Mathématiques
Séries numériques

BackToBasics
6 mars 2022

Table des matières

1 Cours

Dans ce cours, nous allons revoir tout ce qui concerne les séries numériques. Si vous avez des questions sur n'importe quel point du cours, n'hésitez pas à poser votre question dans le salon dédié ou par messages privés sur Discord à **Swarwerth#2943**.

1.1 Définitions générales

Définition 1.1 : Série

Soit (u_n) une suite réelle. La **série** de terme générale u_n notée $\sum u_n$ est la suite des *sommes partielles* (S_n) où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. On dit que $\sum u_n$ *converge* si (S_n) converge. On dit qu'elle *diverge* sinon.

Exemple de la série géométrique

Soit $q \in \mathbb{R}$. Alors, $\sum q^n$ converge ssi $|q| < 1$.
$\sum q^n$ est appelée *série géométrique*.

Propriété 1.2 : Stabilité de la convergence d'une série

Soient $\sum u_n$, $\sum v_n$ deux séries numériques et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors
- ($\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ converge) $\implies \sum (u_n + v_n)$ converge.
- $\sum u_n$ converge $\implies \sum \lambda u_n$ converge.
- ($\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge) $\implies \sum (u_n + v_n)$ diverge.

Définition 1.3 : Somme et reste d'une série convergente

Soit $\sum u_n$ une série numérique convergente. On appelle **somme** de la série le nombre réel S et le **reste** de la série, la suite (R_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} S_n$$

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

Propriété 1.4 : Télescopage

Soit (u_n) une suite réelle. Alors,

$$(u_n) \text{ converge } \iff \sum (u_{n+1} - u_n) \text{ converge}$$

Propriété 1.5 : Condition nécessaire de convergence

Soit (u_n) une suite relle. Alors

$$\sum u_n converge \implies \lim_{n \to +\infty} u_n = 0$$

1.2 Séries à termes positifs

Définition 2.1 : Série à termes positifs

On dit qu'une série numérique $\sum u_n$ est **à termes positifs** si pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$.

Remarque : Si la série $\sum u_n$ à termes positifs, cela implique que sa suite de ses sommes partielles (S_n) est croissante.

Propriété 2.2 : Condition de convergence

Soient $\sum u_n$ une série à termes positifs et (S_n) la suite de ses sommes partielles. Alors,

$$\sum u_n \text{ converge } \iff (S_n) \text{ est majorée}$$

Propriété 2.3 : Théorème de comparaison

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq v_n$. Alors
- $\sum v_n$ converge $\Longrightarrow \sum u_n$ converge.
- $\sum u_n$ diverge $\Longrightarrow \sum v_n$ diverge.

Définition 2.4 : Série de Riemann

On appelle **série de Riemann** toute série de la forme $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Théorème 2.5 : Convergence d'une série de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$.

Proposition 2.6 : Comparaisons de Landau

Soient (u_n) et (v_n) deux suite réelles positives.
- Si $u_n = O(v_n)$, alors $\sum v_n$ converge $\Longrightarrow \sum u_n$ converge.
- Si $u_n = o(v_n)$, alors $\sum v_n$ converge $\Longrightarrow \sum u_n$ converge.
- Si $u_n \sim v_n$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Proposition 2.7 : Règle de Riemann

Soit $(u_n$ une suite positive.
S'il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim_{n \to +\infty} n^\alpha u_n = 0$, alors $\sum u_n$ converge.

Théorème 2.8 : Règle de d'Alembert

Soit (u_n) une suite réelle strictement positive telle que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l \qquad \text{avec } l \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

Alors, on a
- $l < 1 \implies \sum u_n$ converge
- $l > 1 \implies \sum u_n$ diverge

Théorème 2.9 : Règle de Cauchy

Soit (u_n) une suite réelle strictement positive telle que

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{u_n} = l \qquad \text{avec } l \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

Alors, on a
- $l < 1 \implies \sum u_n$ converge
- $l > 1 \implies \sum u_n$ diverge

1.3 Séries à termes quelconques

Définition 3.1 : Série alternée

Soit (u_n) une suite réelle. On dit que $\sum u_n$ est **alternée** s'il existe une suite réelle (a_n) positive telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n a_n$.

Théorème 3.2 : Critère spécial des séries alternées

Soit (u_n) une suite réelle alternée. Si $(|u_n|)$ est décroissante et converge vers 0, alors
- $\sum u_n$ converge.
- $\forall n \in \mathbb{N}, |R_n| \leq |u_{n+1}|$ avec (R_n) la suite des restes associée à $\sum u_n$.

Exemple du critère spécial de convergence

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors, $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 0$.

