Elementi di Topologia Algebrica - Gruppo 4

28 dicembre 2024

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3 Vogliamo dimostrare l'esattezza della succcesione

$$[C_f, Z]^0 \overset{i_1^*}{\to} [Y, Z]^0 \overset{f^*}{\to} [X, Z]^0$$

nel termine centrale. D'altronde, dato un rappresentante φ di una classe in $[Y, Z]^0$, abbiamo che $f^*([\varphi]) = [\varphi \circ f]$ è banale se e solo se $\varphi \circ f$ è omotopicamente banale, ma per l'esercizio 2 questo succede esattamente quando φ fattorizza attraverso C_f, ovvero quando proviene tramite i_1^* da un elemento di $[C_f, Z]^0$. Abbiamo quindi dimostrato che $\ker f^* = \operatorname{im} i_1^*$.

Per mostrare che le due successioni sono equivalenti nella categoria **hTop** degli spazi topologici con morfismi dati dalle classi di omotopia di mappa continue, mostriamo innanzitutto che, nella seguente situazione, esiste una equivalenza omotopica fra C_{i_1} e SX:

$$X \overset{f}{\to} Y \overset{i_1}{\to} C_f \to C_{i_1} \tag{1}$$

Fatto ciò, l'equivalenza omotopica fra i termini successivi delle due successioni segue osservando che ogni tripla di mappa successiva nella prima successione è della forma (1).

È sufficiente mostrare che l'inclusione di CY in C_{i_1} è una cofibrazione: infatti, essendo il cono CY contraibile ne segue che la proiezione al quoziente $C_{i_1} \to C_{i_1}/CY$ è una equivalenza omotopica, e quest'ultimo termine è evidentemente omeomrfo alla sospensione SX.

D'altronde, abbiamo visto a lezione che le cofibrazioni sono stabili per pushout. Consideriamo quindi il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & CX \arrow[d] \\ Y \arrow[r, "i_1"] \arrow[d] & C_f \arrow[d] \\ CY \arrow[r] & C_{i_1} \end{tikzcd}$$

Visto l'inclusione i di X nel suo cono è una cofibrazione e C_f è il pushout del quadrato superiore, dunque i_1 è una cofibrazione, ma allora visto che C_{i_1} è il pushout del quadrato inferiore otteniamo $C_f \to C_{i_1}$ è una cofibrazione, come voluto.

Ci resta da stabilire che il diagramma dato dalle due successioni collegate verticalmente dalle equivalenze costruite è commutativo in **hTop**. Per dirlo, senza perdita di generalità basta considerare il diagramma

$$\begin{tikzcd}
C_{i_1} \arrow[r, "i_3"] \arrow[d] & C_{i_2} \arrow[d] \\
SX \arrow[r, "Sf"] & SY
\end{tikzcd}$$

ed esibire un'omotopia fra i due percorsi:

$$H : C_{i_1} \times I \to SY$$

$$H([x,t],s) = \begin{cases} [f(x), st] & \text{se } [x,t] \in C_f \\ [x, s+(1-s)t] & \text{se } [x,t] \in CY \end{cases}$$