Elementi di Topologia Algebrica - Gruppo 1

6 dicembre 2024

Esercizio 1 Costruiamo la realizzazione geometrica di Δ dentro $\mathbb{R}^N$, dove $N = |\Delta|$: ordinati gli elementi $\{x_1, \dots, x_N\}$ di X contenuti nelle facce di Δ (in altre parole, i suoi vertici), e se $\tau = \{x_{i_0}, \dots, x_{i_k}\}$ è una faccia di dimensione k poniamo

$$X(\tau) = \mathrm{im}(\varphi : \Delta^k \to \mathbb{R}^N),$$

dove φ è la mappa lineare definita da

$$\varphi(e_j) = e_{i_j}$$

per $j = 0, \dots, k$. La realizzazione geometrica di Δ è quindi l'insieme

$$X(\Delta) \coloneqq \bigcup_{\tau \in \Delta} X(\tau).$$

Inoltre, se $\tau, \tau' \in \Delta$,

$$X(\tau \cap \tau') = \left\{ \sum_{x_i \in \tau \cap \tau'} \lambda_i e_i \mid \lambda_i \geq 0, \sum_{x_i \in \tau \cap \tau'} \lambda_i = 1 \right\}$$

$$= \left\{ \sum_{x_i \in \tau} \lambda_i e_i \mid \lambda_i \geq 0, \sum_{x_i \in \tau} \lambda_i = 1 \right\} \cap \left\{ \sum_{x_i \in \tau'} \lambda_i e_i \mid \lambda_i \geq 0, \sum_{x_i \in \tau'} \lambda_i = 1 \right\} = X(\tau) \cap X(\tau').$$

Esercizio 2 Dimostriamo innanzitutto che il complesso di catene

$$C_\bullet \coloneqq C_\bullet(\mathcal{P}([n]))$$

è esatto, da cui seguirà che questo ha omologia ridotta nulla, ovvero $\widetilde{H}_k(\mathcal{P}([n])) = 0$ per ogni k. Per fare ciò, costruiamo un'omotopia di catene tra l'identità e la mappa nulla da $C_\bullet$ in sé: fissato k, definiamo tale omotopia di catene sulla base di C_k come $\mathbb{Z}$-modulo libero data dai k-simplessi:

$$s_k : C_k \to C_{k+1}, \qquad s_k(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \in \tau \\ \tau \cup \{0\} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Verifichiamo la relazione

$$\partial s + s\partial = \mathrm{id} :$$

- se $0 \in \tau$, allora $\partial s(\tau) = \partial(0) = 0$, e inoltre

$$s\partial(\tau) = s\left(\sum_{x \in \tau} (-1)^{|\{x' < x\}|} \tau \setminus \{x\}\right) = \tau + s\left(\sum_{x \in \tau, x \neq 0} (-1)^{|\{x' < x\}|} \underbrace{\tau \setminus \{x\}}_{\text{contiene } 0}\right) = \tau.$$

- se $0 \notin \tau$, allora

$$
\begin{aligned}
&\partial s(\tau) + s\partial(\tau) \\
&= \partial(\tau \cup \{0\}) + s\left(\sum_{x\in\tau}(-1)^{|\{x'<x\}|}\tau \setminus \{x\}\right) \\
&= \tau + \sum_{x\in\tau}(-1)^{|\{x'<x,\ x'\in\tau\cup\{0\}\}|}(\tau\cup\{0\})\setminus\{x\} + \sum_{x\in\tau}(-1)^{|\{x'<x,\ x'\in\tau\}|}(\tau\cup\{0\})\setminus\{x\} \\
&= \tau.
\end{aligned}
$$

Se poi chiamiamo $D_\bullet$ il complesso di catene associato a $\Delta^n = \mathcal{P}([n]) \setminus \{[n]\}$, osserviamo che $D_k = C_k \simeq \mathbb{Z}^{\binom{n+1}{k+1}}$ per ogni $k < n$ in quanto le facce di tali dimensioni coincidono, e che quindi

$$\widetilde{H}_k(\Delta^n) = \widetilde{H}_k(\mathcal{P}([n])) = 0$$

per ogni $k < n-1$; inoltre, $D_n = 0$ perché abbiamo rimosso l'unica faccia di dimensione n, quindi $\widetilde{H}_n(\Delta^n) = 0$.

