Elementi di Topologia Algebrica - Gruppo 2

22 novembre 2024

Esercizio 1

(a) Sia X un grafo finito connesso, e procediamo per induzione sul numero di archi del grafo X: se il grafo ha un solo arco, allora possiede uno o due vertici, e il sottografo che selezionamo come albero è rispettivamente $\bullet$ oppure $\bullet \longrightarrow \bullet$. Supponiamo ora che X abbia n archi, e senza perdita di generalità supponiamo che X non sia un albero. Allora, esiste un vertice x interno ad un qualche arco a tale che $X \setminus \{x\}$ è connesso, e notiamo che $X \setminus \{a\}$ è un grafo connesso con $n-1$ archi, in quanto possiamo rimuovere il segmento $a \simeq [0,1]$ senza perdere la connessione. Possiamo quindi applicare l'ipotesi induttiva su tale grafo con $n-1$ archi, ed avendo questo gli stessi verticidi X l'albero T che otteniamo è il sottografo di X cercato.

(b) Sia T un albero, e procediamo ancora per induzione sul numero di archi: se T ha un solo arco, allora è omeomorfo a $[0,1]$ ed è quindi contraibile.

Altrimenti, asseriamo che T contiene un vertice di grado 1: infatti, osserviamo che un albero è equivalentemente un grafo connesso minimale, e quindi il numero di archi di T è uguale al numero di vertici meno uno. Ora, se tutti i vertici di T avessero grado maggiore o uguale a 2, allora il numero di archi sarebbe almeno il doppio del numero di vertici, che è un assurdo.

Sia quindi x un vertice di grado 1 che si trova sull'arco a; allora, possiamo retrarre $a \cup \{x\}$ ad un punto, ottenendo un albero con un arco in meno. Applicando l'ipotesi induttiva, otteniamo che tale albero è contraibile, e quindi possiamo concatenare le due omotopie ottenute per ottenere una contrazione di T ad un punto.

(c) Osserviamo che X/T è connesso, e quindi

$$H_0(X/T) \cong H_0(X) \cong \mathbb{Z}.$$

Inoltre, notiamo che se (X,A) è una coppia con A contraibile, allora la successione esatta lunga in omologia relativa ci dà, per $i > 0$, isomorfismi

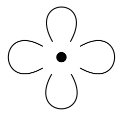
$$\dots \cancel{H_{i+1}(A)} \to H_i(X) \xrightarrow{\sim} H_i(X,A) \to \cancel{H_i(A)} \to \dots. \tag{1}$$

Ora, affermiamo che (X,T) è una buona coppia: infatti, per qualsiasi arco a, (X,e) è una buona coppia, e per la costruzione del punto precedente possiamo vedere la proiezione $X \to X/T$ come una successione di quozienti successivi di un arco alla volta. Dalla teoria otteniamo quindi

$$H_i(X,T) \cong H_i(X/T) \tag{2}$$

per ogni $i > 0$, e perciò visto che T è contraibile otteniamo

$$\begin{aligned} H_i(X) &\overset{(1)}{\cong} H_i(X,T) \\ &\overset{(2)}{\cong} H_i(X/T, T/T) \\ &= H_i(X/T, *) \\ &\overset{(1)}{\cong} H_i(X/T). \end{aligned}$$

Il fatto che X/T sia topologicamente omeomorfo ad un wedge di S^1 segue dal fatto che T contiene tutti i vertici di X, che vengono quindi tutti identificati fra di loro. Di conseguenza, X/T ha un singolo vertice, e tutti gli archi sono loop di tale vertice:  .

(d) Calcoliamo la caratteristica di Eulero di un albero T come segue: essendo T un grafo, sappiamo che

$$\chi(T) = \operatorname{rk}(H_0(T)) - \operatorname{rk}(H_1(T)),$$

e dal fatto che T è contraibile e connesso deduciamo $\chi(T) = 1 - 0 = 1$.

(e) Innanzitutto $H_0(X/T) = \mathbb{Z}$ perchè X/T è connesso; inoltre, visto che X/T è topologicamente un wedge di S^1 abbiamo che

$$H_1(X/T) = \pi_1(X/T)^{ab} = (\underbrace{\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}}_{r})^{ab} = \mathbb{Z}^r,$$

dove r è il numero di archi di X/T, che possiamo determinare come segue:

$$\begin{aligned} k &= |\{\text{archi di } X\}| - |\{\text{archi di } T\}| \\ &= (|\{\text{vertici di } X\}| - \chi(X)) - (|\{\text{vertici di } T\}| - 1) \\ &= 1 - \chi(X), \end{aligned}$$

dove abbiamo usato il fatto che X e T hanno gli stessi vertici.

