Istituzioni di Geometria 2023/2024

Francesco Minnocci

3 giugno 2024

Terza Consegna

Esercizio 7.1 Considera il toro $T = S^1 \times S^1$ con coordinate (θ_1, θ_2) definite a meno di $+2k\pi$ e la 1-forma $\omega = d\theta_1$. Considera la 1-sottovarietà $\gamma_i = \{\theta_i = 0\}$ per $i = 1, 2$, orientata come S^1. Mostra che

$$\int_{\gamma_1} \omega = 0, \quad \int_{\gamma_2} \omega = 2\pi.$$

Dimostrazione. Ricordando che nel calcolare l'integrale di una forma possiamo permetterci di rimuovere un insieme di misura nulla dal dominio di integrazione, ci restringiamo ad integrare lungo le 1-sottovarietà $\gamma_i \setminus \{(0,0)\}$, per cui

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1} \omega &= \int_{\gamma_1 \setminus \{(0,0)\}} d\theta_1 = \int_{\{0\}\times(0,2\pi)} d\theta_1 = 0, \\
\int_{\gamma_2} \omega &= \int_{\gamma_2 \setminus \{(0,0)\}} d\theta_1 = \int_{(0,2\pi)\times\{0\}} d\theta_1 = 2\pi.
\end{aligned}$$

□

Esercizio 7.3 Sia $f : U \to V$ una mappa liscia fra aperti $U \subset \mathbb{R}^m$ e $V \subset \mathbb{R}^n$. Scriviamo $f = (f_1, \dots, f_n)$. Per non confonderci usiamo variabili diverse $(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ e $(y^1, \dots, y^m) \in \mathbb{R}^m$. Mostra che

$$f^*(dx^i) = \frac{\partial f_i}{\partial y^j} dy^j = df_i.$$

Dimostrazione. Per ogni $p \in \mathbb{R}^m$ e $v \in T_p\mathbb{R}^m$ si ha

$$f^*(dx^i)_p(v) = dx^i_{f(p)}(df_p(v)) = (df_p(v))_i = \frac{\partial f_i}{\partial y^j}(p) \cdot dy^j(v) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial y^j} dy^j\right)_p (v) = (df_i)_p(v).$$

□

Esercizio 7.4 Sia $\varphi : M \to N$ una mappa liscia fra varietà e $\omega \in \Omega^k(N)$. Otteniamo

$$d(\varphi^*\omega) = \varphi^*(d\omega).$$

Dimostrazione. Mostriamo preliminarmente che $d(\varphi^* f) = \varphi^*(df)$ per $f \in C^\infty(N)$: infatti, per ogni $p \in M$ e $v \in T_pM$ si ha

$$d(\varphi^* f)(v) = v(\varphi^* f) = \varphi_*(v)(f) = df(\varphi_*(v)) = \varphi^*(df)(v),$$

dove φ_* è la mappa indotta da φ sui tangenti. Osserviamo inoltre che dalla formula di Leibniz segue che

$$d(f \cdot \omega) = df \wedge \omega + f \cdot d\omega$$

per ogni $f \in C^\infty(N)$ e $\omega \in \Omega^k(N)$. Ora, scriviamo ω in carte rispetto ad una base di $\Omega^k(N)$

$$\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} f_{i_1 \ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k},$$

e per linearità supponiamo che $\omega = f dx^I$ con $dx^I := dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$. Allora, notando che

$$\varphi^*(\omega) = \varphi^*(f) \cdot \varphi^*(dx^I),$$

otteniamo

$$\begin{aligned} d(\varphi^* \omega) &= d(\varphi^*(f) \cdot \varphi^*(dx^I)) = d(\varphi^* f) \wedge \varphi^*(dx^I) + \varphi^* f \cdot \cancel{d(\varphi^*(dx^I))} \\ &= \varphi^*(df) \wedge \varphi^*(dx^I) = \varphi^*(df \wedge dx^I) = \varphi^*(d\omega), \end{aligned}$$

dove abbiamo usato il fatto che $\varphi^*(\omega \wedge \eta) = \varphi^*(\omega) \wedge \varphi^*(\eta)$. □

