

基础

1.1【基本定义】
图像：二维函数f(x,y,xy) 空间坐标,t值 为强度或灰度级
数字图像：有限的离散的f(x,y)
像素：数字图像的最小单元
应用领域：医学成像、遥感、航天应用、天文学
图像分类：电磁波谱、电子学的、声学的、计算机科学的
项目：TPAMI, tip, Tmi, medical image analysis

1.2【人类视觉感知】
视锥细胞、视杆细胞，小孔成像的相似三角形

1.3【图像传感要素】
F(x,y)=(x,y)I(x,y,I) 发光强度，r 反射

1.4【图像采样量化】可讨论论文-300dpi
空间分辨率：单位距离上可识别的 time pairs 的最大数量
强度分辨率：可对分辨出的最小强度级变化，一般2^{16,16.32}

1.4.4 插值
最近邻：可能导致扭曲，按最近的
双线性：v=ax+by+cx+dy
双立方：v(x,y)=ΣΣΣΣ aijklx^jy^k



1.5【像素关系】
邻域 neighbor: N₄十字，N₈对角，N₈=N₄∪N_D
邻接 adjacency: 4邻接 (q ∈ N₄(p)), 8邻接 N₈(p),
m(q ∈ N₄(p), or q ∈ N_D(p) and N₄(p) ∩ N_D(p) = φ)
路径 path: 一组点。长度为点数目，有 4、8、3 种路径
连通分量 connected components: 图像子集 S 必须是方的的
中连接着像素的组 (Y=必须给出邻接的类型) 才能求
联通集 connected set: 只要有一个连通的 S 集(必方)
区域 region: 即联通集。两区域相邻意味着 R1∪R2 为联通
集，否则两区域不相邻。 (必Y)
边界 boundaries: 前景为全部不相邻区域之并集，其余为背
景Ru^c。区域 R 的边界为 R 中 与 R^c 邻接的像素集合
(必Y，一般使用 8 邻接定义)
距离：满足非负，对称，三角不等式的函数 D(p,q)
欧氏距离=二范数，D4 城市街区距离=横纵绝对值之和，
D8 棋盘距离=横纵绝对值最大值

1.6【基本数学工具】
1.6.1 数学概念
Elementwise product: 两矩阵对应位置相乘
Matrix product: 矩阵乘法
算子: H(f(x,y))=F(x,y), 线性H(af+bg)=aF+bG
union 并, intersection 交, mutually exclusive 互斥也即
Disjoint 不相交, complement 补集, difference 差集, set
universe 全集
空间算子: 单像素算子如强度变换映射(s=Tz); 邻域算子如
均值滤波; 几何变换如仿射变换, 某点改变后坐标=矩阵*该
点原来的坐标

identity 等价: [1,0,0,1,0,1]为前两位，x 竖 y 横下同
缩放/反射/旋转: [cx,0,0,0,cy,0]
旋转: [cθ, -sθ,0,sθ,0,0] 顺时针转 θ 为负,可用(0,y)验证
平移 translation: [1,0,0,0,1,0,y]
错切 shear 向左拉伸, 垂直[1,0,sx,0,1,0],水平[1,0,0,sx,1,0]
1.6.2 正向变换 Forward transform(如 fft 前的 shift):
T(u,v)=ΣΣ f(x,y)exp(-j2πux/T),f(x,y)=ΣΣ s(x,y)exp(j2πux/T)
判断其可分离性: r(x,y,u,v)=r₁(x,u)r₂(y,v)
判断其对称性: 当可分离, 且r₁(x,u)=r₂(y,v)
例如傅里叶核r₁fft就是 xy 可分离(0,1), xy 对称的核
核转置写法: T=AFA, 其中 F 为图像方阵, A 为变换核矩
阵且a,j,j=r1(1,j), T 为变换后结果
矩阵变换流程: F→BAFAB, 如傅里叶, walsh, 哈达玛变
换, 离散余弦, haar 变换都是。先正向再变, 反向再逆变

