

GMRES e PageRank

Progetto di Calcolo Scientifico, Anno Accademico 2021/22

Si consideri la matrice di adiacenza $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ di un grafo non diretto \mathcal{G} , con $A_{ij} = 1$ se e solo se esiste un arco che collega il nodo di indice i a j . Sotto le opportune ipotesi, si è definito come *vettore PageRank* l'autovettore sinistro w^T relativo all'autovalore 1 della matrice

$$\gamma D^{-1}A + (1 - \gamma)ev^T, \quad v = \frac{e}{n}, \quad e = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

e dove $D := \text{diag}(Ae)$. Grazie al teorma di Perron-Frobenius, sappiamo che l'autovettore w si può prendere a componenti positive, ed interpretare come un vettore di ranking delle pagine web.

Si osservi che imponendo la normalizzazione $w^T e = 1$ si ottiene il sistema lineare equivalente

$$(I - \gamma AD^{-1})w = \frac{1 - \gamma}{n}e.$$

che è interibile per $\rho(\gamma AD^{-1}) = \gamma$.

- Si implementi il metodo GMRES tramite l'iterazione di Arnoldi e risolvendo il problema ai minimi quadrati con `y = norm(b) * (H \ e1)` (non è necessario realizzare un'implementazione che sfrutti le rotazioni di Givens, in MATLAB `x = A \ b` risolve il problema ai minimi quadrati se A è rettangolare — anche se meno efficiente la strategia è sufficiente per questo progetto).
- Si applichi il metodo GMRES al problema `coAuthorsDBLP` per diversi valori di $\gamma = 0.5, 0.7, 0.85, 0.99$. La matrice di adiacenza si può scaricare da <https://sparse.tamu.edu/DIMACS10/coAuthorsDBLP>. Si fermi l'iterazione quando il residuo del sistema lineare $\|Ax - b\|$ scende sotto 10^{-8} . Una volta scaricato il file `.mat` la matrice si può caricare con:

```
>> load coAuthorsDBLP
>> A = Problem.A
```

Nota: questa matrice è di grandi dimensioni, è necessario implementare Arnoldi sfruttando il prodotto matrice-vettore sparso!

- Cosa si può dire sulla dipendenza del numero di iterazioni necessarie nel punto precedente dal parametro γ ? Giustificare dal punto di vista teorico il comportamento riscontrato.