Esercizio 8.1 Mostra che per qualsiasi successione esatta di spazi vettoriali finito dimensionali

$$0 \to V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{k-1}} V_k \to 0$$

vale la relazione

$$\sum_{i=1}^{k} (-1)^i \dim V_i = 0.$$

Deduci il fatto seguente. Sia $M = U \cup V$ varietà con U, V aperti. Supponiamo che i numeri di Betti di $U \cap V, U, V, M$ siano tutti finiti. Allora

$$\chi(M) = \chi(U) + \chi(V) - \chi(U \cap V).$$

Dimostrazione. Dalla formula delle dimensioni segue che

$$\dim V_i = \dim \ker f_i + \dim \operatorname{Im} f_i$$

per $1 \leq i < k$. D'altro canto, poichè la successione è esatta abbiamo

$$\operatorname{Im} f_i = \ker f_{i+1},$$

sempre per $1 \leq i < k$ (ponendo f_k uguale alla mappa nulla). Dunque,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k} (-1)^i \dim V_i &= \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i (\dim \ker f_i + \dim \ker f_{i+1}) + (-1)^k \dim V_k \\ &= -\dim \ker f_1 + (-1)^{k-1} \dim \ker f_k + (-1)^k \dim V_k \\ &= 0 \end{aligned}$$

visto che i termini in mezzo si cancellano due a due, e che per esattezza valgono $\ker f_1 = 0$ e $\ker f_k = V_k$.

Per quanto riguarda la seconda parte, osserviamo che per Mayer-Vietoris abbiamo una successione esatta lunga in coomologia

$$\cdots \to H^i(M) \to H^i(U) \oplus H^i(V) \to H^i(U \cap V) \to H^{i+1}(M) \to \cdots$$

ed visto che i numeri di Betti sono finiti applichiamo la formula appena dimostrata (ponendo $n = \dim M$):

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i+1} \left(b_i(M) - b_i(U) - b_i(V) + b_i(U \cap V) \right) \\
&= \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i+1} b_i(M) - \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i+1} b_i(U) - \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i+1} b_i(V) + \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i+1} b_i(U \cap V) \\
&= -\chi(M) + \chi(U) + \chi(V) - \chi(U \cap V),
\end{aligned}$$

da cui la tesi. □

Esercizio 8.4 Sia $K \subset S^3$ un nodo. Mostra che $H^1(S^3 \setminus K) \cong \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Consideriamo $U = S^3 \setminus K$ e V un intorno tubolare di K. Allora, $U \cup V = S^3$ e $U \cap V$ è omotopicamente equivalente ad un toro: infatti, l'intorno tubulare è il fibrato normale di un embedding di S^1, ma deve essere orientabile in quanto aperto di una 3-varietà orientabile ed è quindi banale (in altre parole, è il toro pieno).

Per Mayer-Vietoris, abbiamo una successione esatta lunga in coomologia

$$H^1(S^3) = 0 \to H^1(U) \oplus H^1(V) \to H^1(U \cap V) \to H^2(S^3) = 0$$

e calcolando ogni termine otteniamo (visto che V è omotopicamente equivalente ad S^1)

$$0 \to H^1(U) \oplus \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \to 0$$

da cui per l'esercizio precedente

$$0 = b^1(U) + 1 - 2 + 1 - 2 + 1,$$

e quindi $b^1(U) = 1$. □

Esercizio 8.6 Sia M una varietà connessa e $p \in M$ un punto. Costruisci un morfismo iniettivo di spazi vettoriali

$$H^1(M) \to \mathrm{Hom}(\pi_1(M, p), \mathbb{R}).$$

Deduci che se M è semplicemente connessa allora $b^1(M) = 0$.

