Mathématiques
Polynômes

BackToBasics

11 février 2023

Table des matières

1 Cours

Dans ce cours, nous allons revoir tout ce qui concerne les polynômes. Si vous avez des questions sur n'importe quel point du cours, n'hésitez pas à poser votre question dans le salon dédié ou par messages privés sur Discord à **Swarwerth#2943**.

1.1 Définitions et vocabulaire

Définition 1.1 : Polynôme

Un **polynôme** à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une expression de la forme

$$P(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_2X^2 + a_1X + a_0$$

avec $n \in \mathbb{N}$ le **degré** de P et les **coefficients** du polynôme $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{K}$ (où $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
On dit alors que $P \in \mathbb{K}[X]$.

Propriété 1.2 : Opérations sur les polynômes et degré

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$,

$deg(P \times Q) = deg(P) + deg(Q)$.
$deg(P + Q) = max(deg(P),\ deg(Q))$.

Exemple d'opérations sur les polynômes

Soient $P(X) = 3X^3 + 4X + 5$ et $Q(X) = 4X^2 + 3$.

$$\begin{aligned}(P+Q)(X) &= 3X^3 + 4X + 5 + 4X^2 + 3\\ &= 3X^3 + 4X^2 + 4X + 8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(P\times Q)(X) &= (3X^3 + 4X + 5)(4X^2 + 3)\\ &= 3X^3 \times 4X^2 + 3X^3 \times 3 + 4X \times 4X^2 + 4X \times 3 + 5 \times 4X^2 + 5 \times 3\\ &= 12X^5 + 9X^3 + 16X^3 + 12X + 20X^2 + 15\\ &= 12X^5 + 25X^3 + 20X^2 + 12X + 15\end{aligned}$$

1.2 Divisibilité et division euclidienne

Définition 2.1 : Divisibilité de polynômes

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$.
A **divise** B si et seulement si $\exists Q \in \mathbb{K}[X], B = AQ$.
On note alors $A \mid B$.

Propriété 2.2 : Divisibilité

Soient A, B, C trois polynômes non nuls à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- Si $A \mid B$ et $B \mid C$, alors $A \mid C$.
- Si $A \mid B$ et $B \mid A$, alors $A = \lambda B$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.
- Si $A \mid B$ et $A \mid C$, alors $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2, A \mid BP + CQ$.

Propriété 2.3 : Divisibilité et degré

Soients A, B deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- Si $A \mid B$ et $B \neq 0$, alors $deg(A) \leq deg(B)$.
- Si $A \mid B$ et $deg(A) = deg(B)$, alors $A = \lambda B$ avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$

Théorème 2.4 : Division euclidienne

Soient A, B deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ avec $B \neq 0$.

$$\exists!\ (Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2, A = BQ + R \quad \text{avec } deg(R) < deg(B)$$

Le polynôme Q est le quotient et le polynôme R est le reste de la **division euclidienne** de A par B.

Propriété 2.5 : Divisibilité et division euclidienne

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$.
$B \mid A$ si et seulement si le reste de la division euclidienne de A par B est nul.

Exemple de division euclidienne

$$\begin{array}{rrrrr|l}
2X^4 & & -X^2 & +X & -5 & X^2+X-2 \\ \cline{6-6}
-2X^4 & -2X^3 & +4X^2 & & & 2X^2-2X+5 \\ \cline{1-3}
& -2X^3 & +3X^2 & +X & & \\
& 2X^3 & +2X^2 & -4X & & \\ \cline{2-4}
& & 5X^2 & -3X & -5 & \\
& & -5X^2 & -5X & +10 & \\ \cline{3-5}
& & & -8X & +5 &
\end{array}$$

Donc, $2X^4 - X^2 + X - 5 = (X^2 + X - 2)(2X^2 - 2X + 5) - 8X + 5$.

1.3 Racines d'un polynôme

Définition 3.1 : Racine d'un polynôme

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
On appelle **racine du polynôme** P tout élément $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $P(\alpha) = 0$.

Propriété 3.2 : Racine et divisibilité

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
$\alpha \in \mathbb{K}$ est une racine de P si et seulement si $(X - \alpha) \mid P$.

Définition 3.3 : Multiplicité d'une racine

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}*$.
On dit que α est une **racine de multiplicité** n (ou d'ordre n) si $(X - \alpha)^n \mid P$ et que $(X - \alpha)^{n+1} \nmid P$.

On parle de **racine simple** lorsque $n = 1$ et de **racine double** lorsque $n = 2$.