Infine, per calcolare $\widetilde{H}_{n-1}(\Delta^n)$, consideriamo il seguente diagramma (commutativo per l'omotopia costruita sopra):

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & C_{n-2} \arrow[d, equal] \\
& D_n \arrow[r] & D_{n-1} \arrow[r, "\partial_{n-1}"] & D_{n-2}
\end{tikzcd}
$$

Visto che $D_n = 0$, si ha

$$\widetilde{H}_{n-1}(\Delta^n) = \ker(\partial_{n-1}) = \operatorname{im}(\partial_n) = C_n \simeq \mathbb{Z}.$$

Avendo calcolato l'omologia ridotta di Δ^n, concludiamo che

$$H_k(\Delta^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } k = 0, n-1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Esercizio 3 Vogliamo dimostrare la commutatività del diagramma

$$
\begin{tikzcd}
\pi_1(X) \arrow[r, "f_\#"] \arrow[d, "h_X"] & \pi_1(X) \arrow[d, "h_Y"] \\
H_1(X) \arrow[r, "f_*"] & H_1(Y)
\end{tikzcd}
$$

Ricordandoci che la mappa h_X manda la classe di un loop γ nella classe del ciclo c_γ definito da

$$c_\gamma(t, 1-t) = \gamma(t),$$

abbiamo che

$$h_Y(f_\#([\gamma])) = h_Y([f\circ\gamma]) = [c_{f\circ\gamma}] = [f \circ c_\gamma] = f_* \circ h_X([\gamma]),$$

dove la penultima uguaglianza segue osservando che entrambi i cicli $c_{f\circ\gamma}$ e $f\circ c_\gamma$ mandano $(t, 1-t)$ in $f(\gamma(t))$.

Esercizio 4 Visto che $S^1 \times S^1$ è connesso per archi, abbiamo che

$$H_0(S^1 \times S^1) = \mathbb{Z}, \qquad H_1(S^1 \times S^1) \simeq \pi_1(S^1 \times S^1)^{ab} = \mathbb{Z}^2.$$

Prendiamo ora un ricoprimento di $S^1 \times S^1$ dato da due cilindri A e B, che si intersecano a loro volta in due cilindri disgiunti. Ciascuno di tali cilindri è omotopicamente equivalente a S^1, e sappiamo che

$$H_n(S^1) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } n = 0, 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Inoltre, visto che l'omologia è additiva rispetto all'unione disgiunta, l'omologia di $A \cap B$ è la somma diretta delle omologie di A e B, ed quindi in grado n è la somma diretta di due copie di $H_n(S^1)$.

La successione di Mayer-Vietoris ci dà quindi la seguente successione esatta per $n \geq 3$:

$$\ldots \to \cancel{H_n(A \cap B)} \to \cancel{H_n(A) \oplus H_n(B)} \to H_n(S^1 \times S^1) \to \cancel{H_{n-1}(A \cap B)} \to \ldots,$$

da cui otteniamo che $H_n(S^1 \times S^1) = 0$ per $n \geq 3$. Resta quindi il caso $n = 2$, per il quale la successione è

$$0 \to H_2(S^1 \times S^1) \xrightarrow{\alpha} H_1(A \cap B) \xrightarrow{\beta} H_1(A) \oplus H_1(B) \to \ldots,$$

ovvero a meno di isomorfismo

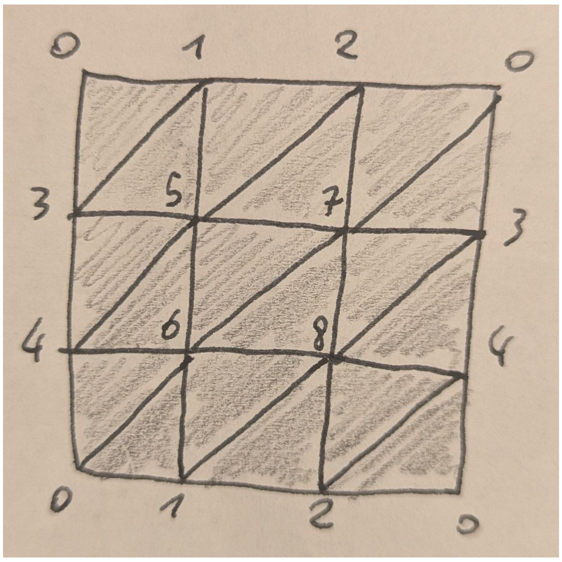
$$0 \to H_2(S^1 \times S^1) \to \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2 \to \ldots,$$