1.6.3 概率方法
强度值为随机变量z_k,k=1~255 则概率为灰度值出现次数
p(z_k)=n_k/MN, mean=Σz_kp(z_k), var²=Σ(z_k-m)²p(z_k)
1.6.3 概率方法
强度值为随机变量z_k,k=1~255 则概率为灰度值出现次数
p(z_k)=n_k/MN, mean=Σz_kp(z_k), var²=Σ(z_k-m)²p(z_k)

1.6.3 概率方法
强度值为随机变量z_k,k=1~255 则概率为灰度值出现次数
p(z_k)=n_k/MN, mean=Σz_kp(z_k), var²=Σ(z_k-m)²p(z_k)

第二章 强度变换空域滤波

2.1【定义】
强度变换 intensity transformation: s=T(r), r ∈ (0,1), s/r 为变
换前后图像的像素强度; 空域滤波 spatial filtering, 滤波核
filter=mask=kernel=template=window
2.1.2【强度变换】
线性变换: negative 变换(s=L-1-L 为灰度级), 增强灰色、
白色信号, 尤其是黑背景主导下的前景; Identity 变换(s=r)
对数 logarithmic 变换: log(s=c*log(1+r)); 常数, r>0, 降低
暗像素压缩亮像素, 压缩动态范围; inverse-log(exp r)也叫
exponential 反的, 但也压缩动态范围。
常数 power-law 变换: gamma(s=c*r^γ), γ<1 变亮,
γ>1 变暗, 相比对比度变换, 参数多, 可调范围更大。

2.1.3【直方图均衡化】
直方图 histogram 统计: 1.算出每个灰度级的个数n_k,
k=0~L-1; 2.p(k)=Σn_k/MN
直方图变换: 正向变换 s=T(r),0 ≤ r,s ≤ L-1,T 为单
调monotonically 增函数; 逆变换 r=T⁻¹(s)严格单调递减。

2.1.3.1 直方图均衡 HE, 概率密度变换
1、先计算原始图像强度级 r 的 PDF, 记作: 连续p_r(r),

一般给出; 或离散的 p_r(k,r), 需要自己计算。
2、按如下公式计算, 得到 s=T(r)或 S_k=T(r_k)
$$s = (L-1) \int_0^r p_r(w)dw$$
$$S_k = T(r_k) = (L-1) \sum_{j=0}^k p_r(r_j), k = 0, 1, 2, \dots, L-1$$

s=T(r)的概率密度函数为
$$p_s(s) = p_r(r) \frac{dr}{ds} = \frac{2r}{(L-1) \left| \frac{ds}{dr} \right|} = \frac{2r}{(L-1) \frac{(L-1)}{2r}} = \frac{1}{L-1}$$

3、根据 p_s 计算出所有的 s_k, 若是离散值, 则 sk 最后要四舍
五入。对离散的: p_s(s_k) = (相邻s_k对应的所有n_k和)/MN

2.4【空域滤波】
相关>卷积, 空中心角卷积(x,y), 无需旋转卷积核直接滤波
卷积>卷积, f(x,y), f(x,y), 180度旋转卷积核
2.5【平滑低通滤波】
平滑滤波(有低通效果), 如 box filter=1/9*[1,1,1,1,1,1,1,1,1],
gaussian kernel=1/16*[1,2,1,2,4,2,1,2,1]
Order-统计排序线性滤波, 如中值 (专去椒盐)

2.6【锐化高通滤波】
2.6.1 导数 derivative 及其性质
一阶导数∂f/∂x = f(x+1)-f(x)
二阶导数∂²f/∂x² = f(x+1)+f(x-1)-2f(x)
2.6.2 laplacian 算子
定义为 ∇²f = ∂²f/∂x² + ∂²f/∂y², 离散情况下为计算核[0,1,0,-1,4,0,1,0]。具有各向同性或旋转不变性(∇²(f^o)) = ∇²(∇²(f))
线性性∇²(f+g) = ∇²f + ∇²g, 以及 ∂/∂x (f+g) = ∂f/∂x + ∂g/∂x
拉普拉斯锐化: g(x,y) = f(x,y)+α[∇²f(x,y)], c 取±1,
符号与滤波核的中心相同。

