^{b-} f(x)\,dx\,.$$

(1') Es sei $-\infty \le a < b < \infty$. Eine Funktion f heißt *uneigentlich integrierbar auf* $]a, b]$, wenn gilt: Für alle $a < \alpha < b$ ist f integrierbar über $[\alpha, b]$, und es existiert

$$\lim_{a<\alpha\to a} \int\limits_\alpha^b f(x)\,dx =: \int\limits_a^b f(x)\,dx =: \int\limits_{a+}^b f(x)\,dx\,.$$

(2) Es sei $-\infty \le a < b \le \infty$. Eine Funktion f heißt *uneigentlich integrierbar auf* $]a, b[$, wenn gilt: Für ein $a < \gamma < b$ ist f uneigentlich integrierbar auf $]a, \gamma]$ und auf $[\gamma, b[$. In diesem Fall setzen wir

$$\int\limits_{a+}^{b-} f(x)\,dx := \int\limits_a^b f(x)\,dx := \int\limits_{a+}^\gamma f(x)\,dx + \int\limits_\gamma^{b-} f(x)\,dx.$$

(B1) Nach obiger Rechnung gilt für $\quad f(x) := \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (0 \le x < 1)$:

f ist uneigentlich integrierbar über $[0,1[$ und $\int\limits_0^1 f(x)\,dx = \frac{\pi}{2}$.

(B2) Ebenso gilt nach obiger Rechnung für $f(x) := \dfrac{1}{1+x^2} \quad (0 \le x < \infty)$:

f ist uneigentlich integrierbar über $[0,\infty[$ und $\int\limits_0^\infty f(x)\,dx = \frac{\pi}{2}$.

(B3) Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < K \in \mathbb{R}$ und $f(x) := x^\alpha \quad (x \ge K)$. Dann gilt:

$$\boxed{\begin{array}{l} f \text{ ist uneigentlich integrierbar über } [K,\infty[\iff \alpha < -1\,; \\ \text{falls } \alpha < -1 : \qquad \displaystyle\int_K^\infty x^\alpha\,dx = -\frac{1}{\alpha+1}\,K^{\alpha+1}\,. \end{array}}$$

!

Beweis: Für $\beta > K$ ist

$$\int\limits_K^\beta x^\alpha\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} \ln\beta - \ln K & ,\ \alpha = -1 \\ \dfrac{1}{\alpha+1}\left(\beta^{\alpha+1} - K^{\alpha+1}\right) & ,\ \alpha \ne -1 \end{array} \right\}. \qquad \square$$

(B4) Für $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < K \in \mathbb{R}$ und $f(x) := x^\alpha \quad (0 < x \le K)$ gilt:

$$\boxed{\begin{array}{l} f \text{ ist uneigentlich integrierbar über }]0,K] \iff \alpha > -1\,; \\ \text{falls } \alpha > -1 : \qquad \displaystyle\int_0^K x^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha+1}\,K^{\alpha+1}\,. \end{array}}$$

!

Beweis: Für $0 < \varepsilon < K$ ist

$$\int\limits_\varepsilon^K f(x)\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} \ln K - \ln\varepsilon & ,\ \alpha = -1 \\ \dfrac{1}{\alpha+1}\left(K^{\alpha+1} - \varepsilon^{\alpha+1}\right) & ,\ \alpha \ne -1 \end{array} \right\}. \qquad \square$$

Bemerkungen zu obiger Definition:

(a) In (2) hängt der Wert von $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *nicht* von γ ab!

(b) Statt (z.B. in (2)) der Aussage „*f ist uneigentlich integrierbar auf* $]a,b[$“ benutzt man auch die Sprechweise:

„$\int\limits_a^b f(x)\,dx$ ist *konvergent*“ .

(c) *Geometrisch* bedeutet die uneigentliche Integrierbarkeit, daß auch speziellen unbeschränkten Flächen ein Flächeninhalt zugeordnet werden kann.

5.3.2 Absolute Integrierbarkeit; Majorantenkriterium

Definition *Es seien $\mathbb{R} \supset j$ Intervall und $f : j \longrightarrow \mathbb{R}$:*
f „lokal integrierbar über j“ $:\Longleftrightarrow$
$\forall \alpha, \beta \in j \quad \alpha < \beta \Longrightarrow f$ integrierbar über $[\alpha, \beta]$.

Ist j offen oder halboffen, dann heißt f *„absolut uneigentlich integrierbar (über j)“* genau dann, wenn f über j lokal integrierbar ist und (die Betragsfunktion) $|f|$ über j uneigentlich integrierbar ist.

Sind a und b die Endpunkte von j (mit $a < b$), dann sagen wir auch *„$\int_a^b f(x)\,dx$ absolut konvergent“* (für *„f absolut uneigentlich integrierbar über j“*).

Es seien jetzt $\|$ $\mathbb{R} \supset j$ offenes oder halboffenes Intervall und $f : j \longrightarrow \mathbb{R}$.

Bemerkung: *Ist f absolut uneigentlich integrierbar über j, dann ist f insbesondere uneigentlich integrierbar über j.*

Für die mathematisch besonders interessierten Leser notieren wir einen

Beweis: Œ $j = [a, b[$ mit $-\infty < a < b \leq \infty$. Für $a < \beta_n < b \quad (n \in \mathbb{N})$ mit $\beta_n \longrightarrow b \quad (n \longrightarrow \infty)$ gilt $\int_a^{\beta_n} |f(x)|\,dx \longrightarrow \int_a^{b-} |f(x)|\,dx$, also ist $\left(\int_a^{\beta_n} |f(x)|\,dx\right)$ insbesondere CAUCHY–Folge. Für $a < \gamma < \beta < b$ ist

$$\left|\int_a^\beta f(x)\,dx - \int_a^\gamma f(x)\,dx\right| = \left|\int_\gamma^\beta f(x)\,dx\right| \leq \int_\gamma^\beta |f(x)|\,dx$$

$$= \left|\int_a^\beta |f(x)|\,dx - \int_a^\gamma |f(x)|\,dx\right|.$$

Daher ist auch $\left(\int_a^{\beta_n} f(x)\,dx\right)$ CAUCHY–Folge; damit folgt (...) die Behauptung. □

Warnung: Umgekehrt folgt aus der uneigentlichen Integrierbarkeit *nicht* die absolute uneigentliche Integrierbarkeit. (Ein Beispiel hierzu ist durch Übungsaufgabe (5) gegeben.)

Majorantenkriterium

Vor.: 1. $\|$ $\cdots$ (wie oben)
2. f lokal integrierbar über j
3. $g : j \longrightarrow \mathbb{R}$ uneigentlich integrierbar (über j)
4. $|f(x)| \leq g(x) \quad (x \in j)$ (insbesondere also $g \geq 0$)

Beh.: f ist absolut uneigentlich integrierbar über j.

Beweis: Wieder Œ $j = [a, b[$ mit $-\infty < a < b \leq \infty$; für $a < \beta < b$ ist $\int\limits_a^\beta |f(x)|\,dx \leq \int\limits_a^\beta g(x)\,dx \leq \int\limits_a^b g(x)\,dx$, und die Abbildung

$]a, b[\ \ni \beta \longmapsto \int\limits_a^\beta |f(x)|\,dx$ ist isoton. Daraus liest man die Behauptung ab. □

(B5) $\boxed{f(x) := \frac{1995}{\sqrt{3-x}}}$ $\quad (0 \leq x < 3)$

Beh.: f ist auf $[0, 3[$ uneigentlich integrierbar.

Beweis: Für $0 < \beta < 3$: $\int\limits_0^\beta f(x)\,dx \underset{(s=3-x)}{=} 1995 \int\limits_3^{3-\beta} \frac{-1}{\sqrt{s}}\,ds =$ $1995 \int\limits_{3-\beta}^3 \frac{1}{\sqrt{s}}\,ds \underset{(B4)}{\longrightarrow} 1995 \cdot 2\sqrt{3}$ (für $\beta \longrightarrow 3$) □

(B6) $\boxed{f(x) := \frac{1}{\sin x}}$ $\quad (0 < x \leq 1)$

Beh.: f ist auf $]0, 1]$ *nicht* uneigentlich integrierbar.

Beweis: Für $0 \leq x \leq 1$ ist $\sin x \leq x$:

$\int\limits_\varepsilon^1 f(x)\,dx \geq \int\limits_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\,dx \quad (0 < \varepsilon < 1) \qquad (\cdots)$ □

Warnung: (a) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\,dx$ konvergiert *nicht*, aber $\lim\limits_{0<T\to\infty} \int\limits_{-T}^{T} x\,dx = 0$.

(Die Grenzübergänge sind *unabhängig* voneinander durchzuführen!)

(b) $\int\limits_{-2}^{2} \frac{2x}{x^2-1}\,dx$ konvergiert *nicht*; doch $\ln(x^2-1)$ liefert eine Stammfunktion zu $\frac{2x}{x^2-1}$, also (?)

$\int\limits_{-2}^{2} \frac{2x}{x^2-1} = \ln(x^2-1)\Big|_{-2}^{2} = 0$: *Wo steckt der Fehler?*

(B7) $\boxed{f(x) := \frac{\pi}{(5-x)\sqrt{5-x}}}$ $\quad (0 \leq x < 5)$

Beh.: f ist auf $[0, 5[$ *nicht* uneigentlich integrierbar.

Beweis: Für $0 < b < 5$: $\int\limits_0^b f(x)\,dx = \pi \int\limits_0^b (5-x)^{-\frac{3}{2}}\,dx \underset{(s=5-x)}{=}$ $\pi \int\limits_5^{5-b} s^{-\frac{3}{2}}(-1)\,ds = \pi \int\limits_{5-b}^{5} s^{-\frac{3}{2}}\,ds \underset{(B4)}{\longrightarrow} \infty \quad (b \longrightarrow 5)$ □

(B8) $\boxed{f(x) := \dfrac{3}{x\sqrt{7-x}}}$ $\quad (0 < x < 7)$

Beh.: f ist auf $]0,7[$ *nicht* uneigentlich integrierbar.

Beweis: $\int\limits_\varepsilon^1 f(x)\,dx = 3\int\limits_\varepsilon^1 \frac{1}{x\sqrt{7-x}}\,dx \geq \int\limits_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\,dx = -\ln\varepsilon \longrightarrow \infty \quad (0 < \varepsilon \longrightarrow 0)$ □

Bei den abschließenden drei Beispielen kann jeweils das *Majorantenkriterium* herangezogen werden:

(B9) $\boxed{f(x) := \dfrac{1}{\sqrt{\sin x}}}$ $\quad (0 < x \leq 1)$

Beh.: f ist auf $]0,1]$ uneigentlich integrierbar.

Beweis: $(*)\quad \sin x \geq \frac{x}{2} \quad (0 \leq x \leq 1) \implies$

$\int\limits_\varepsilon^1 f(x)\,dx \leq \int\limits_\varepsilon^1 \sqrt{2}\,x^{-\frac{1}{2}}\,dx \underset{(B4)}{\longrightarrow} 2\sqrt{2} \quad (0 < \varepsilon \longrightarrow 0)$

Zu $(*)$: $l.S.(0) = r.S.(0)$ und $\sin'(x) = \cos x \geq \cos 1 \geq \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\ (\cdots)$ □

(B10) $\boxed{f(x) := \dfrac{\sin x}{x^2}}$ $\quad (x \geq 1)$

Beh.: f ist auf $[1,\infty[$ uneigentlich integrierbar.

Beweis: $\int\limits_1^K |f(x)|\,dx \leq \int\limits_1^K \frac{1}{x^2}\,dx \underset{(B3)}{\longrightarrow} 1 \quad (1 < K \longrightarrow \infty)$ □

(B11) $\boxed{f(x) := \dfrac{x^7}{x^8 + 7x^6 + 18x^3 + 9}}$ $\quad (x \geq \pi)$

Beh.: f ist auf $]\pi,\infty]$ *nicht* uneigentlich integrierbar.

Beweis: $f(x)\cdot x \longrightarrow 1 \quad (x \longrightarrow \infty)$, also $f(x)\cdot x \geq \frac{1}{2}$ für x hinreichend groß und daher — für solche x — $f(x) \geq \frac{1}{2x}$. □

5.3.3 Zusammenhang mit der Konvergenz von Reihen

Reihen–Integral–Vergleichskriterium

Vor.: $N \in \mathbb{N}$; $\quad f : [N,\infty[\longrightarrow [0,\infty[$ *antiton*

Beh.: $\int\limits_N^\infty f(x)\,dx$ *konvergent* $\iff \sum\limits_{n=N}^\infty f(n)$ *konvergent.*

Beweis: $f(n) \geq f(x) \geq f(n+1)$ für $x \in [n, n+1] \qquad (\mathbb{N} \ni n \geq N)$, also $f(n) \geq \int\limits_n^{n+1} f(x)\,dx \geq f(n+1)$ und damit

$$\sum_{n=N}^{K} f(n) \geq \int\limits_N^{K+1} f(x)\,dx \geq \sum_{n=N}^{K} f(n+1) = \sum_{n=N+1}^{K+1} f(n) \qquad (I\!N \ni K > N).$$

Hieraus liest man die Behauptung ab. □

Anmerkung zum Beweis: Wir haben die einfach zu beweisende (aber von uns nicht bewiesene) Aussage benutzt:

$-\infty < a < b < \infty$, $\qquad f : [a,b] \longrightarrow I\!R$ monoton $\Longrightarrow$ f über $[a,b]$ integrierbar.

Auch zu diesem Satz sehen wir uns zwei einfache Beispiele an:

(B12) $\boxed{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}}$ ist konvergent für $\alpha > 1$ und divergent für $\alpha \leq 1$.

Hier ist nur noch (B3) zu beachten. □

(B13) $\boxed{\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{j+1}{j^2}}$ ist divergent; denn $f(x) := \frac{x+1}{x^2}$ ist antiton $(x \geq 1)$

und $\int\limits_1^K f(x)\,dx = \ln x - \frac{1}{x}\Big|_1^K \longrightarrow \infty \quad (1 < K \longrightarrow \infty)$. □

5.3.4 Die Γ–Funktion

Als eine der wichtigsten Anwendungen der Theorie der uneigentlichen Integrale behandeln wir kurz die EULERsche **Gammafunktion**:

Für $x > 0$ existiert $\qquad \boxed{\int\limits_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1}\,dt =: \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{x})}$

Beweis: Wir zeigen: Der Integrand ist auf $]0,1]$ und auf $[1,\infty[$ uneigentlich integrierbar.

a) Es existiert ein $M \in I\!R$ mit $e^{-t}t^{x+1} \leq M$ für $t \geq 1$, somit $e^{-t}t^{x-1} \leq Mt^{-2}$ für $t \geq 1$: Das zeigt die uneigentliche Integrierbarkeit auf $[1,\infty[$.

b) Aus $0 < e^{-t}t^{x-1} \leq t^{x-1}$ für $0 < t \leq 1$ kann die uneigentliche Integrierbarkeit auf $]0,1]$ abgelesen werden.

Wir beweisen die charakteristische **Funktionalgleichung**:

Satz *Für $x > 0$ ist* $\qquad \boldsymbol{\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)}$.

Beweis: Für $0 < \alpha < \beta < \infty$: (durch partielle Integration:)

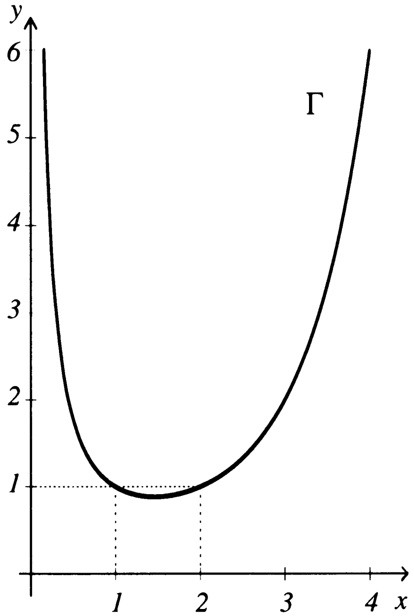
$$\int_\alpha^\beta e^{-t} t^x \, dt = -e^{-t} t^x \Big|_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta (-e^{-t}) x t^{x-1} \, dt =$$

$$\left(\frac{\alpha^x}{e^\alpha} - \frac{\beta^x}{e^\beta}\right) + x \int_\alpha^\beta e^{-t} t^{x-1} \, dt \quad \xrightarrow{\surd} \quad x \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} \, dt \;\; (\alpha \longrightarrow 0, \, \beta \longrightarrow \infty).$$

Folglich $\Big(\Gamma(x+1) = \Big) \int_0^\infty e^{-t} t^x \, dt = x \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} \, dt = \Big(x\,\Gamma(x)\Big)$.

Folgerung *Für $n \in \mathbb{N}$ ist* $\boldsymbol{\Gamma(n) = (n-1)!}$.

<u>Beweis:</u> $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} \, dt \overset{\surd}{=} 1 = 0!$. Mit obigem Satz folgt daher die Behauptung.



5.4 Elementare Methoden zur numerischen Berechnung von Integralen

Obwohl die *Existenz* des Integrals einer stetigen Funktion nach 5.2.3 gesichert ist, kann die *Berechnung* eines solchen Integrals in vielen Fällen *nicht* mit Hilfe ‚elementarer' Funktionen als Stammfunktionen geschehen. Außerdem kann in Situationen, wo das Lösungsverfahren theoretisch einfach ist, der erforderliche Aufwand im Einzelfall unangemessen groß sein (z.B. schon bei einer rationalen Funktion mit einem Nennerpolynom, dessen Nullstellen schwierig zu bestimmen sind). Wir interessieren uns daher für die Aufstellung von *Näherungsverfahren*, welche die formelmäßige Integration ersetzen und im Einzelfall ein *Ergebnis mit hinreichender Genauigkeit* erzielen.

Viele Verfahren der numerischen Integration beruhen auf folgendem

Prinzip: Für die gegebene Funktion wird eine Ersatzfunktion gewählt, die mit dieser in einer bestimmten Anzahl von festen Punkten (*„Stützpunkten“*) übereinstimmt und die sich ‚leicht‘ integrieren läßt.

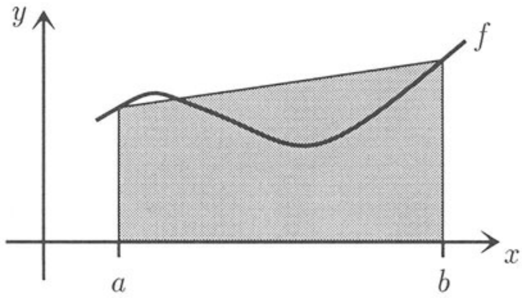
5.4.1 Trapez– und SIMPSON–Regel

|| $-\infty < a < b < \infty$; $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar

Wir ersetzen f durch das Polynom ersten Grades (‚Gerade‘) P, das in a und b die gleichen Werte wie f annimmt, also $P(x) = \alpha x + \beta$ mit $P(a) = f(a)$ und $P(b) = f(b)$.

Dann berechnen wir $\left(\text{statt } \int_a^b f(x)\,dx\right)$ $\int_a^b P(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\,(f(a) + f(b))$

(Flächeninhalt des durch die Punkte $(a,0)$, $(b,0)$, $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ bestimmten Trapezes)



Ersetzt man nun $\int_a^b f(x)\,dx$ durch $\int_a^b P(x)\,dx$, so möchte man natürlich wissen, wie groß der Fehler dabei werden kann. Wir notieren dazu (ohne Beweis) — man vergleiche etwa [BARNER/FLOHR I] — :

Vor.: $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *2 × stetig differenzierbar;* P *zu* f *wie oben*
Beh.: $\left\lvert \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b P(x)\,dx \right\rvert \le \frac{(b-a)^3}{12} \max\{\lvert f''(x)\rvert : x \in [a, b]\}$

Die hierdurch präzisierte Formel

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)) \quad \text{heißt} \quad \textbf{Trapez–Regel}.$$

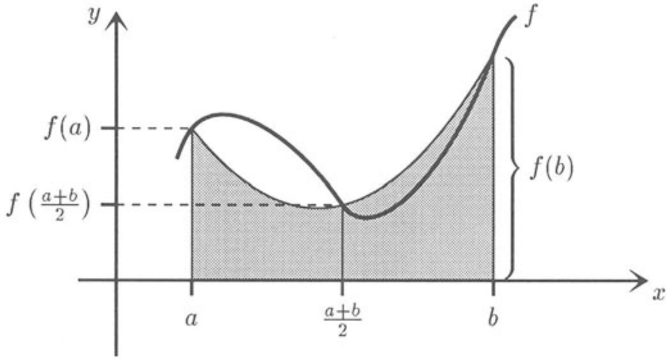
Ersetzt man f durch das Polynom zweiten Grades Q, das in a, b und $\frac{1}{2}(a+b)$ die gleichen Werte wie f annimmmt, also $Q(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ mit

$Q(a) = f(a)$, $Q(\frac{a+b}{2}) = f(\frac{a+b}{2})$ und $Q(b) = f(b)$, dann erhält man:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b Q(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\Big(f(a) + 4\,f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) + f(b)\Big)$$

KEPLERsche **Faßregel** oder SIMPSON–**Regel**.

<u>Beweis:</u> $f(a) = Q(a) = \alpha a^2 + \beta a + \gamma$, $\quad f(b) = Q(b) = \alpha b^2 + \beta b + \gamma$,
$4\,f(\frac{a+b}{2}) = 4\,Q(\frac{a+b}{2}) = \alpha(a^2 + 2ab + b^2) + 2\beta(a+b) + 4\gamma$.
$\int_a^b Q(x)\,dx = \frac{\alpha}{3}x^3 + \frac{\beta}{2}x^2 + \gamma x\Big|_a^b = \frac{\alpha}{3}\big(b^3 - a^3\big) + \frac{\beta}{2}\big(b^2 - a^2\big) + \gamma(b-a) =$
$\frac{b-a}{6}\left\{2\alpha(a^2 + ab + b^2) + 3\beta(b+a) + 6\gamma\right\} = \frac{b-a}{6}\left\{f(a) + 4\,f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right\}$ □



Auch die *Fehlerabschätzung* hierzu notiere ich ohne Beweis — man vergleiche wieder etwa [BARNER/FLOHR I] — :

Vor.: $f : [a,b] \longrightarrow I\!R$ *4 × stetig differenzierbar;* Q *zu* f *wie oben*
Beh.: $\left\| \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b Q(x)\,dx \right\| \le \frac{(b-a)^5}{2880} \max\Big\{\big\|f^{(4)}(x)\big\| : x \in [a,b]\Big\}$

Die SIMPSON–Regel ist gemäß ihrer Entstehung exakt, falls die zu integrierende Funktion ein Polynom höchstens 2. Grades ist. Die Fehlerabschätzung zeigt darüber hinaus, daß die SIMPSON-*Regel* sogar noch *für alle Polynome 3. Grades exakt* ist!

Zur Erzielung einer höheren Genauigkeit (als mit der Trapez– oder SIMPSON–Regel) scheint folgendes nahezuliegen:

Statt	Polynome 1. Grades und 2 Stützpunkten	(Trapez–Regel)
bzw.	Polynome 2. Grades und 3 Stützpunkten	(SIMPSON–Regel)
	Polynome n–ten Grades bei $n+1$ Stützpunkten	

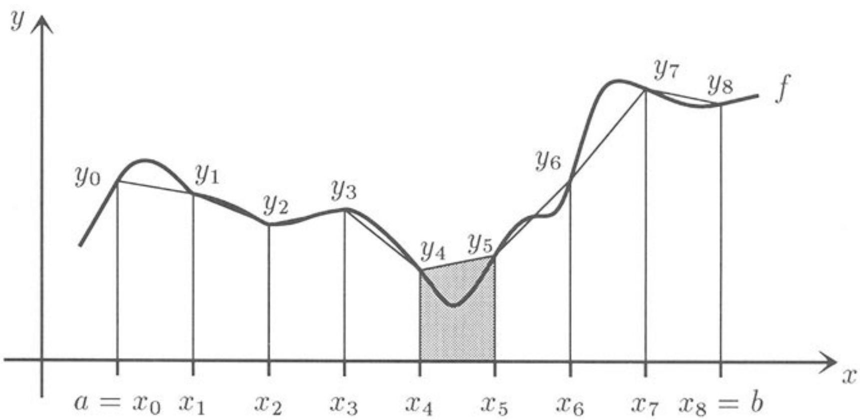
zu nehmen. Dies führt zu den **Näherungsformeln von** NEWTON–CÔTES, die aber für $n \geq 3$ numerisch wenig „stabil“ sind. Stattdessen unterteilt man besser das Integrationsintervall genügend fein und wendet in den Teilintervallen die Trapez– oder SIMPSON–Regel an:

5.4.2 Zusammengesetzte Formeln

|| $-\infty < a < b < \infty\,;\quad f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar; $\quad 2 \leq n \in \mathbb{N}$

1. Zusammengesetzte Trapez-Regel

Wir unterteilen $[a,b]$ in n Teilintervalle gleicher Länge:
Es seien $h := \frac{b-a}{n}$ $\quad x_\nu := a + \nu h$ und $y_\nu := f(x_\nu)$ $\qquad (\nu = 0,\ldots,n)$.



Wendet man auf jedes der n Teilintervalle $[x_{\nu-1}, x_\nu]$ die Trapez-Regel an, so erhält man für das Teilintegral $\int\limits_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} f(x)\,dx$ die Näherung:

$\frac{x_\nu - x_{\nu-1}}{2}\left(f(x_{\nu-1}) + f(x_\nu)\right) = \frac{h}{2}(y_{\nu-1} + y_\nu) \qquad (\nu = 1,\ldots,n)$, also

für das gesuchte Integral $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ durch Summation die Näherung

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\big(y_0 + 2y_1 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n\big) =: T_n(f)}\ .$$

Aus der o.a. Fehlerabschätzung für die (einfache) Trapezformel ergibt sich unter den gleichen Voraussetzungen:

$$\boxed{\left|\int_a^b f(x)\,dx - T_n(f)\right| \leq \frac{(b-a)}{12}\,h^2 \max\{|f''(x)| : x \in [a,b]\}}\ .$$

Den Beweis liest man mit $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \sum\limits_{\nu=1}^{n} \int\limits_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} f(x)\,dx$ unmittelbar aus der notierten Abschätzung ab. □

Der Faktor $\frac{(b-a)}{12}\,h^2$ in der Fehlerabschätzung kann natürlich auch in der Form $\frac{(b-a)^3}{12}\,\frac{1}{n^2}$ geschrieben werden.

(B1) Es soll $\int\limits_1^2 \frac{1}{x}\,dx \quad (= \ln 2 = \mathbf{0.693147}\cdots)$ mit der zusammengesetzten Trapez-Regel für $n = 4$ näherungsweise berechnet werden:

$a := 1, \quad b := 2, \quad f(x) := \frac{1}{x} \quad (x \in [1,2]); \quad h := \frac{b-a}{n} = \frac{1}{4}$

$T_4(f) = \frac{1}{8}\left(1 + 2\frac{1}{1.25} + 2\frac{1}{1.5} + 2\frac{1}{1.75} + \frac{1}{2}\right) \quad = \quad \mathbf{0.6970}\cdots$

Für obige Fehlerabschätzung ergibt sich

$\max\left\{|f''(x)| : x \in [a,b]\right\} = \max\left\{\frac{2}{x^3} : x \in [1,2]\right\} = 2, \qquad$ also

$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx - T_4(f)\right| \leq \frac{1}{12}\frac{1}{16}\cdot 2 = \frac{1}{96}.$

2. Zusammengesetzte Simpson–Regel

Wir gehen analog vor und unterteilen das Intervall $[a,b]$ hier in $2n$ Teilintervalle gleicher Länge. Es seien jetzt

$h := \frac{b-a}{2n}$ und $x_\nu := a + \nu h, \quad y_\nu := f(x_\nu) \qquad (\nu = 0, \ldots, 2n).$

Wendet man auf jedes der n Doppelintervalle $[x_{2\nu-2}, x_{2\nu}]$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ die Simpson–Regel an, so erhält man für das Teilintegral $\int\limits_{x_{2\nu-2}}^{x_{2\nu}} f(x)\,dx$ die Näherung:

$\frac{x_{2\nu} - x_{2\nu-2}}{6}\left(f(x_{2\nu-2}) + 4\,f(x_{2\nu-1}) + f(x_{2\nu})\right) = \frac{h}{3}\left(y_{2\nu-2} + 4\,y_{2\nu-1} + y_{2\nu}\right),$

also für das gesuchte Integral $\int\limits_a^b f(x)\,dx$:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}\right)}\,.$$

Wir bezeichnen die rechte Seite mit $S_{2n}(f)$. Aus der o.a. Fehlerabschätzung für die (einfache) Simpson–Regel ergibt sich — unter gleichen Voraussetzungen — :

$$\boxed{\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx - S_{2n}(f)\right| \leq \frac{(b-a)^5}{2880\cdot n^4}\max\left\{\left|f^{(4)}(x)\right| : x \in [a,b]\right\}}$$

(B2) Wir wollen wieder $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$ näherungsweise berechnen; hier mit der zusammengesetzten SIMPSON–Regel für $n = 2$: (Der Vergleich mit der Trapezregel für $n = 4$ ist sinnvoll, da in beiden Fällen 5 Funktionswerte berücksichtigt werden.)

$$S_4(f) = \frac{1}{12}\left(1 + 4\,\frac{1}{1.25} + 2\,\frac{1}{1.5} + 4\,\frac{1}{1.75} + \frac{1}{2}\right) \quad = \quad \mathbf{0.6932}\cdots$$

Für die Fehlerabschätzung erhalten wir hier mit

$$\max\left\{\left|f^4(x)\right| : x \in [a, b]\right\} = \max\left\{\frac{24}{x^5} : x \in [1, 2]\right\} = 24$$

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - S_4(f)\right| \le \frac{1}{2880 \cdot 2^4} \cdot 24 = \frac{1}{1920} \quad = \quad 0.00052\cdots .$$

Rückblick

Wir haben in diesem Kapitel als erstes die Grundbegriffe der Integralrechnung kennengelernt, nämlich Stammfunktionen und das bestimmte Integral als Flächeninhalt (mit Vorzeichen) zwischen dem Graphen des Integranden und der x–Achse.

Der Hauptsatz stellte eine Verbindung zwischen diesen beiden zentralen Begriffen der Analysis her: Für stetige Integranden liefert die Flächenfunktion (Integralfunktion) eine Stammfunktion, was auch die Bezeichnung ‚unbestimmtes Integral' verständlich macht. Dadurch können bestimmte Integrale — statt der fast immer sehr umständlichen direkten Bestimmung über die Definition — mittels Stammfunktionen berechnet werden.

Mit Hilfe der gegebenen Regeln und Anleitungen für das Auffinden von Stammfunktionen können diese für eine Vielzahl von Funktionen nach fest vorgegebenem Schema berechnet werden.

In dem Abschnitt über uneigentliche Integrale haben wir den Integralbegriff so erweitert, daß auch gewisse unbeschränkte Integranden oder Funktionen auf unbeschränkten Intervallen einbezogen werden.

Für Fälle, in denen die angegebenen Verfahren nicht anwendbar, zu schwierig oder zu aufwendig sind, haben wir einige einfache numerische Verfahren beispielhaft kennengelernt.

Kapitel 6

Approximation von Funktionen

Lernziel

In der allgemeinen *Approximationstheorie* wird insbesondere auch die *Approximation von Funktionen* behandelt. In diesem Kapitel werden in einer kurzen einführenden Darstellung exemplarisch einige Fragen und einfache Beispiele aus diesem Gedankenkreis besprochen:

Die Überlegungen dieses Kapitel sind nicht für alle Leser zwingend. Je nach Fachrichtung können die Abschnitte 6.1, 6.4 — und vielleicht auch 6.2 — nur flüchtig angesehen oder gar überschlagen werden. Wird das Buch begleitend zu einer Vorlesung genutzt, so hängt dies natürlich von der Stoffauswahl ab, die der jeweilige Dozent (bzw. die Dozentin) trifft.

Sie sollten anschließend die grundlegenden Fragestellungen verstanden haben: *Wozu* Approximation? *Mit welchen Funktionen* wird approximiert? In welchem Sinne gilt ‚*näherungsweise*' ? *Wie* wird's im Einzelfall gemacht?

Polynom-Interpolation, die in Abschnitt 6.1 behandelt wird, hat heute bei weitem nicht mehr die praktische Bedeutung, die ihr früher zukam. Aber manche der Ausführungen sollte man dennoch einmal gesehen haben; denn einige Überlegungen in Anwendungsbereichen bauen darauf auf.

TAYLOR-*Reihen*, die wir in Abschnitt 6.2 betrachten, haben engen Bezug zu *Potenzreihen*. Die Fragestellung ist anders als bisher: Eine Funktion ist gegeben und die zugehörige Darstellung durch eine Potenzreihe ist gesucht.

Die Überlegungen in Abschnitt 6.3 über *unbestimmte Ausdrücke* sind für die ‚automatisierte' Bestimmung spezieller Grenzwerte nützlich, bei denen die bisher bereitgestellten Hilfsmittel nicht direkt einsetzbar sind. Sie ergänzen so insbesondere auch die Ausführungen zu Kurvendiskussionen. Sie sollten nach diesem Abschnitt die Berechnung solcher Grenzwerte beherrschen.

Abschnitt 6.3 ist nur deshalb in diesem Kapitel untergebracht, weil viele der Grenzwerte, die man meist mit den zu behandelnden Regeln angeht, ebensogut — oder oft noch besser — auch mit TAYLOR-Entwicklungen erhalten werden können.

Abschnitt 6.4 enthält einige der wesentlichen Eigenschaften von und Beispiele zu FOURIER-*Reihen*, bei denen Funktionen durch Reihen mit Termen aus Exponentialfunktionen oder trigonometrischen Funktionen beschrieben werden.

Oft stellt sich das **Problem**, eine auf einem Intervall i gegebene Funktion f durch eine ‚einfachere' und ‚leicht' zu berechnende Funktion g ‚nährungsweise' darzustellen. Was *„leicht"* ist, hängt natürlich entscheidend von den jeweiligen Hilfsmitteln ab; beinhaltet bei Computer-Einsatz auch die Forderung ‚numerisch gutartig'.

„Näherungsweise" kann dabei z.B. bedeuten:

a) g stimmt mit f an gegebenen Punkten überein (*„Interpolation"*).

b) Die Maximalabweichung ist kleiner als ein gegebenes $\varepsilon > 0$, also $|f(x) - g(x)| \le \varepsilon \quad (x \in i)$ (TSCHEBYSCHEW-*Approximation*).

c) Die Fläche zwischen den beiden Graphen ist kleiner als ein $\varepsilon > 0$, also (falls $i = [a,b]$) $\int_b^a |f(x) - g(x)|\,dx \le \varepsilon$.

d) (Für $i = [a,b]$) $\int_b^a |f(x) - g(x)|^2\,dx \le \varepsilon$ für ein gegebenes $\varepsilon > 0$. (Approximation im *„quadratischen Mittel"*; hierbei werden ‚große' Abweichungen stark ‚gewichtet'.)

e) Für $\nu = 0, \ldots, n$ stimmen die ν-ten Ableitungen von f und g an einer Stelle a überein.
(Falls g Polynom n-ten Grades: *„n-tes* TAYLOR-*Polynom"*.)

Als approximierende (*„einfachere"*) Funktionen kommen z.B. in Frage:

1. Polynome
2. Rationale Funktionen
3. Trigonometrische Polynome: $g(x) := \sum_{\kappa=-k}^{k} \alpha_\kappa\, e^{i\kappa x}$
4. Splines

Wir werden uns im folgenden nur beschäftigen mit:

6.1 Polynominterpolation (a) und 1)),

6.2 TAYLOR-Reihen (e) und 1)),

6.4 FOURIER-Reihen (d) und 3)).

Durch die explosionsartige Entwicklung der Leistungsfähigkeit elektronischer Rechenanlagen in den letzten Jahrzehnten wurde ein breiteres Anwendungsfeld für Approximationsfragen erschlossen, wobei sich Akzente und Schwerpunkte der Überlegungen im Vergleich zu früher deutlich verschoben haben.

6.1 Polynom-Interpolation

Polynom–Interpolation war *früher* von großer Bedeutung für die Numerik und praktische Handhabung von Funktionen, da sie es zum Beispiel gestattet, aus einer Tafel mit wenigen Funktionswerten hoher Genauigkeit einfach verhältnismäßig genaue Zwischenwerte zu berechnen. Heute — wo Computer, ja selbst winzige Taschenrechner, die benötigten Funktionswerte meist mit anderen Methoden direkt und wahnsinnig schnell berechnen — liegt die Bedeutung mehr auf theoretischem Gebiet (numerische Integration; Konvergenzbeschleunigung durch Extrapolation (für die Kenner sei etwa an das ROMBERG-Verfahren erinnnert)).

Annahmen: $\left\|\begin{array}{ll} n \in \mathbb{N}_0\,; & x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \quad \text{paarweise verschieden} \\ & y_0, \ldots, y_n \in \mathbb{R}\;. \end{array}\right.$

Bez.: $\mathbb{P}_n := \{P \mid P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ Polynom höchstens } n\text{-ten Grades}\}$

$$= \left\{P \mid P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ \exists\, a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\ P(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu\ (x \in \mathbb{R})\right\}$$

Gesucht ist allgemein eine Funktion g, welche die Bedingung

$$g(x_\nu) = y_\nu \quad (\nu = 0, \ldots, n) \qquad (\text{„}\textit{Interpolation}\text{“})$$

erfüllt. Man spricht dann von einer *„interpolierenden“* Funktion.

Sind die Werte y_ν gerade die Funktionswerte einer gegebenen Funktion f an den Stellen x_ν, also $y_\nu = f(x_\nu)$, so ist oft eine interpolierende einfachere *Ersatzfunktion* g gesucht, und man hofft, daß g — wenigstens in einem gewissen Bereich — f näherungsweise beschreibt. Anschaulich geometrisch gesprochen: Gesucht sind Kurven, die durch vorgegebene Punkte verlaufen und nicht zu sehr von der ‚richtigen‘ Kurve abweichen.

Man nennt die x_ν *„Stützstellen“* oder „Argumente“, die y_ν *„Stützwerte“* oder „Werte“ und die (x_ν, y_ν) *„Stützpunkte“* oder *„Knoten“*.

In diesem Abschnitt ist speziell ein interpolierendes $P \in \mathbb{P}_n$ gesucht. Dieses — eindeutig existierende (siehe nachfolgenden Satz!) — Polynom heißt „*Interpolationspolynom* zu (x_ν, y_ν) $(\nu = 0, \ldots, n)$“.

Satz *Zu den $n+1$ Knoten (x_ν, y_ν) (mit paarweise verschiedenen Stützstellen x_ν) existiert genau ein $P \in \mathbb{P}_n$ mit*

$$P(x_\nu) = y_\nu \quad (\nu = 0, \ldots, n)\,.$$

Beweis: Eindeutigkeit: Sind $P_1, P_2 \in I\!P_n$ interpolierende Polynome, dann hat $P_3 := P_1 - P_2 \in I\!P_n$ die Nullstellen x_ν $(\nu = 0, \ldots, n)$. Nach (2) aus Teilabschnitt 2.2.1 gilt somit $P_3 = 0$ und daher $P_1 = P_2$.

Existenz: Wir betrachten die „LAGRANGE*schen Grundpolynome*“:

$$L_\kappa(x) := \prod_{\substack{\nu=0\\ \nu\neq\kappa}}^{n} \frac{x - x_\nu}{x_\kappa - x_\nu} \qquad (\kappa = 0, \ldots, n)\,.$$

Offenbar gilt: $L_\kappa \in I\!P_n$ mit $L_\kappa(x_\lambda) = \delta_{\kappa,\lambda} := \left\{ \begin{array}{ll} 1\,, & \kappa = \lambda \\ 0\,, & \kappa \neq \lambda \end{array} \right\}$.

$$P(x) := \sum_{\nu=0}^{n} y_\nu\, L_\nu(x) \quad (x \in I\!R)$$

tut's demzufolge. □

Dies ist die „LAGRANGE-*Darstellung des Interpolationspolynoms*“.

Nachteile dieser Darstellung (bei Berechnung von $P(x)$) sind:

1. Viele Divisionen und Multiplikationen $(2n(n+1))$.
2. Bei Hinzunahme weiterer Knoten: Vollständige Neuberechnung
3. Bei Fehlerabschätzung: siehe Ende des Abschnitts

(Zu 1.: Kann durch geeignete Modifikation wesentlich verbessert werden!)

Der NEWTON-*Algorithmus* zur Bestimmung des Interpolationspolynoms nimmt schon vom Ansatz her auf Hinzunahme weiterer Knoten Rücksicht:

Für $\kappa = 0, \ldots, n$ sei P_κ das Interpolationspolynom zu den ersten $\kappa + 1$ Knoten $(x_0, y_0), \ldots, (x_\kappa, y_\kappa)$. Für $h_\lambda := P_\lambda - P_{\lambda-1}$ $(\lambda = 1, \ldots, n)$ gilt $h_\lambda \in I\!P_\lambda$ und $h_\lambda(x_0) = \cdots = h_\lambda(x_{\lambda-1}) = 0$, also
$h_\lambda(x) = a_\lambda(x - x_0) \cdots (x - x_{\lambda-1})$ mit einem $a_\lambda \in I\!R$ und daher
$P_\lambda(x) = a_\lambda(x - x_0) \cdots (x - x_{\lambda-1}) + P_{\lambda-1}(x) = a_\lambda x^\lambda + q_{\lambda-1}(x)$ mit einem $q_{\lambda-1} \in I\!P_{\lambda-1}$. Andererseits wissen wir aus der LAGRANGE-*Darstellung*:

$$P_\lambda(x) = \sum_{j=0}^{\lambda} y_j \prod_{\substack{\nu=0\\ \nu\neq j}}^{\lambda} \frac{x - x_\nu}{x_j - x_\nu} = \left(\sum_{j=0}^{\lambda} \frac{y_j}{\prod\limits_{\substack{\nu=0\\ \nu\neq j}}^{\lambda} (x_j - x_\nu)} \right) x^\lambda + \widetilde{q_{\lambda-1}}(x)$$

mit einem $\widetilde{q_{\lambda-1}} \in I\!P_{\lambda-1}$.

Das zeigt $(*)$ $$\boxed{a_\lambda = \sum_{j=0}^{\lambda} \frac{y_j}{\prod\limits_{\substack{\nu=0\\ \nu\neq j}}^{\lambda} (x_j - x_\nu)}}\,.$$

Wegen $P_0(x) = y_0$ gilt mit $a_0 := y_0$ (und $\prod_{\emptyset} \cdots := 1$)

$(*)$ auch für $\lambda = 0$ — also für $\lambda = 0, \ldots, n$ — und weiter

$$\binom{*}{*} \quad P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + a_n(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})\,.$$

Wir bezeichnen — wie üblich —

$$f[x_0, \ldots, x_\nu] := a_\nu \qquad (\nu = 0, \ldots, n)\,,$$

gelesen *„ν-ter Differenzenquotient“*, *„Differenzenquotient ν-ter Ordnung“* oder *„ν-te dividierte Differenz“*.

Diese Bezeichnungsweise ist im allgemeinen Fall nicht gerade einsichtig. (Unmißverständlicher wäre z.B. $[(x_0, y_0), \ldots, (x_\nu, y_\nu)] := a_\nu$.) Sie rührt her von dem Spezialfall: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $y_\nu := f(x_\nu)$ $(\nu = 0, \ldots, n)$; dann ist zum Beispiel: $f[x_0] = f(x_0)$, $f[x_0, x_1] = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$, $\ldots$.

Mit diesen Bezeichnungen lautet $\binom{*}{*}$:

$$\binom{**}{*} \qquad P_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} f[x_0, \ldots, x_\nu] \prod_{j=0}^{\nu-1}(x - x_j) \quad .$$

Nach $(*)$ gilt:

$$(\bullet) \qquad f[x_0, \ldots, x_\lambda] = \sum_{j=0}^{\lambda} \frac{y_j}{\prod\limits_{\substack{\nu=0 \\ \nu\neq j}}^{\lambda} (x_j - x_\nu)} \qquad (\lambda = 0, \ldots, n)\,.$$

Aus $(\bullet)$ liest man ab: *Für $\sigma : \{0, \ldots, \lambda\} \longrightarrow \{0, \ldots, \lambda\}$ bijektiv ist*
$f[x_{\sigma(0)}, \ldots, x_{\sigma(\lambda)}] = f[x_0, \ldots, x_\lambda]\,.$

Über $\binom{*}{*}$ läßt sich $P_n(x)$ — <u>bei bekannten a_ν</u> — wegen

$$P_n(x) = \Big(\cdots ((a_n(x - x_{n-1}) + a_{n-1})(x - x_{n-2}) + a_{n-2}) \cdots \Big)(x - x_0) + a_0$$

nach folgendem *modifizierten* HORNER-*Schema* ökonomisch berechnen:

1. $b_n := a_n$
2. *Für* $\nu := n-1, \ldots, 0$ *sei* $b_\nu := b_{\nu+1}(x - x_\nu) + a_\nu$.
Dann ist $b_0 = P_n(x)$.

Uns fehlt noch ein **Verfahren zur effizienten Berechnung der** a_ν:
Vertauscht man die Reihenfolge der Knoten $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ zu $(x_n, y_n), \ldots, (x_0, y_0)$, dann liefert $\binom{**}{*}$:

$$P_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} f[x_n, \ldots, x_{n-\nu}] \prod_{j=0}^{\nu-1}(x - x_{n-j}) \text{ und weiter } \left(\text{mit } \binom{**}{*}\right):$$

$$\begin{aligned} 0 = {} & f[x_0, \dots, x_n](x-x_0)\cdots(x-x_{n-1}) - f[x_n, \dots, x_0]\,(x-x_n)\cdots(x-x_1) \\ & + f[x_0, \dots, x_{n-1}](x-x_0)\cdots(x-x_{n-2}) - f[x_n, \dots, x_1]\,(x-x_n)\cdots(x-x_2) \end{aligned}$$

$+\ q(x)$ mit $q \in \mathbb{P}_{n-2}$ (für $n \in \mathbb{N}_2$), also unter Berücksichtigung der nachgewiesenen Unabhängigkeit von der Reihenfolge der Knoten:

$$\begin{aligned} 0 = {} & f[x_0, \dots, x_n]\{(x-x_0)-(x-x_n)\}(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) \\ & + \big(f[x_0, \dots, x_{n-1}] - f[x_1, \dots, x_n]\big)\,x^{n-1} + \widetilde{q}(x) \text{ mit } \widetilde{q} \in \mathbb{P}_{n-2}\,. \end{aligned}$$

Das liefert:

$$\begin{aligned} 0 = {} & \{f[x_0, \dots, x_n](x_n - x_0) + f[x_0, \dots, x_{n-1}] - f[x_1, \dots, x_n]\}\,x^{n-1} \\ & + \hat{q}(x) \text{ mit } \hat{q} \in \mathbb{P}_{n-2}\,, \end{aligned}$$

folglich — für $n = 1$ gilt dies offenbar auch — :

$$\boxed{f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}}$$

Diese Formel ermöglicht uns, die Koeffizienten a_ν $(= f[x_0, \dots, x_\nu])$ einfach mit dem folgenden (für den Spezialfall $n = 4$ notierten)

Schema der dividierten Differenzen zu berechnen:

x_ν	y_ν	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
x_0	$\underline{\underline{f[x_0]}}$				
		$\underline{\underline{f[x_0,x_1]}}$			
x_1	$f[x_1]$		$\underline{\underline{f[x_0,x_1,x_2]}}$		
		$f[x_1,x_2]$		$\underline{\underline{f[x_0,x_1,x_2,x_3]}}$	
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1,x_2,x_3]$		$\underline{\underline{f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]}}$
		$f[x_2,x_3]$		$f[x_1,x_2,x_3,x_4]$	
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2,x_3,x_4]$		
		$f[x_3,x_4]$			
x_4	$f[x_4]$				

(B1) Es seien $f(x) := x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 1 \quad (x \in \mathbb{R})$
und P das Interpolationspolynom zu
$(-1, f(-1))$, $(0, f(0))$, $(1, f(1))$, $(2, f(2))$.
Wir rechnen $P(-2)$ nach dem NEWTON-*Algorithmus*:

Zunächst sind die Koeffizienten nach dem gerade bereitgestellten Schema zu bestimmen. Anschließend wird der Wert an der Stelle -2 nach dem modifizierten HORNER-Schema unter Berücksichtigung von $P(x) = a_0 + a_1(x+1) + a_2(x+1)x + a_3(x+1)x(x-1)$ berechnet:

$$\begin{array}{cccccc}
-1 & \underline{\underline{10}} & & & \\
 & & \underline{\underline{-9}} & & \\
0 & 1 & & \underline{\underline{5}} & \\
 & & 1 & & \underline{\underline{-2}} \\
1 & 2 & & -1 & \\
 & & -1 & & \\
2 & 1 & & &
\end{array}$$

Somit gilt: $P(x) \;=\; 10 - 9(x+1) + 5(x+1)x - 2(x+1)x(x-1)\,.$

$$\begin{array}{ccccccc}
-2 & & 5 & & -9 & & 10 \\
 & \nearrow & 6 & \nearrow & -22 & \nearrow & 31 \\
\cdot(x-1) & & \cdot x & & \cdot(x+1) & & \\
\hline
-2 & & 11 & & -31 & & 41
\end{array} \quad : \quad \underline{\underline{P(-2) \;=\; 41}}$$

Fehlerabschätzung

Annahmen: $\left\Vert \begin{array}{l} n \in I\!N\,, \quad -\infty < a < b < \infty\,, \quad f : [a,\, b] \longrightarrow I\!R\,; \\ x_\nu \in [a,\, b] \quad (\nu = 0,\, \dots,\, n) \text{ paarweise verschieden.} \end{array}\right.$

Bezeichnet P_n das Interpolationspolynom zu $(x_\nu,\, f(x_\nu))$ $(\nu = 0,\, \dots,\, n)$, so ist klar, daß ohne weitere Voraussetzungen keine Aussage gemacht werden kann über den ‚Fehler' $f(x) - P_n(x)$ für $x \notin \{x_0,\, \dots,\, x_n\}$. Für Anwendungen ist daher der folgende Satz von besonderem Interesse:

Satz *Vor.:* f $(n+1)$*-mal differenzierbar,* $x \in [a,\, b]$

Bez.: $j := \,]\min\{x_0,\, \dots,\, x_n,\, x\},\, \max\{x_0,\, \dots,\, x_n,\, x\}[$

$$\omega(t) := \prod_{\nu=0}^{n} (t - x_\nu) \qquad (t \in [a,\, b])$$

Beh.: Es existiert ein $\xi\ (= \xi(x)) \in j$ *mit*

$$f(x) - P_n(x) \;=\; \frac{1}{(n+1)!}\, \omega(x)\, f^{(n+1)}(\xi)\,.$$

Beweis: Œ $x \in [a,\, b] \setminus \{x_0,\, \dots,\, x_n\}$ fest; $k \;:=\; \dfrac{f(x) - P_n(x)}{\omega(x)}$. Für die Hilfsfunktion $F(t) \;:=\; f(t) - P_n(t) - k\,\omega(t)$ $(t \in [a,\, b])$ gilt: F ist $(n+1)$-mal differenzierbar mit $F(x) = 0 = F(x_\nu)$ $(\nu = 0,\, \dots,\, n)$; F' hat daher — nach dem Satz von ROLLE — $n+1$ Nullstellen in j, F'' folglich n, und $F^{(n+1)}$ schließlich eine Nullstelle ξ in j:

$0 = F^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - k(n+1)!$; das ist gerade die Behauptung. □

Hat man eine Schranke für $|f^{(n+1)}(t)|$ $(t \in [a,b])$, dann erhält man also mit einer Abschätzung für $|w(x)|$ (unabhängig von der speziellen Funktion f !) eine Abschätzung des ‚Fehlers' $|f(x) - P_n(x)|$. Man muß also darauf bedacht sein, den Ausdruck $\max\{|\omega(x)| : x \in [a, b]\}$ durch geeignete Wahl der Stützstellen zu minimalisieren (⇝ TSCHEBYSCHEW–Polynome).

Eine andere Restgliedform ergibt sich aus der NEWTONschen Interpolationsformel: Wählt man zusätzlich zu den $n+1$ Stützpunkten $(x_\nu, f(x_\nu))$ einen $(n+2)$–ten Stützpunkt $(x_{n+1}, f(x_{n+1}))$, so gilt nach obigem

$$f(x_{n+1}) = P_{n+1}(x_{n+1}) = P_n(x_{n+1}) + f[x_0, \ldots, x_n, x_{n+1}]\,\omega(x_{n+1}),$$

also für $x \in [a, b] \setminus \{x_0, \ldots, x_n\}$ (mit $x =: x_{n+1}$)

$$f(x) - P_n(x) = f[x_0, \ldots, x_n, x] \prod_{\nu=0}^{n} (x - x_\nu).$$

Der Vergleich mit der ersten Darstellung des Restgliedes zeigt noch: Für $x \in [a, b] \setminus \{x_0, \ldots, x_n\}$ ist

$$f[x_0, \ldots, x_n, x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

mit einem geeigneten $\xi \in j$.

(B2) $\boxed{f(x) := \sin x, \quad x_\nu := \frac{\pi}{10} \cdot \nu \quad (\nu = 0, \ldots, 5), \quad \text{also } n := 5.}$

Dann gilt: $f(x) - P_5(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_5) \dfrac{-\sin\xi}{720}$ mit einem $\xi \in]0, \frac{\pi}{2}[$, also $|f(x) - P_5(x)| \leq \dfrac{|\omega(x)|}{720}$.

Am ‚Rande' des Intervalls $]\min\{x_0, \ldots, x_n\}, \max\{x_0, \ldots, x_n\}[$ und erst recht außerhalb dieses Intervalls wächst $|\omega(x)|$ sehr schnell. Eine Verwendung des Interpolationspolynomes P zur Approximation von f an einer Stelle außerhalb dieses Intervalls — man spricht dann von *Extrapolation* — sollte daher nach Möglichkeit vermieden werden.

6.2 TAYLOR–Reihen

<u>Annahmen:</u> $-\infty < \alpha < a < \beta < \infty, \quad n \in \mathbb{N}_0,$
$f : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$

(1) *Ist f in a n-mal differenzierbar, dann existiert genau ein Polynom P_n höchstens n-ten Grades mit* $P_n^{(j)}(a) = f^{(j)}(a)$ $(j = 0, \ldots, n)$, *nämlich*

$$P_n(x) \;=\; \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j \,.$$

P_n heißt *„n-tes* TAYLOR-*Polynom zu* f *um* a*“*, auch *„n-tes osculierendes Polynom … “*.

Beweis: Ist P irgendein Polynom höchstens n-ten Grades mit $P^{(j)}(a) = f^{(j)}(a)$ $(j = 0, \ldots, n)$, so liefert die Entwicklung von P um a $P(x) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n$: $P^{(j)}(a) = j!\, a_j$, also notwendig $a_j = \dfrac{f^{(j)}(a)}{j!}$; andererseits tut's das angegebene Polynom: $\surd$ $\square$

Ist f *beliebig oft differenzierbar* in a, so heißt

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j$$

„TAYLOR-*Reihe*“ oder „TAYLOR-*Entwicklung*“ *(zu* f *um* a*)*, für $a = 0$ auch „MACLAURIN-*Reihe*“ $(\cdots)$.

Problem: Wann liefert — falls f in a beliebig oft differenzierbar ist — die TAYLOR-Reihe an einer Stelle x gerade $f(x)$?

Offenbar gilt dies genau dann, wenn $f(x) - P_n(x) \longrightarrow 0$.
Insbesondere muß $(P_n(x))$ konvergent (für $n \longrightarrow \infty$) sein.

Daher sind Aussagen über das *„Restglied“*

$$R_n(x) \;:=\; f(x) - P_n(x)$$

von Interesse:

(2) Satz von TAYLOR

Vor.: f *in* $[\alpha, \beta]$ $(n+1)$*-mal differenzierbar;* $x \in [\alpha, \beta] \setminus \{a\}$

Beh.: Es existiert $\delta \in \,]0, 1[$ *mit*

$$f(x) \;=\; P_n(x) \;+\; \frac{f^{(n+1)}(a + \delta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \,.$$

Diese Form des Restgliedes wird als ‚LAGRANGE-*Form*‘ bezeichnet; auf die Herleitung weiterer Restgliedformen (Integraldarstellung, CAUCHYsche Form) verzichte ich.

Beweis: Zu festem $x\,(\neq a)$ existiert eindeutig ein $c \in \mathbb{R}$ so, daß $f(x) - P_n(x) \;=\; c \cdot \dfrac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$. Definiert man

$$h(t) \;:=\; f(x) - \sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(t)}{\nu!}(x-t)^{\nu} - c \cdot \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \qquad (t \in [\alpha, \beta]) \,,$$

so ist h auf $[\alpha, \beta]$ differenzierbar mit $h(a) = 0 = h(x)$; nach dem Satz von ROLLE existiert ein $\delta \in]0, 1[$ mit $h'(\xi) = 0$ für $\xi := a + \delta(x - a)$.

$$h'(\xi) = -f'(\xi) - \sum_{\nu=1}^{n} \left\{ \frac{f^{(\nu+1)}(\xi)}{\nu!}(x-\xi)^{\nu} - \frac{f^{(\nu)}(\xi)}{(\nu-1)!}(x-\xi)^{\nu-1} \right\} + c \cdot \frac{(x-\xi)^n}{n!}$$

$$= -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n + c \cdot \frac{(x-\xi)^n}{n!}, \text{ somit folgt: } c = f^{(n+1)}(\xi). \quad \square$$

Man hätte (2) auch aus den Überlegungen des Abschnitts 6.1 herleiten können, indem man alle Stützstellen zusammenrücken läßt; doch diesen Zugang zu (2) empfinde ich als etwas künstlich.

Nur am Rande anmerken möchte ich:

1. Eine TAYLOR-Reihe ist *nicht* notwendig für ein einziges $x \in [\alpha, \beta] \setminus \{a\}$ konvergent.

   Man vergleiche dazu etwa [BARNER/FLOHR I].

2. Falls eine TAYLOR–Reihe für ein $x \in [\alpha, \beta] \setminus \{a\}$ konvergent ist, gilt *nicht* notwendig $f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(a)}{\nu!}(x-a)^{\nu}$.

   Das Standardbeispiel hierzu findet man etwa in [FORSTER I].

TAYLOR-Reihen sollte man nur im Ausnahmefall ‚direkt' bestimmen, das heißt $f^{(\nu)}(a)$ $(\nu \in \mathbb{N}_0)$ berechnen, dann $R_n(x) \longrightarrow 0$ zeigen. Häufig gewinnt man die TAYLOR-Entwicklung mühelos durch ‚gliedweise' Differentiation oder Integration aus bekannten Reihen!

Aus Abschnitt 4.5 erhalten wir:

(3) *Jede Potenzreihe (um einen Punkt $a \in \mathbb{R}$) mit Konvergenzradius $0 < R \leq \infty$ ist in $\{x \in \mathbb{R} : |x - a| < R\}$ die* TAYLOR*-Reihe der durch sie dargestellten Funktion!*

Um einen festen Entwicklungspunkt gibt es somit höchstens eine Potenzreihendarstellung einer gegebenen Funktion!

Beweis: Hat die Potenzreihe die Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$, so liefert der Satz über Differentiation von Potenzreihen induktiv:

$$\boxed{a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \quad (n \in \mathbb{N}_0)}\,. \qquad \square$$

Wir kennen — durch die Definition über Potenzreihen — schon einige TAYLOR-*Reihen* (um 0), z.B.:

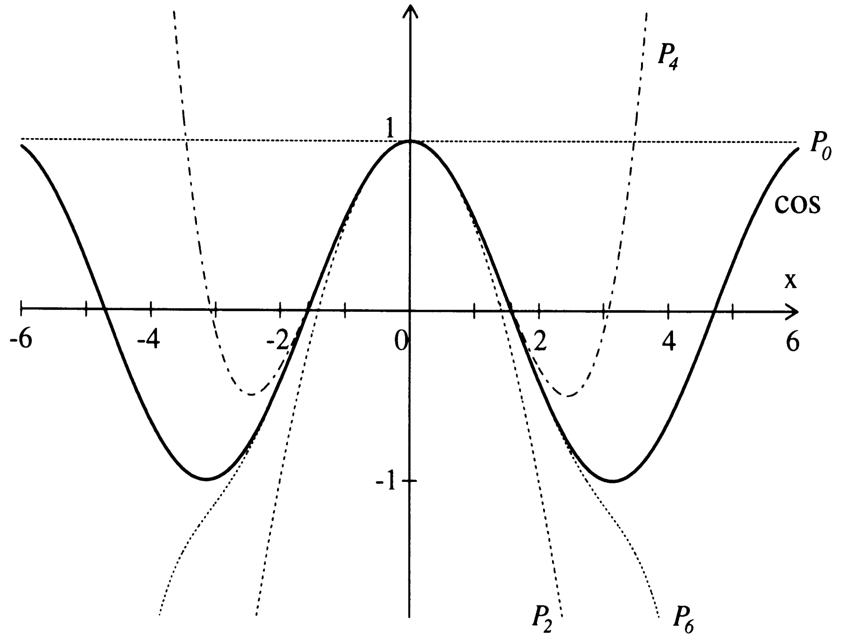
(a) $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, (b) $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$,

(c) $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ (jeweils für $x \in \mathbb{R}$).

Zu cos: *Die ersten* TAYLOR-*Polynome zu* cos *(um* 0*) sind:*

$$P_0(x) = 1, \qquad P_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2},$$
$$P_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}, \qquad P_6(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}.$$

Ihre Graphen sind ‚Schmiegungskurven' an den Graphen von Cosinus. Die Approximation ist nur lokal (um den Entwicklungspunkt) gut!



Wir zeigen ergänzend: (d) $\boxed{\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad (x \in]-1, 1])}$

Beweis: Für $n \in \mathbb{N}$ und $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ $\sum_{\nu=0}^{n-1} (-t)^\nu = \frac{1-(-t)^n}{1-(-t)}$, also $\frac{1}{1+t} = \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu t^\nu + \frac{(-1)^n t^n}{1+t}$. Daraus folgt $\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\, dt = \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu \frac{x^{\nu+1}}{\nu+1} + \int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t}\, dt = \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{\nu+1} \frac{x^\nu}{\nu} + \int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t}\, dt$. Für $0 \le x \le 1$ $\left| \int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t}\, dt \right| \le \int_0^x t^n\, dt = \frac{x^{n+1}}{n+1} \le \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0 \ (n \longrightarrow \infty)$.

