Elementi di Topologia Algebrica - 2024/25
Esercizi - Gruppo 4 - 17/12/2024
da consegnare entro lunedì 6 gennaio 2025

(1) Sia X un CW-complesso n-connesso tale che X ha dimensione $\leq n$ (cioè non contiene celle di dimensione maggiore di n). Mostrare che X è contraibile.

Per uno spazio puntato X definiamo il *cono ridotto* di X: $CX = X \times I/(\{*\} \times I \cup X \times \{0\})$ e per una mappa puntata $f : X \to Y$ di spazi puntati definiamo il *mapping cone ridotto* di f: $C_f := CX \sqcup Y/(x, 1) \sim f(x)$. Indicheremo con π la proiezione al quoziente $C_f \xrightarrow{\pi} SX$ dal cono ridotto alla sospensione ridotta che identifica Y a un punto.

(2) Mostrare che una mappa puntata $f : X \to Y$ è omotopicamente banale, relativamente al punto base, se e solo se fattorizza per $X \hookrightarrow CX$ e che la composizione $g \circ f$ di due mappe puntate $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ è omotopicamente banale relativamente al punto base se e solo se g fattorizza per $Y \hookrightarrow C_f$.

(3) Mostrare che applicando il funtore controvariante $[-, Z]^0$ alla successione di mappe

$$X \xrightarrow{f} Y \hookrightarrow C_f$$

si ottiene una successione esatta di insiemi.

Mostrare inoltre che le successione di mappe

$$X \xrightarrow{f} Y \xhookrightarrow{i_1} C_f \xhookrightarrow{i_2} C_{i_1} \xhookrightarrow{i_3} C_{i_2} \to\xhookrightarrow{i_4} C_{i_3} \to \cdots$$

e

$$X \xrightarrow{f} Y \xhookrightarrow{i_1} C_f \xhookrightarrow{\pi} SX \xhookrightarrow{Sf} SY \xrightarrow{Si_1} SC_f \xrightarrow{S\pi} \cdots$$

sono omotopicamente equivalenti (ovvero che ci sono mappe verticali che collegano gli spazi corrispondenti e che sono equivalenze omotopiche che fanno commutare tutti i quadrati a meno di omotopia) e che applicando il funtore controvariante $[-, Z]^0$ determinano una successione esatta lunga di insiemi (di gruppi a partire dal quarto termine).