2.6.3 梯度 gradient
梯度幅值 magnitude: M(x,y) = mag(∇f) = √g_x² + g_y²,
非线性, 旋转可变
Roberts 交叉梯度算子: [-1,0,1]和[0,-1,1], 梯度值为
M(x,y) = [(Z₀-Z₂)² + (Z₄-Z₆)²]^{1/2} = |z₀-z₂| + |z₄-z₆|
Sobel 梯度算子, [-1,-2,1,0,0,1,2,1],逆时针转90°, 梯度值
同上。
定义: ∇f = grad (f) = [∂f/∂x, ∂f/∂y], 线性, 非旋转不变;
梯度幅值 magnitude: M(x,y) = mag(∇f) = √g_x² + g_y²,
非线性, 旋转可变
Roberts 交叉梯度算子: [-1,0,1]和[0,-1,1], 梯度值为
M(x,y) = [(Z₀-Z₂)² + (Z₄-Z₆)²]^{1/2} = |z₀-z₂| + |z₄-z₆|
Sobel 梯度算子, [-1,-2,1,0,0,1,2,1],逆时针转90°, 梯度值
同上。

2.6.3 梯度 gradient
梯度幅值 magnitude: M(x,y) = mag(∇f) = √g_x² + g_y²,
非线性, 旋转可变
Roberts 交叉梯度算子: [-1,0,1]和[0,-1,1], 梯度值为
M(x,y) = [(Z₀-Z₂)² + (Z₄-Z₆)²]^{1/2} = |z₀-z₂| + |z₄-z₆|
Sobel 梯度算子, [-1,-2,1,0,0,1,2,1],逆时针转90°, 梯度值
同上。

2.6.3 梯度 gradient
梯度幅值 magnitude: M(x,y) = mag(∇f) = √g_x² + g_y²,
非线性, 旋转可变
Roberts 交叉梯度算子: [-1,0,1]和[0,-1,1], 梯度值为
M(x,y) = [(Z₀-Z₂)² + (Z₄-Z₆)²]^{1/2} = |z₀-z₂| + |z₄-z₆|
Sobel 梯度算子, [-1,-2,1,0,0,1,2,1],逆时针转90°, 梯度值
同上。

第三章 频域滤波

3.1【数学基础】
3.1.1 基本公式
欧拉公式: z = x + jy = |z|[cosθ + j sinθ] = |z|e^{jθ}
连续冲激函数δ(t): δ(0)=∞, 否则为 0; 在全实轴积分
为 1: 筛选性质∫_{-∞}[∞] f(t)δ(t-t₀)dt = f(t₀)
离散冲激函数: δ(0)=1, 否则为 0; 在整数轴积分值为 1
筛选性质Σ_{n=-∞}[∞] f(n)δ(n-x₀) = f(x₀)
离散冲激函数δ_D(t) = Σ_{n=-∞}[∞] δ(t-nΔT)

3.1.2 傅里叶级数
定义: 一组不同频率的正弦余弦函数的加权和, 是周期函
数的另一种时域表达式形式。任意周期函数都可以展开为傅里
叶级数, 即下式: w₀=2π/T 为基础频率
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi n t/T}$$

其中, 系数求解方法为 (n = 0, ±1, ±2, ...)
$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-j2\pi n x/T} dx$$

也可写作 f(t) = a₀ + Σ_{n=1}[∞] [a_ncos(nω₀t) + b_nsin(nω₀t)],
而 c_n 是 an 和 bn 的统一定义。
给定函数 f(t) 求其傅里叶展开: 先用 f 求 c_n, 然后直接写出
f(t)即可。

3.1.3 傅里叶变换
定义: 将 f(t)变为 F(u), 获取(原时域函数展成傅里叶级数)
其中, 在(频率为 u 的正弦波)前乘系数。其原变换和逆变换:
$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j2\pi u t} dt$$