Propriété 3.4 : Propriétés d'une racine

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Il existe une équivalence entre ces trois points :
- α est une racine de multiplicité n de P
- $\exists Q \in \mathbb{K}[X], P = (X - \alpha)^n Q$ avec $Q(\alpha) \neq 0$
- $P(\alpha) = P'(\alpha) = ... = P^{(n-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(n)} \neq 0$

Théorème 3.5 : Théorème de d'Alembert-Gauss

Tout polynôme à coefficients complexes de degré $n \geq 1$ a au moins une racine dans $\mathbb{C}$. Il admet exactement n racines si on compte chaque racine avec sa multiplicité.

Exemple d'un polynôme du second degré

Soit $P(X) = aX^2 + bX + c$ un polynôme de degré 2 à coefficients réels, avec $a \neq 0$.
- Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, alors P admet 2 racines réelles distinctes $\dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, alors P admet 2 racines complexes distinctes $\dfrac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ et $\dfrac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$, alors P admet une racine double $\dfrac{-b}{2a}$.

Théorème 3.6 : Degré et racines

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \geq 1$.
Alors, P admet au plus n racines dans $\mathbb{K}$.

1.4 Factorisation

Définition 4.1 : Polynômes irréductibles

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré $n \geq 1$.
On dit que P est **irréductible** si pour tout $Q \in \mathbb{K}[X]$ divisant P, alors

- Soit $Q \in \mathbb{K}*$
- Soit $\exists \lambda \in \mathbb{K}*, Q = \lambda P$

Théorème 4.2 : Factorisation dans l'ensemble des polynômes complexes

Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les **polynôme de degré 1**.
Donc, pour $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 1$, la factorisation s'écrit

$$P = \lambda(X - \alpha_1)^{k_1} \times (X - \alpha_2)^{k_2} \times ... \times (X - \alpha_r)^{k_r}$$

avec $\alpha_1, ..., \alpha_r$ les racines distinctes de P et $k_1, ..., k_r$ leur multiplicité.

Théorème 4.3 : Factorisation dans l'ensemble des polynômes réels

Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les **polynôme de degré 1** et les **polynômes de degré 2** donc leur discriminant $\Delta < 0$.
Donc, pour $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geq 1$, la factorisation s'écrit

$$P = \lambda(X - \alpha_1)^{k_1} \times (X - \alpha_2)^{k_2} \times ... \times (X - \alpha_r)^{k_r} \times Q_1^{l_1} \times ... \times Q_s^{l_s}$$

avec $\alpha_1, ..., \alpha_r$ les racines réelles distinctes de P et $k_1, ..., k_r$ leur multiplicité et Q_i les polynômes irréductibles de degré 2 et de multiplicité l_i

2 Exercices

Nous avons essayé de mettre l'ensemble des connaissance à savoir pour les rattrapages au niveau du chapitre sur les polynômes. Évidemment, vous avez le droit de relire le cours ou de poser des questions. Ces exercices permettront de pointer les lacunes que vous pourriez avoir.

2.1 Exercice 1 : Division euclidienne

1. Soit $(A, B) \in \mathbb{R}[X]^2$ avec $B \neq 0$. Énoncer le théorème de la division euclidienne de A par B.
2. Effectuer la division euclidienne de $X^4 + 5X^3 + 12X^2 + 19X - 7$ par $X^2 + 3X - 1$.
3. Effectuer la division euclidienne de $X^4 - 4X^3 - 9X^2 + 27X + 38$ par $X^2 - X - 7$

2.2 Exercice 2 : Divisibilité

Soit $n \geq 2$,

1. Montrer que le polynôme $P(X) = (X + 1)^{2n} - 1$ est divisible par $X^2 + 2X$.
2. Montrer que 1 est racine du polynôme $Q(X) = nX^{n+2} - (n + 2)X^{n+1} + (n + 2)X - n$. Quelle est sa multiplicité ?

2.3 Exercice 3 : Racines et polynômes irréductibles

On considère le polynôme $P(X) = X^4 + 2X^3 - X - 2$

1. Montrer que 1 et -2 sont racines de P.
2. En vous aidant d'une division euclidienne, factoriser P en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

2.4 Exercice 4 : Factorisation

1. Factoriser $X^4 - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.
2. Factoriser en utilisant une identification $X^3 - 2X^2 - 5X + 6$ sachant que 1 est une racine de ce polynôme.
3. Calculer la division euclidienne de $X^3 - X^2 - 10X - 8$ par $X + 1$ et en déduire une factorisation.

3 Correction

Voici la correction des exercices du PDF. Nous vous invitons à faire les exercices avant de lire la correction. Pour toute question, merci de vous rediriger vers le cours et les professeurs présents.

