基础

1.1【基本定义】
图像：二维函数 f(x,y),xy 空间坐标,f 值为强度或灰度级
数字图像：有限的离散的 f(x,y)
像素：数字图像的最小单元
应用领域：医学成像、遥感、航天应用、天文学
图像分类：电磁波谱、电子学的、声学的、计算机学的
项刊：TPAMI，tip，Tmi, medical image analysis

1.2【人类视觉感知】
视锥细胞、视杆细胞，小孔成像的相似三角形

1.3【图像传感采集】
F(x,y)=i(x,y)r(x,y),i 发光强度，r 反射

1.4【图像采样量化】（科技论文>300dpi）
空间分辨率：单位距离下可识别的 line pairs 的最大数量
强度分辨率：对可分辨出的最小强度级变化，一般$2^{8,16,32}$

1.4.4 插值

最近邻：可能导致扭曲，按最近的
双线性：v=ax+by+cxy+d
双立方：$v(x,y)=\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3}a_{ij}x^iy^j$

1.5【像素关系】
邻域 neighbor：N_4十字，N_D对角，$N_8=N_4\cup N_D$
邻接 adjacency：4 邻接（$q\in N_4(p)$）8($q\in N_8(p)$),
m($q\in N_4(p)$, $or\ q\in N_D(p) and\ N_4(p)\cap N_4(q)=\phi$)
路径 path：一组点。长度为点数目，有 4、8、m 三种路径
联通分量 connected component：图像子集 S(必须是方的)中连接着的像素组（￥=必须给出邻接的类型才能求）
联通集 connected set：只有一个连通域的 S 集(必￥)
区域 region：即联通集。两区域相邻意味着 R1∪R2 为联通集，否则即两区域不相邻。(必￥)
边界 boundaries：前景为全部不相邻区域之并集，其余为背景Ru^c。区域 R 的边界为 R 中与R^c邻接的像素集合(必￥，一般使用 8 邻接定义)
距离：满足非负，对称，三角不等式的函数 D(p,q)
欧氏距离=二范数，D4 城市街区距离=横纵绝对值之和，D8 棋盘距离=横纵绝对值最大值

1.6【基本数学工具】
1.6.1 数学概念
Elementwise product：两矩阵对应位置相乘
Matrix product：矩阵乘法
算子：$H(f(x,y))=F(x,y)$，线性$H(af+bg)=aF+bG$
union 并，intersection 交，mutually exclusive 互斥也叫 Disjoint 不相交，complement 补集，difference 差集，set universe 全集
空间算子：单像素算子如强度变换映射(s=Tz)；邻域算子如均值滤波；几何变换如仿射变换，某点改变后坐标=矩阵*该点原来的坐标

$$\begin{bmatrix}x'\\y'\\1\end{bmatrix}=\mathbf{A}\begin{bmatrix}x\\y\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\1\end{bmatrix}$$

identity 等价：[1,0,0;0,1,0]为前两行，x 竖 y 横下同
缩放/反射 reflect：[cx,0,0;0,cy,0]
旋转：[$c\theta,-s\theta$,0; $s\theta,c\theta$,0](顺时转 θ 为负,可用(0,y)验证
平移 translation：[1,0,tx;0,1,ty]
错切 shear 单向拉伸，垂直[1,sv,0;0,1,0],水平[1,0,0;sh,1,0]

1.6.2 正向变换 Forward transform(如 fft 前的 shift)：
$$T(u,v)=\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)r(x,y,u,v),\ f(x,y)=\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}T(u,v)s(x,y,u,v)$$
判断其可分离性：$r(x,y,u,v)=r_1(x,u)r_2(y,v)$
判断其对称性：当可分离，且$r_1(x,u)=r_2(y,v)$
例如傅里叶核r_fft就是 xy 可分离(独立)、xy 对称的核
矩阵写法：$T=AFA$，其中 F 为图像方阵，A 为变换核矩阵且$a_ij=r1(i,j)$，T 为变换后结果。
矩阵变换流程：F'=BAFAB，如傅里叶，walsh，哈达玛变换，离散余弦，haar 变换都是。先正向再变，反向再逆变

1.6.3 概率方法
强度值视为随机变量z_k,k=1~255 则概率为灰度值出现次数
$$p(z_k)=\frac{n_k}{MN},mean=\sum_k z_kp(z_k),var^2=\sum_k(z_k-m)^2p(z_k)$$

第二章 强度变换空域滤波

2.1【定义】
强度变换 intensity transformation：s=T(r), $r\in(0,1)$,s/r 为变换前后图像的像素强度；空域滤波 spatial filtering，滤波核 filter=mask=kernel=template=window