(Für $-1 < x < 0$ argumentiert man ähnlich.) □

Dieses Beispiel belegt u.a.: *Das Konvergenzintervall der* TAYLOR-*Reihe zu einer gegebenen Funktion kann (deutlich) kleiner sein als der Definitionsbereich der Funktion!*

Speziell für $x = 1$ gilt also: $$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \qquad (\diamond)$$

$(\diamond)$ ist zur Berechnung von $\ln 2$ kaum geeignet; denn nach obiger Abschätzung ist erst nach Summation von 10^6 Gliedern eine Genauigkeit der Größenordnung 10^{-6} gesichert! (vgl. auch LEIBNIZ-Kriterium)

Ersetzt man in (d) x durch $-x$, so erhält man

$$\text{(d')} \quad \ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(-x)^n}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \qquad (-1 \le x < 1).$$

Aus (d) und (d') ergibt sich

$$\text{(e)} \quad \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \; \big(= \ln(1+x) - \ln(1-x) \big) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \quad (-1 < x < 1).$$

(B1) Diese Formel eignet sich nun (z.B.) zur Berechnung von $\ln 2$; denn

$$\ln 2 = \ln\left(\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}\right) = 2\left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{3})^3 + \tfrac{1}{5}(\tfrac{1}{3})^5 + \cdots\right).$$

Nach Summation der ersten 6 Glieder gilt für den Rest:

$$\begin{aligned}\text{Rest} &= 2\left(\tfrac{1}{13}(\tfrac{1}{3})^{13} + \tfrac{1}{15}(\tfrac{1}{3})^{15} + \cdots\right) \le \tfrac{2}{13}\left((\tfrac{1}{3})^{13} + (\tfrac{1}{3})^{15} + \cdots\right) \\ &= \tfrac{2}{13} \cdot (\tfrac{1}{3})^{13} \frac{1}{1-(\frac{1}{3})^2} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 9}{13 \cdot 3^{13} \cdot 8} = \frac{1}{52 \cdot 3^{11}} < 1.1 \cdot 10^{-7}.\end{aligned}$$

(Also hier für Genauigkeit der Größenordnung 10^{-7} nur 6 Glieder erforderlich!)

(B2) Es soll $\widetilde{\cos}(15°)$ mit dem TAYLOR-Polynom 6. Grades zu $\cos$ (um 0) berechnet werden: $(f := \cos)$

$15° \mathrel{\widehat{=}} \frac{\pi}{12} \approx 0.261799388$, also $\widetilde{\cos}(15°) = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

$$P_6\left(\tfrac{\pi}{12}\right) = 1 - \tfrac{1}{2}(\tfrac{\pi}{12})^2 + \tfrac{1}{24}(\tfrac{\pi}{12})^4 - \tfrac{1}{720}(\tfrac{\pi}{12})^6 \approx 0.965925826$$

Hier ist $P_6 = P_7$, somit $R\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{f^{(8)}(\xi)}{8!} \cdot \left(\frac{\pi}{12}\right)^8 = \frac{\cos\xi}{8!}\left(\frac{\pi}{12}\right)^8$

(für ein $0 < \xi < \frac{\pi}{12}$).

Der letzte Term läßt sich — mit $8! = 40320$ — betraglich abschätzen durch $\frac{1}{8!}\left(\frac{\pi}{12}\right)^8 < 0.6 \cdot 10^{-9}$.

6.3 Unbestimmte Ausdrücke, Regeln von DE L'HÔPITAL

Bei der Berechnung des Grenzwertes von Funktionen stößt man häufig auf das Problem, zum Beispiel den Grenzwert eines Quotienten $\frac{f(x)}{g(x)}$ für den Fall zu bestimmen, daß $f(x)$ und $g(x)$ beide den Grenzwert 0 oder beide den uneigentlichen Grenzwert ∞ haben. Man spricht dann von *„unbestimmten Ausdrücken der Form* $\boxed{\frac{0}{0}}$ bzw. $\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$ *"*.

Dies ist eine suggestive — aber auch leicht mißverständliche! — Schreibweise. Man muß sich dabei immer vor Augen halten, daß etwa im ersten Fall *nicht* 0 durch 0 dividiert wird, sondern lediglich die Aufgabe in Kurzform notiert wird, bei gegebenen Funktionen, die (für einen bestimmten Grenzübergang) beide gegen 0 streben, den Quotienten auf sein Grenzverhalten zu untersuchen.

Entsprechend sind zu verstehen:

$$\boxed{0\cdot\infty}\,,\quad \boxed{\infty-\infty}\,,\quad \boxed{0^0}\,,\quad \boxed{\infty^0}\quad \text{und}\quad \boxed{1^\infty}\,.$$

Solche Grenzwerte lassen sich häufig einfach über Potenzreihen berechnen:

(B1) $$\boxed{\frac{\sin x}{x}\longrightarrow 1\qquad (0\neq x\longrightarrow 0)}$$

Beweis: $$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$$
$$= 1-\frac{1}{3!}x^2+\frac{1}{5!}x^4-+\cdots\longrightarrow 1\quad (0\neq x\longrightarrow 0)\ \square$$

(Noch einfacher gewinnt man den Grenzwert bei diesem speziellen Beispiel wie in Abschnitt 4.6 zu (34) gezeigt.)

(B2) $$\boxed{\frac{x^\alpha}{e^x}\longrightarrow 0\qquad (x\longrightarrow\infty\,;\ \alpha\in\mathbb{R})}$$

Beweis: Für $x\geq 1$ und festes $\mathbb{N}\ni n\geq\alpha$ gilt:
$$0\leq\frac{x^\alpha}{e^x} = \frac{x^\alpha}{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}\frac{x^\nu}{\nu!}} \leq \frac{x^\alpha}{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}} = \frac{(n+1)!}{x^{n+1-\alpha}} \leq \frac{(n+1)!}{x}\longrightarrow 0\qquad\square$$

Die Exponentialfunktion wächst also für $x\longrightarrow\infty$ schneller als jede noch so hohe Potenz!!

(B3) $$\boxed{\frac{e^x-e^{-x}}{x}\longrightarrow 2\qquad (0\neq x\longrightarrow 0)}$$; denn für $x\neq 0$ hat man:

$$\frac{e^x-e^{-x}}{x} = \frac{1}{x}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{x^\nu}{\nu!}-\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-x)^\nu}{\nu!}\right)$$

$$= \frac{1}{x}\left(2\left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right)\right) = 2\left(1 + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \cdots\right) \quad \square$$

Ein allgemeines, jedoch hinsichtlich seiner Brauchbarkeit häufig überschätztes Hilfsmittel zur Berechnung gewisser unbestimmter Ausdrücke liefert die

DE L'HÔPITALsche **Regel**

Vor.: $-\infty < a < b < \infty\,, \quad \alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}\,,$
$f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig, in* $]a, b[$ *differenzierbar,*
$g'(x) \neq 0$ *für* $x \in\,]a, b[$

Beh.: a) Konvergiert für $a < x \longrightarrow a$ *der Quotient* $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ *gegen* α,

dann auch $\dfrac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$.

b) Konvergiert für $b > x \longrightarrow b$ *der Quotient* $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ *gegen* α,

dann auch $\dfrac{f(x) - f(b)}{g(x) - g(b)}$.

Für die Anwendung der Regel interessiert — für a) — besonders der Fall $f(a) = g(a) = 0$.

Beweis: a) Es gelte $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} \longrightarrow \alpha \quad (a < x \longrightarrow a) \quad (*)$.

Zu $x_n \in\,]a, b] \ \ (n \in \mathbb{N})$ mit $x_n \longrightarrow a \ \ (n \longrightarrow \infty)$ existieren — nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz — $a < t_n < x_n$ mit

$$\frac{f(x_n) - f(a)}{g(x_n) - g(a)} = \frac{f'(t_n)}{g'(t_n)}\,.$$

Mit (x_n) strebt auch (t_n) gegen a, also $\dfrac{f(x_n) - f(a)}{g(x_n) - g(a)} \longrightarrow \alpha \quad (n \longrightarrow \infty)$.

b) ergibt sich analog. $\square$

(B4) $\boxed{\dfrac{x - \sin x}{x^3} \longrightarrow \dfrac{1}{6} \qquad (0 \neq x \longrightarrow 0)}$

$f(x) := x - \sin x$, $g(x) := x^3$; beide Funktionen nehmen an der Stelle 0 den Wert 0 an, streben also gegen 0 für $x \longrightarrow 0$, da sie stetig sind. Es liegt also ein unbestimmter Ausdruck der Form $\dfrac{0}{0}$ vor. $f'(x) = 1 - \cos x$ und $g'(x) = 3x^2$. Dies ergibt offenbar wieder einen unbestimmten Ausdruck; es scheint daher zunächst, daß die Regel hier gar nicht hilft. Wendet man die Regel noch einmal an, jetzt auf f' und g', so erhält man über $f''(x) = \sin x$, $g''(x) = 6x$ zwar wieder einen unbestimmten Ausdruck, dessen Grenzwert wir aber nach (B1) sofort angeben können: $\dfrac{f''(x)}{g''(x)} = \dfrac{1}{6}\dfrac{\sin x}{x} \longrightarrow \dfrac{1}{6}$. Daher gilt zunächst $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} \longrightarrow \dfrac{1}{6}$ und so schließlich $\dfrac{f(x)}{g(x)} \longrightarrow \dfrac{1}{6}$ (für $x \longrightarrow 0$). (Ohne Hinzuziehung von (B1) hätte eine nochmalige Anwendung der Regel — jetzt auf $\dfrac{f''(x)}{g''(x)}$ — zum Ziel geführt.)

Auch dieses Beispiel geht mit der Potenzreihe für $\sin x$ einfacher:

$$\frac{x-\sin x}{x^3} = \frac{1}{x^3}\left(x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \cdots\right)\right) =$$
$$\frac{1}{x^3}\left(\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + - \cdots\right) = \frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + - \cdots \longrightarrow \frac{1}{6} \qquad (x \longrightarrow 0).$$

Auf die erforderliche Modifikation für den Fall $\frac{\infty}{\infty}$ und Ergänzungen der DE L'HÔPITALschen Regeln gehe ich nicht ein!

Die unbestimmten Ausdrücke $\boxed{0 \cdot \infty}$, $\boxed{\infty - \infty}$, $\boxed{0^0}$, $\boxed{\infty^0}$ und $\boxed{1^\infty}$ können oft leicht auf die Fälle $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ zurückgeführt werden, z.B.:

(B5) $\boxed{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x} \longrightarrow 0 \qquad (0 \neq x \longrightarrow 0)}$ $\boxed{\infty - \infty}$

Für $x \neq 0$ ist $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x} = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ mit $f(x) := \sin x - x$ und $g(x) := x \sin x$. Dieser unbestimmte Ausdruck der Form $\frac{0}{0}$ kann durch zweimalige Anwendung der Regel bestimmt werden:
$f'(x) = \cos x - 1$, $g'(x) = \sin x + x\cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $g''(x) = 2\cos x - x \sin x$ und so $\dfrac{f''(x)}{g''(x)} \longrightarrow 0 \quad (x \longrightarrow 0)$.

(B6) $\boxed{x \cot x \longrightarrow 1 \qquad (0 \neq x \longrightarrow 0)}$ $\boxed{0 \cdot \infty}$

Für $x \in\,]-\pi, \pi[\, \setminus \{0\}$ gilt: $x \cot x = \dfrac{x}{\frac{1}{\cot x}} = \dfrac{x}{\tan x}$.
Dieser unbestimmte Ausdruck der Form $\frac{0}{0}$ wird durch einmaliges Heranziehen der Regel berechnet: $f(x) := x$, $g(x) := \tan x$:
$f'(x) = 1$, $g'(x) = 1 + (\tan x)^2$, also $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} \longrightarrow 1 \quad (x \longrightarrow 0)$.

Hier hätte die Umformung $x \cot x = \frac{x \cos x}{\sin x}$ mit (B1) sofort das Resultat geliefert! Aber es sollte ja die Umformung eines Ausdrucks der Form $0 \cdot \infty$ in einen der Form $\frac{0}{0}$ erläutert werden.

(B7) $\boxed{\lim\limits_{0<x\longrightarrow 0} x^x = 1}$ $\boxed{0^0}$

Für $x > 0$ ist $x^x = \exp(x \ln x)$ und $x \ln x = \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}$:

Dies liefert einen unbestimmten Ausdruck der Form $\frac{\infty}{\infty}$. Hier wenden wir die — für diesen Fall nicht gesondert ausformulierte — Regel von DE L'HÔPITAL an: $f(x) := \ln x$, $g(x) := \frac{1}{x}$, somit $f'(x) = \frac{1}{x}$, $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$, also $\frac{f'(x)}{g'(x)} = -x \longrightarrow 0 \quad (x \longrightarrow 0)$. So folgt $x \ln x = \frac{f(x)}{g(x)} \longrightarrow 0$ und mit der Stetigkeit der Exponentialfunktion: $x^x = \exp(x \ln x) \longrightarrow 1$.

6.4 FOURIER-Reihen

Auf FOURIER-*Reihen* gehe ich nur recht oberflächlich ein, also eine ziemlich abgespeckte Version oder in Neudeutsch etwa „FOURIER-*Reihen light*". Geringfügige Abschwächungen der Voraussetzungen ändern den erforderlichen Aufwand bei diesem Thema ganz erheblich! Und ein solch deutlich höherer Aufwand und eine abstraktere Sichtweise scheinen mir für den angesprochenen Leserkreis nicht sinnvoll zu sein!

In den Anwendungen der Analysis, besonders bei Schwingungsvorgängen, kommen häufig *periodische Funktionen* vor. Hat eine Funktion f die Periode $p > 0$, so erhält man durch Transformation $g(x) := f(\frac{p}{2\pi}x)$ eine Funktion g der Periode 2π. Wir können uns also Œ auf die Periode 2π — und dabei offenbar auf das Intervall $[-\pi, \pi]$ — beschränken.

Einfache Funktionen mit der Periode 2π kennen wir schon mit den *trigonometrischen Funktionen.* Damit sind auch endliche Linearkombinationen ($n \in \mathbb{N}$; $a_\nu, b_\nu \in \mathbb{R}$)

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{\nu=1}^{n} \big(a_\nu \cos(\nu x) + b_\nu \sin(\nu x)\big)$$

2π-periodisch. Ist eine *„trigonometrische Reihe"*

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \big(a_\nu \cos(\nu x) + b_\nu \sin(\nu x)\big)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergent, so wird dadurch eine 2π-periodische Funktion erklärt. (Den Faktor $\frac{1}{2}$ werden wir etwas später verstehen.) Offenbar gilt: *Ist eine trigonometrische Reihe in einem Intervall der Länge 2π konvergent, so konvergiert sie überall (und ihre Summe hat die Periode 2π).*

Man kann nun versuchen, eine vorgegebene Funktion mit der Periode 2π in eine solche Reihe zu entwickeln. Dazu sehen wir uns zunächst an, wie die Koeffizienten *notwendig* aussehen: *Konvergiert*

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \big(a_\nu \cos(\nu x) + b_\nu \sin(\nu x)\big) =: f(x)$$

im Intervall $[-\pi\,,\,\pi]$ *und kann man gliedweise integrieren, dann gelten:*

$$a_n \;=\; \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \qquad (n \in \mathbb{N}_0)\,,$$

$$b_n \;=\; \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \qquad (n \in \mathbb{N})\,.$$

Beweis: Dies kann einfach aus den *Orthogonalitätsrelationen der trigonometrischen Funktionen* (5.2.4) abgelesen werden: Für $n \in \mathbb{N}$ erhält man aus der Darstellung für f nach Multiplikation mit $\cos(nx)$ und gliedweiser Integration:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \;=\; \frac{1}{2}\,a_0\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\,dx}_{=0} + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos(\nu x)\cos(nx)\,dx}_{=0 \text{ für } \nu\neq n}$$

$$+\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\sin(\nu x)\cos(nx)\,dx}_{=0} \;=\; a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\cos(nx)\,dx \;=\; a_n\,\pi\,.$$

Entsprechend hat man für $n = 0$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \;=\; \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \;=\; \frac{1}{2}a_0\int_{-\pi}^{\pi} 1\,dx \;=\; \frac{1}{2}a_0\,2\pi \;=\; a_0\,\pi\,.$$

Die Formeln für die b_n ergeben sich analog. □

Ich möchte ausdrücklich darauf hinweisen, daß oben keine Aussage darüber gemacht wurde, unter welchen Voraussetzungen man gliedweise integrieren kann, sondern dies *vorausgesetzt* wurde, um — in diesem Fall — die Formeln für die Koeffizienten zu gewinnen.

Der Faktor $\frac{1}{2}$ bei a_0 ist also zweckmäßig, um die a_n für $n \in \mathbb{N}$ und für $n = 0$ mit der gleichen Formel beschreiben zu können.

Hiernach liegt es nahe, für eine beliebig vorgegebene integrierbare Funktion $f : [-\pi\,,\,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit den „FOURIER-*Koeffizienten*"

$$a_n \;:=\; \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \qquad (n \in \mathbb{N}_0)\,,$$

$$b_n \;:=\; \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \qquad (n \in \mathbb{N})$$

als spezielle — zunächst nur formal gebildete — trigonometrische Reihe die „FOURIER-*Reihe*“ von f zu bilden:

$$F(x) := \frac{1}{2}a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(a_\nu \cos(\nu x) + b_\nu \sin(\nu x)\right)$$

Als natürliche Fragestellungen ergeben sich (wie bei den TAYLOR-Reihen):

- Unter welchen Voraussetzungen konvergiert die FOURIER-Reihe an einer Stelle x?
- Unter welchen Voraussetzungen konvergiert die FOURIER-Reihe an einer Stelle x gegen $f(x)$?

Diese Probleme sind sehr schwierig und zum Teil noch nicht vollständig gelöst. Die Konvergenz ist nicht einmal für eine beliebige stetige Funktion f an jeder Stelle gegeben. (Man vergleiche dazu etwa [TITCHMARSH].) Ich gebe im folgenden nur ein einfaches hinreichendes Kriterium ohne Beweis an, welches aber für die praktische Anwendung von großer Bedeutung ist.

Da eine FOURIER-Reihe, *wenn* sie für jedes $x \in [-\pi, \pi]$ konvergiert, auch für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert, betrachten wir Œ nur auf ganz $\mathbb{R}$ definierte 2π-periodische Funktionen. Ist g eine auf einem Intervall $[a, b]$ definierte Funktion, so erhält man durch

$$f(x) := g\left(\frac{b-a}{2\pi}x + \frac{a+b}{2}\right) \qquad (x \in [-\pi, \pi])$$

zunächst eine auf $[-\pi, \pi]$ definierte Abbildung f, die sich (unter eventueller Abänderung für $x = \pi$) 2π-periodisch auf die ganze Zahlengerade ausdehnen läßt.

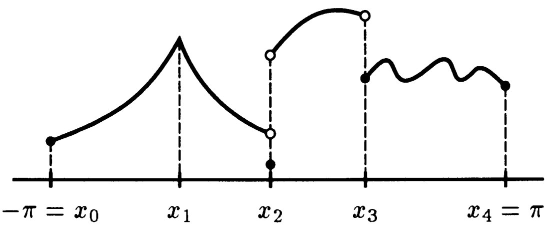
Für das angekündigte Kriterium benötigen wir den Begriff *„stückweise glatt“* für Funktionen:

Definition *Eine 2π-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt genau dann* „stückweise glatt“, *wenn $-\pi = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = \pi$ (für ein $n \in \mathbb{N}$) derart existieren, daß f für $\nu = 0, \ldots, n-1$ auf $]x_\nu, x_{\nu+1}[$ mit einer auf $[x_\nu, x_{\nu+1}]$ stetig differenzierbaren Funktion g_ν übereinstimmt.*

f setzt sich also aus endlich vielen ‚glatten‘ Funktionen — bis auf beliebige Werte an den ‚Nahtstellen‘ — zusammen. Insbesondere existieren an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ dann die einseitigen Grenzwerte

$$f(x+) := \lim_{0<\varepsilon\to 0} f(x+\varepsilon)\,, \qquad f(x-) := \lim_{0<\varepsilon\to 0} f(x-\varepsilon)\,.$$

Das Schaubild einer solchen Funktion kann also auf $[-\pi, \pi]$ endlich viele ‚Ecken‘ und Sprungstellen aufweisen; zum Beispiel:



Satz *Ist $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 2π-periodisch und stückweise glatt, dann ist die* FOURIER-*Reihe zu f für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergent, und es gilt:*

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(a_\nu \cos(\nu x) + b_\nu \sin(\nu x)\right) = \frac{1}{2}\left(f(x+) + f(x-)\right).$$

An einer Stetigkeitsstelle x von f konvergiert also die FOURIER-*Reihe gegen den Funktionswert $f(x)$, an einer Sprungstelle x gegen das arithmetische Mittel der beiden einseitigen Grenzwerte $f(x+)$ und $f(x-)$.*

Einen Beweis des Satzes findet der mathematisch besonders interessierte Leser beispielsweise in [HEUSER II].

Ehe wir einige Beispiele behandeln, notieren wir — unter den Voraussetzungen an f wie im Satz — noch zwei Feststellungen über FOURIER-Koeffizienten und FOURIER-Reihen, die bei konkreten Aufgaben oft von Nutzen sind:

(1) Bemerkung *Ist f eine* gerade Funktion, *dann haben alle b_n den Wert 0. Die* FOURIER-*Reihe ist also eine reine Cosinus-Reihe.*

Beweis: Da f gerade ist, ist der Integrand von $\left(\pi b_n = \right) \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$ ungerade, also das Integral 0, weil über ein zu 0 symmetrisches Intervall integriert wird. □

(2) Bemerkung *Ist f eine* ungerade Funktion, *dann haben alle a_n den Wert 0. Die* FOURIER-*Reihe ist also eine reine Sinus-Reihe.*

Beweis: Hier ist der Integrand von $\left(\pi a_n = \right) \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$ — mit f — ungerade. □

Ähnlich wie bei TAYLOR-Reihen ist es auch bei FOURIER-Reihen oft von Vorteil, sich die vorgegebene Funktion erst einmal genauer anzusehen und mit speziellen darauf bezogenen Überlegungen zum Ziel zu kommen, statt stur über die angegebenen Formeln für die Koeffizienten zu rechnen. Dies soll mit den ersten beiden der folgenden Beispiele etwas demonstriert werden:

(B1) $\boxed{f(x) := (\sin x)^2}$

Da f gerade ist, treten nach (1) in der FOURIER-Entwicklung keine Sinusglieder auf.

$\cos(2x) = \cos(x+x) = (\cos x)^2 - (\sin x)^2 = 1 - (\sin x)^2 - (\sin x)^2$,

also $$(\sin x)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)\,.$$

Das ist schon die gewünschte FOURIER-Reihe; denn wir hatten ja gleich zu Beginn des Abschnitts schon gesehen, wie die Koeffizienten unter geeigneten — hier gegebenen — Voraussetzungen notwendig aussehen; damit sind sie dann *eindeutig* bestimmt!

(B2) $\boxed{f(x) := \sin x\,(\cos x)^2}$

Da f ungerade ist, treten nach (2) in der FOURIER-Entwicklung keine Cosinusglieder auf.

$\cos(2x) = \cos(x+x) = (\cos x)^2-(\sin x)^2 = (\cos x)^2-\big(1-(\cos x)^2\big)$,

also $(\cos x)^2 = \frac{1}{2}\big(\cos(2x)+1\big)$ und so

$f(x) = \frac{1}{2}\sin x\,\big(1+\cos(2x)\big) = \frac{1}{2}\big(\sin x + \sin x\cos(2x)\big) \underset{(33)\text{ aus }4.6}{=}$

$\frac{1}{2}\big(\sin x + \frac{1}{2}\big[\sin(3x) - \sin(x)\big]\big) = \frac{1}{4}\sin x + \frac{1}{4}\sin(3x)$.

$$f(x) = \frac{1}{4}\sin x + \frac{1}{4}\sin(3x)$$

ist demnach die gewünschte FOURIER-Entwicklung.

(B3) $\boxed{f(x) := \begin{cases} -1 & , \quad -\pi \le x < 0 \\ +1 & , \quad 0 \le x < \pi \end{cases}}$ (dann 2π-periodisch fortgesetzt)

Da f ungerade ist (bis auf die Punkte $-\pi$, 0, π), sind nur die b_n zu berechnen:

$$b_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\sin(nx)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin(nx)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(nx)\,dx = -\frac{2}{\pi n}\cos(nx)\Big|_0^{\pi} = -\frac{2}{\pi n}\big((-1)^n - 1\big)$$

$$= \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{4}{\pi n} & , \quad n \text{ ungerade} \\ 0 & , \quad n \text{ gerade} \end{array}\right\}. \quad \text{Also}$$

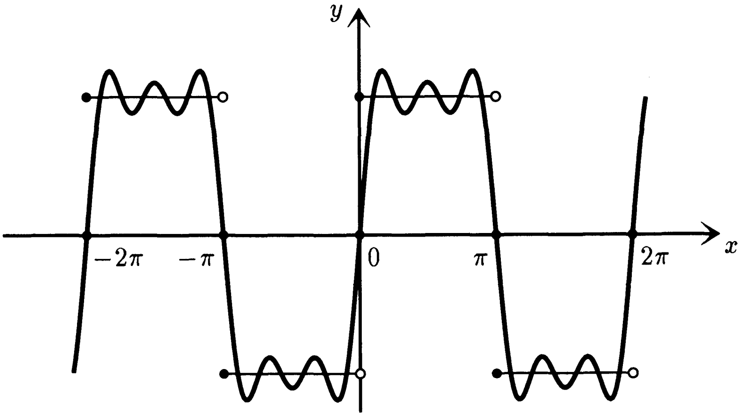
$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin(2\nu-1)x}{2\nu-1} \qquad \text{für } 0 < |x| < \pi\,.$$

Die *Approximation* der Funktion f *durch* die entsprechende *dritte*

Partialsumme

$$\frac{4}{\pi}\sum_{\nu=1}^{3}\frac{\sin(2\nu-1)x}{2\nu-1} = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5}\right)$$

ist in der folgenden Abbildung skizziert:



(B4) $\boxed{f(x) := x \text{ für } -\pi < x \leq \pi}$ (dann 2π-periodisch fortgesetzt)

„Sägezahnfunktion" (Wieder sind nur die b_n zu berechnen:)

$$b_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left\{-x\,\frac{\cos(nx)}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(nx)}{n}\,dx}_{=0}\right\}$$

$$= (-1)^{n+1}\cdot\frac{2}{n}\,,\quad \text{also}$$

$$f(x) = x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx) \quad \text{für} \quad -\pi < x < \pi\,.$$

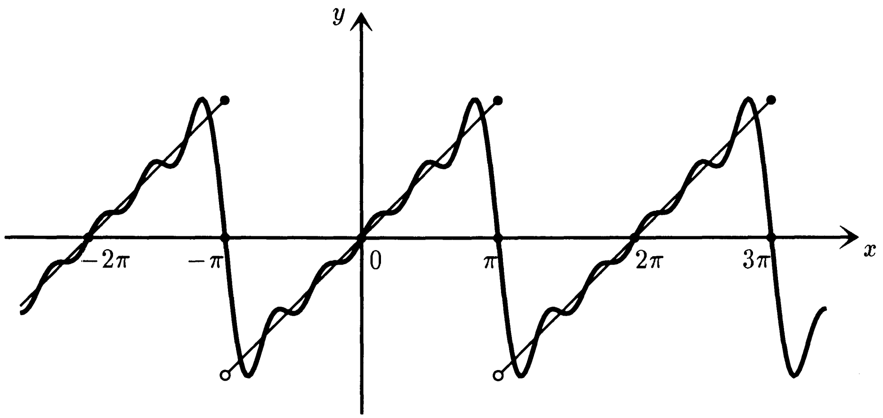
Für $x = \frac{\pi}{2}$ ergibt sich die *Summenformel*:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \cdots\,.$$

Die Approximation durch die fünfte Partialsumme der FOURIER-Reihe

$$2\left(\sin(x) - \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} - \frac{\sin(4x)}{4} + \frac{\sin(5x)}{5}\right)$$

verdeutlicht die folgende Abbildung:



(B5) $\boxed{f(x) := |\sin x| \quad (x \in \mathbb{R}}$ *„Kommutierter Sinusstrom"*

(Hier sind — nach (1) — nur die Koeffizienten a_n zu berechnen:)

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x\,dx = \frac{2}{\pi}\,(-\cos x)\Big|_0^{\pi} = \frac{4}{\pi}\,;$$

$$\text{für } n \in \mathbb{N}: \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x\cos(nx)\,dx$$

$$\underset{\text{Abschnitt 4.6}}{=} \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \big[\sin(n+1)x + \sin(1-n)x\big]\,dx =: I$$

Im Fall $n = 1$ ist dieses Integral 0; für $n \geq 2$ rechnet man:

$$I = -\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos((n+1)x)}{n+1} + \frac{\cos((1-n)x)}{1-n}\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1} + \frac{(-1)^{1-n}}{1-n} - \frac{1}{1-n}\right]$$

$$= \begin{cases} 0 & , \ n \text{ ungerade} \\ \frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{n+1} + \frac{2}{1-n}\right) = -\frac{4}{\pi}\frac{1}{(n-1)(n+1)} & , \ n \text{ gerade} \end{cases}$$

Als FOURIER-Reihe zu f erhält man damit für $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = |\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos(2x)}{3} + \frac{\cos(4x)}{15} + \frac{\cos(6x)}{35} + \cdots\right)$$

Für $x = \frac{\pi}{2}$ ergibt sich daraus:

$$\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{1\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} \mp \cdots .$$

Oft ist es auch bei FOURIER-Reihen zweckmäßiger, *komplex* zu *rechnen*: Für $z \in \mathbb{C}$ ist — nach (17) aus Abschnitt 4.6 —

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

und — durch Übergang $z \longmapsto -z$ —

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z \,.$$

Durch Addidition bzw. Subtraktion dieser beiden Gleichungen erhält man:

$$\boxed{\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)} \quad \text{und} \quad \boxed{\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)} \,.$$

Für $x \in \mathbb{R}$ und $a_\nu, b_\nu \in \mathbb{R}$ $(\nu \in \mathbb{N}_0)$ hat man so:

$$a_\nu \cos(\nu x) + b_\nu \sin(\nu x) = a_\nu \tfrac{1}{2}\left(e^{i\nu x} + e^{-i\nu x}\right) + b_\nu \tfrac{1}{2i}\left(e^{i\nu x} - e^{-i\nu x}\right)$$
$$= \tfrac{1}{2}(a_\nu - ib_\nu)\, e^{i\nu x} + \tfrac{1}{2}(a_\nu + ib_\nu)\, e^{-i\nu x} = \alpha_\nu\, e^{i\nu x} + \alpha_{-\nu}\, e^{-i\nu x} \quad \text{mit}$$

$$\alpha_\nu := \frac{1}{2}(a_\nu - ib_\nu) \quad \text{und} \quad \alpha_{-\nu} := \frac{1}{2}(a_\nu + ib_\nu) \qquad (\nu \in \mathbb{N}) \,.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ gilt also mit $\alpha_0 := \frac{a_0}{2}$,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu \cos(\nu x) + b_\nu \sin(\nu x)) = \alpha_0 + \sum_{\nu=1}^{n} \left(\alpha_\nu\, e^{i\nu x} + \alpha_{-\nu}\, e^{-i\nu x}\right)$$
$$= \sum_{\nu=-n}^{n} \alpha_\nu\, e^{i\nu x} \,.$$

Notiert man noch — im Fall der Konvergenz —

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \alpha_\nu\, e^{i\nu x} := \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=-n}^{n} \alpha_\nu\, e^{i\nu x} \,,$$

so gilt also für die FOURIER-Reihe:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos(\nu x) + b_\nu \sin(\nu x)) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \alpha_\nu\, e^{i\nu x} \,.$$

Da umgekehrt die Koeffizienten a_ν, b_ν aus den α_ν über

$$a_\nu = \alpha_\nu + \alpha_{-\nu} \,, \quad b_\nu = i(\alpha_\nu - \alpha_{-\nu}) \quad (\nu \in \mathbb{N}) \quad \text{und} \quad a_0 = 2\alpha_0$$

zurückgewonnen werden können, besteht zwischen der reellen und der *komplexen Schreibweise* eine bijektive Beziehung.

Zu Beginn des Kapitels hatte ich die FOURIER-Reihen unter Punkt d) — Approximation im *„quadratischen Mittel"* — eingeordnet, was aber in der dargestellten Kurzversion in diesem Abschnitt gar nicht auftrat. Ich skizziere einige Überlegungen zu dieser Sichtweise für mathematisch interessierte Leser in den Übungen.

Rückblick

In diesem Kapitel haben Sie exemplarisch einfache Fragen und Beispiele aus dem Gedankenkreis der *Approximation von Funktionen* kennengelernt.

Ich erinnere noch einmal daran, daß dabei einige Überlegungen nicht für alle Fachrichtungen zwingend sind und — insbesondere bei den FOURIER-Reihen — in einer sehr einfachen Version vorgestellt wurden.

Es genügte hier, flüchtig zu lesen, sich die Dinge in groben Zügen klarzumachen und nur bei Bedarf darauf genauer zurückzukommen. Die behandelten Themen sind jedenfalls für das Verständnis der nächsten drei Kapitel großenteils nicht erforderlich.

Zumindest aber die Behandlung *unbestimmter Ausdrücke* sollte in Ergänzung der Ausführungen über Kurvendiskussionen allen Lesern vertraut sein.

Hängengeblieben sein sollte nebenher aber auch, daß etwa bei den TAYLOR-Reihen — wie bei vielen anderen Dingen — das praktische Vorgehen nicht immer nur stur der Definition folgen sollte. Prägen Sie sich viele der vorgestellten kleinen Tricks ein, sie können das ‚Leben' wesentlich erleichtern!

Kapitel 7

Gewöhnliche Differentialgleichungen (DGLn)

Lernziel

Das Wesen von Differentialgleichungen als Funktionalgleichung zwischen (gesuchter) Funktion $y = y(x)$, der Variablen x und Ableitungen von y wird verstanden. Eine vorgelegte Differentialgleichung (DGL) kann nach den Merkmalen *linear* – nichtlinear, *homogen* – inhomogen und *Ordnung* klassifiziert werden. Für die wichtigsten der behandelten Differentialgleichungen

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)} \qquad \text{(„getrennte Variablen")}$$

$$y' = f(x)\,y + g(x) \qquad \text{(„linear, 1. Ordnung")}$$

$$u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \cdots + a_0 u = f \qquad \text{(„linear, } n\text{-ter Ordnung, \ldots")},$$

speziell $$u'' + a\,u' + b\,u = f \qquad \text{(„linear, zweiter Ordnung, \ldots")},$$

werden die Lösungsverfahren beherrscht. Dabei wird unterschieden zwischen allgemeinen Lösungen und Lösungen einer zugehörigen *Anfangswertaufgabe.*

Typische Aufgabenstellungen der Praxis können in die Sprache der Differentialgleichungen (DGLn) übersetzt werden.

Wir behandeln in diesem Kapitel einige einfache Typen gewöhnlicher Differentialgleichungen.

Die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen ist eine der mathematischen Disziplinen, in denen die Anwendbarkeit der Mathematik besonders augenfällig zutage tritt.

Die Bedeutung der wechselseitigen Beziehungen zwischen der Theorie der

DGLn und den Naturwissenschaften, oder — allgemeiner — Wissenschaften, die die Erfahrung auf einer höheren Ebene als der rein beschreibenden interpretieren, kann nur schwerlich überschätzt werden.

Die Theorie steht in andauerndem fruchtbaren Kontakt zu diesen Wissenschaften, wobei diese einerseits wertvolle Hilfe durch die Theorie der Differentialgleichung erfahren, andererseits die Theorie immer wieder mit konkreten Problemen neu beleben und fordern.

Dadurch ist dieses Gebiet weniger als manche andere Bereiche in der Mathematik ausschließlich seiner Eigendynamik gefolgt, weniger in Gefahr, in Richtung „l'art pour l'art" zu degenerieren. Von dem faszinierenden Anwendungsreichtum der Differentialgleichungen können wir nur einen verhältnismäßig kleinen Eindruck vermitteln. Wir wollen uns lediglich an einigen Beispielen ansehen, wie Forscher verschiedenster Gebiete Differentialgleichungen zur Lösung oder als einen Lösungsversuch auch von ‚real life'-Problemen mitbenutzen.

Sind $k \in \mathbb{N}$, $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}^{k+1}$ und $F : D \longrightarrow \mathbb{C}$, dann heißt

$$(*) \qquad F(x, y, y', \dots, y^{(k)}) = 0.$$

„gewöhnliche Differentialgleichung", kurz *„DGL"* notiert.

Genauer bedeutet dies:

<u>Gesucht:</u> Intervall $j \subset \mathbb{R}$ und $y : j \longrightarrow \mathbb{C}$ k-mal differenzierbar mit
$\forall\, x \in j \quad (x, y(x), y'(x), \dots, y^{(k)}(x)) \in D$ und
$\forall\, x \in j \quad F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(k)}(x)) = 0\,.$

y heißt dann *„Lösung"* von $(*)$ (in j), in älterer Literatur auch *„Integral"*. Man sagt auch y *„erfüllt die"* DGL oder *„genügt der"* DGL.

(Das Argument läßt man in der Notierung meistens — wie in $(*)$ — weg.)

Kann $(*)$ speziell in der Form

$$y^{(k)} = \varphi\big(x, y, y', \dots, y^{(k-1)}\big)$$

geschrieben werden, dann heißt die Differentialgleichung *„explizit"* und k *„Ordnung"* der DGL.

(Bei *partiellen* Differentialgleichungen, auf die wir nicht eingehen, hängt die gesuchte Funktion von mehreren unabhängigen Variablen ab.)

Es stellen sich zumindest die folgenden *zentralen Fragen*:

1. Existiert (lokal) eine Lösung?
2. Falls ja: Wie gewinnt man eine Lösung?
3. Falls ja: Eindeutigkeit?
4. Maximale Lösung (Fortsetzung)
5. Abhängigkeit der Lösung(en) von ‚Parametern'
6. Charakterisierung der Lösung(en)

Wir werden die o.a. Fragen nur zum Teil und lediglich in einigen einfachen Fällen beantworten.

Zu 1,2: Es gibt natürlich DGLn, die *unlösbar* sind, zum Beispiel schon, wenn man mit den Funktionswerten im Reellen bleiben will: $y'^2 + 1 = 0$. Ein Beispiel einer — zu einer gegebenen ‚Anfangsbedingung' — unlösbaren expliziten DGL 1. Ordnung wird — mit geeigneter Anleitung — in Übungsaufgabe (1) behandelt.

Und schon im einfachsten Fall $y' = \varphi(x)$ (wo φ nur von x abhängt und ‚Lösen' das Aufsuchen einer Stammfunktion bedeutet) wissen wir, daß dies nicht immer unproblematisch ist.

Zu 3: Die Frage der *Eindeutigkeit* ist i.a. nur sinnvoll bei Vorgabe von ‚Anfangswerten'. Wir sprechen dann von einer *Anfangswertaufgabe*, kurz *AWA*.

Schon das — recht harmlos aussehende — Beispiel

$$\boxed{y' = \sqrt{y} \quad (y \geq 0), \quad y(0) = 0}$$

zeigt, daß lokal *unendlich viele Lösungen* durch einen Punkt vorkommen können. (Wir sehen uns dies in 7.2 genauer an.)

Eine weitreichende Aussage zu 1., 2. und 3. macht ein allgemeiner *Existenz- und Eindeutigkeitssatz*, auf den ich jedoch in diesem Buch nicht eingehe.

Zu 4: In der Aufgabenstellung wird zunächst nichts über die ‚Größe' von j gesagt. Natürlich interessiert man sich vorrangig für Lösungen, die auf einem möglichst großen Intervall definiert sind.

Das einfache Beispiel

$$\boxed{y' = y^2 \quad , \quad y(0) = c > 0}$$

zeigt, daß Existenz im Einzelfall nur ‚lokal' gesichert werden kann. (Auch auf dieses Beispiel kommen wir in Abschnitt 7.2 zurück.)

Zu 5: Die Abhängigkeit der Lösung von Eingabedaten ist von größter Wichtigkeit für Anwendungen: ‚Punkte' und Funktionswerte sind häufig — durch Messen (Experiment) oder durch näherungsweise Berechnung — nur mit beschränkter Genauigkeit bekannt! Die entscheidende Frage ist dann, wie sich diese ‚Fehler' auf ‚die Lösung' auswirken. Dieser Gesichtspunkt wird jedoch in diesem Buch nicht vertieft.

7.1 Richtungsfelder (für explizite DGLn 1. Ordnung)

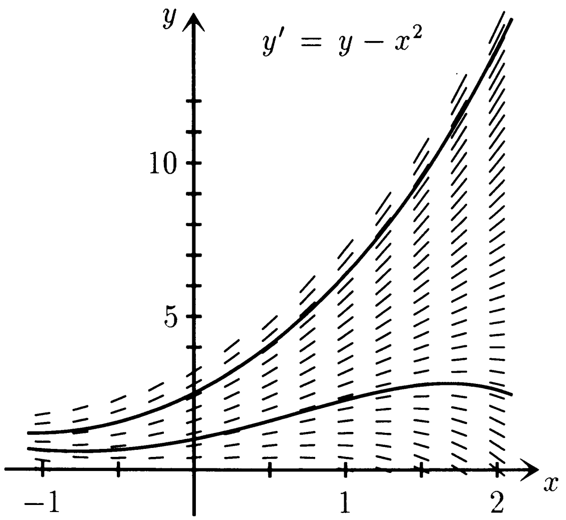
Wir betrachten hier die DGL

(#) $$y' = \varphi(x, y) \qquad \text{(explizit, 1. Ordnung).}$$

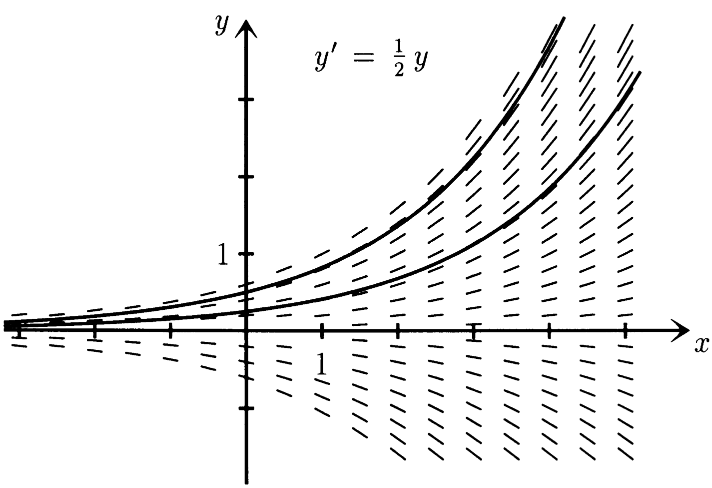
φ ordnet jedem Punkt (x, y) (aus dem Definitionsbereich von φ) eine Steigung (Richtung) $\varphi(x, y)$ zu. Repräsentiert man diese Richtungen in ihren Trägerpunkten durch kleine Geradenstücke von eben diesen Richtungen — sogenannte *„Linienelemente"* —, so erhält man ein *„Richtungsfeld"*, und Lösungen der DGL entsprechen ‚Kurven', die ins Richtungsfeld hineinpassen, d.h.: Kurven, die in jedem ihrer Punkte das dort vorgegebene Linienelement als Tangente haben. Richtungsfelder dienen nicht nur zum besseren intuitiven Verständnis von DGLn, sondern können den Charakter der Lösungsgesamtheit aufzeigen und liefern zudem eine einfache graphische Methode, um Näherungslösungen zu finden.

Sehen wir uns einige Beispiele an:

a)



b)

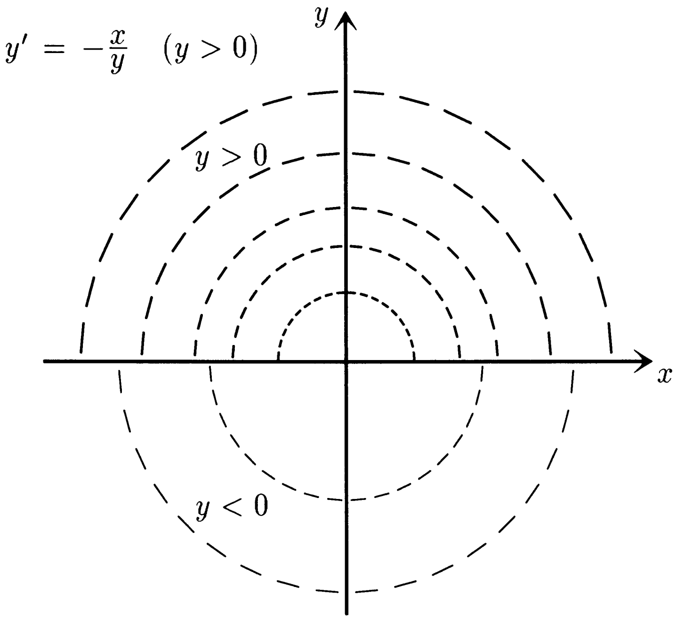


Die durchgezogenen Linien zeigen jeweils mögliche Lösungskurven.

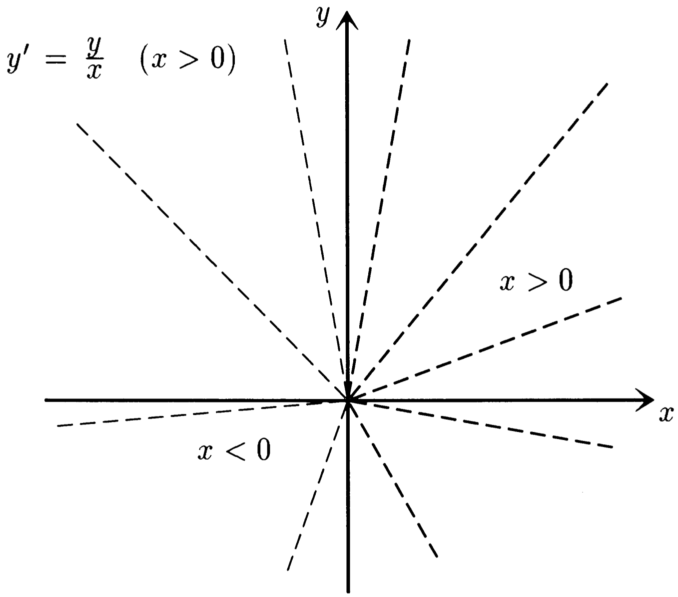
In b) hängt φ nur von y ab, was sich natürlich auch aus der Zeichnung entnehmen läßt.

Im folgenden Beispiel c) sind die Lösungen mit $y(a) = b > 0$ *Halb*kreise: $y(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ $(-r < x < r)$ mit $r := \sqrt{a^2 + b^2}$:

c)



d)



In d) ist die Lösung mit $y(a) = b \quad (a > 0)$ gegeben durch:
$y(x) := \frac{b}{a}x \quad (x > 0)$, *nicht* die gesamte Gerade!

7.2 DGLn mit „getrennten Variablen"

Wir betrachten in diesem Abschnitt DGLn der Form

$$(*) \qquad \boxed{y' = \frac{f(x)}{g(y)}} \, .$$

Dazu machen wir die Annahmen:

i_1 und i_2 Intervalle, $f : i_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig,
$g : i_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $\underline{g(s) \neq 0}$ für $s \in i_2$.

Aufgabe: Zu den *„Anfangswerten"* $a \in i_1$ und $b \in i_2$ suchen wir ein Intervall i mit $a \in i \subset i_1$ und eine darauf definierte Lösung y von $(*)$ mit $y(a) = b$.

Wir bezeichnen — wie schon erwähnt — diese Aufgabe (hier und analog im folgenden) als *„Anfangswertaufgabe"*, kurz *„AWA"*.

Die grobe Idee ist recht einfach: Man formt um zu $y'(t)\,g(y(t)) = f(t)$ und integriert: $\int_a^x y'(t)\,g(y(t))\,dt = \int_a^x f(t)\,dt$. Die linke Seite ist — nach Substitution $s := y(t)$ — gerade $\int_{y(a)}^{y(x)} g(s)\,ds$. Anschließend löst man nach $y(x)$ auf.

Die genaue Durchführung folgt dieser Idee, erfordert jedoch etwas mehr Aufwand, beschreibt andererseits aber das Vorgehen ganz präzise:

Vorweg bemerken wir:

1.) Durch ‚Variation' von a und b werden *alle* Lösungen erfaßt.

2.) Eine Lösung von $(*)$ ist automatisch stetig differenzierbar.

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt \quad (x \in i_1), \qquad G(y) := \int_b^y g(s)\,ds \quad (y \in i_2)\,.$$

Da die Funktion g in i_2 keine Nullstellen und damit — als stetige Funktion — konstantes Vorzeichen hat, ist G *streng monoton* (isoton oder antiton). Zudem ist G natürlich stetig differenzierbar. Für das Intervall $i_3 := G(i_2)$ gilt somit: $G : i_2 \longrightarrow i_3$ ist bijektiv. Nach Abschnitt 4.8 ist die Umkehrfunktion $G^{-1} : i_3 \longrightarrow i_2$ stetig differenzierbar. Sie ist (in gleichem Sinne) streng monoton.

Für eine auf einem Intervall $a \in i \subset i_1$ definierte differenzierbare Funktion y mit $y(t) \in i_2$ $(t \in i)$ ist die AWA offenbar äquivalent zu

$\boxed{G(y(x)) \;=\; F(x) \quad (x \in i)}$, also zu $y(x) \;=\; G^{-1}\big(F(x)\big) \;=\; \big(G^{-1} \circ F\big)(x) \quad (x \in i)$. Ist nun i_0 das ‚maximale' Intervall mit $a \in i_0 \subset i_1$ und $F(x) \in i_3 \quad (x \in i_0)$, dann gilt:

$y_0 \;:=\; G^{-1} \circ \big(F_{/i_0}\big)$ ist Lösung der AWA. Hieraus entsteht jede andere Lösung der AWA durch Einschränkung. (y_0 ist „maximale Lösung“)

Von den folgenden drei Beispielen hierzu ist das erste Routine — vergleichen Sie auch das unter c) skizzierte Richtungsfeld —, die letzten beiden sind besonders wichtig:

(B1) $\boxed{y' \;=\; -\frac{x}{y} \qquad (y > 0)}$

Dieses Beispiel ordnet sich mit $i_1 \;:=\; \mathbb{R}$, $f(x) \;:=\; -x$, $i_2 \;:=]0, \infty[$, $g(y) \;:=\; y$ und beliebigen $a \in i_1$, $b \in i_2$ in die allgemeinen Überlegungen ein. Daher wird $2\,F(x) \;=\; -x^2 + a^2$, $2\,G(y) \;=\; y^2 - b^2$ und somit $i_3 \;\big(:= \;G(i_2)\big) \;=]-\tfrac{1}{2}b^2, \infty[$. Mit $r \;:=\; (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$ ergibt sich $i_0 \;= \;]-r, r\,[$. Die Forderung $G(y(x)) \;=\; F(x)$ liefert $y(x)^2 - b^2 \;=\; -x^2 + a^2$, also $y(x) \;=\; (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} \quad (x \in i_0)$.

(B2) $\boxed{y' \;=\; \sqrt{y} \qquad (y \geq 0), \qquad y(0) \;=\; 0}$

Hier ist speziell: $i_1 \;=\; \mathbb{R}$, $i_2 \;=]0, \infty[$, $f(x) \;:=\; 1 \quad (x \in i_1)$, $g(s) \;:=\; s^{-\frac{1}{2}} \quad (s \in i_2)$. Für $b \;=\; 0$ sind die obigen Überlegungen *nicht* anwendbar, da $0 \notin i_2$; wir betrachten daher zunächst <u>$a \in i_1$ und $b \in i_2$ beliebig:</u>

$$F(x) \;:=\; \int_a^x f(t)\,dt \;=\; x - a \quad (x \in i_1),$$

$$G(y) \;:=\; \int_b^y s^{-\frac{1}{2}}\,ds \;=\; 2\big(\sqrt{y} - \sqrt{b}\big) \quad (y \in i_2).$$

$i_3 \;\big(:= \;G(i_2)\big) \;=]-2\sqrt{b}, \infty[$, $\quad i_0 \;=]a - 2\sqrt{b}, \infty[$,

$y_0(x) \;:=\; G^{-1}\big(F(x)\big) \;=\; \frac{1}{4}\Big(x - a + 2\sqrt{b}\Big)^2 \quad (x \in i_0)$.

Andererseits ist offenbar $y_{\min}$ — definiert durch

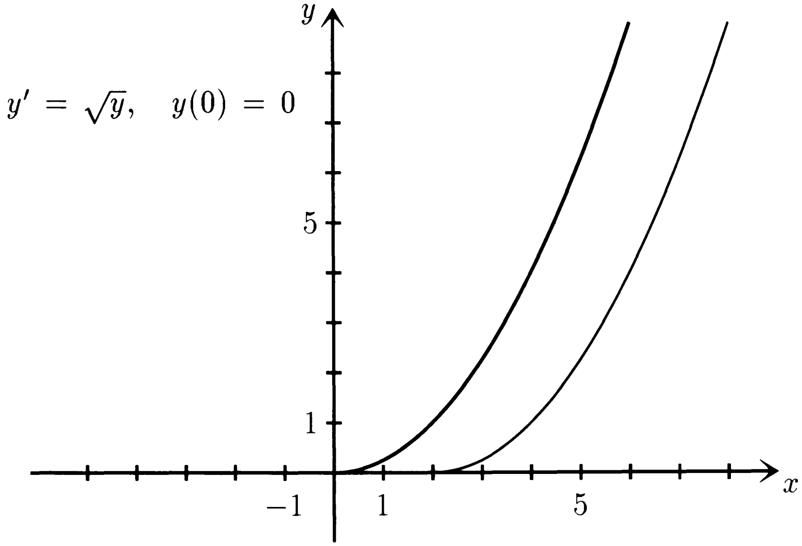
$y_{\min}(x) \;:=\; 0 \; (x \in \mathbb{R})$ — Lösung von (B2) in i_1.

Mit $\alpha \;:=\; a - 2\sqrt{b}$ liefert dann $y(x) \;:=\; \left\{ \begin{array}{ll} 0 & x \leq \alpha \\ \frac{1}{4}(x-\alpha)^2 & x > \alpha \end{array} \right\}$ eine Lösung von $y' \;=\; \sqrt{y}$ auf ganz $\mathbb{R}$.

Falls $\alpha \geq 0$ ist, erhält man so eine Lösung von (B2). Es existieren also *lokal* (hier zum Beispiel um 0) *unendlich viele Lösungen der AWA*; diese liegen zwischen der *‚kleinsten Lösung'* $y_{\min}$ und der *‚größten Lösung'*

$$y_{\max}(x) := \left\{ \begin{array}{ll} 0 & , x \le 0 \\ \frac{1}{4}x^2 & , x > 0 \end{array} \right\} \quad (x \in \mathbb{R}) .$$

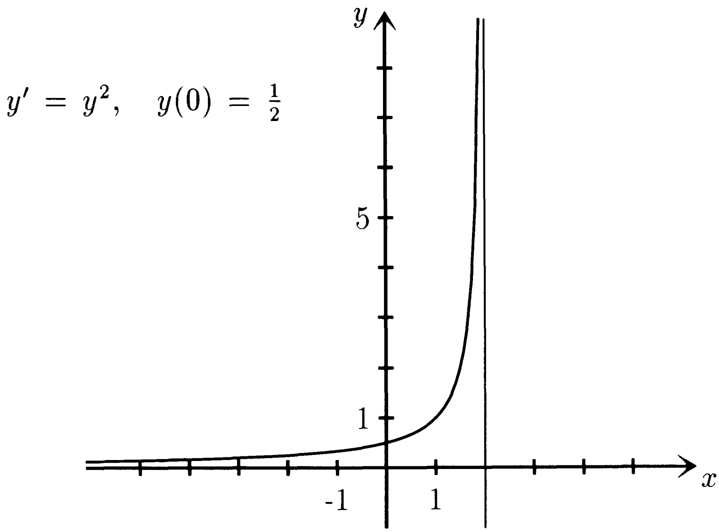
Man ‚sieht' den beschriebenen Sachverhalt auch sehr schön an der nachfolgenden graphischen Darstellung:



(B3) $\boxed{y' = y^2 , \qquad y(0) = b > 0}$

Für dieses Beispiel ist $i_1 = \mathbb{R}$, $i_2 =]0, \infty[$, $f(x) := 1 \quad (x \in i_1)$, $g(s) := s^{-2} \quad (s \in i_2)$ und $a = 0$ zu setzen.

Bevor wir die kurze Rechnung — nach dem beschriebenen Schema — durchführen, zeigen wir die graphische Darstellung der Lösungsfunktion:



$$F(x) := \int_0^x f(t)\,dt = x \quad (x \in i_1),$$

$$G(y) := \int_b^y s^{-2}\,ds = \frac{1}{b} - \frac{1}{y} \quad (y \in i_2).$$

$i_3 \bigl(:= G(i_2)\bigr) =]-\infty, \frac{1}{b}[\; = i_0,$

$y_0(x) := G^{-1}\bigl(F(x)\bigr) = G^{-1}(x) = \frac{b}{1-bx} \quad (x \in i_0).$

Hier ist zu beachten:

Die Lösungen besitzen *individuelle maximale Existenzintervalle, obwohl die DGL mit völlig regulären Funktionen gebildet ist.*

7.3 Die lineare DGL 1. Ordnung

Wir betrachten hier die — äußerst wichtige — DGL

$$(*) \qquad \boxed{y' = f(x)\,y + g(x)}\,;$$

dabei seien j Intervall und $f, g : j \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen.

Die Bedeutung der DGL $(*)$ kann nur schwerlich überschätzt werden. Schon der ganz einfache Fall $y' = ay$ (Änderung proportional zum Ist–Zustand) — also $g = 0$ und f konstant — erfaßt so verschiedenartige Dinge wie z.B.:

Radioaktiver Zerfall [ZACHMANN, S. 426]
Anfängliche Entwicklung einer Bakterienkultur [MARGENAU/MURPHY, S. 56]
Blutkonzentration eines Pharmakons nach intravenöser Injektion [FUCHS, S. 99]
Barometrische Höhenformel [HAINZL, S. 284]
Zellwachstum einer Zelle [BATSCHELET, S. 285]
Stetige Verzinsung [HOFMANN, S. 77]

Man vergleiche hierzu insbesondere auch [HEUSER, *DGLn*] und [BRAUN].

Für $a \in j$ wird durch $\boxed{y_0(x) := \exp\Bigl(\int_a^x f(t)\,dt\Bigr)}$ $(x \in j)$ eine Lösung y_0 der zugehörigen *„homogenen (linearen) Differentialgleichung“*

$$(*)_h \qquad \boxed{y' = f(x)\,y}$$

auf j erklärt, die $y_0(x) \neq 0$ und $y_0(a) = 1$ erfüllt.

(Dies könnte man auch mit der Methode aus 7.2 herleiten.)

Ist y eine Lösung von $(*)$ in einem Intervall j_0 mit $a \in j_0 \subset j$ und $y(a) = b \in \mathbb{R}$, dann läßt sich y in der Form

$$y(x) \;=\; c(x)\, y_0(x) \quad (x \in j_0) \qquad\qquad \text{„\textit{Variation der Konstanten}“}$$

mit $c : j_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ (stetig) differenzierbar schreiben. Es gilt dann

$$\underline{f c y_0} + g \;=\; f y + g \;=\; y' \;=\; c' y_0 + c y_0' \;=\; c' y_0 + \underline{c f y_0}\,,$$

also $c'(t) \;=\; g(t)\, y_0(t)^{-1}$; damit ist notwendig:

$$\boxed{y(x) \;=\; y_0(x) \left(\int_a^x g(t) y_0(t)^{-1}\, dt \;+\; b \right)} \qquad (\otimes)$$

Andererseits wird durch $(\otimes)$ eine Lösung von $(*)$ mit $y(a) \;=\; b$ erklärt.

Wir fassen zusammen:

Satz *Für $a \in j$ und $b \in \mathbb{R}$ ist die — eindeutig bestimmte — Lösung y von $(*)$ auf j mit $y(a) \;=\; b$ gegeben durch $(\otimes)$.*

Sämtliche Lösungen von $(*)$ erhält man durch Variation von a und b und Einschränkung auf Teilintervalle.

Folgerung α) *Für die zugehörige homogene DGL $(*)_h$ sind* alle *Lösungen auf j gegeben durch:*

$$y(x) \;=\; b\, y_0(x) \quad (x \in j) \qquad (b \in \mathbb{R}).$$

β) *Für eine Lösung y der homogenen DGL gilt:*

$$y \neq 0 \;\Longrightarrow\; \forall x \in j \quad y(x) \neq 0\,.$$

γ) *Jede beliebige Lösung von $(*)$ (auf j) entsteht aus einer speziellen („partikulären“) Lösung durch Addition einer Lösung von $(*)_h$.*

Beweis: Die erste Aussage liest man direkt aus $(\otimes)$ mit $g(t) := 0 \;\; (t \in j)$ ab. Aus α) erhält man unmittelbar β), da $y_0(x) \neq 0 \quad (x \in j)$. Die dritte Aussage folgt aus der Linearität der Ableitung: Sind y und z Lösungen von $(*)$, so gilt $(y - z)' \;=\; y' - z' \;=\; f\,y - f\,z \;=\; f\,(y - z)$; $(y - z)$ ist also Lösung von $(*)_h$; so gibt $y \;=\; z + (y - z)$ die gewünschte Darstellung. □

Wegen der besonderen Wichtigkeit schreiben wir die enthaltenen *Linearitätsüberlegungen*, die aus der Linearen Algebra (Lösung von linearen Gleichungssystemen) vertraut sein sollten, noch einmal gesondert auf:

(a) u, v *Lösungen von* $(*)_h \Longrightarrow \alpha u + \beta v$ *Lösung von* $(*)_h \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$.

(b) u *Lösung von* $(*) \wedge v$ *Lösung von* $(*)_h \Longrightarrow u + v$ *Lösung von* $(*)$.

(c) v, w *Lösungen von* $(*) \Longrightarrow v - w$ *Lösung von* $(*)_h$.

(a) bedeutet: *Die Menge der Lösungen der homogenen Differentialgleichung $(*)_h$ liefert einen $\mathbb{R}$-Vektorraum.*

Beweis: (c) haben wir oben — zu γ) — bewiesen. (a) und (b) folgen genauso

direkt aus der Linearität der Ableitung:
(a) $(\alpha u + \beta v)' = \alpha u' + \beta v' = \alpha f u + \beta f v = f(\alpha u + \beta v)$.
(b) $(u + v)' = u' + v' = (fu + g) + fv = f(u + v) + g$.

