# Il Teorema di König

Francesco Minnocci

18 maggio 2023

**Theorem 1.** *(König) Siano* $\{\mathbf{k}_i\}_{i\in I}, \{\lambda_i\}_{i\in I}$ *cardinali tali che* $\forall i \in I, \mathbf{k}_i < \lambda_i$. *Allora,*

$$\sum_{i\in I} \mathbf{k}_i < \prod_{i\in I} \lambda_i.$$

*Dimostrazione.* Siano

$$\begin{aligned} A &= \bigcup \{\mathbf{k}_i \times \{i\} \mid i \in I\} \\ B &= \{f\colon I \to \sup_{i\in I} \lambda_i \mid \forall i \in I, f(i) \in \lambda_i\}. \end{aligned}$$

Supponiamo, per assurdo, che esista una funzione suriettiva

$$f\colon A \longrightarrow B$$

Infatti, per l'assioma della scelta, ciò è equivalente a supporre che

$$|A| \geq |B| > 0,$$

dove l'insieme di destra è non vuoto visto che i $\lambda_i$ sono tutti non nulli.
Ora, se $i \in I$ definiamo

$$\begin{aligned} f_i\colon \mathbf{k}_i &\longrightarrow \lambda_i \\ \alpha &\longmapsto f(\alpha, i)_{(i)} \in \lambda_i, \end{aligned}$$

e visto che per ipotesi $f_i$ non può essere suriettiva, si ha

$$(\lambda_i \setminus \operatorname{Im} f_i) \neq \emptyset.$$

Quindi, usando AC costruiamo

$$\begin{aligned} g\colon I &\longrightarrow \sup_{i\in I} \lambda_i \\ i &\longmapsto g(i) \in (\lambda_i \setminus \operatorname{Im} f_i). \end{aligned}$$

Ora, $g \in B$, ma mostriamo che $g \notin \operatorname{Im}(f_i)$ (ovvero $f$ non è suriettiva, da cui la contraddizione): se per assurdo

$$\begin{aligned} \exists i \in I, \alpha \in \mathbf{k}_i \mid g = f(\alpha, i) \implies g(i) &= f(\alpha, i)_{(i)} \\ &= f_i(\alpha) \in \operatorname{Im} f_i, \end{aligned}$$

che è una contraddizione, per costruzione di $g$. $\lightning$ $\square$