Mathématiques
Séries entières

BackToBasics
27 octobre 2022

Table des matières

1 Cours

Dans ce cours, nous allons revoir tout ce qui concerne les fonctions génératrices d'une variable aléatoire finie et les séries entières. Si vous avez des questions sur n'importe quel point du cours, n'hésitez pas à poser votre question dans le salon dédié ou par messages privés sur Discord à **Swarwerth#2943**.

1.1 Fonction génératrice d'une variable aléatoire

Définition 1.1 : Fonction génératrice d'une variable aléatoire finie

Soit X une variable aléatoire finie entière. On note $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ l'ensemble de ses valeurs possibles. Sa **fonction génératrice** est alors la fonction G_X définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par

$$G_X(t) = E(t^X) = \sum_{k=0}^{n} P(X = k)t^k$$

Remarques :

— La condition $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ peut être relachée. En effet, il suffit d'avoir $X(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$, quitte à poser $P(X = k) = 0$ pour certaines valeurs de k.

— La fonction G_X est un polynôme en t : en notant, pour tout $k \in [\![0, n]\!], p_k = P(X = k)$, on a

$$G_X(t) = p_0 + p_1 t + ... + p_n t^n \implies G_X \in \mathbb{R}_n[X]$$

— Si deux variables aléatoires finies entières X et Y ont une même fonction génératrice, alors elles ont la même distribution. C'est en effet une propriété des fonctions polynomiales :

$$\begin{aligned} G_X = G_Y &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{n} P(X = k)t^k = \sum_{k=0}^{n} P(Y = k)t^k \\ &\iff \forall k \in [\![0, n]\!], P(X = k) = P(Y = k) \end{aligned}$$

Exemple d'une variable aléatoire de Bernoulli

Soient $p \in [0, 1]$ et $X \rightsquigarrow \text{Bernoulli}(p)$, c'est-à-dire que

— $X(\Omega) = \{0, 1\}$

— $P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = 1 - p$

On a alors $G_X(t) = P(X = 0)t^0 + P(X = 1)t^1 = (1 - p) + pt$.

Théorème 1.2 : Espérance et variance

Soient X une variable aléatoire finie entière et G_X sa fonction génératrice. Alors, on a :

— $G_X(1) = 1$.

— $E(X) = G'_X(1)$.

— $Var(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2$.

Théorème 1.3 : Somme de variables aléatoires indépendantes

Soient X et Y deux variables aléatoires entières finies et **indépendantes**. Alors,

$$G_{X+Y} = G_X \times G_Y$$

1.2 Séries entières

1.2.1 Définition générale

Définition 2.1 : Série entière

Soit $x \in \mathbb{R}$. Une **série entière** est une série $\sum a_n x_n$ où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle.
Le terme général de la série est donc une fonction de x de la forme $u_n(x) = a_n x^n$.

Remarques :

— a_n ne dépend pas de x et que de n. Le terme général $u_n(x)$ est donc un monôme en x de degré n. Les résultats ne sont pas généralisables aux cas où les $u_n(x)$ sont des fonctions quelconques de x.

— La série est toujours convergente en $x = 0$. En effet, pour cette valeur de x, les termes $u_n(x) = a_n x^n$ sont tous nuls sauf $u_0(x) = a_0$, donc la série converge vers a_0.

— Si la série converge en d'autres valeurs de x, alors sa limite dépend de x et on peut définir

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

L'ensemble des valeurs de x pour lesquelles la série converge est le domaine de convergence de la série. C'est aussi le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f.

— Les résultats que nous établissons dans ce module concernent, d'une part le domaine de convergence de la série, d'autre part les propriétés de la fonction f.

1.2.2 Rayon de convergence

Définition 2.2 : Rayon de convergence

Soient (a_n) une suite réelle, $\sum a_n x^n$ la série entière définie par cette suite et la fonction

$$f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Alors, il existe $R \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ tel que

— Pour tout $x \in \mathbb{R}$, tel que $|x| < R$, la série converge absolument.

