`Laboratorio Didattico di Matematica Computazionale`

`a.a. 2020-2021`

ESERCITAZIONE 4

Grafici in 3D

Per questa esercitazione verranno corretti gli esercizi 6 e 8. Create un file `.tar` o `.zip` contenente gli script che risolvono gli esercizi e le eventuali function ausiliarie, e caricatelo sulla pagina di e-learning del corso.

1. Superfici e curve di livello

Impariamo innanzi tutto l'uso del comando `meshgrid`. Se `x` e `y` sono due vettori (riga o colonna) di lunghezza n, il comando

```
[X,Y]=meshgrid(x,y)
```

crea una matrice `X` di dimensioni $n \times n$ le cui righe sono tutte uguali a `x` (eventualmente trasposto), e una matrice `Y`, anch'essa $n \times n$, le cui colonne sono tutte uguali a `y` (eventualmente trasposto).

Provate a dare i comandi seguenti e osservate come sono fatte `X` e `Y`:

```
x=1:5;
y=6:11;
[X,Y]=meshgrid(x,y)
```

Ora, supponiamo di avere una funzione reale $f(x, y)$ definita su un rettangolo $[a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$. Vogliamo scegliere una griglia sul rettangolo e valutare f sui punti della griglia, per dare poi una rappresentazione grafica della superficie di equazione $z = f(x, y)$. Definiamo il vettore `x` come una discretizzazione dell'intervallo $[a, b]$ e il vettore `y` come una discretizzazione dell'intervallo $[c, d]$, poi diamo l'istruzione `[X,Y]=meshgrid(x,y)`. Il generico punto di indici i, j sulla griglia definita dalle due discretizzazioni avrà quindi coordinate `X(i,j), Y(i,j)`. Ora possiamo valutare f sulla griglia senza usare cicli.

Per esempio, consideriamo la funzione $f(x, y) = x^2+y^2$ definita sul rettangolo $[-0.5, 0.5]\times[-0.5, 0.5]$. Per valutarla nei punti di una griglia definita sul rettangolo possiamo scrivere

```
x=-0.5:0.02:0.5;
y=x;
[X,Y]=meshgrid(x,y)
A=X.^2+Y.^2;
```

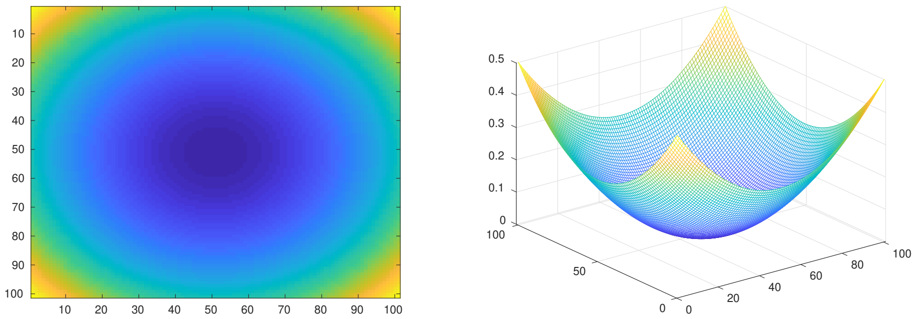
La matrice `A` contiene i valori cercati di $f(x, y)$. Possiamo visualizzarli in due dimensioni con il comando

```
imagesc(A)
```

oppure in $\mathbb{R}^3$ con il comando

```
mesh(A)
```

Il risultato è riportato qui sotto.



Nel caso 3D potete anche ruotare la figura per vedere meglio com'è fatta la superficie.

Provate a usare il comando `mesh(x,y,A)` oppure `mesh(X,Y,A)` invece di `mesh(A)`. Che cosa cambia?

Che cosa succede se si usa `surf(A)` al posto di `mesh(A)`?

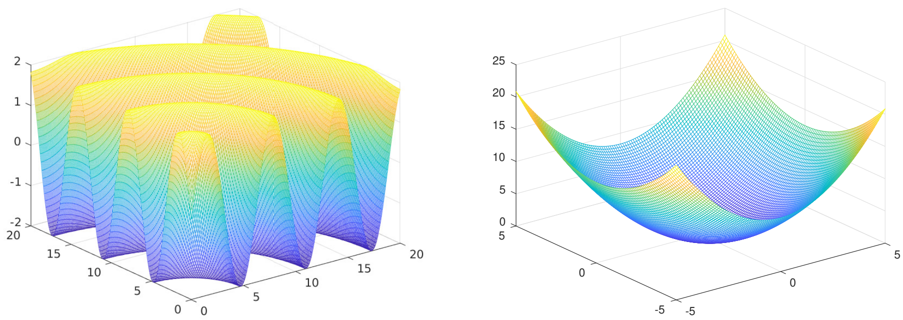
Esercizio 1 *Usando le funzioni* `meshgrid` *e* `mesh`*, disegnare il grafico delle due funzioni seguenti:*

