Elementi di Topologia Algebrica - 2024/25
Esercizi - Gruppo 3 - 1/12/2024
da consegnare entro la fine di mercoledì 11 dicembre 2024

(1) Mostrare esplicitamente che l'approssimazione diagonale
$$D : C_\bullet(X) \to C_\bullet(X) \otimes C_\bullet(X)$$
su $\sigma_n : \Delta_n \to X$ da $D\sigma_n = \sum_{p+q=n} \sigma^1_p \otimes \sigma^2_q$ (con la notazione usata a lezione) ed estesa per linearità è un morfismo di complessi di catene.

(2) Siano X, Y spazi topologici tali che $H_\bullet(X)$ e $H_\bullet(Y)$ sono gruppi abeliani liberi finitamente generati. Dal teorema dei coefficienti universali e dalla formula di Künneth abbiamo che la mappa di Eilenberg-Zilber
$$C_\bullet(X \times Y) \to C_\bullet(X) \otimes C_\bullet(Y)$$
induce un isomorfismo
$$\alpha : \bigoplus_{i+j=n} H^i(X;\mathbb{Z}) \otimes H^j(Y;\mathbb{Z}) \to H^n(X \times Y;\mathbb{Z}).$$
Consideriamo un elemento $a_i \otimes a_j \in H^i(X,\mathbb{Z}) \otimes H^j(Y,\mathbb{Z})$ e un elemento $b_p \otimes b_q \in H^p(X,\mathbb{Z}) \otimes H^q(Y,\mathbb{Z})$. Mostrare che vale la relazione
$$\alpha(a_i \otimes a_j) \cup \alpha(b_p \otimes b_q) = (-1)^{jp} \alpha((a_i \cup b_p) \otimes (a_j \cup b_q)).$$

(3) Calcolare l'anello di coomologia $H^\bullet(T^n)$, dove $T^n = (S^1)^n$.

(4) Mostrare che se X è una n-varietà orientabile, connessa e non compatta allora il gruppo $H_n(X)$ è nullo.