

# Istituzioni di Geometria 2023/2024

Francesco Minnocci

28 maggio 2024

## Terza Consegna

**Esercizio 7.1** Considera il toro  $T = S^1 \times S^1$  con coordinate  $(\theta_1, \theta_2)$  definite a meno di  $+2k\pi$  e la 1-forma  $\omega = d\theta_1$ . Considera la 1-sottovarietà  $\gamma_i = \{\theta_i = 0\}$  per  $i = 1, 2$ , orientata come  $S^1$ . Mostra che

$$\int_{\gamma_1} \omega = 0, \quad \int_{\gamma_2} \omega = 2\pi.$$

*Dimostrazione.* Ricordando che nel calcolare l'integrale di una forma possiamo permetterci di rimuovere un insieme di misura nulla dal dominio di integrazione, ci restringiamo ad integrare lungo le 1-sottovarietà  $\gamma_i \setminus \{(0, 0)\}$ , per cui

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} \omega &= \int_{\gamma_1 \setminus \{(0, 0)\}} d\theta_1 = \int_{\{0\} \times (0, 2\pi)} d\theta_1 = 0, \\ \int_{\gamma_2} \omega &= \int_{\gamma_2 \setminus \{(0, 0)\}} d\theta_1 = \int_{(0, 2\pi) \times \{0\}} d\theta_1 = 2\pi. \end{aligned}$$

□

**Esercizio 7.3** Sia  $f : U \rightarrow V$  una mappa liscia fra aperti  $U \subset \mathbb{R}^m$  e  $V \subset \mathbb{R}^n$ . Scriviamo  $f = (f_1, \dots, f_n)$ . Per non confonderci usiamo variabili diverse  $(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$  e  $(y^1, \dots, y^m) \in \mathbb{R}^m$ . Mostra che

$$f^*(dx^i) = \frac{\partial f_i}{\partial y^j} dy^j = df_i.$$

*Dimostrazione.* Per ogni  $p \in \mathbb{R}^m$  e  $v \in T_p \mathbb{R}^m$  si ha

$$f^*(dx^i)_p(v) = dx^i_{f(p)}(df_p(v)) = (df_p(v))_i = \frac{\partial f_i}{\partial y^j}(p) \cdot dy^j(v) = \left( \frac{\partial f_i}{\partial y^j} dy^j \right)_p(v) = (df_i)_p(v).$$

□

**Esercizio 7.4** Sia  $\varphi : M \rightarrow N$  una mappa liscia fra varietà e  $\omega \in \Omega^k(N)$ . Otteniamo

$$d(\varphi^*\omega) = \varphi^*(d\omega).$$

*Dimostrazione.* Mostriamo preliminarmente che  $d(\varphi^* f) = \varphi^*(df)$  per  $f \in C^\infty(N)$ : infatti, per ogni  $p \in M$  e  $v \in T_p M$  si ha

$$d(\varphi^* f)(v) = v(\varphi^* f) = \varphi_*(v)(f) = df(\varphi_*(v)) = \varphi^*(df)(v),$$

dove  $\varphi_*$  è la mappa indotta da  $\varphi$  sui tangenti. Osserviamo inoltre che dalla formula di Leibniz segue che

$$d(f \cdot \omega) = df \wedge \omega + f \cdot d\omega$$

per ogni  $f \in C^\infty(N)$  e  $\omega \in \Omega^k(N)$ . Ora, scriviamo  $\omega$  in carte rispetto ad una base di  $\Omega^k(N)$

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k},$$

e per linearità supponiamo che  $\omega = f dx^I$  con  $dx^I := dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ . Allora, notando che

$$\varphi^*(\omega) = \varphi^*(f) \cdot \varphi^*(dx^I),$$

otteniamo

$$\begin{aligned} d(\varphi^* \omega) &= d(\varphi^*(f) \cdot \varphi^*(dx^I)) = d(\varphi^* f) \wedge \varphi^*(dx^I) + \varphi^* f \cdot \overline{d(\varphi^*(dx^I))} \\ &= \varphi^*(df) \wedge \varphi^*(dx^I) = \varphi^*(df \wedge dx^I) = \varphi^*(d\omega), \end{aligned}$$

dove abbiamo usato il fatto che  $\varphi^*(\omega \wedge \eta) = \varphi^*(\omega) \wedge \varphi^*(\eta)$ . □

