Dualità Locale di Tate

Francesco Minnocci

14 giugno 2024

Prologo

- *Class field theory*: descrivere le estensioni abeliane di un campo K.

Prologo

- *Class field theory*: descrivere le estensioni abeliane di un campo K.
- $K/\mathbb{Q} \rightsquigarrow K/\mathbb{Q}_p$.

Prologo

- *Class field theory*: descrivere le estensioni abeliane di un campo K.
- $K/\mathbb{Q} \rightsquigarrow K/\mathbb{Q}_p$.
- Data un'estensione di Galois E/K, il suo gruppo di Galois è profinito, ovvero limite inverso di gruppi finiti.

Osservazione

Sia $\overline{K}$ una chiusura separabile di K, e K^{ab} la massima estensione abeliana di K.

Prologo

- *Class field theory*: descrivere le estensioni abeliane di un campo K.
- $K/\mathbb{Q} \rightsquigarrow K/\mathbb{Q}_p$.
- Data un'estensione di Galois E/K, il suo gruppo di Galois è profinito, ovvero limite inverso di gruppi finiti.

Osservazione

Sia $\overline{K}$ una chiusura separabile di K, e K^{ab} la massima estensione abeliana di K.

$$\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$$

Prologo

- *Class field theory*: descrivere le estensioni abeliane di un campo K.
- $K/\mathbb{Q} \rightsquigarrow K/\mathbb{Q}_p$.
- Data un'estensione di Galois E/K, il suo gruppo di Galois è profinito, ovvero limite inverso di gruppi finiti.

Osservazione

Sia $\overline{K}$ una chiusura separabile di K, e K^{ab} la massima estensione abeliana di K.

$$\mathrm{Gal}(K^{ab}/K) = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)^{ab}$$

Prologo

- *Class field theory*: descrivere le estensioni abeliane di un campo K.
- $K/\mathbb{Q} \rightsquigarrow K/\mathbb{Q}_p$.
- Data un'estensione di Galois E/K, il suo gruppo di Galois è profinito, ovvero limite inverso di gruppi finiti.

Osservazione

Sia $\overline{K}$ una chiusura separabile di K, e K^{ab} la massima estensione abeliana di K.

$$\operatorname{Gal}(K^{\text{ab}}/K) = \operatorname{Gal}(\overline{K}/K)^{\text{ab}} = \varprojlim_{L/K \text{ abeliana finita}} \operatorname{Gal}(L/K)$$

Prologo

- *Class field theory*: descrivere le estensioni abeliane di un campo K.
- $K/\mathbb{Q} \rightsquigarrow K/\mathbb{Q}_p$.
- Data un'estensione di Galois E/K, il suo gruppo di Galois è profinito, ovvero limite inverso di gruppi finiti.

Osservazione

Sia $\overline{K}$ una chiusura separabile di K, e K^{ab} la massima estensione abeliana di K.

$$\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K) = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)^{\mathrm{ab}} = \varprojlim_{L/K \text{ abeliana finita}} \mathrm{Gal}(L/K)$$

Definizione

Dato G gruppo discreto, $\widehat{G} := \varprojlim_{N \lhd G} G/N$ è il completamento profinito di G.

Local Class Field Theory

Definizione (Campo locale)

Un campo locale è un estensione finita di $\mathbb{Q}_p$ oppure di $\mathbb{F}_q((t))$.

Local Class Field Theory

Definizione (Campo locale)

Un campo locale è un estensione finita di $\mathbb{Q}_p$ oppure di $\mathbb{F}_q((t))$.

Local Class Field Theory

Definizione (Campo locale)

Un campo locale è un estensione finita di $\mathbb{Q}_p$ oppure di $\mathbb{F}_q((t))$.

Teorema

Sia K un campo p-adico con gruppo di Galois assoluto $\Gamma = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$. Allora,

$$\Gamma^{ab} \simeq \widehat{K^\times}$$

Local Class Field Theory

Definizione (Campo locale)

Un campo locale è un estensione finita di $\mathbb{Q}_p$ oppure di $\mathbb{F}_q((t))$.

