Elementi di Topologia Algebrica - 2024/25
Esercizi - Gruppo 2 - 12/11/2024
da consegnare entro la fine di giovedì 22 novembre 2024

(1) Sia X un grafo finito connesso. Diciamo che X è un albero se per qualsiasi punto P interno ad un lato di X si ha che $X \setminus \{P\}$ è sconnesso.
  (a) Mostrare per induzione che ogni grafo connesso X contiene un sottografo T con lo stesso insieme di vertici che è un albero.
  (b) Mostrare che un albero è contraibile.
  (c) Mostrare che X/T è un'unione di circonferenze con un punto in comune (un *bouquet* di S^1) e $H_i(X) \simeq H_i(X/T)$ per ogni i.
  (d) Calcolare la caratteristica di Eulero di un albero.
  (e) Calcolare i gruppi di omologia di X/T in funzione della caratteristica di Eulero di X.

(2) Sia $f_\sigma : D^n_\sigma \to K^{(n)}$ la mappa di incollamento di una n-cella. Definiamo inoltre il quoziente $S^n_\sigma = K^{(n)}/(K^{(n)} \setminus f_\sigma(\overset{\circ}{D}{}^n_\sigma))$ e sia $p_\sigma : K^{(n)} \to S^n_\sigma$ la mappa di proiezione al quoziente.
  (a) Mostrare che l'omomorfismo indotto dalla composizione $(p_\sigma \circ f_\sigma)_* : H_n(D^n_\sigma, \partial D^n_\sigma) \to \widetilde{H}_n(S^n_\sigma)$ è un isomorfismo.
  (b) Mostrare che per due n-celle distinte $\tau \neq \sigma$ la composizione $(p_\sigma \circ f_\tau)_*$ è la mappa nulla.

(3) Sia X un CW-complesso con struttura cellulare $K = \{K^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e sia $Y \subset X$ un sottocomplesso.
  (a) Mostrare che $H_i(K^n \cup Y, K^{n-1} \cup Y)$ è un gruppo abeliano libero, non banale solo per $i = n$, di rango pari al numero di n-celle di X che non intersecano Y.
  (b) Mostrare che $H_i(X, K^n \cup Y)$ è nullo per $i \leq n$ e che $H_i(K^n \cup Y, Y) \to H_i(X, Y)$ è un isomorfismo per $i < n$ *(sugg.: usare la successione esatta della tripla* $(X, K^n \cup Y, Y)$*.)*
  (c) Usare i gruppi $H_n(K^n \cup Y, K^{n-1} \cup Y)$ per definire un complesso cellulare relativo $C_\bullet(K, Y)$ analogo al complesso cellulare $C_\bullet(K)$ costruito a lezione e mostrare che vale l'isomorfismo

$$H_i(C_\bullet(K, Y)) \simeq H_i(X, Y).$$

Definizione: Sia data una mappa continua $f : X \to Y$ tra spazi topologici.
  (a) Consideriamo la relazione di equivalenza $\sim$ in $X \times I \sqcup Y$ che identifica $(x, 1) \sim f(x)$ per ogni $x \in X$. Lo spazio quoziente $M_f := (X \times I \sqcup Y)/\sim$ è detto *mapping cylinder* di f.
  (b) Consideriamo ora la relazione di equivalenza $\sim$ in $X \times I \sqcup Y$ che identifica $(x, 1) \sim f(x)$ per ogni $x \in X$ e $(x, 0) \sim (y, 0)$ per ogni $x, y \in X$. Lo spazio quoziente $C_f := (X \times I \sqcup Y)/\sim$ è detto *mapping cone* di f.

(4) Sia $f : X \to Y$ una mappa continua tra spazi topologici.
  (a) Sia $\iota : X \to M_f$ l'inclusione $\iota : x \mapsto (x, 0)$. Costruire un'equivalenza omotopica $p : M_f \to Y$ tale che $p \circ \iota = f$.
  (b) Mostrare che esiste una successione esatta lunga di gruppi

$$\cdots \widetilde{H}_n(X) \xrightarrow{f_*} \widetilde{H}_n(Y) \to \widetilde{H}_n(C_f) \to \widetilde{H}_{n-1}(X) \to \cdots$$