DSA Blatt 03

Leonard Oertelt 1276156
Julian Opitz 1302082

Aufage 6:

a)

$n^3 + 2n^2 - 5n - 10 \in O(n^3)$ mit $f(n) = n^3$ und $g(n) = n^3 + 2n^2 - 5n - 10$

daraus folgt:

1. $n^3 + 2n^2 - 5n - 10 \leq cn^3$
2. umstellen und nach c auflösen:

$$1+\frac{2}{n}-\frac{5}{n^2}-\frac{10}{n^3}\leq c$$

$$1+2n^{-1}-5n^{-2}-10n^{-3}\leq c$$

wähle n = 1:

$$1+2-5-10\leq c$$

$$-12\leq c$$

$n_0 = 1$ nicht möglich, da sonst negative Laufzeit

wähle n = 2:

$$1+1-\frac{5}{4}-\frac{5}{4}\leq c$$

$$2-2-\frac{1}{2}\leq c$$

$$\frac{-1}{2}\leq c$$

$n_0 = 2$ nicht möglich, da sonst negative Laufzeit

wähle n = 3:

$$1+\frac{2}{3}-\frac{5}{9}-\frac{10}{27}\leq c$$

$$\frac{27}{27}+\frac{18}{27}-\frac{15}{27}-\frac{10}{27}\leq c$$

$$\frac{27}{27}+\frac{18}{27}-\frac{15}{27}-\frac{10}{27}\leq c$$

$$\frac{20}{27}\leq 1$$

wähle c = 1

$$\lim_{n \to \infty} 1 + \frac{2}{n} - \frac{5}{n^2} - \frac{10}{n^3} \leq c$$

$$\lim_{n \to \infty} 1 + 0 - 0 - 0 = 1 \leq c$$

$c = 1$ und $n_0 = 3$

3. Abschluss des Beweises:

   Für alle $n > n_0$ gilt $g(n) \leq c \cdot f(n)$

   mit n = 3 und c = 1

   Für alle n>3 gilt $n^3 + 2n^2 - 5n - 10 \leq n^3$

   Also gilt für $g(n) = n^3 + 2n^2 - 5n - 10$ und $f(n) = n^3$ die Aussage $g \in O(f)$

- q.e.d.

c)

$n^a \notin O(n^b)$ für $a, b \in \mathbb{R}, b < a$

Annahme: es gilt $n^a \in O(n^b)$

mit $f(n) = n^b$ und $g(n) = n^a$

daraus folgt:

1. $n^a \leq c n^b$
2. nach n umstellen:

   $n^a \leq c n^b$

   $n^a \leq c n^b$ | $:n^b$

   $\frac{n^a}{n^b} \leq c$

   $n^{a-b} \leq c$
3. da gilt b<a folgt:

   $a - b > 0$

   es soll gelten:

   $n \leq \sqrt[a-b]{c}$

   n soll unendlich groß werden können und $\sqrt[a-b]{c}$ bleibt konstant, folglich gilt nicht $n^a \in O(n^b)$, sondern $n^a \notin O(n^b)$.

Aufgabe 7:

Grenzen und Vergleiche im Java Quellcode