— Pour tout $x \in \mathbb{R}$, tel que $|x| > R$, la série diverge.

R est appelé **rayon de convergence** de la série entière. L'ensemble $\{x \in \mathbb{R}, |x| < R\} =]-R, R[$ est appelé **disque ouvert de la convergence** de la série.

Propriété 2.3 : Propriétés du rayon de convergence

— Si $R = 0$, la série converge vers a_0 en $x = 0$ et diverge en toute valeur x telle que $|x| > 0$. Ainsi, le domaine de définition de f et $\mathcal{D}_f = \{0\}$.

— Si $R \in \mathbb{R}_+^*$, on a donc

$$\begin{cases}]-R, R[\subset \ \mathcal{D}_f \\ ]-\infty, -R[\cap \mathcal{D}_f = \emptyset \\ ]+R, +\infty[\cap D_f = \emptyset \end{cases}$$

La série converge absolument si $|x| < R$ et diverge si $|x| > R$.
On ne peut rien dire de la nature de la série si $|x| = R$.

— Si $R = +\infty$, alors la série converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Théorème 2.4 : Règle de d'Alembert pour les séries entières

Soit une série entière $\sum a_n x_n$ telle que $a_n \neq 0$ à partir d'un certain rang.
S'il existe $l \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ telle que

$$\lim_{n \to +\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = l$$

Alors,

— Si $l = 0$, le rayon de convergence de la série est $+\infty$.

— Si $l \in \mathbb{R}_+^*$, le rayon de convergence est $\frac{1}{l}$.

— Si $l = +\infty$, le rayon de convergence est 0.

1.2.3 Intégration et dérivation

Théorème 2.5 : Intégration et dérivation

Soit une série entière $\sum a_n x^n$.

Alors, les séries $\sum (\int_0^x a_n t^n dt) = \sum a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ et $\sum (a_n x^n)' = \sum n a_n x^{n-1}$ sont des séries entières qui ont le même rayon de convergence R que la série initiale $\sum a_n x^n$.

Propriété 2.6 : Dérivée et intégration d'une somme de série entière

Soient une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence non nul $R \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ et sa somme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

La fonction f est continue et dérivable sur $]-R, R[$ et pour tout $x \in]-R, R[$,

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (\int_0^x a_n t^n dt) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

De plus, si la série $\sum a_n x^n$ converge absolument aux bornes $\pm R$ du disque ouvert de convergence, la continuité de f et la convergence de la série intégrée s'étend à ces bornes.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in]-R, R[$,

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)...(n-k+1) a_n x^{n-k} = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}$$

1.2.4 Fonctions développables en séries entière

Définition 2.7 : Fonctions développables en séries entières

Une fonction f est développable en série entière s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R \neq 0$ telle que pour tout $x \in]-R, R[$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Ce développement est unique. En effet, le théorème de dérivation implique que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Propriété 2.8 : Stabilité par somme et par produit

Soient f et g deux fonctions admettant chacune un développement en série entière de rayons de convergence R_f et R_g.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

Alors, $f+g$ et $f \times g$ admettent des développements en séries entières. Leurs rayons de convergence vérifient $R \geq min(R_f, R_g)$ et les séries s'obtiennent en additionnant et en multipliant les séries de f et de g :

$$f(x) + g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) x^n$$

$$f(x) \times g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \qquad \text{où } c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

Théorème 2.9 : Fonctions de référence

Soient les fonctions suivantes développables en séries entières et leur rayon de convergence R :

1. $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... \qquad R = +\infty$
2. $ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... \qquad R = 1$
3. $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1) \frac{x^n}{n!} = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2!} + ...$
   $R = +\infty$ si $\alpha \in \mathbb{N}$ et $R = 1$ sinon
4. $sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... \qquad R = +\infty$
5. $cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... \qquad R = +\infty$

2 Exercices

Nous avons essayé de mettre l'ensemble des connaissance à savoir pour les rattrapages au niveau du chapitre sur le dénombrement. Évidemment, vous avez le droit de relire le cours ou de poser des questions. Ces exercices permettront de pointer les lacunes que vous pourriez avoir.