Inoltre, la struttura cellulare di X/T è data incollando gli estremi di k 1-celle ad una 0-cella, e quindi visto che l'omologia cellulare coincide con l'omologia singolare concludiamo che i gruppi di omologia di X/T (e quindi anche di X) sono

$$H_0(X/T) = \mathbb{Z}, \quad H_1(X/T) = \mathbb{Z}^{1-\chi(X)}, \quad H_i(X/T) = 0 \text{ per } i > 1.$$

Esercizio 2

(a) Vogliamo mostrare che la seguente composizione è un isomorfismo:

$$H_n(D^n_\sigma, \partial D^n_\sigma) \xrightarrow{(f_\sigma)_*} H_n(K^{(n)}, B_\sigma) \xrightarrow{(p_\sigma)_*} \widetilde{H}_n(S^n_\sigma),$$

dove per comodità abbiamo indicato con B_σ lo spazio $K^{(n)} \setminus f_\sigma(\mathring{D}^n_\sigma)$.

La prima mappa è iniettiva per un teorema visto in classe sugli spazi ottenuti per incollamento di n-celle; inoltre, nello stesso teorema abbiamo che

$$H_n(K^{(n)}, B_\sigma) \cong \operatorname{im}\left((f_\sigma)_*\right),$$

visto che $K^{(n)}$ è ottenuto da B_σ attaccando la n-cella $f_\sigma(\mathring{D}^n_\sigma)$; questo mostra che $(f_\sigma)_*$ è suriettiva, ma allora è un isomorfismo.

Inoltre, la seconda mappa è un isomorfismo perchè $(K^{(n)}, B_\sigma)$ è una buona coppia (in quanto sottocomplesso di un CW complesso, come mostrato ad esempio nella Proposizione A.5 dell'Hatcher) e $(p_\sigma)_*$ è indotta dalla mappa di proiezione associata a tale coppia.

(b) Se $\tau \neq \sigma$, allora visto che le n-celle sono tutte disgiunte si ha

$$f_\tau(\mathring{D}^n_\sigma) \subset B_\sigma,$$

ma d'altronde il bordo di D^n_σ ha sempre questa proprietà, e quindi la mappa p_σ manda tutto $f_\tau(\mathring{D}^n_\sigma)$ in un punto; di conseguenza, la composizione

$$(p_\sigma \circ f_\tau)_* = (p_\sigma)_* \circ (f_\tau)_*$$

è la mappa nulla sui gruppi omologia, quanto indotta da una mappa costante.

Esercizio 3

(a) Per un teorema visto in classe, essendo $K^{(n)} \cup Y$ ottenuto da $K^{(n-1)} \cup Y$ attaccando n-celle, abbiamo che se $i \neq n$ allora

$$H_i(K^{(n)} \cup Y, K^{(n-1)} \cup Y) = 0.$$

D'altronde, per $i = n$ possiamo usare il medesimo teorema ed il fatto che $H_n(D^n, \partial D^n)$ per dedurre che

$$H_n(K^{(n)} \cup Y, K^{(n-1)} \cup Y) = \sum_\sigma \operatorname{im}((f_\sigma)_*) \cong \mathbb{Z}^{|\{\sigma\}|}.$$

Qui, gli indici σ variano fra le mappe di incollamento utilizzate per costruire il CW complesso $K^{(n)} \cup Y$ a partire da $K^{(n-1)} \cup Y$. Per definizione di sottocomplesso, queste sono tante quante le n-celle di $K^{(n)}$ che non intersecano Y.

(b) Partiamo con il caso $i < n$: per un teorema visto in classe, sappiamo che l'inclusione dell'n-scheletro di un CW complesso in esso induce un isomorfismo in omologia per $i < n$. Utilizzando questo fatto e la fattorizzazione associata alle inclusioni successive

$$K^{(n)} \hookrightarrow K^{(n)} \cup Y \overset{j}{\hookrightarrow} X,$$

otteniamo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
H_i(K^{(n)} \cup Y) \arrow[r, "j_*"] & H_i(X) \\
H_i(K^{(n)}) \arrow[u, "\cong"] \arrow[ur, "\cong"'] &
\end{tikzcd}$$

Questo implica che anche j_* è un isomorfismo per $i < n$. Per concludere, usiamo il morfismo (indotto dalle inclusioni) fra le successioni esatte lunghe in omologia relativa di X associate alle coppie $(X, K^{(n)} \cup Y)$ ed (X, X):

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & H_i(K^{(n)} \cup Y) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H_i(X) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H_i(X, K^{(n)} \cup Y) \arrow[r] \arrow[d] & H_{i-1}(K^{(n)} \cup Y) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H_{i-1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \dots \\
\dots \arrow[r] & H_n(X) \arrow[r] & H_n(X) \arrow[r] & \cancel{H_i(X, X)} \arrow[r] & H_{n-1}(X) \arrow[r] & H_{n-1}(X) \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

Da cui, per il lemma dei cinque, la mappa verticale centrale è un isomorfismo e quindi $H_i(X, K^{(n)} \cup Y) = 0$ per $i < n$.