2.2【强度变换】
线性变换：negative 变换(s=L-1-r,L 为灰度级)，增强灰色、白色细节，尤其是黑背景主导下的白前景；Identity 变换(s=r)
对数 logarithmic 变换：log(s=c*log(1+r),c 常数，r>0), 拉伸暗像素压缩亮像素，压缩动态范围；inverse-log(s=exp r)也叫 exponential 反之，但也压缩动态范围。
幂次 power-law 变换：gamma($s=c*r^\gamma$)，γ<1 变亮，γ>1 变暗。相比对数变换，参数多，可调范围更大。

2.3【直方图均衡化】
直方图 histogram 统计：1.计算出每个灰度级的个数n_k，k=0~L-1；2.$p(k)=n\_k/MN$
直方图变换：正向变换 s=T(r),$0\le r,s\le L-1$,T 为单调 monotonically 增函数；逆变换 r=T^(-1)(s)严格单调递减。

2.3.1 直方图均衡 HE，概率积分变换
1、先计算原始图像强度值 r 的 PDF，记作：连续p_r(r)，一般会给出；或离散的 p_k(r_k)，需要自己计算。
2、按如下公式积分，得到 s=T(r)或 S_k=T(r_k)
$$s=(L-1)\int_0^r p_r(\omega)d\omega$$
$$S_k=T(r_k)=(L-1)\sum_{j=0}^{k}p_r(r_j),k=0,1,2,\cdots,L-1$$
s=T(r)的概率密度函数为
$$p_s(s)=p_r(r)\left|\frac{dr}{ds}\right|=\frac{2r}{(L-1)^2}\left|\left[\frac{ds}{dr}\right]^{-1}\right|=\frac{2r}{(L-1)^2}\left|\frac{(L-1)}{2r}\right|=\frac{1}{L-1}$$
3、根据 p 计算出所有的 s，若是离散值，则 sk 最后要四舍五入。对离散的：$p_s(s_k)=(相同s_k对应的所有n_k和)/MN$

2.4【空域滤波】
相关$w(x,y)$空心五角星$f(x,y)$，无需旋转卷积核直接滤波
卷积$w(x,y)\star f(x,y)$，180 度旋转卷积核

2.5【平滑低通滤波】
平滑滤波(有低通效果)，如 box filter=1/9*[1,1,1;1,1,1;1,1,1], gaussian kernel=1/16*[1,2,1;2,4,2;1,2,1]
Order-statistic 排序统计滤波，如中值（专去椒盐）

2.6【锐化高通滤波】
2.6.1 导数 derivative 及其性质
一阶导数$\frac{\partial f}{\partial x}=f(x+1)-f(x)$
二阶导数$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f(x+1)+f(x-1)-2f(x)$

2.6.2 laplacian 算子
定义为$\nabla^2 f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$，离散情况下为计算核[0,1,0;1,-4,1;0,1,0]。具有各向同性或旋转不变性($\nabla^2(f^\theta)=[\nabla^2(f^\theta)]^\theta$)线性性$\nabla^2(f+g)=\nabla^2 f+\nabla^2 g$，以及$\frac{\partial}{\partial x}(f+g)=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial x}$。
拉普拉斯锐化：$g(x,y)=f(x,y)+c[\nabla^2 f(x,y)]$，c 取±1，符号与滤波核的中心相同。

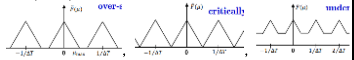
2.6.3 梯度 gradient
定义：$\nabla f\equiv \text{grad}(f)\equiv\begin{bmatrix}g_x\\g_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\\\frac{\partial f}{\partial y}\end{bmatrix}$，线性，非旋转不变；
梯度幅值 magnitude：$M(x,y)=\text{mag}(\nabla f)=\sqrt{g_x^2+g_y^2}$，非线性，旋转可变
Roberts 交叉梯度算子：[-1,0;0,1]和[0,-1;1,0]，梯度值为 $M(x,y)=[(z_9-z_5)^2+(z_8-z_6)^2]^{1/2}\approx|z_9-z_5|+|z_8-z_6|$
Sobel 梯度算子，[-1,-2,-1;0,0,0;1,2,1],逆时z转90°，梯度值同上。

第三章 频域滤波

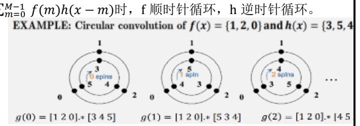
3.1【数学基础】
3.1.1 基本公式
欧拉公式：$z=x+jy=|z|(cos\theta+jsin\theta)=|z|e\hat{\ }j\theta$
连续冲激函数$\delta(t)$：$\delta(0)=\infty$，否则为 0；在全实轴积分值为 1；筛选性质$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t-t_0)dt=f(t_0)$
离散冲激函数：$\delta(0)=1$，否则为 0；在整数轴积分值为 1 筛选性质$\sum_{x=-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x-x_0)=f(x_0)$
离散冲激序列$s_{\Delta T}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n\Delta T)$

