Esercizi del Corso di Logica Matematica 2022/2023

Francesco Minnocci

25 ottobre 2022

1 Calcolo Proposizionale

Remark. Nel seguito, i valori di verità **falso** e **vero** verrano indicati per comodità rispettivamente con i numeri 0 ed 1.

Esercizio 1.7. Mostrare che $\rho(A) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid A \in \mathcal{F}_n\}$.

Visto che A è una formula sul linguaggio $\mathcal{L}$, esiste un $n \in \mathbb{N}$ tale che $A \in \mathcal{F}_n$, quindi per il principio del minimo è ben definito

$$\min\{n \in \mathbb{N} \mid A \in \mathcal{F}_n\}.$$

Procediamo ora per induzione su n:

- Se $n = 0$, A è una variabile e quindi $\rho(A) = 0$ e questo è anche il minimo.
- Se $A \in \mathcal{F}_{n+1}$, essendo

  $$\mathcal{F}_{n+1} = \mathcal{F}_n \cup \{\neg P,\ P \wedge Q,\ P \vee Q,\ P \to Q,\ P \leftrightarrow Q \mid P, Q \in \mathcal{F}_n\},$$

  si distinguono due casi: se $A \in \mathcal{F}_n$ si conclude per ipotesi induttiva, mentre se $A \in \mathcal{F}_{n+1} \setminus \mathcal{F}_n$ si ha che $n+1$ è il minimo livello in cui compare A, e quindi se mostriamo che $\rho(A) = n+1$ abbiamo concluso. Si pongono perciò altri due casi:

  - $A = \neg B$: $\rho(A) = \rho(B) + 1$ con $B \in \mathcal{F}_n$, e quindi per ipotesi induttiva $\rho(B) \leq n$, ma non può essere $\rho(B) < n$ perché altrimenti $A \in \mathcal{F}_n$, e quindi $\rho(B) = n$ da cui $\rho(A) = n + 1$.
  - $A = B \lozenge C$ con $\lozenge \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$: $\rho(A) = \max\{\rho(B), \rho(C)\} + 1$ con $B, C \in \mathcal{F}_n$, ma allora per ipotesi induttiva $\max\{\rho(B), \rho(C)\} \leq n$, ma come nel caso precedente la disuguaglianza non può essere stretta, in quanto altrimenti si avrebbe $A \in \mathcal{F}_n$, per cui anche qui $\rho(A) = n + 1$.

□

Esercizio 1.8. Mostrare che se $\rho(A) = n$ e k_A è il numero di connettivi presenti in A, allora

$$n \leq k \leq 2^n - 1.$$

Procediamo per induzione su n:

- Se $\rho(A) = 0$ allora A è una variabile e quindi $k_A = 0$, quindi la disuguaglianza vale.

- Se $\rho(A) = n + 1$, distinguiamo i soliti casi:
  - $A = \neg B$: allora $\rho(B) = n$ che per ipotesi induttiva implica $n \leq k_B \leq 2^n - 1$, e visto che $k_A = k_B + 1$ si ha

$$n + 1 \leq k_A \leq 2^n \leq 2^n + (2^n - 1) = 2^{n+1} - 1$$

  - $A = B \lozenge C$ con $\lozenge \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$: essendo $\max\{\rho(B), \rho(C)\} = n$ e $k_A = k_B + k_C + 1$, utilizzando l'ipotesi induttiva per B e C otteniamo

$$n + 1 = \max\{\rho(B), \rho(C)\} + 1 \leq \max\{k_B, k_C\} + 1 \leq k_A,$$

    ed anche

$$k_A \leq 2 \cdot \max\{k_B, k_C\} + 1 \leq 2 \cdot \max\{2^{\rho(B)} - 1, 2^{\rho(C)} - 1\} + 1 = 2^{n+1} - 1,$$

    da cui segue la tesi.

Esercizio. Mostrare che qualsiasi due interpretazioni di un linguaggio $\mathcal{L}$ che estendono un stesso $\mathcal{L}$-assegnamento coincidono.

