Istituzioni di Geometria 2023/2024

Francesco Minnocci

26 marzo 2024

29 Febbraio

Esercizio 1.1 Costruisci due atlanti lisci non compatibili su $\mathbb{R}$. Mostra che le due varietá lisce che ne risultano sono però diffeomorfe.

Dimostrazione. Consideriamo due atlanti su $\mathbb{R}$ formati da una sola carta: quello standard dato dall'identità ed $\mathcal{A} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, con

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 0, \\ x^2 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Quest'ultimo è un'atlante liscio in quanto l'unica mappa di transizione $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ è liscia, tuttavia non è compatibile con l'atlante standard: se lo fosse, allora la mappa di transizione

$$f \circ \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^{-1} = f$$

dovrebbe essere liscia, ma non lo è in $x = 0$.

Mostriamo infine che f è un diffeomorfismo tra $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ ed $\mathbb{R}$ con l'atlante standard: f è una funzione liscia tra varietà perché in carte diventa

$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}} \circ f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}} .$$

Analogamente, la sua inversa

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 0, \\ \sqrt{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

è liscia visto che

$$f \circ f^{-1} \circ \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^{-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}} .$$

Osservazione. La costruzione funziona anche sostituendo f con un qualsiasi omeomorfismo di $\mathbb{R}$ in sè che non sia C^∞.

$\square$

Esercizio 1.2 (svolto in collaborazione con Eva Silvestri) Mostra che la mappa

$$f : S^n \to \mathbb{RP}^n, \quad (x_0, \dots, x_n) \mapsto [x_0 : \dots : x_n]$$

è liscia.

Dimostrazione. Sia $(x_0, \dots, x_n) \in S^n$, e fissiamo un indice i tale che $x_i \neq 0$. Senza perdità di generalità, supponiamo $x_i > 0$ (le coordinate non cambiano nel caso $x_i < 0$). Allora, x_i è contenuto nell'aperto

$$U_i^+ := \{(x_0, \dots, x_n) \in S^n \mid x_i > 0\},$$

che identifichiamo con la palla aperta unitaria $B^n \subset \mathbb{R}^n$ tramite la carta

$$\begin{aligned} \varphi_i^+ : U_i^+ &\to B^n \\ (x_0, \dots, x_n) &\mapsto (x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Inoltre, notiamo che f manda U_i^+ nella carta affine

$$V_i := \{[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{RP}^n \mid x_i \neq 0\},$$

che è omeomorfa ad $\mathbb{R}^n$ attraverso la mappa

$$\begin{aligned} \psi_i : V_i &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ [x_0 : \dots : x_n] &\longmapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right). \end{aligned}$$

Mostriamo ora che

$$F := \psi_i \circ f \circ (\varphi_i^+)^{-1} : B^n \to \mathbb{R}^n$$

è ben definita e liscia: l'inversa di φ_i^+ è data da

$$\begin{aligned} (\varphi_i^+)^{-1} : B^n &\to U_i^+ \\ y &\mapsto \left(y_1, \dots, y_{i-1}, \sqrt{1 - \|y\|^2}, y_{i+1}, \dots, y_n\right). \end{aligned}$$

Inoltre, dato che $\|y\| < 1$ si ha che

$$F(y) = \left(\frac{y_1}{\sqrt{1 - \|y\|^2}}, \dots, \frac{y_n}{\sqrt{1 - \|y\|^2}}\right)$$

è un'onesta composizione di mappe lisce, ed è quindi liscia. □

Esercizio 1.3 (svolto in collaborazione con Eva Silvestri) Costruisci un diffeomorfismo tra S^1 ed $\mathbb{RP}^1$.