3.1.2 傅里叶级数
定义：一组不同频率的正弦余弦函数的加权和，是周期函数的另一种时域表达形式。任意周期函数都可以展开为傅里叶级数，即下式。w0=2pi/T 为基础频率
$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{jn\omega_0 t}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{j2\pi n\frac{1}{T}t}$$
其中，系数求解方法为（$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$）
$$c_n=\frac{1}{T}\int_T f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt=\frac{1}{T}\int_T f(t)e^{-jn(2\pi/T)t}dt$$
也可写作$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}[a_n\cos(n\omega t)+b_n\sin(n\omega t)]$，而 cn 是 an 和 bn 的统一。
给定函数 ft 求其傅里叶展开：先用 f 求 c_n，然后直接写出 f(t)即可。

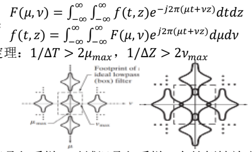
3.1.3 傅里叶变换
定义：将 f(t)变为 F(u)，获取(原时域函数展成傅里叶级数)时，在(频率为 u 的正弦波)前的系数。其原变换和逆变换：
$$F(\mu)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j2\pi\mu t}dt,\ f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}F(\mu)e^{j2\pi\mu t}d\mu$$
性质：线性性($\mathcal{F}$(af+bg)=aF+bG 反之亦然)
时移性$\mathcal{F}(f(t-t0))=e^{-iut0}F(u)$
$\mathcal{F}^{-1}(F(u-u0))=e^{iu0t}f(t)$
缩放性$\mathcal{F}(f(at))=F(u/a)/|a|$
对称性$\mathcal{F}(F(T))=2\pi f(-u)$
卷积(连续)$\mathcal{F}(f*g)=FG,\mathcal{F}(fg)=F*G/2\pi$
求变换：周期函数先傅展再傅变；非周期函数直接傅变
例子：方波的傅里叶变换为辛格函数(常值也是)
$$f(t)=\begin{cases}A,-\frac{W}{2}\le t\le\frac{W}{2}\\0,\text{otherwise}\end{cases}$$
$$F(\mu)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j2\pi\mu t}dt=\int_{-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}}Ae^{-j2\pi\mu t}dt$$
$$=AW\frac{\sin(\pi W\mu)}{\pi W\mu}【\text{sinc}(m)=\frac{\sin(\pi m)}{(\pi m)}】$$
例子：冲激函数$\delta(t)\leftrightarrow1$，对于$\delta(t-t_0)$有
$$F(\mu)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)e^{-j2\pi\mu t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j2\pi\mu t}\delta(t-t_0)dt=e^{-j2\pi t_0\mu}$$
例子：冲激序列，周期函数先展开再变换
即$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n\Delta T)=\frac{1}{\Delta T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{j2\pi\frac{n}{\Delta T}t}$
其傅里叶变换为$F(\mu)=\frac{1}{\Delta T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\mu-\frac{n}{\Delta T}\right)$
指数函数$e^{j2\pi t_0\mu}$，$F(\mu)=\delta(\mu-\mu_0)$
连续卷积：$f(t)\star h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)h(t-\tau)d\tau$
卷积离散：$w(x)\star h(x)=\sum_{s=-a}^{a}w(s)h(x-s)$

3.2【采样定理】
离散冲激采样:$\tilde f(t)=f(t)s_{\Delta T}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t-n\Delta T)$，$\mathcal{F}(\tilde f(t))=\mathcal{F}(f(t))*\mathcal{F}(\delta(t-n\Delta T))=\frac{1}{\Delta T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F\left(\mu-\frac{n}{\Delta T}\right)$，等价于以$\frac{n}{\Delta T}$为周期将$F(\mu)$左右平移。
采样定理:若有限带宽函数最大频率为μ_{max}，则离散冲激采样频率$\frac{1}{T}$应有$\frac{1}{T}>2\mu_{max}$，否则可能频域混叠(aliase)，如下图。


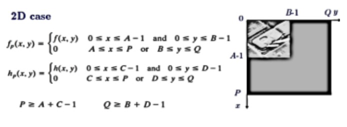
理想低通滤波：$H(\mu)=\Delta T,\mu\in[-\mu_m,\mu_m]$。低通滤波结果的反变换时域结果为$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\text{sinc}\left[\frac{t-n\Delta T}{\Delta T}\right]f(n\Delta T)$
频带混叠的原因：时域有限一般信号，其频带一定无限宽(采样带来截断)；时域无限的信号，频带一定有限宽；但若频带有限，且信号呈周期时，截断时可能整周期，此时不会混叠。