Définition 3.3 : Convergence absolue

On dit qu'une série numérique $\sum u_n$ **converge absolument** si la série $\sum |u_n|$ converge.

Théorème 3.4 : Théorème de convergence absolue

Soit $\sum u_n$ une suite numérique convergeant absolument. Alors, $\sum u_n$ converge.

2 Exercices

Nous avons essayé de mettre l'ensemble des connaissance à savoir pour les Midterms au niveau du chapitre sur les séries numériques. Évidemment, vous avez le droit de relire le cours ou de poser des questions. Ces exercices permettront de pointer les lacunes que vous pourriez avoir.

2.1 Exercice 1 : Convergence de séries

Étudier la convergence des séries $\sum u_n$ de terme général suivant :

1. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} ln(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}})$.
2. $u_n = (1 + \dfrac{1}{n})^n - e$.
3. $u_n = (\dfrac{n}{n+1})^{n^2}$.
4. $u_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} a^n$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$.
5. $u_n = \dfrac{(-1)^n ln(n)}{n}$.
6. $u_n = \dfrac{n^4 2^{-n^2} + (-1)^n}{\sqrt{n}}$.
7. $u_n = ln(1 + \dfrac{(-1)^n}{2n+1})$.

2.2 Exercice 2 : Décomposition de terme général

1. Démontrer que la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.
2. Démontrer l'égalité suivante

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o(\frac{1}{n\sqrt{n}})$$

3. Étudier la convergence de la série $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$

2.3 Exercice 3 : Une inconnue en plus

Soient $a \in \mathbb{R}$ et la suite (u_n) définie pour tout $n \geq 2$ par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{(n + (-1)^n)^a}$. On cherche à discuter de la nature de $\sum u_n$ en fonction de a.

1. Montrer que $u_n \sim \dfrac{(-1)^n}{n^a}$.
2. Montrer que, si $a \leq 0$, la série $\sum u_n$ diverge.
3. On suppose dans la suite de l'exercice que $a > 0$. Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^a} + \dfrac{\lambda}{n^{a+1}} + o(\dfrac{1}{n^{a+1}})$.
4. En déduire la nature de $\sum u_n$.

3 Correction

Voici la correction des exercices du PDF. Nous vous invitons à faire les exercices avant de lire la correction. Pour toute question, merci de vous rediriger vers le cours et les professeurs présents.

3.1 Exercice 1 : Convergence de séries

Étudier la convergence des séries $\sum u_n$ de terme général suivant :

1. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} ln(1 + \frac{1}{\sqrt{n}})$.

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{\sqrt{n}} ln(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}}(\frac{1}{\sqrt{n}} + o(\frac{1}{\sqrt{n}})) \\ &= \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}) \\ &\sim \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Or, $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$ et $\frac{1}{n} > 0$.
De plus, $\sum \frac{1}{n}$ diverge d'après la série de Riemann.
Donc, par comparaison, $\sum u_n$ diverge.

2. $u_n = (1 + \frac{1}{n})^n - e$.

$$\begin{aligned} u_n &= (1 + \frac{1}{n})^n - e \\ &= e^{nln(1+\frac{1}{n})} - e \\ &= e^{n(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2}))} - e \\ &= e^{1 - \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})} - e \\ &= e^1 \times e^{-\frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})} - e \\ &= e(1 - \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})) - e \\ &= e - \frac{e}{2n} + o(\frac{1}{n}) - e \\ &= \frac{-e}{2n} + o(\frac{1}{n}) \\ &\sim \frac{-e}{2n} \end{aligned}$$

Or, $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n < 0$ et $\frac{1}{n} < 0$.
De plus, $\sum \frac{1}{n}$ diverge d'après la série de Riemann. On peut alors dire que la série $\sum \frac{-e}{2n}$ diverge.
Donc, par comparaison, $\sum u_n$ diverge.

3. $u_n = (\dfrac{n}{n+1})^{n^2}$.

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{u_n} &= (\frac{n}{n+1})^n \\
&= (\frac{n+1}{n})^{-n} \\
&= e^{-nln(\frac{n+1}{n})} \\
&= e^{-nln(1+\frac{1}{n})} \\
&= e^{-n(\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n}))} \\
&= e^{-1+o(1)}
\end{aligned}$$

Donc on a

$$lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Or, $\frac{1}{e} < 1$.
De plus, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.
Donc, d'après la règle de Cauchy,
$\sum u_n$ est convergente.