Dimostrazione. Siano $N = (0, 1)$ ed $S = (0, -1)$ i poli sud e nord di S^1, e definiamo le mappe f_i per $i = 1, 2$ come

$$\begin{aligned} f_1 = \phi_N^{-1} \circ D_1 &: U_1 \subset \mathbb{RP}^1 \to S^1 \setminus N, \\ f_2 = \phi_S^{-1} \circ D_2 &: U_2 \subset \mathbb{RP}^1 \to S^1 \setminus S. \end{aligned}$$

dove ϕ_S e ϕ_N sono le proiezioni stereografiche, cioè

$$\begin{aligned} \phi_N(x, y) &= \frac{2x}{1 - y}, \\ \phi_S(x, y) &= \frac{2x}{1 + y}, \end{aligned}$$

e $D_i : U_i \to \mathbb{R}$ per $i = 1, 2$ sono le carte di $\mathbb{RP}^1$

$$D_1([x : y]) = \frac{y}{x},$$
$$D_2([x : y]) = \frac{x}{y}.$$

Scriviamo esplicitamente le parametrizzazioni di S^1:

$$\phi_N^{-1}(t) = \left(\frac{t}{1+t^2}, \frac{t^2-1}{1+t^2}\right),$$
$$\phi_S^{-1}(t) = \left(\frac{t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right).$$

Visto che le f_i coincidono sull'intersezione dei domini $S^1 \setminus \{N, S\}$, abbiamo costruito per casi un diffeomorfismo f tra $\mathbb{RP}^1$ ed S^1, posto che le f_i siano lisce: l' inversa $g : \; S^1 \to \mathbb{RP}^1$ è analogamente definita per casi come

$$g(x, y) = \begin{cases} (H_1 \circ \phi_N)(x, y) = [1 - y : 2x] & \text{se } y \neq 1, \\ (H_2 \circ \phi_S)(x, y) = [2x : 1 + y] & \text{se } y \neq -1, \end{cases}$$

dove H_i è l'inversa di D_i per $i = 1, 2$.

Infine, usando come atlanti per S^1 e $\mathbb{RP}^1$ quelli descritti sopra, f e g sono chiaramente lisce perché inducono l'identità su $\mathbb{R}$ in carte. □

Esercizio 2.1 Sia $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ polinomio di grado $d \geq 1$. Considera l'insieme $S = \{z \mid p'(z) = 0\}$. Mostra che la mappa

$$p : \mathbb{C} \setminus p^{-1}(p(S)) \to \mathbb{C} \setminus p(S),$$
$$z \mapsto p(z)$$

è un rivestimento liscio di grado d.

Dimostrazione. Innanzitutto, per il criterio della derivata le fibre della mappa in questione sono tutte di cardinalità d. Inoltre, la mappa è un diffeomorfismo locale per il teorema d'invertibilità locale, sempre per la scelta del dominio effettuata. Ora, preso $y \in p(S)$, sia $p^{-1}(x) = \{x_1, \ldots, x_d\}$, e siano V_i degli intorni aperti degli x_i tali che p è un diffeomorfismo su V_i. A meno di restringerli, possiamo supporre che i V_i siano disgiunti, e posto $U \coloneqq \bigcap_{i=1}^d p(V_i)$, si ha che

$$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i=1}^{d} V_i.$$

Abbiamo quindi mostrato che U è un intorno ben rivestito di y tale che $p : V_i \to U$ è un diffeomorfismo per $i = 1, \ldots, d$, e quindi p è un rivestimento liscio di grado d. □

Esercizio 2.2 (svolto in collaborazione con Lorenzo Femia)

Considera il gruppo $\Gamma < \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)$ generato da:

$$f(x, y, z) = (x + 1, y, z), \qquad g(x, y, z) = (x, y + 1, z),$$
$$h(x, y, z) = (-x, -y, z + 1).$$

Mostra che l'azione è libera e propriamente discontinua, e che la varietà $\mathbb{R}/\Gamma$ è compatta ed orientabile ma non omeomorfa al 3-toro. Mostra che questa varietà ha un rivestimento doppio diffeomorfo al 3-toro.

Dimostrazione. Osserviamo che valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} f \circ g = g \circ f, \\ h \circ f = f^{-1} \circ h, \\ h \circ g = g^{-1} \circ h. \end{cases}$$

Da queste segue che ogni elemento γ di Γ si scrive in modo unico come

$$\gamma = f^k \circ g^l \circ h^m$$

per qualche $k, l, m \in \mathbb{Z}$. Vediamo che lo stabilizzatore di qualsiasi punto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è banale:

$$\gamma \cdot (x, y, z) = f^k \circ g^l \circ h^m \cdot (x, y, z) = ((-1)^m x + k, (-1)^m y + l, z + m), \tag{1}$$

e quindi $\gamma \cdot (x, y, z) = (x, y, z)$ se e solo se $k = l = m = 0$.