性质: 线性性(F(af+bg)=aF+bG 反之亦然)
时移性F(f(t-t₀)) = e^{-j2πut₀} F(u)
F⁻¹(F(u-u₀)) = e^{j2πut₀} f(t)
对称性F(f(t)) = F(u/a)/|a|
傅里叶对偶(F(At)) = 2πf(u)
卷积(连续)f(f+g) = FG, f(f+g) = F*G/2π
求变换: 周期函数先傅展再傅变, 非周期函数直接傅变
例子: 方波的傅里叶变换为辛格函数(常值也)
$$f(t) = \begin{cases} A, & -\frac{W}{2} \leq t \leq \frac{W}{2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j2\pi u t} dt = \int_{-W/2}^{W/2} A e^{-j2\pi u t} dt$$

3.1.3 傅里叶变换
定义: 将 f(t)变为 F(u), 获取(原时域函数展成傅里叶级数)
其中, 在(频率为 u 的正弦波)前乘系数。其原变换和逆变换:
$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j2\pi u t} dt$$

性质: 线性性(F(af+bg)=aF+bG 反之亦然)
时移性F(f(t-t₀)) = e^{-j2πut₀} F(u)
F⁻¹(F(u-u₀)) = e^{j2πut₀} f(t)
对称性F(f(t)) = F(u/a)/|a|
傅里叶对偶(F(At)) = 2πf(u)
卷积(连续)f(f+g) = FG, f(f+g) = F*G/2π
求变换: 周期函数先傅展再傅变, 非周期函数直接傅变
例子: 方波的傅里叶变换为辛格函数(常值也)
$$f(t) = \begin{cases} A, & -\frac{W}{2} \leq t \leq \frac{W}{2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j2\pi u t} dt = \int_{-W/2}^{W/2} A e^{-j2\pi u t} dt$$

例子: 冲激函数δ(t) + 1, 对于δ(t-t₀) 有
$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) e^{-j2\pi u t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi u t} \delta(t-t_0) dt$$

例子: 冲激序列, 周期函数先展开再变换
即f(t) = Σ_{n=-∞}[∞] δ(t - nΔT) = 1/ΔT Σ_{n=-∞}[∞] e^{j2πn t/ΔT}
其傅里叶变换为F(u) = 1/ΔT Σ_{n=-∞}[∞] δ(u - n/ΔT)
指数函数e^{j2πat}μ, F(u) = δ(u - a)
连续卷积: f(t) * h(t) = ∫_{-∞}[∞] f(τ)h(t-τ)dτ
卷积微分: w(x) * h(x) = Σ_{n=-∞}[∞] a_n w(x)h(x-s)

3.2【采样定理】
离散冲激采样:f(t) = f(t)δ_{ΔT}(t) = Σ_{n=-∞}[∞] f(t)δ(t - nΔT)
F(f(t)) = F(f(t)) * F(δ(t - nΔT)) = 1/ΔT Σ_{n=-∞}[∞] F(u - n/ΔT)
等价于以1/ΔT为周期将F(u)左右平移。
采样定理:若有连续函数最大频率为μ_{max}, 则离散冲激采
样频率1/ΔT应有 1/ΔT > 2μ_{max}, 否则可能频域混叠(alias), 如下图

理想低通滤波: H(u) = ΔT, μ ∈ [-μ_m, μ_m] - 低通滤波结果
的变换时域结果: F(u) = Σ_{n=-∞}[∞] sinc(ΔT u) F(nΔT)
频带混叠的成因: 时域有限一般信号, 其频带一定无限宽
(采样带来截断); 时域无限的信号, 频带一定有限; 但若
频带有限, 且信号呈周期时, 截断时可能整周期, 此时不会
混叠。
3.3【ID 高散傅里叶】
定义: 用离散冲激序列对连续函数采样, F(u) = Σ_{n=-∞}[∞] f_n e^{-j2πun}ΔT, f_n = f(nΔT)离散, F(u)连续, 周期与μ
有关。F(u) = Σ_{n=-∞}[∞] f(x) e^{-j2πux}, f(x) = 1/M Σ_{n=-∞}[∞] F(u) e^{j2πux}
DFT 和逆 DFT 都是周期性的, 周期为 M, 与时域信号有关
例, F(0) = Σ_{n=-∞}[∞] f(x) e^{-j2π*0*x} = F(1) = Σ_{n=-∞}[∞] f(x) e^{-j2π*1*x}
逆, f(0) = 1/M Σ_{n=-∞}[∞] F(u) e^{j2π*0*u} (...)
循环卷积, 也叫圆卷积, 计算 g(x) = f(x) * h(x) = Σ_{m=-∞}[∞] f(m)h(x-m), f 顺时针循环, h 逆时针循环。
EXAMPLE: Circular convolution of f(x)=[1,2,0] and h(x)=[3,5,4]

