ESEMPIO

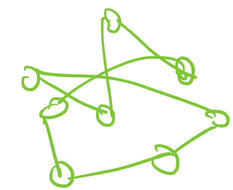
Π_1 = istanza del CICLO HAMILTONIANO

Π_2 = Travel Salesperson Problem (TSP)

n città numerate da 1 a n

costo D_{ij} = costo per andare dalla città i alla j

- → distanza
- → pedaggio
- → tempo di percorrenza
- → ...



tour = permutazione città: $\sigma_1\ \sigma_2 \dots \sigma_n \in \text{perm}(1..n)$

$$\text{costo(tour)} = \sum_{i=1}^{n-1} D_{\sigma_i \sigma_{i+1}} + D_{\sigma_n \sigma_1}$$

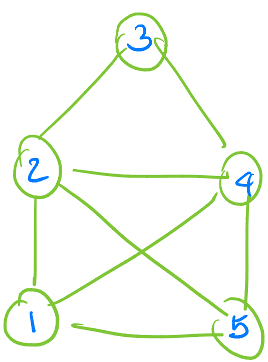
decisionale → Dato k, n, D_{ij} : $\exists$ tour di costo $\leq k$?

Trasformazione T per $\Pi_1 \propto \Pi_2$

$$D_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i=j \\ 1 & \text{se } ij \in E \\ 2 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

1. Inizializza $D_{ij} = 2 \quad \forall ij$
2. Esamina G e per ogni $uv \in E$, poni $D_{uv} = 1$
3. Per ogni $i = 1, 2, \dots, n$, poni $D_{ii} = 0$
4. Poni $K = |V|$

Deterministico, tempo polinomiale



$x \rightsquigarrow T(X)$

T

G

HAM $\propto$ TSP

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

$K = |V(G)| = 5$

$x \in \Pi_1 \Leftrightarrow T(x) \in \Pi_2$

① Sia C un ciclo hamiltoniano in G

Siccome C attraversa $|V|$ archi di E,
le distanze corrispondenti D_{ij} sono tutte pari a 1
per costruzione $\Rightarrow$ costo tour corrispondente a C è pari a $k = |V|$
$\Rightarrow$ la risposta per TSP è TRUE

② Supponiamo che non esista un ciclo hamiltoniano in G
$\Rightarrow$ ogni permutazione dei $|V|$ nodi fornisce una coppia $ij \notin E$
(altrimenti avremmo trovato un ciclo hamiltoniano)
dove i e j sono consecutivi nella permutazione presa in esame
$\Rightarrow$ il tour corrispondente ha almeno un costo $D_{ij} > 1$, mentre
gli altri costi sono ≥ 1 $\Rightarrow$ costo $> k$ $\Rightarrow$ TSP ha risposta FALSE ∎

Riduzione $\propto$ è una relazione tra problemi

① Riflessiva $\Pi \propto \Pi$

② Transitiva $\Pi_1 \propto \Pi_2 \propto \Pi_3 \Rightarrow \Pi_1 \propto \Pi_3$

T_{12} T_{23} $T_{13} = T_{12} \circ T_{23}$

T_{13} rimane deterministica e polinomiale

$$\boxed{T_{13}(x)} = T_{23}(T_{12}(x))$$

$$x \in \Pi_1 \Leftrightarrow \underbrace{T_{12}(x)}_{x'} \in \Pi_2 \Leftrightarrow T_{23}(x') \in \Pi_2$$

③ Simmetrica? $\Pi_1 \propto \Pi_2 \overset{?}{\Rightarrow} \Pi_2 \propto \Pi_1$

BIG QUESTION $P \overset{?}{=} NP$

Prop. $(\Pi_1 \propto \Pi_2)$ $\quad \Pi_2 \in P \Rightarrow \Pi_1 \in P$

Sia A_2 l'algoritmo polinomiale deterministico per Π_2

Sia $x \in \{0,1\}^*$: costruisco un algoritmo polinomiale deterministico A_1 per Π_1:

$$A_1(x) \begin{cases} ① \ y \leftarrow T(x) \text{, dove } T \text{ è la trasformazione per } \Pi_1 \propto \Pi_2 \\ ② \ \text{return TRUE se } A_2(y) = \text{TRUE} \end{cases}$$

