Elementi di Topologia Algebrica - Gruppo 3

9 dicembre 2024

Esercizio 1

Fissato n, vogliamo mostrare che il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd} C_n(X) \arrow[r, "\delta_n"] \arrow[d, "D"] & C_{n-1}(X) \arrow[d, "D"] \\ C_n(X) \otimes C_n(X) \arrow[r, "\delta'_n"] & C_{n-1}(X) \otimes C_{n-1}(X) \end{tikzcd}$$

Calcoliamo entrambe le composizioni: per $\sigma \in C_n(X)$, abbiamo

$$\begin{aligned} D \circ \delta_n(\sigma) &= D\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \sigma \circ d_i\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \left(\sum_{p+q=n-1} (\sigma \circ d_i)^1_p \otimes (\sigma \circ d_i)^2_q\right) \\ &= \sum_{i=0}^{p}(-1)^i \left(\sum_{p+q=n-1} (\sigma \circ d_i)^1_p \otimes (\sigma \circ d_i)^2_q\right) + \sum_{i=p+1}^{n}(-1)^i \left(\sum_{p+q=n-1} (\sigma \circ d_i)^1_p \otimes (\sigma \circ d_i)^2_q\right). \end{aligned}$$

Osserviamo inoltre che valgono le seguenti relazioni, che si ottengono esplicitando le mappe a_p, b_q in termini delle mappe d_i:

$$\begin{cases} (\sigma \circ d_i)^1_p = \sigma^1_{p+1} \circ d_i & \text{se } i \leq p, \\ (\sigma \circ d_i)^1_p = \sigma^1_p & \text{se } i > p, \\ (\sigma \circ d_i)^2_q = \sigma^2_q & \text{se } i \leq p, \\ (\sigma \circ d_i)^2_q = \sigma^2_{q+1} \circ d_{i-p} & \text{se } i > p. \end{cases}$$

Effettuando tali sostituzioni e riscrivendo q in termini di n e p, otteniamo:

$$\begin{aligned} & D \circ \delta_n(\sigma) = \\ & \quad = \sum_{p=0}^{n-1}\left(\sum_{i=0}^{p}(-1)^i(\sigma^1_{p+1} \circ d_i) \otimes \sigma^2_{n-p-1} + \sum_{i=p+1}^{n}(-1)^i \sigma^1_p \otimes (\sigma^2_{n-p} \circ d_{i-p})\right). \end{aligned}$$

Esplicitiamo ora l'altra composizione:

$$\begin{aligned}\delta'_n \circ D(\sigma) &= \delta'_n \left(\sum_{p+q=n} \sigma^1_p \otimes \sigma^2_q \right) \\ &= \sum_{p+q=n} \left(\left(\sum_{i=0}^{p} (-1)^i (\sigma^1_p \circ d_i) \right) \otimes (\sigma^2_q) + (-1)^p (\sigma^1_p) \otimes \left(\sum_{j=0}^{q} (-1)^j (\sigma^2_q \circ d_j) \right) \right) \\ &= \sum_{p=0}^{n} \left(\left(\sum_{i=0}^{p} (-1)^i (\sigma^1_p \circ d_i) \right) \otimes (\sigma^2_{n-p}) + \left(\sum_{j=0}^{n-p} (-1)^{j+p} \sigma^1_p \otimes (\sigma^2_{n-p} \circ d_j) \right) \right).\end{aligned}$$

Osserviamo ora che nell'espressione qua sopra, i termini con $i = p$ e $j = 0$ si cancellano, in quanto otteniamo una somma telescopica

$$\sum_{p=0}^{n} \left((-1)^p (\sigma^p_1 \circ d_p) \otimes \sigma^2_{n-p} + (-1)^p \sigma^p_1 \otimes (\sigma^2_{n-p} \circ d_0)\right) = \sum_{p=0}^{n} \left((-1)^p \sigma^{p-1}_1 \otimes \sigma^2_{n-p} + (-1)^p \sigma^p_1 \otimes \sigma^2_{n-p-1} \right) = 0.$$

In conclusione, per entrambe le composizioni otteniamo lo stesso numero $n(n+1)$ di termini, e permutando gli indici delle sommatorie otteniamo che i due risultati coincidono.

Esercizio 2 Siano $\pi_X : X \times Y \to X$ e $\pi_Y : X \times Y \to Y$ le proiezioni canoniche, che inducono mappe $\pi^*_X : C^*(X) \to C^*(X \times Y)$ e $\pi^*_Y : C^*(Y) \to C^*(X \times Y)$ sulle cocatene. Mostreremo che l'isomorfismo α ammette la scrittura esplicita

$$\alpha(a \otimes b) = \pi^*_X(a) \smile \pi^*_Y(b). \tag{1}$$

Per farlo, consideriamo la mappa

$$\beta : C^*(X) \otimes C^*(Y) \to C^*(X \times Y)$$

che manda $p \otimes q \in C^i(X) \otimes C^j(Y)$ in $\pi^*_X(p) \smile \pi^*_Y(q) \in C^{i+j}(X \times Y)$; questa definisce un morfismo di complessi per la naturalità delle proiezioni e del prodotto cup, che sono compatibili con le mappe di bordo. Inoltre, β coincide con la mappa EZ di Eilenberg-Zilber in grado 0, in quanto quest'ultima è data da

$$p \otimes q \mapsto (\sigma \to p(\pi_X(\sigma)) q(\pi_Y(\sigma)))$$

al variare di σ in $C_0(X \times Y)$, e β dà lo stesso risultato in grado 0 per definizione di prodotto cup. Dunque, per il teorema dei funtori liberi ed aciclici EZ è omotopa a β, e quindi inducono la stessa mappa in coomologia. In altre parole, passando per la formula di Künneth otteniamo che β induce un isomorfismo