Dimostrazione. Dato $\alpha \in H^1(M)$, sia $\omega \in \Omega^1(M)$ un rappresentante di α, e $[\gamma] \in \pi_1(M, p)$ con γ un rappresentante liscio di $[\gamma]$. Allora, l'applicazione

$$\begin{aligned}
H^1(M) &\longrightarrow \mathrm{Hom}(\pi_1(M, p), \mathbb{R}) \\
\alpha &\longmapsto \left([\gamma] \mapsto \int_\gamma \omega \right)
\end{aligned}$$

è ben definita, in quanto se $\gamma \sim \tau$ allora $\int_\gamma \omega = \int_\tau \omega$ essendo ω una forma chiusa; e se cambiamo rappresentante di α allora ω varia di una forma esatta $d\eta$, su cui

$$\int_\gamma d\eta = \int_{\partial\gamma} \eta = 0$$

per il teorema di Stokes, in quanto stiamo integrando su una 1-varietà compatta che è necessariamente orientabile. Inoltre, è lineare in quanto l'integrale lo è.

Per quanto riguarda l'iniettività, se $\int_\gamma \omega = 0$ per ogni loop γ basato in p, vorremmo trovare una 0-forma η tale che $\omega = d\eta$ (così che $\alpha = 0$ in coomologia).

Dopodichè, Costruiamo η come segue: preso $x \in M$, sia γ_{px} un cammino tale che $\gamma_{px}(0) = p$ e $\gamma_{px}(1) = x$ e definiamo

$$\eta(x) = \int_{\gamma_{px}} \omega.$$

Tale assegnamento è ben posto, in quanto se τ_{px} è un'altro tale cammino, allora per ipotesi

$$\int_{\gamma_{px}} \omega - \int_{\tau_{px}} \omega = \int_{\gamma_{px} * (\tau_{px})^{-1}} \omega = 0$$

visto che $(\tau_{px})^{-1} * \gamma_{px}$ è un loop basato in p; inoltre η è liscia e definita su tutto M in quanto M è connessa.

Infine, mostriamo che $d\eta = \omega$: se $q \in M$, $v \in T_qM$ e γ è una curva con $\gamma(0) = q$ e $\gamma'(0) = v$, allora

$$\begin{aligned}
d\eta_q(v) &= \lim_{t \to 0} \frac{\eta(\gamma(t)) - \eta(\gamma(0))}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{\int_{\gamma_{p\gamma(t)}} \omega - \int_{\gamma_{pq}} \omega}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{\int_{\gamma|_{[0,t]}} \omega}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{\int_0^t \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t))dt}{t} \\
&= \omega_{\gamma(0)}(\gamma'(0)) = \omega_q(v).
\end{aligned}$$

Se M è semplicemente connessa, allora $\pi_1(M, p) = 0$ e quindi $\mathrm{Hom}(\pi_1(M, p), \mathbb{R}) = 0$, da cui $H^1(M) = 0$ per l'iniettività della mappa appena costruita. □

Esercizio 9.4 Sia $T = S^1 \times S^1$ il toro e $p \in T$ un punto. Considera la 4-varietà $M = T \times T$ e le sottovarietà $N_1 = T \times \{p\}$ e $N_2 = \{p\} \times T$. Calcola i gruppi di coomologia di

$$X = M \setminus (N_1 \cup N_2).$$

Dimostrazione. Insiemisticamente, abbiamo che

$$X = (T \setminus \{p\}) \times (T \setminus \{p\}).$$

Inoltre,

$$H^0(T) = H^2(T) = \mathbb{R}$$

per dualità di Poincaré, essendo il toro una 2-varietà compatta connessa ed orientabile, e per la formula di Künneth sappiamo che

$$H^1(T) = H^1(S^1) \otimes H^0(S^1) \oplus H^0(S^1) \otimes H^1(S^1) = \mathbb{R}^2.$$

Per l'esercizio 9.1, abbiamo che i gruppi di coomologia di $T \setminus \{p\}$ sono

$$\begin{cases} H^0(T \setminus \{p\}) = \mathbb{R} \\ H^1(T \setminus \{p\}) = \mathbb{R}^2 \\ H^2(T \setminus \{p\}) = 0 \end{cases}$$

Applicando di nuovo la formula di Künneth, otteniamo

$$\begin{cases} H^0(X) = \mathbb{R} \\ H^1(X) = \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \otimes \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4 \\ H^2(X) = \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \otimes (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}) = \mathbb{R}^4 \\ H^3(X) = 0 \\ H^4(X) = 0 \end{cases}$$