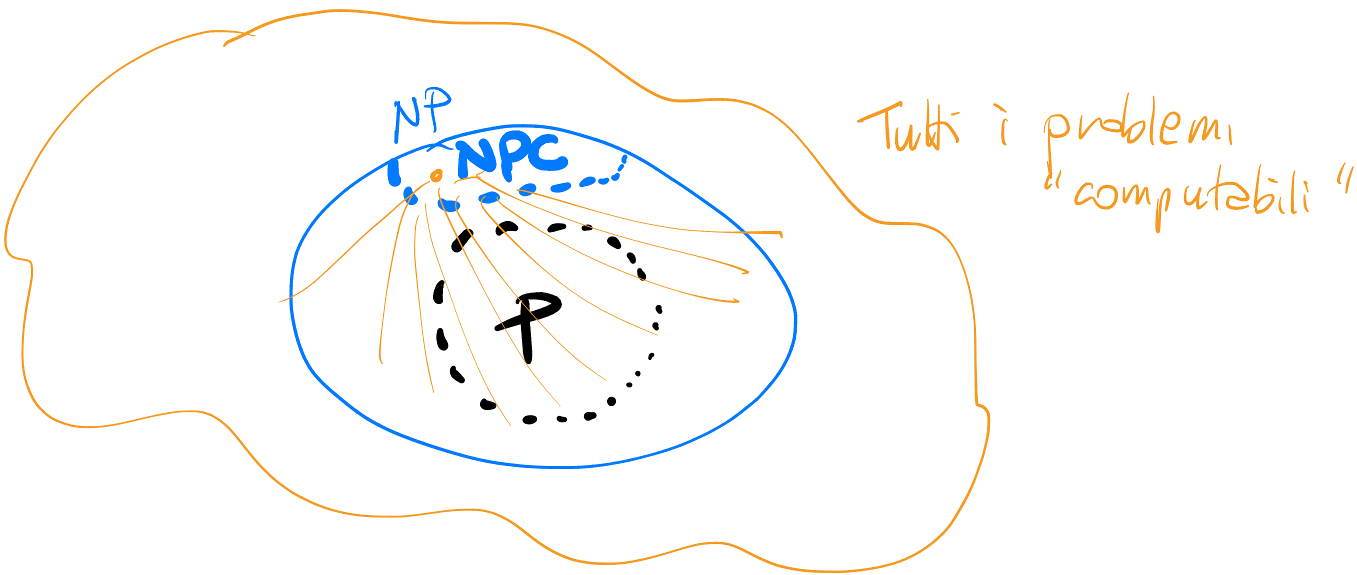
Lettura interessante di questo enunciato:

$$\Pi_1 \notin P \Rightarrow \Pi_2 \notin P$$

Cook '71 , Levin '71

Problemi NPC = NP-completi

$\Pi \in NP$ è <u>COMPLETO</u> se $\forall \Pi' \in NP : \Pi' \propto \underset{\uparrow \text{NPC}}{\Pi}$



$\boxed{1}$ $\Pi \in NPC$, $\Pi \in P \Rightarrow P = NP$

$\boxed{2}$ $\Pi \in NPC$, $\Pi \in EXP$ $(\Pi \notin P)$ $\Rightarrow P \neq NP$

Th. Cook - Levin : $SAT \in NPC$ (odiernamente ce ne sono centinaia di migliaia)

SAT n variabili booleane $x_1, x_2, \dots, x_n \in \{0, 1\}$ (0 = F, 1 = T)

letterale : x_i oppure $\overline{x_i}$, clausola : OR di letterali $(x_3 \vee \overline{x_5} \vee x_8)$

formula CNF : AND di m clausole : $(x_1 \vee \overline{x_3}) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4}) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2})$

Assegnamento di verità $\tau : x_1, x_2, \dots, x_n \rightarrow \{0,1\}^n$

τ soddisfa una formula $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ se $F(\tau(x_1), \tau(x_2), \dots, \tau(x_n)) = TRUE$

es τ : $x_1 = 1$ $x_3 = 1$
$x_2 = 0$ $x_4 = 1$

DATA F, è soddisfacibile?

IMPLICAZIONE di Cook-Levin: ogni problema in NP può espresso come una formula booleana di dimensione polinomiale rispetto all'input originale.