1. $f(x,y) = 2\sin((x^2+y^2)^{1/2})$ *con* $(x,y) \in [0,20] \times [0,20]$,
2. $f(x,y) = x^2/2 + y^2/3)$ *con* $(x,y) \in [-a,a] \times [-b,b]$ *e* $a,b > 0$ *scelti a piacere,*

Suggerimento: potete definire la funzione $f(x,y)$ *in modo anonimo e poi applicarla alle matrici prodotte da* `meshgrid`*. Per esempio, per la prima funzione si può scrivere*

```
f=@(x,y) 2*sin((x.^2+y.^2).^(1/2));
x=0:0.1:20;
y=x;
[X,Y]=meshgrid(x,y);
mesh(x,y,f(X,Y))
```

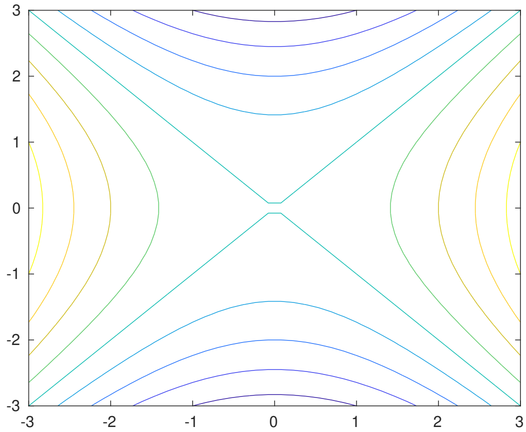
Dovreste ottenere delle figure simili a queste:



Il comando `contour` permette di disegnare le curve di livello. Per esempio, consideriamo la funzione $f(x,y) = x^2 - y^2$ definita su $[-3,3] \times [-3,3]$ e diamo i comandi

```
f=@(x,y) x.^2-y.^2;
x=linspace(-3,3,40);
y=x;
[X,Y]=meshgrid(x,y);
contour(X,Y,f(X,Y))
```

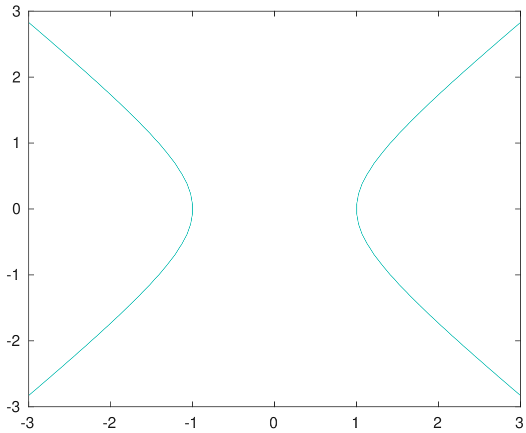
Otteniamo la figura seguente, nella quale i livelli sono assegnati automaticamente:



È anche possibile scegliere i livelli delle curve da disegnare. In particolare, possiamo usare `contour` per disegnare curve di cui è data l'equazione implicita. I comandi

```
c=1; % livello della curva
v=[c;c];
contour(X,Y,f(X,Y),v)
```

permettono di disegnare la curva di equazione $x^2 - y^2 = 1$, cioè la curva di livello 1 della $f(x,y)$ definita sopra:



Esercizio 2 *Usando il comando* `contour`*, disegnare la curva di equazione* $x^2 + 2xy + y^2 - 2x = 3$ *con* $(x, y) \in [-3, 5] \times [-5, 3]$.

2. Curve parametriche

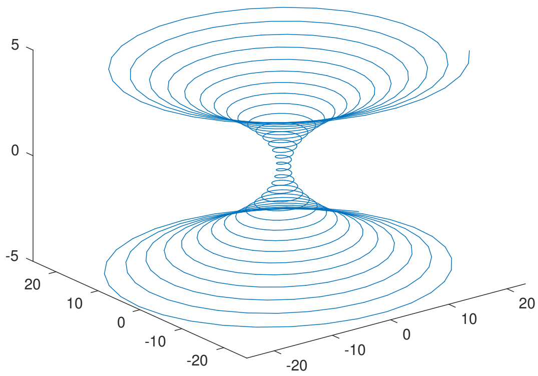
Una curva parametrica in $\mathbb{R}^3$ è definita da tre equazioni che descrivono la dipendenza di ciascuna coordinata x, y, z dal parametro t. Consideriamo la curva di equazioni

$$\begin{aligned} x(t) &= (1 + t^2)\cos(20t), \\ y(t) &= (1 + t^2)\sin(20t), \\ z(t) &= t, \end{aligned}$$