Teorema

Sia K un campo p-adico con gruppo di Galois assoluto $\Gamma = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$. Allora,

$$\Gamma^{ab} \simeq \widehat{K^\times}$$

Otteniamo una corrispondenza biunivoca

$$\left\{\begin{matrix}\text{estensioni abeliane} \\ \text{finite di } K\end{matrix}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{matrix}\text{sottogruppi} \\ \text{aperti di } \widehat{K^\times}\end{matrix}\right\}$$

Coomologia di Gruppi

- Vogliamo studiare l'azione $\Gamma \curvearrowright \overline{K}^{\times}$

Coomologia di Gruppi

- Vogliamo studiare l'azione $\Gamma \curvearrowright \overline{K}^{\times}$
- Dato G gruppo profinito, consideriamo la categoria degli G-moduli discreti, ovvero moduli su $\mathbb{Z}[G]$ con $A = \bigcup_U A^U$

Coomologia di Gruppi

- Vogliamo studiare l'azione $\Gamma \curvearrowright \overline{K}^{\times}$
- Dato G gruppo profinito, consideriamo la categoria degli G-moduli discreti, ovvero moduli su $\mathbb{Z}[G]$ con $A = \bigcup_U A^U$
- Il funtore

$$\begin{aligned} F : \mathrm{Mod_G} &\longrightarrow \mathrm{Ab} \\ A &\longmapsto A^G \qquad = \{a \in A \mid g \cdot a = a \, \forall g \in G\} \end{aligned}$$

Coomologia di Gruppi

- Vogliamo studiare l'azione $\Gamma \curvearrowright \overline{K}^{\times}$
- Dato G gruppo profinito, consideriamo la categoria degli G-moduli discreti, ovvero moduli su $\mathbb{Z}[G]$ con $A = \bigcup_U A^U$
- Il funtore

$$\begin{aligned} F : \mathrm{Mod_G} &\longrightarrow \mathrm{Ab} \\ A &\longmapsto A^G \qquad = \{a \in A \mid g \cdot a = a \,\forall g \in G\} \\ &\qquad\qquad = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A) \end{aligned}$$

è esatto a sinistra.

Coomologia di Gruppi

Definizione

I gruppi di coomologia di G con coefficienti in A sono i funtori derivati

$$H^i(G, A) := R^i F(A)$$

Coomologia di Gruppi

Definizione

I gruppi di coomologia di G con coefficienti in A sono i funtori derivati

$$H^i(G, A) := R^i F(A)$$

Fatto

- $H^0(G, A) = A^G$,

Coomologia di Gruppi

Definizione

I gruppi di coomologia di G con coefficienti in A sono i funtori derivati

$$H^i(G, A) := R^i F(A)$$

Fatto

- $H^0(G, A) = A^G$,
- $H^1(G, A) = \mathrm{Hom}_c(G, A)$ se A è banale.

Coomologia di Gruppi

Definizione

I gruppi di coomologia di G con coefficienti in A sono i funtori derivati

$$H^i(G, A) := R^i F(A)$$

Fatto

- $H^0(G, A) = A^G$,
- $H^1(G, A) = \mathrm{Hom}_c(G, A)$ se A è banale.

Teorema

Possiamo sempre ridurci al caso finito:

$$H^i(G, A) = \varinjlim_U H^i(G/U, A^U)$$

Teorema (Hilbert 90)

Sia L/K estensione finita di Galois. Allora, $H^1(\mathrm{Gal}(L/K), L^\times) = 0$.
Passando al limite:

$$H^1(\Gamma, \overline{K}^\times) = 0$$

Coomologia di Galois

Teorema (Hilbert 90)

Sia L/K estensione finita di Galois. Allora, $H^1(\mathrm{Gal}(L/K), L^\times) = 0$. Passando al limite:

$$H^1(\Gamma, \overline{K}^\times) = 0$$

Corollario

$$H^1(\Gamma, \mu_n) = K^\times / K^{\times n}$$

Coomologia di Galois

Teorema (Hilbert 90)

Sia L/K estensione finita di Galois. Allora, $H^1(\mathrm{Gal}(L/K), L^\times) = 0$.
Passando al limite:

$$H^1(\Gamma, \overline{K}^\times) = 0$$

Corollario

$$H^1(\Gamma, \mu_n) = K^\times / K^{\times n}$$

La successione esatta di Kummer

$$1 \longrightarrow \mu_n \longrightarrow \overline{K}^\times \xrightarrow{\cdot n} \overline{K}^\times \longrightarrow 1$$

induce una successione lunga

$$\cdots \to K^\times \xrightarrow{\cdot n} K^\times \to H^1(\Gamma, \mu_n) \to \cancel{H^1(\Gamma, \overline{K}^\times)} \to \ldots$$

Gruppo di Brauer

Il *gruppo di Brauer* è $\operatorname{Br}(K) := H^2(\Gamma, \overline{K}^\times)$.