Wir sehen uns auch zu diesem Typ ein einfaches Beispiel an:

(B1) $\boxed{y' = -x\,y + 3x, \qquad y(0) = 5}$

Zur Lösung dieser AWA ist in den allgemeinen Überlegungen $j := I\!R$, $a := 0$, $b := 5$, $f(x) := -x$, $g(x) := 3x$ zu setzen. Dann ergibt sich:

$$y_0(x) := \exp\Big(\int_0^x (-t)\,dt\Big) = \exp\big(-\tfrac{1}{2}x^2\big)$$

$$y(x) := y_0(x)\Big(\int_0^x 3t \exp\big(\tfrac{1}{2}t^2\big)\,dt + 5\Big) = y_0(x)\Big(3\exp\big(\tfrac{1}{2}x^2\big) + 2\Big),$$

wobei wir $\int_0^x 3t\exp\big(\tfrac{1}{2}t^2\big)\,dt = 3\exp\big(\tfrac{1}{2}t^2\big)\Big|_0^x = 3\big(\exp(\tfrac{1}{2}x^2) - 1\big)$ benutzt haben. Daher ist $y(x) = 3 + 2\exp\big(-\tfrac{1}{2}x^2\big)$ die eindeutig bestimmte Lösung der AWA.

Wir rechnen die gleiche Aufgabe noch einmal mit „*Variation der Konstanten*" direkt (ohne Formel $(\otimes)$):

$y_0(x) = \exp\big(-\tfrac{1}{2}x^2\big)$ erfüllt $y_0' = -x\,y_0$ und $y_0(0) = 1$. Der ‚Ansatz' $y(x) = c(x)\,y_0(x)$ liefert

$$\underline{-x(cy_0)} + 3x = -xy + 3x = y' = c'y_0 + cy_0' = c'y_0 + \underline{c(-xy_0)}$$

und somit $c'y_0 = 3x$, also $c'(x) = 3x\exp\big(\tfrac{1}{2}x^2\big)$.
Daraus folgt $c(x) = 3\exp\big(\tfrac{1}{2}x^2\big) + \alpha$. $c(0) = y(0) = 5$ gibt dann $\alpha = 2$, zusammen wieder die obige Lösung.

Oft ist es aber noch einfacher, eine Lösung von $(*)$ zu ‚erraten' und dann mit $\gamma)$ (und $\alpha)$) die allgemeine Lösung zu notieren:

Schreibt man die gegebene DGL in der Form $y' = x(-y + 3)$, so erkennt man leicht die konstante Funktion $y_p(x) := 3$ als *partikuläre Lösung*. Mit der oben schon bestimmten Lösung y_0 der zugehörigen homogenen DGL ist die *allgemeine Lösung* — nach $\alpha)$ und $\gamma)$ —: $y(x) = b\,y_0(x) + y_p(x) = b\exp\big(-\tfrac{1}{2}x^2\big) + 3$ (mit beliebigem $b \in I\!R$). Die Forderung $y(0) = 5$ zeigt dann abschließend $b = 2$.

7.4 BERNOULLIsche DGL

Als solche wird die DGL

$$(*) \qquad \boxed{y' = f(x)\,y + g(x)\,y^{\alpha}}$$

bezeichnet. Dabei seien j Intervall, $f, g : j \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen und Œ $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$. (Für $\alpha = 1$ erhielte man die homogene lineare DGL 1. Ordnung; für $\alpha = 0$ die (inhomogene) lineare DGL 1. Ordnung.)

Dementsprechend werden — allgemein — nur Lösungen $y : j_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ für ein Teilintervall j_0 von j mit $y(x) > 0$ $(x \in j_0)$ betrachtet.

(Für spezielle α kann man auch $y(x) \leq 0$ zulassen. Ist $0^\alpha = 0$ definiert, so ist natürlich auch $y = 0$ Lösung.)

Die *Transformation* $\boxed{u(x) = y(x)^{1-\alpha}}$ $(x \in j_0)$ liefert, daß

y genau dann Lösung von $(*)$ ist, wenn u auf j_0 die <u>*lineare DGL*</u>
$(\bullet)$ $u' = (1-\alpha)f(x)u + (1-\alpha)g(x)$ *löst und* $u(x) > 0$ $(x \in j_0)$ *gilt.*

<u>Beweis:</u> Ist y Lösung von $(*)$, dann gilt für u:

$$u' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y' = (1-\alpha)y^{-\alpha}\left[f(x)\,y + g(x)y^\alpha\right]$$
$$= (1-\alpha)f(x)u + (1-\alpha)g(x).$$

Geht man andererseits von einer Lösung u von $(\bullet)$ aus, so rechnet man für y:

$$y' = \frac{1}{1-\alpha}\,u^{\frac{1}{1-\alpha}-1}\,u' = \frac{1}{1-\alpha}\,u^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\left[(1-\alpha)f(x)u + (1-\alpha)g(x)\right]$$
$$= f(x)u^{\frac{1}{1-\alpha}} + g(x)u^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = f(x)y + g(x)y^\alpha .$$

□

Auch hier ein kleines Beispiel zum Einüben:

(B1) $\boxed{y' = xy - 3xy^2, \qquad y(0) = \frac{1}{4}}$

Mit $\alpha = 2$ und $u(x) := y(x)^{-1}$ in einem Intervall $j_0 \in \mathbb{R}$ mit $0 \in j_0$ und $y(x) > 0$ $(x \in j_0)$ transformiert sich diese AWA nach den geschilderten Überlegungen zu $u' = -xu + 3x$ und $u(0) = 4$. Nach dem Beispiel des vorangehenden Abschnitts ist die allgemeine Lösung dieser DGL durch $u(x) = b\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) + 3$ gegeben. Die Berücksichtigung der Anfangsbedingung liefert $b = 1$. Die Lösung der ursprünglichen AWA ist demnach $y(x) = u(x)^{-1} = \dfrac{1}{3 + \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)}$.

7.5 EULER–homogene DGLn

In diesem — sehr kurzen — Abschnitt behandeln wir als ein weiteres Beispiel für DGLn, die sich durch *Substitution* oder *Transformation* auf eine ‚einfachere' DGL zurückführen lassen, die DGL

$$(*) \qquad \boxed{y' = f\left(\frac{y}{x}\right)}.$$

Diese DGL wird meist als ‚*homogene DGL*' bezeichnet. Da diese Bezeichnung aber leicht zu Verwechslungen mit der ‚Homogenität' bei linearen DGLn (aus

Abschnitt 7.3) führen kann, benutzen wir sie nicht. Manche Autoren sprechen deshalb von *„Ähnlichkeits-DGL“*. Wir nennen sie — wie beispielsweise auch [HEUSER, *DGLn*] — „EULER-*homogen*“.

(Hier und in den beiden nächsten Abschnitten lassen wir die genaue Notierung der Voraussetzungen einmal weg.)

Die <u>*Substitution*</u> $\boxed{u = \frac{y}{x}}$ (für $x \neq 0$) bzw. $\boxed{y = x\,u}$ führt zu $f(u) = u + x\,u'$, also zu $u' = \dfrac{f(u) - u}{x}$. Das Problem ist demnach auf eine DGL mit *„getrennten Variablen“* zurückgeführt.

Wir rechnen wieder ein einfaches Beispiel durch:

(B1) $\boxed{y' = \dfrac{x-y}{x}, \quad y(2) = 3}$

Die rechte Seite kann umgeformt werden zu $1 - \frac{y}{x}$. Hier ist demnach $f(u) := 1 - u$ zu setzen. Für $x > 0$ ergibt sich nach Substitution $y = x\,u$ die AWA $u' = \dfrac{1-2u}{x}$, $u(2) = 3/2$. Für $x > 0$ und $u > 1/2$ ist nach 7.2 zu rechnen:

$\displaystyle\int_{3/2}^{u(x)} \frac{1}{1-2s}\,ds = \int_2^x \frac{1}{t}\,dt$, folglich $-\frac{1}{2}\ln(2s-1)\Big|_{3/2}^{u(x)} = \ln x - \ln 2$,

was über $\ln\big(2u(x) - 1\big) - \ln 2 = 2\,(\ln 2 - \ln x)$ zu $u(x) = \dfrac{4}{x^2} + 1/2$ führt und schließlich $y(x) = x\,u(x) = \frac{4}{x} + \frac{x}{2} = \dfrac{8+x^2}{2\,x}$ ergibt.

7.6 Explizite DGLn 2. Ordnung ‚ohne y‘

In diesem und dem folgenden Abschnitt beschäftigen wir uns — beispielhaft — noch ganz kurz mit zwei speziellen DGLn *zweiter Ordnung*, die sich durch geeignete Substitution in eine DGL 1. Ordnung überführen lassen:

Bei expliziten DGLn 2. Ordnung ‚ohne y‘, also DGLn der Art

$$\boxed{y'' = f(x, y')}$$

substituiert man zweckmäßig $z = y'$ und erhält für z die explizite DGL 1. Ordnung $\boxed{z' = f(x,z)}$.

Hat man eine Lösung z dieser DGL, so ergibt sich y als *Stammfunktion zu z*.

(B1) $\boxed{y'' = \sqrt{1 + y'^2}}$

$z = y'$ liefert $z' = \sqrt{1 + z^2}$, also $\dfrac{z'}{\sqrt{1+z^2}} = 1$. Die linke Seite ist aber gerade die Ableitung von $\operatorname{ArSin}(z)$. Infolgedessen gilt (mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$) $\operatorname{ArSin}(z) = x + c$, daher $z = \operatorname{Sin}(x + c)$ und schließlich $y(x) = \operatorname{Cos}(x+c) + d$ (mit einer weiteren Konstanten $d \in \mathbb{R}$).

7.7 Explizite DGLn 2. Ordnung ‚ohne x‘

Bei expliziten DGLn 2. Ordnung ‚ohne x‘, also DGLn der Art

$$\boxed{y'' = f(y, y')}$$

substituiert man $\boxed{p = p(y) = y'}$ und rechnet: $y'' = p'(y)y' = p'(y)\,p$.
So erhält man die DGL 1. Ordnung $\quad p\,p'(y) = f(y,p)$, $\quad$ also für $p \neq 0$

$$(\diamond) \qquad \boxed{p'(y) = \frac{f(y,p)}{p}}\,.$$

Ist p Lösung von $(\diamond)$, so ergibt sich — in Intervallen, in denen $p(\eta) \neq 0$ ist - $\quad x = \displaystyle\int^{y(x)} \frac{d\eta}{p(\eta)} + C$ und daraus (unter geeigneten Voraussetzungen) $y(x)$.

7.8 Lineare DGLn n–ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Wir gehen die Überlegungen in diesem Abschnitt mit der **Operatormethode** an. Diese ist elegant und leistungsfähig und wird daher von uns konsequent verwendet.

Schon in einem Buch von G. Boole aus dem Jahre 1877 findet man wesentliche Ansätze der Operatormethode. Dennoch trifft man in der Lehrbuchliteratur noch sehr oft auf weniger vorteilhafte Zugänge.

Da wir hier nur einen ersten Einblick in die Theorie der Linearen Differentialgleichungen n–ter Ordnung geben wollen, stellen wir keine weiteren Methoden vor. (Die sogenannte *Methode der ‚unbestimmten Koeffizienten‘* ergibt sich als Folgerung.) Für die reizvolle Möglichkeit, die Laplace–*Transformation* einzusetzen, verweisen wir beispielsweise auf [Heuser, *DGLn*].

Im folgenden betrachten wir (für $n \in \mathbb{N}$) mit reellen Zahlen *(„Koeffizienten“)* $a_0, \ldots, a_{n-1}$ und einer auf einem Intervall j definierten stetigen $\mathbb{K}$–wertigen Funktion f die Differentialgleichung

$$(*) \qquad \boxed{u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \cdots + a_0 u = f}$$

Sehr wichtiger Spezialfall ist — neben dem schon in 7.3 behandelten Fall $n = 1$ — der Fall $n = 2$. Da aber die Betrachtung der allgemeinen Situation keine wesentlichen zusätzlichen Schwierigkeiten — nur etwas Bezeichnungsaufwand — verursacht, behandeln wir allgemein den Fall n–ter Ordnung. Diejenigen Leser, die die dadurch etwas aufwendigere Bezeichnungsweise stört, können sich ohne großen Verlust auf die spezielle Situation $n = 2$ beschränken. Diesen Fall diskutieren wir ausführlich.

Anmerkung: Die zusätzliche Berücksichtigung eines — von 0 und von 1 verschiedenen — Faktors bei $u^{(n)}$ liefert natürlich nichts Neues.

Für $f \neq 0$ wird $(*)$ als *„inhomogene lineare Differentialgleichung n–ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten“* bezeichnet und f als *„Inhomogenität“*, gelegentlich auch *„Störglied“*.

Wir betrachten die dazu gehörende *„homogene Differentialgleichung* (linear, n–ter Ordnung, mit konstanten Koeffizienten)“:

$$(*)_h \qquad \boxed{u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \cdots + a_0 u = 0}$$

Zunächst vermerken wir die einfachen, doch sehr nützlichen, *Linearitätsüberlegungen*:

(1) *(a)* *u, v Lösungen von $(*)_h \Longrightarrow \alpha u + \beta v$ Lösung von $(*)_h$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{K})$.*

(b) *u Lösung von $(*) \wedge v$ Lösung von $(*)_h \Longrightarrow u + v$ Lösung von $(*)$.*

(c) *v, w Lösungen von $(*) \Longrightarrow v - w$ Lösung von $(*)_h$.*

(d) *Ist $y = u + iv$ mit $u, v : j \longrightarrow \mathbb{R}$ so ist y (komplexe) Lösung von $(*)$ genau dann, wenn u und v (reelle) Lösungen von $(*)$ mit $\mathfrak{Re} f$ bzw. $\mathfrak{Im} f$ als rechter Seite sind.*

Das Wesentliche von (a) — (c) noch einmal etwas anders formuliert:

(a): Die Menge der Lösungen der homogenen Differentialgleichung $(*)_h$ liefert einen Vektorraum.

(b), (c): Man erhält *alle* Lösungen von $(*)$ dadurch, daß man irgendeine spezielle *(„partikuläre“)* Lösung von $(*)$ zu einer beliebigen Lösung von $(*)_h$ addiert.

Dieser Sachverhalt sollte wiederum — mit der Linearität der Ableitung — aus der linearen Algebra (Lösung von linearen Gleichungssystemen) und 7.3 hinreichend vertraut sein. (Für (d) ist natürlich wesentlich zu berücksichtigen, daß die Koeffizienten alle reell sind.)

Wegen der besonderen Wichtigkeit notieren wir explizit den **Spezialfall $n = 2$**:

$$\binom{*}{*} \qquad \boxed{u'' + au' + bu = f} \qquad (a, b \in \mathbb{R};\ f : j \longrightarrow \mathbb{K} \text{ stetig})$$

$$\binom{*}{*}_h \qquad \boxed{u'' + au' + bu = 0}$$

Zu $(*)$ betrachten wir das *„charakteristische Polynom"*

$$\varphi(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0 \qquad (\lambda \in I\!K).$$

Die Gleichung $\varphi(\lambda) = 0$ wird als *„charakteristische Gleichung"* bezeichnet.

Im Spezialfall $n = 2$ mit obigen Koeffizienten lautet also das charakteristische Polynom $\varphi(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b \quad (\lambda \in I\!K)$ und $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ die charakteristische Gleichung.

Wir definieren den *„Ableitungsoperator"* D durch

$$Du := u' \qquad \text{(für } u : j \longrightarrow I\!K \text{ beliebig oft differenzierbar).}$$

Offenbar ist dann $D : C_\infty^{I\!K}(j) \longrightarrow C_\infty^{I\!K}(j)$ *linear.*[1]

(Wir verzichten auf die mögliche Abschwächung zu $D : C_1^{I\!K}(j) \longrightarrow C_0^{I\!K}(j)$.)

Mit $D^0 := E := id_{C_\infty^{I\!K}(j)}$ und $D^{k+1} := D\,D^k$ $(k \in I\!N_0)$ sind dann beliebige Potenzen und damit Linearkombinationen solcher Potenzen — als lineare Abbildungen — definiert. Für diese gilt speziell $\quad Eu = u, \quad D^k u = u^{(k)}$ $(k \in I\!N_0,\ u : j \longrightarrow I\!K$ beliebig oft differenzierbar).

Sofort erkennt man die *Vertauschbarkeitsbeziehung*

$$D^n D^m = D^{n+m} = D^m D^n \qquad (n, m \in I\!N_0),$$

die es gestattet, mit solchen Linearkombinationen von Potenzen (für Addition und Multiplikation) wie mit Zahlen zu rechnen, sie also insbesondere auch wieder beliebig vertauschen zu können.

Zur Abkürzung definieren wir noch $\boldsymbol{\alpha} := \alpha E \quad (\alpha \in I\!K)$.

Für $k \in I\!N_0$, $c_0, \ldots, c_k \in I\!K$ und $\psi(x) := \sum_{\kappa=0}^{k} c_\kappa x^\kappa \ (x \in I\!K)$ notieren wir

$$\psi(D) := \sum_{\kappa=0}^{k} c_\kappa D^\kappa .$$

Damit kann $(*)$ nun kurz und übersichtlich in der Form

$$(*) \qquad \varphi(D)\,u = f$$

notiert werden. Wir zeigen vorab

(2) *Für ein beliebiges Polynom ψ und $\alpha \in I\!K$ gilt* $\psi(D)\,e^{\alpha x} = \psi(\alpha)\,e^{\alpha x}$.

<u>Beweis:</u> $l.S. = \left(\sum_{\kappa=0}^{k} c_\kappa D^\kappa\right) e^{\alpha x} = \sum_{\kappa=0}^{k} c_\kappa \left(D^\kappa e^{\alpha x}\right) = \sum_{\kappa=0}^{k} c_\kappa\, \alpha^\kappa e^{\alpha x} = r.S.$ □

Eigentlich müßte man hier und im folgenden statt (des Wertes) $e^{\alpha x}$ genauer die *Funktion*, die jedem $x \in j$ den Wert $e^{\alpha x}$ zuordnet, notieren, also z.B. in suggestiver Weise dafür $e^{\alpha(\cdot)}$ oder auch $e^{\alpha \boldsymbol{x}}$ schreiben. Diese kleine Laxheit in der Notierungs-

[1] $C_\infty^{I\!K}(j) := \{f \in \mathfrak{F}(j, I\!K) : f$ *beliebig oft differenzierbar*$\}$,
$C_n^{I\!K}(j) := \{f \in \mathfrak{F}(j, I\!K) : f$ *n-mal differenzierbar und* $f^{(n)}$ *stetig*$\} \quad (n \in I\!N_0)$

weise ist aber allgemein üblich und sollte nach dieser Anmerkung auch zu keinerlei Mißverständnissen führen.

Speziell liefert (2)

(2') $$(D-\mu)^r e^{\alpha x} = (\alpha-\mu)^r e^{\alpha x} \qquad (\alpha,\mu \in \mathbb{K},\ r \in \mathbb{N}_0).$$

Allein aus (2) liest man (für $\alpha \in \mathbb{K}$) schon ab:

(A) *Ist* α *Nullstelle von* φ, *so ist* $e^{\alpha x}$ *Lösung der homogenen DGL* $(*)_h$.

(B) *Anderenfalls liefert* $\dfrac{\beta}{\varphi(\alpha)}\, e^{\alpha x}$ *eine Lösung der inhomogenen DGL mit der rechten Seite* $f(x) := \beta e^{\alpha x}$ *(für* $\beta \in \mathbb{K}$*).*

Ehe wir in den allgemeinen Überlegungen fortfahren, sehen wir uns ein erstes Beispiel an, welches das Vorgehen erläutert und schon die Leistungsfähigkeit der bisherigen Überlegungen etwas erkennen läßt:

(B1) $\boxed{u'' + u' - 6u = e^x}$

Hier ist $\varphi(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda+3)(\lambda-2)$; nach (A) erhält man e^{-3x} und e^{2x} als Lösungen der homogenen DGL; nach (B) ergibt sich (mit $\alpha := 1$, $\beta := 1$) $\frac{1}{\varphi(1)}\, e^x = -\frac{1}{4}\, e^x$ als eine Lösung der inhomogenen DGL. Zusammen:

$c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x} - \frac{1}{4} e^x$ sind *Lösungen* von (B1) (für $c_1,\, c_2 \in \mathbb{K}$).

Hier fehlt im Moment nur noch die ergänzende Überlegung, daß dadurch *alle* Lösungen erfaßt sind bzw. — linear algebraisch gesprochen — der Raum der Lösungen der homogenen DGL (für $n = 2$) die Dimension 2 hat.

Grundlegend für die weiteren Überlegungen ist das einfache

(3) Lemma *Für ein Polynom* ψ, *eine Zahl* $\alpha \in \mathbb{K}$ *und eine beliebig oft differenzierbare Funktion* $v : j \longrightarrow \mathbb{K}$ *gilt:*

$$\psi(D)(e^{\alpha x} v) = e^{\alpha x} \psi(D+\alpha)\, v \qquad (\text{‚Exponentialshift‘}).$$

<u>Beweis:</u> Der Spezialfall $\psi(x) = x^\kappa$ ($\kappa \in \mathbb{N}_0$) ergibt sich leicht induktiv: Für $\kappa = 0$ ist die Behauptung trivial. Für den Induktionsschritt von κ auf $\kappa + 1$ rechnet man wie folgt:

$$D^{\kappa+1}(e^{\alpha x} v) = D(D^\kappa(e^{\alpha x} v)) \underset{(\kappa)}{=} D(\, e^{\alpha x}\, \underbrace{(D+\alpha)^\kappa v}_{=:w}\,) \underset{\text{(Produktregel)}}{=}$$

$e^{\alpha x}(D+\alpha) w = e^{\alpha x}(D+\alpha)^{\kappa+1} v.$ Aus diesem Spezialfall liest man den allgemeinen Fall sofort ab, da $\psi(D) = \sum_{\kappa=0}^{k} c_\kappa D^\kappa$. □

Sehr nützlich ist noch — in Zusammenhang mit obigem Lemma — die

(4) Bemerkung $\quad \psi(D+\alpha) = \sum\limits_{\kappa=0}^{k} \frac{\psi^{(\kappa)}(\alpha)}{\kappa!} D^{\kappa} \qquad (\alpha \in \mathbb{K}),$

deren Beweis unmittelbar durch die (TAYLOR–)Entwicklung von ψ

$\psi(t+\alpha) = \sum_{\kappa=0}^{k} \frac{\psi^{(\kappa)}(\alpha)}{\kappa!} t^{\kappa}$ gegeben ist. □

Wir weisen darauf hin, daß sich (2) natürlich nun direkt auch aus (3) mit $v(t) \equiv 1$ ergibt: Hier sind alle Ableitungen (ab der Ordnung 1) 0; daher gilt $\psi(D+\alpha)v = \psi(\alpha)$. Die

(5) Bemerkung $\quad \varphi(D)(x\, e^{\alpha x}) = \big(x\, \varphi(\alpha) + \varphi'(\alpha)\big) e^{\alpha x} \qquad (\alpha \in \mathbb{K})$

bestätigt man entweder direkt (Übungsaufgabe) oder liest sie mit $v(x) := x$ aus (3) und (4) ab:

$$l.S. \underset{(3)}{=} e^{\alpha x}\varphi(D+\alpha)x \underset{(4)}{=} e^{\alpha x} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\varphi^{(\nu)}(\alpha)}{\nu!} D^{\nu}x = e^{\alpha x} \sum_{\nu=0}^{1} \frac{\varphi^{(\nu)}(\alpha)}{\nu!} D^{\nu}x = r.S. \square$$

Aus (5) erhalten wir sofort – ergänzend zu (A) und (B) — :

(C) *Ist α doppelte Nullstelle von φ, so ist auch $x\, e^{\alpha x}$ Lösung der homogenen DGL.*

(D) *Ist α nur einfache Nullstelle von φ (also $\varphi(\alpha) = 0$ und $\varphi'(\alpha) \neq 0$), so liefert $\frac{\beta}{\varphi'(\alpha)}\, x\, e^{\alpha x}$ eine Lösung der inhomogenen DGL mit $f(x) := \beta\, e^{\alpha x}$ als rechter Seite (für $\beta \in \mathbb{K}$).*

Bevor wir in den allgemeinen Überlegungen fortfahren, sehen wir uns ein weiteres Beispiel an:

(B2) $\boxed{\ddot{s} - 2\dot{s} + s = \cos}$

Hier ist $\varphi(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$; nach (A) und (C) erhalten wir e^x und xe^x als Lösungen der homogenen DGL. Zur Lösung der inhomogenen Gleichung betrachten wir die entsprechende komplexe DGL:

$\boxed{\ddot{z} - 2\dot{z} + z = e^{ix}}$. Nach (B) — mit $\alpha = i$ und $\beta = 1$ — erkennen wir $\frac{1}{\varphi(i)} e^{ix} = \frac{1}{-2i} e^{ix} = \frac{1}{-2i} (\cos x + i \sin x) = \frac{1}{2} (-\sin x + i \cos x)$ als partikuläre Lösung. Da nun die rechte Seite von (B2) gerade der Realteil von e^{ix} ist, gewinnen wir eine *partikuläre Lösung* von (B2) durch: $\mathfrak{Re}\big(\frac{1}{2}(-\sin x + i \cos x)\big) = -\frac{1}{2} \sin x$.

(Durch den Imaginärteil erhalten wir noch eine partikuläre Lösung von $\ddot{s} - 2\dot{s} + s = \sin$ ‚gratis' dazu!) Auch hier fehlt noch die Ergänzung, daß durch $(c_1 x + c_2)e^x - \frac{1}{2} \sin x \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$ schon *alle* Lösungen gegeben sind.

Für die Theorie entbehrlich, aber doch oft für die Rechnung sehr nützlich und daher von Praktikern besonders geschätzt, ist die Betrachtung von *inversen Operatoren:*

Bezeichnet man mit S den linearen ‚Operator', der zu einer (stetigen) Funktion v eine (beliebige) Stammfunktion wählt, also $(S\,v)(x) = \int^x v(t)\,dt$, so gilt $D\,S = E$. Daher notiert man suggestiv auch $\boldsymbol{D^{-1}} := S$.

Man muß sich bei dieser Bezeichnung aber vor Augen halten, daß S — ohne Festlegung von Anfangswerten — keine Abbildung und nur rechtsseitige ‚Inverse' ist. Das erste ließe sich sofort beheben durch $(S\,v)(x) := \int_a^x v(t)\,dt$ (für ein festes $a \in j$). Schwierigkeiten dieser Art kennen — und meistern — wir ja aber schon von der Notierung bei Stammfunktionen (Kapitel 5) her.

Definiert man für $\alpha \in \mathbb{C}$ entsprechend $\boldsymbol{(D+\alpha)^{-1}}$ so, daß $(D+\alpha)\,(D+\alpha)^{-1} = E$ gilt, dann folgt auch hier eine Aussage über **‚Exponentialshift'**:

(6) $\qquad \boldsymbol{D^{-1}(e^{\alpha x}v) = e^{\alpha x}(D+\alpha)^{-1}v} \qquad\qquad (v : j \longrightarrow \mathbb{K}$ stetig$)$.

<u>Beweis:</u> $D\,(r.S.) \underset{(3)}{=} e^{\alpha x}(D+\alpha)\,((D+\alpha)^{-1}v) = e^{\alpha x}v$; $\;r.S.$ ist also Stammfunktion zu $e^{\alpha x}v$. □

Aus (6) fließt nun — mit $-\alpha$ statt α —

(7) $\qquad \boldsymbol{(D-\alpha)^{-1} = e^{\alpha x}D^{-1}e^{-\alpha x}}$.

Das bedeutet: *Zur Gewinnung von $(D-\alpha)^{-1}v$ multipliziert man v mit $e^{-\alpha x}$, sucht dazu eine Stammfunktion und multipliziert anschließend mit $e^{\alpha x}$.* Das ist nichts anderes, als der aus 7.3 längst vertraute Sachverhalt:

$$(D-\alpha)u = v \iff u' - \alpha u = v \iff u' = \alpha u + v:$$

$u(x) = e^{\alpha x}\Big(\int^x e^{-\alpha t}v(t)\,dt\ (+c)\Big)$. Bei Festlegung durch $u(x_0) = u_0$:

$$u(x) = e^{\alpha x}\left[\int_{x_0}^{x} e^{-\alpha t}v(t)\,dt + u_0 e^{-\alpha x_0}\right].$$

Bezeichnet man noch $\boldsymbol{(D-\alpha)^{-k}} := \big((D-\alpha)^{-1}\big)^k \qquad (\alpha \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{N})$, dann liefert (7)

(8) $\qquad \boldsymbol{(D-\alpha)^{-k} = e^{\alpha x}D^{-k}e^{-\alpha x}}$.

Wir gehen die oben schon behandelten Beispiele jetzt mit den gerade bereitgestellten Hilfsmitteln an:

(B1) $\boxed{u'' + u' - 6u = e^x}$

$\varphi(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda + 3)(\lambda - 2)$, also zu lösen:

$(D+3)(D-2)u = e^x$:

$$
\begin{aligned}
u &= (D-2)^{-1}(D+3)^{-1}e^x \underset{(7)}{=} e^{2x}D^{-1}e^{-2x}e^{-3x}D^{-1}e^{3x}e^x \\
&= e^{2x}D^{-1}e^{-5x}D^{-1}e^{4x} = e^{2x}D^{-1}e^{-5x}\left[\tfrac{1}{4}e^{4x} + d_1\right] \\
&= e^{2x}D^{-1}\left[\tfrac{1}{4}e^{-x} + d_1e^{-5x}\right] = e^{2x}\left[-\tfrac{1}{4}e^{-x} - \tfrac{d_1}{5}e^{-5x} + c_2\right] \\
&= -\tfrac{1}{4}e^x + c_1e^{-3x} + c_2e^{2x} \qquad (d_1, c_2 \in \mathbb{K} \text{ und } c_1 := -\tfrac{d_1}{5})
\end{aligned}
$$

Die Rechnung liefert natürlich das gleiche Ergebnis wie oben, zeigt nun aber zusätzlich, daß dies die *allgemeine Lösung* ist!

(B2) $\boxed{\ddot{z} - 2\,\dot{z} + z = e^{ix}}$

$\varphi(\lambda) = \lambda^2 - 2\,\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$, also zu lösen:

$(D-1)^2 z = e^{ix}$:

$$
\begin{aligned}
z &= (D-1)^{-2}e^{ix} \underset{(8)}{=} e^xD^{-2}e^{-x}e^{ix} = e^xD^{-2}e^{(i-1)x} \\
&= e^xD^{-1}\left[\tfrac{1}{i-1}e^{(i-1)x} + c_1\right] = e^x\left[\tfrac{1}{(i-1)^2}e^{(i-1)x} + c_1x + c_2\right] \\
&= -\tfrac{1}{2i}e^{ix} + c_1xe^x + c_2e^x \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{K}),
\end{aligned}
$$

woraus man wieder — wie oben — über Real- und Imaginärteil die allgemeine Lösung der DGLn $\boxed{\ddot{u} - 2\dot{u} + u = \cos}$ bzw. $\boxed{\ddot{u} - 2\dot{u} + u = \sin}$ gewinnt.

7.8.1 Allgemeine Lösung der homogenen DGL

Hat φ die komplexe Zahl $\underline{\alpha}$ als $\underline{r\text{-fache Nullstelle}}$, so gilt $\varphi(x) = (x-\alpha)^r\psi(x)$ mit einem geeigneten Polynom ψ (vom Grade $n-r$). Demgemäß hat man

$$\varphi(D) = (D-\alpha)^r\psi(D) = \psi(D)(D-\alpha)^r .$$

$\underline{(D-\alpha)^r u = 0}$ zieht somit $\varphi(D)u = 0$ nach sich. Wir suchen dazu Lösungen der Form $u(x) = e^{\alpha x}v(x)$. (*Jede* Funktion u läßt sich natürlich in dieser Weise schreiben!)

$$0 = (D-\alpha)^r e^{\alpha x}v \underset{(3)}{=} e^{\alpha x}D^r v, \qquad \text{also } D^r v = 0 .$$

d.h.: v ist Polynom vom Grade höchstens $r-1$:

$(\heartsuit)$ $$\boldsymbol{e^{\alpha x},\ xe^{\alpha x},\ \ldots,\ x^{r-1}e^{\alpha x}}$$

sind also zu α gehörende Lösungen der homogenen DGL. Diese Lösungen sind *linear unabhängig*, da die Funktionen $x^0, x^1, \ldots, x^{r-1}$ bekannterweise linear unabhängig sind. Man erhält auf diese Weise — (♡) entsprechend für alle Nullstellen — *eine Basis des Lösungsraums*, man spricht dann auch von einem „*Fundamentalsystem*", d.h.:

> *Jede Lösung der homogenen DGL läßt sich in eindeutiger Weise als Linearkombination von Lösungen des Typs* (♡) *schreiben* (wobei α die verschiedenen Nullstellen von φ durchläuft).

Hat φ *nur reelle Nullstellen*, so ergibt dies ein *reelles Fundamentalsystem.*

Für einen noch ausstehenden Beweis verweisen wir auf die Übungen, wo wir die erforderlichen Überlegungen durch eine geeignete Anleitung in einfache Schritte zerlegt haben.
Bemerkenswert ist dabei, daß sich die *Lösung der allgemeinen DGL* $\varphi(D)u = f$ (also auch mit beliebiger Inhomogenität) durch

$$\varphi(D) = (D-\lambda_1)^{r_1} \cdots (D-\lambda_s)^{r_s}$$

($s \in \mathbb{N}$; $r_\sigma \in \mathbb{N}$ und paarweise verschiedene $\lambda_\sigma \in \mathbb{C}$ $(\sigma = 1, \ldots, s)$) *auf das sukzessive Lösen von n (linearen) DGLn erster Ordnung zurückführen* läßt.

7.8.2 Reelle Lösungen zu komplexen Nullstellen

Ist $\alpha + i\beta$ (mit $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ und $\beta \neq 0$) r*-fache Nullstelle* von φ, so ist auch, da die Koeffizienten reell sind, $\alpha - i\beta$ r–fache Nullstelle. Die zugehörigen Lösungen sind also nach den obigen Überlegungen von der Form

$$p(x)\, e^{(\alpha+i\beta)\, x} + q(x)\, e^{(\alpha-i\beta)\, x}$$

mit Polynomen p und q vom Grade höchstens $r-1$. Zu beliebigen *reellen Polynomen* P *und* Q vom Grade $\leq r-1$ liefern

$$p := \frac{1}{2}(P - i\,Q) \qquad \text{und} \qquad q := \frac{1}{2}(P + i\,Q) \qquad \text{die Lösungen}$$

$$p\, e^{(\alpha+i\beta)\, x} + q\, e^{(\alpha-i\beta)\, x} = e^{\alpha x}\Big[\tfrac{1}{2}(P - i\,Q)e^{i\beta x} + \tfrac{1}{2}(P + iQ)e^{-i\beta x}\Big]$$
$$= e^{\alpha x}\Big[P\big(\tfrac{1}{2}(e^{i\beta x} + e^{-i\beta x})\big) - Q\big(\tfrac{i}{2}(e^{i\beta x} - e^{-i\beta x})\big)\Big]$$
$$= e^{\alpha x}\Big[P\cos(\beta x) + Q\sin(\beta x)\Big], \qquad \text{somit } \textit{reelle Lösungen.}$$

Falls Ihnen die Operatormethode — trotz meines guten Zuredens — doch nicht gefällt und Sie das Warum auch gar nicht interessiert, müssen Sie sich nur das letzte Ergebnis merken (oder es zur Hand haben):

> *Zu einer r-fachen Nullstelle* $\alpha + i\beta$ $(\alpha,\ \beta \in \mathbb{R})$ *gehört die allgemeine Lösung*
>
> $$\boldsymbol{e^{\alpha x}\Big[P\cos(\beta x) + Q\sin(\beta x)\Big]}$$
>
> *mit reellen Polynomen* P *und* Q *vom Grade höchstens* $r-1$.

Im Spezialfall $\boldsymbol{r = 1}$, *also* $\alpha + i\beta$ *einfache Nullstelle, ist die allgemeine Lösung demnach*

$$e^{\boldsymbol{\alpha x}}\Big[\boldsymbol{c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x)}\Big] \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

Der Fall $\beta = 0$ *bedeutet:* *α reelle Nullstelle* *mit der allgemeinen Lösung*

$$e^{\boldsymbol{\alpha x}}\boldsymbol{P} \qquad (P \text{ reelles Polynom vom Grade } \leq r-1),$$

speziell für eine reelle einfache Nullstelle α $(r = 1$ *und* $\beta = 0)$

$$\boldsymbol{c\, e^{\alpha x}} \qquad (c \in \mathbb{R}).$$

7.8.3 Spezialfall $n = 2$: $\boldsymbol{y'' + ay' + by = 0}$ $\quad (a, b \in \mathbb{R})$

1. Fall: $\boldsymbol{a^2 - 4b > 0}$: Zwei verschiedene reelle Nullstellen $\lambda_{1,2} := \frac{1}{2}\left(-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}\right)$:
$e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}$ *(reelles) Fundamentalsystem.*

2. Fall: $\boldsymbol{a^2 - 4b = 0}$: Eine doppelte reelle Nullstelle $\lambda_0 := -\frac{a}{2}$:
$e^{\lambda_0 x}, x\, e^{\lambda_0 x}$ *(reelles) Fundamentalsystem.* (Man spricht in diesem Fall gelegentlich von „*Entartung*".)

3. Fall: $\boldsymbol{a^2 - 4b < 0}$: $\lambda_{1,2} := \alpha \pm i\beta$ (mit $\alpha := -\frac{a}{2}$, $\beta := \frac{1}{2}\sqrt{4b - a^2}$) sind konjugiert komplexe Nullstellen:
$e^{\alpha x}\cos(\beta x),\ e^{\alpha x}\sin(\beta x)$ *(reelles) Fundamentalsystem.*

In diesen Fällen sind die einfachen **Spezialfälle** $\boldsymbol{a = 0 \vee b = 0}$ enthalten. (Wir notieren jeweils die allgemeine Lösung mit reellen Konstanten c_1, c_2 :)

$\boldsymbol{a = 0 \wedge b = 0}$: $\boldsymbol{y'' = 0}$: $y(x) = c_1 x + c_2$

Dies sieht man direkt auf einen Blick oder liest es, wenn man es denn unbedingt kompliziert haben will, aus dem 2. Fall mit $\lambda_0 = 0$ ab.

$\boldsymbol{a \neq 0 \wedge b = 0}$: $\boldsymbol{y'' + ay' = 0}$: $y(x) = c_1 + c_2\, e^{-ax}$

Dies erhält man direkt mit der Substitution $z = y'$. Andererseits kann das Resultat aber auch aus dem 1. Fall mit $\lambda_1 = -a,\ \lambda_2 = 0$ abgelesen werden.

$\boldsymbol{a = 0 \wedge b \neq 0 : b < 0}$: Im 1. Fall ist dann $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-b}$:

$$y = c_1\, e^{\sqrt{-b}\,x} + c_2\, e^{-\sqrt{-b}\,x}$$

$\boldsymbol{b > 0}$: 3. Fall mit $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{b}$:

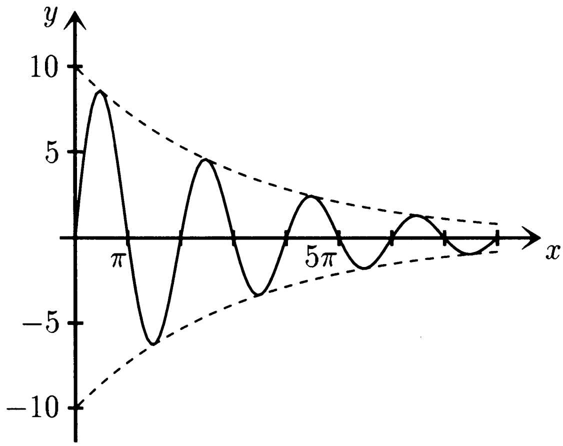
$$y = c_1 \sin(\sqrt{b}\,x) + c_2 \cos(\sqrt{b}\,x)$$

Am Ende dieses Abschnitts sehen wir uns hierzu noch zwei wichtige Beispiele aus der Physik ausführlich an. Zwei typische Funktionen des 3. Falls seien jedoch schon hier graphisch dargestellt:

„*gedämpfte Schwingung*“ $\alpha < 0$:

$10 \cdot \exp\left(-\frac{x}{10}\right) \cdot \sin(x)$

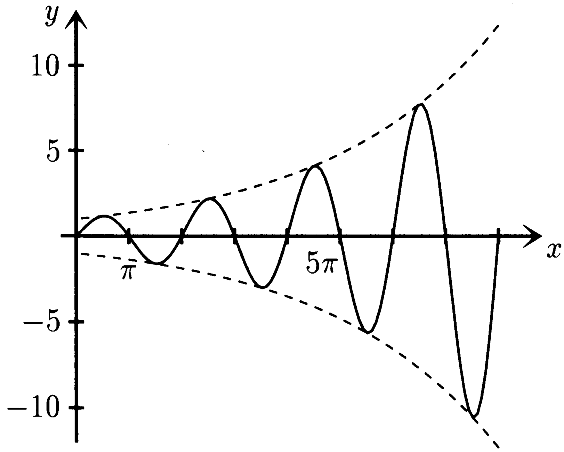
(mit $10 \cdot \exp\left(-\frac{x}{10}\right)$ und $-10 \cdot \exp\left(-\frac{x}{10}\right)$ als Vergleichsfunktionen)



„*aufschaukelnde Schwingung*“: $\alpha > 0$:

$\exp\left(\frac{x}{10}\right) \cdot \sin(x)$

(mit $\exp\left(\frac{x}{10}\right)$ und $-\exp\left(\frac{x}{10}\right)$ als Vergleichsfunktionen



7.8.4 Lösung der inhomogenen DGL

Zunächst vermerken wir eine einfache Aussage, die unmittelbar aus der Linearität von $\varphi(D)$ resultiert:

(9) „Superpositionsprinzip“ *Ist* $f = f_1 + f_2$ *und* u_j *Lösung von* $\varphi(D)u_j = f_j$ $(j = 1, 2)$, *so liefert* $u := u_1 + u_2$ *eine Lösung von* $\varphi(D)u = f$.

Wenn f eine Summe ‚einfacher‘ Funktionen ist, genügt es also, für die einzelnen Summanden Lösungen zu finden.

(10) Satz *Vor.: Q Polynom vom Grade s ($\in \mathbb{N}_0$), $\alpha \in \mathbb{C}$*

Beh.: Zur Inhomogenität $f := e^{\alpha x} Q$ existiert eine Lösung von $(*)$ der Gestalt $e^{\alpha x} R$ mit einem Polynom R. Dabei ist der Grad von R höchstens s, falls $\varphi(\alpha) \neq 0$, und höchstens $r+s$, falls α Nullstelle der Ordnung r ist.

Den nicht besonders schwierigen, aber — in dieser Allgemeinheit — doch etwas technischen Beweis lassen wir weg. (Man vergleiche hierzu etwa [BLATTER] oder [HEUSER, *DGLn*].)

Dieser Satz ist Grundlage und Rechtfertigung der **„Methode der unbestimmten Koeffizienten“** — er zeigt, daß diese immer zum Ziel führt — :

Man geht (zur Inhomogenität $e^{\alpha x} Q$) mit einem Ansatz

$$u(x) = e^{\alpha x} R(x) = e^{\alpha x} \sum_{\sigma=r}^{r+s} a_\sigma x^\sigma$$

(falls α Nullstelle der Ordnung r ($\in \mathbb{N}_0$) ist) in die DGL ein und bestimmt durch Koeffizientenvergleich die Koeffizienten $a_r, \ldots, a_{r+s}$.

(Für $r \in \mathbb{N}$ können die Terme zu $\sigma = 0, \ldots, r-1$ sofort weggelassen werden, da sie Lösungen der homogenen DGL liefern, also 0 ergeben.)

Diese Methode ist beliebt, weil von der Idee her simpel; man wird jedoch — im Vergleich zur Operatormethode — gelegentlich durch viel Rechnung gestraft!

Wir weisen noch ausdrücklich auf zwei Spezialfälle von (10) hin:

Ist $\boldsymbol{f = Q}$ (in (10) $\alpha := 0$ wählen), *so gibt es ein Polynom R mit Grad $\leq r+s$ als Lösung, falls* 0 *Nullstelle der Ordnung r ($\in \mathbb{N}_0$) ist.*

Ist $\boldsymbol{f = e^{\alpha x}}$ (in (10) $Q := 1$ setzen, also $s = 0$), *so existiert eine Lösung der Form $ce^{\alpha x}$ ($c \in \mathbb{K}$), falls $\varphi(\alpha) \neq 0$, bzw. $e^{\alpha x} R$ mit einem Polynom R höchstens r-ten Grades, falls α r-fache Nullstelle von φ ist.*

Wir erinnern noch einmal daran, daß zu Termen der Form $\sin(\beta x)$ bzw. $\cos(\beta x)$ die entsprechende DGL mit Inhomogenität $e^{i\beta x}$ zu behandeln ist. (Wenn Sie dennoch reell und nicht komplex rechnen, sind Sie selbst schuld, wenn dadurch die Rechnung kompliziert wird!)

Für die Behandlung von Inhomogenitäten mit der Operatormethode ist noch die folgende Bemerkung oft nützlich:

(11) Bemerkung: *Ist P Polynom vom Grade höchstens k ($\in \mathbb{N}_0$), so* *gilt für* $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$(D - \alpha)^{-1} P = -\frac{1}{\alpha} \sum_{\kappa=0}^{k} \frac{1}{\alpha^\kappa} D^\kappa P.$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
(D-\alpha)(r.S.) &= -\tfrac{1}{\alpha} \sum_{\kappa=0}^{k} \tfrac{1}{\alpha^\kappa} D^{\kappa+1} P + \sum_{\kappa=0}^{k} \tfrac{1}{\alpha^\kappa} D^\kappa P \\
&= -\sum_{\kappa=0}^{k} \tfrac{1}{\alpha^{\kappa+1}} D^{\kappa+1} P + \cdots \\
&\underset{[D^{k+1}P=0]}{=} -\sum_{\kappa=1}^{k} \tfrac{1}{\alpha^\kappa} D^\kappa P + \cdots = P \quad \square
\end{aligned}$$

Der aufmerksame Leser wird sicher bemerkt haben, daß die Idee zu (11) die Summenformel für eine endliche geometrische Reihe ist.

Wir sehen uns ein weiteres Beispiel an:

(B3) $\boxed{y'' - 4y' + 4y = x^2}$

Die $l.S.$ ist $(D^2 - 4D + 4)y = (D-2)^2 y$: Nach (A) und (C) liefern e^{2x} und $x\,e^{2x}$ ein Fundamentalsystem der homogenen DGL. Mit (11) erhält man eine partikuläre Lösung durch
$\left(-\frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2}D + \frac{1}{4}D^2\right]\right)^2 x^2 = \frac{1}{4}\left(1 + D + \frac{3}{4}D^2\right) x^2 = \frac{1}{4}\left(x^2 + 2x + \frac{3}{2}\right).$

Zum Vergleich rechnen wir dieses Beispiel auch mit der Methode der unbestimmten Koeffizienten:

Ansatz: $y(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$: $y''(x) = 2\alpha$, $y'(x) = 2\alpha x + \beta$

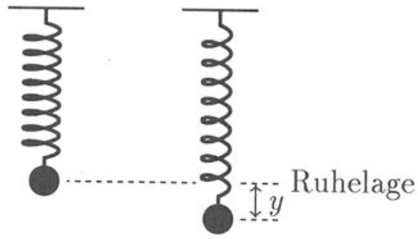
$x^2 \overset{!}{=} y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = 2\alpha - 4(2\alpha x + \beta) + 4(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)$

Durch Koeffizientenvergleich:
$$\begin{array}{lcrcl}
x^2 & : & 1 & = & 4\alpha \\
x & : & 0 & = & -8\alpha + 4\beta \\
1 & : & 0 & = & 2\alpha - 4\beta + 4\gamma
\end{array}$$

Daraus liest man — von oben nach unten —
$\alpha = \frac{1}{4}$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = \frac{3}{8}$, also wieder $y(x) = \frac{1}{4}\left(x^2 + 2x + \frac{3}{2}\right)$, ab.
Hier ist auch die Rechnung mit der Methode der unbestimmten Koeffizienten relativ einfach. Dies ist aber — für ‚größere' Beispiele — ganz und gar untypisch.

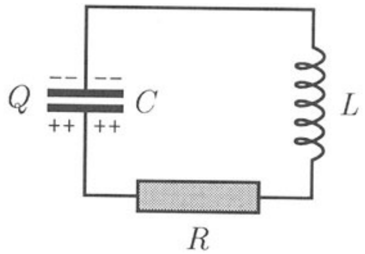
Zwei wichtige Standard–Beispiele — die daher in sehr vielen Lehrbüchern behandelt werden — zu $\binom{*}{*}$ aus der Physik sind das (frei) **schwingende Federpendel** (in der Mechanik) und der **geschlossene Schwingkreis** (in der Elektrotechnik):

(B4) Frei schwingendes Federpendel: $\boxed{m\ddot{y} + r\dot{y} + ky = 0}$



(y Auslenkung, Variable: Zeit t, m (> 0) Masse, $r \geq 0$ Reibung, $k > 0$ Federkonstante), also mit $\boldsymbol{a} := \frac{r}{m}$, $\boldsymbol{b} := \frac{k}{m}$ von der Form $\binom{*}{*}_h$.

(B5) Geschlossener Schwingkreis: $\boxed{C\,L\ddot{y} + C\,R\dot{y} + y \;=\; 0}$



(y Kondensatorladung, Variable: Zeit t, C Kapazität, R Widerstand, L Induktivität), also mit $a := \frac{R}{L}$, $b := \frac{1}{CL}$ von der Form $\binom{*}{*}_h$.

Wir behandeln (B4) und verzichten auf die (triviale) Umschreibung zu (B5):

a) **„Harmonischer Oszillator“** bzw. **„Harmonische Schwingung“**:

$r = 0$ (reibungsfrei): Mit $\boldsymbol{\omega_0} := \sqrt{\frac{k}{m}}$ wird (B4) meist in der Form

$\boxed{\ddot{y} + \omega_0^2\, y \;=\; 0}$ notiert.

Hier ist also $\varphi(\lambda) \;=\; \lambda^2 + \omega_0^2 \;=\; (\lambda - i\omega_0)(\lambda + i\omega_0)$, somit (s. 3. Fall) $y(t) = c_1 \sin(\omega_0 t) + c_2 \cos(\omega_0 t)$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$ die *allgemeine Lösung.*

Dies kann mit geeigneten Konstanten $A \geq 0$ und β — nach Übungsaufgabe (1) zu Abschnitt 4.6 — umgeschrieben werden zu:

$$y(t) = A \sin(\omega_0 t + \beta), \qquad A \text{ „\textit{Amplitude}“}, \; w_0 \text{ „\textit{Eigenfrequenz}“}.$$

b) Für $r > 0$ setzen wir noch $\boldsymbol{\sigma} := \frac{r}{2m}$ $(= \frac{a}{2})$; mit der o.a. Einordnung gilt dann:

$$a^2 - 4b \;=\; \frac{r^2}{m^2} - 4\frac{k}{m} \;=\; 4\left(\sigma^2 - \omega_0^2\right).$$

Der <u>1. Fall</u> $a^2 - 4b > 0$ bedeutet hier also $\boldsymbol{\sigma} > \boldsymbol{\omega_0}$.

$\lambda_{1,2} \;=\; \frac{1}{2}\left(-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}\right) \;=\; -\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - \omega_0^2}$: das liefert als allgemeine Lösung

$$y(t) \;=\; e^{-\sigma t}\left[c_1\, e^{\sqrt{\sigma^2 - \omega_0^2}\cdot t} + c_2\, e^{-\sqrt{\sigma^2 - \omega_0^2}\cdot t}\right].$$

Wegen $-\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - \omega_0^2} < 0$: *abklingende Kriechbewegung (aperiodischer Fall, starke Dämpfung)* [In (B5): Entladung des Kondensators]

Der <u>2. Fall</u> $a^2 - 4b = 0$ übersetzt sich hier zu $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\omega}_\mathrm{o}$.

Mit der doppelten reellen Nullstelle $\lambda = -\frac{a}{2} = -\sigma$ lautet hier die allgemeine Lösung

$$y(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-\sigma t};$$

also auch eine *Kriechbewegung („aperiodischer Grenzfall")*.

Der <u>3. Fall</u> $a^2 - 4b < 0$ besagt $\boldsymbol{\sigma} < \boldsymbol{\omega}_\mathrm{o}$ (Reibung (bzw. Widerstand) sind ‚klein'). Die charakteristische Gleichung wird gelöst durch $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-a \pm i\sqrt{4b - a^2}\right) = -\sigma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \sigma^2}$; das ergibt die allgemeine Lösung

$$y(t) = e^{-\sigma t}\left[c_1 \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \sigma^2} \cdot t\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \sigma^2} \cdot t\right)\right]$$

(*„gedämpfte Schwingung" mit dem „Dämpfungsexponenten"* $-\sigma$). Die Frequenz $\sqrt{\omega_0^2 - \sigma^2}$ ist kleiner als die Frequenz ω_0 des harmonischen Oszillators.

Wir betrachten nun noch den Fall, daß auf das schwingungsfähige System eine **periodische Störung** wirkt, und werden erwarten, daß das System schließlich in der Störfrequenz schwingt:

$\ddot{y} + a\dot{y} + by = \boxed{\ddot{y} + 2\sigma\,\dot{y} + \omega_0^2\,y = A\cos(\omega\,t)}$ bzw. gleich entsprechend komplex: $\boxed{\ddot{z} + 2\sigma\,\dot{z} + \omega_0^2\,z = A\exp(i\,\omega\,t)}$

(*„Störamplitude"* $\boldsymbol{A} > 0$, *„Störfrequenz"* $\boldsymbol{\omega} > 0$).

Zunächst sei $\sigma > 0$ (bewirkt Dämpfung (s.o.)), $\omega_0 > 0$ bezeichne wieder die Frequenz ohne Dämpfung.

Nach (B) erhält man — da hier $\varphi(i\omega) \neq 0$ — als eine Lösung $z(t) = \gamma\exp(i\omega t)$ mit

$$\gamma := \frac{A}{\varphi(i\omega)} = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\,2\sigma\omega} = \frac{A(\omega_0^2 - \omega^2 - i\,2\sigma\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\,\sigma^2\omega^2}$$

Schreibt man $\gamma\ (\neq 0)$ in der Form $\gamma = |\gamma|\exp(-i\,\delta)$ mit geeignetem $\delta \in\ ]0,\pi[$ (der Imaginärteil von γ ist negativ!), dann erhält man

$$|\gamma| = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\,\sigma^2\omega^2}}$$

und über

$$\cos\delta - i\sin\delta = \frac{\gamma}{|\gamma|} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - i\,2\sigma\omega}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\,\sigma^2\omega^2}}$$

$$\cot\delta = \frac{\cos\delta}{\sin\delta} = \frac{\omega_0^2-\omega^2}{2\,\sigma\omega} \qquad (0 < \delta < \pi)\,.$$

Mit $|\gamma|$ und δ wie gerade berechnet, erhält man als *partikuläre Lösung*:

$z(t) = |\gamma| \exp(i\,(\omega t - \delta))$ ($|\gamma|$ *Amplitude*, δ „*Phasenverschiebung*“).

Wir sehen uns noch — bei fester Störamplitude A — die Abhängigkeit von $|\gamma|$ von der Störfrequenz ω etwas an:

$|\gamma|$ $(= |\gamma(\omega)|)$ ist genau dann maximal, wenn $\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\,\sigma^2\omega^2}$, also $(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\,\sigma^2\omega^2$, minimal ist. Für $\tau := \omega^2\ (\geq 0)$ ist dies Teil einer nach oben geöffneten Parabel in τ. Aus der einfachen Umformung (Scheitelform) $(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\,\sigma^2\omega^2 = \left[\tau - (\omega_0^2 - 2\sigma^2)\right]^2 + 4\,\sigma^2(\omega_0^2-\sigma^2)$ liest man ab:

Im Fall $\omega_0^2 - 2\sigma^2 \geq 0$, also $\boldsymbol{\omega_o \geq \sqrt{2}\,\sigma}$ („*schwache Dämpfung*“), erhält man das strikte Minimum für $\omega^*(=\sqrt{\tau}) = \sqrt{\omega_0^2 - 2\sigma^2}$ mit zugehöriger Amplitude

$$|\gamma(\omega^*)| = \frac{A}{2\,\sigma\sqrt{\omega_0^2-\sigma^2}}\,.$$

ω^* wird als „*Resonanzfrequenz*“ bezeichnet. Im dämpfungsfreien Fall $(a = 0)$ stimmt sie mit der Eigenfrequenz ω_0 überein. Aus der Beschreibung als Parabel in τ ergibt sich: $|\gamma(\omega)|$ ist in $]0,\omega^*[$ streng isoton, in $]\omega^*,\infty[$ antiton mit $|\gamma(\omega)| \to 0$ (für $w \to \infty$).

$\sigma \to 0$ impliziert $\omega^* \to \omega_0$ und $|\gamma(\omega^*)| \to \infty$.

Wir betrachten noch kurz den — oben ausgeschlossenen — Fall $\boldsymbol{\sigma = 0}$:

$\boldsymbol{\omega = \omega_o}$: $\ddot{z} + \omega_0^2 z = A\exp(i\,\omega_0 t)$ wird nach (D) gelöst durch $\dfrac{A}{2\,i\,\omega_0}\,t\exp(i\,\omega_0 t)$; der Realteil davon ergibt als eine spezielle Lösung der DGL $\ddot{y} + \omega_0^2 y = A\cos(\omega_0 t)$:

$$\boldsymbol{y^*(t) = \frac{A}{2\,\omega_o}\,t\sin(\omega_o t)}\,.$$

Die Amplitude wächst also hier für $t \longrightarrow \infty$ über alle Grenzen („*Resonanzkatastrophe*“). (Praktisch bedeutet das natürlich, daß die entsprechende Apparatur defekt wird oder — bei anderer Ausdeutung — zum Beispiel eine Brücke einstürzt.)

$\boldsymbol{\omega \neq \omega_o}$: $\ddot{z} + \omega_0^2 z = A\exp(i\,\omega t)$ hat nach (B) $\dfrac{A}{\omega^2-\omega_0^2}\exp(i\omega t)$ als Lösung. Somit löst $\dfrac{A}{\omega^2-\omega_0^2}\cos(\omega t)$ die reelle DGL $\ddot{y} + \omega_0^2 y = A\cos(\omega t)$.

Im Fall $\omega_0^2 - 2\sigma^2 < 0$, also $\omega_o < \sqrt{2}\,\sigma$ („*starke Dämpfung*") erhält man das strikte Maximum von $|\gamma(\omega)|$ für $\omega^* = 0$ (denn der Scheitel der o.a. Parabel liegt links von der Achse $\tau = 0$) mit $|\gamma(0)| = \frac{A}{\omega_0^2}$. Auch hier konvergiert $|\gamma(\omega)|$ gegen 0 für $\omega \to \infty$.

Rückblick

In diesem Kapitel wurde lediglich ein gewisser Eindruck von den Möglichkeiten, aber auch den Schwierigkeiten des weiten und wichtigen Gebietes der Differentialgleichungen (DGLn) vermittelt. Es wurden nur einige — relativ einfache — Typen von DGLn exemplarisch behandelt.

Lineare DGLn erster Ordnung beschreiben (stetige) Wachstums- und Schrumpfungsprozesse, wie sie in vielen Bereichen der Naturwissenschaften und auch in ökonomischen Bereichen häufig auftreten.

Bei den linearen Differentialgleichungen n-ter, speziell zweiter, Ordnung mit konstanten Koeffizienten gelangten wir zur Beschreibung von Schwingungsprozessen, ausgeführt für zwei wichtige Beispiele der Physik, die andererseits aber beispielsweise auch Konjunkturschwankungen beschreiben können.

Gerade in diesem Bereich werden sicher — je nach Ausrichtung der beruflichen Tätigkeit — manche Dinge noch zu ergänzen sein. Für die praktische Handhabung gibt es inzwischen auch wertvolle Hilfe durch geeignete Computerprogramme (z.B. MATHEMATICA, MAPLE, RIEMANN). Diese wird man aber kaum sinnvoll, sicher und professionell nutzen können, wenn nicht das entsprechende theoretische Rüstzeug im Hintergrund vorhanden ist.

Kapitel 8

Differenzenrechnung und Differenzengleichungen

Lernziel

Die wesentlichen *Gemeinsamkeiten und Unterschiede von Differential- und Differenzengleichungen* können beschrieben werden, speziell die *unterschiedlichen Anwendungssituationen* — hier kontinuierliche Argumente (Intervalle bzw. ganz $\mathbb{R}$), dort diskrete ganzzahlige Argumente (meist aus $\mathbb{N}_0$).

Die enge Verbindung der beiden Themen, sowohl der grundlegenden Aussagen als auch — darauf basierend — der praktischen Vorgehensweisen, wird überblickt.

Der Typ einer gegebenen Differenzengleichung kann sofort erkannt werden. *Differenzengleichungen 1. Ordnung*

$$y_{n+1} = a_n y_n + b_n$$

können allgemein gelöst werden. Bei *Differenzengleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten*

$$y_{n+2} + ay_{n+1} + by_n = g_n$$

wird das Lösen mit der **Operatormethode** oder — ersatzweise — die *Methode der unbestimmten Koeffizienten* beherrscht.

Die kurzen Abschnitte 8.1 bis 8.5 haben weitgehend vorbereitenden Charakter. 8.6 bis 8.8 beschreiben detailliert das Lösungsverfahren in den behandelten Fällen.

Um einen ersten Eindruck zu erhalten, sehen wir uns vorab vier Beispiele an:

1. Potenzreihenansatz für (gewöhnliche) DGLn: Wir erläutern diese Methode an einem einfachen Beispiel:

$$y'' - y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$$

Falls eine Lösung dieser Anfangswertaufgabe in der Form $y(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ existiert, so ergibt sich aus

$$\begin{aligned} 0 &= y''(x) - y(x) = \sum_{\nu=2}^{\infty} \nu(\nu-1)\, a_\nu\, x^{\nu-2} - \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu\, x^\nu \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \{(\nu+2)(\nu+1)\, a_{\nu+2} - a_\nu\}\, x^\nu : \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{(\nu+2)(\nu+1)\, a_{\nu+2} - a_\nu = 0 \qquad (\nu \in \mathbb{N}_0)}\,.$$

Die Anfangsbedingungen liefern noch: $a_0 = 1,\ a_1 = -1$. Daraus erhält man nun $a_\nu = (-1)^\nu \frac{1}{\nu!}$, also $y(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{1}{\nu!} x^\nu = \exp(-x)$. (In diesem bewußt einfach gewählten Beispiel gewinnt man natürlich die Lösung mit den Überlegungen aus 7.8 schneller!)

