

Esercizi del Corso di Logica Matematica 2022/2023

Francesco Minnocci

18 ottobre 2022

1 Calcolo Proposizionale

Remark. Nel seguito, i valori di verità **falso** e **vero** verranno indicati per comodità rispettivamente con i numeri 0 ed 1.

Esercizio 1.7. Mostrare che $\rho(A) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid A \in \mathcal{F}_n\}$.

Visto che A è una formula sul linguaggio \mathcal{L} , esiste un $n \in \mathbb{N}$ tale che $A \in \mathcal{F}_n$, quindi per il principio del minimo è ben definito

$$\min\{n \in \mathbb{N} \mid A \in \mathcal{F}_n\}.$$

Procediamo ora per induzione su n :

- Se $n = 0$, A è una variabile e quindi $\rho(A) = 0$ e questo è anche il minimo.
- Se $A \in \mathcal{F}_{n+1}$, essendo

$$\mathcal{F}_{n+1} = \mathcal{F}_n \cup \{\neg P, P \wedge Q, P \vee Q, P \rightarrow Q, P \leftrightarrow Q \mid P, Q \in \mathcal{F}_n\},$$

si distinguono due casi: se $A \in \mathcal{F}_n$ si conclude per ipotesi induttiva, mentre se $A \in \mathcal{F}_{n+1} \setminus \mathcal{F}_n$ si ha che $n+1$ è il minimo livello in cui compare A , e quindi se mostriamo che $\rho(A) = n+1$ abbiamo concluso. Si pongono perciò altri due casi:

- $A = \neg B$: $\rho(A) = \rho(B) + 1$ con $B \in \mathcal{F}_n$, e quindi per ipotesi induttiva $\rho(B) \leq n$, ma non può essere $\rho(B) < n$ perché altrimenti $A \in \mathcal{F}_n$, e quindi $\rho(B) = n$ da cui $\rho(A) = n+1$.
- $A = B \diamond C$ con $\diamond \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$: $\rho(A) = \max\{\rho(B), \rho(C)\} + 1$ con $B, C \in \mathcal{F}_n$, ma allora per ipotesi induttiva $\max\{\rho(B), \rho(C)\} \leq n$, ma come nel caso precedente la disuguaglianza non può essere stretta, in quanto altrimenti si avrebbe $A \in \mathcal{F}_n$, per cui anche qui $\rho(A) = n+1$.

□

Esercizio 1.8. Mostrare che se $\rho(A) = n$ e k_A è il numero di connettivi presenti in A , allora

$$n \leq k \leq 2^n - 1.$$

Procediamo per induzione su n :

- Se $\rho(A) = 0$ allora A è una variabile e quindi $k_A = 0$, quindi la disuguaglianza vale.

- Se $\rho(A) = n + 1$, distinguiamo i soliti casi:
 - $A = \neg B$: allora $\rho(B) = n$ che per ipotesi induttiva implica $n \leq k_B \leq 2^n - 1$, e visto che $k_A = k_B + 1$ si ha

$$n + 1 \leq k_A \leq 2^n \leq 2^n + (2^n - 1) = 2^{n+1} - 1$$

- $A = B \diamond C$ con $\diamond \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$: essendo $\max\{\rho(B), \rho(C)\} = n$ e $k_A = k_B + k_C + 1$, utilizzando l'ipotesi induttiva per B e C otteniamo

$$n + 1 = \max\{\rho(B), \rho(C)\} + 1 \leq \max\{k_B, k_C\} + 1 \leq k_A,$$

ed anche

$$k_A \leq 2 \cdot \max\{k_B, k_C\} + 1 \leq 2 \cdot \max\{2^{\rho(B)} - 1, 2^{\rho(C)} - 1\} + 1 = 2^{n+1} - 1,$$

da cui segue la tesi.

Esercizio. Mostrare che qualsiasi due interpretazioni di un linguaggio \mathcal{L} che estendono un stesso \mathcal{L} -assegnamento coincidono.