2.1 Exercice 1 : Fonctions génératrices

Soit X une variable aléatoire à valeurs entières dont la fonction génératrice est

$$G_X(t) = a(3t+1)^3$$

1. Quelle est la valeur de a ?
2. Déterminer la loi de X.
3. Déterminer son espérance et sa variance

2.2 Exercice 2 : Rayon de convergence

Pour chacune des séries suivantes, déterminer son rayon de convergence :

1. $\sum \frac{x^n}{\sqrt{n}}$.
2. $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$.
3. $\sum (-1)^n n x^n$.

2.3 Exercice 3 : Développement en série entière

Déterminer les développements en série entière, avec leurs rayons de convergences, des fonctions suivantes :

1. $ln(1+2x^2)$.
2. $\frac{1}{a-x}$ avec $a \neq 0$.
3. $ln(a+x)$ avec $a > 0$.
4. $\frac{1}{(1-x)^2}$.

2.4 Exercice 4 : Forme condensée

Déterminer sous forme condensée (à l'aide de fonctions usuelles) les sommes et leur rayon de convergence.

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{n!} x^n$.
2. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+2}{n+1} x^n$.
3. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n!} x^{2n}$.
4. $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} n x^{2n+1}$.
5. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{n+1}$.

3 Correction

Voici la correction des exercices du PDF. Nous vous invitons à faire les exercices avant de lire la correction. Pour toute question, merci de vous rediriger vers le cours et les professeurs présents.

3.1 Exercice 1 : Fonctions génératrices

Soit X une variable aléatoire à valeurs entières dont la fonction génératrice est

$$G_X(t) = a(3t+1)^3$$

1. Quelle est la valeur de a ?

$$\begin{aligned} G_X(1) &= 1 \\ a(3\times 1+1)^3 &= 1 \\ a \times 4^3 &= 1 \\ a &= \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64} \end{aligned}$$

2. Déterminer la loi de X.

Pour déterminer la loi de X, on doit chercher toutes les probabilités différentes de 0 qui associées à une valeur.

On a alors :

$$\begin{aligned} G_X(t) &= \frac{1}{64}(3t+1)^3 \\ &= \frac{1}{64}(1\times(3t)^3\times 1^0 + 3\times(3t)^2\times 1^1 + 3\times(3t)^1\times 1^2 + 1\times(3t)^0\times 1^3) \\ &= \frac{27}{64}t^3 + \frac{27}{64}t^2 + \frac{9}{64}t + \frac{1}{64} \end{aligned}$$

On a donc la loi suivante :

- $P(X=0) = \frac{1}{64}$
- $P(X=1) = \frac{9}{64}$
- $P(X=2) = \frac{27}{64}$
- $P(X=3) = \frac{27}{64}$

3. Déterminer son espérance et sa variance

On a $E(X) = G'_X(1)$.
Donc, on a :

$$G'_X(t) = \frac{3 \times 27}{64}t^2 + \frac{2 \times 27}{64}t + \frac{9}{64}$$

$$\begin{aligned} E(X) &= G'_X(1) \\ &= \frac{3 \times 27}{64} + \frac{2 \times 27}{64} + \frac{9}{64} \\ &= \frac{3 \times 27 + 2 \times 27 + 9}{64} \\ &= \frac{144}{64} \\ &= \frac{9}{4} \end{aligned}$$

