Chapitre 2 : Estimation de la tendance.

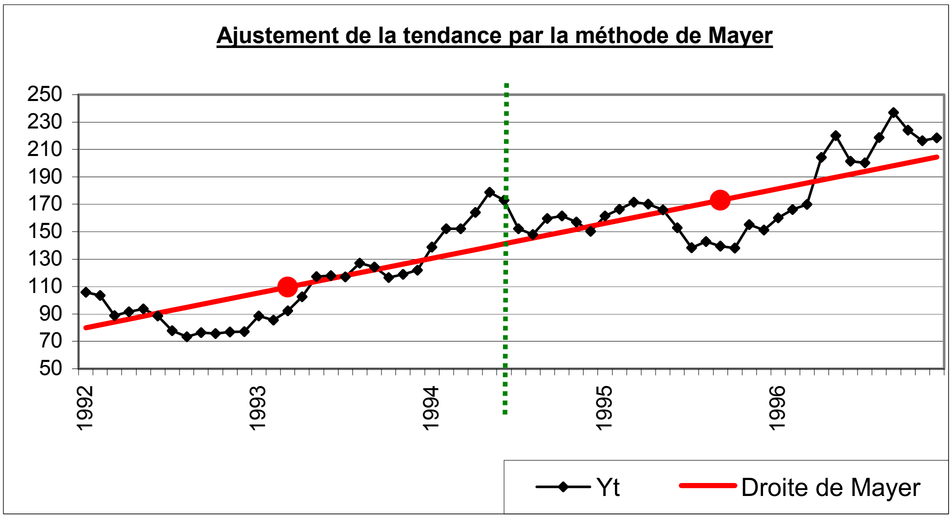
I. Ajustement :

1. Méthode de Mayer : ajustement par une droite :

On ajuste le nuage de points (t ; Yt) par une droite passant par deux points calculés :
On découpe la série en 2 sous ensembles de même effectif.
Pour chacun des 2 sous ensembles, on calcule la moyenne des t et la moyenne des Yt.
On obtient ainsi 2 points $\left(\overline{t_1};\overline{Y_1}\right)$, $\left(\overline{t_2};\overline{Y_2}\right)$, appelés points moyens.

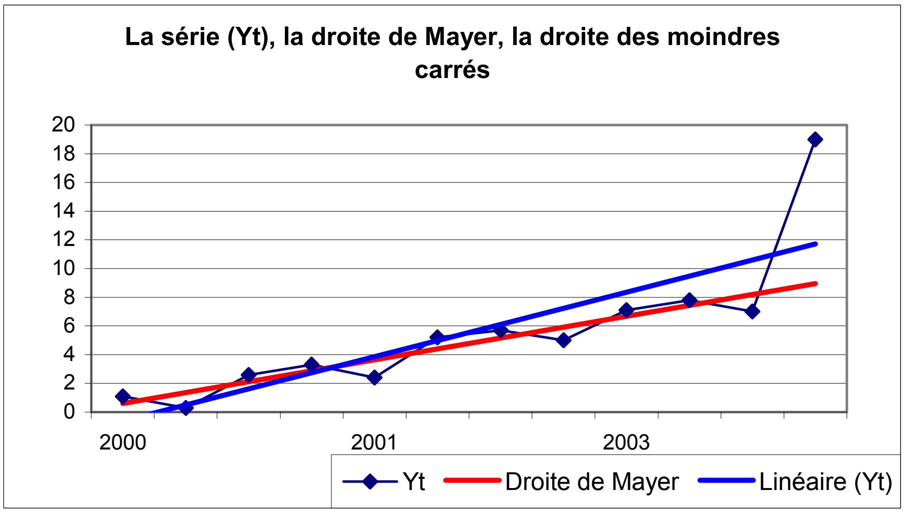
Il reste à tracer la droite passant par ces 2 points.

Document 1 :



Remarque : On peut calculer les points médians au lieu des points moyens.
Cela permet de limiter l'influence les valeurs aberrantes.

Document 2 :



2. Méthode des moindres carrés :

a) Tendance linéaire :

On utilise la méthode des moindres carrés pour ajuster la série chronologique Yt , avec la fonction Ct = at + b.

On détermine la droite des moindres carrés (y = at + b) du nuage de points (t ; Yt).