3.3【ID 高散傅里叶】
定义: 用离散冲激序列对连续函数采样, F(u) = Σ_{n=-∞}[∞] f_n e^{-j2πun}ΔT, f_n = f(nΔT)离散, F(u)连续, 周期与μ
有关。F(u) = Σ_{n=-∞}[∞] f(x) e^{-j2πux}, f(x) = 1/M Σ_{n=-∞}[∞] F(u) e^{j2πux}
DFT 和逆 DFT 都是周期性的, 周期为 M, 与时域信号有关
例, F(0) = Σ_{n=-∞}[∞] f(x) e^{-j2π*0*x} = F(1) = Σ_{n=-∞}[∞] f(x) e^{-j2π*1*x}
逆, f(0) = 1/M Σ_{n=-∞}[∞] F(u) e^{j2π*0*u} (...)
循环卷积, 也叫圆卷积, 计算 g(x) = f(x) * h(x) = Σ_{m=-∞}[∞] f(m)h(x-m), f 顺时针循环, h 逆时针循环。
EXAMPLE: Circular convolution of f(x)=[1,2,0] and h(x)=[3,5,4]

3.3【ID 高散傅里叶】
定义: 用离散冲激序列对连续函数采样, F(u) = Σ_{n=-∞}[∞] f_n e^{-j2πun}ΔT, f_n = f(nΔT)离散, F(u)连续, 周期与μ
有关。F(u) = Σ_{n=-∞}[∞] f(x) e^{-j2πux}, f(x) = 1/M Σ_{n=-∞}[∞] F(u) e^{j2πux}
DFT 和逆 DFT 都是周期性的, 周期为 M, 与时域信号有关
例, F(0) = Σ_{n=-∞}[∞] f(x) e^{-j2π*0*x} = F(1) = Σ_{n=-∞}[∞] f(x) e^{-j2π*1*x}
逆, f(0) = 1/M Σ_{n=-∞}[∞] F(u) e^{j2π*0*u} (...)
循环卷积, 也叫圆卷积, 计算 g(x) = f(x) * h(x) = Σ_{m=-∞}[∞] f(m)h(x-m), f 顺时针循环, h 逆时针循环。
EXAMPLE: Circular convolution of f(x)=[1,2,0] and h(x)=[3,5,4]

3.3【ID 高散傅里叶】
定义: 用离散冲激序列对连续函数采样, F(u) = Σ_{n=-∞}[∞] f_n e^{-j2πun}ΔT, f_n = f(nΔT)离散, F(u)连续, 周期与μ
有关。F(u) = Σ_{n=-∞}[∞] f(x) e^{-j2πux}, f(x) = 1/M Σ_{n=-∞}[∞] F(u) e^{j2πux}
DFT 和逆 DFT 都是周期性的, 周期为 M, 与时域信号有关
例, F(0) = Σ_{n=-∞}[∞] f(x) e^{-j2π*0*x} = F(1) = Σ_{n=-∞}[∞] f(x) e^{-j2π*1*x}
逆, f(0) = 1/M Σ_{n=-∞}[∞] F(u) e^{j2π*0*u} (...)
循环卷积, 也叫圆卷积, 计算 g(x) = f(x) * h(x) = Σ_{m=-∞}[∞] f(m)h(x-m), f 顺时针循环, h 逆时针循环。
EXAMPLE: Circular convolution of f(x)=[1,2,0] and h(x)=[3,5,4]

