

# Elementi di Topologia Algebrica - Gruppo 2

22 novembre 2024

## Esercizio 1

- (a) Sia  $X$  un grafo finito connesso, e procediamo per induzione sul numero di archi del grafo  $X$ : se il grafo ha un solo arco, allora possiede uno o due vertici, e il sottografo che selezioniamo come albero è rispettivamente  $\bullet$  oppure  $\bullet \text{ --- } \bullet$ . Supponiamo ora che  $X$  abbia  $n$  archi, e senza perdita di generalità supponiamo che  $X$  non sia un albero. Allora, esiste un vertice  $x$  interno ad un qualche arco  $a$  tale che  $X \setminus \{x\}$  è connesso, e notiamo che  $X \setminus \{a\}$  è un grafo connesso con  $n-1$  archi, in quanto possiamo rimuovere il segmento  $a \simeq [0, 1]$  senza perdere la connessione. Possiamo quindi applicare l'ipotesi induttiva su tale grafo con  $n-1$  archi, ed avendo questo gli stessi verticidi  $X$  l'albero  $T$  che otteniamo è il sottografo di  $X$  cercato.
- (b) Sia  $T$  un albero, e procediamo ancora per induzione sul numero di archi: se  $T$  ha un solo arco, allora è omeomorfo a  $[0, 1]$  ed è quindi contraibile.

Altrimenti, asseriamo che  $T$  contiene un vertice di grado 1: infatti, osserviamo che un albero è equivalentemente un grafo connesso minimale, e quindi il numero di archi di  $T$  è uguale al numero di vertici meno uno. Ora, se tutti i vertici di  $T$  avessero grado maggiore o uguale a 2, allora il numero di archi sarebbe almeno il doppio del numero di vertici, che è un assurdo.

Sia quindi  $x$  un vertice di grado 1 che si trova sull'arco  $a$ ; allora, possiamo retrarre  $a \cup \{x\}$  ad un punto, ottenendo un albero con un arco in meno. Applicando l'ipotesi induttiva, otteniamo che tale albero è contraibile, e quindi possiamo concatenare le due omotopie ottenute per ottenere una contrazione di  $T$  ad un punto.

- (c) Osserviamo che  $X/T$  è connesso, e quindi

$$H_0(X/T) \cong H_0(X) \cong \mathbb{Z}.$$

Inoltre, notiamo che se  $(X, A)$  è una coppia con  $A$  contraibile, allora la successione esatta lunga in omologia relativa ci dà, per  $i > 0$ , isomorfismi

$$\dots \underline{H}_{i+1}(A) \rightarrow H_i(X) \xrightarrow{\simeq} H_i(X, A) \rightarrow \underline{H}_i(A) \rightarrow \dots \quad (1)$$

Ora, affermiamo che  $(X, T)$  è una buona coppia: infatti, per qualsiasi arco  $a$ ,  $(X, e)$  è una buona coppia, e per la costruzione del punto precedente possiamo vedere la proiezione  $X \rightarrow X/T$  come una successione di quozienti successivi di un arco alla volta. Dalla teoria otteniamo quindi

$$H_i(X, T) \cong H_i(X/T) \quad (2)$$

per ogni  $i > 0$ , e perciò visto che  $T$  è contraibile otteniamo

$$\begin{aligned} H_i(X) &\stackrel{(1)}{\cong} H_i(X, T) \\ &\stackrel{(2)}{\cong} H_i(X/T, T/T) \\ &= H_i(X/T, *) \\ &\stackrel{(1)}{\cong} H_i(X/T). \end{aligned}$$

Il fatto che  $X/T$  sia topologicamente omeomorfo ad un wedge di  $S^1$  segue dal fatto che  $T$  contiene tutti i vertici di  $X$ , che vengono quindi tutti identificati fra di loro. Di conseguenza,

$X/T$  ha un singolo vertice, e tutti gli archi sono loop di tale vertice: .

- (d) Calcoliamo la caratteristica di Eulero di un albero  $T$  come segue: essendo  $T$  un grafo, sappiamo che

$$\chi(T) = \text{rk}(H_0(T)) - \text{rk}(H_1(T)),$$

e dal fatto che  $T$  è contraibile e connesso deduciamo  $\chi(T) = 1 - 0 = 1$ .

- (e) Innanzitutto  $H_0(X/T) = \mathbb{Z}$  perchè  $X/T$  è connesso; inoltre, visto che  $X/T$  è topologicamente un wedge di  $S^1$  abbiamo che

$$H_1(X/T) = \pi_1(X/T)^{ab} = (\underbrace{\mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}}_r)^{ab} = \mathbb{Z}^r,$$

dove  $r$  è il numero di archi di  $X/T$ , che possiamo determinare come segue:

$$\begin{aligned} k &= |\{\text{archi di } X\}| - |\{\text{archi di } T\}| \\ &= (|\{\text{vertici di } X\}| - \chi(X)) - (|\{\text{vertici di } T\}| - 1) \\ &= 1 - \chi(X), \end{aligned}$$

dove abbiamo usato il fatto che  $X$  e  $T$  hanno gli stessi vertici.