2. In dem Buch „liber abaci" aus dem Jahre 1202 des italienischen Mathematikers Leonardo von Pisa, auch Fibonacci genannt, findet sich die folgende Aufgabe:

Ein Kaninchenpaar erzeugt ab seinem zweiten Lebensmonat jeden Monat ein weiteres Paar, die Nachkommen eifern jeweils ihren Eltern nach. Wieviel Paare p_n sind dann nach n Monaten vorhanden? Falls n ‚klein' ist (noch keins dieser Kaninchen ist gestorben), gilt offenbar:

$$\boldsymbol{p_0 = p_1 = 1, \quad p_{n+2} = p_{n+1} + p_n \qquad (n \in \mathbb{N}_0)}\,.$$

Die dadurch festgelegte Zahlenfolge (p_n) heißt „Fibonacci-**Folge**". Die ersten Zahlen sind also: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

Die Folge ist gewiß nicht von Kaninchenzüchtern von Generation zu Generation als tiefe Weisheit weitergegeben worden, sondern deshalb überliefert, weil eine erstaunliche Fülle von Aufgaben existiert, bei denen diese Folge eine Rolle spielt.

3. Numerische Lösungen von DGLn beruhen (meist) auf Lösungen von Differenzengleichungen:

Zur Lösung einer DGL (gewöhnlich, 1. Ordnung) $y' = f(y,t)$ (mit einer vorgegebenen Abbildung f) ist die einfache Idee für eine mögliche numerische Vorgehensweise: Mit einer festen Intervallgröße $\delta > 0$ seien (für $\kappa \in \mathbb{N}_0$) $t_\kappa := \delta\kappa$; dann ist

$$y'(t_\kappa) \approx \frac{y(t_\kappa + \delta) - y(t_\kappa)}{\delta} \approx \frac{1}{\delta}\big(y_{\kappa+1} - y_\kappa\big), \qquad \text{falls } y_\kappa \approx y(t_\kappa).$$

Dies führt zu $\frac{1}{\delta}(y_{\kappa+1} - y_\kappa) \approx f(y_\kappa, t_\kappa)$. Man löst dann

$$(*) \qquad \boldsymbol{y_{\kappa+1} = y_\kappa + \delta\, f(y_\kappa, t_\kappa)}\,,$$

das heißt: Zu gegebenem y_0 bestimmt man durch $(*)$ die (endliche) Folge (y_κ), die ungefähr die gesuchte Funktion y beschreibt.

Auch bei komplizierteren Aufgabenstellungen führt diese Idee, zu *„diskretisieren“* und die Ableitung(en) durch Differenzen(quotienten) geeignet zu approximieren, zu möglichen numerischen Verfahren.

4. Fraktale Geometrie: Die einfache (nicht-lineare) Iterationsgleichung

$$\boldsymbol{z_{n+1} = z_n^2 + c \qquad (n \in \mathbb{N}_0)}$$

für eine (komplexe) Folge (z_n) (zu einer festen komplexen Zahl c) ist das Herzstück der ‚fraktalen Geometrie‘, die in Form der MANDELBROT-Menge, auch bekannt als *„Apfelmännchen“*, Eingang in wohl jede Computerzeitschrift gefunden hat.

Allgemein führt die mathematische Beschreibung vieler Vorgänge, die nicht von ‚kontinuierlichen‘ Größen abhängen (z.B. Anzahl der Flugzeuge einer Produktion (statt Wein oder Butter)) zur Differenzrechnung oder zu Differenzengleichungen.

8.1 Differenzenoperator

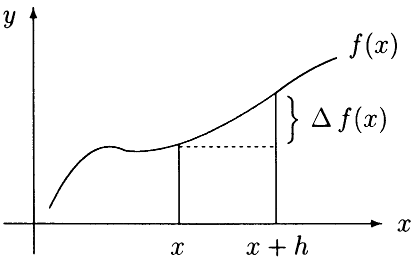
Annahmen:

$$\begin{array}{ll} \emptyset \neq D \subset \mathbb{R}, \quad h \in \mathbb{R} \text{ fest} & \text{(i. allg. } h > 0) \\ x \in D \Longrightarrow x + h \in D; \quad f : D \longrightarrow \mathbb{C}\ ^{*)} & \end{array}$$

*) Wir beschränken uns oft auf den Fall $\mathbb{R}$-wertiger Funktionen.

Bez.: $$\Delta f(x) := \underset{h}{\Delta} f(x) := f(x+h) - f(x) \quad (x \in D)$$

(Die Abhängigkeit von h lassen wir — hier und im folgenden in ähnlichen Situationen — in der Notierung meist weg.) Wir lesen dies als *„erste Differenz von f (an der Stelle x)“*, h als *„Differenzenintervall“* oder *„Schrittweite“*. Δ sprechen wir auch als *„Differenzenoperator“* an.



Beschreibt $f(x)$ etwa die *Gesamtkosten* eines Betriebes für die Produktion von x Einheiten eines Produktes, dann gibt $\Delta f(x)$ den *Kostenanstieg* für die Herstellung, wenn $x + h$ statt x Einheiten produziert werden.

(1) Bemerkung Δ *ist linear,*

d. h.: Mit $\mathfrak{D} := \{\varphi \,|\, \varphi : D \longrightarrow \mathbb{C}\}$ $(= \mathfrak{F}(D, \mathbb{C}))$ gilt

$$f, g \in \mathfrak{D} \wedge \alpha, \beta \in \mathbb{C} \Longrightarrow \begin{cases} (\alpha f + \beta g \in \mathfrak{D} \quad \wedge) \\ \Delta(\alpha f + \beta g) = \alpha \Delta f + \beta \Delta g \, . \end{cases}$$

Der Beweis ist naturgemäß ziemlich langweilig:

$$\begin{aligned} l.S.(x) &= (\alpha f + \beta g)(x + h) - (\alpha f + \beta g)(x) \\ &= \alpha(f(x+h) - f(x)) + \beta(g(x+h) - g(x)) = r.S.(x) \end{aligned}$$ □

Wir betrachten noch

$$\begin{aligned} &S\, f(x) := \underset{h}{S}\, f(x) := f(x+h) \quad (f \in \mathfrak{D}, x \in D) \quad \text{„\textit{Shift-Operator}“}, \\ &E\, f(x) := f(x) \qquad\qquad\qquad (f \in \mathfrak{D}, x \in D) \quad \text{„\textit{Identität}“}. \end{aligned}$$

Offenbar hat man dann die

(2) Bemerkung *$S, E\colon \mathfrak{D} \longrightarrow \mathfrak{D}$ linear mit $SE = ES$, $\Delta E = E\Delta$, $S\Delta = \Delta S$ und $\Delta = S - E$.*

Gelegentlich werden noch die folgenden Operatoren ∇ und δ betrachtet:

$$\begin{aligned} &\nabla f(x) := \underset{h}{\nabla} f(x) := f(x) - f(x-h): \quad \text{„\textit{rückwärts genommene Differenz}“} \\ &\delta f(x) := \underset{h}{\delta} f(x) := f(x + h/2) - f(x - h/2): \quad \text{„\textit{zentrale Differenz}“}. \end{aligned}$$

Wir werden dies jedoch nicht weiter verfolgen.

8.2 Höhere Differenzen

Annahmen: || wie bei 8.1

Mit f gehört auch Δf zu $\mathfrak{D}$; daher kann durch

$$\Delta^2 f(x) := \underset{h}{\Delta^2} f(x) := \underset{h}{\Delta}(\underset{h}{\Delta} f)(x) \quad (x \in D)$$

der *„Differenzenoperator 2. Ordnung“* Δ^2 definiert werden. Man hat dafür:

$$\begin{aligned} \Delta^2 f(x) &= \Delta(f(x+h) - f(x)) = f(x+2h) - f(x+h) - (f(x+h) - f(x)) \\ &= f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x) \quad (x \in D). \end{aligned}$$

Auch hier sind durch $\Delta^0 := E$, $\Delta^{k+1} := \Delta(\Delta^k)$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ beliebige Potenzen von Δ und damit Linearkombinationen solcher Potenzen — als lineare Abbildungen — definiert. Entsprechendes gilt natürlich für E und S.

Wir sehen uns zur Einübung ein Beispiel an:

(B1) $D := \mathbb{R}$, $f(x) := x^3 \quad (x \in \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \Delta f(x) &= (x+h)^3 - x^3 = 3x^2h + 3xh^2 + h^3, \\ \Delta^2 f(x) &= 3(x+h)^2h + 3(x+h)h^2 + h^3 - [3x^2h + 3xh^2 + h^3] \\ &= 6xh^2 + 6h^3 \\ \Delta^3 f(x) &= 6(x+h)h^2 + 6h^3 - [6xh^2 + 6h^3] = 6h^3 \\ \Delta^4 f(x) &= 6h^3 - 6h^3 = 0 \end{aligned}$$

Diese höheren Differenzen möchte man nun nicht jedesmal mühsam ‚von Hand' ausrechnen. Dazu vermerken wir den

(1) Satz $\quad \Delta^k = (S-E)^k = \sum_{\kappa=0}^{k} \binom{k}{\kappa} (-1)^\kappa S^{k-\kappa}, \qquad$ also

$$\Delta^k f(x) = \sum_{\kappa=0}^{k} \binom{k}{\kappa} (-1)^\kappa f(x+(k-\kappa)h) \qquad (f \in \mathfrak{D},\, k \in \mathbb{N}).$$

Beweis: Wegen der Vertauschbarkeit $SE = ES$ kann $(S-E)^k$ nach der *binomischen Formel* berechnet werden; mit $E^\kappa = E$ folgt so die Behauptung. □

Der vertrauten Aussage, daß die $(n+1)$–te Ableitung eines Polynoms n–ten Grades 0 ist, entspricht hier:

(2) Bemerkung *Vor.:* $n \in \mathbb{N};\ a_\nu \in \mathbb{C} \quad (\nu = 0,\dots,n)$

Bez.: $P(x) := a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \ \left(= \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu \right) \quad (x \in \mathbb{C})$

Beh.: $\Delta^n P(x) = n!\, h^n a_n$ (*konstanteFunktion*), *daher* :

$\Delta^m P(x) = 0 \quad (\mathbb{N} \ni m > n)$

Beweis: Wegen der Linearität von Δ^n genügt es, den Spezialfall $P(x) = x^n$ zu betrachten, hier also $\underline{\Delta^n P(x) = n!\, h^n}$ (induktiv) zu zeigen: Für $n = 1$, demzufolge $P(x) = x$, sieht man $\Delta^1 P(x) = (x+h) - x = h = 1!\, h^1$. Für den Induktionsschritt von n auf $n+1$ ist von $P(x) = x^{n+1}$ auszugehen. Wegen $\Delta^{n+1} P = \Delta^n(\Delta P)$ sehen wir uns ΔP an:

$$\begin{aligned}(\Delta P)(x) &= (x+h)^{n+1} - x^{n+1} = x^{n+1} + (n+1)x^n h + \cdots + h^{n+1} - x^{n+1} \\ &= (n+1)h\, x^n + Q(x) \quad \text{mit einem Polynom } Q \text{ vom Grade } \leq n-1\,.\end{aligned}$$

$$\Delta^{n+1} P(x) = \Delta^n(\Delta P)(x) \underset{(n)}{=} (n+1)h\, n!\, h^n = (n+1)!\, h^{n+1}$$ □

8.3 Faktorielle

Will man die von der Differentiation her vertraute Aussage $D\,x^n = n\,x^{n-1}$ auf den Differenzenoperator Δ analog übertragen, so wird man zu ‚Faktoriellen' geführt:

Im folgenden sei $h > 0$ fest. Für $m \in \mathbb{N}$ (und $x \in \mathbb{K}$) bezeichnet man

$$x^{(m)} := \prod_{\nu=0}^{m-1} (x - \nu h) \qquad \big(= x(x-h) \cdots (x-(m-1)h) \big)$$

als (m–te) *„Faktoriellenfunktion"*. Ergänzend setzt man (wie bei Potenzen)

$$x^{(0)} := 1\,.$$

(Im Falle $x = m$ und $h = 1$ gilt offensichtlich $x^{(m)} = m!$, andererseits ergibt sich für $h \to 0$: $\quad x^{(m)} \longrightarrow x^m$.)

(1) Bemerkung $\qquad \Delta\, x^{(m)} = m\, h\, x^{(m-1)}$

Den einfachen Beweis liest man sofort aus der Definition ab:
Für $m = 1: x^{(m)} = x: \Delta x^{(1)} = x+h-x = h = 1\,h\,x^{(0)}$. Falls $m > 1$:

$$\begin{aligned}\Delta x^{(m)} &= (x+h)x(x-h)\cdots(x-(m-2)h) - x(x-h)\cdots(x-(m-1)h)\\ &= x(x-h)\cdots(x-(m-2)h)\left[(x+h)-(x-(m-1)h)\right] = m\,h\,x^{(m-1)}\square\end{aligned}$$

Bezeichnung: Für $n \in \mathbb{N}_0$, $a_\nu \in \mathbb{K}$ $(\nu = 0,\dots,n)$ mit $a_n \neq 0$ heißt P, definiert durch $P(x) := \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu\, x^{(\nu)}$ $(x \in \mathbb{K})$, *„Faktoriellenpolynom“* vom *„Grad“* n mit *„Koeffizienten“* a_ν.

(2) Bemerkung *Jedes Polynom n-ten Grades läßt sich eindeutig als Faktoriellenpolynom n-ten Grades schreiben und umgekehrt $(n \in \mathbb{N}_0)$.*

Beweis: Bezeichnet man mit $\mathbb{P}_n$ den $(n+1)$–dimensionalen $\mathbb{K}$–Vektorraum der Polynome vom Grade $\leq n$, so gilt offenbar $x^{(\nu)} \in \mathbb{P}_n$ $(\nu = 0,\dots,n)$. Es ist daher nur noch zu zeigen, daß $x^{(0)},\dots,x^{(n)}$ linear unabhängig sind (und somit eine Basis von $\mathbb{P}_n$ liefern):

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu\, x^{(\nu)} = 0 \overset{!}{\Longrightarrow} a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0:$$

$$0 = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu\, x^{(\nu)} = a_0 + a_1 x + a_2 x(x-h) + \cdots + a_n x(x-h)\cdots(x-(n-1)h)$$

$x := 0$ liefert $a_0 = 0$. Mit $0 = \Delta\Big(\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu\, x^{(\nu)}\Big) = \sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu\, \Delta\, x^{(\nu)} \underset{(1)}{=} \sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu \nu\, h\, x^{(\nu-1)}$ folgt dann — induktiv —: $a_1 = \cdots = a_n = 0$. $\square$

Gelegentlich benötig man noch (für $m \in \mathbb{N}$) $x^{(-m)} = \Big(\prod\limits_{\mu=1}^{m}(x+\mu h)\Big)^{-1}$.

Offenbar hat man: $x^{(-m)} = \big((x+mh)^{(m)}\big)^{-1}$.
Wir verfolgen dies nicht weiter und gehen auch nicht auf den (einfachen) Zusammenhang mit der Γ–Funktion ein.

8.4 (Gewöhnliche) Differenzengleichungen

Annahmen: $k \in \mathbb{N}$, $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}^{k+1}$, $h \in \mathbb{R}$ fest
$F : A \longrightarrow \mathbb{C}$

Als (gewöhnliche) *„Differenzengleichung“*, kurz *„DZG“* (Plural *„DZGn“*), bezeichnen wir eine Beziehung der Form

$$(*) \qquad F(x, y, \Delta y, \dots, \Delta^k y) = 0.$$

Genauer bedeutet dies — wie schon entsprechend bei den Differentialgleichungen —:

Gesucht: $D \subset \mathbb{R}$ mit $x \in D \Longrightarrow x + h \in D$ und $y : D \longrightarrow \mathbb{C}$ mit:

$$\forall\, x \in D \begin{cases} (x,\, y(x),\, \Delta y(x), \ldots, \Delta^k y(x)) \in A \text{ und} \\ F(x,\, y(x),\, \Delta y(x), \ldots, \Delta^k y(x)) = 0 \end{cases}$$

Ein solches y heißt dann *„Lösung“* (von $(*)$). Wir sagen auch y *„erfüllt die“* oder *„genügt der“* DZG und ähnlich.

Ist $(*)$ speziell in der Form

$$\binom{*}{*} \qquad \Delta^k y = \varphi\big(x,\, y,\, \Delta y, \ldots, \Delta^{k-1} y\big)$$

mit einer geeigneten Abbildung φ gegeben, dann heißt die DZG *„explizit“* und k *„Ordnung“* (der DZG).

Wir beschäftigen uns im folgenden weitgehend nur mit expliziten DZGn und betrachten auch dabei nur einige einfache Typen.

Nach (1) aus Abschnitt 8.2 können $(*)$ und $\binom{*}{*}$ immer — mit durch F bzw. φ bestimmten Abbildungen $\widehat{F}$ und $\widehat{\varphi}$ — umgeschrieben werden zu:

$$(\times) \qquad \widehat{F}(x,\, y(x),\, y(x+h), \ldots, y(x+kh)) = 0$$

$$\binom{\times}{\times} \qquad y(x+kh) = \widehat{\varphi}\big(x,\, y(x),\, y(x+h), \ldots, y(x+(k-1)h)\big)$$

Wir reduzieren nun noch auf den **Spezialfall $h = 1$ und $D = \mathbb{N}_0$** :

Diese Reduktion ist auch aus praktischen Gründen sinnvoll; denn sehr oft werden Probleme betrachtet, die auf ‚Perioden‘, Stückzahlen, Geldeinheiten oder ähnlichem basieren, und jedes Element ist dann das Bild einer natürlichen Zahl (oder 0).

Mit (festem) $a \in D$ setzen wir dazu: $x = a + nh$ und $y_n := y(x) = y(a + nh)$. Damit können $(\times)$ und $\binom{\times}{\times}$ in der Form

$$\widetilde{F}(n,\, y_n,\, y_{n+1}, \ldots, y_{n+k}) = 0 \qquad \text{bzw.}$$

$$\boxed{y_{n+k} = \widetilde{\varphi}\big(n,\, y_n,\, y_{n+1}, \ldots, y_{n+k-1}\big)}$$

mit geeigneten Funktionen $\widetilde{F}$ und $\widetilde{\varphi}$ notiert werden. Im folgenden werden wir uns — abgesehen von einzelnen Übungsaufgaben — nur mit der letzten Gleichung, und zwar Spezialfällen davon, befassen.

Deshalb schreiben wir einige Dinge noch einmal ausdrücklich auf diese spezielle Situation um, erläutern insbesondere Δ *(Differenzenoperator)*, E *(Identität)* und S *(Shift-Operator)* für diesen Fall:

Für $y = (y_n) \in \mathfrak{F}(\mathbb{N}_0, \mathbb{K}) =: \mathfrak{F}$ (also eine $\mathbb{K}$-wertige Folge) und $n \in \mathbb{N}_0$ gelten (links korrekte Notierung, rechts — wie meist üblich — etwas lax notiert):

$$\begin{array}{rclcrcl} (Sy)(n) & = & y_{n+1} & \qquad & Sy_n & = & y_{n+1} \\ (\Delta y)(n) & = & y_{n+1} - y_n & & \Delta y_n & = & y_{n+1} - y_n \\ (Ey)(n) & = & y_n & & Ey_n & = & y_n \end{array}$$

(1) aus 8.2 bedeutet hier: $\boxed{\Delta^k y_n = \sum_{\kappa=0}^{k} \binom{k}{\kappa} (-1)^\kappa \, y_{n+(k-\kappa)}}$ $\quad (k \in \mathbb{N})$.

Für $m \in \mathbb{N}$ ist jetzt $\mathbf{n^{(m)}} = n(n-1)\cdots(n-m+1)$; (1) aus Abschnitt 8.3 lautet nun:

$$\boxed{\Delta\, n^{(m)} = m\, n^{(m-1)}}\,.$$

Zur Berechnung der (höheren) Differenzen zieht man oft ein *Differenzenschema* heran:

y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\cdots$	$\cdots$
y_0					
	Δy_0				
y_1		$\Delta^2 y_0$			
	Δy_1		$\Delta^3 y_0$		
y_2		$\Delta^2 y_1$		·	
	Δy_2		·		·
y_3		·		·	
	·		·		·
·		·		·	

Die Elemente $\Delta^j y_n := (\Delta^j y)(n)$ in einer Spalte ergeben sich jeweils aus der vorangehenden wie eingezeichnet, z.B.:

$$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0\,.$$

(1) *Für* $y, z \in \mathfrak{F}$ *bedeutet die Gleichung* $\Delta y = z$ *gerade* $y_{n+1} - y_n = z_n$, *folglich* $y_{n+1} = y_0 + \sum_{\nu=0}^{n} z_\nu \quad (n \in \mathbb{N}_0)$.

Bez.: Für $k \in \mathbb{N}_0$, $a_\kappa \in \mathbb{K}$ bezeichnen wir natürlich wieder sinngemäß eine durch $P(n) := \sum_{\kappa=0}^{k} a_\kappa n^\kappa$ definierte Folge P als *„Polynom"* (mit *„Grad"* k, falls $a_k \neq 0$) und mit $\mathbb{P}_k$ den Vektorraum der Polynome vom Grade $\leq k$.

(2) Bemerkung *Für* $k \in \mathbb{N}_0$ *und* $w \in \mathfrak{F}$ *gelten*

a) $\Delta w = 0 \iff w \in \mathbb{P}_0$ (d.h.: w konstante Folge)

b) $\Delta w \in \mathbb{P}_k \iff w \in \mathbb{P}_{k+1}$

c) $\Delta^{k+1} w = 0 \iff w \in \mathbb{P}_k$

Den einfachen Beweis überlassen wir dem interessierten Leser — mit einer geeigneten Anleitung — als Übungsaufgabe.

8.5 Lineare Differenzengleichungen

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der speziellen DZG

$$(*) \qquad f_k(n)\, y_{n+k} + f_{k-1}(n)\, y_{n+k-1} + \cdots + f_0(n)\, y_n = g(n) \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

mit (festen) Funktionen $g : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{K}$ und $f_\kappa : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ $(\kappa = 0, \dots, k)$. Ist $g \neq 0$, dann heißt $(*)$ *„linear inhomogen“*, für $g = 0$ *„linear homogen“*. g nennen wir auch hier wieder *„Inhomogenität“* oder *„Störglied“*.

Sind die Funktionen f_κ alle konstant, bezeichnet man $(*)$ als *„lineare DZG mit konstanten Koeffizienten“*; schon dieser sehr einfache Spezialfall erfaßt — wie wir in den folgenden Abschnitten und in den Übungen sehen werden — viele wirtschaftswissenschaftliche Modelle!

Mit dem Shift–Operator S (und $S^0 = E$) können wir $(*)$ umschreiben zu:

$$f_k(n)\, S^k\, y_n + f_{k-1}(n)\, S^{k-1}\, y_n + \cdots + f_0(n)\, S^0\, y_n = g(n) \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

$$= \underbrace{\left(f_k\, S^k + f_{k-1}\, S^{k-1} + \cdots + f_0 S^0\right)}_{=:\, L}\, y(n)$$

Damit lautet nun $(*)$ $\quad \boldsymbol{L\, y = g}$

Wir betrachten daneben wieder die zugehörige homogene Gleichung:

$$(*)_h \qquad \boldsymbol{L\, y = 0}$$

Auch hier erweisen sich einfache *Linearitätsüberlegungen* als sehr hilfreich:

(1) *(a) L ist linear.*

(b) u, v Lösungen von $(*)_h \Longrightarrow \alpha u + \beta v$ Lösung von $(*)_h$ (für $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$).

(c) u Lösung von $(*) \wedge v$ Lösung von $(*)_h \Longrightarrow$ $u + v$ Lösung von $(*)$.

(d) v, w Lösungen von $(*) \Longrightarrow v - w$ Lösung von $(*)_h$.

(e) Ist $y = u + iv$ mit $u, v : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{R}$, so ist y (komplexe) Lösung von $(*)$ genau dann, wenn u und v (reelle) Lösungen von $(*)$ mit $\mathfrak{Re}\, g$ bzw. $\mathfrak{Im}\, g$ als Inhomogenität sind.

Wie in Abschnitt 7.8 formulieren wir das Wesentliche von (b) – (d) noch einmal etwas anders:

(b): Die Menge der Lösungen der homogenen Differenzengleichung $(*)_h$ liefert einen Vektorraum.

(c), (d): Man erhält *alle* Lösungen von $(*)$ dadurch, daß man irgendeine spezielle *(“partikuläre“)* Lösung von $(*)$ zu einer beliebigen Lösung von $(*)_h$ addiert.

(b) – (d) sollte inzwischen aus der linearen Algebra (Lösung von linearen Gleichungssystemen), 7.3 und 7.8 genügend vertraut sein. Der Beweis von (a) kann durch einfaches Nachrechnen erbracht werden. Ohne Rechnung sieht man dies wie folgt: Da eine Summe von linearen Abbildungen linear ist, müssen nur die einzelnen Terme $f_\kappa S^\kappa$ auf Linearität überprüft werden, was sich aber sofort durch die schon bekannte Linearität von S^κ (Zusammensetzung linearer Abbildungen!) ergibt. □

Um schon etwas ‚Gespür' für die nachfolgenden Überlegungen zu bekommen, behandeln wir vorab ein erstes Beispiel:

(B1) $\boxed{y_{n+2} + y_{n+1} - 6y_n = 0 \qquad (n \in \mathbb{N}_0)}$

Falls es eine Lösung der Form $\underline{y_n = a^n}$ (mit $a \in \mathbb{C}$) gibt, muß gelten: $0 = a^{n+2} + a^{n+1} - 6a^n = a^n(a^2 + a - 6) = a^n(a-2)(a+3)$, also $a \in \{0, 2, -3\}$. Umgekehrt wird diese DZG offenbar (nicht-trivial) durch $v_n := 2^n$ und $w_n := (-3)^n$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ gelöst. Nach (1.b) liefert dann auch $y_n = c_1 2^n + c_2(-3)^n$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ für beliebige $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ eine Lösung. Fordert man zusätzlich $y_0 = 0$ und $y_1 = 5$ (beispielsweise soll ein ökonomischer Prozeß unter diesen Startvorgaben betrachtet werden), so erhält man:

$$\begin{aligned} 0 &\overset{!}{=} y_0 = c_1 2^0 + c_2(-3)^0 = c_1 + c_2 \\ 5 &\overset{!}{=} y_1 = c_1 2^1 + c_2(-3)^1 = 2c_1 - 3c_2, \end{aligned}$$

somit $c_1 = 1$ und $c_2 = -1$. Daher ist $y_n := 2^n - (-3)^n$ *eine* Lösung.

Daß es keine weiteren Lösungen (unter den angegebenen Startbedingungen) gibt, beantwortet der **Existenz– und Eindeutigkeitssatz**:

(2) *Vor.:* $\forall n \in \mathbb{N}_0 \quad f_k(n) \neq 0$ (d.h.: $(*)$ ist nach y_{n+k} auflösbar)

Beh.: Zu beliebigen $a_0, \ldots, a_{k-1} \in \mathbb{K}$ *existiert genau eine Lösung* y *von* $(*)$ *mit* $y_\kappa = a_\kappa$ $(\kappa = 0, \ldots, k-1)$ **(„Anfangsbedingungen")**.

Beweis: Falls y Lösung von $(*)$ ist mit $y_\kappa = a_\kappa$ $(\kappa = 0, \ldots, k-1)$, dann liefert $(*)$:

$$(\times) \quad y_{n+k} = -\frac{f_{k-1}(n)}{f_k(n)} y_{n+k-1} - \cdots - \frac{f_0(n)}{f_k(n)} y_n + \frac{g(n)}{f_k(n)} \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

y_{n+k} ist also durch die ‚vorangehenden' k Werte $y_n, \ldots, y_{n+k-1}$ festgelegt; speziell y_k durch $y_0, \ldots, y_{k-1}$, d.h. durch $a_0, \ldots, a_{k-1}$. Daher gibt es höchstens eine Lösung von $(*)$ mit den geforderten Anfangsbedingungen. Umgekehrt wird aber durch $(\times)$ bei Vorgabe von $y_0 = a_0, \ldots, y_{k-1} = a_{k-1}$ (rekursiv) eine Lösung von $(*)$ definiert. □

Bez.: Die Aufgabe, eine Lösung einer DZG zu finden, die vorgegebenen Anfangsbedingungen genügt, nennt man auch hier wieder **„Anfangswertaufgabe" („AWA")**.

(3) Folgerung *Bez.:* $\mathfrak{N} := \{y \in \mathfrak{F} \mid y \text{ Lösung von } (*)_h\}$,

$\omega : \mathfrak{N} \ni y \longmapsto (y_0, \ldots, y_{k-1}) \in \mathbb{K}^k$

Beh.: a) ω *ist (Vektorraum-) Isomorphismus.*

b) Ist $a_1, \ldots, a_k$ *eine Basis von* $\mathbb{K}^k$*, dann liefert* $\omega^{-1}a_1, \ldots, \omega^{-1}a_k$ *eine Basis von* $\mathfrak{N}$.

c) Die Dimension von $\mathfrak{N}$ *ist* k .

Beweis: ω ist offensichtlich linear. Nach dem Existenz– und Eindeutigkeitssatz ist ω auch bijektiv. Die restlichen Aussagen sind dann aus der Linearen Algebra bekannt. □

8.6 Lineare Differenzengleichungen 1. Ordnung

Wir betrachten in diesem Abschnitt die — sehr einfache — lineare DZG 1. Ordnung:

$$(*) \qquad f_1(n)\, y_{n+1} + f_0(n)\, y_n = g(n) \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

(mit Funktionen $f_0, f_1 : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{K}$ und $f_1(n) \neq 0$ $(n \in \mathbb{N}_0)$). Nach Division durch $f_1(n)$ erhält man mit $a_n := -\dfrac{f_0(n)}{f_1(n)}$ und $b_n := \dfrac{g(n)}{f_1(n)}$:

$$(*) \qquad \boxed{y_{n+1} = a_n\, y_n + b_n} \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

Die *Lösung der zugehörigen homogenen DZG*

$$(*)_h \qquad \boxed{y_{n+1} = a_n\, y_n}$$

mit $y_0 = c$ (für beliebiges $c \in \mathbb{K}$) ist durch $y_n = c \prod\limits_{\nu=0}^{n-1} a_\nu$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ gegeben; denn man hat nacheinander: $y_1 = a_0 y_0 = c a_0$, $y_2 = a_1 y_1 = c a_0 a_1$ und so weiter. Für die Lösung von $(*)$ machen wir — entsprechend der Überlegung in 7.3 — den Ansatz:

$$z_n = c_n \prod_{\nu=0}^{n-1} a_\nu \qquad \text{„}\textit{Variation der Konstanten}\text{“:}$$

$c_{n+1} \prod\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu = z_{n+1} \overset{!}{=} a_n z_n + b_n = c_n \prod\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu + b_n$; dies führt im Fall, daß alle $a_\nu \neq 0$ sind, auf $c_{n+1} - c_n = b_n \Big(\prod\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu \Big)^{-1} =: \boldsymbol{d_n}$, schließlich auf: $c_n = c_0 + \sum\limits_{\nu=0}^{n-1} d_\nu$ (mit $c_0 \in \mathbb{K}$ beliebig). Somit gilt für die allgemeine Lösung $v = z + y$: $v_n = z_n + y_n = c_n \prod\limits_{\nu=0}^{n-1} a_\nu + c \prod\limits_{\nu=0}^{n-1} a_\nu =$

$$(c_n + c) \prod_{\nu=0}^{n-1} a_\nu \;\boxed{= \Big(\widehat{c} + \sum_{\nu=0}^{n-1} d_\nu \Big) \prod_{\nu=0}^{n-1} a_\nu} \qquad (\text{mit } \widehat{c} := c + c_0 \in \mathbb{K} \text{ beliebig}).$$

Ein Beispiel soll wieder die allgemeine Rechnung erläutern:

(B1) $\boxed{v_{k+1} - \frac{k+1}{k+2} v_k = 1 \qquad (k \in \mathbb{N}_0) \quad \text{mit} \quad v_7 = \pi}$

$\prod_{\kappa=0}^{k-1} a_\kappa = \prod_{\kappa=0}^{k-1} \frac{\kappa+1}{\kappa+2} = \frac{1}{k+1}$, also $d_k = k+2$ und daher

$$\underline{v_k} = \Big(\widehat{c} + \sum_{\kappa=0}^{k-1} d_\kappa\Big) \prod_{\kappa=0}^{k-1} a_\kappa = \Big(\widehat{c} + \sum_{\kappa=0}^{k-1} (\kappa+2)\Big) \frac{1}{k+1}$$

$$\underline{= \Big(\widehat{c} + \frac{k(k+3)}{2}\Big) \frac{1}{k+1}} \qquad \text{(mit einem geeigneten } \widehat{c} \in \mathbb{R}).$$

Die Berücksichtigung der Zusatzbedingung $v_7 = \pi$ liefert dann:

$\pi = \Big(\widehat{c} + \frac{7(7+3)}{2}\Big) \frac{1}{7+1} = \Big(\widehat{c} + 35\Big) \frac{1}{8}$, daher $\underline{\widehat{c} = 8\pi - 35}$.

Wir lösen diese Aufgabe noch einmal auf andere Weise: Multiplikation mit $k+2$ liefert die äquivalente DZG $(k+2)v_{k+1} - (k+1)v_k = k+2$, also mit $z_k := (k+1)v_k$ die DZG $\underline{\Delta z_k = z_{k+1} - z_k = k+2}$. Nach (2.b) aus Abschnitt 8.4 existiert eine Lösung der Form $z_k = \alpha k^2 + \beta k + \gamma$ (mit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$). Geht man damit in die DZG ein, so erhält man

$$k+2 \overset{!}{=} \alpha(k+1)^2 + \beta(k+1) + \gamma - [\alpha k^2 + \beta k + \gamma] = 2\alpha k + \alpha + \beta,$$

woraus sich $\alpha = 1/2$ und $\beta = 3/2$ ergibt. Die Konstante γ ergibt sich wieder — wie oben — durch Berücksichtigung der Zusatzbedingung zu $\underline{\gamma = 8\pi - 35}$.

Die weitere Möglichkeit, die obige DZG $\Delta z_k = k+2$ mit (1) aus 8.4 zu lösen, überlassen wir einer Übungsaufgabe.

Die allgemeinen Überlegungen lassen sich noch deutlich vereinfachen, wenn die Koeffizienten konstant sind:

Lineare (inhomogene) DZG 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\boxed{y_{n+1} = a\, y_n + b_n} \qquad (n \in \mathbb{N}_0) \qquad (b_n \in \mathbb{K},\ a \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

Die obigen Resultate ergeben hier — mit $a_n := a$, also $d_n = b_n a^{-(n+1)}$ — als <u>allgemeine Lösung</u>:

$$y_n = \Big(\widehat{c} + \sum_{\nu=0}^{n-1} b_\nu\, a^{-(\nu+1)}\Big) a^n = \widehat{c}\, a^n + \sum_{\nu=0}^{n-1} b_\nu\, a^{n-\nu-1}$$

(mit $\widehat{c} \in \mathbb{K}$ beliebig).

Ist *zusätzlich* noch die *Inhomogenität konstant* $[b_n = b \ (n \in \mathbb{N}_0)]$, so werden die Verhältnisse noch einfacher:

$$\begin{aligned} y_n &= \widehat{c}a^n + b\sum_{\nu=0}^{n-1} a^{n-\nu-1} = \widehat{c}a^n + b\sum_{\nu=0}^{n-1} a^\nu \\ &= \begin{cases} \widehat{c}a^n + b\dfrac{a^n-1}{a-1}, & \text{falls } a \neq 1 \\ \widehat{c} + bn, & \text{falls } a = 1\,. \end{cases} \end{aligned}$$

Standardbeispiele für das Auftreten linearer DZGn 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten sind — neben vielen anderen —:

Wachstumsmodell für das Volkseinkommen von R. F. HARROD (1948),
Nachschüssige Rentenformel,
Modell der Einkommensverteilung von D. G. CHAMPERDOWNE (1949) und das Spinnwebmodell (cobweb model).

Wir gehen im Text nur auf das letzte kurz ein und verweisen für die anderen auf die Übungsaufgaben oder auch — zum Beispiel — auf die Darstellungen in [ROMMELFANGER] und [GOLDBERG].

(B2) Spinnwebmodell (cobweb model)

Für ein spezielles Gut (‚Elementarmarkt') bezeichne — jeweils für die Zeitperiode t $(t \in \mathbb{N}_0)$ —

$\boldsymbol{n_t}$ die Anzahl der **nachgefragten Einheiten**,
$\boldsymbol{a_t}$ die Anzahl der **angebotenen Einheiten**,
$\boldsymbol{p_t}$ den **Preis pro Einheit**.

Unter den *Linearitätsannahmen*

$$\boldsymbol{n_t} = \boldsymbol{\alpha - \beta p_t} \qquad (\mathbb{R} \ni \alpha,\, \beta > 0)$$

(Nachfrage sinkt bei steigendem Preis.)

$$\boldsymbol{a_{t+1}} = \boldsymbol{-\gamma + \delta p_t} \qquad (\mathbb{R} \ni \gamma,\, \delta > 0)$$

(Angebot steigt bei steigendem Preis und reagiert mit Verzögerung („**lag**"), da die Produktion eine bestimmte Zeit in Anspruch nimmt.)

und der *Gleichgewichtsbedingung*

$\boldsymbol{n_t} = \boldsymbol{a_t}$ (Der Preis wird durch Angebot und Nachfrage bestimmt. Käufe (und Verkäufe) werden schließlich bei dem Preis getätigt, bei dem diese beiden Mengen gleich groß sind.)

betrachten wir die Preisentwicklung, ausgehend von einem Preis $\boldsymbol{p_0}$.

In der englischsprachigen Literatur sind für a_t und n_t die Bezeichnungen S_t (‚supply') und D_t (‚demand') üblich.

Die drei Bedingungen ergeben (für $t \in \mathbb{N}_0$):

$\alpha - \beta p_{t+1} = n_{t+1} = a_{t+1} = -\gamma + \delta p_t\,,$ also

$p_{t+1} = \left(-\dfrac{\delta}{\beta}\right) p_t + \dfrac{\alpha+\gamma}{\beta}$. Mit $a := -\dfrac{\delta}{\beta}$ $(\neq 1$, da δ und β positiv)

und $b := \dfrac{\alpha+\gamma}{\beta}$ liefert die obige Formel — unter Berücksichtigung von $p_0 = \widehat{c}$ — $\quad p_t = \widehat{c}\, a^t + b\,\frac{a^t - 1}{a - 1} = \left[p_0 + \frac{b}{a-1}\right] a^t - \frac{b}{a-1}$,

$$p_t = \left[p_0 - \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}\right]\left(-\frac{\delta}{\beta}\right)^t + \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}.$$

Ist der Startpreis p_0 gerade gleich $\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$, so ist die zugehörige Lösung offenbar konstant. Mit diesem speziellen Preis

$$\overline{p} := \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta} \qquad \text{((statischer) „}\textit{Gleichgewichtspreis}\text{“)}$$

kann die allgemeine Lösung umgeschrieben werden zu

$$\boldsymbol{p_t = \left[p_0 - \overline{p}\right]\left(-\frac{\delta}{\beta}\right)^t + \overline{p}}\,.$$

Im folgenden sei $p_0 \neq \overline{p}$. Da $-\frac{\delta}{\beta}$ negativ ist, *oszilliert* die Lösung. Im Fall $\underline{\delta = \beta}$ nimmt sie abwechselnd die Werte p_0 und $2\overline{p} - p_0$ an (gleichmäßige Oszillationen). Ist $\underline{\delta > \beta}$, so divergiert die Folge mit anwachsenden (‚explosiven') Oszillationen. Für $\underline{\delta < \beta}$ ergeben sich gedämpfte Oszillationen, die Lösung konvergiert gegen $\overline{p}$.

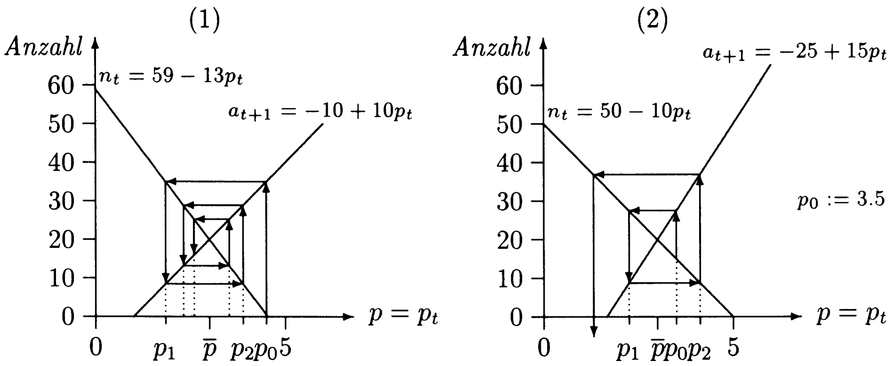
Die Bezeichnung *„cobweb“* (Spinngewebe) wird durch die folgende graphische Darstellung verständlich:

Zeichnet man die Anzahlen (n_t und a_{t+1}) gegen die Preise ($p = p_t$) auf, so ist der statische Gleichgewichtspunkt durch den Schnittpunkt der ‚Angebotsgeraden' $a = -\gamma + \delta p$ mit der ‚Nachfragegeraden' $n = \alpha - \beta p$ gegeben; denn $-\gamma + \delta p = \alpha - \beta p$ liefert $p = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta} = \overline{p}$. Wir skizzieren die Fälle

$$\begin{aligned} &(1) \quad n_t = 59 - 13p_t, \quad a_{t+1} = -10 + 10p_t \\ &(2) \quad n_t = 50 - 10p_t, \quad a_{t+1} = -25 + 15p_t \end{aligned}$$

In beiden Fällen ist der Schnittpunkt durch $(3, 20)$ gegeben, somit $\underline{\overline{p} = 3}$. Im Fall (1) hat man zu $\boldsymbol{p_0} := 4.5$ zunächst $a_1 = -10 + 10p_0 = 35$, die Beziehung $35 = a_1 = n_1 = 59 - 13p_1$ liefert dann $p_1 = \frac{59-35}{13} \approx 1.846$, weiter $a_2 = -10 + 10p_1 \approx 8.46$, $8.46 \approx a_2 = n_2 = 59 - 13p_2$ und damit $p_2 \approx \frac{59 - 8.46}{13} \approx 3.888$ und so weiter.

In der Graphik bedeutet das: Von p_0 geht man senkrecht nach oben bis zur Angebotsgeraden, die in der Höhe $a_1 = -10 + 10p_0$ geschnitten wird. Da $a_1 = n_1$ ist, geht man von dort waagerecht bis zur Nachfragegeraden. Die Projektion des Schnittpunktes auf die p-Achse liefert — als Urbild — p_1 und so fort.



Die graphische Darstellung von (2) sollte der Leser nun in der gleichen Weise ohne Schwierigkeiten selbst nachvollziehen können.

Wir weisen noch darauf hin, daß man natürlich auch nicht–lineare Angebots– und Nachfrage–Funktionen graphisch so behandeln kann und die graphische Lösung auch die Idee für mögliche numerische Vorgehensweisen im allgemeinen Fall liefert.

Seine bekannteste empirische Bestätigung fand das Spinnwebmodell in dem von HANAU (1928) entdeckten **Schweinezyklus**.

8.7 Lineare DZGn mit konstanten Koeffizienten, Operatormethoden

Wir gehen auch die Überlegungen in diesem und dem folgenden Abschnitt mit der **Operatormethode** an. Das zu 7.8 Gesagte — insbesondere über Eleganz und Leistungsfähigkeit dieses Zugangs — gilt entsprechend. Da wir auch hier nur einen ersten Einblick geben wollen, stellen wir keine weiteren Methoden vor. (Die Methode der *‚unbestimmten Koeffizienten‘* ergibt sich wieder als einfache Folgerung.)

Im folgenden betrachten wir (für $k \in \mathbb{N}$) mit gegebenen reellen Zahlen *(„Koeffizienten“)* $a_0, \ldots, a_k$ und einer $\mathbb{K}$–wertigen Folge g die Differenzengleichung

$$(*) \qquad a_k y_{n+k} + a_{k-1} y_{n+k-1} + \cdots + a_0 y_n = g_n \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

In die allgemeineren Überlegungen von Abschnitt 8.5 ordnet sich dieser Fall offensichtlich mit $f_\kappa(n) := a_\kappa$ $(\kappa = 0, \ldots, k;\ n \in \mathbb{N}_0)$ ein. Daher stehen aus 8.5 die *Linearitätsüberlegungen (1)*, der *Existenz- und Eindeutigkeitssatz (2)* und die *Folgerung (3)* zur Verfügung.

Wir können dabei natürlich Œ $a_k \neq 0$ voraussetzen und damit auf $a_k = 1$ reduzieren, somit gleich von der Form

$$(*) \qquad \boxed{y_{n+k} + a_{k-1}y_{n+k-1} + \cdots + a_0 y_n = g_n} \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

ausgehen. Sehr wichtiger (und weitgehend typischer) Spezialfall ist — neben dem schon im letzten Abschnitt behandelten Fall $k = 1$ — der Fall $k = 2$. Da aber die Einbeziehung der allgemeinen Situation wieder keine wesentlichen zusätzlichen Schwierigkeiten — nur etwas Bezeichnungsaufwand — verursacht, behandeln wir auch hier allgemein den Fall ‚k–ter Ordnung'.

Für $g \neq 0$ wird $(*)$ als *„inhomogene lineare Differenzengleichung k-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten"* bezeichnet und g wieder als *„Inhomogenität"* oder *„Störglied"*.
Beispiele für die Anwendung linearer DZGn 2. Ordnung (mit konstanten Koeffizienten) in der Wirtschaftstheorie sind unter anderem:

Multiplikator–Akzelerator–Modell nach P.A. SAMUELSON und J.R. HICKS, und (einfaches)
Lagerhaltungs–Modell von L.A. METZLER.

Auf das erste gehen wir am Ende des Abschnitts ein. Für das zweite verweise ich beispielsweise auf [ROMMELFANGER].

Wir betrachten vorab die dazu gehörende *„homogene Differenzengleichung"* (linear, k-ter Ordnung, mit konstanten Koeffizienten):

$$(*)_h \qquad \boxed{y_{n+k} + a_{k-1}y_{n+k-1} + \cdots + a_0 y_n = 0} \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Wegen der besonderen Wichtigkeit notieren wir explizit den **Spezialfall $k = 2$**:

$$\binom{*}{*} \qquad \boxed{y_{n+2} + a y_{n+1} + b y_n = g_n} \qquad (a, b \in \mathbb{R};\ g \in \mathfrak{F})$$

$$\binom{*}{*}_h \qquad \boxed{y_{n+2} + a y_{n+1} + b y_n = 0}$$

Zu $(*)$ betrachten wir — wie in 7.8 — das *„charakteristische Polynom"*

$$\varphi(\lambda) := \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + a_0 \qquad (\lambda \in \mathbb{K})$$

und die *„charakteristische Gleichung"* $\quad \varphi(\lambda) = 0$.

Im Spezialfall $k = 2$ (mit obigen Koeffizienten) lautet also das charakteristische Polynom $\varphi(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$ $(\lambda \in \mathbb{K})$ und $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ die charakteristische Gleichung.

Für $m \in \mathbb{N}_0$, $c_0, \ldots, c_m \in \mathbb{K}$ und $\psi(x) := \sum\limits_{\mu=0}^{m} c_\mu x^\mu$ $(x \in \mathbb{K})$ notieren wir

$$\psi(S) := \sum_{\mu=0}^{m} c_\mu S^\mu$$

Damit können $(*)$ und $(*)_h$ nun wieder kurz und übersichtlich in der Form

$(*)$	$\varphi(S)\,y = g$	oder — etwas lax —	$\varphi(S)\,y_n = g_n$
$(*)_h$	$\varphi(S)\,y = 0$	bzw.	$\varphi(S)\,y_n = 0$

notiert werden. — Der Aussage (2) aus Abschnitt 7.8 entspricht hier:

(1) *Für ein beliebiges Polynom* ψ *und* $\alpha \in I\!K$ *gilt* $\boldsymbol{\psi(S)\alpha^n = \psi(\alpha)\alpha^n}$.

<u>Beweis:</u> $l.S. = \sum_{\mu=0}^{m} c_\mu S^\mu \alpha^n = \sum_{\mu=0}^{m} c_\mu \alpha^{\mu+n} = \left(\sum_{\mu=0}^{m} c_\mu \alpha^\mu\right) \alpha^n = r.S.$ □

Eigentlich müßte man auch hier und im folgenden statt (des Wertes) α^n genauer die Folge, die an der Stelle $n \in I\!N_0$ den Wert α^n hat, notieren, also z.B. in suggestiver Weise dafür $\alpha^{(\cdot)}$ oder auch $\alpha^{\mathbf{n}}$ schreiben. Diese kleine Laxheit in der Notierungsweise ist aber auch in diesem Zusammenhang allgemein üblich und sollte nach dieser Anmerkung — und der Vertrautheit mit der entsprechenden Notierungsweise in 7.8 — wieder zu keinerlei Mißverständnissen führen.

Aus (1) liest man (für $\alpha \in I\!K$) schon ab:

(A) *Ist* <u>*α Nullstelle von φ*</u>, *so ist* $\boldsymbol{\alpha^n}$ *Lösung der homogenen DZG* $(*)_h$.

(B) *Ist* <u>*$\varphi(\alpha) \neq 0$*</u>, *so löst* $\boldsymbol{\frac{\beta}{\varphi(\alpha)}\alpha^n}$ *die inhomogene DZG mit der Inhomogenität* $g(n) := \beta\,\alpha^n$ *(für* $\beta \in I\!K$*).*

Ein erstes Beispiel hierzu soll wieder das Vorgehen erläutern und die Leistungsfähigkeit der bisherigen — doch recht einfachen — Überlegungen schon etwas verdeutlichen:

(B1) $\boxed{y_{n+2} + 2y_{n+1} - 15y_n = 0}$ $\qquad (n \in I\!N_0)$

Die Nullstellen von $\varphi(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda - 15 = (\lambda + 5)(\lambda - 3)$ sind 3 und -5. Nach (A) sind $y := (3^n)$ und $z := ((-5)^n)$ Lösungen der (homogenen) DZG.

Wegen $\begin{vmatrix} y_0 & z_0 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} \neq 0$ bilden $\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix}$ eine Basis des $I\!R^2$ und daher — nach (3.b) aus Abschnitt 8.5 — y, z eine *Basis des Vektorraums aller Lösungen.* Die *Gesamtheit aller Lösungen* ist deshalb gegeben durch:

$$\boldsymbol{\alpha y + \beta z} \qquad \text{(mit } \alpha, \beta \in I\!R \text{ beliebig),}$$

also

$$(\alpha y + \beta z)(n) = \boldsymbol{\alpha\, 3^n + \beta\,(-5)^n} \qquad (n \in I\!N_0).$$

Grundlegend für die weiteren Überlegungen ist das einfache

(2) Lemma *Für ein Polynom* ψ, $\alpha \in I\!K$ *und eine Folge* v *gilt:*

$$\boldsymbol{\psi(S)\,(\alpha^n v) = \alpha^n\, \psi(\alpha S)\, v} \qquad \text{(‚}\textit{Potenzshift}\text{‘).}$$

<u>Beweis:</u> $l.S. = \sum_{\mu=0}^{m} c_\mu S^\mu \alpha^n v = \sum_{\mu=0}^{m} c_\mu \alpha^{n+\mu} S^\mu v = \alpha^n \sum_{\mu=0}^{m} c_\mu \alpha^\mu S^\mu v = r.S.$ □

(2') Folgerung $\quad \boldsymbol{(S - \alpha)^m \alpha^n v} = \alpha^n(\alpha S - \alpha)^m v = \boldsymbol{\alpha^{n+m} \Delta^m v}$

(für $\alpha \in I\!K$, $v \in \mathfrak{F}$, $m \in I\!N_0$)

Ist ψ Polynom vom Grade höchstens m, so hat man die (TAYLOR–)Entwicklung $\psi(t + \delta) = \sum_{\mu=0}^{m} \frac{\psi^{(\mu)}(t)}{\mu!}\,\delta^{\mu}$. Wenn wir wieder abkürzend auch α statt αE schreiben, ergibt sich mit $S = 1 + \Delta$ daraus unmittelbar die

(3) Bemerkung $\quad \boldsymbol{\psi(\alpha S) = \psi(\alpha + \alpha\Delta) = \sum_{\mu=0}^{m} \frac{\psi^{(\mu)}(\alpha)}{\mu!}\,\alpha^{\mu}\Delta^{\mu}}.$

Wir weisen darauf hin, daß (1) natürlich nun direkt auch aus (2) mit $v_n :\equiv 1$ folgt: Hier sind alle Differenzen (ab der Ordnung 1) 0; daher gilt $\psi(\alpha S)\, v = \psi(\alpha)$. Dies sieht man mühelos auch ohne (3); denn für dieses v ist $\psi(\alpha S)\, v = \sum_{\mu=0}^{m} c_\mu \alpha^\mu \underbrace{S^\mu v}_{=1} = \psi(\alpha)$. Die

(4) Bemerkung $\quad \boldsymbol{\psi(S)\big(n\,\alpha^n\big) = \big[n\,\psi(\alpha) + \psi'(\alpha)\,\alpha\big]\,\alpha^n}$

(für ein Polynom ψ und $\alpha \in I\!K$) liest man mit $v(n) := n$ aus (2) und (3) ab: $l.S. = \psi(S)(\alpha^n v) \underset{(2)}{=} \alpha^n \psi(\alpha S)\, v \underset{(3)}{=} \alpha^n \sum_{\mu=0}^{m} \frac{\psi^{(\mu)}(\alpha)}{\mu!}\,\alpha^\mu \Delta^\mu v = r.S.$; denn $\Delta^0 v = n$, $\Delta^1 v = 1$, und alle höheren Differenzen sind 0.

Aus (4) entnehmen wir sofort — ergänzend zu (A) und (B) — :

(C) *Ist α doppelte Nullstelle von φ, so ist auch $\boldsymbol{n\alpha^n}$ Lösung der homogenen DZG.*

(D) *Ist α nur einfache Nullstelle von φ (also $\varphi(\alpha) = 0$ und $\varphi'(\alpha) \neq 0$), so liefert $\boldsymbol{\frac{\beta}{\alpha\,\varphi'(\alpha)}\,n\,\alpha^n}$ eine Lösung der inhomogenen DZG mit $g(n) := \beta\,\alpha^n$ als Störglied.*

Drei Beispiele sollen das Bisherige eingehend erläutern und einüben:

(B2) $\boxed{y_{n+2} - y_n = 1; \quad y_0 = 1,\ y_1 = 2; \qquad \text{gesucht ist } y_{100}\,.}$

$\varphi(\lambda) = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$. Nach der gleichen Argumentation wie zu (B1) erhält man die Gesamtheit der Lösungen der zugehörigen homogenen DZG durch $\alpha\, 1^n + \beta(-1)^n = \alpha + \beta(-1)^n$ $(\alpha, \beta \in I\!R)$. Eine Lösung der inhomogenen DZG gewinnt man nach (D) (mit $\beta := 1$ und $\alpha := 1$) durch $\frac{1}{2}\,n$. Damit lautet — nach (1) aus 8.5 — die *allgemeine Lösung* (ohne Berücksichtigung der Anfangsbedingungen) $y_n = \alpha + \beta(-1)^n + \frac{1}{2}\,n$. Die Anfangsbedingungen liefern: $1 = y_0$: $1 = \alpha + \beta$, $2 = y_1$: $2 = \alpha - \beta + 0.5$. Durch Addition der beiden Gleichungen sieht man $\alpha = 5/4$ und damit dann $\beta = -1/4$, also $y_n = \frac{1}{2}n + \frac{5}{4} - \frac{1}{4}(-1)^n = \frac{1}{4}\big(2n + 5 + (-1)^{n+1}\big)$, folglich $y_{100} = 51$.

(B3) $\boxed{y_{n+2} - y_{n+1} - 2y_n = 6}$ $\qquad (n \in I\!N_0)$

Hier ist $\varphi(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1)$: (2^n), $((-1)^n)$ liefern — wieder nach der in (B1) gegebenen Begründung — *eine Basis des Raums der Lösungen der zugehörigen homogenen DZG.* Nach (B) (mit $\beta := 6$ und $\alpha := 1$) ergibt sich die *‚partikuläre' Lösung* $\frac{6}{\varphi(1)} 1^n = -3$, somit ist die *allgemeine Lösung* durch $y_n = -3 + \alpha(-1)^n + \beta 2^n$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ gegeben.

(B4) $\boxed{y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = 4 \cdot 3^n}$ $(n \in \mathbb{N}_0)$

Erneut gewinnt man aus den Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\varphi(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 3)(\lambda - 2)$ die allgemeine Lösung der homogenen DZG zu $\alpha 2^n + \beta 3^n$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$. Aus (D) (mit $\beta := 4, \alpha := 3$) ergibt sich sofort als *partikuläre Lösung* $\frac{4}{3\varphi'(3)} n 3^n = \frac{4}{3} n 3^n = 4n 3^{n-1}$. Die *allgemeine Lösung* ist daher durch $\alpha 2^n + \beta 3^n + 4n 3^{n-1}$ gegeben.

Für den **Spezialfall $k = 2$** beschreiben und begründen wir das Vorgehen zur *Lösung der homogenen DZG* noch einmal ausführlich: Mit $a, b \in \mathbb{R}$ betrachten wir also die DZG

$$\binom{*}{*}_h \qquad \boldsymbol{y_{n+2} + a\, y_{n+1} + b\, y_n = 0} \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Dabei sei Œ $b \neq 0$ (Ist $b = 0$, so hat man für $z_n := y_{n+1}$ die DZG 1. Ordnung $z_{n+1} + az_n = 0$). 0 ist somit *keine Nullstelle* des charakteristischen Polynoms.

1. Fall: Das entsprechende charakteristische Polynom $\varphi(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$ hat *zwei verschiedene Nullstellen* ϱ und σ:

Durch $y_n := \boldsymbol{\varrho^n}$ und $z_n := \boldsymbol{\sigma^n}$ sind dann — nach (A) — Lösungen y und z von $\binom{*}{*}_h$ gegeben. Dieses bilden eine Basis des Lösungsraumes, wir sagen dafür auch wieder *„Fundamentalsystem"*; denn wegen

$$\begin{vmatrix} y_0 & z_0 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \varrho & \sigma \end{vmatrix} = \sigma - \varrho \neq 0 \text{ bilden } \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix} \text{ eine Basis des}$$

$\mathbb{K}^2$ und daher — nach (3.b) aus 8.5 — y, z ein Fundamentalsystem.

Wir lassen hier durchaus zu, daß die beiden Nullstellen nicht reell sind. Im allgemeinen ist man aber, ausgehend von reellen Koeffizienten, auch nur an reellen Lösungsfolgen interessiert. Den Übergang von komplexen Lösungen zu geeigneten reellen Lösungen sehen wir uns anschließend an.

2. Fall: Das charakteristische Polynom φ hat *eine doppelte Nullstelle* ϱ:

Durch $y_n := \boldsymbol{\varrho^n}$ und $z_n := \boldsymbol{n\,\varrho^n}$ sind dann — nach (A) und (C) — Lösungen y und z von $\binom{*}{*}_h$ gegeben. Diese bilden — mit der gleichen Begründung wie im 1. Fall — eine Basis des Lösungsraumes, denn man hat:

$$\begin{vmatrix} y_0 & z_0 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \varrho & \varrho \end{vmatrix} = \varrho \neq 0.$$

Ist $\underline{q \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}}$ Lösung der charakteristischen Gleichung, dann kann q in der Form $\boldsymbol{r \exp(i\varphi)}$ mit $r > 0$ und $\varphi \in \,]0, 2\pi[\, \setminus \{\pi\}$ geschrieben werden. Hier liefern $x_n := \boldsymbol{r^n \cos(n\varphi)}$ und $y_n := \boldsymbol{r^n \sin(n\varphi)}$ ein **reelles** *Fundamentalsystem.*

<u>Beweis:</u> Nach (A) liefert $z_n := q^n = r^n \exp(in\varphi) \quad (= x_n + iy_n)$ eine Lösung. Nach (1.e) aus Abschnitt 8.5 sind dann auch (x_n) und (y_n) (reelle) Lösungen. Sie bilden ein Fundamentalsystem, da

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ r\cos\varphi & r\sin\varphi \end{vmatrix} = r\sin\varphi \neq 0. \qquad \square$$

Auch diese letzte Überlegung soll wieder durch ein kleines Beispiel erläutert werden:

(B5) $\boxed{y_{n+2} - 2y_{n+1} + 2y_n = 0}$ $\qquad (n \in \mathbb{N}_0)$

Die charakteristische Gleichung $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ wird gelöst durch $q = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm i$. Wegen $1 + i = \sqrt{2}\exp(i\pi/4)$ ist die allgemeine Lösung gegeben durch:

$$\boldsymbol{y_n = (\sqrt{2})^n \left[c_1 \cos(n\pi/4) + c_2 \sin(n\pi/4)\right]} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

Allgemeine Lösung der homogenen DZG

Wir greifen den allgemeinen Fall

$$(*)_h \qquad \boldsymbol{y_{n+k} + a_{k-1}y_{n+k-1} + \cdots + a_0 y_n = 0}$$

auf. Auch hier können wir Œ $\underline{a_0 \neq 0}$ annehmen, da sich sonst der Grad der DZG (durch $z_n := y_{n+1}$) um $\overline{1}$ reduziert. 0 ist also wieder *keine Nullstelle von* φ.