3.5【2D-DFT 性质】
平移: f(x,y) e^{j2π(u₀x + v₀y)/N} ⇔ F(u-v₀, v-v₀)
极坐标变换: x = r cos θ, y = r sin θ, u = u cos θ, v = v sin θ
f(r, θ + θ₀) ⇔ F(u, φ + θ₀), 旋转 f 后 F 也旋转相同角度
周期: F(u,v) = F(u+M, v+N), f(x,y) = f(x+M, y+N)
频带混叠: f(x) = (1-x)² - F(u-v₀), 重排(非平移)
离散函数是偶函数 iff 所有样本和为 0
离散函数 f 的偶共轭对称: F^{*}(u,v) = F(u,-v)
函数 f 的偶共轭对称: F^{*}(u,v) = -F(u,-v)
实函数的 FT: 实部偶, 虚部奇; 幅值偶, 相位奇
对称的 FT: 实部偶, 虚部奇; 幅值偶, 相位偶
对称: f 实+偶, F 也为实+偶; f 实+奇, F 为纯虚+奇
幅值 = √R² + I², 相位 = arctan(I/R), 功率 = R² + I²
直流量 f(u,v) = M * N, f(x,y) 平均值, 是频谱最大分量
核: f(x,y)h(x,y) = Σ_{m=-∞}[∞] Σ_{n=-∞}[∞] f(m,n)h(-m,-n)
交叠误差: 使用循环卷积计算卷积时, 由于 f 和 h 的周期性
直接计算 f*g 会叠, 导致卷积结果错误。因此需要在 f 和 g
末尾补 0, 使得补零后长度 P ≥ len(f) + len(g) - 1, 避免免
一周环绕。若两图像尺寸相等, 则可令 P = 2len(f) = 2len(g)

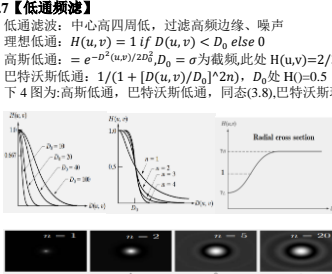
3D cmo
f(x,y,z) = {f(x,y), 0 ≤ x ≤ A-1 and 0 ≤ y ≤ B-1
0, 其他
h_{xy}(x,y) = {h(x,y), 0 ≤ x ≤ A-1 and 0 ≤ y ≤ B-1
0, 其他
P = A + C - 1, Q = B + D - 1

DFT 算法对偶尺寸计算更快, 因此最好 padding 到偶数
频谱混叠: 加窗截断时, 0 处的能量分散到宽频带去, 但
整周期截断不会混叠。改善: 可加合适窗函数或延长时间窗

Rect[a,b]	absinc(ua)e ^{-jπ(u+vb)}
Sin(2π(u ₀ +v ₀)/N)	1/2 [δ(u-u ₀ , v+v ₀) + δ(u-u ₀ , v-v ₀)]
Cos(2π(u ₀ +v ₀)/N)	1/2 [δ(u-u ₀ , v+v ₀) + δ(u-u ₀ , v-v ₀)]
A2πσ² e ^{-2πσ²(t²+z²)/Δ²}	Ae ^{-(u²+v²)/Δ²}
(∂/∂u) f(t,z)	(2j2πu)F(u,v)
(∂/∂v) f(t,z)	(2j2πv)F(u,v)
(∂²/∂u²) f(t,z)	(2j2πu)² F(u,v)
(∂²/∂v²) f(t,z)	(2j2πv)² F(u,v)

3.6【频域滤波】
定义: g = F⁻¹(H(u,v)F(u,v)), H 为频率传递函数
振铃效应: 空域填充 0, 导致边缘不连续, 进而导致振铃
特效: 高通滤波器和一阶巴特沃斯没有振铃
出现原因: 函数中存在度过大的“剧烈变化”区域
频域滤波步骤: 1.P-2M.Q-2N.填充 0; 2.在时域乘(-1)^{x+y}
位移; 3.DFT; 4.构造大小为 P*Q 的实对称滤波核 H 并乘在
原图中点, 得到 G; 5.IDFT 和零频点位移; g_{xy}(x,y) =
real(F⁻¹(G(u,v))(-1)^{x+y}), 7.左上角切割 M*N 得结果。
注释: 时域与频域滤波的步骤是卷积定理。
高斯: 高斯的 DFT、IDFT 还是实高斯函数, 0 方差 =
Ae^{-u²/2/(2σ²)}, h(x) = √2πAe^{-x²/2/(2σ²)}, 当频域均值 0 时差
为 0, 对应空域均值 0, 但方差为 1/2πσ².某些滤波核=高斯 A
高斯 B