Per mostrarlo, conviene ripercorrere la dimostrazione effettuata in classe per l'esistenza di un interpretazione delle formule che estende una specifica funzione $\alpha : \text{Form}\,(\mathcal{L}) \rightarrow \{0, 1\}$, accorgendosi che nei vari casi c'è una sola scelta possibile; infatti, mostrando che nel passo induttivo la definizione di $I_\alpha\,(A)$ è obbligata, restringendoci a formule costruite con $\neg, \wedge, \vee$ (visto che $\rightarrow, \leftrightarrow$ si possono costruire a partire da essi):

- $A = \neg B$: per induzione è ben definito $I_\alpha\,(B)$. Supponiamo che $I_\alpha\,(B) = 0$, allora se per assurdo ponessimo $I_\alpha\,(A) = 0$ non varrebbe che

$$I_\alpha\,(B) = 0 \iff I_\alpha\,(\neg B) = 1,$$

  contraddicendo la definizione di interpretazione booleana; il caso $I_\alpha\,(B) = 1$ è del tutto analogo.

- $A = B \wedge C$: per ipotesi induttiva sono ben definiti $I_\alpha\,(B), I_\alpha\,(C)$. Per definizione di interpretazione booleana, deve valere che

$$I\,(A) = 1 \iff I_\alpha\,(B) = I_\alpha\,(C) = 1,$$

  ma allora anche qui non possiamo effettuare alcuna scelta nella definizione di $I_\alpha\,(A)$.

- $A = B \vee C$: si procede in maniera simile al caso precedente, essendo I_α univocamente determinato dai valori di I_α su B e C.

Esercizio 1.14 (Modus Ponens)**.** Se $\models A \rightarrow B$ e $\models A$, allora $\models B$.

Sia I una qualsiasi interpretazione delle $\mathcal{L}$-formule. Allora $I(A) = 1$ e $I(A \rightarrow B) = 1$, quindi per definizione di interpretazione booleana deve valere $I(B) = 1$.

Esercizio 1.15. Mostrare che le seguenti formule sono tautologie per ogni scelta della formula A:

$$\begin{aligned} A \vee \neg A \\ A \rightarrow A \\ A \leftrightarrow \neg\neg A. \end{aligned}$$

Il risultato si evince dalle tabella di verità di tali formule(omettendo $\neg\neg A$ che è banalmente A):

A	$\neg A$	$A \vee \neg A$	$A \to A$	$A \leftrightarrow \neg\neg A$
1	0	1	1	T
0	1	1	1	T

Esercizio 1.16 (Assiomi di Lukasiewicz-Frege-Hilbert-Mendelson)**.** Le seguenti formule sono tautologie:

$$A \to (B \to A) \tag{1}$$
$$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)) \tag{2}$$
$$(\neg A \to \neg B) \to ((\neg A \to B) \to A)\,. \tag{3}$$

Riduciamo tali formule utilizzando le adeguate proprietà (commutative, associative, distributive e leggi di De Morgan) dei connettivi, e l'equivalenza logica fra $A \to B$ e $\neg A \vee B$: le formule (1), (2) e (3) diventano rispettivamente

$$\begin{aligned} &\neg A \vee (\neg B \vee A) \\ \equiv\, &(A \vee \neg A) \vee \neg B, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &\neg A \vee (\neg B \vee C) \to \neg(\neg A \vee B) \vee (\neg A \vee C) \\ \equiv &\neg(\neg A \vee \neg B \vee C) \vee (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \vee C) \\ \equiv\, &(A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \vee \neg A) \wedge (\neg B \vee \neg A) \vee C \\ \equiv\, &(A \vee \neg A) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee C) \\ \equiv\, &(A \vee \neg A) \vee (D \wedge \neg D)\,, \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} &\neg(A \vee \neg B) \vee (\neg(A \vee B) \vee A) \\ \equiv\, &(\neg A \wedge B) \vee ((\neg A \wedge \neg B) \vee A) \\ \equiv\, &(\neg A \wedge B) \vee ((\neg A \vee A) \wedge (\neg B \vee A)) \\ \equiv\, &((\neg A \wedge B) \vee (\neg A \vee A)) \wedge ((\neg A \wedge B) \vee (\neg B \vee A)) \\ \equiv\, &(A \vee \neg A) \vee E \vee (E \wedge \neg E)\,, \end{aligned} \tag{3}$$

dove ci siamo fermati con le manipolazioni appena abbiamo ottenuto una tautologia, considerando alla luce dell'esercizio 1.15 le formule del tipo $A \vee \neg A$ tautologie, ed abbiamo posto $D := (A \wedge B \wedge \neg C)$ ed $E := (\neg A \wedge B)$.

