## Elementi di Topologia Algebrica - Gruppo 1

## 22 novembre 2024

Esercizio 1 Costruiamo la realizzazione geometrica di  $\Delta$  dentro  $\mathbb{R}^N$ , dove  $N = |\Delta|$ : ordinati gli elementi  $\{x_1, \ldots, x_N\}$  di X contenuti nelle facce di  $\Delta$  (in altre parole, i suoi vertici), e se  $\tau = \{x_{i_0}, \ldots, x_{i_k}\}$  è una faccia di dimensione k poniamo

$$X(\tau) = \operatorname{im}(\varphi : \Delta^k \to \mathbb{R}^N),$$

dove  $\varphi$  è la mappa lineare definita da

$$\varphi(e_i) = e_{i_i}$$

per  $j = 0, \dots, k$ . La realizzazione geometrica di  $\Delta$  è quindi l'insieme

$$X(\Delta) \coloneqq \bigcup_{\tau \in \Delta} X(\tau).$$

Inoltre, se  $\tau, \tau' \in \Delta$ ,

$$X(\tau \cap \tau') = \left\{ \sum_{x_i \in \tau \cap \tau'} \lambda_i e_i \mid \lambda_i \ge 0, \sum_{x_i \in \tau \cap \tau'} \lambda_i = 1 \right\}$$
$$= \left\{ \sum_{x_i \in \tau} \lambda_i e_i \mid \lambda_i \ge 0, \sum_{x_i \in \tau} \lambda_i = 1 \right\} \cap \left\{ \sum_{x_i \in \tau'} \lambda_i e_i \mid \lambda_i \ge 0, \sum_{x_i \in \tau'} \lambda_i = 1 \right\} = X(\tau) \cap X(\tau').$$

Esercizio 2 Dimostriamo innanzitutto che il complesso di catene

$$C_{\bullet} := C_{\bullet}(\mathcal{P}([n]))$$

è esatto, da cui seguirà che questo ha omologia ridotta nulla, ovvero  $\widetilde{H}_k(\mathcal{P}([n])) = 0$  per ogni k. Per fare ciò, costruiamo un'omotopia di catene tra l'identità e la mappa nulla da  $C_{\bullet}$  in sé: fissato k, definiamo tale omotopia di catene sulla base di  $C_k$  come  $\mathbb{Z}$ -modulo libero data dai k-simplessi:

$$s_k: C_k \to C_{k+1}, \qquad s_k(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \in \tau \\ \tau \cup \{0\} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Verifichiamo la relazione

$$\partial s + s\partial = \mathrm{id}$$
:

• se  $0 \in \tau$ , allora  $\partial s(\tau) = \partial(0) = 0$ , e inoltre

$$s\partial(\tau) = s\left(\sum_{x \in \tau} (-1)^{|\{x' < x\}|} \tau \setminus \{x\}\right) = \tau + s\left(\sum_{x \in \tau, x \neq 0} (-1)^{|\{x' < x\}|} \underbrace{\tau \setminus \{x\}}_{\text{contiene } 0}\right) = \tau.$$

• se  $0 \notin \tau$ , allora

$$\begin{split} &\partial s(\tau) + s\partial(\tau) \\ &= \partial(\tau \cup \{0\}) + s\left(\sum_{x \in \tau} (-1)^{|\{x' < x\}|} \tau \setminus \{x\}\right) \\ &= \tau + \sum_{x \in \tau} (-1)^{|\{x' < x, \ x' \in \tau \cup \{0\}\}|} (\tau \cup \{0\}) \setminus \{x\} + \sum_{x \in \tau} (-1)^{|\{x' < x, \ x' \in \tau\}|} (\tau \cup \{0\}) \setminus \{x\} \\ &= \tau. \end{split}$$

Se poi chiamiamo  $D_{\bullet}$  il complesso di catene associato a  $\Delta^n = \mathcal{P}([n]) \setminus \{[n]\}$ , osserviamo che  $D_k = C_k \simeq \mathbb{Z}^{\binom{n+1}{k+1}}$  per ogni k < n in quanto le facce di tali dimensioni coincidono, e che quindi

$$\widetilde{H}_k(\Delta^n) = \widetilde{H}_k(\mathcal{P}([n])) = 0$$

per ogni k < n-1; inoltre,  $D_n = 0$  perché abbiamo rimosso l'unica faccia di dimensione n, quindi  $\widetilde{H}_n(\Delta^n) = 0$ .