Die Überlegung aus (C) läßt sich leicht wie folgt verallgemeinern:

Ist $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ *r-fache Nullstelle von* φ (für ein $r \in \mathbb{N}$), so kann φ in der Form $\varphi(x) = (x-\alpha)^r \psi(x)$ mit einem geeigneten Polynom ψ (vom Grade $k - r$) geschrieben werden. Demgemäß hat man $\varphi(S) = (S-\alpha)^r \psi(S) = \psi(S)(S-\alpha)^r$. *Aus* $(S-\alpha)^r u = 0$ *folgt somit* $\varphi(S)u = 0$. Daher untersuchen wir vorab die Gleichung

$$\boldsymbol{(S-\alpha)^r u = 0}:$$

(5) $(S-\alpha)^r u = (S-\alpha)^r \alpha^n(\alpha^{-n}u) \underset{(2')}{=} \alpha^{n+r}\Delta^r \alpha^{-n}u.$ $\quad \boldsymbol{(S-\alpha)^r u = 0}$ **bedeutet** also gerade $\Delta^r \alpha^{-n} u = 0$, mithin nach (2.c) aus 8.4 $\alpha^{-n}u \in \mathbb{P}_{r-1}$, d.h. $\alpha^{-n}u = c_0 + c_1 n + \cdots + c_{r-1}n^{r-1}$ (mit geeigneten $c_\kappa \in \mathbb{K}$), schließlich $u = \alpha^n(c_0 + c_1 n + \cdots + c_{r-1}n^{r-1})$, das heißt $\boldsymbol{u = \alpha^n P}$ **mit geeignetem** $\boldsymbol{P \in \mathbb{P}_{r-1}}$:

($\diamond$) $\boldsymbol{\alpha^n, n\,\alpha^n, \ldots, n^{r-1}\alpha^n}$ sind also zu α gehörende Lösungen der homogenen DZG. Die Lösungen sind *linear unabhängig*, da die Folgen $n^0, n^1, \ldots, n^{r-1}$ bekannterweise linear unabhängig sind.

Man erhält auf diese Weise (($\diamond$) entsprechend für alle Nullstellen) eine *Basis des Lösungsraums*, also ein „*Fundamentalsystem*", d.h.:

> *Jede Lösung der homogenen DZG läßt sich in eindeutiger Weise als Linearkombination von Lösungen des Typs* ($\diamond$) *schreiben*
>
> (wobei α die verschiedenen Nullstellen von φ durchläuft).

Hat φ *nur reelle Nullstellen*, so ergibt dies ein *reelles Fundamentalsystem.*

Zum Beweis ist nur noch die lineare Unabhängigkeit zu zeigen, was wir dem mathematisch interessierten Leser als Übungsaufgabe überlassen; denn die Dimension des Lösungsraums ist nach (3.c) aus 8.5 gleich k. Da φ — nach dem Fundamentalsatz der Algebra — in der Form

$$\varphi(x) = (x-\lambda_1)^{r_1} \cdots (x-\lambda_s)^{r_s}$$

($s \in \mathbb{N}$; $r_\sigma \in \mathbb{N}$ und paarweise verschiedenen $\lambda_\sigma \in \mathbb{C}$ ($\sigma = 1, \ldots, s$)) geschrieben werden kann, zu λ_σ nach ($\diamond$) gerade r_σ dieser Funktionen gehören und $r_1 + \cdots + r_s = k$ gilt, ist man fertig. $\square$

Reelle Lösungen zu komplexen Nullstellen

Ist $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ r–fache Nullstelle von φ, so ist auch, da die Koeffizienten reell sind, $\overline{\lambda}$ r–fache Nullstelle. Schreibt man wieder λ in der Form $\boldsymbol{\varrho \exp(i\varphi)}$ mit $\varrho > 0$ und $\varphi \in]0, 2\pi[\setminus \{\pi\}$, so gilt $\overline{\lambda} = \varrho \exp(-i\varphi)$. Die zugehörigen Lösungen sind mithin nach (5) von der Form

$$p\lambda^n + q\overline{\lambda}^n = p\varrho^n \exp(in\varphi) + q\varrho^n \exp(-in\varphi) = \varrho^n\left[p\exp(in\varphi) + q\exp(-in\varphi)\right]$$

mit Polynomen $p = p(n)$ und $q = q(n)$ vom Grade höchstens $r-1$. *Zu beliebigen reellen Polynomen* $P = P(n)$ *und* $Q = Q(n)$ vom Grade $\leq r-1$ liefern so $p := \frac{1}{2}(P - iQ)$ und $q := \frac{1}{2}(P + iQ)$ die Lösungen

$$\varrho^n\left[\tfrac{1}{2}(P-iQ)(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)) + \tfrac{1}{2}(P+iQ)(\cos(n\varphi) - i\sin(n\varphi))\right] =$$

$$\boldsymbol{\varrho^n\left[P(n)\cos(n\varphi) + Q(n)\sin(n\varphi)\right]}, \quad \text{somit } \textit{reelle Lösungen.}$$

Diejenigen, die die Operatormethode immer noch nicht so recht mögen und an dem Warum auch gar nicht interessiert sind, müssen sich wieder nur das folgende Ergebnis merken:

> *Zu einer r-fachen Nullstelle* $\lambda = \varrho\exp(i\varphi)$ ($\varrho > 0$, $\varphi \in [0, 2\pi[$)
> *gehört die allgemeine Lösung*
>
> $$\boldsymbol{\varrho^n\left[P(n)\cos(n\varphi) + Q(n)\sin(n\varphi)\right]}$$
>
> *mit reellen Polynomen P und Q vom Grade höchstens* $r-1$.

Im Spezialfall $r = 1$, also λ einfache Nullstelle, ist die allgemeine Lösung demnach (mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$)

$$\boldsymbol{\varrho^n \left[c_1 \cos(n\varphi) + c_2 \sin(n\varphi)\right]}.$$

Der Fall $\varphi \in \{0, \pi\}$ bedeutet λ reelle Nullstelle mit der allgemeinen Lösung (mit einem reellen Polynom P vom Grade $\leq r-1$)

$$\boldsymbol{\lambda^n P(n)},$$

speziell für eine reelle einfache Nullstelle λ $(r = 1$ und $\varphi \in \{0, \pi\})$

$$\boldsymbol{c\,\lambda^n} \qquad (c \in \mathbb{R}).$$

(B6) Wir kommen zu dem angekündigten

Multiplikator–Akzelerator–Modell
nach P.A. Samuelson (1939) und J.R. Hicks (1950).

In diesem Modell wird angenommen, daß sich (in einer Periode t) das *Volkseinkommen* $\boldsymbol{Y_t}$ zusammensetzt aus dem *Konsum* (‚Verzehr' von Gütern und Dienstleistungen) $\boldsymbol{C_t}$, den *induzierten Investitionen* $\boldsymbol{I_t}$ und den *autonomen Investitionen* $\boldsymbol{A_t}$, also

$$Y_t = C_t + I_t + A_t.$$

Dabei setzen wir voraus, daß die autonomen Investitionen (Staatsausgaben) konstant sind: $A_t = A$ (Das ist natürlich nicht sehr realistisch, wird uns aber die Rechnung etwas erleichtern.) Eine spezielle Version des Modells geht aus von den Gleichungen:

Konsumgleichung:	$C_t = \alpha\, Y_{t-1}$	$(0 < \alpha < 1)$
Investitionsgleichung:	$I_t = a\,(Y_{t-1} - Y_{t-2})$	$(a > 0)$.

(α wird als *Multiplikator* oder auch *marginale Konsumquote* bezeichnet, a als *Akzelerator.*)

Die Konsumgleichung besagt, daß der Konsum proportional zum Volkseinkommen der vorangehenden Periode ist. Die Investitionsgleichung beschreibt die Investitionen als proportional zur (bekannten) Einkommensveränderung (Trendabhängigkeit).

Die drei Gleichungen ergeben für Y_t die DZG 2. Ordnung

$$Y_t = (\alpha + a)\, Y_{t-1} - a\, Y_{t-2} + A \qquad (\mathbb{N} \ni t \geq 2) \quad \text{bzw.}$$

$$\boldsymbol{Y_{t+2} = (\alpha + a)\, Y_{t+1} - a\, Y_t + A} \qquad (t \in \mathbb{N}_0).$$

Mit $\varphi(\lambda) = \lambda^2 - (\alpha + a)\lambda + a$ ergibt sich nach (B) — unter Beachtung von $\varphi(1) = 1 - \alpha \neq 0$ — die (konstante) partikuläre Lösung

$$\boldsymbol{Y_t^*} := \frac{A}{\varphi(1)} = \boldsymbol{\frac{A}{1-\alpha}}.$$

Wir wollen nicht alle Aspekte des Modells diskutieren (dazu verweisen wir auf die Spezialliteratur, z.B. [ALLEN]), sondern sehen uns nur zwei spezielle Beispiele an:

Für $\alpha := a := 0.5$ und $A := 17$ ist also durch die Konstante 34 eine partikuläre Lösung gegeben. Das charakteristische Polynom lautet hier $\varphi(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + 0.5$. Die Nullstellen sind somit $\frac{1}{2}(1 \pm i)$. Wegen $\frac{1}{2}(1+i) = \frac{\sqrt{2}}{2}\exp(i\,\frac{\pi}{4})$ hat man (mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$) die allgemeine Lösung

$$Y_t = c_1 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^t \sin\left(\frac{\pi}{4}\,t\right) + c_2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^t \cos\left(\frac{\pi}{4}\,t\right) + 34,$$

also eine Schwingung mit abnehmender Amplitude (da $\frac{\sqrt{2}}{2} < 1$) (‚*gedämpfte Zyklen*') und $Y_t \longrightarrow 34 \quad (t \longrightarrow \infty)$. (Durch veränderte Parameter α und a erhält man natürlich entsprechend auch ‚*gleichbleibende Zyklen*' und ‚*explosive Zyklen*'.)

Für $\alpha := \frac{5}{8}$, $a := \frac{1}{8}$ und $A := 33$ ist $\varphi(\lambda) = \lambda^2 - \frac{3}{4}\lambda + \frac{1}{8} = (\lambda - \frac{1}{2})(\lambda - \frac{1}{4})$, also die allgemeine Lösung:

$$Y_t = c_1 \left(\frac{1}{2}\right)^t + c_2 \left(\frac{1}{4}\right)^t + 88;$$

denn $\dfrac{A}{1-\alpha} = 33 \cdot \frac{8}{3} = 88$. (Auch hier strebt Y_t gegen die partikuläre Lösung.)

8.8 Inhomogene Differenzengleichungen

Wir hatten schon im letzten Abschnitt bei einigen Beispielen auch einfache Inhomogenitäten behandelt. Für die Lösung wurde dabei jeweils eine der Aussagen (B) und (D), die wir bei den Ausführungen über homogene DZGn nebenbei mit erhalten hatten, herangezogen. Inhomogene DZGn sollen nun in diesem Abschnitt allgemeiner und systematischer behandelt werden. Für den allgemeinen Fall (insbesondere Inhomogenität nicht speziell auch noch konstant) gibt es dazu verschiedene Methoden, u.a.:

(1) Operatormethoden

(2) Methode der unbestimmten Koeffizienten („Störgliedansätze")

(3) Variation der Konstanten (vgl. hierzu Abschnitt 8.6)

(4) Methode der ‚erzeugenden Funktionen'.

Wir beschränken uns wieder auf (1) (und erhalten daraus (2)):

Für die lineare DZG mit konstanten Koeffizienten

$$(*) \qquad \boxed{y_{n+k} + a_{k-1}y_{n+k-1} + \cdots + a_0 y_n = g_n} \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

($k \in \mathbb{N}$; $a_0, \ldots, a_{k-1} \in \mathbb{R}$ und $g = (g_n) \in \mathfrak{F}(\mathbb{N}_0, \mathbb{K})$)

notieren wir als erstes wieder das unmittelbar aus der Linearität von $\varphi(S)$ resultierende

(1) „Superpositionsprinzip“ *Ist* $g = g^{(1)} + g^{(2)}$ *und* $u^{(j)}$ *Lösung von* $\varphi(S)u^{(j)} = g^{(j)}$ $(j = 1, 2)$, *so liefert* $u := u^{(1)} + u^{(2)}$ *eine Lösung von* $\varphi(S)u = g$.

Es genügt also auch hier, wenn g eine Summe ‚einfacher' Folgen ist, für die einzelnen Summanden Lösungen zu finden.

Analog zu den Ausführungen in Abschnitt 7.8 notieren wir auch für DZGn Beziehungen oft vorteilhaft mit **‚inversen Operatoren'**:

Ist $A : \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{F}$ ($\mathbb{K}$-)linear, so schreiben wir statt $Ax = y$ auch $x = \boldsymbol{A^{-1}y}$. ($A^{-1}y$ ist also *ein* Element aus $\mathfrak{F}$ mit $A(A^{-1}y) = y$.) Nach den Bemerkungen in 7.8 müssen wir diese Notierungsart hier wohl nicht mehr besonders kommentieren. Wir üben aber den Umgang mit dieser Schreibweise vorweg noch etwas ein:

(2) *(a)* $\Delta^{-1}y = z \iff y = \Delta z \iff z_n = z_0 + \sum_{\nu=0}^{n-1} y_\nu$ *(*$z_0 \in \mathbb{K}$ *beliebig)*

(b) $\Delta^{-1}\Delta y$ *und* y *unterscheiden sich ‚nur' durch eine Konstante.*

(c) $\Delta^{-1}1 = n\,, \quad \Delta^{-1}n = \frac{1}{2}n(n-1)\,, \quad \Delta^{-1}\alpha^n = \dfrac{\alpha^n}{\alpha - 1} \quad (\alpha \neq 1).$

Der <u>Beweis</u> von (a) ist durch (1) aus 8.4 gegeben. Für $z := \Delta^{-1}\Delta y$ gilt $\Delta z = \Delta y$, folglich $\Delta(z - y) = 0$ und daher (z.B. nach (2.a) aus 8.4) $z - y$ konstant; dies zeigt (b). (c) erhält man mühelos, indem man jeweils Δ auf die rechte Seite anwendet. □

Wegen (a) bezeichnet man Δ^{-1} gelegentlich auch als „*Summationsoperator*“.

(3) $\boldsymbol{(S - \alpha)^{-1}v = \alpha^{n-1}\Delta^{-1}\alpha^{-n}v}$, kurz

$(S - \alpha)^{-1} = \alpha^{n-1}\Delta^{-1}\alpha^{-n}$ oder auch

$(S - \alpha)^{-1}\alpha^n = \alpha^{n-1}\Delta^{-1}$ $\qquad (\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\},\, v \in \mathfrak{F})$.

<u>Beweis:</u> $(S - \alpha)\alpha^{n-1}\Delta^{-1}\alpha^{-n}v \underset{(2') \text{ aus } 8.7}{=} \alpha^n\Delta\Delta^{-1}\alpha^{-n}v = v$ □

Für $A : \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{F}$ linear und $r \in \mathbb{N}$ schreiben wir noch $\boldsymbol{A^{-r}} := (A^r)^{-1}$ $(= (A^{-1})^r)$. Damit ergibt sich aus (3) — induktiv — sofort die

(4) Folgerung $(S-\alpha)^{-r} = \alpha^{n-r}\Delta^{-r}\alpha^{-n}$.

Beweis: Statt des eigentlich erforderlichen Induktionsbeweises verdeutlichen wir den Sachverhalt für $r=2$:

$$(S-\alpha)^{-2} \underset{(3)}{=} \alpha^{n-1}\Delta^{-1}\alpha^{-n}\,\alpha^{n-1}\Delta^{-1}\alpha^{-n} = \alpha^{n-2}\Delta^{-2}\alpha^{-n} \qquad \square$$

Auch hierzu sehen wir uns ein Beispiel an:

(B1) $\boxed{y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n = n\cdot 2^n}$

Hier ist $\varphi(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda-2)^2$. Zu lösen ist daher

$$(S-2)^2 y \overset{!}{=} n\cdot 2^n : \quad y = (S-2)^{-2}\,n\cdot 2^n \underset{(4)}{=} 2^{n-2}\Delta^{-2}n$$

$$\Delta^{-2}n = \Delta^{-1}(\Delta^{-1}n) \underset{(1)\text{ aus }8.3}{=} \Delta^{-1}\left(\tfrac{1}{2}n^{(2)} + c_1\right) \underset{(1)\ldots}{=} \tfrac{1}{6}n^{(3)} + c_1 n + c_2$$

$$= \tfrac{1}{6}(n^3 - 3n^2 + 2n) + c_1 n + c_2 \ ,$$ also als allgemeine Lösung:

$$y_n = 2^{n-2}\Delta^{-2}n = 2^n\left(\tfrac{1}{24}n^3 - \tfrac{1}{8}n^2 + d_1 n + d_2\right) \quad (\text{mit } d_1, d_2 \in \mathbb{R}) .$$

(1) und (2) aus Abschnitt 8.7 übersetzen sich sofort zu

(5) $\psi(S)^{-1}\alpha^n = \dfrac{\alpha^n}{\psi(\alpha)}$ $\qquad(\alpha \in \mathbb{K},\ \psi$ Polynom mit $\psi(\alpha) \neq 0)$ bzw.

(6) $\psi(S)^{-1}(\alpha^n v) = \alpha^n\,\psi(\alpha S)^{-1}v$ $\qquad(\psi$ Polynom, $\alpha \in \mathbb{K}, v \in \mathfrak{F}$).

In (5) wird $\psi(\alpha) \neq 0$ vorausgesetzt. Ist $\underline{\psi(\alpha) = 0}$ (für ein Polynom ψ und $\alpha \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$), dann kann ψ in der Form $\boldsymbol{\psi(x) = (x-\alpha)^r\chi(x)}$ (mit einer natürlichen Zahl $\boldsymbol{r}$ und einem Polynom $\boldsymbol{\chi}$ mit $\chi(\alpha) \neq 0$) geschrieben werden. Man erhält damit:

(7) $\psi(S)^{-1}\alpha^n = \dfrac{\alpha^{n-r}\,n^r}{\chi(\alpha)\,r!}$ $\quad(= c\,n^r\alpha^n)$ $\qquad\left(\text{mit } c := \dfrac{1}{\chi(\alpha)\,r!\,\alpha^r}\right)$

Beweis: $l.S. = (S-\alpha)^{-r}\chi(S)^{-1}\alpha^n \underset{(5)}{=} \dfrac{1}{\chi(\alpha)}(S-\alpha)^{-r}\alpha^n \underset{(4)}{=} \dfrac{\alpha^{n-r}}{\chi(\alpha)}\Delta^{-r}1$

$$\underset{(2)\text{ aus }8.2}{=} \frac{\alpha^{n-r}}{\chi(\alpha)}\,\frac{n^r}{r!} \qquad \square$$

Auch bei (7) sollte man nicht die Formel auswendig lernen, sondern sich die — im Beweis beschriebene — Vorgehensweise einprägen!

Sehr viele Inhomogenitäten lassen sich zurückführen (siehe unten!) auf Terme der Art $\alpha^n P$ (mit einem Polynom P). Dazu vermerken wir:

(8) *Es seien P Polynom vom Grade höchstens s ($\in \mathbb{N}$), $\alpha \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$ und ψ beliebiges Polynom mit $\psi(\alpha) \neq 0$. Mit der Taylor-Reihe um α* $\dfrac{1}{\psi(\alpha+x)} = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$ *hat man:*

$$\psi(S)^{-1}\,\alpha^n P = \alpha^n\left(c_0 + c_1\,\alpha\Delta + \cdots + c_s\alpha^s\Delta^s\right)P .$$

Beweis: $l.S. \underset{(6)}{=} \alpha^n \psi(\alpha S)^{-1} P = \alpha^n \psi(\alpha + \alpha\Delta)^{-1} P$; zu zeigen ist somit $\psi(\alpha + \alpha\Delta)(c_0 + c_1\,\alpha\Delta + \cdots + c_s \alpha^s \Delta^s)\,P = P$. Die Idee zum Beweis dieser Aussage ist ganz einfach, da $\Delta^\nu P = 0$ für $\nu > s$, doch die exakte Durchführung erfordert etwas Schreibaufwand. Deshalb begnügen wir uns mit einem einfachen Spezialfall, der jedoch das Wesentliche — und das Typische der Vorgehensweise — voll verdeutlicht: P sei Polynom zweiten Grades und ψ Polynom ersten Grades: $\psi(\alpha + x) = a_0 + a_1\,x$ (mit — nach Voraussetzung über ψ — $a_0 \neq 0$). Für $|x|$ klein gilt (geometrische Reihe!):

$$\frac{1}{\psi(\alpha + x)} = \frac{1}{a_0}\,\frac{1}{1 + \frac{a_1}{a_0}x} = \frac{1}{a_0}\Big(1 - \frac{a_1}{a_0}x + \big(\frac{a_1}{a_0}\big)^2 x^2 - + \cdots\Big).$$

$$\psi(\alpha + \alpha\Delta)\,\frac{1}{a_0}\Big(1 - \frac{a_1}{a_0}\alpha\Delta + \big(\frac{a_1}{a_0}\big)^2 \alpha^2\Delta^2\Big)P = (a_0 + a_1\,\alpha\Delta)\,\frac{1}{a_0}(\;\cdots\;)P =$$

$$\Big\{a_0\,\frac{1}{a_0} + \underbrace{\Big(\frac{a_1}{a_0} - \frac{a_1}{a_0}\Big)}_{=0}\alpha\Delta + \underbrace{\Big(\Big(\frac{a_1}{a_0}\Big)^2 - \Big(\frac{a_1}{a_0}\Big)^2\Big)}_{=0}\alpha^2\Delta^2 + [\,\cdots\,]\,\Delta^3\Big\}\underbrace{P}_{=0}\ = P$$

Dabei steht bei $[\,\cdots\,]$ ein Ausdruck, den wir gar nicht erst ausrechnen müssen, da er ohnehin auf $\Delta^3 P = 0$ trifft. □

Damit können wir abschließend und zusammenfassend den folgenden wichtigen Satz beweisen:

(9) Satz *Vor.:* $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, *$P$ Polynom vom Grade $s\,(\in \mathbb{N}_0)$,* $r \in \mathbb{N}_0$, *α r-fache Nullstelle von φ.*

Beh.: Die DZG $\boldsymbol{\varphi(S)u = \alpha^n P}$ *hat eine Lösung der Form*

$$u_n = \alpha^n Q(n) \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

mit einem Polynom Q vom Grade $s + r$.

Beweis: Für $r = 0$ ist die Behauptung unmittelbar durch (8) gegeben; denn die rechte Seite der dortigen Aussage ist dann von der Form $\alpha^n Q$ mit einem Polynom Q vom Grade s. *Dabei zeigt (8) noch, wie Q praktisch berechnet werden kann.* Im Fall $r \in \mathbb{N}$ schreibt man φ wieder in der Form $\varphi(x) = (x - \alpha)^r \chi(x)$ (χ Polynom (vom Grade $k - r$) mit $\chi(\alpha) \neq 0$) und rechnet (mit einem durch (8) (zu χ) gegebenen Polynom P_1 vom Grade s):

$$\varphi(S)^{-1}\alpha^n P = (S - \alpha)^{-r}\chi(S)^{-1}\alpha^n P \underset{(8)}{=} (S - \alpha)^{-r}\alpha^n P_1 \underset{(4)}{=} \alpha^{n-r}\Delta^{-r}P_1$$

Nach (2) aus 8.4 (zum Beispiel) ist $\Delta^{-r}P_1 \in \mathbb{P}_{r+s}$, und damit liefert $Q := \alpha^{-r}\Delta^{-r}P_1$ das Gewünschte.

Dieser Satz ist wieder Grundlage und Rechtfertigung der

„Methode der unbestimmten Koeffizienten":

Zur Inhomogenität $\boldsymbol{\alpha^n P}$ *(P Polynom vom Grade s) geht man mit* *einem Ansatz*

$$u_n = \alpha^n Q(n) = \alpha^n \sum_{\sigma=r}^{r+s} a_\sigma n^\sigma$$

(falls α Nullstelle der Ordnung r $(\in \mathbb{N}_0)$ von φ ist) in die DZG ein und bestimmt durch Koeffizientenvergleich die Koeffizienten a_σ.

(Für $r \in \mathbb{N}$ können die Terme zu $\sigma = 0, \ldots, r-1$ sofort weggelassen werden, da sie nach (5) aus 8.7 die homogene DZG lösen, also 0 ergeben.)

Wir vermerken wieder ausdrücklich die dadurch umfaßten **Spezialfälle**:

Ist die Inhomogenität gleich $\boldsymbol{P}$ (oben $\alpha := 1$ wählen), so gibt es ein Polynom Q vom Grade $r+s$ als Lösung, falls 1 Nullstelle der Ordnung r $(\in \mathbb{N}_0)$ von φ ist.

Ist die Inhomogenität gleich $\boldsymbol{\alpha^n}$ (oben $P(n) := 1$ $(n \in \mathbb{N}_0)$, also $s = 0$, wählen), so gibt es eine Lösung der Form $c\,\alpha^n n^r$ (mit einer Konstanten $c \in \mathbb{K}$), falls α Nullstelle der Ordnung r ist.

(Dieses Ergebnis ist durch (7) (mit einer Formel für c) schon bekannt.)

Wegen $\exp(n\alpha) = (\exp(\alpha))^n$ werden so auch Inhomogenitäten der Form $\boldsymbol{\exp(n\alpha)}$ erfaßt!

Wegen $\exp(i\,t) = \cos t + i \sin t$ lassen sich daher auch Inhomogenitäten der Form $\boldsymbol{\alpha^n \cos(n\varphi)}$ und $\boldsymbol{\alpha^n \sin(n\varphi)}$ einbeziehen. Wir betonen hierzu noch einmal, daß es stets wesentlich einfacher ist, mit Termen der Form $\exp(i\,t)$ statt mit trigonometrischen Funktionen zu rechnen; denn dem einfachen Rechnen mit der Exponentialfunktion steht sonst das dauernde Arbeiten mit den Additionstheoremen gegenüber!

Wir sehen uns zwei abschließende Beispiele an, um das praktische Vorgehen noch etwas weiter einzuüben. Gerade auch zu diesem Kapitel ist es aber äußerst wichtig, neben den im Text durchgerechneten Beipielen viele der angebotenen Übungsaufgaben selbständig auszuführen.

(B2) $\boxed{y_{n+2} - 2\,y_{n+1} + 2\,y_n = 6 \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right)}$

Aus (B5) des vorangehenden Abschnitts kennen wir schon die allgemeine (reelle) Lösung der zugehörigen homogenen DZG. Für die Gewinnung einer partikulären Lösung der inhomogenen DZG wird — gemäß obigem Hinweis — zunächst die DZG

$(\Diamond)$ $\quad z_{n+2} - 2\,z_{n+1} + 2\,z_n = \exp(i\,n \cdot \frac{\pi}{2}) = q^n$ mit $\boldsymbol{q} := \exp(i\,\frac{\pi}{2}) = i$

betrachtet. Wegen $\varphi(i) = i^2 - 2i + 2 = 1 - 2i \neq 0$ erhält man eine (komplexe) Lösung von $(\Diamond)$ (nach (5) oder auch nach (B) aus 8.7) durch $z_n := \dfrac{q^n}{\varphi(q)} = \dfrac{1+2\,i}{5} \exp(i\,n \cdot \frac{\pi}{2})$. Wegen $6 \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right) =$

$6\,\mathfrak{Im}\big(\exp(i\,n\cdot\frac{\pi}{2})\big)$ liefert dann

$y_n := 6\,\mathfrak{Im}(z_n) = \frac{6}{5}\Big(\sin\big(n\cdot\frac{\pi}{2}\big) + 2\cos\big(n\cdot\frac{\pi}{2}\big)\Big)$ eine **partikuläre Lösung** der Ausgangs–DZG.

(B3) $\boxed{y_{n+2} - 4\,y_{n+1} + 4\,y_n = 3\,n + 2^n}$

Aus der charakteristischen Gleichung $\lambda^2 - 4\,\lambda + 4 = (\lambda-2)^2 = 0$ liest man die allgemeine Lösung der homogenen DZG sofort ab:

$c_1 2^n + c_2\,n\,2^n = \underline{(c_1 + c_2\,n)\,2^n}$ (mit beliebigen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$). Der Anteil ‚$3\,n$' führt — wir rechnen einmal mit einem *Störgliedansatz* — zum Ansatz $a_0 + a_1\,n$; der Anteil ‚2^n' erfordert den Ansatz $a_2\,n^2\,2^n$, da 2 doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist. Zur Bestimmung der Koeffizienten a_κ ist daher insgesamt (Superpositionsprinzip beachten!) mit dem $\underline{\text{Ansatz } y_n := a_0 + a_1\,n + a_2\,n^2\,2^n}$ in die DZG einzugehen:

$a_0 + a_1(n+2) + a_2(n+2)^2\,2^{n+2} - 4\left[a_0 + a_1(n+1) + a_2(n+1)^2\,2^{n+1}\right] + 4\left(a_0 + a_1\,n + a_2\,n^2\,2^n\right) \stackrel{!}{=} 3\,n + 2^n$. Die gesamte linke Seite vereinfacht sich zu $(a_0 - 2a_1) + a_1\,n + 8\,a_2\,2^n$, was auf $a_1 = 3$, $a_0 = 6$ und $a_2 = \frac{1}{8}$ führt. Die <u>allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet</u> demzufolge:

$$\boldsymbol{y_n = (c_1 + c_2\,n)\,2^n + 6 + 3\,n + \frac{1}{8}n^2\,2^n}\,.$$

(Die Rechnung hat gezeigt, daß es einfacher — und weniger fehleranfällig — ist, die beiden Inhomogenitäten getrennt zu behandeln und dann erst zu addieren!)

Zum Vergleich rechnen wir *mit der Operatormethode*: Nach (4) aus 8.7 ist $\varphi(S)\,n = n\,\varphi(1) + \varphi'(1) = n - 2$, also $\varphi(S)\,3n = 3n - 6$. (1) aus 8.7 liefert $\varphi(S)\,1 = 1$, zusammen also $\boldsymbol{\varphi(S)(3\,n + 6) = 3\,n}$. Nach (7) hat man noch $\boldsymbol{\varphi(S)^{-1}2^n} = \frac{2^{n-2}\,n^2}{1\cdot 2!} = \boldsymbol{\frac{1}{8}n^2\,2^n}$.

Rückblick

In diesem Kapitel wurde ein relativ kurzer Einblick in Differenzenrechnung und Differenzengleichungen gegeben. Im Vergleich zu den Differentialgleichungen sind hier Funktionen von diskreten, meist ganzzahligen, Argumenten gesucht.

Wichtige Anwendungsbereiche sind dynamische Prozesse, bei denen die Zeitvariable nur diskrete Werte (z.B. Tage oder Jahre) annimmt, zum Beispiel

— im ökonomischen Bereich — Wachstums- und Konjunkturüberlegungen („*Periodenanalyse*“).

Die Operatormethode hat sich dabei als zugkräftig für Theorie, Übersicht und praktisches Vorgehen erwiesen.

Wir sind nicht eingegangen auf ‚Qualitative Analyse‘ (Konvergenzverhalten, Gleichgewicht, Stabilität) und die Übertragung auf Systeme von (gekoppelten) Differenzengleichungen (z.B. Zwei–Länder–Außenhandelsmodell von [GOLDBERG]).

Kapitel 9

Funktionen mehrerer Variabler

Lernziel

In diesem Kapitel wird davon ausgegangen, daß Sie die einfachsten Grundbegriffe der *Linearen Algebra* (Vektorräume und ‚Rechnen' mit Vektoren) kennen oder sich parallel hierzu noch aneignen.

Zu Beginn des Kapitels werden einige Arbeitsdefinitionen (insbesondere *Normen* und damit in Abschnitt 9.3 dann Grenzwertbildungen) bereitgestellt, die als Grundlage für die weitere Beschäftigung mit Funktionen, die von mehr als nur einer Variablen abhängen, wichtig sind.

In Abschnitt 9.2 sehen wir uns Möglichkeiten der *Darstellung von Funktionen mehrerer Variabler* an. Insbesondere sollten Sie die verschiedenen achsenparallelen Schnitte, speziell etwa Höhenlinien, verstehen und handhaben können.

Der Abschnitt 9.3 mit den *Grenzwertbildungen* und *Stetigkeits*überlegungen hat weitgehend vorbereitenden Charakter für die folgenden Abschnitte.

Die *partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung* von Funktionen mehrerer Variabler müssen Sie routinemäßig berechnen können.

Der Satz von TAYLOR dient in dieser Darstellung neben kurzen Überlegungen zur *Fehlerfortpflanzung* hauptsächlich als Hilfsmittel für den Abschnitt 9.7.

Eine der für die Praxis wichtigsten Aufgaben ist die *Extremwertbestimmung.* Daher sollen Funktionen zweier Variabler an Hand der in 9.7 bereitgestellten Kriterien auf Extremwerte untersucht werden können.

Schließlich muß das Prinzip der „LAGRANGE*schen Multiplikatoren*" aus Abschnitt 9.8 zur Behandlung von *Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen* vertraut werden.

Funktionen, die von mehr als einer Variablen abhängen, treten auch in außermathematischen Anwendungen fast überall auf. Daher ist es notwendig, die bisher behandelte Differential- und Integralrechnung auch für solche Funktionen zu entwickeln.

Auf die Integralrechnung im mehrdimensionalen Fall gehe ich allerdings in diesem Buch *nicht* ein, da sie mathematisch deutlich anspruchsvoller ist. Der von diesem Buch unterforderte Leser — er dürfte unter dem angesprochenen Leserkreis einer wohl kleinen Minderheit angehören[1] — findet eine moderne und elegante Darstellung dazu in [HOFFMANN/SCHÄFKE].

9.1 Der $\mathbb{R}^n$ als normierter Vektorraum

Wir wollen in diesem Kapitel (für n und m aus $\mathbb{N}$) Abbildungen von Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ in den $\mathbb{R}^m$ betrachten.

Zwei Beispiele für Abbildungen dieser allgemeinen Art sind:

(B1) In einer *Wetterstation* werden u.a. Druck, Temperatur und Luftfeuchtigkeit in Abhängigkeit von den drei Ortskoordinaten (Längenkreis, Breitenkreis, Höhe) und der Zeit gemessen. So entsteht mit geeignetem $\mathfrak{D} \subset \mathbb{R}^4$ eine Abbildung:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{D} & & \mathbb{R}^3 \\ \cup\!\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\!\shortmid \\ \text{(Ortskoordinaten, Zeit)} & \longmapsto & \text{(Druck, Temperatur, Luftfeuchtigkeit)} \end{array}$$

(B2) Das Sozialprodukt P als Funktion von n Produktionsfaktoren; zum Beispiel die COBB-DOUGLAS-*Funktion*, eine makroökonomische Produktionsfunktion.

Einen *Vektor* x des $\mathbb{R}^n$ mit den *„Komponenten“* $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ schreiben wir in diesem Kapitel meist als *Spaltenvektor*

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =: (x_1, \ldots, x_n)^T,$$

wobei das ‚T‘ für *„transponiert“* steht und die rechte Form oft benutzt wird, um Platz zu sparen. Gelegentlich notieren wir diesen Vektor aber auch lax als entsprechenden *Zeilenvektor* $(x_1, \ldots, x_n)$.

Für $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$, $y = (y_1, \ldots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ seien:

$$x + y := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)^T, \quad \alpha x := (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)^T.$$

Damit ist — das dürfte aus der Linearen Algebra bekannt sein —

[1] Diese Formulierung ist nur als Trost für all diejenigen gedacht, die unter den mathematischen Anforderungen ‚leiden‘.

$(I\!R^n, +, \alpha.)$ ein $I\!R$-*Vektorraum.*

Für Grenzwerte, Stetigkeit und Differenzierbarkeit müssen wir ‚*Abstände*' zwischen Argumenten und Funktionswerten messen können. Dazu führen wir (als Verallgemeinerung des Betrages in $I\!R$ bzw. $C\!\!\!\!C$) *Normen* ein. Viele Überlegungen der ‚eindimensionalen Analysis' können samt ihren Beweisen mit Hilfe von Normen fast wörtlich auf die mehrdimensionale Situation übertragen werden.

Definition *Für* $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in I\!R^n$ *sei*

$$\|x\| := \|x\|_\infty := \max_{\nu=1}^{n} |x_\nu|$$

(1) Bemerkung $\| \; \|_\infty$ *ist „Norm" auf* $(I\!R^n, +, \alpha.)$, *das heißt:*

$\| \; \|_\infty : I\!R^n \longrightarrow [0, \infty[$ *mit*

$\|x\|_\infty = 0 \iff x = 0$ *(Definitheit)*

$\|x + y\|_\infty \le \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$ *(Dreiecksungleichung)*

$\|\alpha x\|_\infty = |\alpha| \, \|x\|_\infty$ *(für* $x, y \in I\!R^n$ *und* $\alpha \in I\!R$*).*

Beweis: $\| \; \|_\infty : I\!R^n \longrightarrow [0, \infty[$ und die Definitheit sind unmittelbar aus der Definition von $\| \; \|_\infty$ ablesbar. Für $\nu \in \{1, \dots, n\}$ gilt $|(x + y)_\nu| = |x_\nu + y_\nu| \le |x_\nu| + |y_\nu| \le \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$, also $\|x + y\|_\infty \le \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$. Zum Beweis der letzten Aussage sei Œ $\alpha \ne 0$: Hier zeigt $|\alpha x_\nu| = |\alpha| |x_\nu| \le |\alpha| \, \|x\|_\infty$ zunächst $\|\alpha x\|_\infty \le |\alpha| \, \|x\|_\infty$ $(*)$. Damit hat man $\|x\|_\infty = \left\|\frac{1}{\alpha} \alpha x\right\|_\infty \underset{(*)}{\le} \left|\frac{1}{\alpha}\right| \|\alpha x\|_\infty = \frac{1}{|\alpha|} \|\alpha x\|_\infty$, also $|\alpha| \, \|x\|_\infty \le \|\alpha x\|_\infty$. □

Neben $\| \; \|_\infty$ betrachtet man u.a. oft auch die Norm $\| \; \|_2$, die aus dem üblichen Skalarprodukt entsteht, definiert durch:

$$\|x\|_2 := \left(\sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu|^2 \right)^{1/2} .$$

$\| \; \|_2$ ist stärker an anschaulichen Gegebenheiten orientiert, hingegen ist $\| \; \|_\infty$ oft einfacher in der Handhabung. Daß es keinen wesentlichen Unterschied macht, mit welcher der beiden Normen man arbeitet, speziell für Dinge wie Grenzwertbildung, Stetigkeit und Differenzierbarkeit, belegt die nachfolgende

(2) Bemerkung $\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{n} \, \|x\|_\infty$ $(x \in I\!R^n)$

Beweis: Für $\lambda \in \{1, \dots, n\}$ gilt $|x_\lambda| = \left(|x_\lambda|^2\right)^{1/2} \le \left(\sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu|^2 \right)^{1/2} = \|x\|_2$, also $\|x\|_\infty \le \|x\|_2$.

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu|^2\right)^{1/2} \le \left(\sum_{\nu=1}^{n} \|x\|_\infty^2\right)^{1/2} = \left(n\,\|x\|_\infty^2\right)^{1/2} = \sqrt{n}\,\|x\|_\infty . \quad \square$$

9.2 ‚Geometrie' $I\!R$–wertiger Funktionen (Graphen, Niveaumengen, Vertikalschnitte)

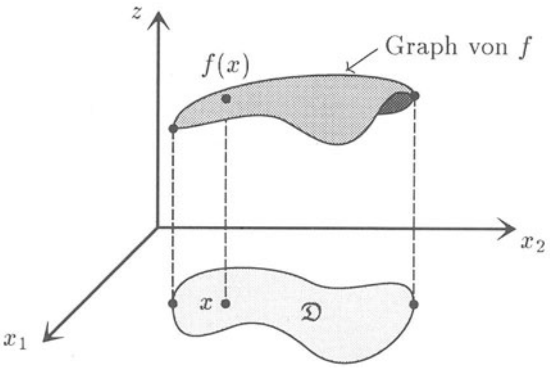
Entsprechend wie im eindimensionalen Fall definieren wir unter der

Annahme: $\parallel\ \emptyset \neq \mathfrak{D} \subset I\!R^n$ und $f : \mathfrak{D} \longrightarrow I\!R$ (für $n \in I\!N$ fest)

den *„Graphen" von* f durch

$$\begin{aligned} G(f) &:= \{(x, f(x)) \mid x \in \mathfrak{D}\} \quad (\subset I\!R^{n+1}) \\ &= \{(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n)) \mid (x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{D}\} \end{aligned}$$ [2]

Im Falle $\boxed{n = 2}$ läßt sich der Graph von f (für ‚schöne' Funktionen) als *‚Fläche'* im $I\!R^3$ deuten:



Vieles erläutern wir — aus didaktischen Gründen, an der Anschauung orientiert — nur für den Fall $n = 2$; der allgemeine Fall beinhaltet aber keine zusätzlichen prinzipiellen Schwierigkeiten. Wenn Sie sich Begriffe, Aussagen und Beweise im zweidimensionalen Raum ($I\!R^2$) stellvertretend klarmachen, entwickeln Sie ein gutes Verständnis für die allgemeine Situation.

Um genauere Aussagen über die ‚Gestalt' des Graphen zu bekommen, ist es hilfreich, sogenannte *„Niveaumengen"* zu betrachten:

Für $c \in I\!R$ heißt

$$\{x \in \mathfrak{D} \mid f(x) = c\}$$

„Niveaumenge" (von f zum Niveau c).

Im Fall $n = 2$ spricht man auch von *„Niveaulinien"* oder *„Höhenlinien"*, im

[2] Streng genommen, müßte man den $(n+1)$-Vektor $(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n))$ natürlich noch von dem Tupel $(x, f(x))$, bestehend aus einem n-Vektor und einer Zahl unterscheiden.

Fall $n = 3$ von *„Niveauflächen"*. Für den Fall $n = 2$ dürften Höhenlinien zum Beispiel von Wanderkarten her allen Lesern vertraut sein. Anschaulich bedeutet die Bildung von Höhenlinien, daß man *‚Horizontalschnitte'* durch die zugehörige Fläche macht und diese auf die (x_1, x_2)-Ebene projiziert.

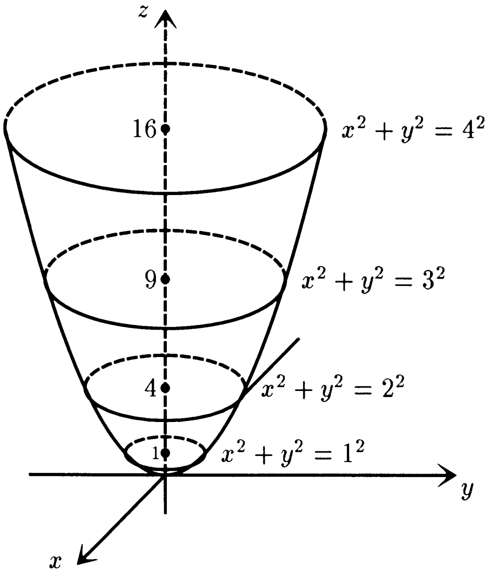
In den Wirtschaftswissenschaften haben die Höhenlinien spezielle Namen, zum Beispiel:

„Isoquanten"	bei Produktionsfunktionen,
„Isokostenlinie"	bei Kostenfunktionen und
„Indifferenzkurve"	bei Nutzenfunktionen.

(B1) $f : I\!R^2 \longrightarrow I\!R$ sei definiert durch $f(x,y) := x^2 + y^2$:
Die Niveaulinien sind dann gegeben durch:

$$\left\{ \begin{array}{cl} \emptyset & , \ c < 0 \\ \{0\} & , \ c = 0 \\ \{(x,y) \in I\!R^2 \mid x^2 + y^2 = c\} & , \ c > 0 \end{array} \right\}$$

Im Fall $c > 0$ ist die Höhenlinie hier also ein Kreis mit Radius $\sqrt{c}$. Dreidimensional gezeichnet, sieht das ungefähr so aus:

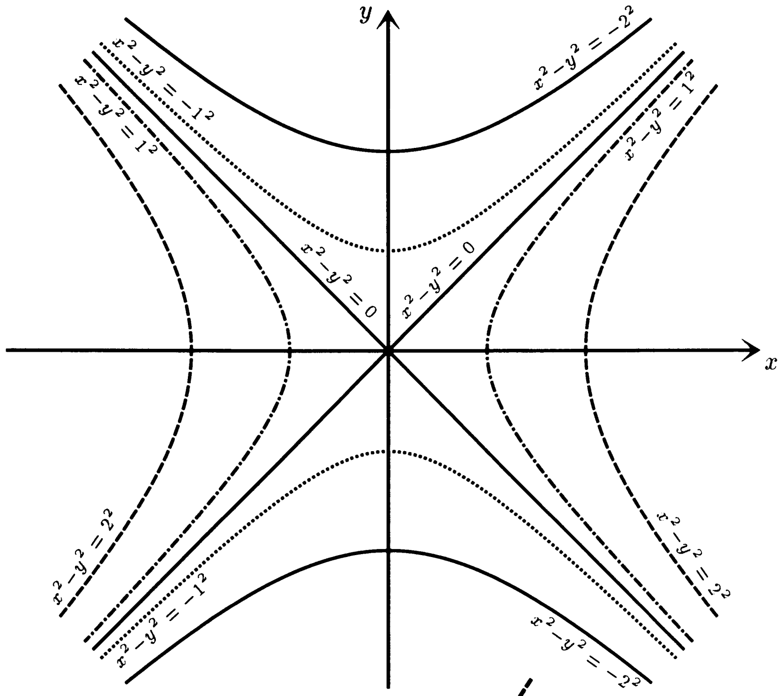


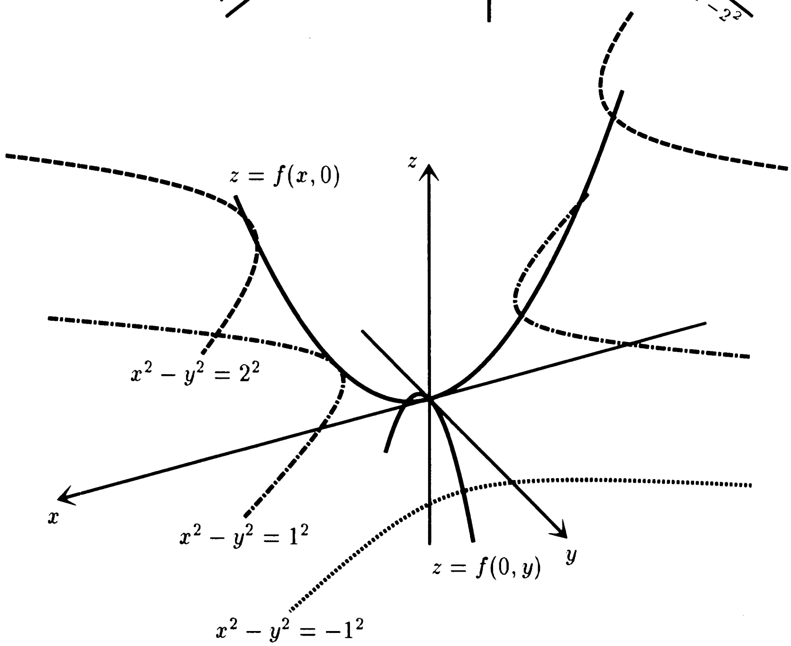
(B2) Für $f : I\!R^2 \longrightarrow I\!R$, definiert durch $f(x,y) := x^2 - y^2$, sind die Niveaulinien Hyperbeln. Dies zeigt die nächste Abbildung.
Ergänzt man dies durch die *„Vertikalschnitte"* $f(0,y) = -y^2$ und $f(x,0) = x^2$, so gewinnt man schon einen guten Überblick über den Graphen. Die anschließende dreidimensionale Zeichnung vermittelt mit den ‚Höhenlinien' und den angegebenen Vertikalschnitten einen ungefähren Eindruck.

Meistens betrachtet man nur achsenparallele *„Vertikalschnitte“*:

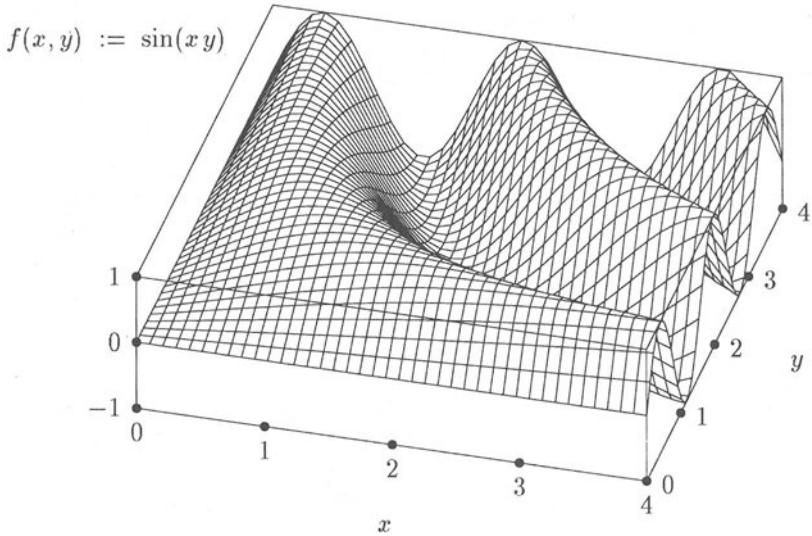
Mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ fest: $\quad z = f(\cdot, c_2)$, d.h. y konstant,

$\quad z = f(c_1, \cdot)$, d.h. x konstant.



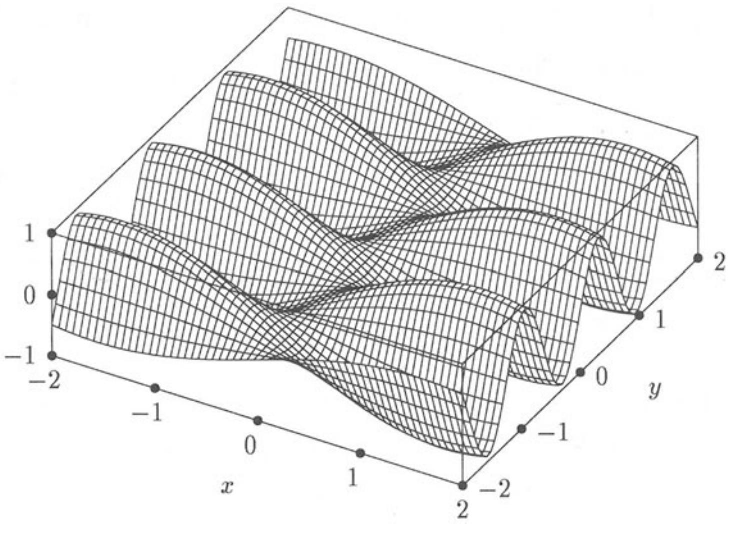


Mit modernen Hilfsmitteln, zum Beispiel den leistungsfähigen Programmen MATHEMATICA oder MAPLE, erhält man — mit zahlreichen Optionen für die Darstellung (Drehen, Stauchen, Schattierung, ...) — ansprechende Graphiken, die man als POSTSCRIPT-Datei abspeichern und nachbearbeiten kann. Drei — über MAPLE erstellte — Beispiele sollen dies verdeutlichen:



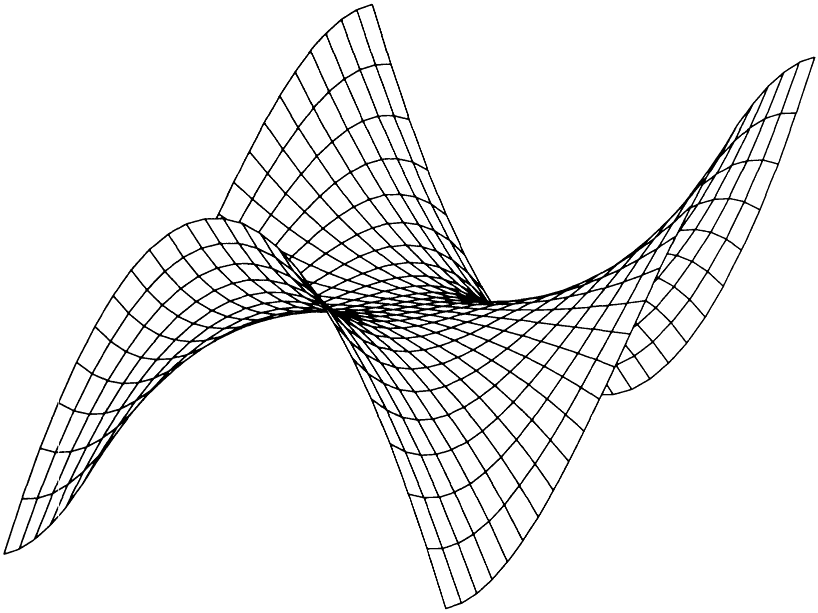
Die nächste Abbildung zeigt den Graphen von

$$f(x,y) := \sin(x) \cdot \sin(5y) \qquad \text{für } x,y \in \mathfrak{D} := [-2,2]^2 \ :$$



Ein beliebtes Beispiel ist der *„Affensattel“*, der Graph von

$$f(x,y) := y \cdot (3x^2 - y^2) :$$



Sie haben sicher gleich erkannt, warum dieses Gebilde „Affensattel“ genannt wird.[3]

9.3 Folgenkonvergenz, Grenzwert (von Funktionen) und Stetigkeit

<u>Annahmen:</u> $n, m \in \mathbb{N}$; $M \subset \mathfrak{D} \subset \mathbb{R}^n$, $f : \mathfrak{D} \longrightarrow \mathbb{R}^m$; $b \in \mathbb{R}^m$;
$\| \; \| := \| \; \|_\infty$; $(\mathbb{R}^n \ni)$ a sei *„Häufungspunkt“ zu* M,
d.h.: $\forall \varepsilon > 0 \quad \{x \in M : \|x - a\| < \varepsilon\}$ unendlich.

Auch hier bedeutet — wie in Abschnitt 3.4 — die Forderung, daß a *Häufungspunkt zu* M ist, daß a aus M heraus durch von a verschiedene Punkte beliebig gut approximierbar ist, oder wieder laxer ausgedrückt: Man kommt mit Punkten aus M beliebig gut an a heran.

Definition $f(x) \longrightarrow b \quad (M \ni x \longrightarrow a) :\Longleftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in M \quad 0 < \|x - a\| < \delta \Longrightarrow \|f(x) - b\| < \varepsilon$$

---

[3] Der im Sattel sitzende Affe möchte nicht nur seine Beine, sondern auch seinen Schwanz bequem unterbringen.

Wir lesen dies etwa als „*$f(x)$ konvergiert gegen b, wenn x aus M heraus gegen a strebt*“ und nennen b „*Grenzwert*“ (von $f(x)$ für $M \ni x \longrightarrow a$).

Ähnlich wie in Abschnitt 3.1 zeigt man die *Eindeutigkeit des Grenzwertes.* Wir benutzen wieder Schreibweisen wie zum Beispiel: $b = \lim\limits_{M \ni x \longrightarrow a} f(x)$.

Da $f(x)$ für $x \in \mathfrak{D}$ Element des $\mathbb{R}^m$ ist, kann f mit seinen „*Koordinatenfunktionen*“ $f_1, \ldots, f_m : \mathfrak{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ geschrieben werden:

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} \qquad (x \in \mathfrak{D}) .$$

Mit $b = (b_1., \ldots, b_m)^T$ gilt dann:

(1) $f(x) \longrightarrow b \ (M \ni x \to a) \iff \forall \mu \in \{1, \ldots, m\} \quad f_\mu(x) \longrightarrow b_\mu \ (\cdots)$

$\iff \|f(x) - b\| \longrightarrow 0 \ (M \ni x \to a).$

Beweis: Dies liest man unmittelbar aus der Abschätzung

$$|z_\mu - b_\mu| \leq \|z - b\|_\infty \leq \sum_{j=1}^{m} |z_j - b_j|$$

für $z = (z_1, \ldots, z_m)^T \in \mathbb{R}^m$ (und $\mu \in \{1, \ldots, m\}$) ab. □

Aufgrund von (1) kann man sich *für Grenzwert-Überlegungen* durch Betrachtung der Koordinatenfunktionen *auf den Fall $m = 1$ beschränken*!

Definiert man die *Konvergenz einer Folge von Vektoren* durch

$$x_k \longrightarrow x \quad (k \longrightarrow \infty) :\iff \|x_k - x\| \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty)$$

für $x, x_k \in \mathbb{R}^m$ $(k \in \mathbb{N})$, so zeigt die obige Abschätzung auch, daß eine *Vektorfolge genau dann konvergent ist, wenn alle Koordinatenfolgen konvergieren; der Grenzwert der Vektorfolge ist dabei gerade aus den Grenzwerten der einzelnen Koordinatenfolgen gebildet.*

Oft bezeichnet man Vektoren — zur besseren Unterscheidung von Elementen aus $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ — auch mit kleinen Frakturbuchstaben, schreibt also etwa $\mathfrak{x}$ statt x.

(B1) $\mathfrak{D} := \mathbb{R}^2 \setminus \{\binom{0}{0}\}$, $\quad f(\mathfrak{x}) := \dfrac{xy}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \qquad (\mathfrak{x} = (x,y)^T \in \mathfrak{D})$

Beh.: $f(\mathfrak{x}) \longrightarrow 0 \quad \left(\mathfrak{D} \ni \mathfrak{x} \longrightarrow (0,0)^T\right)$;

Beweis: $|f(\mathfrak{x}) - 0| = |f(\mathfrak{x})| \leq \dfrac{\|\mathfrak{x}\|^2}{\|\mathfrak{x}\|} = \|\mathfrak{x}\| \longrightarrow 0$. □

(B2) $\mathfrak{D} := \mathbb{R}^2 \setminus \{\binom{0}{0}\}$, $\quad f(\mathfrak{x}) := \dfrac{xy}{x^2 + y^2} \qquad (\mathfrak{x} = (x,y)^T \in \mathfrak{D})$

Beh.: Es existiert *kein* $b \in \mathbb{R}$ mit $f(\mathfrak{x}) \longrightarrow b \quad \left(\mathfrak{x} \longrightarrow (0,0)^T\right)$.

<u>Beweis:</u> Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gelten $f(x,0) = 0$ und $f(x,x) = \frac{1}{2}$. □

Wörtlich wie im eindimensionalen Fall zeigt man die *Beschreibung der Konvergenz von Funktionen durch Folgenkonvergenz* und die *Grundregeln* für das Rechnen mit Grenzwerten: Zum Beispiel sind — soweit bildbar — *Summen, Differenzen, Produkte, Skalarprodukte und Normen von konvergenten Funktionen konvergent, und der Grenzwert ergibt sich jeweils in der entsprechenden Weise aus den Eingangs-Grenzwerten.* Ich führe dies nicht weiter aus.

Definition *Für* $a \in \mathfrak{D}$: f „*in* a *stetig*" $:\Longleftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in \mathfrak{D} \quad \|x - a\| < \delta \Longrightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow f(x) \longrightarrow f(a) \quad (\mathfrak{D} \ni x \longrightarrow a)$$

Für die Definition der Stetigkeit wird die Forderung, daß a ein Häufungspunkt zu $\mathfrak{D}$ ist, *nicht* benötigt; ich wollte aber in diesem Abschnitt die Annahmen nicht noch ‚auffächern'.

Definition *Für* $T \subset \mathfrak{D}$: f „*stetig in* T" $:\Longleftrightarrow \forall z \in T$ f *stetig in* z

f „*stetig*" $:\Longleftrightarrow f$ *stetig in* $\mathfrak{D}$

Die wichtigste Grundregel für das Erkennen von Stetigkeit ist:

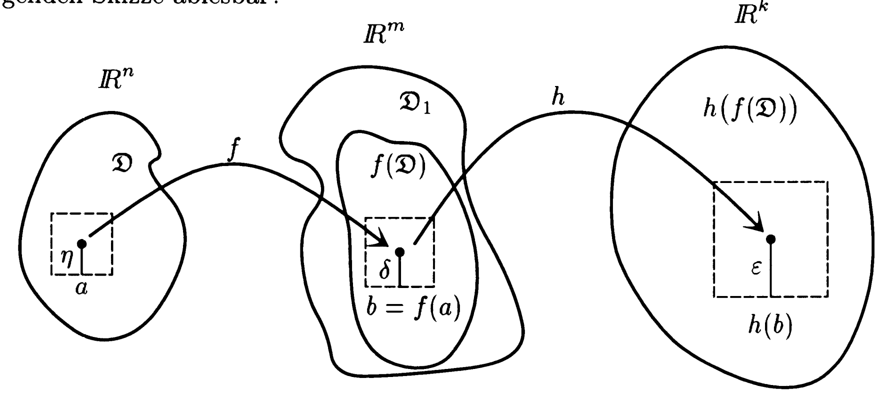
(2) Stetigkeit zusammengesetzter Funktionen

Vor.: $n, m, k \in \mathbb{N}$; $a \in \mathfrak{D} \subset \mathbb{R}^n$, $f : \mathfrak{D} \longrightarrow \mathbb{R}^m$;
$\mathfrak{D}_1 \subset \mathbb{R}^m$ *mit* $f(\mathfrak{D}) \subset \mathfrak{D}_1$, $h : \mathfrak{D}_1 \longrightarrow \mathbb{R}^k$;
$b := f(a)$; f *in* a *stetig,* h *in* b *stetig*

Beh.: $h \circ f$ $(: \mathfrak{D} \longrightarrow \mathbb{R}^k)$ *ist in* a *stetig.*

Die Voraussetzung $f(\mathfrak{D}) \subset \mathfrak{D}_1$ bedeutet, daß der Definitionsbereich von h den Bildbereich von f umfaßt. Dies läßt sich abschwächen; die Hintereinanderausführung muß nur sinnvoll sein, was durch Verkleinerung von $\mathfrak{D}$ zu erreichen ist, falls nur b zu $\mathfrak{D}_1$ gehört.

Der ganz einfache und ‚naturgemäße' Beweis ist schon aus der nachfolgenden Skizze ablesbar:



Bezeichnet man — in Verallgemeinerung der Überlegungen aus Abschnitt 1.10 — für $\ell \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{R}^\ell$ und $\varrho > 0$

$$\mathcal{U}_c^\varrho := \{x \in \mathbb{R}^\ell : \|x - c\| < \varrho\}$$

als „*ϱ-Umgebung von c*“, so kann der Kern der obigen Skizze wie folgt ausgedrückt werden: Die Elemente aus der η-Umgebung von a werden unter f in die δ-Umgebung von $b = f(a)$ und diese Bilder dann unter h in die ε-Umgebung von $h(b) = (h \circ f)(a)$ abgebildet.