Per vedere che l'azione è propriamente discontinua, presi due punti $x, y \in \mathbb{R}^3$ scegliamo come loro intorni due palle aperte di raggio $\frac{1}{4}$. Allora, la formula (1) mostra che l'orbita di x è discreta, e quindi la sua intersezione con il compatto $\overline{B_{\frac{1}{4}}(y)}$ è finita, il che mostra che l'azione è propriamente discontinua.

Per quanto riguarda la compattezza, osserviamo che $D := [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [0, 1]$ è un dominio fondamentale per l'azione di Γ, e quindi

$$\mathbb{R}^3/\Gamma \simeq D/\Gamma$$

è immagine del compatto D mediante la mappa continua di proiezione, che ne mostra la compattezza.

L'orientabilità di $\mathbb{R}^3/\Gamma$ segue dal fatto che Γ preserva l'orientazione. Infatti, visto che lavoriamo su $\mathbb{R}^3$ possiamo calcolare i differenziali dei generatori di Γ con lo Jacobiano, ed hanno tutti determinante 1:

$$\begin{cases} df_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ dg_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ dh_p = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Essendo il rivestimento $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3/\Gamma$ regolare, il gruppo fondamentale di $\mathbb{R}^3/\Gamma$ è isomorfo a Γ, che non è abeliano per le relazioni esibite sopra. D'altra parte, $\pi_1(T^3) = \mathbb{Z}^3$ è abeliano, e quindi la varietà $\mathbb{R}^3/\Gamma$ non è omeomorfa al 3-toro.

Infine, il sottogruppo normale $N = \langle f, g, h^2 \rangle$ di Γ ha indice 2, quindi induce un rivestimento di grado 2

$$\mathbb{R}^3/N \to \mathbb{R}^3/\Gamma.$$

L'azione di N su $\mathbb{R}^3$ coincide con quella che dà il 3-toro, tranne che sull'asse z dove trasla di 2 invece che di 1. Per mostrare N è diffeomorfo al 3-toro basta quindi osservare che D è anche un dominio fondamentale per l'azione che dà il 3-toro, e che un dominio fondamentale per l'azione di N è $D' = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [0, 2]$, diffeomorfo a D tramite $(x, y, z) \mapsto (x, y, 2z)$. Questo induce il diffeomorfismo cercato. □

Esercizio 2.5 Sia M compatta ed N connessa. Se $\dim M = \dim N$, mostra che ogni embedding $M \to N$ è un diffeomorfismo.

Dimostrazione. Sia $f : M \to N$ un embedding. Poiché M è compatto, $f(M)$ è compatto in N, e quindi chiuso; inoltre $f(M)$ è aperto in N perché f è liscia, ma essendo N connessa, $f(M) = N$.

Inoltre, f è un'immersione iniettiva tra spazi della stessa dimensione, che per il teorema d'invertibilità locale implica che f è un diffeomorfismo locale.

Infine, per definizione f è un omeomorfismo con l'immagine, e l'inversa continua $f^{-1} : N \to M$ è liscia in quanto f è un diffeomorfismo locale. □

Esercizio 3.1 Siano $v, v', w, w' \in V^*$ covettori non nulli.

1. Se v e v' sono indipendenti, allora $v \otimes w$ e $v' \otimes w'$ sono vettori indipendenti in $\mathcal{T}^2(V)$.
2. Se inoltre anche w e w' sono indipendenti, allora

$$v \otimes w + v' \otimes w' \in \mathcal{T}^2(V)$$

   non è un elemento puro.

Dimostrazione.