Per mostrarlo, conviene ripercorrere la dimostrazione effettuata in classe per l'esistenza di un'interpretazione delle formule che estende una specifica funzione $\alpha : \text{Form}(\mathcal{L}) \rightarrow \{0, 1\}$, accorgendosi che nei vari casi c'è una sola scelta possibile; infatti, mostrando che nel passo induttivo la definizione di $I_\alpha(A)$ è obbligata, restringendoci a formule costruite con \neg, \wedge, \vee (visto che $\rightarrow, \leftrightarrow$ si possono costruire a partire da essi):

- $A = \neg B$: per induzione è ben definito $I_\alpha(B)$. Supponiamo che $I_\alpha(B) = 0$, allora se per assurdo ponessimo $I_\alpha(A) = 0$ non varrebbe che

$$I_\alpha(B) = 0 \iff I_\alpha(\neg B) = 1,$$

contraddicendo la definizione di interpretazione booleana; il caso $I_\alpha(B) = 1$ è del tutto analogo.

- $A = B \wedge C$: per ipotesi induttiva sono ben definiti $I_\alpha(B), I_\alpha(C)$. Per definizione di interpretazione booleana, deve valere che

$$I(A) = 1 \iff I_\alpha(B) = I_\alpha(C) = 1,$$

ma allora anche qui non possiamo effettuare alcuna scelta nella definizione di $I_\alpha(A)$.

- $A = B \vee C$: si procede in maniera simile al caso precedente, essendo I_α univocamente determinato dai valori di I_α su B e C .

Esercizio 1.12. Dimostrare che per ogni funzione $f : \{0, 1\}^{\{1, \dots, n\}} \rightarrow \{0, 1\}$ esiste una formula A nelle sole variabili X_1, \dots, X_n che ha come tabella di verità $\tau_A = f$.

Esercizio 1.14 (Modus Ponens). Se $\models A \rightarrow B$ e $\models A$, allora $\models B$.

Sia I una qualsiasi interpretazione delle \mathcal{L} -formule. Allora $I(A) = 1$ e $I(A \rightarrow B) = 1$, quindi per definizione di interpretazione booleana deve valere $I(B) = 1$.

Esercizio 1.15. Mostrare che le seguenti formule sono tautologie per ogni scelta della formula A :

$$\begin{aligned} A \vee \neg A \\ A \rightarrow A \\ A \leftrightarrow \neg\neg A. \end{aligned}$$

Il risultato si evince dalle tabella di verità di tali formule(omettendo $\neg\neg A$ che è banalmente A):

A	$\neg A$	$A \vee \neg A$	$A \rightarrow A$	$A \leftrightarrow \neg\neg A$
1	0	1	1	T
0	1	1	1	T

Esercizio 1.16 (Assiomi di Lukasiewicz-Frege-Hilbert-Mendelson). Le seguenti formule sono tautologie:

$$A \rightarrow (B \rightarrow A) \quad (1)$$

$$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) \quad (2)$$

$$(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow A). \quad (3)$$

Riduciamo tali formule utilizzando le adeguate proprietà (commutative, associative, distributive e leggi di De Morgan) dei connettivi, e l'equivalenza logica fra $A \rightarrow B$ e $\neg A \vee B$: le formule (1), (2) e (3) diventano rispettivamente

$$\begin{aligned} & \neg A \vee (\neg B \vee A) \\ \equiv & (A \vee \neg A) \vee \neg B, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \neg A \vee (\neg B \vee C) \rightarrow \neg(\neg A \vee B) \vee (\neg A \vee C) \\ \equiv & \neg(\neg A \vee \neg B \vee C) \vee (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \vee C) \\ \equiv & (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \vee \neg A) \wedge (\neg B \vee \neg A) \vee C \\ \equiv & (A \vee \neg A) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee C) \\ \equiv & (A \vee \neg A) \vee (D \wedge \neg D), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \neg(A \vee \neg B) \vee (\neg(A \vee B) \vee A) \\ \equiv & (\neg A \wedge B) \vee ((\neg A \wedge \neg B) \vee A) \\ \equiv & (\neg A \wedge B) \vee ((\neg A \vee A) \wedge (\neg B \vee A)) \\ \equiv & ((\neg A \wedge B) \vee (\neg A \vee A)) \wedge ((\neg A \wedge B) \vee (\neg B \vee A)) \\ \equiv & (A \vee \neg A) \vee E \vee (E \wedge \neg E), \end{aligned} \quad (3)$$