Inoltre, la struttura cellulare di  $X/T$  è data incollando gli estremi di  $k$  1-celle ad una 0-cella, e quindi visto che l'omologia cellulare coincide con l'omologia singolare concludiamo che i gruppi di omologia di  $X/T$  (e quindi anche di  $X$ ) sono

$$H_0(X/T) = \mathbb{Z}, \quad H_1(X/T) = \mathbb{Z}^{1-\chi(X)}, \quad H_i(X/T) = 0 \text{ per } i > 1.$$

## Esercizio 2

- (a) Vogliamo mostrare che la seguente composizione è un isomorfismo:

$$H_n(D_\sigma^n, \partial D_\sigma^n) \xrightarrow{(f_\sigma)_*} H_n(K^{(n)}, B_\sigma) \xrightarrow{(p_\sigma)_*} \widetilde{H}_n(S_\sigma^n),$$

dove per comodità abbiamo indicato con  $B_\sigma$  lo spazio  $K^{(n)} \setminus f_\sigma(D_\sigma^\circ)$ .

La prima mappa è iniettiva per un teorema visto in classe sugli spazi ottenuti per incollamento di  $n$ -celle; inoltre, nello stesso teorema abbiamo che

$$H_n(K^{(n)}, B_\sigma) \cong \text{im}((f_\sigma)_*),$$

visto che  $K^{(n)}$  è ottenuto da  $B_\sigma$  attaccando la  $n$ -cella  $f_\sigma(\mathring{D}_\sigma^n)$ ; questo mostra che  $(f_\sigma)_*$  è suriettiva, ma allora è un isomorfismo.

Inoltre, la seconda mappa è un isomorfismo perchè  $(K^{(n)}, B_\sigma)$  è una buona coppia (in quanto sottocomplesso di un CW complesso, come mostrato ad esempio nella Proposizione A.5 dell'Hatcher) e  $(p_\sigma)_*$  è indotta dalla mappa di proiezione associata a tale coppia.

- (b) Se  $\tau \neq \sigma$ , allora visto che le  $n$ -celle sono tutte disgiunte si ha

$$f_\tau(\mathring{D}_\sigma^n) \subset B_\sigma,$$

ma d'altronde il bordo di  $D_\sigma^n$  ha sempre questa proprietà, e quindi la mappa  $p_\sigma$  manda tutto  $f_\tau(\mathring{D}_\sigma^n)$  in un punto; di conseguenza, la composizione

$$(p_\sigma \circ f_\tau)_* = (p_\sigma)_* \circ (f_\tau)_*$$

è la mappa nulla sui gruppi omologia, quanto indotta da una mappa costante.

### Esercizio 3

### Esercizio 4

- (a) Costruiamo una retrazione di  $M_f$  sulla copia di  $Y$  contenuta in  $M_f$  a tempo 1: consideriamo infatti

$$H : M_f \times [0, 1] \rightarrow M_f$$

$$\begin{cases} ((x, s), t) & \mapsto (x, s(1-t) + t), \\ (y, t) & \mapsto y. \end{cases}$$

Osserviamo che  $H$  è ben definita e continua; d'altronde,  $H_t$  ristretta ad  $Y$  è l'identità per ogni  $t$ ,  $H_0$  è l'identità di  $M_f$  ed  $H_1(M_f) = Y$ . Quindi,  $H$  è una retrazione per deformazione di  $M_f$  su  $Y$ , e ponendo  $p = H_1$  otteniamo l'equivalenza omotopica cercata:

$$p \circ \iota(x) = H_1 \circ \iota(x) = H_1(x, 0) = (x, 1) = f(x)$$

per definizione di mapping cone.

- (b) Consideriamo la successione esatta lunga in omologia relativa associata alla coppia  $(M_f, X)$ :

$$\dots \longrightarrow \tilde{H}_i(X) \longrightarrow \tilde{H}_i(M_f) \longrightarrow H_i(M_f, X) \longrightarrow \tilde{H}_{i-1}(X) \longrightarrow \dots, \quad (3)$$

dove abbiamo usato il fatto che l'omologia della coppia coincide l'omologia ridotta.

Visto che  $Y$  è un retratto per deformazione di  $M_f$  e che  $(M_f, X)$  è una buona coppia (ad esempio perché  $X \times [0, \frac{1}{2})$  si retrae per deformazione su  $X$ ), osservando che

$$M_f/X \cong C_f$$

deduciamo gli isomorfismi

$$\begin{aligned}\tilde{H}_i(M_f) &\cong \tilde{H}_i(Y) \\ H_i(M_f, X) &\cong \tilde{H}_i(C_f).\end{aligned}$$

Sostituendoli nella (3), otteniamo quindi la successione esatta desiderata:

$$\dots \longrightarrow \tilde{H}_i(X) \longrightarrow \tilde{H}_i(Y) \longrightarrow \tilde{H}_i(C_f) \longrightarrow \tilde{H}_{i-1}(X) \longrightarrow \dots$$