Infine, per calcolare  $\widetilde{H}_{n-1}(\Delta^n)$ , consideriamo il seguente diagramma (commutativo per l'omotopia costruita sopra):

$$0 \longrightarrow C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow C_{n-2}$$

$$\downarrow \qquad \qquad \parallel \qquad \qquad \parallel$$

$$D_n \longrightarrow D_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} D_{n-2}$$

Visto che  $D_n = 0$ , si ha

$$\widetilde{H}_{n-1}(\Delta^n) = \ker(\partial_{n-1}) = \operatorname{im}(\partial_n) = C_n \simeq \mathbb{Z}.$$

Avendo calcolato l'omologia ridotta di  $\Delta^n$ , concludiamo che

$$H_k(\Delta^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } k = 0, n-1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Esercizio 3 Vogliamo dimostrare la commutatività del diagramma

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X) & \stackrel{f_\#}{\longrightarrow} \pi_1(X) \\ & & \downarrow^{h_X} & & \downarrow^{h_Y} \\ H_1(X) & \stackrel{f_*}{\longrightarrow} H_1(Y) \end{array}$$

Ricordandoci che la mappa  $h_X$  manda la classe di un loop  $\gamma$  nella classe del ciclo  $c_\gamma$  definito da

$$c_{\gamma}(t, 1-t) = \gamma(t),$$

abbiamo che

$$h_Y(f_\#([\gamma])) = h_Y([f \circ \gamma]) = [c_{f \circ \gamma}] = [f \circ c_\gamma] = f_* \circ h_X([\gamma]),$$

dove la penultima uguaglianza segue osservando che entrambi i cicli  $c_{f \circ \gamma}$  e  $f \circ c_{\gamma}$  mandano (t, 1-t) in  $f(\gamma(t))$ .

**Esercizio 4** Visto che  $S^1 \times S^1$  è connesso per archi, abbiamo che

$$H_0(S^1 \times S^1) = \mathbb{Z}, \qquad H_1(S^1 \times S^1) \simeq \pi_1(S^1 \times S^1)^{ab} = \mathbb{Z}^2.$$

Prendiamo ora un ricoprimento di  $S^1 \times S^1$  dato da due cilindri A e B, che si intersecano a loro volta in due cilindri disgiunti. Ciascuno di tali cilindri è omotopicamente equivalente a  $S^1$ , e sappiamo che

$$H_n(S^1) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } n = 0, 1\\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Inoltre, visto che l'omologia è additiva rispetto all'unione disgiunta, l'omologia di  $A \cap B$  è la somma diretta delle omologie di A e B, ed quindi in grado n è la somma diretta di due copie di  $H_n(S^1)$ .

La successione di Mayer-Vietoris ci dà quindi la seguente successione esatta per  $n \geq 3$ :

$$\ldots \to \underline{H_n(A \cap B)} \to \underline{H_n(A) \oplus H_n(B)} \to H_n(S^1 \times S^1) \to \underline{H_{n-1}(A \cap B)} \to \ldots,$$

da cui otteniamo che  $H_n(S^1 \times S^1) = 0$  per  $n \geq 3$ . Resta quindi il caso n = 2, per il quale la successione è

$$0 \to H_2(S^1 \times S^1) \stackrel{\alpha}{\to} H_1(A \cap B) \stackrel{\beta}{\to} H_1(A) \oplus H_1(B) \to \dots,$$

ovvero a meno di isomorfismo

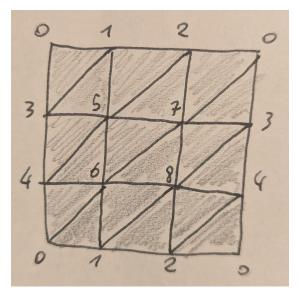
$$0 \to H_2(S^1 \times S^1) \to \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2 \to \dots,$$

ed essendo  $\alpha$  iniettiva, per esattezza otteniamo che  $H_2(S^1 \times S^1)$  è isomorfo al kernel di  $\beta$ .