Beweis: Zu $\varepsilon > 0$ existiert zunächst ein $\delta > 0$ derart, daß $\|h(z) - h(b)\| < \varepsilon$ für $z \in \mathfrak{D}_1$ mit $\|z - b\| < \delta$ gilt. Zu δ existiert nun ein $\eta > 0$, das $\|f(x) - f(a)\| < \delta$ für $x \in \mathfrak{D}$ mit $\|x - a\| < \eta$ sichert. Für solche x gilt also $\|h(f(x)) - h(f(a))\| < \varepsilon$. □

Die Aussage (1) liefert hier:

(3) *f stetig in a* $\iff$ $\forall \mu \in \{1, \dots, m\}$ *f_μ stetig in a*.

Aus (2) oder den oben aufgeführten Grundregeln für das Rechnen mit Grenzwerten erhält man u.a.:

(4) *Linearkombinationen, somit insbesondere Summen und Differenzen, und* — soweit bildbar — *Skalarprodukte und Normen stetiger Funktionen sind stetig.*

(B3) $b \in \mathbb{R}^m$; $f(x) := b$ $(x \in \mathbb{R}^n)$: *f ist* — trivialerweise — *stetig.*

(B4) *Jede lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ ist stetig.*

Beweis: A läßt sich durch eine (m,n)-Matrix $(\alpha_{\mu\nu})$ beschreiben: Für $x \in \mathbb{R}^n$ und $b := Ax$ ist

$$b_\mu = \sum_{\nu=1}^n \alpha_{\mu\nu} x_\nu \qquad (\mu = 1, \dots, m).$$

Hier kann abgeschätzt werden:

$|b_\mu| \le \sum_{\nu=1}^n |\alpha_{\mu\nu}|\,|x_\nu| \le \sum_{\nu=1}^n |\alpha_{\mu\nu}|\,\|x\|$, also $\|Ax\| \le K \cdot \|x\|$ mit

$$K := \max_{\mu=1}^m \sum_{\nu=1}^n |\alpha_{\mu\nu}| \qquad (\text{„Zeilennorm“}).$$

Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt somit $\|Ax - Ay\| = \|A(x-y)\| \le K \cdot \|x - y\|$, woraus man die Behauptung abliest. □

(B5) *Die „Projektionen“* $p_\nu : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \cup\!\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\!\shortmid \\ x & \longmapsto & x_\nu \end{array}$ *sind stetig;*

denn sie sind offensichtlich linear.

9.4 (‚Totale') Differenzierbarkeit, partielle Differenzierbarkeit

Wir beginnen mit einem einfachen **Beispiel**:

(B1) Für $\mathfrak{x} = (x,y)^T \in \mathfrak{D} := \mathbb{R}^2$ sei

$$f(\mathfrak{x}) := \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & , \text{ falls } \mathfrak{x} \neq \binom{0}{0} \\ 0 & , \text{ falls } \mathfrak{x} = \binom{0}{0} \end{array} \right\} .$$

Wir betrachten die Vertikalschnitte durch x- und y-Achse:
$h(x) := f(x,0) \quad (=0)$ und $g(y) := f(0,y) \quad (=0)$.
h und g sind in 0 — trivialerweise — differenzierbar mit

$$0 = h'(0) =: D_1 f(0,0) =: \tfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) =: f_x(0,0) ,$$
$$0 = g'(0) =: D_2 f(0,0) =: \tfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) =: f_y(0,0) .$$

Aber: f ist in $\binom{0}{0}$ *nicht* einmal stetig!! Denn das haben wir schon in Beispiel (B2) des Abschnitts 9.3 gesehen.

Das Konzept solcher ‚partiellen' Ableitungen liefert daher keinen allgemein ‚brauchbaren' Differenzierbarkeitsbegriff im mehrdimensionalen Fall! Wir müssen anders vorgehen:

<u>Annahmen:</u>
‖ $n, m \in \mathbb{N}$; $\mathfrak{D} \subset \mathbb{R}^n$; $f : \mathfrak{D} \longrightarrow \mathbb{R}^m$;
‖ $\mathbb{R}^n \ni a$ sei *‚innerer Punkt'* von $\mathfrak{D}$, d.h.:
‖ es existiert ein $\varrho > 0$ mit $\mathcal{U}_a^{\varrho} \subset \mathfrak{D}$.

Zur Erläuterung der folgenden Definition von *Differenzierbarkeit für Vektorfunktionen* erinnere ich zunächst an den aus Kapitel 4 bekannten Spezialfall $\boxed{n = m = 1}$: f ist in a genau dann differenzierbar mit Ableitung $A := f'(a)$, wenn $q(x) := \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \longrightarrow A$ für $\mathfrak{D} \setminus \{a\} \ni x \longrightarrow a$ gilt.

Dies ist *so* nicht verallgemeinerungsfähig, da $x - a$ für $n \geq 2$ ein *Vektor* ist, durch den man nicht dividieren kann!

Es gilt — im Falle der Differenzierbarkeit von f in a — $q(x) - A \longrightarrow 0$ und so auch $\varepsilon(x) := \big(q(x) - A\big) \dfrac{x - a}{|x - a|} \longrightarrow 0$ mit

$$(*) \qquad f(x) = f(a) + A(x - a) + |x - a| \, \varepsilon(x) .$$

(Die Funktion ε kann — durch stetige Ergänzung zu 0 in a — auf ganz $\mathfrak{D}$ definiert werden.)

Hat man andererseits $(*)$ mit $\varepsilon(x) \longrightarrow 0$, so ist f in a differenzierbar mit $f'(a) = A$; denn dann gilt:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - A = \frac{|x - a|}{x - a} \, \varepsilon(x) \longrightarrow 0 .$$

(Man vergleiche hierzu auch den abschließenden Satz aus Abschnitt 4.1.)

Soll diese Charakterisierung von Differenzierbarkeit auch im allgemeinen Fall entsprechend gelten, dann müssen wegen

$$\underbrace{f(x)}_{\in \mathbb{R}^m} = \underbrace{f(a)}_{\in \mathbb{R}^m} + f'(a)\,\underbrace{(x - a)}_{\in \mathbb{R}^n} + \underbrace{\|x - a\|}_{\in \mathbb{R}}\,\varepsilon(x)$$

$f'(a)$ eine *Abbildung* vom $\mathbb{R}^n$ in den $\mathbb{R}^m$ und $\varepsilon(x)$ ein Element des $\mathbb{R}^m$ sein. Das führt zu der

Definition *f heißt „in a differenzierbar" genau dann, wenn eine (m,n)-Matrix A und $\varepsilon : \mathfrak{D} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ mit $\varepsilon(x) \longrightarrow 0 \quad (x \longrightarrow a)$ so existieren, daß*

$$f(x) = f(a) + A(x - a) + \|x - a\|\,\varepsilon(x) \qquad (x \in \mathfrak{D}) \qquad \textit{gilt.}$$

Ohne Beweis notiere ich dazu zunächst:

(1) Bemerkung *Ist f in a differenzierbar, so ist das obige A eindeutig bestimmt.*

Wie im Spezialfall notieren wir $A =: f'(a)$ und lesen wieder *„Ableitung von f in a"*.

(2) Bemerkung *Ist f in a differenzierbar, so ist f in a stetig.*

Beweis: Nach (B4) aus Abschnitt 9.3 ist A stetig, somit strebt in der obigen Darstellung von $f(x)$ der Term $A(x - a)$ für $x \longrightarrow a$ gegen $A(0) = 0$. Auch der Summand $\|x - a\|\,\varepsilon(x)$ konvergiert gegen 0, da ja beide Faktoren dies tun. So gilt insgesamt $f(x) \longrightarrow f(a)$. □

Grundeigenschaften

(3) Differenzierbarkeit zusammengesetzter Funktionen (Kettenregel)

Vor.: (zusätzlich:) $k \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{D}_1 \subset \mathbb{R}^m$, $b := f(a)$ *innerer Punkt von* $\mathfrak{D}_1$,
$h : \mathfrak{D}_1 \longrightarrow \mathbb{R}^k$, $f(\mathfrak{D}) \subset \mathfrak{D}_1$;
f in a differenzierbar, h in $f(a)$ differenzierbar

Beh.: $h \circ f$ ist in a differenzierbar mit $\boxed{(h \circ f)'(a) = h'(f(a)) \cdot f'(a)}$.

Auch hier führe ich den — nicht besonders schwierigen — Beweis nicht aus. Bei der eingerahmten Formel sollte man sich aber zumindest klarmachen, daß $(h \circ f)'(a)$ eine (k,n)-Matrix ist, die sich durch Multiplikation der (m,n)-Matrix $f'(a)$ mit der (k,m)-Matrix $h'(f(a))$ ergibt.

(4) Koordinatenfunktionen $f(x) =: (f_1(x), \ldots, f_m(x))^T \ (x \in \mathfrak{D})$:
f in a differenzierbar $\iff \forall\, \mu \in \{1, \ldots, m\}$ *f_μ in a differenzierbar.*

Ist f in a differenzierbar, so gilt: $f'(a) = \begin{pmatrix} f_1'(a) \\ \vdots \\ f_m'(a) \end{pmatrix}$.

Beweis: Nach (1) aus Abschnitt 9.3 bedeutet die Konvergenz in $\mathbb{R}^m$ gerade koordinatenweise Konvergenz; das liefert leicht die Behauptung. □

Auch hier kann man sich daher — durch Betrachtung der Koordinatenfunktionen — *auf den Fall* $\boxed{m = 1}$ *beschränken!*

Erläuterung: Für die Koordinatenfunktion $f_\mu : \mathfrak{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ liefert $f_\mu'(a)$ eine $(1,n)$-Matrix, also einen *Zeilenvektor*, gerade die μ-te Zeile der (m,n)-Matrix $f'(a)$.

Für das **Erkennen von Differenzierbarkeit** und die **Berechnung von Ableitungen** sind die im Folgenden betrachteten *„partiellen Ableitungen“* nützlich:

Wir betrachten — nach (4) — Œ den Fall $\boxed{m = 1}$:

Annahme: $n \in \mathbb{N}$; $\mathfrak{D} \subset \mathbb{R}^n$, $f : \mathfrak{D} \longrightarrow \mathbb{R}$;
$\mathbb{R}^n \ni a$ sei innerer Punkt von $\mathfrak{D}$

Ist $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\|_2 = 1$ *(„Richtungsvektor“)*, so gilt $a + tv \in \mathfrak{D}$ mit einem geeigneten $\varrho > 0$ für $t \in\,]-\varrho, \varrho[$. Existiert für die Abbildung

$$]-\varrho, \varrho[\ \ni t \longmapsto f(a + tv) \in \mathbb{R}$$

die Ableitung im Punkt 0, so heißt *„f in Richtung v differenzierbar“* und die zugehörige Ableitung *„Richtungsableitung (von f in Richtung v)“*. Sie wird als $\boxed{\frac{\partial f}{\partial v}(a)}$ notiert.

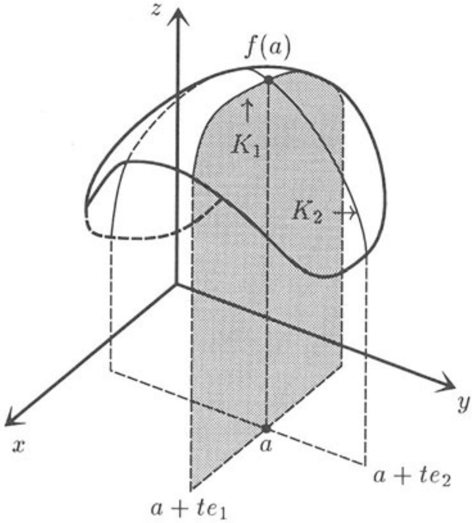
Auch hier läßt sich die Annahme, daß a innerer Punkt von $\mathfrak{D}$ sein soll, natürlich abschwächen zu $a + tv \in \mathfrak{D}$ für $t \in\,]-\varrho, \varrho[$ mit einem geeigneten $\varrho > 0$. Es soll nur in der durch v gegebenen Richtung von a aus ‚variiert‘ werden.

Für $n = 2$ läßt sich dieser Sachverhalt veranschaulichen: Die Ebene, die parallel zur (x,z)-Ebene durch $a =: (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ geht, schneidet aus der durch

$$z = f(x,y)$$

beschriebenen Fläche eine ‚Kurve‘ K_1 aus, den Graphen der partiellen Funktion $f(\,\cdot\,, \beta)$, bei der nur die x-Werte verändert werden. Oben ist also $v := e_1 := \binom{1}{0}$ zu setzen. Die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial e_1}$ gibt so das *lokale Änderungsverhalten von f parallel zur x-Achse.*

Entsprechend erhalten wir das Schaubild K_2 der partiellen Funktion $f(\alpha,\cdot)$, indem wir die durch $z = f(x,y)$ gegebene Fläche mit der Ebene durch a schneiden, die parallel zur (y,z)-Ebene ist. Für $e_2 := \binom{0}{1}$ beschreibt die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial e_2}(a)$ die Änderungsrate von $f(\alpha,\cdot)$ in β, gibt also die Steigung der Kurve K_2 in $f(a)$.



(5) Bemerkung *Ist f in a differenzierbar, so ist f in a in jeder Richtung v differenzierbar, und es gilt:*

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial v}(a) = f'(a)v}\,.$$

<u>Beweis:</u> Die Funktion $]-\varrho,\varrho[\ \ni t \longmapsto a + tv \in I\!R^n$ hat (in 0) die Ableitung v. So liefert die Kettenregel die Behauptung. □

Definition *Ist f in a in Richtung des ν-ten Einheitsvektors e_ν differenzierbar, dann heißt „f in a (nach der ν-ten Variablen) partiell differenzierbar"; der Wert wird als* $\boxed{D_\nu f(a)}$ *oder* $\boxed{f_{x_\nu}(a)}$ *oder* $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_\nu}(a)}$ *notiert* $(\nu = 1,\ldots,n)$.

(Natürlich wird bei den beiden letzten Notierungsweisen davon ausgegangen, daß die Variablenbezeichnung $x = (x_1,\ldots,x_n)^T$ ist.)

Offenbar erhält man die ν-te partielle Ableitung von f in a, indem man die Argumente a_κ für $\kappa \in \{1,\ldots,n\}\setminus\{\nu\}$ konstant hält und die gewöhnliche Ableitung nach der einen Variablen x_ν an der Stelle a_ν bildet; denn zum

Beispiel ist $a + te_1 = (a_1 + t, a_2, \dots, a_n)^T$.

(B2) $\mathfrak{D} := \{(x,y) \in I\!R^2 \mid y \neq 0\}$, $f(x,y) := \exp\left(\frac{x}{y}\right)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha,\beta) = \frac{1}{\beta}\exp\left(\frac{\alpha}{\beta}\right), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha,\beta) = -\frac{\alpha}{\beta^2}\exp\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$$

(6) Bemerkung *Ist f in a differenzierbar, so gilt nach (5)*

$$f'(a)e_\nu = D_\nu f(a) \quad (\nu = 1, \dots, n), \text{ also}$$

$$\boxed{f'(a) = \left(D_1 f(a), \dots, D_n f(a)\right)} .$$

Andererseits folgt nach (B1) aus der Existenz aller partiellen Ableitungen *nicht* einmal die Stetigkeit (also erst recht nicht die Differenzierbarkeit)! Wandelt man die Funktion aus (B1) noch geringfügig ab, so erhält man eine Abbildung, die an einer Stelle sogar in allen Richtungen differenzierbar ist, ohne aber dort stetig zu sein (vgl. dazu Übungsaufgabe (3)).

Die Leistungsfähigkeit partieller Ableitungen ist also sehr begrenzt, sie beschreiben — für $n = 2$ — nur das Verhalten in x- bzw. y-Richtung. Wir wollen aber das Änderungsverhalten beschreiben, wenn x und y *gleichzeitig* beliebig variieren; das leistet die eingeführte allgemeine Ableitung, die zur Unterscheidung von den partiellen Ableitungen gelegentlich auch *„totale Ableitung"* genannt wird.

Wenn man in einer Berglandschaft nur weiß, wie der Weg zum Gipfel genau in Nord- und genau in Ost-Richtung verläuft, so weiß man noch sehr wenig über den Zugang auf einem beliebigen anderen Weg!

(7) *Ist f in a nach allen Variablen partiell differenzierbar, dann wird*

$$\begin{pmatrix} D_1 f(a) \\ \vdots \\ D_n f(a) \end{pmatrix} =: \operatorname{grad} f(a) =: \nabla f(a) \quad \text{als „Gradient von } f \text{ in } a\text{"}$$

bezeichnet. (Das neue Zeichen ∇ wird ‚Nabla' gelesen.)

Ist f *in* a sogar *differenzierbar*, dann gilt also

$$\operatorname{grad} f(a) = f'(a)^T ,$$

und für einen Richtungsvektor $v \in I\!R^n$ (mit $\|v\|_2 = 1$) hat man

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) \underset{(5)}{=} f'(a)v = v \cdot \operatorname{grad} f(a) ,$$

wobei rechts mit dem Punkt angedeutet ist, daß das Skalarprodukt zu bilden ist!

$\left\|\frac{\partial f}{\partial v}(a)\right\|_2$ wird also (falls $\frac{\partial f}{\partial v}(a) \neq 0$) genau dann maximal (siehe Lineare Algebra!), wenn v parallel zu $\operatorname{grad} f(a)$ ist. *Die Richtung des*

Gradienten liefert also die Richtung des maximalen Wachstums von f:

$$\|\text{grad } f(a)\|_2 \; : \quad \textit{maximale Richtungsableitung.}$$

Von großer Bedeutung für die **praktische Berechnung der Ableitung** und für den **Nachweis der Differenzierbarkeit** ist der folgende

(8) Satz *Vor.:* $n, m \in \mathbb{N}$; $a \in \mathfrak{D} \subset \mathbb{R}^n$; $\varepsilon > 0$ *mit* $\mathcal{U}_a^\varepsilon \subset \mathfrak{D}$;

$$\begin{array}{rcl} f : \mathfrak{D} & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ \cup\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\shortmid \\ x & \longmapsto & (f_1(x), \dots, f_m(x))^T \end{array}$$

$D_\nu f_\mu$ *existiert in* $\mathcal{U}_a^\varepsilon$ $\quad (\nu = 1, \dots, n;\ \mu = 1, \dots, m)$

$D_\nu f_\mu$ *in* a *stetig* $\quad (\nu = 1, \dots, n;\ \mu = 1, \dots, m)$

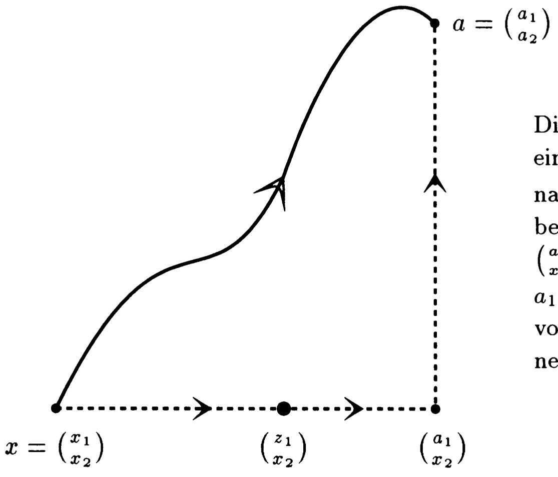
Beh.: f *ist in* a *differenzierbar mit*

$$f'(a) = \begin{pmatrix} D_1 f_1(a) & \cdots & D_n f_1(a) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ D_1 f_m(a) & \cdots & D_n f_m(a) \end{pmatrix}$$

Die Matrix in (8) heißt „JACOBI*sche Funktionalmatrix*". (Die Voraussetzungen von (8) lassen sich noch abschwächen, wie der nachfolgende Beweis, den ich für mathematisch besonders interessierte Leser aufgeschrieben habe, zeigt.)

Beweis: Nach (4) kann zum Beweis Œ $\boxed{m = 1}$ vorausgesetzt werden; zum besseren Verständnis beschränke ich mich noch auf den Fall $\boxed{n = 2}$.

Es seien $a = \binom{a_1}{a_2}$ und $x = \binom{x_1}{x_2} \in \mathcal{U}_a^\varepsilon$.



Die Idee des Beweises ist recht einfach: Statt beliebig von $\binom{x_1}{x_2}$ nach $\binom{a_1}{a_2}$ zu gehen, geht man bei konstantem x_2 zunächst zu $\binom{a_1}{x_2}$ und dann bei konstantem a_1 zu $\binom{a_1}{a_2}$; wegen der Stetigkeit von $D_1 f$ macht man dabei keinen ‚großen' Fehler.

$$\left| f(x) - f(a) - \big(D_1 f(a), D_2 f(a)\big)(x - a) \right| =$$

$$\left| f\tbinom{x_1}{x_2} - f\tbinom{a_1}{a_2} - D_1 f\tbinom{a_1}{a_2}(x_1 - a_1) - D_2 f\tbinom{a_1}{a_2}(x_2 - a_2) \right| \le$$

$\left|f\binom{x_1}{x_2} - f\binom{a_1}{x_2} - D_1 f\binom{a_1}{a_2}(x_1 - a_1)\right| + \left|f\binom{a_1}{x_2} - f\binom{a_1}{a_2} - D_2 f\binom{a_1}{a_2}(x_2 - a_2)\right|$.
Nach dem MWS existiert ein z_1 zwischen x_1 und a_1 mit
$f\binom{x_1}{x_2} - f\binom{a_1}{x_2} = D_1 f\binom{z_1}{x_2}(x_1 - a_1)$. Insgesamt kann daher abgeschätzt werden durch $\left|D_1 f\binom{z_1}{x_2} - D_1 f\binom{a_1}{a_2}\right| |x_1 - a_1| + \varepsilon(x_2)|x_2 - a_2|$ mit $\varepsilon(x_2) \longrightarrow 0$ für $x_2 \longrightarrow a_2$, vergröbert also durch
$\left(\left|D_1 f\binom{z_1}{x_2} - D_1 f\binom{a_1}{a_2}\right| + \varepsilon(x_2)\right)\|x - a\|$. Damit hat man, da der gesamte Ausdruck in der Klammer wegen der vorausgesetzten Stetigkeit von $D_1 f$ mit $x \longrightarrow a$ gegen 0 strebt, die Behauptung. □

In Abschnitt 4.1 wurde die *Tangente* wie folgt definiert:
Für $-\infty < \alpha < a < \beta < \infty$ und $f :]\alpha, \beta[\longrightarrow \mathbb{R}$ in a differenzierbar:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a) \qquad \textit{Tangente zu } f \textit{ in } a\ .$$

Entsprechend seien: $\Big\|$ $\mathfrak{D} \subset \mathbb{R}^2$, a innerer Punkt von $\mathfrak{D}$, $f : \mathfrak{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ in a differenzierbar. Also:
$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \|x - a\|\varepsilon(x)$ mit $\varepsilon(x) \longrightarrow 0$ für $x \longrightarrow a$.

Hier wird $\boxed{z = f(a) + f'(a)(x - a) = f\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + f'\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 \end{pmatrix}}$

als *„Tangentialebene“* bezeichnet.

Im Falle $\mathbb{N} \ni n > 2$ definiert man ganz analog noch ‚Tangentialhyperflächen‘, auf die ich jedoch nicht eingehe.

(B3) $\mathfrak{D} := \mathbb{R}^2$, $f\binom{x_1}{x_2} := x_1^2 x_2 + x_2^3$, $a = \binom{a_1}{a_2} := \binom{2}{3}$:
$f(a) = 2^2 \cdot 3 + 3^3 = 39$,
$D_1 f\binom{x_1}{x_2} = 2x_1 x_2$, $D_2 f\binom{x_1}{x_2} = x_1^2 + 3x_2^2$.
Diese beiden partiellen Ableitung existieren überall und sind stetig. Nach (8) ist daher f differenzierbar mit:
$f'(a) = (D_1 f(a), D_2 f(a)) = (12, 31)$ und somit $\nabla f(a) = \binom{12}{31}$.
$z = f(a) + f'(a)(x - a) = 39 + 12(x_1 - 2) + 31(x_2 - 3) = -78 + 12x_1 + 31x_2$ ist hier die *Tangentialebene.*

9.5 Partielle Ableitungen höherer Ordnung, Satz von SCHWARZ

Es seien: $\|$ $n, p \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{D} \subset \mathbb{R}^n$, $f : \mathfrak{D} \longrightarrow \mathbb{R}$; $k, \ell \in \{1, \ldots, n\}$.
$\mathfrak{D}' := \{x \in \mathfrak{D} \mid f$ in x nach der k-ten Variablen partiell differenzierbar$\}$

Ist für $a \in \mathfrak{D}'$ die Abbildung $D_k f : \mathfrak{D}' \longrightarrow \mathbb{R}$ in a partiell nach der ℓ-ten Variablen differenzierbar, dann bezeichnen wir diese partielle Ableitung mit

$\boxed{D_\ell D_k f(a)}$, $\boxed{\frac{\partial}{\partial x_\ell}\frac{\partial}{\partial x_k} f(a)}$, $\boxed{f_{x_k x_\ell}(a)}$ oder $\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x_\ell \partial x_k}(a)}$, für $k = \ell$ auch $\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x_\ell^2}(a)}$, und sprechen in Abgrenzung von den *„partiellen Ableitungen 1. Ordnung"* des vorangehenden Abschnitts von *„partiellen Ableitungen der Ordnung 2"*, weil zweimal differenziert wird.

Entsprechend seien — genauer müßte man das natürlich induktiv machen — *„partielle Ableitungen der Ordnung p"* für $p \geq 3$ definiert. Zu partiellen Ableitungen der Ordnung $p \geq 2$ sagt man auch *„höhere partielle Ableitungen"* oder *„partielle Ableitungen höherer Ordnung"*.

Es sei jetzt noch $\|$ $\mathfrak{D}$ *offen*,

das heißt: *Jeder* Punkt aus $\mathfrak{D}$ ist innerer Punkt von $\mathfrak{D}$.

Bezeichnung

$$C^p(\mathfrak{D}) := \left\{ f \;\middle|\; f : \mathfrak{D} \longrightarrow \mathbb{R} \;:\; \begin{array}{l}\text{Alle partiellen Ableitungen bis zur}\\ \text{Ordnung } p \text{ existieren und sind stetig.}\end{array} \right\}$$

Die Berechnung von höheren partiellen Ableitungen wird wesentlich erleichtert durch den folgenden

Satz von SCHWARZ *Vor.:* $f \in C^2(\mathfrak{D})$; $\nu, \mu \in \{1, \ldots, n\}$

Beh.: $D_\nu D_\mu f = D_\mu D_\nu f$

Als *Folgerung* ergibt sich induktiv sofort (lax formuliert):

Ist f ‚hinreichend oft' differenzierbar, so sind alle partiellen Ableitungen unabhängig von der Reihenfolge der Differentiationen!

Auch die Voraussetzungen des Satzes von SCHWARZ lassen sich abschwächen, wie der nachfolgende Beweis, der wieder nur für mathematisch besonders interessierte Leser gedacht ist, zeigt:

Beweis: Œ $\boxed{n = 2}$; zu $\mathfrak{a} = \binom{a}{b} \in \mathfrak{D}$ existiert ein $\varepsilon > 0$ derart, daß $\mathcal{U}_{\mathfrak{a}}^{\varepsilon} \subset \mathfrak{D}$. Für $h, k \in \mathbb{R}$ mit $0 < |h|, |k| < \varepsilon$ sei

$$F(h) := \frac{1}{h}\left(D_2 f\binom{a+h}{b} - D_2 f\binom{a}{b}\right) \qquad (\longrightarrow D_1 D_2 f(\mathfrak{a}) \quad (h \longrightarrow 0))$$

Es ist $$F(h) = \lim_{k \longrightarrow 0} \frac{1}{hk}\left\{f\binom{a+h}{b+k} - f\binom{a+h}{b} - f\binom{a}{b+k} + f\binom{a}{b}\right\} \tag{1}$$

Nach dem MWS — angewendet auf $g(x) := f\binom{x}{b+k} - f\binom{x}{b}$ $(|x - a| < \varepsilon)$ — existiert ein $0 < \alpha < 1$ mit

$$\{\cdots\} = g(a+h) - g(a) = g'(a + \alpha h)h = D_1 f\binom{a+\alpha h}{b+k}h - D_1 f\binom{a+\alpha h}{b}h.$$

Wiederum nach dem MWS folgt die Existenz eines $0 < \beta < 1$ mit

$\{\cdots\} \;=\; r.S. \;=\; D_2D_1f\left(\begin{smallmatrix}a+\alpha h\\ b+\beta k\end{smallmatrix}\right)kh \qquad (2)$. Zusammen:

$$D_1D_2f(\mathfrak{a}) \;=\; \lim_{h\longrightarrow 0} F(h) \underset{(1),(2)}{=} \lim_{h\longrightarrow 0}\lim_{k\longrightarrow 0} D_2D_1f\left(\begin{smallmatrix}a+\alpha h\\ b+\beta k\end{smallmatrix}\right) \;=\; D_2D_1f(\mathfrak{a}),$$

wobei die letzte Gleichung aus der Stetigkeit von D_2D_1 folgt. □

(B1) $\boxed{f(x,y) := xe^y + yx^2}$ $\quad ((x,y)\in\mathfrak{D} := I\!R^2)$

$$\begin{array}{llll} D_1f(x,y) = e^y + 2xy\,, & D_2f(x,y) = xe^y + x^2\,, \\ D_2D_1f(x,y) = e^y + 2x\,, & D_1D_2f(x,y) = e^y + 2x\,. \end{array}$$

Hier hat man also $D_1D_2f = D_2D_1f$, was ohne Rechnung aus dem Satz von SCHWARZ folgt, wenn *vorher* $f\in C^2(\mathfrak{D})$ nachgewiesen ist.

Daß die Voraussetzung $f\in C^2(\mathfrak{D})$ im Satz von SCHWARZ nicht ersatzlos gestrichen werden kann, zeigt das folgende Standardbeispiel:

(B2) $\boxed{f(x,y) := \begin{cases} xy\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\,, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0\,, & x=y=0 \end{cases}}$ $\quad ((x,y)\in\mathfrak{D} := I\!R^2)$

Man bestätigt leicht die Existenz von D_1f und D_2f mit $D_1f(0,y) = -y \quad (y\in I\!R)$ und $D_2f(x,0) = x \quad (x\in I\!R)$.

Daraus folgt dann

$$D_2D_1f(0,0) = \lim_{0\neq h\longrightarrow 0} \frac{D_1f(0,h) - D_1f(0,0)}{h} = -1 \quad \text{und}$$

$$D_1D_2f(0,0) = \lim_{0\neq h\longrightarrow 0} \frac{D_2f(h,0) - D_2f(0,0)}{h} = 1\,.$$

9.6 Satz von TAYLOR, Fehlerfortpflanzung, HESSEsche Matrix

Satz von TAYLOR (mit Restglied nach LAGRANGE)

Vor.: $n\in I\!N$; $I\!R^n \supset \mathfrak{D}$ *offen;* $m\in I\!N_0$, $f\in C^{m+1}(\mathfrak{D})$;
$a, x\in\mathfrak{D}$ *mit* $\overline{ax} := \{a + t(x-a) \,:\, 0\leq t\leq 1\} \subset \mathfrak{D}$

Beh.: Es existiert ein $c\in\overline{ax}\setminus\{a,x\}$ *mit*

$$f(x) \;=\; \sum_{\mu=0}^{m} \frac{1}{\mu!}\big((x-a)\cdot\nabla\big)^{\mu} f(a) \;+\; \frac{1}{(m+1)!}\big((x-a)\cdot\nabla\big)^{m+1} f(c)\,.$$

Der Anteil
$$\sum_{\mu=0}^{m} \frac{1}{\mu!}\big((x-a)\cdot\nabla\big)^{\mu} f(a)$$
wird wieder *„m-tes* TAYLOR*-Polynom zu f um a“* und ähnlich genannt.

Zur Abkürzung ist dabei für $h \in \mathbb{R}^n$ und $y \in \overline{ax}$ die Bezeichnung

$$(h \cdot \nabla)^\mu f(y) := \begin{cases} (h_1 D_1 + \cdots + h_n D_n)^\mu f(y) \ , & \mu \in \mathbb{N} \\ f(y) & , \mu = 0 \end{cases}$$

benutzt worden, wobei der Ausdruck $(h_1 D_1 + \cdots + h_n D_n)^\mu$ mit den ‚Differentialoperatoren' D_ν — unter Berücksichtigung der Folgerung aus dem Satz von SCHWARZ — einfach wie bei Zahlen auszurechnen ist.

Beweisskizze: Mit einem $\varepsilon > 0$, das $a + t(x-a) \in \mathfrak{D}$ für $-\varepsilon < t < 1 + \varepsilon$ sichert, kann für die Funktion $g(t) := f(a + t(x-a))$ der entsprechende speziellere Satz (2) aus Abschnitt 6.2 herangezogen werden. Unter Beachtung von $g(1) = f(x)$ und $g(0) = f(a)$ folgt mit der Kettenregel dann leicht die Behauptung. Ich will nur den Beginn dieser Überlegungen noch etwas ausführen: g ist differenzierbar mit $g'(t) = f'(a + t(x-a))(x-a) = \sum_{\nu=1}^{n} D_\nu f(a + t(x-a))(x_\nu - a_\nu) = (x-a) \cdot \nabla f(a + t(x-a))$. Der spezielle Satz aus Abschnitt 6.2 (bzw. der MWS) liefert mit einem $0 < \theta < 1$ und $c := a + \theta(x-a)$:

$$f(x) - f(a) = g(1) - g(0) = g'(\theta)(1-0) = g'(\theta) = (x-a) \cdot \nabla f(c) \ . \quad \square$$

(1) Folgerung *Für* $\boxed{m = 0}$ *liefert der Satz eine Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes. Für ein geeignetes* $c \in \overline{ax} \setminus \{a, x\}$ *gilt:*

$$f(x) = f(a) + (x-a) \cdot \nabla f(c)$$

Da so aus einer Abschätzung der Ableitung eine Aussage über die Differenz der Funktionswerte gewonnen werden kann, dient diese Folgerung unter anderem zur **Fehlerrechnung**, wie folgendes Beispiel verdeutlicht:

(B1) Die *Viskosität* η *einer Flüssigkeit* soll über die Formel

$$K = 6\pi \eta v r$$

bestimmt werden. Meßergebnisse seien $r_0 = 3\,\mathrm{cm}$, $v_0 = 5\,\mathrm{cm/sec}$ und $K_0 = 1000\,\mathrm{dyn}$. Über die möglichen Meßfehler sei bekannt: $|\Delta r| \leq 0.1\,\mathrm{cm}$, $|\Delta v| \leq 0.003\,\mathrm{cm/sec}$ und $|\Delta K| \leq 5\,\mathrm{dyn}$. Mit welcher Genauigkeit läßt sich η bestimmen?

Mit $\mathfrak{x} = (r, v, K)^T$ gilt $\eta = \dfrac{K}{6\pi v r} =: f(\mathfrak{x})$. Als Definitionsbereich kann die offene Menge $\mathfrak{D} := \,]0, \infty[^3 \subset \mathbb{R}^3$ gewählt werden. Für das Meßergebnis $\mathfrak{a} := (3, 5, 1000)^T \in \mathfrak{D}$ gilt $f(\mathfrak{a}) = \dfrac{1000}{6\pi 3 \cdot 5} = \dfrac{100}{9\pi}$. Der ‚richtige' Wert ist $\mathfrak{x} := \mathfrak{a} + \mathfrak{d}$ mit $\mathfrak{d} := (\Delta r, \Delta v, \Delta K)^T$, wobei $|\Delta r| \leq 0.1$, $|\Delta v| \leq 0.003$ und $|\Delta K| \leq 5$. Für die Ableitung von f ergibt sich:

$$f'(\mathfrak{x}) = \frac{1}{6\pi}\Big(-\frac{K}{r^2 v}, -\frac{K}{rv^2}, \frac{1}{rv}\Big) = \frac{1}{6\pi r v}\Big(-\frac{K}{r}, -\frac{K}{v}, 1\Big).$$

Nach (1) existiert ein $0 < \theta < 1$ so, daß

$$f(\mathfrak{x}) - f(\mathfrak{a}) = f(\mathfrak{a}+\mathfrak{d}) - f(\mathfrak{a}) = f'(\mathfrak{a}+\theta\mathfrak{d})\mathfrak{d} =$$

$$\frac{1}{6\pi(3+\theta\Delta r)(5+\theta\Delta v)}\Big\{-(1000+\theta\Delta K)\Big(\frac{\Delta r}{3+\theta\Delta r}+\frac{\Delta v}{5+\theta\Delta v}\Big)+\Delta K\Big\}.$$

Somit kann man abschätzen:

$$|f(\mathfrak{x}) - f(\mathfrak{a})| < \frac{1}{6\pi(3-0.1)(5-0.003)}\Big\{1005\big(\tfrac{0.1}{3-0.1}+\tfrac{0.003}{5-0.003}\big)+5\Big\}$$

$$\leq 0.1474 \left[\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}\cdot\mathrm{sec}}\right]$$

Bei Messungen ist oft eine ungefähre Fehlerabschätzung *vorweg* sinnvoll, weil so erkannt wird, bei welchen Meßgrößen Eingangsfehler besonders verstärkt werden und die daher mit besonderer Präzision zu messen sind. Die durchgeführte Rechnung zeigt, daß dazu die Kenntnis der Größenordnung der einzelnen partiellen Ableitungen genügt.

Meist reicht auch im nachhinein eine *vereinfachte Fehlerrechnung*, bei der statt der Ableitung an der (unbekannten) Zwischenstelle $\mathfrak{a} + \theta(\mathfrak{x} - \mathfrak{a})$ die partiellen Ableitungen an der Stelle $\mathfrak{a}$ genommen oder lediglich abgeschätzt werden.

(2) Folgerung *Für* $\boxed{m = 1}$ *und* $h := x - a$ *liefert der Satz mit einem geeigneten* $c \in \overline{ax} \setminus \{a, x\}$ *:*

$$f(x) = f(a) + h \cdot \nabla f(a) + \frac{1}{2}(h \cdot \nabla)^2 f(c)\,.$$

Mit der „HESSE*schen Matrix*“

$$H_f(c) := \big(D_\nu D_\mu f(c)\big)_{(n,n)}$$

kann der Term $(h \cdot \nabla)^2 f(c) = \sum\limits_{\nu=1}^{n} \sum\limits_{\mu=1}^{n} h_\nu h_\mu D_\nu D_\mu f(c)$ umgeschrieben werden zu

$$h^T H_f(c)\, h\,.$$

Diese Matrix $H_f(c)$ wird im nächsten Abschnitt bei der Extremwertbestimmung von Bedeutung sein. Nach dem Satz von SCHWARZ ist sie *symmetrisch.*

9.7 Extremwerte (Notwendige und hinreichende Bedingungen)

Annahme: $\| \; n \in \mathbb{N};\; a \in \mathfrak{D} \subset \mathbb{R}^n,\; f : \mathfrak{D} \longrightarrow \mathbb{R}$

Die **Bezeichnungen** für Extrema können aus den Abschnitten 4.4 und 4.11 ‚übernommen' werden: *f hat in a ein*

$$
\begin{aligned}
&\text{„\textit{lokales Minimum}"} :\Longleftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \ \forall x \in \mathcal{U}_a^\varepsilon \cap \mathfrak{D} \ \ f(x) \geq f(a) \\
&\text{„\textit{striktes lokales Minimum}"} :\Longleftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \ \forall x \in \mathcal{U}_a^\varepsilon \cap \mathfrak{D} \setminus \{a\} \ \ f(x) > f(a) \\
&\text{„\textit{globales Minimum}"} :\Longleftrightarrow \forall x \in \mathfrak{D} \ \ f(x) \geq f(a) \\
&\text{„\textit{(} $\cdots$ \textit{) Maximum}"} :\Longleftrightarrow \ -f \text{ hat in } a \text{ ein } (\cdots) \text{ Minimum} \\
&\text{„\textit{(} $\cdots$ \textit{) Extremum}"} :\Longleftrightarrow \ (\cdots) \text{ Minimum oder } (\cdots) \text{ Maximum}
\end{aligned}
$$

Statt ‚lokales' sagt man oft auch *„relatives"* und *„absolutes"* statt ‚globales'.

Ich erinnere noch einmal daran, daß die Suche nach Extremwerten von der Fragestellung her zunächst *nichts* mit Differenzierbarkeit zu tun hat. Doch *wenn* die zu untersuchende Funktion differenzierbar ist, liefern Ableitungen — wie im Spezialfall $n = 1$ — ein häufig zugkräftiges Hilfsmittel. Gewöhnen Sie sich aber an, die zu untersuchende Funktion erst einmal richtig anzusehen statt gleich drauflos zu differenzieren; denn manchmal kann man die Extremwerte auch ohne oder mit wenig Rechnung erkennen, ohne Ableitungen zu berechnen.

Im folgenden sei noch $\quad \| \ \mathfrak{D}$ offen

1. Notwendige Bedingung

Vor.: *f hat in a ein relatives Extremum,* $\nu \in \{1, \ldots, n\}$,
es existiert $D_\nu f(a)$

Beh.: $D_\nu f(a) = 0$

Beweis: Mit einem $\varepsilon > 0$, das $a + te_\nu \in \mathfrak{D}$ für $-\varepsilon < t < \varepsilon$ liefert, betrachten wir $\varphi(t) := f(a + te_\nu)$: φ hat in 0 ein relatives Extremum; nach (2) aus Abschnitt 4.4 gilt somit

$$0 = \varphi'(0) = D_\nu f(a). \qquad \square$$

Natürlich wird man diese Bedingung meist für *alle* $\nu \in \{1, \ldots, n\}$ anwenden.

(B1) $\boxed{f(x,y) := y^2 + x^4 + x^3} \qquad (x,y)^T \in \mathfrak{D} := \mathbb{R}^2$

$$
\begin{aligned}
D_1 f(x,y) &= 4x^3 + 3x^2 = x^2(4x+3) \\
D_2 f(x,y) &= 2y
\end{aligned}
$$

Mögliche Extremstellen sind also: $\binom{0}{0}$ und $\binom{-\frac{3}{4}}{0}$

In $\binom{0}{0}$ liegt *kein* Extremum vor; denn $f(0,0) = 0$ und

$$f(x,0) = x^3(x+1) \left\{ \begin{array}{ll} > 0\,, & x > 0 \\ < 0\,, & -1 < x < 0 \end{array} \right\}$$

(B2) $\boxed{f(x,y) := \dfrac{xy}{1 + x^4 + y^4}}$ $\qquad (x,y)^T \in \mathfrak{D} := \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} D_1 f(x,y) &= \frac{y(1 + x^4 + y^4) - xy4x^3}{(1 + x^4 + y^4)^2} = \frac{y(1 - 3x^4 + y^4)}{(1 + x^4 + y^4)^2} \\ D_2 f(x,y) &= \frac{x(1 - 3y^4 + x^4)}{(1 + x^4 + y^4)^2} \end{aligned}$$

Die notwendige Bedingung (für $\nu = 1$ *und* $\nu = 2$) bedeutet folglich hier: $y(1 - 3x^4 + y^4) = x(1 - 3y^4 + x^4) = 0$, also $(x,y) = (0,0)$ oder $1 - 3x^4 + y^4 = 1 - 3y^4 + x^4 = 0$. So ergibt sich schließlich

$$(x,y) = (0,0) \quad \text{oder} \quad y = \pm x \wedge 1 = 2x^4 .$$

Die *möglichen* Extremstellen sind daher:

$(0,0)$, (α,α), $(-\alpha,\alpha)$, $(\alpha,-\alpha)$, $(-\alpha,-\alpha)$ mit $\alpha := 2^{-1/4}$.

Die Einbeziehung partieller Ableitungen zweiter Ordnung ergibt ergänzend:

2. Notwendige Bedingung

Vor.: f *hat in* a *ein relatives Minimum [Maximum],* $f \in C^2(\mathfrak{D})$
Beh.: $\big(\nabla f(a) = 0$ *und*$\big)$ $H_f(a)$ *ist positiv [negativ] semidefinit.*

Dabei heißt $H_f(a)$ genau dann *„positiv semidefinit"*, wenn $x^T H_f(a) x \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt, und *„negativ semidefinit"*, falls $x^T H_f(a) x \leq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ ist.

Beweis: Es sei $h \in \mathbb{R}^n$ fest und $\varepsilon > 0$ mit $a + th \in \mathfrak{D}$ für $|t| < \varepsilon$. Die durch $\varphi(t) := f(a + th)$ definierte Funktion φ ist zweimal differenzierbar und hat in 0 ein relatives Minimum. Daher gilt:

$$0 \leq \varphi''(0) \overset{\surd}{=} \sum_{\nu,\mu=1}^{n} D_\nu D_\mu f(a) h_\nu h_\mu = h^T H_f(a) h . \qquad \square$$

Falls $H_f(a)$ *„indefinit"* ist, das heißt sowohl ein $h \in \mathbb{R}^n$ mit $h^T H_f(a) h > 0$ als auch ein $k \in \mathbb{R}^n$ mit $k^T H_f(a) k < 0$ existieren, so liegt also an der Stelle a *kein Extremum* vor.

Durch Verschärfung der gerade bewiesenen Bedingung ergibt sich:

Hinreichende Bedingung

Vor.: $f \in C^2(\mathfrak{D})$, $\nabla f(a) = 0$, $H_f(a)$ *positiv [negativ] definit*
Beh.: f *hat in* a *ein striktes relatives Minimum [Maximum].*

Dabei heißt $H_f(a)$ genau dann *„positiv definit"*, wenn $x^T H_f(a) x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt, und *„negativ definit"*, falls $x^T H_f(a) x < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist.

Beweis: Für $\|h\|_\infty$ genügend klein existiert nach (2) aus Abschnitt 9.6 ein

$c \in \overline{a, a+h}$ mit

$$f(a+h) = f(a) + h \cdot \underbrace{\nabla f(a)}_{=0} + \frac{1}{2} h^T H_f(c) h .$$

Hieraus kann die Behauptung abgelesen werden, wenn noch beachtet wird, daß — für hinreichend kleines $\|h\|_\infty$ — mit $H_f(a)$ auch $H_f(c)$ positiv definit ist. □

(B3) Für f aus (B1) gelten: $D_1 D_2 f(x,y) = D_2 D_1 f(x,y) = 0$, $D_1^2 f(x,y) = 12x^2 + 6x = 6x(2x+1)$ und $D_2^2 f(x,y) = 2$.

Für $a := \binom{0}{0}$ ist $H_f(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, mit $h = \binom{h_1}{h_2} \in I\!R^2$ also $h^T H_f(a) h = (h_1, h_2)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 2h_2^2 \geq 0$. Die zweite notwendige Bedingung — $H_f(a)$ positiv semidefinit — ist zwar erfüllt, die hinreichende Bedingung — $H_f(a)$ positiv definit — aber nicht, so daß die bereitgestellten Überlegungen über die HESSE-Matrix hier nicht weiterhelfen. Wir hatten jedoch schon elementar erkannt, daß an dieser Stelle kein Extremum vorliegt.

Für die Stelle $a := \binom{-\frac{3}{4}}{0}$ ist $H_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, also $h^T H_f(a) h = (h_1, h_2)\begin{pmatrix} \frac{9}{4} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \frac{9}{4}h_1^2 + 2h_2^2$. Die HESSE-Matrix ist daher in diesem Fall positiv definit. Es liegt somit ein striktes Minimum (mit Wert $f(a) = -\frac{27}{256}$) vor.

(B4) In (B2) hatten wir die partiellen Ableitungen erster Ordnung zu

$$D_1 f(x,y) = \frac{y(1 - 3x^4 + y^4)}{\left[1 + x^4 + y^4\right]^2}, \qquad D_2 f(x,y) = \frac{x(1 - 3y^4 + x^4)}{\left[1 + x^4 + y^4\right]^2}$$

berechnet und daraus die *möglichen* Extremstellen erhalten: $(0,0)$, (α,α), $(-\alpha, \alpha)$, $(\alpha, -\alpha)$, $(-\alpha,-\alpha)$ mit $\alpha := 2^{-1/4}$.

Die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung sind:

$$D_2 D_1 f(x,y) = D_1 D_2 f(x,y) = \frac{\left\{(1 - 3x^4 + y^4) + y\,4y^3\right\}\left[\cdots\right]^2 - y(\cdots)2\left[\cdots\right]4y^3}{\left[\cdots\right]^4},$$

$$D_1^2 f(x,y) = \frac{-12yx^3\left[\cdots\right]^2 - y(\cdots)2\left[\cdots\right]4x^3}{\left[\cdots\right]^4}, \quad \text{symmetrisch}$$

dazu: $$D_2^2 f(x,y) = \frac{-12xy^3\left[\cdots\right]^2 - x(1 - 3y^4 + x^4)2\left[\cdots\right]4y^3}{\left[\cdots\right]^4}.$$

An der Stelle $(0,0)$ ist somit die HESSE-Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, wegen

$$h^T H_f(0,0)\, h \;=\; (h_1, h_2)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \;=\; 2h_1h_2$$

also *indefinit*. Folglich ist $(0,0)$ *keine Extremstelle.*

Dies läßt sich auch wieder ohne jede Rechnung ‚direkt' sehen, da $\operatorname{sgn}(f(x,y)) = \operatorname{sgn}(xy)$, so daß also f in jeder Umgebung von $(0,0)$ positive und negative Werte annimmt.

Für $(x,y) \in \{(\alpha,\alpha),(-\alpha,\alpha),(\alpha,-\alpha),(-\alpha,-\alpha)\}$ hat man unter Beachtung von $1 - 3x^4 - y^4 = 0$ und $\alpha^4 = \frac{1}{2}$:

$$D_1D_2f(x,y) \;=\; \frac{4y^4}{\left[1+x^4+y^4\right]^2} \;=\; \frac{4\alpha^4}{\left[1\,+\,2\alpha^4\right]^2} \;=\; \frac{1}{2},$$

$$D_1^2f(x,y) \;=\; \frac{y(\,-\,12x^3)}{\left[1+x^4+y^4\right]^2} \;=\; -\frac{3}{2}\operatorname{sgn}(xy) \quad \text{und}$$

(wieder symmetrisch dazu) $D_2^2f(x,y) \;=\; -\frac{3}{2}\operatorname{sgn}(xy)$.

Zusammen gilt also: $H_f(\alpha,\alpha) \;=\; H_f(-\alpha,-\alpha) \;=\; \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

und $H_f(-\alpha,\alpha) \;=\; H_f(\alpha,-\alpha) \;=\; \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. In den ersten beiden Fällen hat man ein striktes relatives Maximum, weil $H_f(\alpha,\alpha) = H_f(-\alpha,-\alpha)$ *negativ definit* ist, in den beiden anderen Fällen ein striktes relatives Maximum, weil $H_f(-\alpha,\alpha) = H_f(\alpha,-\alpha)$ *positiv definit* ist. Die Definitheit bestätigt man wieder ‚direkt' oder zieht dazu — einfacher — die nachfolgende Bemerkung heran.

Auch hier könnte man mit etwas Überlegung auf die Argumentation über die HESSE-Matrix verzichten. Ich führe dies jedoch nicht mehr aus.

Die Definitheit läßt sich im wichtigen Spezialfall $\boxed{n=2}$ etwas handlicher charakterisieren:

Bemerkung *Vor.: Mit* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ *seien* $H := \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$ *und* $\delta := \alpha\gamma - \beta^2$ *(Determinante von* H*).*

Beh.: a) H *positiv definit* $\iff \alpha > 0 \;\wedge\; \delta > 0$

b) H *negativ definit* $\iff \alpha < 0 \;\wedge\; \delta > 0$

c) H *indefinit* $\iff \delta < 0$

Diese Aussage wird einzelnen Lesern — sogar entsprechend allgemeiner für beliebige (n,n)-Matrizen — schon aus der Linearen Algebra vertraut sein. Für die anderen ist der folgende einfache elementare Beweis gedacht:

Beweis: Für $\mathfrak{x} = \binom{x}{y} \in I\!R^2$ ist

$$\mathfrak{x}^T H \mathfrak{x} = (x,y)\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x,y)\begin{pmatrix} \alpha x + \beta y \\ \beta x + \gamma y \end{pmatrix} = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2,$$

also $$\mathfrak{x}^T H \mathfrak{x} = \left\{ \begin{array}{ll} \alpha x^2 & , \ y = 0 \\ y^2\left(2\beta\frac{x}{y} + \gamma\right) & , \ y \neq 0 \wedge \alpha = 0 \\ y^2\left[\alpha\left(\frac{x}{y} + \frac{\beta}{\alpha}\right)^2 + \frac{\delta}{\alpha}\right] & , \ y \neq 0 \wedge \alpha \neq 0 \end{array} \right\}.$$

a): $\Longrightarrow$: $y = 0 \wedge x \neq 0$ liefert $\alpha > 0$;
$y \neq 0$ und $x := -\frac{\beta}{\alpha}y$ zeigt $\delta > 0$.

$\Longleftarrow$: Für $y = 0$ zieht man die 1. Zeile, für $y \neq 0$ die dritte heran.

b): Aus a) mit $H \longmapsto -H$ ablesen. Denn hierbei bleibt δ unverändert, und es gilt offenbar: H *negativ definit* $\Longleftrightarrow$ $-H$ *positiv definit.*

c): bleibt Ihnen als einfache Übungsaufgabe überlassen. □

Bei Extremwertbetrachtungen wird ein (innerer) Punkt $a \in \mathfrak{D}$, in dem f differenzierbar mit $\nabla f(a) = 0$ ist, der also als Extremstelle dann überhaupt noch in Frage kommt, oft als ‚kritische' oder ‚stationäre Stelle', der zugehörige Punkt $(a, f(a))$ als *„kritischer Punkt"* oder *„stationärer Punkt"* bezeichnet. Ein kritischer Punkt, der kein Extremum ist, wird *„Sattelpunkt"* genannt. Wenn man dabei etwa an die Paßhöhe einer Gebirgsstraße denkt, hat man eine ungefähre Vorstellung von der vorliegenden Situation.

Zur Erleichterung der praktischen Handhabung seien für den Spezialfall $\boxed{n = 2}$ und ein $f \in C^2(\mathfrak{D})$ unter der Voraussetzung, daß die 1. Notwendige Bedingung $(\nabla f(a) = 0)$ gegeben ist, die wichtigsten Ergebnisse noch einmal in einer Tabelle zusammengefaßt. Hierbei sei

$$\Delta := D_1^2 f(a) D_2^2 f(a) - \left(D_1 D_2 f(a)\right)^2 \quad \left(\textit{Determinante von} \, H_f(a)\right):$$

Δ	$D_1^2 f(a)$	f hat in a
> 0	> 0	*ein striktes lokales Minimum*
> 0	< 0	*ein striktes lokales Maximum*
$(> 0$	$= 0$	ist unmöglich$)$
< 0	beliebig	*kein Extremum (einen Sattelpunkt)*
$= 0$	beliebig	?

9.8 Satz über implizite Funktionen, Extrema unter Nebenbedingungen (LAGRANGE–Multiplikatoren)

Das Ziel der Überlegungen dieses abschließenden Abschnitts möchte ich vorweg — im einfachsten Spezialfall — an zwei Beispielen etwas verdeutlichen:

Annahme: $\|$ $\mathfrak{D}$ offen $\subset \mathbb{R}^2$; $f, g : \mathfrak{D} \longrightarrow \mathbb{R}$

1) $f(x, y) = 0$ soll ‚lokal aufgelöst' werden zu $y = \varphi(x)$.
   Das heißt, es soll zu einem gegebenen $(x_0, y_0) \in \mathfrak{D}$ eine Funktion φ so bestimmt werden, daß $y_0 = \varphi(x_0)$ und $f(x, \varphi(x)) = 0$ in einem geeigneten Intervall um x_0 gelten. y soll also (lokal) als Funktion von x dargestellt werden. Man sagt dann, daß $y = y(x)$ durch $f(x, y) = 0$ als *„implizite Funktion"* gegeben ist.

2) Auf $\{(x, y) \in \mathfrak{D} : g(x, y) = 0\}$ sind die Extremwerte von $f(x, y)$ zu bestimmen.

Bei 2) handelt es sich um ein *Optimierungsproblem* mit einer *„Nebenbedingung" (Restriktion)*, nämlich der Bedingung $g(x, y) = 0$. Die Variablen x und y können *nicht frei* variieren, sondern sind durch diese Bedingung *gebunden*. Der Bereich der heranzuziehenden Punkte wird dadurch eingeschränkt. Dabei entsteht im allgemeinen *keine offene Teilmenge* des $\mathbb{R}^2$, so daß die Überlegungen des Abschnitts 9.7 nicht direkt angewendet werden können.

Ökonomische Beispiele für eine entsprechende Fragestellung sind etwa:
Nutzenmaximierung bei festem Budget,
Gewinnmaximierung bei festgelegten Gesamtkosten.

(B1) $\boxed{x^2 + 4y^2 = 1}$ (Ellipse mit Halbachsen der Länge 1 und $\frac{1}{2}$; in 1) kann $f(x,y) := x^2 + 4y^2 - 1$ gesetzt werden.)

Eine mögliche Auflösung ist gegeben durch: $y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{1 - x^2}$. Dies ist aber keine Funktion! Ist $(x_0, y_0) \neq (1, 0), (-1, 0)$, also gerade verschieden von den Scheitelpunkten der Ellipse, so kann lokal um (x_0, y_0) nach y durch eine Funktion aufgelöst werden, nämlich für positive y_0 durch $y = \frac{1}{2}\sqrt{1 - x^2}$, für negative durch $y = -\frac{1}{2}\sqrt{1 - x^2}$. An den Scheitelpunkten ist diese Beziehung aber nicht durch eine Funktion lokal auflösbar. Wir werden weiter unten die Tatsache, daß im ersten Fall $D_2 f(x_0, y_0) \neq 0$ und im zweiten $D_2 f(x_0, y_0) = 0$ gilt, als dafür maßgebend erkennen.

(B2) $\boxed{g(x, y) := x^2 + 4y^2 - 1, \quad f(x, y) := \dfrac{xy}{1 + x^4 + y^4}}$

Die in (B4) des vorangehenden Abschnitts bestimmten ‚freien' Extrema von f liegen *nicht* auf der Ellipse!

Der nachfolgende **Satz über implizite Funktionen** dient in dieser Darstellung hauptsächlich zum Beweis einer notwendigen Bedingung für Extrema unter Nebenbedingungen. Er ist aber auch für sich genommen wichtig und interessant. Erfahrungsgemäß macht er vielen zunächst einmal Schwierigkeiten. Sie sollten daher nicht verzagen, wenn es Ihnen auch so geht.

(1) Satz *Vor.:* $(x_0, y_0) \in \mathcal{U}$ *offen* $\subset \mathbb{R}^2$, $f \in C^1(\mathcal{U})$,

$f(x_0, y_0) = 0$, $D_2 f(x_0, y_0) \neq 0$

Beh.: *1) Es gibt ein* $r > 0$ *und ein* $\varrho > 0$ *derart, daß für alle* $x \in \mathbb{R}$ *mit* $|x - x_0| < \varrho$ *eindeutig ein* $y \in \mathbb{R}$ *mit* $|y - y_0| < r$ *und* $f(x, y) = 0$ *existiert.*

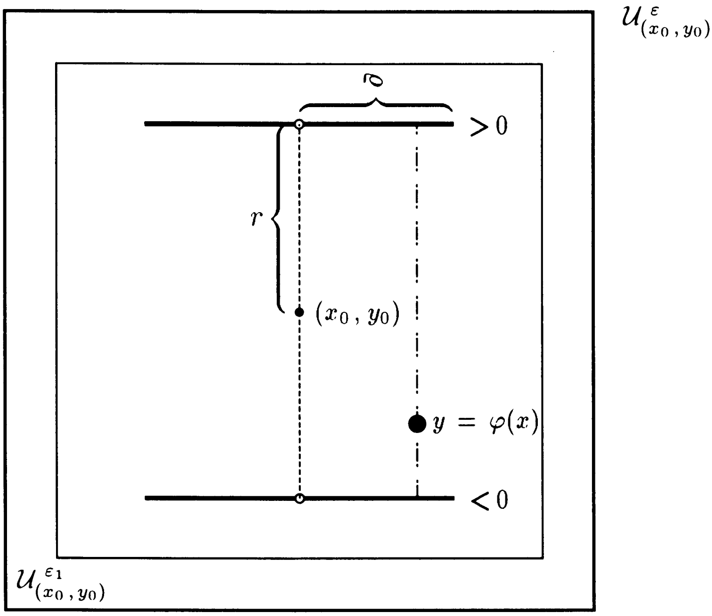
Wir bezeichnen das obige y *zu* x *mit* $\varphi(x)$, *haben also eine Abbildung* $\varphi :]x_0 - \varrho, x_0 + \varrho[\longrightarrow]y_0 - r, y_0 + r[$.

2) φ *ist stetig differenzierbar mit*

$$\varphi'(x) = -\frac{D_1 f(x, \varphi(x))}{D_2 f(x, \varphi(x))} .$$

Der Beweis dieses Satzes wendet sich wieder ausschließlich an mathematisch besonders interessierte Leser. Wenn Sie ihn überschlagen, sollten Sie sich an Hand des nachfolgenden Beispiels aber den Sachverhalt klarmachen!

Beweis: Œ $D_2 f(x_0, y_0) > 0$ (sonst $-f$ statt f betrachten!) und $\mathcal{U} = \mathcal{U}^{\varepsilon}_{(x_0, y_0)}$ mit einem $\varepsilon > 0$. Da $D_2 f$ stetig ist, existiert ein $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon$ mit $D_2 f(x, y) > 0$ für $(x, y) \in \mathcal{U}^{\varepsilon_1}_{(x_0, y_0)}$.



Für festes $0 < r < \varepsilon_1$ gilt dann $f(x_0, y_0 - r) < 0 < f(x_0, y_0 + r)$. Wegen der Stetigkeit von f existiert ein $0 < \varrho < \varepsilon_1$, das $f(x, y_0 - r) < 0 < f(x, y_0 + r)$ für alle x mit $|x - x_0| < \varrho$ sichert. Zu jedem solchen x existiert — da $f(x, \cdot)$ in $\mathcal{U}_{y_0}^{\varepsilon_1}$ streng isoton ist — eindeutig ein $y =: \varphi(x)$ mit $|y - y_0| < r$ und $f(x, y) = 0$.