Esempio

Gruppo di Brauer

Il *gruppo di Brauer* è $\mathrm{Br}(K) := H^2(\Gamma, \overline{K}^\times)$.

Esempio

- Se K è un campo finito o algebricamente chiuso, allora $\mathrm{Br}(K) = 0$.

Gruppo di Brauer

Il *gruppo di Brauer* è $\mathrm{Br}(K) := H^2(\Gamma, \overline{K}^\times)$.

Esempio

- Se K è un campo finito o algebricamente chiuso, allora $\mathrm{Br}(K) = 0$.
- Se $K = \mathbb{R}$, allora $\mathrm{Br}(K) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Gruppo di Brauer

Il *gruppo di Brauer* è $\operatorname{Br}(K) := H^2(\Gamma, \overline{K}^\times)$.

Esempio

- Se K è un campo finito o algebricamente chiuso, allora $\operatorname{Br}(K) = 0$.
- Se $K = \mathbb{R}$, allora $\operatorname{Br}(K) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Teorema (Hasse)

Se K è un campo locale, allora

$$\operatorname{Br}(K) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

Gruppo di Brauer

Il *gruppo di Brauer* è $\mathrm{Br}(K) := H^2(\Gamma, \overline{K}^{\times})$.

Esempio

- Se K è un campo finito o algebricamente chiuso, allora $\mathrm{Br}(K) = 0$.
- Se $K = \mathbb{R}$, allora $\mathrm{Br}(K) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Teorema (Hasse)

Se K è un campo locale, allora

$$\mathrm{Br}(K) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

Corollario

Se K è un campo p-adico, allora

$$H^2(\Gamma, \mu_n) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

Dualità di Pontryagin

Definizione

Sia A un gruppo topologico. Definiamo il *duale di Pontryagin* di A come

$$A^* := \mathrm{Hom}_c\,(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

Dualità di Pontryagin

Definizione

Sia A un gruppo topologico. Definiamo il *duale di Pontryagin* di A come

$$A^* := \mathrm{Hom}_c\,(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

Teorema (Dualità di Pontryagin)

Se A è abeliano discreto di torsione, allora A^* è abeliano profinito e viceversa.
In entrambi i casi, il biduale A^{**} è canonicamente isomorfo ad A.

Dualità di Cartier

Definizione

Sia M un Γ-modulo finito. Il *duale di Cartier* di M è

$$M' := \mathrm{Hom}_\Gamma(M, \mu).$$

Dualità di Cartier

Definizione

Sia M un Γ-modulo finito. Il *duale di Cartier* di M è

$$M' := \mathrm{Hom}_\Gamma(M, \mu).$$

C'è un accoppiamento di Γ-moduli

$$\begin{aligned} M' \times M &\to \mu \\ (f, m) &\mapsto f(m) \end{aligned}$$

Dualità di Cartier

Definizione

Sia M un Γ-modulo finito. Il *duale di Cartier* di M è

$$M' := \mathrm{Hom}_\Gamma(M, \mu).$$

C'è un accoppiamento di Γ-moduli

$$\begin{aligned} M' \times M &\to \mu \\ (f, m) &\mapsto f(m) \end{aligned}$$

Esempio

Se $M = \mu_n$, allora $M' = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Prodotto Cup

Definizione (Prodotto Cup)

Sia G un gruppo profinito, ed A, B dei G-moduli. Esiste una mappa biadditiva

$$\cup : H^i(G, A) \times H^j(G, B) \longrightarrow H^{i+j}(G, A \otimes B)$$

Prodotto Cup

Definizione (Prodotto Cup)

Sia G un gruppo profinito, ed A, B dei G-moduli. Esiste una mappa biadditiva

$$\cup : H^i(G, A) \times H^j(G, B) \longrightarrow H^{i+j}(G, A \otimes B)$$

- Un accoppiamento biadditivo di G-moduli $A \times B \to C$ induce una mappa

$$A \otimes B \longrightarrow C$$

Prodotto Cup

Definizione (Prodotto Cup)

Sia G un gruppo profinito, ed A, B dei G-moduli. Esiste una mappa biadditiva

$$\cup : H^i(G, A) \times H^j(G, B) \longrightarrow H^{i+j}(G, A \otimes B)$$

- Un accoppiamento biadditivo di G-moduli $A \times B \to C$ induce una mappa

$$A \otimes B \longrightarrow C$$

  e quindi un prodotto

$$\cup : H^i(G, A) \times H^j(G, B) \longrightarrow H^{i+j}(G, C).$$

Teorema

Sia M un Γ-modulo finito. Allora, i gruppi di coomologia $H^i(\Gamma, M)$ sono finite per $i = 0, 1, 2$.