De plus, on a $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2$.
On a alors :

$$G''_X(t) = \frac{2 \times 3 \times 27}{64}t + \frac{2 \times 27}{64}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2 \\ &= \frac{2 \times 3 \times 27}{64} + \frac{2 \times 27}{64} + \frac{9}{4} - (\frac{9}{4})^2 \\ &= \frac{6 \times 27 + 2 \times 27 + 9 \times 16}{64} - \frac{81}{16} \\ &= \frac{360}{64} - \frac{81}{16} \\ &= \frac{45}{8} - \frac{81}{16} \\ &= \frac{9}{16} \end{aligned}$$

3.2 Exercice 2 : Rayon de convergence

Pour chacune des séries suivantes, déterminer son rayon de convergence :

1. $\sum \frac{x^n}{\sqrt{n}}$.

On pose (a_n) une suite positive telle que

$$\sum a_n x^n = \sum \frac{x^n}{\sqrt{n}}$$

Donc, on a $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

On a alors :

$$\begin{aligned}
|\frac{a_{n+1}}{a_n}| &= |\frac{1}{\sqrt{n+1}} \times \frac{\sqrt{n}}{1}| \\
&= (\frac{n}{n+1})^{\frac{1}{2}} \\
&= (\frac{n+1}{n})^{-\frac{1}{2}} \\
&= (1 + \frac{1}{n})^{-\frac{1}{2}} \\
&= 1 + o(1)
\end{aligned}$$

On a alors

$$\lim_{n \to +\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = l = 1$$

Donc, R le rayon de convergence est égal à

$$R = \frac{1}{l} = 1$$

2. $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$.

On pose (a_n) une suite positive telle que

$$\sum a_n x^n = \sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$$

Donc, on a $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.
On a alors :

$$\begin{aligned}
|\frac{a_{n+1}}{a_n}| &= |\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!} \times \frac{(2n)!}{(n!)^2}| \\
&= \frac{((n+1)!)^2}{(n!)^2} \times \frac{(2n)!}{(2n+2)!} \\
&= (n+1)^2 \times \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} \\
&= \frac{n^2+2n+1}{4n^2+2n+4n+2}
\end{aligned}$$

On a alors

$$\lim_{n\to+\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = l = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{4n^2} = \frac{1}{4}$$

Donc, R le rayon de convergence est égal à

$$R = \frac{1}{l} = 4$$

3. $\sum(-1)^n nx^n$.

On pose (a_n) une suite positive telle que

$$\sum a_n x^n = \sum(-1)^n nx^n$$

Donc, on a $a_n = (-1)^n n$.
On a alors :

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{(-1)^n n}\right| \\ &= \left|\frac{(-1)^{n+1}}{(-1)^n} \times \frac{n+1}{n}\right| \\ &= 1 + \frac{1}{n} \end{aligned}$$

On a alors

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l = 1$$

Donc, R le rayon de convergence est égal à

$$R = \frac{1}{l} = 1$$

3.3 Exercice 3 : Développement en série entière

Déterminer les développements en série entière, avec leurs rayons de convergences, des fonctions suivantes :

1. $ln(1+2x^2)$.

D'après les fonctions de référence, on a :

$$ln(1+X) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \times \frac{X^n}{n}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} ln(1+2x^2) &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \times \frac{(2x^2)^n}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \times \frac{2^n x^{2n}}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \times 2^n \times \frac{x^{2n}}{n} \end{aligned}$$

Soit $u_n(x) = (-1)^{n-1} \times 2^n \times \dfrac{x^{2n}}{n}$.
On a alors :

$$\begin{aligned} |\frac{u_{n+1}}{u_n}| &= |(-1)^n \times 2^{n+1} \times \frac{x^{2n+2}}{n+1} \times \frac{1}{(-1)^{n-1}} \times \frac{1}{2^n} \times \frac{n}{x^{2n}}| \\ &= |(-1) \times 2 \times x^2 \times \frac{n}{n+1}| \\ &= 2|x|^2 \times \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