Somit gilt: $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| = |y - y_0| < r$. Die gleiche Überlegung bei verkleinertem r zeigt: φ ist *stetig in* x_0. Die *Stetigkeit von* φ ergibt sich dann durch Betrachtung von $x \in \mathcal{U}_{x_0}^{\varrho}$ statt x_0. Der Nachweis der *Differenzierbarkeit von* φ *in* x_0 erfordert etwas mehr Aufwand:

Für x mit $0 < |x - x_0| < \varrho$ hat man nach (1) aus Abschnitt 9.6

$f(x, \varphi(x)) - f(x_0, \varphi(x_0)) = D_1 f(\xi, \eta)(x - x_0) + D_2 f(\xi, \eta)(\varphi(x) - \varphi(x_0))$

mit einem $(\xi, \eta) \in \overline{(x_0, \varphi(x_0)), (x, \varphi(x))}$, also — da $l.S. = 0$ —

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = -\frac{D_1 f(\xi, \eta)}{D_2 f(\xi, \eta)} \longrightarrow \frac{D_1 f(x_0, \varphi(x_0))}{D_2 f(x_0, \varphi(x_0))} \quad (x \longrightarrow x_0);$$

denn $D_1 f$ und $D_2 f$ sind stetig, und mit $x \longrightarrow x_0$ strebt $\varphi(x)$ gegen $\varphi(x_0)$, folglich auch (ξ, η) gegen $(x_0, \varphi(x_0))$.

Die gleiche Überlegung für eine Nachbarstelle zeigt die *Differenzierbarkeit von* φ. Die *Stetigkeit von* φ' liest man nun aus der Formel ab. □

Zusatz *Für* $k \in \mathbb{N}$: $f \in C^k(\mathcal{U}) \implies \varphi$ *k-mal stetig differenzierbar.*

Beweis: Für $k = 2$ kann dies aus 2) abgelesen werden; dann ergibt sich die allgemeine Behauptung induktiv. □

Weiß man schon *vorweg*, daß φ differenzierbar ist, dann kann die Ableitung von φ einfach aus $0 = f(x, \varphi(x))$ durch Differenzieren nach x abgelesen werden:

$$(*) \qquad 0 = D_1 f(x, \varphi(x)) + D_2 f(x, \varphi(x))\varphi'(x)$$

Ist f *aus* $C^2(\mathcal{U})$, so ergibt sich aus $(*)$ durch nochmaliges Differenzieren:

$$0 = D_1^2 f(\cdot) + 2 D_1 D_2 f(\cdot)\varphi'(x) + D_2^2 f(\cdot)\big(\varphi'(x)\big)^2 + D_2 f(\cdot)\varphi''(x).$$

Da $D_2 f(\cdot) \neq 0$ ist, kann aus dieser Formel $\varphi''(x)$ gewonnen werden.

(B3) $\boxed{\begin{array}{ll} f(x, y) := x^3 + y^2 + \ln(1 + x + y) & (\text{für } x + y > -1); \\ x_0 := 0,\ y_0 := 0 \text{ und } \mathcal{U} := \mathcal{U}_{(0,0)}^{1/2} & \end{array}}$

$$D_1 f(x, y) = 3x^2 + \frac{1}{1 + x + y}, \qquad D_2 f(x, y) = 2y + \frac{1}{1 + x + y}$$

und $f(0, 0) = 0$. Speziell also $D_1 f(0, 0) = 1$ und $D_2 f(0, 0) = 1$. So können die vorangehenden Überlegungen herangezogen werden und liefern: $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = -1$ und schließlich $\varphi''(0) = -2$. Beachtenswert ist dabei, daß ohne weitere Kenntnis der Funktion φ ihre Ableitungen an der Stelle $(0,0)$ erhalten werden können.

Allgemeiner läßt sich noch zeigen — ich gehe darauf aber nicht mehr ein, weil der Beweis doch deutlich aufwendiger wird — :

Satz über implizite Funktionen

Vor.: $\ell, k \in \mathbb{N}$; $\mathfrak{a} = (\mathfrak{x}_0, \mathfrak{y}_0) \in \mathcal{U}$ *offen* $\subset \mathbb{R}^{k+\ell}$ *mit* $\mathfrak{x}_0 \in \mathbb{R}^k$, $\mathfrak{y}_0 \in \mathbb{R}^\ell$; $f_1, \dots, f_\ell \in C^1(\mathcal{U})$ *mit* $f_1(\mathfrak{a}) = \cdots = f_\ell(\mathfrak{a}) = 0$ *und*

$$\det\left(\left(D_{k+\mu} f_\lambda(\mathfrak{a})\right)_{\substack{\lambda = 1, \dots, \ell \\ \mu = 1, \dots, \ell}}\right) \neq 0$$

Beh.: 1) *Es gibt ein* $r > 0$ *und ein* $\varrho > 0$ *derart, daß für alle* $\mathfrak{x} \in \mathbb{R}^k$ *mit* $\|\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0\| < \varrho$ *eindeutig ein* $\mathfrak{y} \in \mathbb{R}^\ell$ *mit* $\|\mathfrak{y} - \mathfrak{y}_0\| < r$ *und* $f_\lambda(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 0$ $(\lambda = 1, \dots, \ell)$ *existiert.*

Wir bezeichnen dieses $\mathfrak{y}$ *in Abhängigkeit von* $\mathfrak{x}$ *mit* $\varphi(\mathfrak{x})$ *und haben so eine Abbildung*

$$\varphi : \mathcal{U}^{\varrho}_{\mathfrak{x}_0} \longrightarrow \mathcal{U}^{r}_{\mathfrak{y}_0} \;.$$

2) φ *ist stetig differenzierbar.*

Natürlich kann man den Satz mit $f := \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_\ell \end{pmatrix} : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^\ell$ noch etwas übersichtlicher notieren.

Zur **Berechnung der partiellen Ableitungen von** φ differenziert man partiell die Identität:

$$0 = f_\lambda(\mathfrak{x}, \varphi(\mathfrak{x})) \qquad (\lambda = 1, \dots, \ell)$$

beziehungsweise

$$0 = f_\lambda(x_1, \dots, x_k, \varphi_1(x_1, \dots, x_k), \dots, \varphi_\ell(x_1, \dots, x_k)),$$

wobei hier zum besseren Verständnis die Beziehung noch mit den Koordinatenfunktionen φ_λ zu φ und den Koordinaten x_κ von x notiert wurde.

Wir kommen nun zu der angekündigten **Notwendigen Bedingung für das Vorliegen eines relativen Extremums unter Nebenbedingungen**.

Hinreichende Bedingungen für Extrema unter Nebenbedingungen sind recht aufwendig und werden nur selten betrachtet. Ich gehe daher auch nicht darauf ein. Oft weiß man vorweg etwas über die Existenz eines Maximums oder Minimums, so daß dann schon eine notwendige Bedingung weiterhilft.

Wir machen dazu die

Annahmen:
$k, n \in \mathbb{N}$ mit $k < n$ und $a \in \mathfrak{D}$ offen $\subset \mathbb{R}^n$,
$f : \mathfrak{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und
$g : \mathfrak{D} \longrightarrow \mathbb{R}^k$ stetig differenzierbar.
f nehme in a ein *„relatives Maximum unter der Nebenbedingung* $g(x) = 0$" an, das heißt:
$a \in M := \{x \in \mathfrak{D} : g(x) = 0\}$ und es existiert ein $r > 0$ derart, daß $f(x) \leq f(a)$ für alle $x \in \mathcal{U}_a^r \cap M$.

Bei einfachen Problemen kann man versuchen, über die Nebenbedingung $g(x) = 0$ — beziehungsweise $g_\kappa(x) = 0$ $(\kappa = 1, \ldots, k)$ mit den Koordinatenfunktionen g_κ von g — eine oder mehrere Variable durch die restlichen auszudrücken *(Variablensubstitution)* und in die *Zielfunktion* f, die auf Extrema untersucht werden soll, einzusetzen. Dies ist jedoch selten zweckmäßig und führt auch oft zu Komplikationen. Als eine universeller verwendbare Methode erweist sich die folgende

LAGRANGE**sche Multiplikatoren-Regel**

Der Rang von
$$\begin{pmatrix} D_1 f(a) & \cdots & D_n f(a) \\ D_1 g_1(a) & \cdots & D_n g_1(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ D_1 g_k(a) & \cdots & D_n g_k(a) \end{pmatrix}$$
ist kleiner als $k + 1$.

Äquivalent dazu ist: Die Zeilen der angegebenen Matrix sind linear abhängig, das heißt: Es existiert ein Vektor $(\lambda_0, \ldots, \lambda_k)^T \neq (0, \ldots, 0)^T$ *mit*

$$\frac{\partial(\lambda_0 f + \lambda_1 g_1 + \cdots + \lambda_k g_k)}{\partial x_\nu}(a) = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Die Zahlen $\lambda_0, \ldots, \lambda_k$ heißen „LAGRANGE*sche Multiplikatoren*".

Bei ökonomischen Fragestellungen wird auch von *„Schattenpreisen"* (einer marginalen Änderung von g, gemessen in Einheiten von f) gesprochen.

Diese Bedingungen, die natürlich kurz auch als

$$(\lambda_0 \nabla f + \lambda_1 \nabla g_1 + \cdots + \lambda_k \nabla g_k)(a) = 0$$

geschrieben werden können, liefern n Gleichungen für $n+k+1$ Unbekannte ($\lambda_0, \ldots, \lambda_k$ und $a_1, \ldots, a_n$ als Koordinaten von a). Dazu hat man noch die k Gleichungen $g_1(a) = \cdots = g_k(a) = 0$.

Weiß man die lineare Unabhängigkeit der Zeilen mit den g_κ, so kann von $\lambda_0 = 1$ ausgegangen werden.

Beweisskizze: Sonst sei Œ $\quad \det\left(\left(D_\mu f_\nu(a)\right)_{\substack{\nu=1,\ldots,\ell \\ \mu=1,\ldots,\ell}}\right) \neq 0$

mit $\ell := k+1$, $f_1 := f$ und $f_{\kappa+1} := g_\kappa$ $(\kappa = 1, \ldots, k)$.

Das Gleichungssystem — für $\ell = n$ ‚richtig' lesen! —

$$h_1(\varepsilon, x_1, \ldots, x_\ell) := f_1(x_1, \ldots, x_\ell, a_{\ell+1}, \ldots, a_n) - f_1(a) - \varepsilon \overset{!}{=} 0$$

$$h_\lambda(\varepsilon, x_1, \ldots, x_\ell) := f_\lambda(x_1, \ldots, x_\ell, a_{\ell+1}, \ldots, a_n) \overset{!}{=} 0 \quad (\lambda = 2, \ldots, \ell)$$

kann nach dem Satz über implizite Funktionen lokal um $(0, a_1, \ldots . a_\ell)$ aufgelöst werden durch $x_\lambda(\varepsilon)$:

In jeder Umgebung von a existiert somit ein $x \in M$ mit

$$f(x) = f_1(x) = f_1(a) + \varepsilon = f(a) + \varepsilon .$$

Die mögliche Wahl von $\varepsilon > 0$ und $\varepsilon < 0$ zeigt, daß in a *kein* relatives Maximum (und auch kein relatives Minimum) unter der Nebenbedingung $g(x) = 0$ vorliegt. Widerspruch! □

Es erübrigt sich wohl, gesondert *„relative Minima unter Nebenbedingungen"* zu definieren, da ja wieder durch die Betrachtung von $-f$ statt f Minima auf Maxima zurückgeführt werden können.

(B4) Gesucht werden die *relativen Extrema von* $f(x, y) := x^3 + y^3$ *auf der Ellipse* $x^2 + 4y^2 = 1$.

Hier sind also oben $k := 1$, $n := 2$ und etwa $g(x, y) := g_1(x, y) := x^2 + 4y^2 - 1$ für $(x, y) \in \mathfrak{D} := \mathbb{R}^2$ zu nehmen. *Mögliche* Extremstellen erhält man aus:

$$\begin{vmatrix} D_1 f(x, y) & D_2 f(x, y) \\ D_1 g(x, y) & D_2 g(x, y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3x^2 & 3y^2 \\ 2x & 8y \end{vmatrix} \overset{!}{=} 0 .$$

Die *l.S.* ist $3x^2 8y - 3y^2 2x = 6xy(4x - y)$. *Mögliche* Extremstellen sind demnach: (Nacheinander $x = 0$, $y = 0$ und $xy \neq 0$ betrachten!)

$$(0, \tfrac{1}{2}),\ (0, -\tfrac{1}{2}),\ (1, 0),\ (-1, 0),\ (\tfrac{1}{\sqrt{65}}, \tfrac{4}{\sqrt{65}}),\ (-\tfrac{1}{\sqrt{65}}, -\tfrac{4}{\sqrt{65}}) .$$

Die zugehörigen Werte von f sind:

$$\tfrac{1}{8}\ ,\quad -\tfrac{1}{8}\ ,\quad 1\ ,\quad -1\ ,\quad \tfrac{1}{\sqrt{65}}\ ,\quad -\tfrac{1}{\sqrt{65}} .$$

Berücksichtigt man noch, daß die stetige Funktion f auf der Ellipse $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$ ein absolutes Minimum und ein absolutes Maximum annimmt — dies läßt sich aus (3), Abschnitt 3.4 (Satz über Annahme von Extremwerten) herleiten —, so folgt zunächst, daß f *an der Stelle* $(1, 0)$ *ein (absolutes) Maximum mit Wert* 1 *und an der Stelle* $(-1, 0)$ *ein (absolutes) Minimum mit Wert* -1 *unter der Nebenbedingung* $g(x, y) = 0$ annimmt.

Sieht man sich entsprechend noch die ‚Viertelbögen' von $(1, 0)$ bis $(0, \frac{1}{2})$ usw. an, so erhält man, da $\frac{1}{\sqrt{65}}$ kleiner als $\frac{1}{8}$ ist:

In $(\frac{1}{\sqrt{65}}, \frac{4}{\sqrt{65}})$ *und* $(0, -\frac{1}{2})$ nimmt f unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$ *relative Minima* (mit Werten $\frac{1}{\sqrt{65}}$ bzw. $-\frac{1}{8}$) und — gespiegelt am Koordinatenursprung — *in* $(-\frac{1}{\sqrt{65}}, -\frac{4}{\sqrt{65}})$ *und* $(0, \frac{1}{2})$ *relative Maxima* (mit Werten $-\frac{1}{\sqrt{65}}$ bzw. $\frac{1}{8}$) an.

Als Übungsaufgabe sollten Sie dieses Beispiel zum Vergleich auch mit LAGRANGE-Multiplikatoren rechnen.

Es sei noch die *geometrische Bedeutung* der erhaltenen Bedingung im Spezialfall $k = 1$ erwähnt: *Die Gradienten von f und g sind in einem Extremalpunkt parallel.*

Rückblick

Wir haben in diesem Kapitel gesehen, daß die *Differentialrechnung für Abbildungen mehrerer Variabler* durch Betrachtung von Koordinatenfunktionen auf entsprechende $\mathbb{R}$-wertige Funktionen zurückgeführt werden kann. Hier ergaben sich keine prinzipiell neuartigen Probleme, wenn man für Abstände statt mit den gewohnten Beträgen mit *Normen* arbeitete.

Schwieriger als im eindimensionalen Fall ist die graphische *Darstellung solcher Funktionen.*

Bei vielen Fragestellungen war die Zurückführung auf ‚Schnitte' hilfreich, bei denen eine oder mehrere Variable festgehalten wurden und so einfachere Funktionen entstanden.

Bei der Extremwertsuche, die in der Handhabung ähnlich, aber dennoch nicht ganz so einfach, wie in Kapitel 4 war, haben wir neben der Frage nach *freien Extremwerten* (im gesamten Definitionsbereich) auch solche Aufgaben betrachtet, bei denen gewisse *Nebenbedingungen* zu berücksichtigen waren.

Da es nur selten möglich ist, die Nebenbedingungen durch Auflösen direkt in die Zielfunktion einzusetzen, haben wir noch die universeller einsetzbare Methode der LAGRANGE-*Multiplikatoren* und — in diesem Zusammmenhang — den *Satz über implizite Funktionen* kennengelernt.

Kapitel 10

Übungen

Übungen zu Kapitel 1

1.1 Mengen und ihre Verknüpfungen

(1) A, B, C seien Mengen. Zeigen Sie:

(a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(c) $A \cap (A \cup B) = A$

(d) $A \cup (A \cap B) = A$

(e) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Widerlegen Sie durch ein geeignetes Beispiel:

(f) $A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

(2) A, B seien Teilmengen einer (festen) Menge $\mathcal{R}$. Für eine Teilmenge C von $\mathcal{R}$ bezeichnen wir: $\widetilde{C} := \mathcal{R} \setminus C$ *(„Komplement“)*. Zeigen Sie:

(a) $(A \cup B)^{\sim} = \widetilde{A} \cap \widetilde{B}$

(b) $(A \cap B)^{\sim} = \widetilde{A} \cup \widetilde{B}$

(c) $\widetilde{\widetilde{A}} = A$

(d) $A \cap (B \cup \widetilde{A}) = A \cap B$

(e) $A \cup (B \cap \widetilde{A}) = A \cup B$

(3) Bestimmen Sie $\mathbb{P}(\mathbb{P}(\mathbb{P}(\emptyset)))$.

1.2 Aussagen und Quantoren

(1) Stellen die folgenden Ausdrücke *Aussagen* oder *Aussageformen* dar?

(a) Konstanz hat mehr Einwohner als Tokio.

(b) ‚1' ist ein Buchstabe des deutschen Alphabets.

(c) Es ist groß.

(d) Es regnet.

(e) x ist unersetzlich.

(f) Komm heute abend zu mir!

(g) Mein Auto ist länger als gelb.

(h) π ist eine Primzahl.

(2) *Verneinen* Sie die folgenden Aussagen:

(a) Mindestens einer der beiden Studenten Peter und Franz ist verheiratet.

(b) In jeder Nacht schlafen alle Hühner von 22 Uhr bis 6 Uhr.

(c) Der Schuh ist braun und groß.

(d) In jedem Staat gibt es eine Stadt mit (mindestens) einer Straße, die für alle Fahrzeuge gesperrt ist.

(3) Zeigen Sie, daß aus (der falschen Aussage) $1994 = 1995$ folgt, daß Ihre Oma der Papst ist, indem Sie zunächst $1 = 2$ folgern und dann die Anzahl der beiden Mengen $\{\text{Papst}\}$ und $\{\text{Oma, Papst}\}$ betrachten.

1.3 Abbildungen und ihre Eigenschaften

(1) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ sei definiert durch:

(a) $f(n) := \begin{cases} n-1, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ n+1, & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$

(b) $f(n) := n + 7$

(c) $f(n) := \begin{cases} n, & \text{falls } n \leq 10 \\ n-1, & \text{falls } n > 10 \end{cases}$

Ist f *injektiv, surjektiv, bijektiv?* Geben Sie gegebenenfalls die *Umkehrabbildung* an.

1.4 Die reellen Zahlen

(1) Wo liegt der Fehler in den folgenden „Beweisen"?

(a) Es seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x = y$; dann gelten nacheinander:
$xx = yy, \quad xx - yy = xy - yy, \quad (x+y)(x-y) = (x-y)y,$
$x + y = y, \quad 2y = y, \quad 2 = 1.$

(b) Es seien $a = 4$ und $b = 7$; dann gelten nacheinander:
$a < b, \quad aa < ab, \quad aa - bb < ab - bb,$
$(a-b)(a+b) < (a-b)b, \, a + b < b, \, a < 0, \, 4 < 0.$

(2) Zeigen Sie: Für $a \in \mathbb{P}$ gilt $a + a^{-1} \geq 2$.

(3) ‚Bestimmen' Sie die $x \in \mathbb{R}$, die folgende Gleichung erfüllen:

(a) $3x - |x| + 4 = 0$

(b) $|x| + x = 0$

(c) $|x| + |x - 1| + 1 = (x + 1)^2$

(4) ‚Bestimmen' Sie die $x \in \mathbb{R}$, die folgende Ungleichung erfüllen:

(a) $(x - 5)(x + 3) < 0$

(b) $(x - 17)^{42}(x + 3) \leq 0$

(c) $|x - 4| < |x + 1|$

(d) $|x^2 - 2| < 2$

(e) $x^2 + x > 12$

(f) $6x^2 - 13x + 6 > 0$

(g) $x < x^2 - 12 < 4x$

(5) Zeigen Sie für $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\max(a, b) = \tfrac{1}{2}\left(a + b + |a - b|\right)$$
$$\min(a, b) = \tfrac{1}{2}\left(a + b - |a - b|\right)$$

(6) Zeigen Sie nach der in Teilabschnitt 1.4.2 ausgeführten Schlußweise die *Regeln* (α), (β), (γ), (ε) und (ϑ) *über Bruchrechnen.*

1.5 Die natürlichen und die ganzen Zahlen

(1) Zeigen Sie durch *vollständige Induktion* für $n \in \mathbb{N}$:

(a) $$\sum_{\nu=1}^{n} \nu^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

(b) $$\sum_{\nu=1}^{n} \nu!\,\nu = (n+1)! - 1$$

(2) Zeigen Sie durch *vollständige Induktion*:

$$\forall n \in \mathbb{N}_3 \qquad 2n + 1 < 2^n$$

(3) ‚Bestimmen' Sie die $n \in \mathbb{N}$, für die $2^n < n!$ gilt.

(4) ‚Bestimmen' Sie den 6. Koeffizienten in der Entwicklung von $(a + b)^{12}$.

(5) Zeigen Sie:

(a) $$\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} = 2^n \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

(b) $\sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} = 0 \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$

(c) $\sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} a^{n-\nu} b^\nu = (a - b)^n \qquad (a, b \in \mathbb{R};\ n \in \mathbb{N}_0)$

(6) Berechnen Sie:

(a) $\binom{10}{4}$ (b) $\binom{5}{3}$ (c) $\binom{10}{8}$

(d) $\binom{101}{99}$ (e) $\binom{49}{6}$ (Anzahl der Möglichkeiten beim Lotto)

(f) $\binom{32}{10}$ (Anzahl der verschiedenen Kartenkombinationen für *einen* Spieler beim Skat)

(7) Zeigen Sie durch *vollständige Induktion* die folgenden *Regeln der Potenzrechnung* $(n, m \in \mathbb{N};\ a, b \in \mathbb{R})$:

(a) $(a\,b)^n = a^n b^n$ (b) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad (b \neq 0)$

(c) $a^n a^m = a^{n+m}$ (d) $(a^n)^m = a^{nm}$

(e) $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \qquad (a \neq 0)$

(8) Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$ und eine Menge A :
$\# A = n$ impliziert $\# \mathbb{P}(A) = 2^n$.

(9) Zeigen Sie für $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$:
Eine n-elementige Menge hat $\binom{n}{k}$ k-elementige Teilmengen.

1.7 Zum Vollständigkeitsaxiom

(1) Bestimmen Sie das *Supremum* und das *Infimum* zu

(a) $]0, 1[$ (b) $\{1 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.

(2) Diese Aufgabe wendet sich ausschließlich an die mathematisch besonders interessierten Leser! Zeigen Sie durch *vollständige Induktion*:

(a) $\forall n \in \mathbb{N}_0 : \quad 0 < n \Longrightarrow 1 \leq n$

(b) $\forall n \in \mathbb{N}_0 : \quad 1 \leq n \Longrightarrow n - 1 \in \mathbb{N}_0$

(c) $\forall n, m \in \mathbb{N}_0 : \quad n < m \Longrightarrow n + 1 \leq m$

(d) Jede nicht-leere Menge natürlicher Zahlen hat ein kleinstes Element.

1.8 Darstellungen reeller Zahlen

(1) Zeigen Sie ‚direkt' (ohne vollständige Induktion):

Für $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und $n \in \mathbb{N}_0$: $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{n} q^{\nu} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

(2) Eine ganze Zahl lasse sich im *Dezimalsystem* durch 12 Ziffern darstellen. Wie viele Ziffern benötigt man für ihre Darstellung im „*Binärsystem*" (d.h. mit 2 als Basis)?

1.9 Komplexe Zahlen

(1) Zeigen Sie: $z^4 = 1$ hat genau 4 verschiedene komplexe Lösungen.

(2) Stellen Sie die folgenden Teilmengen der komplexen Zahlen graphisch dar:

(a) $\{z \in \mathbb{C} : |3z - 1 + i| \leq 2\}$

(b) $\left\{z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\} : \left|\frac{z-i}{z+i}\right| = 1\right\}$

(c) $\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \mathfrak{Im}(z) \leq 3.2\}$

(d) $\left\{z \in \mathbb{C} \setminus \{-i-1\} : \left|\frac{z-i-1}{z+i+1}\right| < 1 \ \wedge \ \mathfrak{Re}\, z \geq 0\right\}$

(3) Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in „*Normalform*", d.h. in der Form $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, dar:

(a) $(1+i)^4$ (b) $\dfrac{1}{1+i}$ (c) $\dfrac{1+5i}{-2i+11}$

(d) $\dfrac{1+i}{i-1}$ (e) $\left(\dfrac{4-i}{2+i}\right)^2$ (f) $(1+i)^{-4}$

(4) Bestimmen Sie die *komplexen* Lösungen von $z^2 - 4z + 8 = 0$.

Übungen zu Kapitel 2

2.1 Der Funktionsbegriff

(1) Schreiben Sie $\mathbb{R}$ so als disjunkte Vereinigung zweier Intervalle i_1 und i_2, daß f in i_1 streng monoton fallend (streng antiton) und in i_2 streng monoton wachsend (streng isoton) ist, in den Fällen:

(a) $f(x) := |x+1|$

(b) $f(x) := x^2 - 6x + 7$

(c) $f(x) := x^2 + 4|x+1|$

Es seien $f_1(x) := f(x) \quad (x \in i_1)$ und $f_2(x) := f(x) \quad (x \in i_2)$. Bestimmen Sie die *Umkehrfunktionen* zu f_1 und f_2 in den Fällen (a), (b) und (c) und stellen Sie alle betrachteten Funktionen graphisch dar.

(2) Mit $D := \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ sei
$$f : \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \cup\!\!\! \mid & & \cup\!\!\! \mid \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{1+x} \end{array}.$$

Bestimmen Sie dazu (mit $c \in \mathbb{R}$ und $x, y \in D$):

(a) $f \circ f$ (insbesondere auch $D_{f \circ f}$)

(b) $f\left(\frac{1}{x}\right)$ (c) $f(cx)$

(d) $f(x+y)$ (e) $f(x) + f(y)$

(f) Für welche $c \in \mathbb{R}$ existiert ein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(cx) = f(x)$?

(g) Für welche $c \in \mathbb{R}$ existieren zwei verschiedene $x \in \mathbb{R}$ mit $f(cx) = f(x)$?

(h) Ist f injektiv, surjektiv, bijektiv?

(i) Geben Sie gegebenenfalls die Umkehrfunktion an. Was ist $f(D)$?

(3) Gegeben seien die drei Funktionen f_1, f_2, f_3 durch
$f_1(x) := x + 1, \quad f_2(x) := x^2, \quad f_3(x) := x - 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.
Berechnen Sie:

$f_1 \circ f_2 \circ f_3$, $\quad f_2 \circ f_1 \circ f_3$, $\quad f_3 \circ f_1 \circ f_2$,
$f_1 \circ f_3 \circ f_2$, $\quad f_2 \circ f_3 \circ f_1$, $\quad f_3 \circ f_2 \circ f_1$.

(4) Schreiben Sie jeweils f als *Summe einer geraden und einer ungeraden Funktion* in den Fällen:

(a) $f(x) := (2x - 1)^5 \quad (x \in \mathbb{R})$

(b) $f(x) := \sqrt{x^2 - 5x - 2} \quad (x \in ?)$

2.2 Ganzrationale Funktionen (Polynome)

(1) Berechnen Sie mit dem HORNER-Schema:

(a) für $P(x) := 2x^3 - 4x^2 + 3x + 15$ die Entwicklung um die Stelle 2,

(b) (ein Polynom) Q so, daß $x^5 + 1 = Q(x)\,(x + 1)$.

(2) Bestimmen Sie den *maximalen Definitionsbereich* und alle *Nullstellen* von:

(a) $f(x) := \dfrac{3x - 4}{6x^2 - 11x + 4}$

(b) $f(x) := 1 + \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$

(3) (a) Bestimmen Sie für $(\pi =) 3.141592\ldots$ die *Darstellung zur Basis* 2.

(b) Für $2 \leq B \in I\!N$ sei $(58)_B + (72)_B = (141)_B$. Bestimmen Sie B.

(c) Für $2 \leq B \in I\!N$ sei $8453 = (20405)_B$. Bestimmen Sie B.

(d) $(972)_{12} = ?$

(e) $(47)_9 \cdot (17)_9 = (\ ?\ )_9$

2.3 (Gebrochen) Rationale Funktionen

(1) Stellen Sie $\frac{P}{Q}$ als Summe eines Polynoms und eines echten Polynombruchs dar *(„Division mit Rest“)*, wenn
$P(x) := 5x^5 + 2x^4 + 3x^2 - 11x + 9$ und
$Q(x) := x^3 + x + 1$.

(2) Zeigen Sie den *Satz von der ‚Eindeutigkeit‘ der Polynomdarstellung* induktiv über die Division mit Rest.

Übungen zu Kapitel 3

3.1 Folgen

(1) Zeigen Sie durch ein geeignetes einfaches Beispiel:

Sind (a_n) und (b_n) Folgen reeller Zahlen mit $a_n < b_n$ $(n \in I\!N)$, dann folgt aus $a_n \longrightarrow a$ und $b_n \longrightarrow b$ (für $a, b \in I\!R$) *nicht* $a < b$.

(2) Zeigen Sie:

(a) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \longrightarrow 0$

(b) $\dfrac{3n^3 + 7n^2 + 1}{4n^3 + 8n + 63} \longrightarrow \dfrac{3}{4}$

(c) $\dfrac{7n^2 + 3n^3 + 1}{63 + 8n + 3n^4} \longrightarrow 0$

(d) $\sqrt[n]{n^2 + n} \longrightarrow 1$

(e) $\dfrac{n^3 + 7n^4}{2n^3 - 3n + 10912} \longrightarrow \infty$

(f) $\dfrac{n^3 - 7n^4}{2n^3 - 3n + 10912} \longrightarrow -\infty$

(3) Geben Sie jeweils *Nullfolgen* (a_n) und (b_n) an mit:

(a) $\dfrac{a_n}{b_n} \longrightarrow 0$

(b) $\dfrac{a_n}{b_n} \longrightarrow 7$

(c) $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ nach oben unbeschränkt

(d) $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ nach unten unbeschränkt

(e) $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ nach unten *und* oben unbeschränkt.

(4) Zeigen Sie: $\sqrt[n]{8.1^n + 1.2^n + 8.7^n} \longrightarrow 8.7 \qquad (n \longrightarrow \infty)$

(5) Zeigen und präzisieren Sie ergänzend zu den Überlegungen aus Teilabschnitt 3.1.4:

(a) $\infty \cdot \infty = \infty$

(b) $\infty \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \infty = -\infty$

(c) $a + \infty = \infty + a = \infty \qquad (a \in \mathbb{R})$

(d) $a + (-\infty) = -\infty + a = -\infty \qquad (a \in \mathbb{R})$

(e) $a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = -\infty \qquad (a > 0)$

(f) $a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = \infty \qquad (a < 0)$

(6) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $s_n := \sum_{\nu=0}^{n} 0.6^\nu$.

(a) Berechnen Sie s_8 und $s := \lim_{n \longrightarrow \infty} s_n$.

(b) Bestimmen Sie die kleinste natürliche Zahl k, für die gilt $0.6^k < 10^{-5}$.

(c) Für welches n wird der ‚Fehler' $s - s_n$ erstmals kleiner als $5 \cdot 10^{-5}$?

(7) Zeigen Sie für $k \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| < 1$:

$$n^k a^n \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty) \ .$$

(8) Weisen Sie nach, daß die durch $a_1 := 0$, $a_2 := 1$ und

$$a_n := \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2}) \qquad (n \in \mathbb{N}_3)$$

definierte Folge konvergent ist, indem Sie das CAUCHY-Kriterium heranziehen.

(9) Zeigen Sie in Ergänzung der Überlegungen des Textes zum BABYLON*ischen Wurzelziehen*:

(a) $x_n - x_{n+1} = \frac{1}{2x_n}(x_n^2 - c) \geq 0 \qquad (n \in \mathbb{N})$

Die Folge (x_n) *ist* also *antiton.*

(b) Die Folge $\left(\frac{c}{x_n}\right)$ strebt *isoton* gegen $\sqrt{c}$.

(c) Für den *relativen Fehler* $\delta_n := \frac{x_n - c}{\sqrt{c}}$ gilt:

$$\delta_{n+1} = \frac{1}{2} \frac{\delta_n^2}{1 + \delta_n} \leq \frac{1}{2} \delta_n^2 \qquad (n \in \mathbb{N}) \ .$$

(d) Hat man nach n Schritten eine (relative) Genauigkeit von 10^{-k} erreicht, d.h. $\delta_n \leq 10^{-k}$, so liefert der nächste Schritt schon eine (relative) Genauigkeit von $0.5 \cdot 10^{-2k} \quad (n, k \in \mathbb{N})$.

(10) Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{(n+1)!} < e - \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\nu!} < \frac{3}{(n+1)!} .$$

3.2 Reihen

(1) Bestimmen Sie:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2^n} + \frac{7}{3^n}\right)$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 7^{-n}$

(c) $\sum\limits_{n=-2}^{\infty} \frac{\min(1,n)}{|n|\,!}$

(2) Zeigen Sie: $\sqrt[n]{n!} \longrightarrow \infty$.

(Hinweis: Beachten Sie (B9) aus Teilabschnitt 3.2.4.)

(3) Finden Sie eine konvergente Reihe mit lauter positiven Gliedern, die als Summe den Wert 6.01 hat.

(4) Zeigen Sie: Für $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| < 1$ gilt: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$.

(5) Untersuchen Sie die folgenden *Reihen* auf *Konvergenz*:

(a) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

(b) $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{1}{3^j + \sqrt{j}}$

(c) $\sum\limits_{n=23}^{\infty} \frac{3n-2}{n!}$

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1995}{\sqrt{n^2+n}}$

(e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{10^{12}}{4711 + n^3}$

(f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+4}$

(g) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^5}{3n^6 + 4n^3 + 3.14}$

3.3 Potenzreihen

(1) Bestimmen Sie den *Konvergenzradius* R der nachfolgenden *Potenzreihen*:

(a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$ — was passiert für $x = R$ und $x = -R$?

(b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^k\, x^k$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}\, x^n$ — was passiert für $x = R$ und $x = -R$?

(2) Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{C}$, für die die nachfolgenden *Potenzreihen* konvergieren:

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-2x)^n$ (b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-2x + i)^n$

(3) Finden Sie eine *Potenzreihe*, die (für $x \in \mathbb{R}$) genau im Intervall $[6, 9]$ konvergiert.

(4) Bestimmen Sie den *Konvergenzbereich* (in $\mathbb{R}$) der nachfolgenden *Potenzreihen*:

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!\,(x+3)^n$ (b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, 2^n\, (x-1)^n$.

3.4 Grenzwerte von Funktionen, Stetigkeit

(1) Für die nachstehend angegebenen Zuordnungsvorschriften gebe man den *maximalen Definitionsbereich* D und — soweit existieren —

$f(a)$, $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, $\lim\limits_{a<x \to a} f(x)$ und $\lim\limits_{a>x \to a} f(x)$:

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$; $a = 1$, $a = \infty$, $a = -\infty$

(b) $f(x) = \dfrac{2x^2 + x}{x^2 - 5x}$; $a \in \mathbb{R} \setminus D$

(c) $f(x) = \max\{m \in \mathbb{Z} : m \leq x\} = [x]$; $a = 1$.

(2) Bestimmen Sie $c \in \mathbb{R}$ derart, daß die Funktion f, definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} 2x + c\,, & \text{falls } x \geq 0 \\ \dfrac{x+1}{x+2}\,, & \text{falls } -2 < x < 0 \end{cases}\,,$$

in 0 *stetig* wird.

(3) Bestimmen Sie $A, B \in \mathbb{R}$ derart, daß für $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ gilt

$$\frac{8x}{(x^2-4)^2} = \frac{A}{(x-2)^2} + \frac{B}{(x+2)^2}\,.$$

(4) Zeigen Sie: *Ein reelles Polynom ungeraden Grades hat mindestens eine reelle Nullstelle.*

(5) Für $x \in \,]0, \infty[$ sei $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^{n+2} + \exp(x)}{x^n + 1}$.

(a) Zeigen Sie $$f(x) = \begin{cases} \exp(x) & , \quad 0 < x < 1 \\ (e+1)/2 & , \quad x = 1 \\ x^2 & , \quad x > 1 \end{cases}$$

(b) Bestimmen Sie die *einseitigen Grenzwerte* $\lim\limits_{x\to 1+} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to 1-} f(x)$.

(6) Bestimmen Sie für $f(x) := \dfrac{2}{1-x^2}$ den *maximalen Definitionsbereich*, Intervalle, in denen f *streng isoton* ist, und skizzieren Sie den *Graphen.*

(7) Gegeben seien die beiden *Polynome*

$$P(x) := x^4 - x^3 + x^2 - x \quad \text{und} \quad Q(x) := x^3 + 2x - 3\,.$$

(a) Bestimmen Sie die *ganzzahligen Nullstellen* .

(b) Berechnen sie alle *reellen Nullstellen* und zerlegen Sie damit die beiden Polynome in einfache Faktoren.

(c) Geben Sie mit den *komplexen Nullstellen* eine *Zerlegung in Linearfaktoren.*

(d) Berechnen Sie $\lim\limits_{x\longrightarrow 1} \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ und $\lim\limits_{x\longrightarrow -1} \dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

Übungen zu Kapitel 4

4.2 Differentiationsregeln (Ableitungskalkül)

(1) Bestimmen Sie $a, b, c \in \mathbb{R}$ derart, daß die Funktion

$$f(x) := \frac{ax^3 + bx^2 + cx}{x-1} \qquad (x \neq 1)$$

die Ableitung

$$h(x) = x + 1 + \frac{4}{(x-1)^2} \quad \text{hat.}$$

4.3 Beispiele

(1) Für die nachfolgenden Zuordnungsvorschriften f gebe man den maximalen Definitionsbereich und — falls existiert — $f'(a)$:

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} & f(x) := \sqrt{1+x} & , & a := 0 \\ \text{(b)} & f(x) := \frac{1}{x} & , & a := 5 \\ \text{(c)} & f(x) := \sqrt{2x+1} & , & a := 4 \\ \text{(d)} & f(x) := \sqrt{x^2+1} & , & a := -3\ . \end{array}$$

(2) Geben Sie die *lineare Approximation* für die in der vorangehenden Aufgabe angegebenen Funktionen in der Nähe von a:

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) \quad (x \approx a)\ .$$

Gelegentlich sagt man dazu auch: f wird bei a „*linearisiert*".

(3) Für die folgenden Zuordnungsvorschriften f gebe man den maximalen Definitionsbereich D und die Menge D_1 der $x \in D$, in denen f differenzierbar ist, und die *Ableitung*

$$f' : D_1 \longrightarrow \mathbb{R} :$$

(a) $f(x) := (x^3 - 2x)^{27}$ (b) $f(x) := \dfrac{1}{|x+1|}$

(c) $f(x) := \dfrac{x^2+3}{x^3+x^2-x-1}$ (d) $f(x) := \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

(4) Es sei $f(x) := \frac{1}{8}x\sqrt{16-x^2}$. Bestimmen Sie den maximalen *Definitionsbereich* von f, Symmetrie-Eigenschaften, Nullstellen, Extremwerte, die Menge D_1 der x, in denen f differenzierbar ist. Bestimmen Sie das Verhalten der *Ableitung* von f bei Annäherung an die Grenzen von D_1 und die Gleichung der *Tangente* an der Stelle 0.

(5) In welchem Punkt und unter welchem Winkel schneiden sich die Graphen der durch die nachfolgende Vorschriften gegebenen Funktionen f_1 und f_2:

$$f_1(x) := \frac{4}{x} \quad (x \in\ ?), \qquad f_2 := \sqrt{2x} \quad (x \in\ ?)$$

(Als Winkel ist der Schnittwinkel der zugehörigen Tangenten, der zwischen 0^0 und 90^0 liegt, zu wählen.)

(6) Bestimmen Sie *direkt* die Ableitung der durch $f(x) := \dfrac{1}{x^2}$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ gegebenen Funktion und zeigen Sie, daß die „*Potenzregel*" (angewendet auf $f(x) = x^{-2}$) das richtige Ergebnis liefert.

(7) Zeigen Sie, daß die *Wurzelfunktion* im Punkt 0 *nicht* differenzierbar ist.

4.4 Satz von Rolle und verallgemeinerter Mittelwertsatz; lokales Verhalten

(a) Es sei $f(x) := \dfrac{x}{1+x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$. Bestimmen Sie die *Nullstellen* von f, die *Ableitung* f', Bereiche, in denen f *monoton* wachsend (fallend) ist, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ und skizzieren Sie den *Graphen* von f im Intervall $[-5, 5]$.

(b) Machen Sie das Entsprechende für $f(x) := \dfrac{x^2}{1+x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$.

4.6 Die Funktionen exp, sin, cos, Sin, Cos — Teil II

(1) Bestimmen Sie zu $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen $A \geq 0$ und φ so, daß

$$\alpha \sin x + \beta \cos x = A \sin(x + \varphi) \quad (x \in \mathbb{R}) \quad \text{gilt.}$$

(2) *Differenzieren* Sie die folgenden ‚Funktionen‘:

(a) $\exp\big(\sin(x)\big)$ (b) $\sin\big(\exp(x)\big)$ (c) $\sqrt{\exp\big(\sin(x)\big)}$

(3) Für die folgenden Zuordnungsvorschriften f gebe man den maximalen Definitionsbereich D und die Menge D_1 der $x \in D$, in denen f differenzierbar ist, und die *Ableitung*

$$f' : D_1 \longrightarrow \mathbb{R} :$$

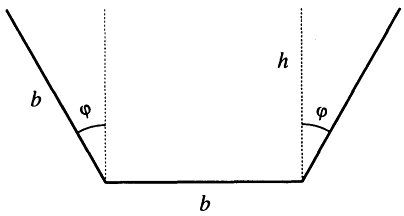
(a) $f(x) := \exp\left(\sqrt{x^2 + \sin x}\right)$ (b) $f(x) := \dfrac{e^x\, x}{\sqrt{\cos x}}$

(c) $f(x) := \sin(x^2)$ (d) $f(x) := (\sin x)^2$

(e) $f(x) := \big(\sin(x^2)\big)^2$.

(4) Aus drei Planken, die sämtlich die Breite b haben, soll eine Rutsche mit maximalem Fassungsvermögen gebaut werden.

In nebenstehender Zeichnung soll also der Winkel φ so gewählt werden, daß die Querschnittsfläche maximal wird.



(5) Beim *Konstanzer Weinfest* hat Herr Schluckspecht am Stand der *„Freien Konstanzer Blätz“* fleißig von den dort angebotenen ausgezeichneten Weinen gekostet. Er setzt sich anschließend dennoch ans Steuer seines Wagens und verursacht einen Unfall. 30 Minuten später wird eine Blutalkoholkonzentration von 1.1 Promille festgestellt. Eine Kontrollmessung nach weiteren 60 Minuten ergibt noch 0.7 Promille. Die — mathematisch sehr gebildete — Konstanzer Polizei geht davon aus, daß die *Blutalkoholkonzentration* (in Promille) $a(t)$ ‚exponentiell' abfällt:

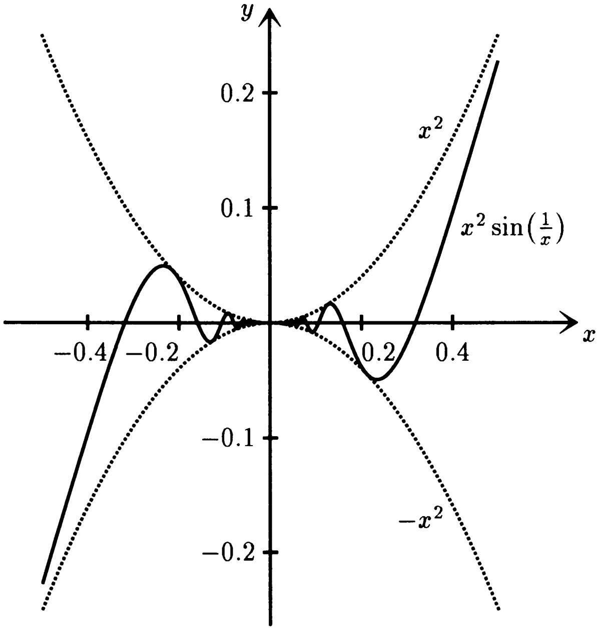
$$a(t) = a_0 e^{\alpha t} \qquad (t \text{ in Stunden})\,.$$

Kommt Herr Schluckspecht noch mit einer Geldbuße weg, wenn sein Strafregister bis zu diesem Zeitpunkt noch keine einschlägigen Taten aufweist? (Dazu muß gelten: $0.8 < a_0 < 1.3$)

(6) Es sei

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & ,\ \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & ,\ \text{falls } x = 0\,. \end{cases}$$

Einen Ausschnitt des Graphen von f zeigt mit denen der ‚Vergleichsfunktionen' $I\!R \ni x \longmapsto x^2$ und $I\!R \ni x \longmapsto -x^2$:



Zeigen Sie:

(a) f *ist differenzierbar* (für die Differenzierbarkeit im Punkt 0 muß auf die Definition zurückgegriffen werden!),

(b) f' *ist in* 0 *unstetig.*

(7) Die *Additionstheoreme für die trigonometrischen Funktionen* wurden im Text mit Hilfe der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion (für komplexe Argumente) über die EULERsche Formel gewonnen. Führen Sie folgende alternative Beweismöglichkeit aus:

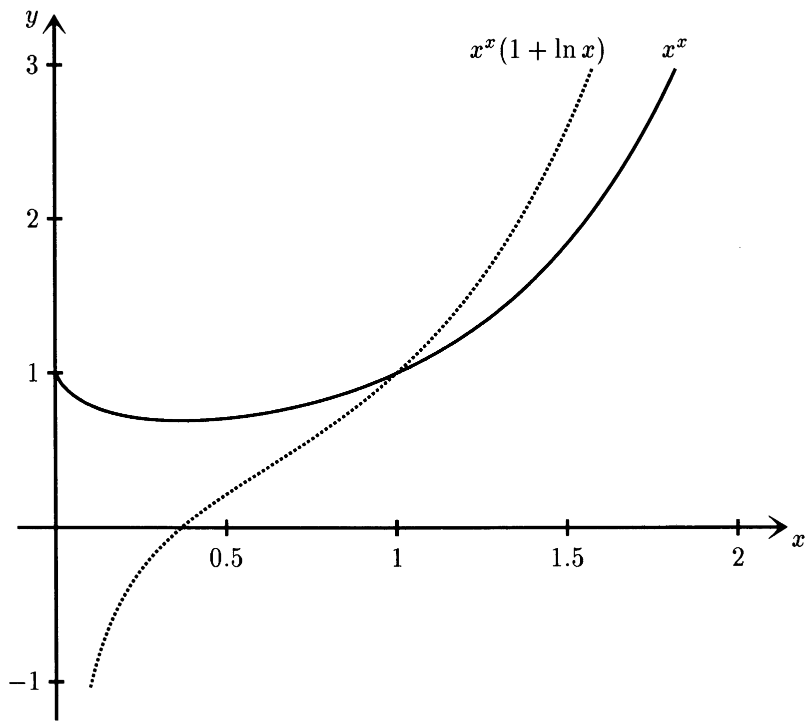
Für $c \in \mathbb{R}$ sei $\varphi(x) := \sin(c-x)\cos(x) + \cos(c-x)\sin(x)$ $(x \in \mathbb{R})$. $\varphi'(x) = 0$ liefert $\varphi(x) = \sin(c)$ und mit $c := x + y$ das Additionstheorem für den Sinus. Für $y \in \mathbb{R}$ fest erhält man nun über $h(x) := \cos(x+y) - \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$ $(x \in \mathbb{R})$ das Additionstheorem für den Cosinus.

4.7 Die Funktionen tan, cot, Tan, Cot

(1) Formulieren und beweisen Sie entsprechend zu den Überlegungen des Textes (1), (2) und (3) analoge Aussagen für den *Cotangens* und — entsprechend zu (4), (5) und (6) — für den *hyperbolischen Cotangens*.

4.8 Differentiation der Umkehrfunktion, Logarithmus

(1) Zeigen Sie, daß die *Ableitung* der Funktion $]0,\infty[\ \ni x \longmapsto x^x$ durch $]0,\infty[\ \ni x \longmapsto x^x(1+\ln x)$ gegeben ist.



(2) Bestimmen Sie den *maximalen Definitionsbereich* und die *Ableitung* von:

(a) $f(x) := \left(x + x^{-1}\right)^2$ (b) $g(x) := \ln\left(\sqrt{x+1}\right)$
(c) $h(x) := (\cos x)^{-2}$ (d) $g \circ h$

(3) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich D von f, die Menge D_1 der $x \in D$, in denen f differenzierbar ist, und f':

(a) $f(x) := \sqrt{x^x + \left(\cos(\sqrt{x}\,)\right)^2}$ (b) $f(x) := \dfrac{\sqrt{x}\sin x}{\ln x}$

(c) $f(x) := \exp\left(\sqrt{x^2 + \sin(\ln x)}\right)$ (d) $f(x) := \dfrac{e^x \ln x}{\sqrt{\cos x}}$

(4) Es sei $f(x) := x^5 + x + 1 \quad (x \in \mathbb{R})$. Zeigen Sie:

(a) f ist streng monoton wachsend.

(b) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist surjektiv.

(c) Bestimmen Sie für die Umkehrfunktion $g := f^{-1}$ die Werte $g'(3)$ und $g'(1)$.
(Es ist *nicht* verlangt, die Umkehrfunktion zu bestimmen!)

(5) Zeigen Sie: (a) $\operatorname{ArSin} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\,\right) \qquad (x \in \mathbb{R})$

(b) $\operatorname{ArCos} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\,\right) \qquad (1 \le x \in \mathbb{R})$

(c) $\operatorname{ArTan} x = \frac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) \qquad \left(|x| < 1,\ x \in \mathbb{R}\right)$

(6) Zeigen Sie, daß der Graph der Funktion ln in dem von der Geraden $y = x - 1$ und der Hyperbel $y = 1 - \frac{1}{x}$ begrenzten Bereich liegt, also für $x > 0$ die Abschätzung

$$1 - \frac{1}{x} \le \ln(x) \le x - 1 \qquad \text{gilt.}$$

4.9 Höhere Ableitungen

(1) Eine Funktion f_1 sei in $]-\infty, -1[$ definiert durch $f_1(x) := \frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{7}{3}$. Bestimmen Sie die Gleichung f_2 einer Parabel — $f_2(x) = ax^2 + bx + c$ — so, daß durch

$$f(x) := \left\{\begin{array}{ll} f_1(x), & x \le -1 \\ f_2(x), & x > -1 \end{array}\right\}$$

eine 2-mal differenzierbare Funktion f definiert wird.

4.11 Anwendungen

(1) Diskutieren Sie den Graphen von f („*Kurvendiskussion*")

(a) $f(x) := x^2 + 2|x - 1| - 1 \qquad (x \in [-3, 2])$

(b) $f(x) := \dfrac{2x^2 - 7x + 6}{x - 1}$

(c) $f(x) := x^4 - 3x^2 + 2$

(d) Mit Hilfe des Graphen von f (in (c)) bestimme man für $\alpha \in \mathbb{R}$ die Anzahl der Nullstellen von $x^4 - 3x^2 + 2 - \alpha = 0$.

(2) Zeigen Sie: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\quad 1 + (x-1)\exp(x) \geq 0$.

(3) Es sei $f(x) := x^4 - 4x^2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

(a) Bestimmen Sie die *Nullstellen* und die Punkte mit horizontaler Tangente.

(b) Bestimmen Sie die *Gleichung der Tangente* t_1 an der Stelle $x = 1$.

(c) Für welche x sind die zugehörigen Tangenten parallel zur Tangente an der Stelle 1 ?

(d) Bestimmen Sie die gemeinsamen Punkte von f und t_1 .

(e) Skizzieren Sie den *Graphen* von f .

(4) Diskutieren Sie den Graphen von f („*Kurvendiskussion*") für

$$f(x) := \sqrt{mx^2 - 2x + 1}$$

mit $0 < m \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie insbesondere die *Asymptoten* für $x \longrightarrow \infty$ und $x \longrightarrow -\infty$ und ihre Lage zum Graphen von f in Abhängigkeit von m .

(5) Es sei $f(x) := 4x^3 - 2x^2 - 3x + 1 \qquad (x \in \mathbb{R})$.

(a) Bestimmen Sie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ so, daß
$f(x) = \big(12x^2 - 4x - 3\big)(ax + b) + cx + d$ für $x \in \mathbb{R}$ gilt.

(b) Zeigen Sie, daß f ein relatives Maximum mit Wert M in einem Punkt u und ein relatives Minimum mit Wert m in einem Punkt v annimmt und für diese Größen gilt:

$$f(v) = -\tfrac{20}{9}v + \tfrac{5}{6}, \quad f(u) = -\tfrac{20}{9}u + \tfrac{5}{6}.$$

Damit bestimme man M und m .

(c) *Diskutieren Sie den Graphen von* f; skizzieren Sie den Graphen (6 cm als Längeneinheit). Konstruieren Sie die Punkte (u, M) und (v, m) *geometrisch.*

(6) Bestimmen Sie die relativen und absoluten *Extrema* der Funktion f:

$$f(x) := \begin{cases} 2x^2 \quad , & 0 \le x \le 1 \\ -2x \quad , & 1 < x < 2 \\ -\frac{1}{2}x^2 \quad , & 2 \le x \le 3 \ . \end{cases}$$

(7) Betrachten Sie die Funktion $f(x) := \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \qquad (x \in \mathbb{R})$.
Berechnen Sie dazu die *Wendepunkte* und geben Sie für diese Punkte die Tangentengleichung („*Wendetangente*").

(8) Diskutieren Sie den Graphen von f („*Kurvendiskussion*")

(a) $f(x) := x + \frac{1}{x}$

(b) $f(x) := \frac{1}{1+x^2}$

(c) $f(x) := \frac{x+1}{x-1}$.

(9) Es sei $f(x) := x^2 e^{-x} \quad (x \in \mathbb{R})$.

(a) Berechnen Sie f' und f''.

(b) In welchen Intervallen ist f streng isoton, in welchen streng antiton?

(c) Berechnen Sie $\max\{f(x) : x \in [-3, 50]\}$.

(d) Zeichnen Sie qualitativ den *Graphen* von f mit genauer Lage der *lokalen Extrema* und *Wendepunkte.*

(10) Bestimmen Sie *Nullstellen, Extrema* und *Wendepunkte* sowie das Verhalten für $x \longrightarrow 0$ und $x \longrightarrow \infty$ der Funktion

$$f(x) := \frac{\ln x}{x} \ .$$

(11) Wie muß man den Radius und die Höhe eines zylindrischen Behälters mit vorgegebenem Volumen V wählen, wenn so wenig Material wie möglich zu seiner Herstellung verwendet werden soll?

(12) Welches von allen einem gegebenen Kreis einbeschriebenen Rechtecken hat den größten Flächeninhalt?

(13) Diskutieren Sie das Beispiel (B15) aus Teilabschnitt 4.11.2 unter der Annahme, daß die *Kostenfunktion* die spezielle Gestalt

$$K(x) = \alpha + \beta x - \gamma x^2 + \delta x^3$$

mit positiven Konstanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ hat.

4.12 Polarkoordinatendarstellung komplexer Zahlen

(1) Bestimmen Sie alle *4. Wurzeln von* i und alle *3. Wurzeln von* $2i$.

(2) Stellen Sie die nachfolgenden komplexen Zahlen in *Polarform* dar:

(a) 1 (b) i (c) -1
(d) $-i$ (e) $1+i$ (f) $-1+i$
(g) $-1-i$ (h) $1-i$

Übungen zu Kapitel 5

5.1 Stammfunktionen (unbestimmte Integrale)

(1) Bestimmen Sie den Definitionsbereich und eine *Stammfunktion* zu:

(a) $\sqrt{3x}+\dfrac{1}{\sqrt{\pi x}}$ (b) $\dfrac{7x^2}{\sqrt{2x^3-5}}$

(c) $(1-t)\sin t$ (d) $\dfrac{-1}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^2}$

(e) $\dfrac{7(t-3)}{2t^2+5t-3}$ (f) $\dfrac{1}{t^2-2t-2}$

(g) $\dfrac{1}{2x^2+4x+5}$ (h) $\dfrac{2x^2+x+7}{(x+1)\,(x^2-2x+5)}$

(i) $\dfrac{3t^3-20t+17}{t^2+t-6}$

(j) $\dfrac{6x^3-29x^2+100x-64}{x^4-8x^3+42x^2-104x+169}$

(k) $\dfrac{5x^4-33x^3+123x^2-161x+507}{x\left(x^2-4x+13\right)^2}$

Die Lösungen dieser und der nächsten Aufgabe sind recht aufwendig!

(2) Bestimmen Sie den Definitionsbereich und eine *Stammfunktion* zu:

(a) $\arctan x$ (b) $\frac{1}{x}\ln x$ (c) $(\ln x)^2$

(d) $\dfrac{1}{x\ln x}$ (e) $e^x\sin x$ (f) $\dfrac{\arctan x}{1+x^2}$

(g) $\dfrac{1}{3x-2}$ (h) $\dfrac{x^3}{1+x^4}$ (i) $s\cos s$

(j) $\dfrac{1}{(1+u^2)^3}$ (k) $\dfrac{3x+2}{\sqrt{x}}$

(3) Bestimmen Sie

(a) $\displaystyle\int^x \frac{dt}{t\sqrt{1-t^2}}$ (<u>Anleitung:</u> $t=\dfrac{1-s^2}{1+s^2}$ substituieren)

(b) $\displaystyle\int^{x} \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2-1}}$ $(x > 1)$ (Anleitung: $t = \frac{1}{2}\left(s + \frac{1}{s}\right)$ substituieren)

(4) Lösen Sie Teil (b) der vorangehenden Aufgabe mit der Substitution $t = \operatorname{Cos} s$ und vergleichen Sie die beiden Ergebnisse.

(5) Bestimmen Sie eine *Stammfunktion* zu

$$f(x) := \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} \qquad (x > 0),$$

indem Sie $s = \sqrt[3]{1+t^{\frac{1}{4}}}$ substituieren.

(6) Bestimmen Sie den Definitionsbereich und eine *Stammfunktion* zu $f(x) := \dfrac{1}{1-\sin x}$. Anleitung: Substituieren Sie $s = \tan(t/2)$.

(7) Bestimmen Sie $\displaystyle\int^{x} \frac{1}{\sin t}\,dt$ $(x \in\,]0, \pi[)$. (Anleitung: vgl. (6))

(8) Bestimmen Sie den Definitionsbereich und eine *Stammfunktion* zu:

(a) $f(x) := \dfrac{x^3-2x+1}{x^2+x+1}$ (b) $f(x) := \dfrac{x^3+1}{x+1}$

(c) $f(x) := \dfrac{6}{x^3-1}$ (d) $f(x) := \dfrac{1+e^x}{1-e^x}$

(e) $f(x) := \dfrac{4xe^{2x}}{(e^{2x}-1)^2}$ (f) $f(x) := (x^2+1)\exp(-x)$

(g) $f(x) := x^2 \sin x$ (h) $f(x) := \dfrac{2-x^2}{(2+x^2)^2} \arctan\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$

(i) $f(x) := \dfrac{x^2}{(x^2-1)(x^2+1)}$

(9) Bestimmen Sie $\displaystyle\int^{x} \frac{\cos^5 t + \cos t}{2 - \cos^2 t}\,dt$.

Anleitung: $s = \sin t$ substituieren, einmal $\cos t$ im Zähler ausklammern und die restlichen cos–Terme durch sin ausdrücken.

(10) Bestimmen Sie $\displaystyle\int^{x} \frac{dt}{4\cos^2 t - \sin^2 t}$.

Anleitung: Unten $\cos^2 t$ ausklammern, dann $s = \tan t$ substituieren.

(11) Bestimmen Sie

(a) $\displaystyle\int^{x} te^{-t^2}\,dt$ (b) $\displaystyle\int^{x} te^{t}\,dt$ (c) $\displaystyle\int^{x} t^2e^{t}\,dt$.

(12) Zeigen Sie, daß Integrale vom Typ

$$\int^{x} R_1\left(t,\, \sqrt{1+t^2}\right) dt$$

durch die *rationale Substitution* $t = \frac{1}{2}\left(s - \frac{1}{s}\right)$ auf die Integration rationaler Funktionen zurückgeführt werden können und durch die *transzendente Substitution* $t = \operatorname{Sin} s$ auf Integranden vom Typ $R(e^s)$.

(13) Bestimmen Sie den Definitionsbereich und eine *Stammfunktion* zu:

(a) $e^{-2t}\sin(3t)$ (zweimal partiell integrieren)

(b) $\sqrt{1-x^2}$ ($t = \sin\vartheta$ substituieren)

(c) $\dfrac{1}{\sin x + 2\cos x + 3}$ ($s = \tan(\frac{t}{2})$ substituieren)

(d) $\dfrac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}$ ($s = \sqrt{e^t+1}$ substituieren)

(e) $\dfrac{2x+5}{3x^2-x+4}$

(f) $\dfrac{2x^3+x^2+3x+2}{x^3-x^2+x-1}$

(14) Bestimmen Sie den Definitionsbereich und eine *Stammfunktion* zu:

(a) $f(x) := \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+2x+3}}$ Anleitung: Nacheinander $z = \dfrac{x+1}{\sqrt{2}}$ und $z = \frac{1}{2}\left(\tau - \frac{1}{\tau}\right)$ substituieren.

(b) $f(x) := \dfrac{5x+7}{\sqrt{5-4x-x^2}}$

Anleitung: Substituieren Sie nacheinander $z = \dfrac{x+2}{3}$ und $z = \cos v$.

(c) $f(x) := \dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{(\cos^3 x + \sin^3 x)^2}$

Anleitung: Substituieren Sie $v = \tan x$. Vergleichen Sie mit der ‚Standard-Methode' $s = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

5.2 Bestimmtes Integral, Flächeninhalt

(1) Berechnen Sie die nachfolgenden *bestimmten Integrale*:

(a) $\displaystyle\int_1^4 \frac{t^4+1}{t^2}\, dt$ (b) $\displaystyle\int_{0.5}^1 \frac{x e^x + 1}{x}\, dx$

(c) $\displaystyle\int_0^1 y^2\sqrt{1-y^3}\,dy$

(d) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{x^2-16}\,dx$

(e) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1+t}{t^3}\,dt$

(f) $\displaystyle\int_2^3 \frac{2x}{(x^2-3)^2}\,dx$

(g) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^5 \cos x\,dx$

(h) $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x^2-1}{1+\sqrt{x-x^3}}\,dx$

(i) $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\sin\theta}{(\cos\theta)^2}\,d\theta$ (kann ohne Rechnung bestimmt werden!)