**Esercizio 8.1** Mostra che per qualsiasi successione esatta di spazi vettoriali finito dimensionali

$$0 \rightarrow V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{k-1}} V_k \rightarrow 0$$

vale la relazione

$$\sum_{i=1}^k (-1)^i \dim V_i = 0.$$

Deduci il fatto seguente. Sia  $M = U \cup V$  varietà con  $U, V$  aperti. Supponiamo che i numeri di Betti di  $U \cap V, U, V, M$  siano tutti finiti. Allora

$$\chi(M) = \chi(U) + \chi(V) - \chi(U \cap V).$$

*Dimostrazione.* Dalla formula delle dimensioni segue che

$$\dim V_i = \dim \ker f_i + \dim \operatorname{Im} f_i$$

per  $1 \leq i < k$ . D'altro canto, poichè la successione è esatta abbiamo

$$\operatorname{Im} f_i = \ker f_{i+1},$$

sempre per  $1 \leq i < k$  (ponendo  $f_k$  uguale alla mappa nulla). Dunque,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k (-1)^i \dim V_i &= \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i (\dim \ker f_i + \dim \ker f_{i+1}) + (-1)^k \dim V_k \\ &= -\dim \ker f_1 + (-1)^{k-1} \dim \ker f_k + (-1)^k \dim V_k \\ &= 0 \end{aligned}$$

visto che i termini in mezzo si cancellano due a due, e che per esattezza valgono  $\ker f_1 = 0$  e  $\ker f_k = V_k$ .

Per quanto riguarda la seconda parte, osserviamo che per Mayer-Vietoris abbiamo una successione esatta lunga in coomologia

$$\cdots \rightarrow H^i(M) \rightarrow H^i(U) \oplus H^i(V) \rightarrow H^i(U \cap V) \rightarrow H^{i+1}(M) \rightarrow \cdots$$

ed visto che i numeri di Betti sono finiti applichiamo la formula appena dimostrata (ponendo  $n = \dim M$ ):

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=0}^n (-1)^{i+1} (b_i(M) - b_i(U) - b_i(V) + b_i(U \cap V)) \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^{i+1} b_i(M) - \sum_{i=0}^n (-1)^{i+1} b_i(U) - \sum_{i=0}^n (-1)^{i+1} b_i(V) + \sum_{i=0}^n (-1)^{i+1} b_i(U \cap V) \\ &= -\chi(M) + \chi(U) + \chi(V) - \chi(U \cap V), \end{aligned}$$

da cui la tesi.  $\square$

**Esercizio 8.4** Sia  $K \subset S^3$  un nodo. Mostra che  $H^1(S^3 \setminus K) \cong \mathbb{R}$ .

*Dimostrazione.* Consideriamo  $U = S^3 \setminus K$  e  $V$  un intorno tubolare di  $K$ . Allora,  $U \cup V = S^3$  e  $U \cap V$  è omotopicamente equivalente ad un toro: infatti, l'intorno tubolare è il fibrato normale di un embedding di  $S^1$ , ma deve essere orientabile in quanto aperto di una 3-varietà orientabile ed è quindi banale (in altre parole, è il toro pieno).

Per Mayer-Vietoris, abbiamo una successione esatta lunga in coomologia

$$H^1(S^3) = 0 \rightarrow H^1(U) \oplus H^1(V) \rightarrow H^1(U \cap V) \rightarrow H^2(S^3) = 0$$

e calcolando ogni termine otteniamo (visto che  $V$  è omotopicamente equivalente ad  $S^1$ )

$$0 \rightarrow H^1(U) \oplus \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow 0$$

da cui per l'esercizio precedente

$$0 = b^1(U) + 1 - 2 + 1 - 2 + 1,$$

e quindi  $b^1(U) = 1$ .  $\square$

**Esercizio 8.6** Sia  $M$  una varietà connessa e  $p \in M$  un punto. Costruisci un morfismo iniettivo di spazi vettoriali

$$H^1(M) \rightarrow \text{Hom}(\pi_1(M, p), \mathbb{R}).$$

Deduci che se  $M$  è semplicemente connessa allora  $b^1(M) = 0$ .

