Elementi di Topologia Algebrica - 2024/25
Esercizi - Gruppo 1 - 18/10/2024
da consegnare entro il 28 ottobre 2024

Definizione 1. *Un* complesso simpliciale astratto *è una famiglia* Δ *costituita da sottoinsiemi finiti di un insieme* X *tale che: se* $\tau \in \Delta$ *e* $\sigma \subseteq \tau$, *allora* $\sigma \in \Delta$. *I membri di un complesso simpliciale* Δ *sono chiamati* facce *di* Δ, *e la dimensione di una faccia* τ *è* $|\tau| - 1$.

(1) Mostrare che ogni complesso simpliciale finito può essere realizzato geometricamente, cioè esiste un sottoinsieme $X(\Delta) \subset \mathbb{R}^n$ tale che tale che
  (a) $X(\Delta) = \cup_{\tau \in \Delta} X(\tau)$, dove $X(\tau)$ è immagine tramite una mappa affine iniettiva del simplesso standard di dimensione $|\tau| - 1$;
  (b) $X(\tau) \cap X(\tau') = X(\tau \cap \tau')$.

Definizione 2. *Per ogni* $n \geq 0$, *consideriamo lo* $\mathbb{Z}$*-modulo libero* $C_n(\Delta)$ *generato dall'insieme* $\{e_\tau | \tau \in \Delta,\ \dim(\tau) = n\}$ *in corrispondenza con le facce* τ n*-dimensionali di* Δ. *Definiamo le mappe di bordo* ∂_n, *tali che*

$$\partial_n e_\tau := \sum_{x \in \tau} (-1)^{|\{x' \in \tau, x' < x\}} e_{\tau \setminus \{x\}}.$$

Estendendo per linearità otteniamo un omomorfismo $\partial_n : C_n(\Delta) \to C_{n-1}(\Delta)$. *Si verifica facilmente che le mappe di bordo soddisfano l'equazione* $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$. *Poniamo:*

$$Z_n(\Delta) := \ker \partial_n = \{z \in C_n(\Delta) | \partial_n(z) = 0\},$$
$$B_n(\Delta) := \operatorname{Im} \partial_{n+1} = \{z \in C_n(\Delta) | z = \partial_{n+1}(x) \textit{ per qualche } x \in C_{n+1}(\Delta)\}.$$

Abbiamo che $B_n(\Delta)$ *è un sottomodulo di* $Z_n(\Delta)$. *Definiamo l'*omologia simpliciale *di grado* n *di* Δ *come il quoziente*

$$H_n(\Delta) = Z_n(\Delta)/B_n(\Delta).$$

(2) Indichiamo con $[n]$ l'insieme $\{0, 1, \dots, n\}$. Sia $\Delta^n = \mathcal{P}([n]) \setminus \{[n]\}$, cioè il simplesso n dimensionale astratto senza la sua parte interna. Calcolare i gruppi di omologia $H_*(\Delta^n)$. [*sugg.*: confrontarli con l'omologia aumentata del simplesso pieno; quest'ultima può essere calcolata per induzione, tramite un'omotopia di complessi]

(3) Siano X, Y due spazi topologici con punto base e $f : X \to Y$ una mappa continua. Sia $f_\# : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ la mappa indotta tra i gruppi fondamentali e $f_* : H_n(X) \to H_n(Y)$ la mappa indotta in omologia.
Detto $h_X : \pi_1(X, x_0) \to H_1(X)$ l'omomorfismo costruito a lezione. Mostrare che h è naturale, ovvero $h_Y \circ f_\# = f_* \circ h_X$.

(4) Calcolare i gruppi di omologia singolare di $S^1 \times S^1$. [*sugg.*: utilizzare la successione di Mayer-Vietoris]

(5) Descrivere un complesso simpliciale astratto Δ che abbia una realizzazione geometrica omeomorfa al toro $S^1 \times S^1$ e calcolare esplicitamente l'omologia simpliciale di Δ.