3.1 Exercice 1 : Division euclidienne

1. Soit $(A, B) \in \mathbb{R}[X]^2$ avec $B \neq 0$. Énoncer le théorème de la division euclidienne de A par B.

Théorème de la division euclidienne

Soient A, B deux polynômes dans $\mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0$.

$$\exists!(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2, A = BQ + R \quad \text{avec } deg(R) < deg(B)$$

2. Effectuer la division euclidienne de $X^4 + 5X^3 + 12X^2 + 19X - 7$ par $X^2 + 3X - 1$.

Division euclidienne de $X^4 + 5X^3 + 12X^2 + 19X - 7$ par $X^2 + 3X - 1$

$$\begin{array}{r|l}
X^4 + 5X^3 + 12X^2 + 19X - 7 & X^2 + 3X - 1 \\ \cline{2-2}
- X^4 - 3X^3 \quad + X^2 \qquad\qquad\quad & X^2 + 2X + 7 \\ \cline{1-1}
2X^3 + 13X^2 + 19X \quad\; & \\
- 2X^3 \; - 6X^2 \; + 2X \quad\; & \\ \cline{1-1}
7X^2 + 21X - 7 & \\
- 7X^2 - 21X + 7 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Donc, on a $X^4 + 5X^3 + 12X^2 + 19X - 7 = (X^2 + 3X - 1)(X^2 + 2X + 7)$.

3. Effectuer la division euclidienne de $X^4 - 4X^3 - 9X^2 + 27X + 38$ par $X^2 - X - 7$.

Division euclidienne de $X^4 - 4X^3 - 9X^2 + 27X + 38$ par $X^2 - X - 7$

$$\begin{array}{r|l}
X^4 - 4X^3 - 9X^2 + 27X + 38 & X^2 - X - 7 \\ \cline{2-2}
- X^4 \; + X^3 + 7X^2 \qquad\qquad\quad & X^2 - 3X - 5 \\ \cline{1-1}
- 3X^3 - 2X^2 + 27X \quad\;\; & \\
3X^3 - 3X^2 - 21X \quad\;\; & \\ \cline{1-1}
- 5X^2 \; + 6X + 38 & \\
5X^2 \; - 5X - 35 & \\ \cline{1-1}
X \; + 3 &
\end{array}$$

Donc, on a $X^4 - 4X^3 - 9X^2 + 27X + 38 = (X^2 - X - 7)(X^2 - 3X - 5) + X + 3$.

3.2 Exercice 2 : Divisibilité

Soit $n \geq 2$,

1. Montrer que le polynôme $P(X) = (X+1)^{2n} - 1$ est divisible par $X^2 + 2X$.

Divisibilité de $P(X)$ par $X^2 + 2X$

On cherche

$$\begin{aligned} X^2 + 2X \mid P(X) &\iff X(X+2) \mid P(X) \\ &\iff (X-0) \mid P \text{ et } (X+2) \mid P(X) \\ &\iff P(0) = P(-2) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(0) &= (0+1)^{2n} - 1 = 1 - 1 = 0 \\ P(-2) &= (-2+1)^{2n} - 1 = 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Donc, $X^2 + 2X \mid P$.

2. Montrer que 1 est racine du polynôme $Q(X) = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$. Quelle est sa multiplicité ?

1 racine du polynôme $Q(X)$

$Q(1) = n \times 1^{n+2} - (n+2) \times 1^{n+1} + (n+2) \times 1 - n = n - (n+2) + (n+2) - n = 0$.
Donc, 1 est racine de $Q(X)$.

De plus, on a :

$$Q'(X) = n(n+2)X^{n+1} - (n+1)(n+2)X^n + (n+2)$$

et $Q'(1) = 0$.

$$Q''(X) = n(n+1)(n+2)X^n - n(n+1)(n+2)X^{n-1}$$

et $Q''(1) = 0$.

$$Q^{(3)}(X) = n^2(n+1)(n+2)X^{n-1} - (n-1)n(n+1)(n+2)X^{n-2}$$

et $Q^{(3)}(1) = n(n+1)(n+2)$.
Or, $n \geq 2$,

Ainsi, 1 est racine de multiplicité exactement 3 de Q.

3.3 Exercice 3 : Racines et polynômes irréductibles

On considère le polynôme $P(X) = X^4 + 2X^3 - X - 2$

1. Montrer que 1 et -2 sont racines de P.

Racines de P

$$\begin{aligned} P(1) &= 1^4 + 2 \times 1^3 - 1 - 2 = 0 \\ P(-2) &= (-2)^4 + 2 \times (-2)^3 - (-2) - 2 = 0 \end{aligned}$$

Donc, 1 et -2 sont racines de P.