3.7【低通滤波】
低通滤波: 中心高四周低, 过滤高频边缘、噪声
理想低通: H(u,v) = 1 if D(u,v) < D₀ else 0
高通低通: = e^{-D²(u,v)/2D₀}, D₀ = σ 为截频, 截止 H(u,v)=2/3
巴特沃斯低通: 1/(1+[D(u,v)/D₀]²), D₀ 处 H(u,v)=0.5
下 4 图为: 高斯低通、巴特沃斯低通, 同态(3.8), 巴特沃斯低
通。



3.8【高通滤波】
高通滤波: 中心低四周高, 保留边缘
高通滤波: H_{HP} = 1 - H_{LP}(u,v)
*巴特沃斯高通: 1/(1+[D(u,v)/D₀]²)²ⁿ
拉普拉斯: ∇²f = F⁻¹[(∂²/∂x²) + (∂²/∂y²)](f) = f(x+1,y) + f(x-1,y) + f(x,y+1) + f(x,y-1) - 4f(x,y); 核
[0,1,0,1,-4,1,0,1]; 频率核H(u,v) = -4π²(u²+v²); 拉普
拉斯锐化增强后图像为g(x,y) = f(x,y) + cΔ²f(x,y), 其中 c=-1;
在频域中g(x,y) = F⁻¹{[1+4π²D²(u,v)]F(u,v)}
同态滤波: 1. 令 f=ir, p=ln(f)-ln(i)+ln(r) 2. 计算
P=DFT(p), P' = HP = HF[ln(i)] + HF[ln(r)], H 为同态核;
3.p=IDFT(P')=ln(i)+ln(r)(非求导): a₀ = e^p = i * r'
同态核: (f-u)_u = (f-u)_u [1 - e^{-c(u²+v²)/D₀²}] + y_u,
y_u < H(u,v) < y_u, y_u < 1 < y_u, c 用于控制尖锐度; 能够同
时压缩动态范围, 增加对比度

3.9【带通滤波】
理想带阻: H(u,v) = 0 if D ∈ [D₀, W/2 + D₀]
巴特沃斯带阻: H(u,v) = 1/[1+(D/(D₀² - D²)]²ⁿ
高斯带阻: H(u,v) = 1 - e^{-(D²-D₀²)/D₀²}, D₀ 截频, W 带宽
高通: 1-Direct: Notch: 滤波, 单点阻塞, 必定呈中心对称
可用高通自己带

4.1【数学基础】
欧氏空间Rⁿ内Rⁿ(实数)中(u,v) = u^Tv = Σ_{i=1}ⁿ u_iv_i
空间内Cⁿ(复数)中(u,v) = u^Hv = Σ_{i=1}ⁿ u_i*v_i = (v,u)^{*}
向量内积C(a,b)连续函数中(f,g) = ∫_a^b f(x)g(x)dx
积分为量 cos⁻¹(z,w)/||z||||w|| 正交基: (a₁,w₁) = 0(k=1,2)
正交基: (a₁,w₁) = 0(k=1,2) 基等于其共轭时简化为正交
实基关系: z = z_a + w_a 时, 系数a₁ = (w₁,z)/(w₁,w₁)

4.2【变换的矩阵形式】
A = [s₁₁...s_{1N}...1^T, T = AFA^T, F = A^TTA^T
计算正交变换: 检验基向量规范正交 → 得到变换矩阵 → 计算
变换和反变换
反变换: T = AFA^T, F = A^TTA^T
连续: f(x,y) = Σ_{m=-∞}[∞] Σ_{n=-∞}[∞] a_{mn}h_{mn}(x,y), 系数a_{mn} = (s_{mn}/f)
DFT: f(x,y) = Σ_{m=-∞}[∞] Σ_{n=-∞}[∞] f(x,y) e^{-j2πmx/N - j2πny/N}
4.3【相关】
f * g(Δx) = ∫_{-∞}[∞] f(x)g(x+Δx)dx = f(x), g(x+Δx)
Δx = 0时 * g(0) = (f(x),g(x)), 因此a₁ = f(x) = s_u(0) * f
离散形式: T(u) = (s_u,f) = s_u * f(0)