*Dimostrazione.* Dato  $\alpha \in H^1(M)$ , sia  $\omega \in \Omega^1(M)$  un rappresentante di  $\alpha$ , e  $[\gamma] \in \pi_1(M, p)$  con  $\gamma$  un rappresentante liscio di  $[\gamma]$ . Allora, l'applicazione

$$\begin{aligned} H^1(M) &\longrightarrow \text{Hom}(\pi_1(M, p), \mathbb{R}) \\ \alpha &\longmapsto \left( [\gamma] \mapsto \int_{\gamma} \omega \right) \end{aligned}$$

è ben definita, in quanto se  $\gamma \sim \tau$  allora  $\int_{\gamma} \omega = \int_{\tau} \omega$  essendo  $\omega$  una forma chiusa; e se cambiamo rappresentante di  $\alpha$  allora  $\omega$  varia di una forma esatta  $d\eta$ , su cui

$$\int_{\gamma} d\eta = \int_{\partial\gamma} \eta = 0$$

per il teorema di Stokes, in quanto stiamo integrando su una 1-varietà compatta che è necessariamente orientabile. Inoltre, è lineare in quanto l'integrale lo è.

Per quanto riguarda l'iniettività, se  $\int_{\gamma} \omega = 0$  per ogni loop  $\gamma$  basato in  $p$ , vorremmo trovare una 0-forma  $\eta$  tale che  $\omega = d\eta$  (così che  $\alpha = 0$  in coomologia).

Dopodichè, Costruiamo  $\eta$  come segue: preso  $x \in M$ , sia  $\gamma_{px}$  un cammino tale che  $\gamma_{px}(0) = p$  e  $\gamma_{px}(1) = x$  e definiamo

$$\eta(x) = \int_{\gamma_{px}} \omega.$$

Tale assegnamento è ben posto, in quanto se  $\tau_{px}$  è un'altro tale cammino, allora per ipotesi

$$\int_{\gamma_{px}} \omega - \int_{\tau_{px}} \omega = \int_{\gamma_{px} * (\tau_{px})^{-1}} \omega = 0$$

visto che  $(\tau_{px})^{-1} * \gamma_{px}$  è un loop basato in  $p$ ; inoltre  $\eta$  è liscia e definita su tutto  $M$  in quanto  $M$  è connessa.

Infine, mostriamo che  $d\eta = \omega$ : se  $q \in M$ ,  $v \in T_q M$  e  $\gamma$  è una curva con  $\gamma(0) = q$  e  $\gamma'(0) = v$ , allora

$$\begin{aligned} d\eta_q(v) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\eta(\gamma(t)) - \eta(\gamma(0))}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\int_{\gamma_{p\gamma(t)}} \omega - \int_{\gamma_{pq}} \omega}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\int_{\gamma|_{[0,t]}} \omega}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\int_0^t \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt}{t} \\ &= \omega_{\gamma(0)}(\gamma'(0)) = \omega_q(v). \end{aligned}$$

Se  $M$  è semplicemente connessa, allora  $\pi_1(M, p) = 0$  e quindi  $\text{Hom}(\pi_1(M, p), \mathbb{R}) = 0$ , da cui  $H^1(M) = 0$  per l'iniettività della mappa appena costruita.  $\square$

**Esercizio 9.4** Sia  $T = S^1 \times S^1$  il toro e  $p \in T$  un punto. Considera la 4-varietà  $M = T \times T$  e le sottovarietà  $N_1 = T \times \{p\}$  e  $N_2 = \{p\} \times T$ . Calcola i gruppi di coomologia di

$$X = M \setminus (N_1 \cup N_2).$$

*Dimostrazione.* Insiemeisticamente, abbiamo che

$$X = (T \setminus \{p\}) \times (T \setminus \{p\}).$$

Inoltre,

$$H^0(T) = H^2(T) = \mathbb{R}$$

per dualità di Poincaré, essendo il toro una 2-varietà compatta connessa ed orientabile, e per la formula di Künneth sappiamo che

$$H^1(T) = H^1(S^1) \otimes H^0(S^1) \oplus H^0(S^1) \otimes H^1(S^1) = \mathbb{R}^2.$$

Per l'esercizio 9.1, abbiamo che i gruppi di coomologia di  $T \setminus \{p\}$  sono

$$\begin{cases} H^0(T \setminus \{p\}) = \mathbb{R} \\ H^1(T \setminus \{p\}) = \mathbb{R}^2 \\ H^2(T \setminus \{p\}) = 0 \end{cases}$$

Applicando di nuovo la formula di Künneth, otteniamo

$$\begin{cases} H^0(X) = \mathbb{R} \\ H^1(X) = \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \otimes \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4 \\ H^2(X) = \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \otimes (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}) = \mathbb{R}^4 \\ H^3(X) = 0 \\ H^4(X) = 0 \end{cases}$$