4. $u_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}a^n$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}a^{n+1} \times \frac{(2n)!}{(n!)^2}\frac{1}{a^n} \\
&= (\frac{(n+1)!}{n!})^2 \times \frac{(2n)!}{(2n+2)!} \times \frac{a^{n+1}}{a^n} \\
&= (n+1)^2 \times \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} \times a \\
&= \frac{n^2+2n+1}{4n^2+4n+2n+2} \times a \\
&\sim \frac{n^2}{4n^2} \times a \\
&\sim \frac{a}{4}
\end{aligned}$$

Or, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.
Donc, en utilisant la règle de d'Alembert, on a :
- Si $a < 4$, $\sum u_n$ converge.
- Si $a > 4$, $\sum u_n$ diverge.

Si on prend $a = 4$, on a $u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} \times 4^n$.

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+1)} \times 4 \\
&= \frac{4n^2+8n+4}{4n^2+4n+2n+2}
\end{aligned}$$

Or, $n \in \mathbb{N}$, donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \iff u_{n+1} > u_n$.
Donc, (u_n) est croissante et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$.
Ainsi, (u_n) ne peut pas tendre vers 0.
On en conclut que $\sum u_n$ diverge.

5. $u_n = \dfrac{(-1)^n ln(n)}{n}$.

La série (u_n) est alternée,
On a alors

$$|u_n| = |\frac{(-1)^n ln(n)}{n}| = \frac{ln(n)}{n}$$

Par croissance comparée, $(|u_n|)$ est convergente vers 0.
De plus, $(|u_n|)$ est décroissante.
Donc, d'après le critère spécial des séries alternées, $\sum u_n$ converge.

6. $u_n = \dfrac{n^4 2^{-n^2} + (-1)^n}{\sqrt{n}}$.

$$u_n = \frac{n^4 2^{-n^2} + (-1)^n}{\sqrt{n}} = \frac{n^4 2^{-n^2}}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

Premièrement, nous avons,
$(\dfrac{(-1)}{\sqrt{n}})$ est une suite alternée.
Donc, on a

$$|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}| = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Or, $(\dfrac{1}{\sqrt{n}})$ tend vers 0.

De plus, $(\dfrac{1}{\sqrt{n}})$ est décroissante.

Donc, d'après le critère spécial des séries alternées, $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.

Deuxièmement, nous avons

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{\frac{n^4 2^{-n^2}}{\sqrt{n}}} &= \frac{n^{\frac{4}{n}} 2^{-n}}{n^{\frac{1}{2n}}} \\
&= 2^{-n} \times n^{\frac{4}{n} - \frac{1}{2n}} \\
&= \frac{1}{2^n} \times n^{\frac{7}{2n}} \\
&= \frac{e^{\frac{7}{2n} ln(n)}}{e^{n ln(2)}}
\end{aligned}$$

Or, par croissance comparée, $(\sqrt[n]{\dfrac{n^4 2^{-n^2}}{\sqrt{n}}})$ converge vers 0.

Donc, d'après la règle de Cauchy,
$\sum \dfrac{n^4 2^{-n^2}}{\sqrt{n}}$ converge.

Ainsi, par somme de deux séries convergentes,
$\sum u_n$ converge.

7. $u_n = ln(1 + \frac{(-1)^n}{2n+1})$.

$$\begin{aligned}
u_n &= ln(1 + \frac{(-1)^n}{2n+1}) \\
&= \frac{(-1)^n}{2n+1} - (\frac{(-1)^n}{2n+1})^2 \times \frac{1}{2} + o(\frac{1}{n^2}) \\
&= \frac{(-1)^n}{2n+1} - \frac{(-1)^{2n}}{2(2n+1)^2} + o(\frac{1}{n^2}) \\
&= \frac{(-1)^n}{2n+1} + v_n \qquad \text{avec } v_n = \frac{1}{2(2n+1)^2} + o(\frac{1}{n^2})
\end{aligned}$$

$$v_n = \frac{1}{2(4n^2+4n+1)} + o(\frac{1}{n^2}) \sim \frac{1}{8n^2}$$

Or, $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{8n^2} > 0$ et $v_n > 0$.
De plus, $\sum \frac{1}{8n^2}$ converge d'après la formule de Riemann.
Donc, $\sum v_n$ converge par comparaison.

$(\frac{(-1)^n}{2n+1})$ est une suite alternée,
Donc, on a

$$|\frac{(-1)^n}{2n+1}| = \frac{1}{2n+1}$$

Or, $(\frac{1}{2n+1})$ est décroissante et converge vers 0.
Donc, d'après le critère spécial des séries alternées, $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$ converge.

Par somme de séries convergentes,
$\sum u_n$ converge.

3.2 Exercice 2 : Décomposition de terme général

1. Démontrer que la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.

$(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})$ est une suite alternée.
Donc, on a

$$|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}| = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Or, $(\frac{1}{\sqrt{n}})$ est décroissante et converge vers 0.

D'après le critère spécial des séries alternées, $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.