□

Esercizio 9.5 Siano M e N varietà con coomologia finito-dimensionale. Dimostra che

$$\chi(M \times N) = \chi(M) \cdot \chi(N).$$

Dimostrazione. Per definizione di caratteristica di Eulero, abbiamo

$$\begin{aligned} \chi(M \times N) &= \sum_{i=0}^{m+n} (-1)^i b^i(M \times N) \overset{\star}{=} \sum_{i=0}^{m+n} (-1)^i \sum_{j=0}^{i} b^j(M) b^{i-j}(N) \\ &= \sum_{i=0}^{n+m} \sum_{j=0}^{i} (-1)^i b^j(M) b^{i-j}(N) = \sum_{k=0}^{m+n} \sum_{i+j=k} (-1)^k b^i(M) b^j(N) \\ &= \left(\sum_{i=0}^{m} (-1)^i b^i(M) \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{n} (-1)^j b^j(N) \right) = \chi(M) \cdot \chi(N), \end{aligned}$$

dove l'uguaglianza $\star$ segue dalla formula di Künneth. □

Esercizio 9.6 (svolto in collaborazione con Ludovico Piazza) Sia M una varietà connessa senza bordo e $N \subset M$ un'ipersuperficie senza bordo connessa e chiusa. Mostra che $M \setminus N$ ha una o due componenti connesse. Descrivi degli esempi in entrambi i casi. Mostra che se M è orientabile e N non è orientabile allora $M \setminus N$ è connessa.

Dimostrazione. Utilizziamo Mayer-Vietoris con gli aperti $U = M \setminus N$ e $V = \nu N$ un intorno tubolare di N. Allora, $U \cup V = M$ e per Mayer-Vietoris otteniamo una successione esatta

$$0 \to H^0(M) \to H^0(U) \oplus H^0(V) \to H^0(U \cap V),$$

e visto che V è omotopicamente equivalente ad N questa diventa

$$0 \to \mathbb{R} \to H^0(M \setminus N) \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{f} H^0(\nu N \setminus N).$$

Adesso ci basta mostrare che $U \cap V = V \setminus N$ ha al più due componenti connesse: poi, per esattezza più la formula delle dimensioni avremmo

$$b^0(M \setminus N) + 1 = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = 1 + \dim \operatorname{Im} f \leq 1 + 2 = 3 \implies b^0(M \setminus N) \leq 2.$$

D'altronde, su un intorno banalizzante $U(p)$ di $p \in N$ sappiamo che $\nu N \setminus N$ ha due componenti connesse, essendo νN un fibrato in rette; mostriamo ora che da $\nu U \setminus N$ riusciamo a raggungere ogni punto di $\nu N \setminus N$. Infatti, se poniamo

$$W := \{p \in N \mid \exists \text{ un cammino che raggiunge } \nu_p N \setminus N \text{ da } \nu U \setminus N\},$$

allora W è aperto e chiuso in N: infatti, ogni punto $p \in W$ ha un intorno banalizzante che mostra che W è aperto; d'altra parte, preso un punto q nella chiusura di W un suo intorno banalizzante interseca W per definizione di chiusura, e quindi testimonia la raggiungibilità di $\nu_q N \setminus N$ a partire da $\nu U \setminus N$. Quindi $W = N$, e quindi $\nu U \setminus N$ ha al più due componenti connesse.

Per quanto riguarda gli esempi: se prendiamo $M = S^1 \times S^1$ ed $N = \{p\} \times S^1$, allora $M \setminus N$ ha una sola componente connessa; mentre invece il complementare di una curva chiusa dentro $\mathbb{R}^2$ ha due componenti connesse.

Ora, se M è orientabile ed N no, supponiamo per assurdo che $M \setminus N$ sia sconnessa. Allora, per il punto precedente $M \setminus N$ ha esattamente due componenti connesse. Fissata una delle due componenti, detta N^+, e presa una metrica Riemanniana possiamo costruire una sezione non nulla del fibrato normale νN (che ha rango 1) scegliendo per ogni $p \in N$ il vettore di norma unitaria di νN che si trova in N^+, il che mostra che νN è banale e per la Proposizione 5.6.7 delle dispense N è orientabile, assurdo. $\square$