(j) $\displaystyle\int_{l_1}^{l_2} \frac{\lambda(l-l_0)}{l_0}\,dl$ $(\lambda, l_0, l_1, l_2 \in I\!R$ mit $l_1 < l_2)$

(2) Bestimmen Sie zu $f(x) := \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ den *maximalen Definitionsbereich* und die *Stammfunktion*, die an der Stelle 1 den Wert 43 annimmt. Berechnen Sie noch $\int_1^{17} f(x)\,dx$.

(3) Berechnen Sie den *Flächeninhalt* der Fläche, die gegeben ist durch die Bedingungen

$$y^2 - 2ax \le 0, \quad y - x \ge 0 \quad \text{und} \quad a > 0\,.$$

(4) Bestimmen Sie den *Flächeninhalt* der Fläche, die begrenzt wird durch die Graphen der drei Funktionen

$$y = -1, \quad y = 2-x \quad \text{und} \quad y = x^3\,.$$

(5) Zeigen Sie für $0 < a < b$ und $c > 0$, daß die Fläche unter der gleichseitigen Hyperbel $y = \frac{1}{x}$ im Intervall $[a, b]$ ebenso groß wie in $[ac, bc]$ ist.

(6) Bestimmen Sie die von der *Kardioide*

$$r = a(1+\cos\varphi) \qquad (0 \le \varphi \le 2\pi)$$

umschlossene *Fläche* $\quad (a > 0)$.

(7) Bestimmen Sie den *Flächeninhalt* $S(\alpha)$ der Fläche, die begrenzt wird von der x–Achse, den Geraden $x = 1$ und $x = \alpha$ und dem Graphen der Funktion $f(x) := \frac{1}{x^2}$. Untersuchen Sie $S(\alpha)$ für $\alpha \to 0$ und $\alpha \to \infty$.

(8) Berechnen Sie das *Volumen eines* geraden *Kreiskegels* mit dem Grundkreisradius r und der Höhe h.

(9) Es ist das *Volumen des Rotationsparaboloids* der Höhe h (> 0) zu bestimmen, das durch Rotation um die x–Achse der durch den Graphen von $f(x) := \sqrt{x}$, die x–Achse und die Gerade $x = h$ begrenzten Fläche erzeugt wird.

(10) *Diskutieren Sie den Graphen der Funktion*

$$f(x) := x + 1 + \frac{4}{(x-1)^2}\,.$$

Berechnen Sie den *Flächeninhalt* $T(\lambda)$ der Fläche, die begrenzt wird von den Geraden $x = 3$, $x = \lambda$, dem Graphen von f und der zugehörigen *Asymptote* $(\lambda > 3)$.

(11) Für $\infty > T > 1$ sei A_T die durch die Geraden $1 = x$, $T = x$, $y = 0$ und den Graphen der Funktion $y = x^{-\frac{2}{3}}$ begrenzte Fläche. Bestimmen Sie den *Flächeninhalt* von A_T.

A_T rotiere um die x–Achse; berechnen Sie das *Volumen* des dadurch gegebenen *Rotationskörpers* V_T.

Untersuchen Sie das Grenzverhalten von A_T und V_T für $T \longrightarrow \infty$.

(12) Die Fläche zwischen den Graphen der beiden Funktionen $y = 2 - x^2$ und $y = x^2$ rotiere um die x-Achse. Bestimmen Sie das *Volumen des* dadurch gegebenen *Rotationskörpers.*

(13) Bestimmen Sie den *Flächeninhalt* der Fläche, die im Innern der beiden durch

$$r = \sin\varphi \quad \text{und} \quad r = \cos\varphi$$

gegebenen Kreise liegt.

(14) Zeigen Sie am Beispiel

$$f(x) := \begin{cases} 1 & , \quad x \in \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \\ 0 & , \quad x \in [0,1] \setminus \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}\,, \end{cases}$$

daß selbst eine *Funktion mit unendlich vielen Sprungstellen integrierbar* sein kann.

(15) Es seien $a > 0$ und $f : [-a, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie:

(a) f *gerade* $\Longrightarrow \displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$

(b) f *ungerade* $\Longrightarrow \displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0\,.$

(16) Zeigen Sie über den *Mittelwertsatz der Integralrechnung*

$$\int_0^1 \sqrt{x}\,(x+1)\,dx \;=\; \mu\,\frac{3}{2}$$

für ein geeignetes $\mu \in [0,\,1]$.

5.3 Uneigentliche Integrale

(1) Untersuchen Sie auf *Konvergenz*:

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \cos x\,dx$ (b) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cot x\,dx$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx$ (d) $\displaystyle\int_{13}^\infty \frac{x^{12}}{3x^{14}+9x^2+1}\,dx\,.$

(2) Untersuchen Sie auf *Konvergenz* und *bestimmen* Sie gegebenenfalls:

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \exp(x)\,dx$ (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \exp(x)\,dx$

(c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^3}$ (d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

(e) $\displaystyle\int_0^\infty 2x\,\exp(-x^2)\,dx\,.$ (f) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{(x-1)^3}$

(g) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}\,dx$ (h) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(\mathrm{Cos}\,x)^2}\,dx$

(i) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}}\,dx$ (j) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx$

(3) Untersuchen Sie auf *Konvergenz*: $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \exp(-x^2)\,dx\,.$

(4) Untersuchen Sie die folgenden *Reihen* auf Konvergenz:

(a) $\displaystyle\sum_{n=7}^\infty \frac{1}{n\sqrt{n}}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty \frac{n^5}{3n^6+4n^3+\pi}$

(c) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n\,(\ln n)^{\alpha}}$ für $\alpha \in \mathbb{R}$

(5) Für $x \in \,]0,\infty[$ sei

$$f(x) := \frac{\sin x}{x} \ .$$

Zeigen Sie, daß f über $]0,\infty[$ *uneigentlich integrierbar*, aber *nicht absolut uneigentlich integrierbar* ist.

5.4 Elementare Methoden zur numerischen Berechnung von Integralen

(1) Berechnen Sie die *Näherungswerte* $T_2(f)$, $T_4(f)$, $S_2(f)$, $S_4(f)$ zu dem Integral $\int\limits_1^5 \ln(x)\,dx$. Schätzen Sie jeweils *vorweg* den Fehler ab und vergleichen Sie mit dem richtigen Wert.

(2) Bestimmen Sie mit der zusammengesetzten SIMPSON-*Regel* näherungsweise $\int\limits_0^{\pi/4} \sin x\,dx$. Wählen Sie dabei die Anzahl der Teilintervalle so, daß der Fehler kleiner als 10^{-4} bleibt.

(3) Bestimmen Sie einen Nährungswert für $\int\limits_0^{0.5} \dfrac{x}{1-x^2}\,dx$.

(a) mit der zusammengesetzen SIMPSON-*Regel* für $n = 5$,

(b) mit der zusammengesetzten *Trapez-Regel* für $n = 10$.

(c) Bestimmen Sie zum Vergleich den exakten Wert des Integrals.

Übungen zu Kapitel 6

6.1 Polynom–Interpolation

(1) Es seien $x_\nu := -0.4 + \nu \cdot 0.2$ und $y_\nu := \exp(x_\nu)$ $(\nu = 0, \dots, 4)$. Bestimmen Sie das *Interpolationspolynom* P zu den Knoten (x_ν, y_ν). Zeigen Sie für $x \in [-0.4, 0.4]$ die Abschätzung

$$|\exp(x) - P(x)| \le 10^{-4} .$$

(2) In einer Tafel für eine Funktion f findet man die Werte

$$f(1) = 1.5709, \quad f(4) = 1.5727 \quad \text{und} \quad f(6) = 1.5751 .$$

Bestimmen Sie eine Nährung für $f(3.5)$ durch *Interpolation*

(a) mit LAGRANGE-*Darstellung*,

(b) mit NEWTON-*Algorithmus*.

6.2 TAYLOR–Reihen

(1) Bestimmen Sie — mit Hilfe der geometrischen Reihe — die TAYLOR-*Reihe* um 0 zu:

(a) $f(x) := \dfrac{1}{(1-x)^2} \qquad (|x| < 1)$

(b) $f(x) := \dfrac{x}{x^2 - x - 2} \qquad (|x| < 1)$.

Anleitung: Partialbruchzerlegung

(c) Bestimmen Sie entsprechend zu der Funktion f aus (b) die TAYLOR-*Entwicklung* um die Stelle -5.

(2) Bestimmen Sie die TAYLOR-*Reihe* um 0 zu:

(a) $\dfrac{1}{1+x^3}$ (b) $\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$.

(c) $\dfrac{1-x}{1+x}$ (d) $2^x - 1$

(3) Bestimmen Sie — nach der im Text für die TAYLOR-*Entwicklung* von $\ln(1+x)$ angewandten Methode — die TAYLOR-*Reihe* um 0 zu der Funktion arctan:

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad (x \in [-1, 1]) .$$

Versuchen Sie zum Vergleich einmal, diese TAYLOR-Reihe direkt aus der Definition zu berechnen. Sie werden spätestens bei der dritten Ableitung sehen, daß die Rechnung *sehr* mühsam wird!

(4) Bestimmen Sie $f^{(6)}(0)$ für

(a) $f(x) := \dfrac{1}{1+x^2} \qquad (x \in I\!R)$

(b) $f(x) := \begin{cases} \dfrac{\arctan(x)}{x}, & I\!R \ni x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$.

Anleitung: Berechnen Sie die TAYLOR-*Reihe* zu f (um 0) und lesen Sie *daraus* $f^{(6)}(0)$ ab.

(5) Für das TAYLOR-*Polynom* dritten Grades um 2 zur Exponentialfunktion bestimme man die *Maximalabweichung* dieses Polynoms von exp im Intervall $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi\right]$.

(6) Bestimmen Sie die TAYLOR-*Reihe* zu der durch

$$u(x) := \frac{\cos x - 1}{x^2} \qquad (x \in I\!R \setminus \{0\})$$

und *stetiger Ergänzung* in 0 gegebenen Funktion.

6.3 Unbestimmte Ausdrücke, Regeln von DE L'HÔPITAL

(1) Bestimmen Sie die folgenden *Grenzwerte*:

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$ (b) $\lim\limits_{x \to 0+} x^\alpha \ln x \quad (\alpha > 0)$

(c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - b^x}{x} \quad (a, b > 0)$ (d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x^2}$

(e) $\lim\limits_{x \longrightarrow 3} \left(x + \dfrac{1}{x-3}\right)\left(\sqrt{x+1} - 2\right)$ (f) $\lim\limits_{x \longrightarrow 1} \dfrac{\frac{x-3}{4} + \frac{1}{x+1}}{(x-1)^2}$

(g) $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\sqrt{x+1} - 1}{x^3}$ (h) $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{e^x - x - 1}{x^2}$

(i) $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\cos x - 1}{x^2}$ (j) $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{\log x}{x^\alpha} \quad (\alpha > 0)$

Folgern Sie aus (j): *Der Logarithmus wächst also schwächer als jede Potenz mit positiven Exponenten.*

(2) Was ist falsch bei der folgenden ‚Anwendung der DE L'HÔPITAL*schen Regel*'?

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \to 1} \frac{3x^2 + 1}{2x - 3} = \lim_{x \to 1} \frac{6x}{2} = 3.$$

6.4 FOURIER–Reihen

(1) Es sei $f(x) := x^2$ für $-\pi < x \leq \pi$.

(a) Bestimmen Sie die FOURIER-*Reihe* zu der aus f durch 2π-periodische Fortsetzung entstehenden Funktion.

(b) Zeigen Sie mit (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$ und:

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

(2) Skizzieren Sie den *Graphen* der Funktion f, die FOURIER-*Reihe* zu der entsprechenden 2π-periodisch fortgesetzten Funktion und den Wert der FOURIER-Reihe an den Sprungstellen in den Fällen:

(a) $f(x) := \begin{cases} x + \pi & , \quad -\pi \leq x < 0 \\ 0 & , \quad 0 \leq x < \pi \end{cases}$

(b) $f(x) := \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leq x < \pi \\ 0 & , \quad \pi \leq x < 2\pi \end{cases}$

(c) $f(x) := \begin{cases} 1 & , \quad |x| < \pi/2 \\ 0 & , \quad \pi/2 \leq |x| \leq \pi \end{cases}$

Die folgenden beiden Übungsaufgaben führen den im Text angesprochenen *Zusammenhang zwischen* FOURIER-REIHEN *und Approximation im quadratischen Mittel* aus. Diese Ausführungen wenden sich ausschließlich an mathematisch besonders interessierte Leser.

(3) Orthogonale Funktionen

Es seien $-\infty < a < b < \infty$; $\lambda > 0$ und

$$\mathfrak{R} := \{ f \mid f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \ \text{integrierbar} \}.$$

(a) $\mathfrak{R}$ ist — mit punktweise erklärter Addition und Skalarmultiplikation — ein *linearer Raum (Vektorraum).* Außerdem gilt noch: $f, g \in \mathfrak{R} \Longrightarrow f \cdot g \in \mathfrak{R}$.

(b) Für $f, g \in \mathfrak{R}$ bezeichnen wir

$$(f \mid g) := \lambda \int_a^b f(x) g(x)\, dx .$$

Dann gelten (für $f, g, f_1, f_2 \in \mathfrak{R}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} &(\ \mid\ ) : \mathfrak{R} \times \mathfrak{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ &(f \mid g) = (g \mid f) && (\text{„}\textit{Symmetrie}\text{“}) \\ &\left.\begin{aligned}(\alpha f \mid g) &= \alpha (f \mid g) \\ (f_1 + f_2 \mid g) &= (f_1 \mid g) + (f_2 \mid g)\end{aligned}\right\} && (\text{„}\textit{Linearität}\text{“}) \\ &(f \mid f) \geq 0 \end{aligned}$$

Eine solche Abbildung $(\ \mid\ )$ nennen wir „*Skalarprodukt*“ (genauer „*Semi-Skalarprodukt*“). Zwei Funktionen $f, g \in \mathfrak{R}$ heißen „*orthogonal*“ genau dann, wenn $(f \mid g) = 0$ ist.

Funktionen $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ heißen ein „*Orthogonalsystem*“ genau dann, wenn Sie paarweise orthogonal sind, d.h. $(\varphi_\nu \mid \varphi_\mu) = 0$ für $\nu \neq \mu$ gilt, ein „*Orthonormalsystem*“ genau dann, wenn zusätzlich $(\varphi_\nu \mid \varphi_\nu) = 1$ $(\nu \in \mathbb{N}_0)$, also insgesamt

$$(\varphi_\nu \mid \varphi_\mu) = \left\{ \begin{matrix} 0 & , & \nu \neq \mu \\ 1 & , & \nu = \mu \end{matrix} \right\} \quad \text{gilt.}$$

(c) Es sei nun $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ ein *Orthonormalsystem.* Wir suchen dann für $f \in \mathfrak{R}$ Koeffizienten $c_0, c_1, c_2, \ldots$ so, daß für $n \in \mathbb{N}_0$

$$\int_a^b \Big(f(x) - \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu \varphi_\nu(x) \Big)^2 dx$$

minimal wird *(„Approximation im quadratischen Mittel“)*:
Betrachten Sie dazu für beliebige $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \mathbb{R}$ die Funktion $S_n := \sum\limits_{\nu=0}^{n} \gamma_\nu \varphi_\nu$. Zeigen Sie:

$$(f - S_n \,|\, f - S_n) = (f \,|\, f) + \sum_{\nu=0}^{n} \left(\gamma_\nu - (f \,|\, \varphi_\nu)\right)^2 - \sum_{\nu=0}^{n} (f \,|\, \varphi_\nu)^2$$

Dieser (nicht-negative) Ausdruck wird offenbar *minimal* genau für $\gamma_\nu = (f \,|\, \varphi_\nu) \quad (\nu = 0, \ldots, n)$.

(d) Lesen Sie aus (c) ab:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (f \,|\, \varphi_\nu)^2 \le (f \,|\, f) \qquad \text{(„BESSEL}\textit{sche Ungleichung}\text{“)}$$

Die Zahlen $(f \,|\, \varphi_\nu)$ heißen *„verallgemeinerte* FOURIER-*Koeffizienten*“ (von f bezüglich φ_ν).

Insgesamt ist so der folgende **Approximationssatz** bewiesen:

Vor.: $n \in \mathbb{N}_0$, $f \in \mathfrak{R}$

Beh.: *Unter allen Funktionen der Form* $\sum_{\nu=0}^{n} \gamma_\nu \varphi_\nu$ *wird* f *am besten durch*

$$F_n := \sum_{\nu=0}^{n} (f \,|\, \varphi_\nu)\, \varphi_\nu$$

im quadratischen Mittel approximiert, und es gilt:

$$(f - F_n \,|\, f - F_n) = (f \,|\, f) - \sum_{\nu=0}^{n} (f \,|\, \varphi_\nu)^2 .$$

(4) Es seien jetzt *speziell*:

$a := -\pi$, $b := \pi$ und $\lambda := \frac{1}{\pi}$, also

$\mathfrak{R} = \{f \,|\, f : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ integrierbar}\}$ und

$$(f \,|\, g) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x)\, dx \qquad \text{für} \quad f, g \in \mathfrak{R} .$$

Nach den Überlegungen aus Teilabschnitt 5.2.4 bilden dann die Funktionen $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ definiert durch

$$\begin{array}{llll} \varphi_0(x) := \frac{1}{\sqrt{2}}, & & & \\ \varphi_1(x) := \cos x, & \varphi_2(x) := \sin x, & & \\ \varphi_3(x) := \cos(2x), & \varphi_4(x) := \sin(2x), & & \\ \varphi_5(x) := \cos(3x), & \varphi_6(x) := \sin(3x), & & \\ \quad \ldots & \quad \ldots & & (x \in [-\pi, \pi]), \end{array}$$

ein *Orthonormalsystem.*

Für $f \in \mathfrak{R}$ setzen wir $\quad T_n := F_{2n} := \sum_{\nu=0}^{2n} (f \,|\, \varphi_\nu)\varphi_\nu$.

(a) Mit $a_0 := \sqrt{2}\,(f\,|\,\varphi_0)$ und $a_\nu := (f\,|\,\varphi_{2\nu-1})$, $b_\nu := (f\,|\,\varphi_{2\nu})$ für $\nu \in \mathbb{N}$ gilt

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} \big(a_\nu \cos(\nu x) + b_\nu \sin(\nu x)\big)$$

für $x \in [-\pi, \pi]$ („FOURIER-*Polynom n-ten Grades zu* f“).

(b) Die Koeffizienten gemäß (a) sind gerade die FOURIER-*Koeffizienten* aus Abschnitt 6.4.

(c) Die BESSEL*sche Ungleichung* lautet in diesem Spezialfall:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \big(a_\nu^2 + b_\nu^2\big) \le \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx\,.$$

Übungen zu Kapitel 7

(1) Es seien $D := [1, 2] \times [-1, 1]$ und

$$f(x, y) := 2x + \sqrt{1 - y^2} \qquad \text{für } (x, y) \in D\,.$$

Zeigen Sie: Die *explizite DGL 1. Ordnung* $y' = f(x, y)$ hat *keine Lösung* im Intervall $j := [1, 2]$, die die ‚Anfangsbedingung‘ $y(1) = 0$ erfüllt.

Anleitung: Für eine solche Lösung φ hätte man
$$\varphi' = 2x + \sqrt{1 - \varphi(x)^2} \ge 2x \ge 2 \quad (x \in j)$$
und daher für $x \in \left]\frac{3}{2}, 2\right]$ nach dem MWS $\varphi(x) > 1$, folglich $(x, \varphi(x)) \notin D$ Widerspruch!

7.2 DGLn mit „getrennten Variablen“

(1) Behandeln Sie die folgenden **Anfangswertaufgaben** (**AWA**n) nach der Methode aus Abschnitt 7.2 (*DGLn mit „getrennten Variablen“*):

(a) $y' = \dfrac{y}{x} \quad (0 < x < \infty)\,, \qquad y(1) = 2$

(b) $y' = e^{-y}x^3\,, \qquad y(1) = \pi$

(c) $y' = 1 + y^2\,, \qquad y(a) = b \qquad$ (für $a, b \in \mathbb{R}$).

Geben Sie jeweils auch die Intervalle i_1, i_2, i_3 und i_0 an!

(2) Lösen Sie die *Anfangswertaufgaben*:

(a) $y' = (1 + x^2)(1 + y^2)$ mit $y(0) = 1$

(b) $xy' = (y - 1)(x + 1)$ mit $y(1) = 0$

(c) $xy' = y - x - x\exp\left(-\frac{y}{x}\right)$ mit $y(1) = 0$

Anleitung: Substituieren Sie $z := \frac{y}{x}$.

(3) Bestimmen Sie alle Lösungen von $y' = (x+y-1)^2$.

Anleitung: Substituieren Sie $u = x+y-1$.

(4) Lösen Sie die AWA: $y' = \dfrac{x\,e^{2x}}{y\cos y}$, $y(0) = \frac{\pi}{4}$.

(Man erhält für die ‚Lösung' y nur eine implizite Gleichung.)

7.3 Die lineare DGL 1. Ordnung

(1) Lösen Sie die *Anfangswertaufgabe*: $y' = 3y$ mit $y(2) = e$.

(2) Bestimmen Sie alle Lösungen von

$y' = (2x+1)\,y + \left(1 + (\tan x)^2\right)\exp(x^2+x+1) \qquad \left(|x| < \frac{\pi}{2}\right)$.

(3) Der Preis für 1 kg Thunfisch betrage zunächst 30 DM und verändere sich im Laufe von t Monaten auf $p(t)$ DM pro kg. Die Nachfrage betrage

$$n(t) = 700 - \tfrac{1}{5}\,p(t) + 3.5\,p'(t)\,.$$

Das Angebot lasse sich durch

$$a(t) = 700 + \tfrac{1}{4}\,p(t) + \tfrac{1}{2}\,p'(t)$$

beschreiben. Unter der Voraussetzung, daß das Angebot stets gleich der Nachfrage ist („*Gleichgewichtsbedingung*"), berechne man die Preisentwicklung und speziell den Preis nach einem Monat und einem halben Jahr.

7.4 BERNOULLIsche DGL

(1) Bestimmen Sie alle Lösungen von

$$y' = -2\,\frac{y}{x} + \frac{1}{x}\sqrt{y} \qquad (0 < x,\, y < \infty)\,.$$

7.6 Explizite DGLn 2. Ordnung ‚ohne y'

(1) Bestimmen Sie alle Lösungen von: $y'' = \dfrac{y'}{1+x} \qquad (-1 < x < \infty)$.

7.7 Explizite DGLn 2. Ordnung ‚ohne x'

(1) Bestimmen Sie eine nicht-triviale Lösung der DGL $y'' = y\,y'$.

(2) Bestimmen Sie die Lösung der *Anfangswertaufgabe*:

$$y'' = \frac{1+y'^2}{y} \quad \text{mit} \quad y(0) = 1, \ y'(0) = 0.$$

7.8 Lineare DGLn n–ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

(1) Bestätigen Sie die Bemerkung (5) direkt.

(2) Bestimmen Sie alle Lösungen von:

(a) $u'' - 6u' + 9u = 0$ (b) $\ddot{s} - 6\dot{s} + 25s = 0$

(c) $\ddot{u} - 4u = 0$

(3) Lösen Sie die *Anfangswertaufgaben*:

$$\begin{array}{llll}
(a) & \ddot{u} - 4u = 0 \quad , & u(0) = 0\,, & \dot{u}(0) = 1 \\
(b) & \ddot{s} - 6\dot{s} + 25s = 0\,, & s(0) = 3\,, & \dot{s}(0) = 1 \\
(c) & \ddot{u} + u = 4\sin t \quad , & u(0) = 1\,, & \dot{u}(0) = 0 \\
(d) & u'' - 6u' + 9u = 0\,, & u(0) = 1\,, & u'(0) = 0\,.
\end{array}$$

(4) Bestimmen Sie die *allgemeine Lösung* der DGL $y' = y - x^2$.

(5) Von G. C. EVANS stammt das folgende **Modell eines Elementarmarktes**: Die Nachfrage $n(t)$ und das Angebot $a(t)$ hängen beide vom Marktpreis $p(t)$ ab, und beide Funktionen seien ‚linear':

$$\begin{aligned}
n(t) &= \alpha - a\,p(t) \qquad (a > 0) \\
a(t) &= \beta + b\,p(t) \qquad (b > 0)\,.
\end{aligned}$$

Weiterhin ändere sich der Preis proportional zum Nachfrageüberschuß

$$p'(t) = \gamma\,\big(n(t) - a(t)\big) \quad (\text{mit } \gamma > 0)\,.$$

((Positiver) Nachfrageüberschuß bewirkt Preiserhöhung.)

Berechnen Sie den Marktpreis und zeigen Sie, daß dieser für $t \to \infty$ gegen den *„Gleichgewichtspreis"* $\bar{p} := \dfrac{\alpha - \beta}{a + b}$ strebt.

(6) Zu der *homogenen linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten* (aus $\mathbb{K}$)

$$(*)_h \qquad u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \cdots + a_0 u = 0 \qquad \left(u \in C^{\infty}_{\mathbb{K}}(j)\right)$$

erhält man ein *Fundamentalsystem* durch

$$\begin{array}{cccc}
e^{\lambda_1 x}, & x e^{\lambda_1 x}, & \dots & , x^{r_1 - 1} e^{\lambda_1 x} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
e^{\lambda_s x}, & x e^{\lambda_s x}, & \dots & , x^{r_s - 1} e^{\lambda_s x}\,,
\end{array}$$

wenn $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ die paarweise verschiedenen Nullstellen (in $\mathbb{C}$) der Vielfachheiten $r_1, \ldots, r_s$ des zugehörigen charakteristischen Polynoms φ sind.

Hinweis: Diese Aufgabe ist ausgesprochen anspruchsvoll und nur für mathematisch besonders interessierte Leser gedacht!

Anleitung: Zeigen Sie nacheinander:

(a) Es gibt — unter Beachtung der Überlegungen zur Partialbruchzerlegung — Polynome $q_1, \ldots, q_s$, für die gilt:

$$\frac{1}{\varphi(\lambda)} = \frac{q_1(\lambda)}{(\lambda-\lambda_1)^{r_1}} + \cdots + \frac{q_s(\lambda)}{(\lambda-\lambda_s)^{r_s}} \qquad (\lambda \notin \{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\}).$$

(b) Mit $p_\kappa(\lambda) := \prod_{\substack{\sigma=1\\ \sigma\neq\kappa}}^{s} (\lambda - \lambda_\sigma)^{r_\sigma} \qquad (\kappa = 1, \ldots, s)$ ist:

$$\begin{aligned} 1 &= q_1(\lambda)\,p_1(\lambda) + \cdots + q_s(\lambda)\,p_s(\lambda)\,, \quad \text{also} \\ u &= \underbrace{q_1(D)\,p_1(D)\,u}_{=:\,u_1} + \cdots + \underbrace{q_s(D)\,p_s(D)\,u}_{=:\,u_s}\,. \end{aligned}$$

(c) Ist u Lösung von $(*)_h$, so gilt:

$$(\#) \qquad (D - \lambda_\sigma)^{r_\sigma}\,u_\sigma = 0 \qquad (\sigma = 1, \ldots, s).$$

(d) Lösungen $v_1, \ldots, v_s$ von $(\#)$ liefern durch $v := v_1 + \cdots + v_s$ eine Lösung von $(*)_h$.

(e) Durch Dimensionsüberlegungen ergibt sich die volle Behauptung.

Dazu zeigt man zweckmäßig einen *Existenz- und Eindeutigkeitssatz* für solche DGLn:

Zu $f \in C_0^{\mathbb{K}}(j)$, $x_0 \in j$ und $(y_0, \ldots, y_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ existiert eindeutig ein $y \in C_\infty^{\mathbb{K}}(j)$ mit $\varphi(D)y = f$ und $y^{(\nu)}(x_0) = y_\nu \quad (\nu = 0, \ldots, n-1)$.

Über $\varphi(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{r_1} \cdots (\lambda-\lambda_s)^{r_s}$ kann dies (induktiv) einfach aus den Ergebnissen von Abschnitt 7.3 gewonnen werden.

Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz liefert speziell für den Vektorraum der Lösungen der homogenen DGL

$$\mathfrak{N} := \{u \in C_\infty^{\mathbb{K}}(j) \mid \varphi(D)u = 0\}$$

durch $\mathfrak{N} \ni u \longmapsto \big(u(x_0), \ldots, u^{(n-1)}(x_0)\big) \in \mathbb{K}^n$ einen *Isomorphismus*, speziell also, daß $\mathfrak{N}$ die *Dimension* n hat.

(7) Diese Aufgabe führt zu einem *alternativen Beweis* der Aussage der vorangehenden Aufgabe. Zeigen Sie zunächst durch Induktion nach s:

Sind p_σ Polynome vom Grade höchstens $r_\sigma - 1$, so gilt:

$$\sum_{\sigma=1}^{s} p_\sigma(t)e^{\lambda_\sigma t} = 0 \quad (t \in j) \quad \Longrightarrow \quad p_\sigma = 0 \quad (\sigma = 1, \dots, s)\,.$$

Anleitung: Für den Induktionsschritt von s auf $s+1$ setze man $\lambda := \lambda_{s+1}$, $p := p_{s+1}$, $\varrho_\sigma := \lambda - \lambda_\sigma$, multipliziere

$$0 = \sum_{\sigma=1}^{s+1} p_\sigma(t)e^{\lambda_\sigma t} = \sum_{\sigma=1}^{s} p_\sigma(t)e^{\lambda_\sigma t} + p(t)\,e^{\lambda t}$$

mit $e^{-\lambda t}$ und differenziere die so gewonnene Beziehung $\sum_{\sigma=1}^{s} p_\sigma(t)\,e^{\varrho_\sigma t} + p(t) = 0$ so oft, daß $p(t)$ ‚verschwindet'.

(8) Frankophile — und noch nicht entmutigte — Leser finden eine dritte Beweismöglichkeit, die gleichzeitig Satz (10) erfaßt, bei [LELONG-FERRAND et ARNAUDIÈS].

(9) Welche Beziehung hat der — formal auszurechnende — Operator

$$\exp(D)$$

zur TAYLOR-*Entwicklung*?

Übungen zu Kapitel 8

8.1 Differenzenoperator

(1) Bestätigen und präzisieren Sie die einfachen Beziehungen:

(a) $\Delta(-1)^x = 2(-1)^{x+1}$

(b) $\Delta a^x = (a-1)\,a^x$

(c) $\Delta x a^x = (a-1)\,x a^x + a^{x+1}$

(d) $\Delta \sin x = 2\sin\frac{1}{2}\cos\left(x + \frac{1}{2}\right)$

8.2 Höhere Differenzen

(1) Lesen Sie aus dem Binomischen Satz die Beziehung $S^k = \sum_{\kappa=0}^{k} \binom{k}{\kappa} \Delta^\kappa \quad (k \in I\!N)$ ab.

8.3 Faktorielle

(1) Schreiben Sie $P(x) = 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 1$ als *Faktoriellenpolynom* mit der Schrittweite h.

Anleitung: Geht einfach mit einem modifizierten HORNER-*Schema.*

(2) Bestimmen Sie für $n = 0, 1, \ldots, 5$ die „STIRLING-*Zahlen 1. Art*" $s(n, \nu)$ mit

$$x^{(n)} = \sum_{\nu=0}^{n} s(n, \nu)\, x^{\nu} .$$

(3) Bestimmen Sie entsprechend die „STIRLING-*Zahlen 2. Art*" $S(n, \nu)$ mit

$$x^n = \sum_{\nu=0}^{n} S(n, \nu)\, x^{(\nu)} \quad (n = 0, 1, \ldots, 5).$$

(4) Bestätigen Sie für $m, n \in I\!N$ und $x \in I\!K$ (mit $h := 1$)

$$x^{(m+n)} = x^{(n)}\, (x - n)^{(m)} = x^{(m)}\, (x - m)^{(n)} .$$

(5) Zeigen Sie für $k \in I\!N_0$ und $P \in I\!P_k$:

$$P(x) = \sum_{\kappa=0}^{k} \frac{(\Delta^{\kappa} P)(0)}{\kappa!}\, x^{(\kappa)} .$$

8.4 (Gewöhnliche) Differenzengleichungen (DZGn)

(1) Beweisen Sie die Bemerkung (2) aus Abschnitt 8.4 .

<u>Anleitung</u>: Berücksichtigen Sie jeweils (1) und (2) aus Abschnitt 8.3 . Für „$\Longrightarrow$" in b) betrachte man zu

$$\Delta w = a_0 n^{(0)} + a_1 n^{(1)} + \cdots + a_k n^k \in I\!P_k$$
$$v := a_0 n^{(1)} + \frac{a_1}{2} n^{(2)} + \cdots + \frac{a_k}{k+1} n^{(k+1)}.$$

(2) Beweisen Sie für $n \in I\!N$ die Formel

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu^2 = \frac{1}{6}\, n\, (n+1)(2n+1) ,$$

indem Sie $\nu^2 = \nu^{(2)} + \nu^{(1)}$ zeigen und (1) aus Abschnitt 8.4 und die Beziehung $\Delta n^{(k)} = k\, n^{(k-1)}$ heranziehen.

(3) Bestimmen Sie alle Lösungen der *impliziten nichtlinearen DZG*

$$y_{n+1}^2 - y_n = 0 \qquad (n \in I\!N) .$$

<u>Anleitung</u>: Beachten Sie, daß $y_n \neq 0$ hier $y_{n+1} \neq 0$ und $y_n > 0$ impliziert. Transformieren Sie für $y_1 \neq 0$ durch $z_n := \ln(y_n)$ auf die DZG $z_{n+1} = \frac{1}{2} z_n \quad (n \in I\!N)$.

(4) Lösen Sie die *implizite nichtlineare DZG*

$$y_{n+1}^2 - 4 y_{n+1} y_n - 5 y_n^2 = 0 \qquad (n \in I\!N) ,$$

indem Sie — im nicht-trivialen Fall — $v_n := \dfrac{y_{n+1}}{y_n}$ $(n \in I\!N)$ substituieren.

8.5 Lineare DZGn

(1) Zeigen Sie ‚direkt' (einfach nachrechnen!): Für $a, b \in \mathbb{C}$ erfüllt $y_k := a \cdot 3^k + b \cdot (-5)^k \quad (k \in \mathbb{N}_0)$ die lineare DZG (2. Ordnung) $y_{k+2} + 2y_{k+1} - 15y_k = 0$.

(2) Notieren Sie eine homogene lineare DZG 1. Ordnung, die $(e^{-\lambda n})$ als Lösung hat.

8.6 Lineare DZGn 1. Ordnung

(1) Lösen Sie — zu (B1) des Textes — die DZG

$$\Delta z_k = k + 2 \qquad \left(k \in \mathbb{N}_0\right)$$

mit (1) aus Abschnitt 8.4.

(2) Lösen Sie die DZGn:

(a) $(k+1)y_{k+1} - ky_k = 0 \quad (k \in \mathbb{N})$

(b) $(k+1)y_{k+1} - ky_k = 0 \quad (k \in \mathbb{N}_0)$.

(3) Bestimmen Sie die Lösungen der DZGn:

(a) $y_{k+1} - y_k = 2 \;\; (k \in \mathbb{N}_0)$ mit $y_2 = 7$

(b) $y_{n+1} - (n+1)y_n = (n+1)! \;\; (n \in \mathbb{N}_0)$ mit $y_3 = 30$

(c) $y_{k+1} - e^k y_k = 0 \;\; (k \in \mathbb{N}_0)$ mit $y_0 = 1$.

(4) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DZG $y_{k+1} - y_k = e^k \;\; (k \in \mathbb{N}_0)$.

(5) (a) Bestimmen Sie die Lösung der *Anfangswertaufgabe* $y_{n+1} - ny_n = 1 \quad (n \in \mathbb{N}), \quad y_1 = 1 - e$.

(b) Zeigen Sie: $y_n < 0 \quad (n \in \mathbb{N})$.

(c) Rechnen Sie zum Vergleich (beispielsweise bei 5 Nachkommastellen) die ersten 20 Werte auf Ihrem Taschenrechner. (Schmeißen Sie diesen aber nicht gleich weg, wenn er im Gegensatz zu (b) auch positive Ergebnisse liefert. Woran liegt das?)

(6) **Wachstumsmodell für das Volkseinkommen** von R.F. Harrod (1948; genauer Harrod-Domar-Hicks):
Für eine Volkswirtschaft bezeichne in der Zeitperiode $t \in \mathbb{N}_0$:

V_t das *Volkseinkommen*,
K_t den *Konsum* und
I_t die *Investion*.

Mit Konstanten $r > 0$, $c \neq 0$ und $0 < m < 1$ gelte:

$$\begin{array}{llcccc} (\alpha) & V_t & = & K_t & + & I_t \\ (\beta) & K_t & = & mV_t & + & c \\ (\gamma) & V_{t+1} & = & V_t & + & r\,I_t\,. \end{array}$$

Einige Anmerkungen zu diesen Annahmen:

(α): Das Volkseinkommen setzt sich zusammen aus Konsum und Investition.

(β): Die Konsumfunktion wird in Abhängigkeit von dem Volkseinkommen als inhomogen linear vorausgesetzt. m heißt dabei *„marginale Konsumneigung"*.

(γ): Der *„Wachstumsfaktor"* r gibt an, wie sich die Investition auf das Volkseinkommen auswirkt.

(a) Leiten Sie die DZGn für V_t und I_t her und lösen Sie diese.

(b) Bestimmen Sie in beiden Fällen das Verhalten für $t \longrightarrow \infty$.

(c) Zeigen Sie, daß die Voraussetzung $V_0 > \frac{c}{1-m}$ das gleichartige Wachsen von V_t und I_t liefert ($\rightsquigarrow$ *Vollbeschäftigung*).

(7) Zins und Zinseszins

Wird ein *Startkapital* K_0 jährlich mit dem *Zinssatz* ϱ verzinst, so beträgt mit $r := \frac{\varrho}{100}$ die Einlage K_n nach $\mathbb{N}_0 \ni n$ Jahren

$K_n = K_0\,(1 + r \cdot n)$ bei *einfacher Verzinsung*,

$K_n = K_0\,(1 + r)^n$, wenn — wie üblich — die Zinsen jährlich von dem Gesamtbetrag der Einlagen zu Beginn des Jahres berechnet werden (*„Zinseszins"*). Leiten Sie diese beiden Formeln jeweils aus einer DZG 1. Ordnung ab.

(8) Tilgung

ist eine Form der Schuldenrückzahlung, die von Zahlungen in gleichbleibenden Zeitabständen ausgeht (*„Rentenzahlungen"*) und dabei Kapital und Zinsen umfaßt: Es seien (mit r wie oben)

S die abzutragende Schuld,

Z die feste periodische Zahlung (am Ende jeder Zinsperiode) und

S_k der geschuldete Betrag nach der k-ten Zahlung von Z (*„Restschuld"*).

(a) Zeigen Sie $S_k = (1+r)^k\,S \;-\; Z\,\dfrac{(1+r)^k - 1}{r} \qquad (k \in \mathbb{N}_0)$.

(b) Bestimmen Sie Z so, daß die Schuld nach genau n ($\in \mathbb{N}$) Zahlungen getilgt ist, d.h. $S_n = 0$.

Die bei der erhaltenen Formel auftretenden Faktoren liegen als *„nachschüssige Rentenbarwertfaktoren"* — in Büchern über Finanzmathematik — tabelliert vor.

(c) Läßt man unterschiedliche Zahlungen Z_k zu, so erhält man allgemeiner die *„nachschüssige Rentenformel"*:

$$S_k = (1+r)^k S - \sum_{\kappa=0}^{k-1} Z_\kappa (1+r)^{k-\kappa-1} \quad (k \in \mathbb{N}_0).$$

(9) CHAMPERDOWNE stellte 1949 das folgende einfache *Modell der Einkommensverteilung* vor: Ausgehend von disjunkten Einkommensklassen R_n, denen jeweils p_n Personen angehören, soll gelten: Die ‚Wahrscheinlichkeit', in einer Zeitperiode eine Klasse nach ‚unten' zu geraten, sei allgemein 0.1, die, aus R_n eine Klasse nach ‚oben' zu gelangen $0.4/(n+1)$. Zeigen Sie, daß eine *Gleichgewichtsbedingung* auf die DZG

$$p_{n+1} - \frac{4}{n+1} p_n = p_n - \frac{4}{n} p_{n-1} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

führt. Durch Einführung der neuen Variablen $z_n := p_n - \frac{4}{n} p_{n-1}$ ergibt sich die triviale DZG $z_{n+1} = z_n \quad (n \in \mathbb{N})$. Bestimmen Sie daraus die Lösung der Ausgangs-DZG, die — bei Vorgabe von p_0 — die Bedingung $p_1 = 2p_0$ erfüllt.

8.7 Lineare DZGn mit konstanten Koeffizienten, Operatormethoden

(1) Bestimmen Sie die allgemeine *reelle* Lösung der DZGn (über $\mathbb{N}_0$):

(a) $w_{k+2} - 6w_{k+1} + 9w_k = 0$ (b) $z_{k+2} - 2z_{k+1} + 2z_k = 0$

(c) $y_{n+4} - y_n = 0$

(2) Zu der *homogenen linearen Differenzengleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten* (aus $\mathbb{K}$)

$$(*)_h \qquad y_{n+k} + a_{k-1} y_{n+k-1} + \cdots + a_0 y_n = 0 \qquad (a_0 \neq 0)$$

erhält man ein *Fundamentalsystem* von Lösungen durch

$$\begin{array}{cccc} \alpha_1^n, & n\alpha_1^n, & \dots, & n^{r_1-1}\alpha_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_s^n, & n\alpha_s^n, & \dots, & n^{r_s-1}\alpha_s^n \end{array}$$

wobei die $\alpha_\sigma \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ $(\sigma = 1, \dots, s)$ die paarweise verschiedenen Nullstellen der Vielfachheiten r_σ des zugehörigen charakteristischen Polynoms

$$\varphi(\lambda) := \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + a_0$$

sind.

Anleitung: Auch für diese Aufgabe gilt das zu der entsprechenden Aufgabe zu Abschnitt 7.8 Gesagte; sie ist also relativ anspruchsvoll.

Zeigen Sie zunächst durch Induktion über k:

Vor.: $0 \neq p$ *Polynom mit Koeffizienten aus* $\mathbb{C}$; $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$

Beh.: Es existiert eindeutig ein Polynom $q \neq 0$ *mit* $\operatorname{grad} p = \operatorname{grad} q$ *derart, daß*

$$\Delta^k\big(\beta^n\, p(n)\big) = \beta^n\, q(n)\,.$$

Nach den Überlegungen des Textes ist nur noch die *lineare Unabhängigkeit* zu zeigen. Dazu zeige man nun für Polynome p_σ durch Induktion über s:

$$\sum_{\sigma=1}^{s} p_\sigma(n)\,\alpha_\sigma^n = 0 \quad (n \in \mathbb{N}_0) \quad \Longrightarrow \quad p_\sigma = 0 \quad (\sigma = 1, \ldots, s)\,.$$

8.8 Inhomogene DZGn

(1) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DZG

$$v_{r+2} - 5\,v_{r+1} + 6\,v_r = r^2 \quad (r \in \mathbb{N}_0)$$

(a) mit der Methode der unbestimmten Koeffizienten,

(b) mit der Operatormethode,

(c) mit (8) aus Abschnitt 8.8 .

(2) Bestimmen Sie die allgemeine *reelle* Lösung der DZG (über $\mathbb{N}_0$):

$$y_{n+2} - 5\,y_{n+1} + 6\,y_n = 2 + 4n\,.$$

(3) Lösen Sie die DZGn (über $\mathbb{N}_0$):

(a) $y_{n+2} - 6y_{n+1} + 8y_n = 2 + 3n^2 - 5 \cdot 3^n$

(b) $w_{s+2} - 4w_{s+1} + 3w_s = s \cdot 4^s$

(c) $u_{n+6} + 2u_{n+3} + u_n = 0$

(d) $A_{\lambda+2} - 5A_{\lambda+1} + 6A_\lambda = 5^\lambda$

(e) $y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n = 2n$

(f) $y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n = 2^n$

(g) $y_{k+2} - y_{k+1} - 2y_k = 2^k$

(h) $y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = 5 + n + 3^n$

(i) $y_{n+2} + y_n = \sin\left(n\,\frac{\pi}{2}\right)$

(4) Lösen Sie mit der Operatormethode die DZGn:

(a) $v_{m+3} - v_{m+2} - 4v_{m+1} + 4v_m = 1 + m + 2^m \quad (m \in \mathbb{N}_0)$

(b) $z_{n+2} - 5z_{n+1} + 6z_n = (5 - n + 2^n) \cdot 4^n \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$.

(5) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DZG

$$y_{k+2} - y_{k+1} - 2y_k = 2\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) \qquad (k \in \mathbb{N}_0)\,,$$

indem Sie zunächst $\quad z_{k+2} - z_{k+1} - 2z_k = 2\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^k = 2 \cdot i^k \quad$ lösen. Vergleichen Sie diesen kurzen Lösungsweg mit der aufwendigeren reellen Rechnung!

(6) Bestimmen Sie für die Lösung (y_n) der DZG

$$y_{n+2} - y_n = 1 \quad (n \in \mathbb{N}_0),$$

die $y_0 = 1, \;\; y_1 = 2$ erfüllt, den Wert y_{100}.

Übungen zu Kapitel 9

9.2 ‚Geometrie' $\mathbb{R}$–wertiger Funktionen

(1) Veranschaulichen Sie die Menge

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1\right\}$$

(einige *Höhenlinien* und *Vertikalschnitte* skizzieren).

(2) Skizzieren Sie den Graphen von

$$f(x,y) := \sqrt{16 - x^2 - y^2}\,.$$

(3) Die COBB-DOUGLAS-*Funktion* — eine makroökonomische Produktionsfunktion — beschreibt das *Sozialprodukt* P als Funktion von n Produktionsfaktoren x_j

$$P = f(x_1, \ldots, x_n) := \alpha_0 \cdot x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}\,,$$

wobei die Konstanten $\alpha_j > 0$ als *partielle Produktionselastizitäten* interpretiert werden. Es gelte noch $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1$. Zeigen Sie:

(a) Die COBB-DOUGLAS-*Funktion* ist *homogen vom Grade* 1, d.h.:

$$f(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = \lambda \cdot f(x_1, \ldots, x_n)\,.$$

(b) Im folgenden beschränken wir uns auf zwei Produktionsfaktoren $x_1 = A$ (*Arbeit*) und $x_2 = K$ (*Kapital*). Zeigen Sie: Erhöht man die Arbeits- *und* Kapitaleinsatz auf das λ-fache, so steigt die Produktion ebenfalls auf das λ-fache.

(c) Deuten Sie die Produktionsmöglichkeiten bei konstantem Arbeitseinsatz als Vertikalschnitt durch das ‚Produktionsgebirge'. Skizzieren Sie diesen Sachverhalt für die spezielle Situation:

$\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 0.4$, $(\alpha_2 = 0.6)$ und $A = 5$.

(d) Erläutern Sie im Falle (c) die *Isoquanten.*

9.3 Folgenkonvergenz, Grenzwert (von Funktionen) und Stetigkeit

(1) Sind zwei Körper mit den Massen m und M gegeben und legt man den Koordinatenursprung in den Schwerpunkt des Körpers mit der Masse M, so wirkt auf den Körper der Masse m die *Gravitationskraft* (mit der Gravitationskonstanten γ):

$$F(x) = -\gamma m M \frac{1}{\|x\|_2^3} x \qquad (x \in \mathbb{R}^3).$$

Schreiben Sie diese Gleichung mit den Koordinaten und den *Koordinatenfunktionen.* Bestimmen Sie den Wert von F im Punkt $(1,2,3)^T$.

(2) Für $\alpha, x \in]0, \infty[$ sei

$$f(x) := \left(\frac{\sin x}{x}, \frac{x^{13}-3}{\exp(x)}, \frac{\ln x}{x^\alpha}, \frac{1995\, x^3 - 17}{17 + x^3}\right)^T.$$

Bestimmen Sie für diese ($\mathbb{R}^4$-wertige) Funktion den *Grenzwert* für $x \longrightarrow \infty$.

(3) Für $k \in \mathbb{N}$ sei $\mathfrak{a}_k := \begin{pmatrix} \sin(\frac{k\pi}{2}) \\ 13 + \frac{1}{k^2} \end{pmatrix}$. Ist die Folge $(\mathfrak{a}_k)$ *konvergent*?

9.4 (‚Totale') Differenzierbarkeit, partielle Differenzierbarkeit

(1) Bestimmen Sie die *partiellen Ableitungen* (1. Ordnung) von

$$f(x,y) := x \sin y + y e^x$$

und die Gleichung der *Tangentialebene* im Koordinatenursprung.

(2) Berechnen Sie für die durch $f(x,y) := \ln(x^2+y^2)$ definierte Funktion $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ den Ausdruck $D_1^2 f + D_2^2 f$.

(3) Zeigen Sie für die durch

$$f(x,y) := \left\{ \begin{array}{ll} xy^2\left(x^2+y^4\right)^{-1} & , \text{ falls } \; x \neq 0 \\ 0 & , \text{ falls } \; x = 0 \end{array} \right\}$$

definierte Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$:

(a) f ist in $(0,0)$ *unstetig.*

(b) In $(0,0)$ *existieren alle Richtungsableitungen* zu f.

(4) Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sei definiert durch

$$f(x,y,z) := \begin{pmatrix} xy + yz \\ x \cdot y \cdot z \end{pmatrix} .$$

Zeigen Sie ‚direkt', d.h. über die Definition von Differenzierbarkeit, daß f in $a := (1,2,-1)$ differenzierbar ist, und bestimmen Sie die Ableitung an dieser Stelle.
Vergleichen Sie diesen aufwendigen Weg mit dem einfachen über partielle Ableitungen.

(5) Bestimmen Sie für die durch

$$f(x,y,z) := 2x^3y - 3y^2z \qquad ((x,y,z) \in \mathbb{R}^3)$$

die *Richtungsableitung* im Punkt $a := (1,2,-1)$ in Richtung auf den Punkt $b := (3,-1,5)$.

(6) Bestimmen Sie die *Ableitung* der durch

$$f(x,y,z) := \begin{pmatrix} 7xyz \\ x \sin(yz) \end{pmatrix} \qquad ((x,y,z) \in \mathbb{R}^3)$$

gegebenen Abbildung.

9.7 Extremwerte (Notwendige und hinreichende Bedingungen)

(1) (a) Untersuchen Sie die durch

$$f(x,y) := x^2 + xy + y^2 - 6x - 3y$$

gegebene Funktion auf *relative Extrema.*

(b) Bestimmen Sie die *Richtungsableitung* der in (a) gegebenen Funktion im Punkte $(1,1)^T$ in der Richtung, die von dort zum Koordinatenursprung zeigt. Notieren Sie die Gleichung der *Tangentialebene* in diesem Punkt.

(2) Untersuchen Sie die durch

$$f(x,y) := -(x^2+y^2)^2 + x^2 - y^2 \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$$

gegebenen Funktion auf *relative Extrema.*

(3) Zeigen Sie, daß für

$$f(x, y) := xy \qquad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

$(0, 0)$ *kritischer Punkt ist*, aber f dort kein lokales Extremum annimmt, das heißt $(0, 0)$ *Sattelpunkt* ist.

(4) Zeigen Sie Teil c) der Bemerkung (über Definitheit) aus Abschnitt 9.7.

9.8 Satz über implizite Funktionen, Extrema unter Nebenbedingungen

(1) Untersuchen Sie die Funktion $f(x, y, z) := x^4 + y^4 + z^4$ auf relative *Extrema unter der Nebenbedingung* $x + y + z = 6$.

(2) Bestimmen Sie die Extrema der Funktion $f(x, y, z) := x + y + z$ auf der Oberfläche der Einheitskugel $\big($im $\mathbb{R}^3\big)$.

(3) Behandeln Sie das Beispiel (B4) des Textes zum Vergleich mit LAGRANGE-*Multiplikatoren.*

(4) Es seien (in einer ‚2-Waren-Welt') $\begin{array}{ccc} N : [0, \infty[^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \cup\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\shortmid \\ \mathfrak{x} := (x, y) & \longmapsto & xy \end{array}$ die *Nutzenfunktion* eines Konsumenten und $\mathfrak{p} = (p, q)$ ein gegebener *Preisvektor.* Bei festem *Einkommen* E soll der Nutzen maximiert werden unter der Nebenbedingung (*„Budgetbedingung“*)

$$b(\mathfrak{x}) := \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{x} - E = px + qy - E = 0 .$$

Bestimmen Sie über die LAGRANGE*sche Multiplikatoren-Regel* den einzigen Punkt $\bar{\mathfrak{x}}$, in dem das Nutzenmaximum angenommen wird. Zeigen Sie, daß der zugehörige *Schattenpreis* (bei konstantem Preis) hier den Nutzenzuwachs eines zusätzlichen Einkommens von einer Geldeinheit beschreibt.

Literaturverzeichnis

In diesem ersten Teil gebe ich aus der umfangreichen Liste von Büchern mit ähnlicher Zielgruppe und — zumindest für einzelne Kapitel — vergleichbarem Stoff einige Titel ohne jede Wertung an. Dabei habe ich — bis auf wenige ‚unvermeidliche' englischsprachige — nur deutschsprachige Lehrbücher aufgelistet. Bei mehrbändigen Werken sind als Jahreszahl und Auflage jeweils die aktuellste (mir bekannte) der vorkommenden aufgeführt. Dies gilt auch für die ergänzenden weiteren Literaturangaben.

ALLEN, R. G. *Mathematische Wirtschaftstheorie.* Duncker & Humblot, Berlin 1971

AST, W./HAFENBRAK, B. *Einführung in die Analysis I.* Schoeningh, Paderborn 1978

BADER, H./FRÖHLICH, S. *Einführung in die Mathematik für Volks- und Betriebswirte.* (9. Aufl.) Oldenbourg, München 1988

BECKMANN, M. J./KÜNZI, H. P. *Mathematik für Ökonomen I.* Springer, Berlin 1973

BERG, C. C./KORB, U.-G. *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler I, Analysis.* (3. Aufl.) Th. Gabler, Wiesbaden 1985

BLICKENSDÖRFER-EHLERS, A. ET AL. *Analysis I, II.* (2. Aufl.) Springer, Berlin 1993

BÖHME, G. *Anwendungsorientierte Mathematik, Bd. II, III, Analysis.* (6. Aufl.) Springer, Berlin 1991

BREHMER, S./APELT, H. *Analysis I, II.* (5. Aufl.) VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften — Studienbücherei, Berlin 1990

BURG, K./HAF, H./WILLE, F. *Höhere Mathematik für Ingenieure.* (5 Bände) Teubner, Stuttgart 1993

DALLMANN, H./ELSTER, K.-H./ELSTER, R. *Einführung in die höhere Mathematik I - III.* UTB für Wissenschaft, Stuttgart 1991

DORNINGER, D./KARIGL, G. *Mathematik für Wirtschaftsinformatiker (Band I, II).* Springer, Wien 1988

GAL, T. ET AL. *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler II, Analysis.* (3. Aufl.) Springer, Berlin 1991

GANDOLFO, G. *Economic Dynamics: Methods and Models.* (2. rev. ed.) North-Holland, Amsterdam 1983

HOFMANN, W. *Lehrbuch der Mathematik für Volks- und Betriebswirte.* Betriebswirtschaftl. Verl., Wiesbaden 1974

KALL, P. *Analysis für Ökonomen.* Teubner, Stuttgart 1982

KIEẞWETTER, K. *Reelle Analysis einer Veränderlichen.* Bibliographisches Institut, Mannheim 1975

KÖRTH, H. ET AL. *Lehrbuch der Mathematik für Wirtschaftswissenschaften.* Westdeutscher Verlag, Opladen 1972

LEUPOLD, W. *Analysis für Ingenieure.* (19. Aufl.) Fachbuchverlag, Leipzig 1991

MANGOLDT H. VON/KNOPP K. *Einführung in die höhere Mathematik I - III.* (17. Aufl.) Hirzel, Stuttgart 1990

NIEDERDRENK, K./YSERENTANT, H. *Funktionen einer Veränderlichen — Analytische und numerische Behandlung.* Vieweg, Wiesbaden 1987

NIKAIDO, H. *Introduction to Sets and Mappings in Modern Economics.* (3. Aufl.) North-Holland, Amsterdam 1975

PEARSON, J. M. *Mathematics for Economists: A First Course.* Longman, London 1982

PFUFF, F. *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler I, II.* (3. Aufl.) Vieweg, Wiesbaden 1983

PIEHLER, G./SIPPEL, D./PFEIFFER, U. *Mathematik zum Studieneinstieg.* (2. Aufl.) Springer, Berlin 1992

PIPES, L./HARVILL, L. *Applied Mathematics for Engineers and Physicists.* (3. Aufl.) MacGraw-Hill, New York 1970

SOMMER, F. *Einführung in die Mathematik für Studenten der Wirtschaftswissenschaften.* Springer, Berlin 1962

STINGL, P. *Mathematik für Fachhochschulen.* (4. Aufl.) Hanser, München 1992

STÖWE, H./HÄRTTER, E. *Lehrbuch der Mathematik für Volks- und Betriebswirte.* (3. Aufl.) Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1990

TIETZ, H. *Einführung in die Mathematik für Ingenieure I, II.* Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1980

TIETZE, J. *Einführung in die angewandte Wirtschaftsmathematik.* (4. Aufl.) Vieweg, Braunschweig 1992

TINHOFER, G. *Mathematik für Studienanfänger.* Hanser, München 1990

Weiterführende und anspruchsvollere Bücher:

BARNER, M./FLOHR, F. *Analysis I, II.* (4. Aufl.) Walter de Gruyter, Berlin 1991

BLATTER, C. *Analysis I.* (4. Aufl.) Springer, Heidelberg–New York 1991

ENDL, K./LUH, W. *Analysis I - III.* (9. Aufl.) Akademische Verlagsgesellschaft, Frankfurt am Main 1989

FISCHER, H. W. ET AL. *Skript zur Analysis I.* Mathematik-Arbeitspapiere (Nr. 4) der Universität Bremen 1977

FORSTER, O. *Analysis I, II.* (5. Aufl.) Vieweg-Studium, Wiesbaden 1994

GRAUERT, H./FISCHER, W./LIEB I. *Differential- und Integralrechnung I, II.* (4. bzw. 3. Aufl.) Springer, Berlin 1976 bzw. 1978

HEUSER, H. *Lehrbuch der Analysis I, II.* (10. Aufl.) Teubner, Stuttgart 1993

HOFFMANN, D./SCHÄFKE, F.-W. *Integrale.* Bibliographisches Institut, Mannheim 1992

KÖNIGSBERGER, K. *Analysis I.* (2. Aufl.) Springer, Berlin 1992

MARTENSEN, E. *Analysis I, II, III.* (5. Aufl.) Bibliographisches Institut, Mannheim 1992

MEYBERG, K./VACHENAUER, P. *Höhere Mathematik I, II.* (2. Aufl.) Springer, Berlin 1993

SPIVAK, M. D. *Calculus.* W.A. Benjamin, Inc., New York 1967

STORCH, U./WIEBE, H. *Lehrbuch der Mathematik I.* Bibliographisches Institut, Mannheim 1989

TITCHMARSH, E. C. *The Theory of Functions.* (2. Aufl.) London, Oxford Univ. Pr. 1976

WALTER, W. *Analysis I* (3. Aufl.) Springer, Berlin 1992

Speziell zu den Kapiteln 7 und 8:

BATSCHELET, E. *Einführung in die Mathematik für Biologen.* Springer, Berlin 1980

BOOLE, G. *A Treatise on Differential Equations.* (5. Aufl.) Chelsea, New York 1960 (1. Aufl.: London 1877!)

BRAND, L. *Differential and Difference Equations.* Wiley, New York 1966

BRAUN, M. *Differentialgleichungen und ihre Anwendungen.* (3. Aufl.) Springer, Berlin 1994

FUCHS, G. *Mathematik für Mediziner und Biologen.* (2. Aufl.) Springer, Berlin 1979

GOLDBERG, S. *Differenzengleichungen und ihre Anwendung in Wirtschaftswissenschaft, Psychologie und Soziologie.* Oldenbourg, München 1968

HAINZL, J. *Mathematik für Naturwissenschaftler.* (4. Aufl.) Teubner, Stuttgart 1985

HEUSER, H. *Gewöhnliche Differentialgleichungen.* (2. Aufl.) Teubner, Stuttgart 1991

JORDAN, C. *Calculus of Finite Differences.* (3. Aufl.) Chelsea, New York 1965

LELONG-FERRAND, J./ARNAUDIÈS, J.-M. *Équations différentielles ....* (2. Aufl.) Dunod, Paris 1977

MARGENAU, H./MURPHY G. M. *Die Mathematik für Physik und Chemie I.* Harri Deutsch, Frankfurt a.M. 1965

MORRIS, M./BROWN, O. E. *Differential Equations.* (4. Aufl.) Prentice-Hall, Englewood Cliffs (N. J.) 1964

RABENSTEIN, A. L. *Elementary Differential Equations with Linear Algebra.* (4. Aufl.) Academic Press, New York 1992

ROMMELFANGER, H. *Differenzen- und Differentialgleichungen.* Bibliographisches Institut, Mannheim 1977

SPIEGEL, M. R. *Endliche Differenzen und Differenzengleichungen.* McGraw-Hill, Hamburg 1982

WALTER, W. *Gewöhnliche Differentialgleichungen.* (5. Aufl.) Springer, Berlin 1993

ZACHMANN, H. G. *Mathematik für Chemiker.* (5. Aufl.) Verlag Chemie, Weinheim 1994

Aufgabensammlungen und vergleichbare Werke:

PAPULA, L. *Mathematik für Ingenieure I, II.* (6. Aufl.) Vieweg, Wiesbaden 1991

PAPULA, L. *Übungen zur Mathematik für Ingenieure I, II.* Vieweg, Wiesbaden 1991

POGUNTKE, W./WILLE, R. *Testfragen zur Analysis I.* (2. Aufl.) Bibliographisches Institut, Mannheim 1980

Formelsammlung:

BRONSTEIN, I./SEMENDJAJEW, K. *Taschenbuch der Mathematik.* (25. Aufl.) Teubner, Stuttgart 1993

Symbolverzeichnis

Limites, Pfeile

Mit einer Funktion f

Einzelne Zeichen

Klammern

Sonstige Symbole

Stichwortverzeichnis