Esercizio 1.17. Dimostrare che non esistono tautologie A dove compaiono soltanto i connettivi $\vee$ e $\wedge$.

Sia per assurdo A una tautologia nelle sole variabili $X_1, \cdots, X_n$ in cui compaiono solo $\wedge$ e $\vee$. Allora, fissata un'interpretazione I tale che $I(X_1) = \cdots = I(X_n) = 0$, da una facile induzione su $\rho(A)$ e dall'ispezione diretta delle tabelle di verità dei connettivi $\wedge$ e $\vee$ (per entrambi è impossibile ottenere 1 da formule entrambe con valore 0), concludiamo che $I(A) = 0$, contro l'ipotesi che A fosse una tautologia.

Esercizio 1.19. Sia A una formula in $\mathcal{L}$ nelle sole n variabili proposizionali $X_1, \cdots, X_n$. Allora, A è una tautologia se e solo se $A\left(B_1/X_1, \cdots, B_n/X_n\right)$ è una tautologia per ogni scelta delle formule $B_1, \cdots, B_n$.

Per induzione su n: se $n = 1$, data un'interpretazione I_1 definiamo l'interpretazione I_2 che coincide con I_1 su $X_2, \cdots, X_n$, e tale che $I_2(X_1) = I_1(B_1)$, che è unica per un esercizio precedente. Allora, si ha $I_2(A) = I_1(A(B_1/X_1)) = 1$, visto che A è una tautologia. Il passo induttivo segue poi facilmente, visto che possiamo effettuare le sostituzioni una per volta.

Mostriamo il viceversa per contrapositivo: se $A\,(B_1/X_1, \cdots, B_n/X_n)$ non è contraddittoria per ogni scelta delle formule $B_1, \cdots, B_n$, allora è una tautologia, e quindi scegliendo $B_i = X_i$ per ogni i otteniamo che A è una tautologia.

Esercizio 1.29. Mostrare che ogni formula è equivalente ad una in cui compaiono solo i seguenti connettivi:

1. $\{\neg, \wedge\}$
2. $\{\neg, \vee\}$

Mostrare inoltre che non vale tale proprietà per i connettivi $\{\wedge, \vee\}$.

Riduciamo ogni formula con un solo connettivo ad una equivalente in cui compaiono solamente i connettivi citati, dopodiché la tesi seguirà per induzione strutturale sulla costruzione delle formule (facciamo uso delle leggi di De Morgan e delle altre proprietà note dei connettivi):

1. - $A \to B \equiv \neg\,(A \wedge \neg B)$
   - $A \leftrightarrow B \equiv (A \wedge B) \wedge (\neg A \wedge \neg B)$
   - $A \vee B \equiv \neg\,(\neg A \wedge \neg B)$
2. - $A \to B \equiv \neg A \vee B$
   - $A \leftrightarrow B \equiv (\neg A \vee \neg B) \vee (A \vee B)$
   - $A \wedge B \equiv \neg\,(\neg A \vee \neg B)$

Inoltre, per l'esercizio 1.17 $\{\wedge, \vee\}$ non possono avere la proprietà menzionata, visto che in particolare una tautologia non può contenere solo tali connettivi.

Esercizio 1.31. Per ogni formula A esiste una formula $B \equiv A$ nella quale compare soltanto il connettivo "entrambe false" $\star$.

Utilizzando l'esercizio 1.29, ci basta mostrare ad esempio che una formula scritta solo con i connettivi $\{\neg, \vee\}$ è equivalente ad una formula che usa solamente il connettivo $\star$: infatti, osserviamo che per definizione di tale connettivo si ha, per ogni scelta delle formule A, B :

- $\neg A \equiv A \star A$,
- $A \vee B \equiv \neg\,(A \star B) \equiv (A \star B) \star (A \star B)$.

2 Teorie Proposizionali