con $t \in [-5, 5]$. Per disegnarla possiamo usare il comando `plot3` come segue:

```
t=-5:0.01:5;
x=(1+t.^2).*cos(20*t);
y=(1+t.^2).*sin(20*t);
z=t;
plot3(x,y,z)
```

e otteniamo il grafico



Esercizio 3 *Disegnare un'elica con raggio e passo costante.*

Esercizio 4 *Disegnare le curve definite dalle equazioni parametriche seguenti:*

(a)

$$\begin{aligned} x(t) &= (2 + \cos(1.5t))\cos(t), \\ y(t) &= (2 + \cos(1.5t))\sin(t), \\ z(t) &= 2\sin(1.5t), \qquad t \in [0, 4\pi] \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} x(t) &= (4 + \sin(20t))\cos(t), \\ y(t) &= (4 + \sin(20t))\sin(t), \\ z(t) &= \cos(20t), \qquad t \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} x(t) &= t, \\ y(t) &= t^2, \\ z(t) &= t^3, \qquad t \in [-2, 2]. \end{aligned}$$

3. Superfici parametriche

Una superficie parametrica in $\mathbb{R}^3$ è definita da tre equazioni che descrivono la dipendenza di ciascuna coordinata x, y, z da due parametri r, t.

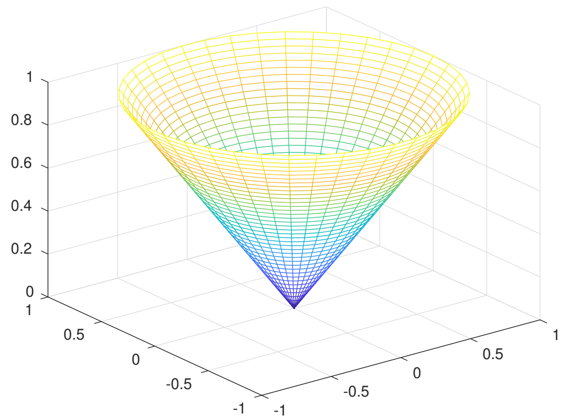
Vogliamo disegnare la superficie in $\mathbb{R}^3$ definita dalle equazioni parametriche

$$\begin{aligned} x(r,t) &= r\cos(t), \\ y(r,t) &= r\sin(t), \\ z(r,t) &= r, \end{aligned}$$

con $r \in [0,1]$ e $t \in [0,2\pi]$. Per farlo usiamo i comandi:

```
r=linspace(0,1,40);
t=linspace(0,2*pi,40);
[R,T]=meshgrid(r,t);
x=R.*cos(T);
y=R.*sin(T);
z=R;
mesh(x,y,z)
```

Come potete osservare, otteniamo un cono (perché?).



Provate a usare il comando `surf` invece di `mesh`, seguito da `shading interp` e `axis off`.

Esercizio 5 *Disegnare una sfera. Sarà utile dare il comando* `axis equal` *per avere le stesse proporzioni sui tre assi coordinati.*

Esercizio 6 *Disegnare la superficie definita dalle equazioni parametriche:*

$$\begin{aligned} x(u,v) &= 2(1-e^{\frac{u}{6\pi}})\cos(u)\cos^2(v/2), \\ y(u,v) &= 2(-1+e^{\frac{u}{6\pi}})\sin(u)\cos^2(v/2), \\ z(u,v) &= 1-e^{\frac{u}{3\pi}}-\sin(v)+e^{\frac{u}{6\pi}}\sin(v), \end{aligned}$$

dove $u \in [0,6\pi]$, $v \in [0,2\pi]$. *Che cosa ottenete?*

Esercizio 7 *Ecco una lista di superfici famose. Cercate sul web le loro equazioni parametriche e provate a disegnarle.*

- *bottiglia di Klein,*
- *superficie di Enneper,*

- *ombrello di Whitney,*
- *superficie di Steiner.*

Disegnate anche degli esempi di superfici di Lissajous*, che hanno equazioni*

$$x(u,v) = sin(u),$$
$$y(u,v) = sin(v),$$
$$z(u,v) = sin(d - au - bv)/c,$$

dove $u \in [-\pi, \pi]$*,* $v \in [-\pi, \pi]$ *e* a*,* b*,* c*,* d *sono parametri reali da scegliere a piacere (provate all'inizio con* $a = b = c = 1$*,* $d = 0$ *e poi sperimentate con altri valori).*

4. Superfici definite da equazioni implicite

Come abbiamo visto nella sezione 1, il comando `contour` permette di tracciare curve di cui si conosce l'equazione implicita. Per realizzare invece un grafico 3D della superficie definita da un'equazione implicita si può usare il comando `isosurface`.