Dualità Locale di Tate

Teorema

Sia M un Γ-modulo finito. Allora, i gruppi di coomologia $H^i(\Gamma, M)$ sono finite per $i = 0, 1, 2$.

Teorema (Dualità Locale di Tate)

Sia K un campo p-adico. Allora, il prodotto cup induce un isomorfismo

$$H^i(\Gamma, M) \simeq H^{2-i}(\Gamma, M')^*$$

per $i = 0, 1, 2$.

Teorema

Sia K un campo p-adico. Allora,

$$\Gamma^{ab} \simeq \widehat{K^\times}$$

Teorema

Sia K un campo p-adico. Allora,

$$\Gamma^{ab} \simeq \widehat{K^\times}$$

$$\Gamma^{\mathrm{ab}} = \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})^* \qquad \text{(per dualità di Pontryagin)}$$

Teorema

Sia K un campo p-adico. Allora,

$$\Gamma^{ab} \simeq \widehat{K^\times}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\text{ab}} &= \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})^* && \text{(per dualità di Pontryagin)} \\
&= \mathrm{Hom}(\Gamma, \varinjlim_n \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* && (\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \varinjlim_n \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})
\end{aligned}$$

Teorema

Sia K un campo p-adico. Allora,

$$\Gamma^{ab} \simeq \widehat{K^\times}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\mathrm{ab}} &= \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})^* && \text{(per dualità di Pontryagin)} \\
&= \mathrm{Hom}(\Gamma, \varinjlim_n \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* && (\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \varinjlim_n \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \\
&= \varprojlim_n \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* && \text{(il limite commuta)}
\end{aligned}$$

Teorema

Sia K un campo p-adico. Allora,

$$\Gamma^{ab} \simeq \widehat{K^\times}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\mathrm{ab}} &= \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})^* && \text{(per dualità di Pontryagin)} \\
&= \mathrm{Hom}(\Gamma, \varinjlim_n \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* && (\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \varinjlim_n \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \\
&= \varprojlim_n \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* && \text{(il limite commuta)} \\
&= \varprojlim_n H^1(K, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* && \text{(l'azione è banale)}
\end{aligned}$$

Teorema

Sia K un campo p-adico. Allora,

$$\Gamma^{ab} \simeq \widehat{K^\times}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\mathrm{ab}} &= \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})^* && \text{(per dualità di Pontryagin)}\\
&= \mathrm{Hom}(\Gamma, \varinjlim_n \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* && (\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \varinjlim_n \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\\
&= \varprojlim_n \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* && \text{(il limite commuta)}\\
&= \varprojlim_n H^1(K, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* && \text{(l'azione è banale)}\\
&= \varprojlim_n H^1(K, \mu_n) && \text{(per Dualità Locale)}
\end{aligned}$$

Teorema

Sia K un campo p-adico. Allora,

$$\Gamma^{ab} \simeq \widehat{K^\times}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\mathrm{ab}} &= \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})^* && \text{(per dualità di Pontryagin)}\\
&= \mathrm{Hom}(\Gamma, \varinjlim_n \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* && (\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \varinjlim_n \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\\
&= \varprojlim_n \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* && \text{(il limite commuta)}\\
&= \varprojlim_n H^1(K, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* && \text{(l'azione è banale)}\\
&= \varprojlim_n H^1(K, \mu_n) && \text{(per Dualità Locale)}\\
&= \varprojlim_n K^\times / K^{\times n} && \text{(successione di Kummer)}
\end{aligned}$$

Teorema

Sia K un campo p-adico. Allora,

$$\Gamma^{ab} \simeq \widehat{K^\times}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\text{ab}} &= \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})^* && \text{(per dualità di Pontryagin)} \\
&= \mathrm{Hom}(\Gamma, \varinjlim_n \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* && (\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \varinjlim_n \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \\
&= \varprojlim_n \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* && \text{(il limite commuta)} \\
&= \varprojlim_n H^1(K, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* && \text{(l'azione è banale)} \\
&= \varprojlim_n H^1(K, \mu_n) && \text{(per Dualità Locale)} \\
&= \varprojlim_n K^\times/K^{\times n} && \text{(successione di Kummer)} \\
&= \widehat{K^\times} && \text{(per cofinalità).}
\end{aligned}$$

Grazie per l'attenzione!