Donc, $\lim\limits_{n \to +\infty} |\dfrac{u_{n+1}}{u_n}| = 2|x|^2$
Or, $(|u_n|)$ est une suite à termes positifs.
Donc, d'après la règle de d'Alembert, on a :

$$2|x|^2 < 1 \Longleftrightarrow \sum u_n \text{ converge} \quad \text{et } 2|x|^2 > 1 \Longleftrightarrow \sum u_n \text{ diverge}$$

On a alors,

$$\begin{aligned} 2|x|^2 < 1 &\Longleftrightarrow |x|^2 < \frac{1}{2} \\ &\Longleftrightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

On a alors R le rayon de convergence tel que $R = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

2. $\dfrac{1}{a-x}$ avec $a \neq 0$.

D'après les fonctions de référence, on a :

$$\frac{1}{1-X} = \sum_{n=0}^{+\infty} X^n$$

On pose alors $X = \dfrac{x}{a}$, et on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-X} = \sum_{n=0}^{+\infty} X^n &\iff \frac{1}{1-\frac{x}{a}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (\frac{x}{a})^n \\
&\iff \frac{1}{a} \times \frac{1}{1-\frac{x}{a}} = \frac{1}{a} \times \sum_{n=0}^{+\infty} (\frac{x}{a})^n \\
&\iff \frac{1}{a-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{a^{n+1}}
\end{aligned}$$

On pose $u_n = \dfrac{1}{a^{n+1}}$.
On a alors :

$$\begin{aligned}
|\frac{u_{n+1}}{u_n}| &= |\frac{1}{a^{n+2}} \times \frac{a^{n+1}}{1}| \\
&= \frac{a^{n+1}}{a^{n+2}} \\
&= \frac{1}{a}
\end{aligned}$$

Donc, le rayon de convergence R est égal à a.

3. $ln(a+x)$ avec $a > 0$.

$$ln(a+x) = ln(1+\frac{x}{a})$$

D'après les fonctions de référence, on a :

$$ln(1+X) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{X^n}{n}$$

On pose alors $X = \frac{x}{a}$, et on a :

$$\begin{aligned}
ln(1+X) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{X^n}{n} &\iff ln(1+\frac{x}{a}) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{(\frac{x}{a})^n}{n} \\
&\iff ln(a) + ln(1+\frac{x}{a}) = ln(a) + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{a^n n} \\
&\iff ln(a+x) = ln(a) + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{a^n n}
\end{aligned}$$

On pose $u_n = (-1)^{n-1}\dfrac{1}{a^n n}$.
On a alors :

$$\begin{aligned}
|\frac{u_{n+1}}{u_n}| &= |(-1)^n \times \frac{1}{a^{n+1}(n+1)} \times \frac{1}{(-1)^{n-1}} \times a^n n| \\
&= |(-1) \times \frac{a^n}{a^{n+1}} \times \frac{n}{n+1}| \\
&= \frac{1}{a} \times \frac{n}{n+1}
\end{aligned}$$

On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} |\dfrac{u_{n+1}}{u_n}| = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{a} \times \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{1}{a}$.
Donc, le rayon de convergence R est égal à a.

4. $\dfrac{1}{(1-x)^2}$.

D'après les fonctions de référence, on a :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$
$$(\frac{1}{1-x})' = (\sum_{n=0}^{+\infty} x^n)'$$
$$((1-x)^{-1})' = \sum_{n=1}^{+\infty} (x^n)'$$
$$(-1) \times (-1) \times (1-x)^{-2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}$$
$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}$$
$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) x^k$$

On pose $u_n = n+1$ et on a :

$$|\frac{u_{n+1}}{u_n}| = \frac{n+2}{n+1}$$

Donc, $R = 1$.

3.4 Exercice 4 : Forme condensée

Déterminer sous forme condensée (à l'aide de fonctions usuelles) les sommes et leur rayon de convergence.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{n!} x^n$.