dove ci siamo fermati con le manipolazioni appena abbiamo ottenuto una tautologia, considerando alla luce dell'esercizio 1.15 le formule del tipo $A \vee \neg A$ tautologie, ed abbiamo posto $D := (A \wedge B \wedge \neg C)$ ed $E := (\neg A \wedge B)$.

Esercizio 1.17. Dimostrare che non esistono tautologie A dove compaiono soltanto i connettivi \vee e \wedge .

Sia per assurdo A una tautologia nelle sole variabili X_1, \dots, X_n in cui compaiono solo \wedge e \vee . Allora, fissata un'interpretazione I tale che $I(X_1) = \dots = I(X_n) = 0$, da una facile induzione su

$\rho(A)$ e dall'ispezione diretta delle tabelle di verità dei connettivi \wedge e \vee (per entrambi è impossibile ottenere 1 da formule entrambe con valore 0), concludiamo che $I(A) = 0$, contro l'ipotesi che A fosse una tautologia.

Esercizio 1.19. Sia A una formula in \mathcal{L} nelle sole n variabili proposizionali X_1, \dots, X_n . Allora, A è una tautologia se e solo se $A(B_1/X_1, \dots, B_n/X_n)$ è una tautologia per ogni scelta delle formule B_1, \dots, B_n .

Per induzione su n : se $n = 1$, data un'interpretazione I_1 definiamo l'interpretazione I_2 che coincide con I_1 su X_2, \dots, X_n , e tale che $I_2(X_1) = I_1(B_1)$, che è unica per un esercizio precedente. Allora, si ha $I_2(A) = I_1(A(B_1/X_1)) = 1$, visto che A è una tautologia. Il passo induttivo segue poi facilmente, visto che possiamo effettuare le sostituzioni una per volta.

Mostriamo il viceversa per contrapposito: se $A(B_1/X_1, \dots, B_n/X_n)$ non è contraddittoria per ogni scelta delle formule B_1, \dots, B_n , allora è una tautologia, e quindi scegliendo $B_i = X_i$ per ogni i otteniamo che A è una tautologia.

Esercizio 1.29. Mostrare che ogni formula è equivalente ad una in cui compaiono solo i seguenti connettivi:

1. $\{\neg, \wedge\}$
2. $\{\neg, \vee\}$

Mostrare inoltre che non vale tale proprietà per i seguenti connettivi:

1. $\{\wedge, \vee\}$
2. $\{\neg, \leftrightarrow\}$
3. $\{\leftrightarrow, \vee\}$

Sia A una formula,

Inoltre, per l'esercizio X $\{\wedge, \vee\}$ non possono avere la proprietà menzionata visto che in particolare una tautologia non può contenere solo tali connettivi;

Esercizio 1.31. Per ogni formula A esiste una formula $B \equiv A$ nella quale compare soltanto il connettivo "entrambe false" \star .

Utilizzando l'esercizio 1.29, ci basta mostrare ad esempio che una formula scritta solo con i connettivi $\{\neg, \vee\}$ è equivalente ad una formula che usa solamente il connettivo \star : infatti, osserviamo che per definizione di tale connettivo si ha, per ogni scelta delle formule A, B :

- $\neg A \equiv A \star A$
- $A \vee B \equiv \neg(A \star B) \equiv (A \star B) \star (A \star B)$

2 Teorie Proposizionali