4.4【1D 基本变换与时频分析】

4.5【2D 基本变换】

4.5.1【高散余弦变换】
s(x,u) = a(u)cos((2x+1)uπ/2N), a(u) = 1/√N (u = 0),
a(u) = 1/√2N (u = 1,2,...,N-1) s(x,y,u,v) =
a(u)a(v)cos((2x+1)uπ/2N)cos((2y+1)vπ/2N)u,v)=
DCT: ①将 f 对称拓展为 g, ②f_x = A_xg = [t₁,t₂]^T, ③h(u) =
e^{-jπu/2N}, S = [1/√2,1,...,1]^T, ④t_k = Re{S * h * o^T}

4.7【沃尔什-哈达玛 WHT】
A_W = H_N/√N, H₂ = [1,1;-1,-1], H₄N = [H₂,H

幅值图、幅角图；根据幅角，沿梯度方向(非边缘方向)对幅值图做 NMS；双阈值算法，去掉假边缘，连接真边缘。

NMS 流程：1.根据幅角图，将每个像素点的梯度方向，量化为横竖撇捺四类；2.对某点，沿其梯度方向在其 3×3 邻域中取 3 个点，若中心点梯度幅值最大则保留该点，否则置零；3.遍历全图做 2，即得 NMS 结果。

$$g_N(x,y)=\begin{cases} M(x,y), & \text{if } M(x,y) > \text{two neighbors along } d_k \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$
双阈值：设定强弱阈值(TH/TL=2 或 3)，根据每个点梯度幅值 $g_N(x,y)$ 判断：小于弱阈值点置零，大于强阈值点置 1(确定边缘)；中间的点则判定，若与强阈值点 8 连通，则置 1(但不参与下次判定)，否则置零。

Canny 初衷：所有边缘均被找到，错误率低；定位边缘尽可能接近真实边缘；检测器指出边缘是单一的，不应指出多个像素边缘。Canny 特点：改进边缘细节，拒绝无关特征，所得边缘连续、细、直。

【直线检测】hough 变换：从空域到参数域的变换。

笛卡尔坐标系中概念：原图中点 (x_i,y_i) 代表的一簇直线 $(y_i=ax_i+b)$ ，对应参数空间一条线 $(b=-x_ia+y_i)$ ；原图中两点 $(x_1,y_1)(x_2,y_2)$ 确定了一条直线(两簇的交集)，对应参数空间两线交点 $(b=-x_1a+y_1$ 与 $b=-x_2a+y_2$ 的交点)。

极坐标：法线式 $(x\cos\theta+y\sin\theta=\rho)$ ， $\theta\in[\pm90]$ 。点 (x_i,y_i) 确定的一簇直线 $(x\cos\theta+y\sin\theta=\rho)$ ，在 $\rho\theta$ 平面中代表一曲线；在空域中两点确定直线，在 $\rho\theta$ 平面中代表两曲线交点。

用极坐标的理由：x-c 无法在笛卡尔坐标参数空间表示。

利用 hough 变换检测直线：1.canny 等获得二值化边缘图像；2.将每个点映射到极坐标参数空间 $\rho\theta$ 平面中，得多个连续曲线；3.划分网格，对曲线离散化，统计网格中点的数目；4.包含点最多的网格，其所代表的参数即为直线参数。

计算步骤：1、离散化 $\theta=45, 0.45, 90$ ；2.根据所给二值化图像，计算每个点的 $\rho=x\cos\theta+y\sin\theta$ （每个点对应多个 ρ ，这里是 4 个），得到行 n 列 θ ，内容为 ρ 的表格；3.统计表格中 (ρ,θ) 出现频数；4.频数最高的 ρ 和 θ 即为检测的直线参数。