□

**Esercizio 9.5** Siano  $M$  e  $N$  varietà con coomologia finito-dimensionale. Dimostra che

$$\chi(M \times N) = \chi(M) \cdot \chi(N).$$

*Dimostrazione.* Per definizione di caratteristica di Eulero, abbiamo

$$\begin{aligned} \chi(M \times N) &= \sum_{i=0}^{m+n} (-1)^i b^i(M \times N) \stackrel{\star}{=} \sum_{i=0}^{m+n} (-1)^i \sum_{j=0}^i b^j(M) b^{i-j}(N) \\ &= \sum_{i=0}^{n+m} \sum_{j=0}^i (-1)^i b^j(M) b^{i-j}(N) = \sum_{k=0}^{m+n} \sum_{i+j=k} (-1)^k b^i(M) b^j(N) \\ &= \left( \sum_{i=0}^m (-1)^i b^i(M) \right) \cdot \left( \sum_{j=0}^n (-1)^j b^j(N) \right) = \chi(M) \cdot \chi(N), \end{aligned}$$

dove l'uguaglianza  $\star$  segue dalla formula di Künneth.

□

**Esercizio 9.6** (svolto in collaborazione con Ludovico Piazza) Sia  $M$  una varietà connessa senza bordo e  $N \subset M$  un'ipersuperficie senza bordo connessa e chiusa. Mostra che  $M \setminus N$  ha una o due componenti connesse. Descrivi degli esempi in entrambi i casi. Mostra che se  $M$  è orientabile e  $N$  non è orientabile allora  $M \setminus N$  è connessa.

*Dimostrazione.* Utilizziamo Mayer-Vietoris con gli aperti  $U = M \setminus N$  e  $V = \nu N$  un intorno tubolare di  $N$ . Allora,  $U \cup V = M$  e per Mayer-Vietoris otteniamo una successione esatta

$$0 \rightarrow H^0(M) \rightarrow H^0(U) \oplus H^0(V) \rightarrow H^0(U \cap V),$$

e visto che  $V$  è omotopicamente equivalente ad  $N$  questa diventa

$$0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow H^0(M \setminus N) \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{f} H^0(\nu N \setminus N).$$

Adesso ci basta mostrare che  $U \cap V = V \setminus N$  ha al più due componenti connesse: poi, per esattezza più la formula delle dimensioni avremmo

$$b^0(M \setminus N) + 1 = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = 1 + \dim \operatorname{Im} f \leq 1 + 2 = 3 \implies b^0(M \setminus N) \leq 2.$$

D'altronde, su un intorno banalizzante  $U(p)$  di  $p \in N$  sappiamo che  $\nu N \setminus N$  ha due componenti connesse, essendo  $\nu N$  un fibrato in rette; mostriamo ora che da  $\nu U \setminus N$  riusciamo a raggiungere ogni punto di  $\nu N \setminus N$ . Infatti, se poniamo

$$W := \{p \in N \mid \exists \text{ un cammino che raggiunge } \nu_p N \setminus N \text{ da } \nu U \setminus N\},$$

allora  $W$  è aperto e chiuso in  $N$ : infatti, ogni punto  $p \in W$  ha un intorno banalizzante che mostra che  $W$  è aperto; d'altra parte, preso un punto  $q$  nella chiusura di  $W$  un suo intorno banalizzante interseca  $W$  per definizione di chiusura, e quindi testimonia la raggiungibilità di  $\nu_q N \setminus N$  a partire da  $\nu U \setminus N$ . Quindi  $W = N$ , e quindi  $\nu U \setminus N$  ha al più due componenti connesse.

Per quanto riguarda gli esempi: se prendiamo  $M = S^1 \times S^1$  ed  $N = \{p\} \times S^1$ , allora  $M \setminus N$  ha una sola componente connessa; mentre invece il complementare di una curva chiusa dentro  $\mathbb{R}^2$  ha due componenti connesse.

Ora, se  $M$  è orientabile ed  $N$  no, supponiamo per assurdo che  $M \setminus N$  sia sconnessa. Allora, per il punto precedente  $M \setminus N$  ha esattamente due componenti connesse. Fissata una delle due componenti, detta  $N^+$ , e presa una metrica Riemanniana possiamo costruire una sezione non nulla del fibrato normale  $\nu N$  (che ha rango 1) scegliendo per ogni  $p \in N$  il vettore di norma unitaria di  $\nu N$  che si trova in  $N^+$ , il che mostra che  $\nu N$  è banale e per la Proposizione 5.6.7 delle dispense  $N$  è orientabile, assurdo.  $\square$