ESEMPIO: 3-colorazione di mappe planari $\propto$ SAT

mappa planare = n paesi (è un grafo planare ☺)

$A_{ij} = 1$ se i paesi i e j sono adiacenti

$n^2 + 3n$ variabili booleane

$n^2 \rightarrow a_{ij}$, $3n \rightarrow r_i, g_i, b_i$

colori = r, g, b

formula booleana è composta di tre parti:

A: serve a modellare la mappa $\left(\bigwedge_{A_{ij}=1} a_{ij}\right) \wedge \left(\bigwedge_{A_{ij}=0} \bar{a}_{ij}\right)$

B : ogni paese assume esattamente un colore

$$\bigwedge_{i} \Big[\underbrace{(r_i \wedge \bar{g}_i \wedge \bar{b}_i)}_{\text{rosso}} \vee \underbrace{(\bar{r}_i \wedge g_i \wedge \bar{b}_i)}_{\text{giallo}} \vee \underbrace{(\bar{r}_i \wedge \bar{g}_i \wedge b_i)}_{\text{blu}} \Big]$$

C : paesi adiacenti devono avere colori diversi $\quad (a \to b \equiv \bar{a} \vee b)$

$$\bigwedge_{ij} \Big\{ \bar{a}_{ij} \vee \big[(r_i \wedge \bar{r}_j) \vee (g_i \wedge \bar{g}_j) \vee (b_i \wedge \bar{b}_j) \big] \Big\}$$

$F = A \wedge B \wedge C$ $\quad$ + de Morgan etc. per renderla CNF

La trasformazione richiede tempo deterministico polinomiale

mappa è 3-colorabile sse la sua F è soddisfacibile

Karp '72 :

$\Pi \in NPC$:

1. $\Pi \in NP$ (di solito è facile)
2. $\exists\, \Pi' \in NPC$ t.c. $\boxed{\Pi' \propto \Pi}$ ← VANTAGGIO

$\Pi' \neq \Pi$

una sola trasformazione

Si sfrutta la transitività :

$\forall\, \Pi^* \in NP : \Pi^* \propto \Pi'$ perché $\Pi' \in NPC$

$\Pi' \propto \Pi$ per la 2

$\Rightarrow \forall\, \Pi^* \in NP : \Pi^* \propto \Pi$

3-SAT : SAT dove ogni clausola ha esattamente 3 letterali

3-SAT $\in$ NPC

(1) 3-SAT $\in$ NP ovvio

(2) SAT $\propto$ 3-SAT (2-SAT $\in$ P)

$F = C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_m$ m clausole

$\rightsquigarrow$

F' è 3-SAT

Analisi per casi su C_i, per $1 \leq i \leq m$

$|C_i|$ = numero di letterali (in OR) dentro C_i

- $|C_i| = 3$ facile : NULLA $C'_i = C_i$

- $|C_i| = 2$: $\quad C_i = (\ell_1 \vee \ell_2)$

$$C_i' = (\ell_1 \vee \ell_2 \vee y) \wedge (\ell_1 \vee \ell_2 \vee \bar{y})$$

nuova variabile y : non influenza

- $|C_i| = 1$ $\quad C_i = (\ell_1)$

$$C_i' = (\ell_1 \vee y_1 \vee y_2) \wedge (\ell_1 \vee \bar{y}_1 \vee y_2) \wedge (\ell_1 \vee y_1 \vee \bar{y}_2) \wedge (\ell_1 \vee \bar{y}_1 \vee \bar{y}_2)$$

nuove variabili y_1, y_2

- $|C_i| > 3$: caso interessante

$$C_i = (\ell_1 \vee \ell_2 \vee \ell_3 \vee \ell_4 \vee \ell_5 \vee \ell_6)$$

nuove variabili

$$C_i' = (\ell_1 \vee \ell_2 \vee y_1) \wedge (\bar{y}_1 \vee \ell_3 \vee y_2) \wedge (\bar{y}_2 \vee \ell_3 \vee y_3) \wedge$$
$$(\bar{y}_3 \vee \ell_4 \vee y_4) \wedge (\bar{y}_4 \vee \ell_5 \vee \ell_6)$$

Si può vedere che C_i è soddisfatta se C'_i è soddisfatta