(C'est-à-dire la droite qui minimise la distance $\sum\left(Y_t-(a\,t+b)\right)^2$)

D'où : $a = \dfrac{\operatorname{cov}(t,Y)}{v(t)}$ et $b = \overline{Y} - a\overline{t}$

avec $\operatorname{cov}(t,Y) = \dfrac{1}{np}\sum_{t=1}^{np}(t-\overline{t})(Y_t-\overline{Y}) = \dfrac{1}{np}\sum_{t=1}^{np} tY_t - \overline{t}\,\overline{Y}$ $\quad \overline{Y} = \dfrac{1}{np}\sum_{t=1}^{np} Y_t$ $\quad v(t) = \dfrac{1}{np}\sum_{t=1}^{np}(t-\overline{t})^2 = \dfrac{1}{np}\sum_{t=1}^{np} t^2 - \overline{t}^2$ $\quad \overline{t} = \dfrac{1}{np}\sum_{t=1}^{np} t$

Remarque : La droite des moindres carrés ajuste au mieux au sens des moindres carrés (c'est celle qui passe le plus près de l'ensemble des points), mais elle ne modélise pas toujours bien la tendance, ceci est le cas pour la 2e série possédant une valeur « aberrante ».

b) Tendance polynomiale :

On peut utiliser la méthode des moindres carrés afin d'ajuster une tendance sous la forme d'un polynôme de degré choisi.

L'observation du graphe de la série donne une idée du degré du polynôme (selon la forme de la courbe)

Il faut faire un compromis entre :

- obtenir des résidus qui fluctuent autour de 0 avec une amplitude la plus faible possible
  (cela nécessite un degré élevé)
- utiliser un polynôme de degré le plus faible possible.

On choisit le degré minimum du polynôme qui donne un ajustement correct : il y a un degré à partir duquel on ne gagne pas beaucoup en continuant à augmenter le degré.

c) Autre tendance : changement de variable :

Pour certaines autres tendances, on peut se ramener à une tendance linéaire ou polynomiale à l'aide d'un changement de variable.

Exemples :

- Ajuster Ct = $\dfrac{1}{at+b}$ revient à ajuster une tendance linéaire sur la série Zt = $\dfrac{1}{Yt}$
- Ajuster Ct = e^{at+b} revient à ajuster une tendance linéaire sur la série Zt = ln(Yt)
- Ajuster Ct = ln(at^2 + bt +c) revient à ajuster une tendance at^2 + bt +c sur la série Zt = exp(Yt)

d) Détermination à l'aide d'Excel d'une courbe de tendance :

Excel détermine l'équation d'une courbe de tendance en calculant la courbe des moindres carrés des points (t ; Yt), dans le cas de tendance :

Linéaire	($y = at + b$)
Polynomiale	($y = a_0 + a_1t + \ldots + a_6 t^6$)
Logarithmique	($y = a\ln(t) + b$)
Exponentielle	($y = ce^{bt}$)
Puissance	($y = ct^b$)

Il suffit de faire un clic droit sur le graphique, puis de choisir
Ajouter une courbe de tendance.

Transparent

II. Lissage par moyennes ou médianes mobiles

1. Définition des moyennes mobiles.

Deux choses à faire :

a) Calculer des moyennes d'ordre p d'une série (Yt), ce qui consiste à :

- considérer les p premières valeurs de la série et en calculer la moyenne,
- puis des p valeurs précédentes, on supprime la première valeur et on considère la valeur qui suit la dernière valeur considérée à l'étape précédente, et on calcule la moyenne de ces valeurs …

on répète ceci tant que l'on a p valeurs consécutives.

Exemple : moyenne mobile d'ordre 3 : $\frac{Y_1+Y_2+Y_3}{3}$, $\frac{Y_2+Y_3+Y_4}{3}$, $\frac{Y_3+Y_4+Y_5}{3}$, …

Transparent

b) Affecter ces moyennes mobiles à une date : la date milieu de la période de p mois considérée,

ainsi $\frac{Y_{t+1}+Y_{t+2}+\ldots+Y_{t+p}}{p}$ est affectée à la date $t+\frac{p+1}{2}$.

Transparent

D'où la définition suivante :

Les moyennes mobiles d'ordre p de la série $(Yt)_{t=1,2,\ldots np}$ sont :

$$M_p\left(t+\frac{p+1}{2}\right)=\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}Y_{t+k} \quad \text{où } t = 0,1,2,\ldots,np-p.$$

Se pose le problème de la parité de p pour les dates milieu $t+\frac{p+1}{2}$:

- Si p est impair $t+\frac{p+1}{2}$ correspond à une date.