D'altronde, presi dei generatori a e b dell'omologia dell'intersezione, osserviamo che visti in A ed in B questi generano  $H_1(A)$  e  $H_1(B)$  rispettivamente, e quindi sono omologhi. In altre parole,  $\beta(a) = \beta(b) = c$  per qualche  $c \in H_1(A) \oplus H_1(B)$  che corrisponde all'elemento  $(1,1) \in \mathbb{Z}^2$ , quindi l'immagine di  $\beta$  è isomorfa a  $\mathbb{Z}$ . In conclusione,  $H_2(S^1 \times S^1) \simeq \ker(\beta)$  è isomorfo a  $\mathbb{Z}$ , in quanto il kernel è generato da a - b.

## Esercizio 5

Il complesso simpliciale astratto  $\Delta$  che useremo è descritto dalla seguente disegno (dove i vertici con lo stesso indice sono identificati), la cui realizzazione geometrica risulta omeomorfo al toro:



Il complesso di catene associato a  $\Delta$  è

$$\ldots \to 0 \to C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \to 0 \to \ldots,$$

dove contando i simplessi dopo aver identificato i vertici, si ha che  $C_0 \simeq \mathbb{Z}^9$ ,  $C_1 \simeq \mathbb{Z}^{27}$  e  $C_2 \simeq \mathbb{Z}^{18}$ .

Calcoliamone l'omologia:  $H_0(\Delta) = C_0/\mathrm{im}(\partial_1)$ , e visto che  $\partial_1$  manda un 1-simplesso nella differenza fra i suoi vertici, nel quoziente stiamo identificando tutti i vertici nella stessa componente connessa all'interno del grafo associato a  $\Delta$ , ma questi sono tutti i vertici; questo mostra che  $H_0(\Delta) \simeq \mathbb{Z}$ .

Inoltre sappiamo che  $H_2(\Delta) = \ker(\partial_2)$ , e dato  $\tau = \{a, b, c\}$  un 2-simplesso con a < b < c questo ha bordo

$$\partial_2(\tau) = \{b, c\} - \{a, c\} + \{a, b\},\$$

e si vede facilmente che le uniche combinazione di tali simplessi che danno 0 sono i multipli della somma di tutti i triangoli (sommare i bordi di due triangoli adiacenti ha l'effetto di cancellare la faccia in comune), per cui  $H_2(\Delta) \simeq \mathbb{Z}$ .

Infine, osserviamo che dai conti svolti sopra e dal primo teorema di isomorfismo otteniamo

$$\begin{cases} \operatorname{im}(\partial_2) \simeq C_2/\ker(\partial_2) \simeq \mathbb{Z}^{18}/\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^{17} \\ \operatorname{im}(\partial_1) \simeq C_1/\ker(\partial_1) \simeq \mathbb{Z}^{27}/\ker(\partial_1) \stackrel{\operatorname{im}(\partial_1) \simeq \mathbb{Z}^8}{\Longrightarrow} \ker(\partial_1) \simeq \mathbb{Z}^{19}, \end{cases}$$

dove l'ultima implicazione segue dal fatto che tutti i gruppi coinvolti sono  $\mathbb{Z}$ -moduli liberi, e quindi

$$H_1(\Delta) = \ker(\partial_1)/\mathrm{im}(\partial_2) \simeq \mathbb{Z}^{19}/\mathbb{Z}^{17} = \mathbb{Z}^2.$$