2. En vous aidant d'une division euclidienne, factoriser P en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Factorisation de P

D'après la question (1), on a :

$$\begin{aligned} P(X) &= X^4 + 2X^3 - X - 2 \\ &= (X-1)(X+2)Q(X) \quad \text{avec } deg(Q) = 2 \\ &= (X^2 + 2X - X - 2)Q(X) \\ &= (X^2 + X - 2)Q(X) \end{aligned}$$

Pour déterminer $Q(X)$, nous pouvons utiliser la division euclidienne.

$$\begin{array}{rrrrr|l} X^4 & +2X^3 & & -X & -2 & X^2+X-2 \\ \cline{6-6} -X^4 & -X^3 & +2X^2 & & & X^2+X+1 \\ \cline{1-3} & X^3 & +2X^2 & -X & & \\ & -X^3 & -X^2 & +2X & & \\ \cline{2-4} & & X^2 & +X & -2 & \\ & & -X^2 & -X & +2 & \\ \cline{3-5} & & & & 0 & \end{array}$$

Donc, on a :

$$\begin{aligned} P(X) &= (X^2 + X - 2)(X^2 + X + 1) \\ &= (X-1)(X+2)(X^2 + X + 1) \end{aligned}$$

Sachant que $\Delta(X^2 + X + 1) < 0$, $X^2 + X + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.
D'où la factorisation de P en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

3.4 Exercice 4 : Factorisation

1. Factoriser $X^4 - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.

Factorisation de $X^4 - 1$

$$\begin{aligned} X^4 - 1 &= (X^2)^2 - 1^2 \\ &= (X^2 - 1)(X^2 + 1) \\ &= (X^2 - 1^2)(X^2 - i^2) \\ &= (X - 1)(X + 1)(X - i)(X + i) \end{aligned}$$

2. Factoriser en utilisant une identification $X^3 - 2X^2 - 5X + 6$ sachant que 1 est une racine de ce polynôme.

Factorisation de $X^3 - 2X^2 - 5X + 6$

$$\begin{aligned} X^3 - 2X^2 - 5X + 6 &= (X - 1)Q(X) \quad \text{avec } deg(Q) = 2 \\ &= (X - 1)(aX^2 + bX + c) \quad \text{avec } (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \\ &= aX^3 + bX^2 + cX - aX^2 - bX - c \\ &= aX^3 + (b - a)X^2 + (c - b)X - c \end{aligned}$$

Par identification, on a :

$$\begin{cases} a & 1 \\ b - a & -2 \\ c - b & -5 \\ -c & = 6 \end{cases}$$

On a donc $a = 1$, $b = -1$ et $c = -6$.
Ainsi, $X^3 - 2X^2 - 5X + 6 = (X - 1)(X^2 - X - 6)$.
Or, $\Delta(X^2 - X - 6) = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25 = 5^2 > 0$.
Donc le polynôme est réductible.

Les racines de $X^2 - X - 6$ sont :

$$X_1 = \frac{1 - 5}{2 \times 1} = -2 \text{ et } X_2 = \frac{1 + 5}{2 \times 1} = 3$$

Donc, $X^3 - 2X^2 - 5X + 6 = (X - 1)(X + 2)(X - 3)$.

3. Calculer la division euclidienne de $X^3 - X^2 - 10X - 8$ par $X + 1$ et en déduire une factorisation.

Factorisation de $X^3 - X^2 - 10X - 8$ par $X + 1$

$$
\begin{array}{rrrr|l}
X^3 & -X^2 & -10X & -8 & X+1 \\
\cline{5-5}
-X^3 & -X^2 & & & X^2 - 2X - 8 \\
\cline{1-2}
 & -2X^2 & -10X & & \\
 & 2X^2 & +2X & & \\
\cline{2-3}
 & & -8X & -8 & \\
 & & 8X & +8 & \\
\cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}
$$

On a alors $X^3 - X^2 - 10X - 8 = (X + 1)(X^2 - 2X - 8)$.
Or, $\Delta(X^2 - 2X - 8) = 36 = 6^2 > 0$.
Donc, le polynôme est réductible.

Les racines de $X^2 - 2X - 8$ sont :

$$X_1 = \frac{2-6}{2 \times 1} = -2 \text{ et } X_2 = \frac{2+6}{2 \times 1} = 4$$

Donc, $X^3 - X^2 - 10X - 8 = (X + 1)(X + 2)(X - 4)$.