ed essendo α iniettiva, per esattezza otteniamo che $H_2(S^1 \times S^1)$ è isomorfo al kernel di β.

D'altronde, presi dei generatori a e b dell'omologia dell'intersezione, osserviamo che visti in A ed in B questi generano $H_1(A)$ e $H_1(B)$ rispettivamente, e quindi sono omologhi. In altre parole, $\beta(a) = \beta(b) = c$ per qualche $c \in H_1(A) \oplus H_1(B)$ che corrisponde all'elemento $(1, 1) \in \mathbb{Z}^2$, quindi l'immagine di β è isomorfa a $\mathbb{Z}$. In conclusione, $H_2(S^1 \times S^1) \simeq \ker(\beta)$ è isomorfo a $\mathbb{Z}$, in quanto il kernel è generato da $a - b$.

Esercizio 5

Il complesso simpliciale astratto Δ che useremo è descritto dalla seguente disegno (dove i vertici con lo stesso indice sono identificati), la cui realizzazione geometrica risulta omeomorfo al toro:



Il complesso di catene associato a Δ è

$$\ldots \to 0 \to C_2 \overset{\partial_2}{\to} C_1 \overset{\partial_1}{\to} C_0 \to 0 \to \ldots,$$

dove contando i simplessi dopo aver identificato i vertici, si ha che $C_0 \simeq \mathbb{Z}^9$, $C_1 \simeq \mathbb{Z}^{27}$ e $C_2 \simeq \mathbb{Z}^{18}$.

Calcoliamone l'omologia: $H_0(\Delta) = {C_0}/{\mathrm{im}(\partial_1)}$, e visto che ∂_1 manda un 1-simplesso nella differenza fra i suoi vertici, nel quoziente stiamo identificando tutti i vertici nella stessa componente connessa all'interno del grafo associato a Δ, ma questi sono tutti i vertici; questo mostra che $H_0(\Delta) \simeq \mathbb{Z}$.

Inoltre sappiamo che $H_2(\Delta) = \ker(\partial_2)$, e dato $\tau = \{a, b, c\}$ un 2-simplesso con $a < b < c$ questo ha bordo

$$\partial_2(\tau) = \{b, c\} - \{a, c\} + \{a, b\},$$

e si vede facilmente che le uniche combinazione di tali simplessi che danno 0 sono i multipli della somma di *tutti* i triangoli (sommare i bordi di due triangoli adiacenti ha l'effetto di cancellare la faccia in comune), per cui $H_2(\Delta) \simeq \mathbb{Z}$.

Infine, osserviamo che dai conti svolti sopra e dal primo teorema di isomorfismo otteniamo

$$\begin{cases} \mathrm{im}(\partial_2) \simeq {C_2}/{\ker(\partial_2)} \simeq {\mathbb{Z}^{18}}/{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}^{17} \\ \mathrm{im}(\partial_1) \simeq {C_1}/{\ker(\partial_1)} \simeq {\mathbb{Z}^{27}}/{\ker(\partial_1)} \overset{\mathrm{im}(\partial_1) \simeq \mathbb{Z}^8}{\Longrightarrow} \ker(\partial_1) \simeq \mathbb{Z}^{19}, \end{cases}$$

dove l'ultima implicazione segue dal fatto che tutti i gruppi coinvolti sono $\mathbb{Z}$-moduli liberi, e quindi

$$H_1(\Delta) = {\ker(\partial_1)}/{\mathrm{im}(\partial_2)} \simeq {\mathbb{Z}^{19}}/{\mathbb{Z}^{17}} = \mathbb{Z}^2.$$