Facciamo un esempio: supponiamo di voler rappresentare la superficie definita dall'equazione

$$(y - z)^2 + (z - x)^2 + (x - y)^2 = 3.$$

Dovremo definire una griglia 3D sulla quale valutare la funzione $(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2$. Per farlo, usiamo di nuovo il comando `meshgrid`. È anche possibile usare `ndgrid`, che generalizza `meshgrid` ad un numero arbitrario di dimensioni (mentre `meshgrid` si usa solo in due o tre dimensioni). In questo esempio consideriamo x, y e z comprese tra -3 e 3.

```
r=linspace(-3,3,100);
[X,Y,Z]=meshgrid(r);
```

Ora calcoliamo la funzione che ci interessa sui punti della griglia e disegniamo la superficie.

```
F=(Y-Z).^2 + (Z-X).^2 + (X-Y).^2;
isosurface(X,Y,Z,F,3)
```

Potete verificare nell'help di MATLAB la sintassi del comando `isosurface` e le opzioni previste. In particolare, è possibile specificare i colori da usare per mezzo di un array 3D delle stesse dimensioni di `F`. Per esempio, provate a disegnare nuovamente la superficie nel modo seguente:

```
isosurface(X,Y,Z,F,3,rand(size(F)))
```

oppure così:

```
colormap spring
isosurface(X,Y,Z,F,3,X)
```

Il comando `help graph3d` fornisce, tra le altre cose, una lista delle colormap predefinite.

Esercizio 8 *Scrivere uno script in MATLAB che visualizzi le due superfici seguenti:*

- *la superficie chiusa di genere 2 definita dall'equazione implicita*

  $$(x(x-1)^2(x-2) + y^2)^2 + z^2 = 0.03,$$

  con $x \in [-0.1, 2.1]$*,* $y \in [-0.75, 0.75]$ *e* $z \in [-0.2, 0.2]$*;*

- *la* superficie di Kummer, *definita dall'equazione implicita*

$$f_\mu^2 = \lambda pqrs, \qquad \textit{dove} \quad \begin{cases} f_\mu = x^2 + y^2 + z^2 - \mu \\ p = z - 1 + \sqrt{2}x \\ q = z - 1 - \sqrt{2}x \\ r = z + 1 + \sqrt{2}y \\ s = z + 1 - \sqrt{2}y \\ \lambda = \frac{3\mu - 1}{3 - \mu} \end{cases}$$

  e μ è un parametro. Per questo esercizio sceglieremo $\mu = 2$: dovreste constatare la presenza di 16 punti singolari. Naturalmente potete provare anche con altri valori, per esempio $\mu = 1$, e vedere come cambia la superficie. Sta a voi scegliere il range per x, y, z in modo da vedere bene il comportamento della superficie.

Non dimenticate di usare l'istruzione `axis equal`.

Facoltativo: provate a disegnare anche la superficie di Barth, *definita dall'equazione implicita*

$$f^2 - kpqr, \qquad \textit{dove} \quad \begin{cases} f = x^2 + y^2 + z^2 - 1 \\ p = (\varphi x - y)(\varphi x + y) \\ q = (\varphi y - z)(\varphi y + z) \\ r = (\varphi z - x)(\varphi z + x) \end{cases}$$

e $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ è la sezione aurea, mentre la costante k vale $4\sqrt{5} - 8$.

5. Altri esercizi

Esercizio 9 *Disegnare il grafico della funzione*

$$f(x, y) = \left| \frac{1}{1 - (x + iy)^{10}} \right|,$$

dove i è l'unità immaginaria e $(x, y) \in [-2, 2] \times [-2, 2]$. Si presume naturalmente che le singolarità della funzione non si trovino sulla griglia di discretizzazione del dominio.

Esercizio 10 *Disegnare la curva nota come* folium di Cartesio*, che ha equazione*

$$x^3 + y^3 = 3xy,$$

con $(x, y) \in [-3, 3] \times [-3, 3]$. Attenzione: la curva ha un punto di autointersezione. Se nel vostro disegno la curva non si autointerseca ma ha due componenti connesse, raffinate la discretizzazione.

Esercizio 11 *Disegnare la curva in $\mathbb{R}^3$ di equazioni parametriche*

$$\begin{aligned} x(t) &= \sin(t), \\ y(t) &= \sin(2t), \\ z(t) &= \sin(3t), \end{aligned}$$

con $t \in [0, 2\pi]$.

Esercizio 12 *Disegnare la striscia di Möbius, che è descritta dalle equazioni parametriche seguenti:*

$$\begin{aligned} x(u,v) &= \cos(u) + v\cos(u/2)\cos(u), \\ y(u,v) &= \sin(u) + v\cos(u/2)\sin(u), \\ z(u,v) &= v\sin(u/2), \end{aligned}$$

con $(u,v) \in [0,2\pi] \times [-0.4, 0.4]$.