$$\bigoplus_{p+q=n} H^p(X) \otimes H^q(Y) \xrightarrow{\sim} H^n(X \times Y)$$

che coincide con α per costruzione. Per concludere, osserviamo che vale la seguente catena di uguaglianze (dove usiamo la scrittura (1) per α):

$$\begin{aligned}\alpha(a_i \otimes a_j) \smile \alpha(b_p \otimes b_q) &= (\pi^*_X(a_i) \smile \pi^*_Y(a_j)) \smile (\pi^*_X(b_p) \smile \pi^*_Y(b_q)) \\ &= \pi^*_X(a_i) \smile (\pi^*_Y(a_j) \smile \pi^*_X(b_p)) \smile \pi^*_Y(b_q) && \text{(associatività di } \smile\text{)} \\ &= (-1)^{(jp)} \pi^*_X(a_i) \smile \pi^*_X(b_p) \smile \pi^*_Y(a_j) \smile \pi^*_Y(b_q) && \text{(anti-commutatività di } \smile\text{)} \\ &= (-1)^{jp} \pi^*_X(a_i \smile b_p) \smile \pi^*_Y(a_j \smile b_q) && (*) \\ &= \alpha((a_i \smile b_p) \otimes (a_j \smile b_q)),\end{aligned}$$

come volevamo dimostrare. Il passaggio $(*)$ è una verifica immediata, che riportiamo nel caso di π_X^*: se a, b sono cocicli in gradi i, j rispettivamente, allora per ogni $\sigma \in C_{i+j}(X \times Y)$ abbiamo

$$\pi_X^*(a \smile b)(\sigma) = (-1)^{ij} a(\pi_X \circ \sigma) b(\pi_Y \circ \sigma) = \pi_X^*(a) \smile \pi_X^*(b).$$

Esercizio 3 Dimostriamo innanzitutto che i gruppi $H^i(T^n)$ sono isomorfi a $\mathbb{Z}^{\binom{n}{i}}$ per induzione su n: per $n = 1$ abbiamo $T^1 = S^1$, e sappiamo che $H^0(S^1) = H^1(S^1) = \mathbb{Z}$ ed $H^i(S^1) = 0$ per $i > 1$; per il passo induttivo, notiamo che $T^n = T^{n-1} \times S^1$ è prodotto di spazi topologici con coomologia libera, e quindi per la formula di Künneth otteniamo

$$H^i(T^n) \simeq H^i(T^{n-1}) \otimes H^0(S^1) \oplus H^{i-1}(T^{n-1}) \otimes H^1(S^1) \simeq \mathbb{Z}^{\binom{n-1}{i}} \oplus \mathbb{Z}^{\binom{n-1}{i-1}} = \mathbb{Z}^{\binom{n}{i}}.$$

Per quanto riguarda la struttura moltiplicativa, mostriamo per induzione su n che $H^*(T^n)$ è isomorfo alla $\mathbb{Z}$-algebra esterna $\Lambda(x_1, \ldots, x_n)$ su n generatori dove gli x_i sono generatori dell'H^1 dell'i-esima copia di S^1, il cui prodotto è T^n: per $n = 1$, abbiamo

$$H^*(S^1) = \mathbb{Z} \oplus x\mathbb{Z}$$

con x generatore di $H^1(S^1)$, e vale $x^2 = 0$ visto che $x^2 = x \smile x \in H^2(S^1) = 0$; per il passo induttivo, possiamo usare la relazione dell'esercizio precedente, per la quale l'isomorfismo α di Künneth risulta essere un isomorfismo di algebre graduate, e quindi

$$H^*(T^n) \simeq H^*(T^{n-1}) \otimes H^*(S^1)$$

come algebre graduate. Per ipotesi induttiva, $H^*(T^{n-1})$ è isomorfo a $\Lambda(x_1, \ldots, x_{n-1})$, ed $H^*(S^1)$ è isomorfo a $\Lambda(x_n)$ con x_n generatore di $H^1(S^1)$; perciò

$$H^*(T^n) \simeq \Lambda(x_1, \ldots, x_{n-1}) \otimes \Lambda(x_n) \simeq \Lambda(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n),$$

che conclude il passo induttivo.

Esercizio 4

Notiamo preliminarmente che essendo X una varietà connessa, è anche connessa per archi. Inoltre, essendo X *non* compatta, abbiamo che $X \setminus K$ è non vuoto per ogni $K \subset X$ compatto.

Per definizione di coomologia a supporto compatto, preso un 0-cociclo

$$\alpha \in H_c^0(X) = \ker(\delta^0 : C_c^0(X) \to C_c^1(X)),$$

questo vive in $C^0(X, X \setminus K) = \ker(C^0(X) \to C^0(X \setminus K))$ per un qualche compatto $K \subset X$. Se fissiamo $y \in X \setminus K$, per ogni $x \in X$ esiste un cammino γ che congiunge x ad y.

Quindi,

$$\delta^0(\alpha) = 0 \implies 0 = \delta^0(\alpha)(\gamma) = \alpha(y) - \alpha(x) = 0,$$

ma visto che $y \in X \setminus K$, abbiamo $\alpha(y) = 0$ e quindi $\alpha(x) = 0$ per ogni $x \in X$ per l'arbitrarietà di x; concludiamo perciò $\alpha = 0$ e dunque $H_c^0(X) = 0$.