1. Supponiamo per assurdo che esistano $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tali che

$$\lambda(v \otimes w) + \mu(v' \otimes w') = 0,$$

   e supponiamo senza perdita di generalità che $\lambda \neq 0$. Allora, valutando entrambi i membri in $(x, y) \in V \times V$ otteniamo

$$\lambda v(x)w(y) + \mu v'(x)w'(y) = 0,$$

   ma per ipotesi esiste $\overline{y} \in V$ tale che $w(\overline{y}) \neq 0$, e quindi

$$(\lambda w(\overline{y}))v(x) + (\mu w'(\overline{y}))v'(x) = 0$$

   contraddice l'indipendenza di v e v' (per la genericità di x).

2. Supponiamo per assurdo che $v \otimes w + v' \otimes w'$ sia un elemento puro, cioè che esistano $v'', w'' \in V$ tale che

$$v'' \otimes w'' = v \otimes w + v' \otimes w'. \tag{2}$$

Ora, completando $\{v, v'\}$ e $\{w, w'\}$ a delle basi $\mathcal{B} = \{v_i\}$ e $\mathcal{C} = \{w_j\}$ di V^*, otteniamo una base di $\mathcal{T}^2(V)$ data da tutti i possibili prodotti tensoriali di un elemento di $\mathcal{B}$ con uno di $\mathcal{C}$. In particolare, scrivendo in tale base il tensore $v'' \otimes w''$ si ha

$$v'' \otimes w'' = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j v_i \otimes w_j,$$

che per l'unicità di tale scrittura implica che $\mu_1\lambda_1 = \mu_2\lambda_2 = 1$ (visto che $v_1 = v$, $v_2 = v'$, $w_1 = w$ e $w_2 = w'$). Ma allora in particolare $\mu_1\lambda_2 \neq 0$, che contraddice (2).

□

Esercizio 3.2 Considera l'isomorfismo canonico $\mathcal{T}_1^1(V) = \mathrm{Hom}(V, V)$. Mostra che questo isomorfismo manda gli elementi puri in tutti e soli omomorfismi di rango ≤ 1.

Dimostrazione. Sia $v \otimes v^* \in \mathcal{T}_1^1(V)$ un elemento puro non nullo. Allora, detto φ l'isomorfismo canonico, si ha

$$\varphi(v \otimes v^*)(x) = v^*(x)v$$

per ogni $x \in V$, e quindi $\varphi(v \otimes v^*)$ è un endomorfismo di rango 1.

Viceversa, se $\phi \in \mathrm{Hom}(V, V)$ è un endomorfismo di rango 1, allora presa una base $\{v_i\}$ di V questa verrà mandata nello span di un certo vettore $v \in V$, ovvero $\phi(v_i) = \lambda_i v$ per certi $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Quindi, ponendo $v^*(x) = \sum_i \lambda_i v_i^*(x)$ con $\{v_i^*\}$ base duale di $\{v_i\}$, si ha che ϕ è l'immagine di $v \otimes v^*$ tramite l'isomorfismo φ in quanto coincidono sulla base scelta:

$$\varphi(v \otimes v^*)(v_i) = v^*(v_i)v = \lambda_i v = \phi(v_i).$$

□

Esercizio 3.3 Siano $v^1, \ldots, v^k \in V^*$. Mostra che questi vettori sono indipendenti se e solo se $v^1 \wedge \ldots \wedge v^k \neq 0$.

Dimostrazione. Supponiamo che $v^1, \ldots, v^k$ siano dipendenti. Allora esistono $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ non tutti nulli tali che

$$v^1 = \lambda_2 v^2 + \ldots + \lambda_k v^k,$$

e sviluppando per multilinearità lungo la prima componente otteniamo che

$$v^1 \wedge v^2 \wedge \ldots \wedge v^k = \sum_{i=2}^{k} \lambda_i v^i \wedge \ldots \wedge v^i \wedge \ldots \wedge v^k = 0.$$

Viceversa, se $v^1, \ldots, v^k$ sono indipendenti, li possiamo completare a una base $\{v^i\}$ di V^*, e detta $\{v_i\}$ la base duale associata, abbiamo

$$(v^1 \wedge \ldots \wedge v^k)(v_1, \ldots, v_k) = 1.$$

□