Et si p = 2r + 1, on peut écrire : $\mathrm{Mp}(t)=\frac{1}{2r+1}\sum_{k=-r}^{r}y_{t+k}$.

- Si p est pair $t+\frac{p+1}{2}$ se trouvent entre deux dates.

C'est pourquoi, afin que les moyennes mobiles soient affectées à des dates, on effectue une moyenne mobile d'ordre 2 sur la série des moyennes mobiles d'ordre p.

Ces dernières moyennes mobiles sont appelées moyennes mobiles centrées d'ordre p, et sont notées **$M_p'(t)$**.

Exemples : **a) Calculs de moyennes mobiles d'ordre 3 sur une série annuelle.**

t	Yt	Moyennes mobiles d'ordre 3 $M_3(t)$
1990	118	
1991	113	112,0
1992	105	107,7
1993	105	104,3
1994	103	102,3
1995	99	100,0
1996	98	99,3
1997	101	99,7
1998	100	102,7
1999	107	

b) Calculs de moyennes mobiles centrées d'ordre 4 sur une série trimestrielle.

t	Yt	Moyennes mobiles d'ordre 4 $M_4(t)$	Moyennes mobiles centrée d'ordre 4 $M_4'(t)$
1985	2		
	0,5		
		1,75	
	3,5		2,1250
		2,5	
	1		2,6875
		2,875	
1986	5		3,0625
		3,25	
	2		3,5625
		3,875	
	5		4,0625
		4,25	
	3,5		4,5000
		4,75	
1987	6,5		5,0625
		5,375	
	4		5,5625
		5,75	
	7,5		
	5		

Moyennes mobiles d'ordre 2 des moyennes mobiles d'ordre 4 $M_4(t)$

Remarque : A partir d'une série contenant N valeurs, on obtient N – p + 1 ou N – p moyennes mobiles d'ordre p, selon la parité de p.

Définition des médianes mobiles :

La définition est analogue à celle des moyennes mobiles : on prend les mêmes valeurs de Yt, et on calcule la médiane au lieu de calculer la moyenne.

2. Estimation de la tendance par les moyennes mobiles.

Si
- la tendance présente une faible courbure,
- les variations saisonnières sont périodiques de période p et ont une influence nulle sur l'année,
- les variations accidentelles sont de faible amplitude,

alors la tendance à la date t peut être estimée par la moyenne mobile (centrée) d'ordre p à la date t.

$Ct \approx M_p(t)$ ou $Ct \approx M_p'(t)$ selon la parité de p.

L'ordre p est la périodicité des variations saisonnières, d'où :

p = 4	si	la série est trimestrielle
p = 12	si	la série est mensuelle
p = 3 ou 5	si	la série est annuelle

Pourquoi ajuster Ct par Mp(t) ?

- Les St sont supposées de période p et d'influence nulle sur une année = p mois.
  $\Rightarrow$ Les moyennes mobiles d'ordre p Mp(t) effacent les St.
- Il reste les εt qui sont supposées de faible amplitude.
  $\Rightarrow$ Les moyennes mobiles d'ordre p effectuées sur Yt donne Ct.

III. Avantages et inconvénients des méthodes

1. Les moyennes mobiles

- Les moyennes mobiles peuvent être influencées par des valeurs aberrantes.

  <u>Conséquence</u> : Au lieu de calculer les moyennes mobiles, on peut choisir d'estimer Ct à l'aide des médianes mobiles de même ordre. → transparent + photocopies

- Perte de données : Si on dispose d'une série chronologique sur n années contenant p mois chacune (np observations), alors on ne pourra calculer une estimation de la tendance que pour np – p + 1 ou np – p mois (selon la parité de p), soit une année de moins que la série.
  → transparent

- Malgré ces inconvénients, elles sont une bonne estimation.

- L'estimation par moyenne mobile donne une meilleure estimation que par les moindres carrés, Ct est proche des valeurs. → transparent

Remarque : Les moyennes mobiles laissent passer la composante tendancielle sans la modifier, si la tendance est un polynôme de degré ≤ 1, sinon elles surévaluent la tendance.

2. Les moindres carrés.

- L'estimation est moins bonne.
- Un ajustement correct n'est pas toujours possible. → transparent
- L'avantage : facilité pour prévoir la tendance aux dates np + 1, np + 2.