On pose $a_n = \dfrac{n-1}{n!}$, donc on a :

$$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = |\frac{n}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n-1}| = \frac{1}{n+1} \times \frac{n}{n-1} = \frac{n}{n^2-1}$$

Donc, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} = 0$.
Ainsi, $R = +\infty$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{n!} x^n &= \sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{n}{n!} x^n - \frac{1}{n!} x^n) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{k!} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \times x - (\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} - \frac{x^0}{0!}) \\
&= x \times \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} + 1 \\
&= xe^x - e^x + 1 \\
&= e^x(x-1) + 1
\end{aligned}$$

2. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+2}{n+1} x^n$.

On pose $a_n = \frac{n+2}{n+1}$, donc on a :

$$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = |\frac{n+3}{n+2} \times \frac{n+1}{n+2}| = \frac{(n+3)(n+1)}{(n+2)(n+2)} \sim \frac{n^2}{n^2} \sim 1$$

Donc, $\lim_{n \to +\infty} = 1$.
Ains, $R = 1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+2}{n+1} x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1+1}{n+1} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (\frac{n+1}{n+1} x^n + \frac{1}{n+1} x^n) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} x^n + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{k-1}}{k} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} x^n + \frac{1}{x} \times \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} \\
&= \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x} \times (-ln(1-x)) \\
&= \frac{1}{1-x} - \frac{ln(1-x)}{x}
\end{aligned}$$

3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n!} x^{2n}$.

On pose $\dfrac{(-1)^{n+1}}{2^n n!}$, donc on a :

$$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = |\frac{(-1)^{n+2}}{2^{n+1}(n+1)!} \times \frac{2^n n!}{(-1)^{n+1}}| = \frac{1}{2} \times \frac{1}{n+1}$$

Donc, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = 0$.
Ainsi, $R = +\infty$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n!} x^{2n} &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1) \times \frac{(-1)^n}{2^n} \times \frac{x^{2n}}{n!} \\
&= -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \times (x^2)^n}{2^n} \times \frac{1}{n!} \\
&= -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x^2)^n}{2^n} \times \frac{1}{n!} \\
&= -\sum_{n=0}^{+\infty} (\frac{-x^2}{2})^n \times \frac{1}{n!} \\
&= -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{X^n}{n!} \qquad \text{avec } X = \frac{-x^2}{2} \\
&= -e^X \\
&= -\exp(\frac{-x^2}{2})
\end{aligned}$$

4. $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}nx^{2n+1}$.

On pose $a_n = (-1)^{n+1}n$, et on a :

$$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = |\frac{(-1)^{n+2}(n+1)}{(-1)^{n+1}n}| = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$$

Donc, $\lim_{n\to+\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = 1$.
Donc, $R = 1$.
D'après les fonctions de référence, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n X^n = \frac{1}{1+X} &\iff (\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n X^n)' = (\frac{1}{1+X})' \\ &\iff \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n nX^{n-1} = -\frac{1}{(1+X)^2} \\ &\iff -X \times \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n nX^{n-1} = \frac{X}{(1+X)^2} \\ &\iff \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1} nX^n = \frac{X}{(1+X)^2}\end{aligned}$$

On remplace X par x^2 et on a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1} nX^n = \frac{X}{(1+X)^2} &\iff \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1} nx^{2n} = \frac{x^2}{(1+x^2)^2} \\ &\iff x \times \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1} nx^{2n} = x \times \frac{x^2}{(1+x^2)^2} \\ &\iff \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1} nx^{2n+1} = \frac{x^3}{(1+x^2)^2}\end{aligned}$$

5. $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{n+1}$.

On pose $a_n = \frac{(-1)^n}{n!}$, et on a :

$$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = |\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{(-1)^n}| = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$$

Donc, $\lim_{n\to+\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = 0$.
Ainsi, $R = +\infty$.
D'après les fonctions de référence, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^n}{n!} = e^{-x} \iff x\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n!} = xe^{-x}$$