2. Démontrer l'égalité suivante

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o(\frac{1}{n\sqrt{n}})$$

$$\begin{aligned}
\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})} \\
&= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} \\
&= X \times \frac{1}{1+X} \qquad \text{avec } X = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \text{ et } lim_{n\to+\infty} X = 0 \\
&= X \times (1 - X + X^2 + o(X^2)) \\
&= X - X^2 + X^3 + o(X^3) \\
&= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{(-1)^{2n}}{(\sqrt{n})^2} + \frac{(-1)^{3n}}{(\sqrt{n})^3} + o(\frac{1}{(\sqrt{n})^3}) \\
&= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o(\frac{1}{n\sqrt{n}})
\end{aligned}$$

3. Étudier la convergence de la série $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$

On pose $u_n = \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o(\frac{1}{n\sqrt{n}})$.
(u_n) est une suite alternée,
Donc, on a :

$$|u_n| = \frac{1}{n\sqrt{n}} + o(\frac{1}{n\sqrt{n}}) \sim \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

D'après la formule de Riemann,
$\sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$ converge.
Donc, par comparaison $\sum |u_n|$ converge.
Ainsi, $\sum u_n$ converge absolument.
On en conclut que $\sum u_n$ converge.

Or, on a $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{n} + u_n$.

Par somme de séries convergentes, $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + u_n$ converge.

Par somme d'une série convergente et d'une série divergente,
$\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ diverge.

3.3 Exercice 3 : Une inconnue en plus

Soient $a \in \mathbb{R}$ et la suite (u_n) définie pour tout $n \geq 2$ par $u_n = \frac{(-1)^n}{(n+(-1)^n)^a}$. On cherche à discuter de la nature de $\sum u_n$ en fonction de a.

1. Montrer que $u_n \sim \frac{(-1)^n}{n^a}$.

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(-1)^n}{(n+(-1)^n)^a} \\ &= (-1)^n \times \frac{1}{(n(1+\frac{(-1)^n}{n})^a} \\ &= \frac{(-1)^n}{n^a} \times (1+\frac{(-1)^n}{n})^{-a} \\ &= \frac{(-1)^n}{n^a}(1+o(1)) \\ &= \frac{(-1)^n}{n^a} + o(\frac{1}{n^a}) \\ &\sim \frac{(-1)^n}{n^a} \end{aligned}$$

2. Montrer que, si $a \leq 0$, la série $\sum u_n$ diverge.

$$|u_n| \sim \frac{1}{n^a}$$

Or, quand $a \leq 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^a} \neq 0$.
Par comparaison de deux suites de terme général positif,
$(|u_n|)$ ne converge pas vers 0.
Donc, (u_n) ne converge pas vers 0.
Ainsi, $\sum u_n$ diverge.

3. On suppose dans la suite de l'exercice que $a > 0$. Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u_n = \frac{(-1)^n}{n^a} + \frac{\lambda}{n^{a+1}} + o(\frac{1}{n^{a+1}})$.

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(-1)^n}{(n+(-1)^n)^a} \\ &= (-1)^n \times \frac{1}{(n(1+\frac{(-1)^n}{n})^a} \\ &= \frac{(-1)^n}{n^a} \times (1+\frac{(-1)^n}{n})^{-a} \\ &= \frac{(-1)^n}{n^a}(1 - a \times \frac{(-1)^n}{n} + o(\frac{1}{n})) \\ &= \frac{(-1)^n}{n^a} - a \times \frac{(-1)^{2n}}{n^{a+1}} + o(\frac{1}{n^{a+1}}) \\ &= \frac{(-1)^n}{n^a} + \frac{-a}{n^{a+1}} + o(\frac{1}{n^{a+1}}) \end{aligned}$$

Donc, on a $\lambda = -a$.

4. En déduire la nature de $\sum u_n$.

Premièrement, nous avons $(\frac{(-1)^n}{n^a})$ qui est une suite alternée.
Donc, on a

$$|\frac{(-1)^n}{n^a}| = \frac{1}{n^a}$$

Or, $(\frac{1}{n^a})$ est décroissante et tend vers 0 pour tout $a > 0$.
Donc, d'après le critère spécial des séries alternées, $\sum \frac{(-1)^n}{n^a}$ converge.

Deuxièmement, on a

$$\frac{-a}{n^{a+1}} + o(\frac{1}{n^{a+1}}) \sim \frac{-a}{n^{a+1}}$$

Or, $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{-a}{n^{a+1}} < 0$.
De plus, d'après la formule de Riemann, $\sum \frac{-a}{n^{a+1}}$ converge pour tout $a > 0$.
Donc, $\sum \frac{-a}{n^{a+1}} + o(\frac{1}{n^{a+1}})$ converge par comparaison.

Par somme de séries convergentes,
$\sum u_n$ converge.