Per $i = n$, invece, consideriamo la successione esatta lunga della tripla

$$(X, K^{(n+1)} \cup Y, K^{(n)} \cup Y):$$

$$\cdots \to H_n(K^{(n+1)} \cup Y, K^{(n)} \cup Y) \to H_n(X, K^{(n)} \cup Y) \to$$
$$\to H_n(X, K^{(n+1)} \cup Y) \to H_{n-1}(K^{(n+1)} \cup Y, K^{(n)} \cup Y) \to \dots$$

I due estremi sono nulli per il punto (a) dell'esercizio, mentre il terzo termine è nullo perchè per $i < n + 1$ si ha $H_i(X, K^{(n+1)} \cup Y) = 0$ per quanto detto sopra; questo mostra la tesi per $i = n$.

Infine, se $i < n$ consideriamo la successione esatta lunga della tripla

$$(X, K^{(n)} \cup Y, Y):$$

$$\dots \to H_{i+1}(X, K^{(n)} \cup Y) \to H_i(K^{(n)} \cup Y, Y) \to H_i(X, Y) \to H_i(X, K^{(n)} \cup Y) \to \dots$$

Visto che $i \leq n + 1$, i due estremi sono nulli per quanto appena dimostrato, e quindi la mappa centrale è un isomorfismo per esattezza.

(c) Per definire il complesso $C_*(K, Y)$, consideriamo le successioni esatte lunghe associate alle coppie $(K^{(n)} \cup Y, K^{(n-1)} \cup Y)$ al variare di n: più precisamente, posto

$$C_n(K, Y) \coloneqq H_n(K^{(n)} \cup Y, K^{(n-1)} \cup Y),$$

definiamo i differenziali come la composizione

$$H_n(K^{(n)} \cup Y, K^{(n-1)} \cup Y) \longrightarrow H_{n-1}(K^{(n-1)} \cup Y) \longrightarrow H_{n-1}(K^{(n-1)} \cup Y, K^{(n-2)} \cup Y)$$

dove la prima mappa è quella di connessione relativa alla coppia

$$(K^{(n)} \cup Y, K^{(n-1)} \cup Y),$$

mentre la seconda è quella indotta dalla proiezione relativa alla coppia

$$(K^{(n-1)} \cup Y, K^{(n-2)} \cup Y).$$

Per costruire l'isomorfismo cercato fra l'omologia di tale complesso e l'omologia di X relativa ad Y, utilizzando le successioni delle triple $(K^{n+1} \cup Y, K^{(n)} \cup Y, K^{(n-1)} \cup Y)$ e $(K^{(n)} \cup Y, K^{(n-1)} \cup Y, K^{(n-2)} \cup Y)$ si può usare l'esattezza ed escissione per mostrare che

$$H_n(C_*(K, Y)) \cong H_n(K^{(n)}, K^{(n-1)} \cup Y) / H_n(X, K^{(n-1)} \cup Y) \cong H_n(X, Y),$$

utilizzando le successione delle rispettive coppie per ottenere l'ultimo isomorfismo.

Esercizio 4

(a) Costruiamo una retrazione di M_f sulla copia di Y contenuta in M_f a tempo 1: consideriamo infatti

$$H : M_f \times [0,1] \to M_f$$
$$\begin{cases} ((x,s),t) & \mapsto (x, s(1-t)+t), \\ (y,t) & \mapsto y. \end{cases}$$

Osserviamo che H è ben definita e continua; d'altronde, H_t ristretta ad Y è l'identità per ogni t, H_0 è l'identità di M_f ed $H_1(M_f) = Y$. Quindi, H è una retrazione per deformazione di M_f su Y, e ponendo $p = H_1$ otteniamo l'equivalenza omotopica cercata:

$$p \circ \iota(x) = H_1 \circ \iota(x) = H_1(x,0) = (x,1) = f(x)$$

per definizione di mapping cone.

(b) Consideriamo la successione esatta lunga in omologia relativa associata alla coppia (M_f, X):

$$\dots \longrightarrow \widetilde{H}_i(X) \longrightarrow \widetilde{H}_i(M_f) \longrightarrow H_i(M_f, X) \longrightarrow \widetilde{H}_{i-1}(X) \longrightarrow \dots, \tag{3}$$

dove abbiamo usato il fatto che l'omologia della coppia coincide l'omologia ridotta.

Visto che Y è un retratto per deformazione di M_f e che (M_f, X) è una buona coppia (ad esempio perché $X \times [0, \frac{1}{2})$ si retrae per deformazione su X), osservando che

$$M_f/X \cong C_f$$

deduciamo gli isomorfismi

$$\widetilde{H}_i(M_f) \cong \widetilde{H}_i(Y)$$
$$H_i(M_f, X) \cong \widetilde{H}_i(C_f).$$

Sostituendoli nella (3), otteniamo quindi la successione esatta desiderata:

$$\dots \longrightarrow \widetilde{H}_i(X) \longrightarrow \widetilde{H}_i(Y) \longrightarrow \widetilde{H}_i(C_f) \longrightarrow \widetilde{H}_{i-1}(X) \longrightarrow \dots$$