3.3【1D 离散傅里叶】
定义：用离散冲激序列对连续函数采样，$\tilde F(\mu)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f_ne^{-j2\pi n\Delta T\mu}$。$f_n=f(n\Delta T)$离散，$\tilde F(\mu)$连续，周期与μ有关。$F(u)=\sum_{x=0}^{M-1}f(x)e^{-\frac{j2\pi}{M}ux}$,$f(x)=\frac{1}{M}\sum_{u=0}^{M-1}F(u)e^{\frac{j2\pi}{M}ux}$
DFT 和逆 DFT 都是周期性的，周期为 M，与时域信号有关
例，$F(0)=\sum_{x=0}^{M-1}f(x)e^{-j\frac{2\pi(0)}{M}x}$,$F(1)=\sum_{x=0}^{M-1}f(x)e^{-j\frac{2\pi(1)}{M}x}$...
逆，$f(0)=\frac{1}{M}\sum_{u=0}^{M-1}F(u)e^{j\frac{2\pi}{M}u(0)}$...
循环卷积，也叫圆卷积，计算$g(x)=f(x)\star h(x)=\sum_{m=0}^{M-1}f(m)h(x-m)$时，f 顺时针循环，h 逆时针循环。


采样间隔与频率间隔：时域采样间隔ΔT，周期 M，信号时长为$T=\Delta TM$；频域间隔$\Delta u=1/T$，频带长度为$U=1/\Delta T$

3.4【2D-FT、DFT】
2D 冲激：$\delta(0,0)=\infty$，否则为 0；在 tz 平面积分值为 1；筛选性质$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(t,z)\delta(t-t_0,z-z_0)dtdz=f(t_0,z_0)$;
离散 2D 冲激：类似 1D
2D-fft: $F(\mu,\nu)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(t,z)e^{-j2\pi(\mu t+\nu z)}dtdz$
$f(t,z)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(\mu,\nu)e^{j2\pi(\mu t+\nu z)}d\mu d\nu$
采样定理：$1/\Delta T>2\mu_{max}$，$1/\Delta Z>2\nu_{max}$


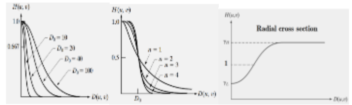
空域混叠欠采样，时域混叠欠采样、车轮倒转效应
解决方案：散焦衰减高频，均值滤波
2D-dft: $F(u,v)=\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}$
$f(x,y)=\frac{1}{MN}\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)e^{j2\pi(ux/M+vy/N)}$

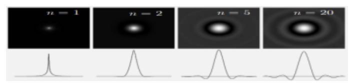
3.5【2D-DFT 性质】
平移：$f(x,y)e^{j2\pi(u_0x/M+v_0y/N)}\Leftrightarrow F(u-u_0,v-v_0)$
$f(x-x_0,y-y_0)\Leftrightarrow F(u,v)e^{-j2\pi(x_0u/M+y_0v/N)}$
极坐标变换：$x=r\cos\theta y=r\sin\theta u=\omega\cos\varphi v=\omega\sin\varphi$
$f(r,\theta+\theta_0)\Leftrightarrow F(\omega,\varphi+\theta_0)$，旋转 f 后 F 也旋转相同角度。
周期：$F(u,v)=F(u+M,v+N),f(x,y)=f(x+M,y+N)$
频谱居中：$f(x)(-1)^{x+y}\sim F(u-\frac{M}{2},v-\frac{N}{2})$，重拼(非平移)
离散函数是偶函数 iif. 所有样本加和为 0
实函数 f 的 fft 共轭对称：$F^*(u,v)=F(-u,-v)$
虚函数 f 的 fft 共轭反对称：$F^*(u,v)=-F(-u,-v)$
实函数的 FT：实部偶，虚部奇；幅值偶，相位奇
虚函数的 FT：实部奇，虚部偶；幅值奇，相位偶
对称：f 实+偶，F 也为纯实+偶；f 实+奇，F 为纯虚+奇
幅值=$\sqrt{R^2+I^2}$，相位= arctan $[\frac{I}{R}]$，功率= R^2+I^2
直流分量$F(0,0)=M*N*\bar f(x,y)$平均值,是频谱最大分量
卷积：f(x,y)*h(x,y)=$\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}f(m,n)h(x-m,y-n)$
交叠误差：使用循环卷积计算卷积时，由于 f 和 h 的周期性直接计算 f*g 会交叠，导致卷积结果错误。因此需要在 f 和 g 末尾处补 0，使得补零后长度$P\ge len(f)+len(g)-1$,避免下一周期误入.若两图像尺寸相等，则可能需要 P=2len(f)


DFT 算法对偶尺寸计算更快，因此最好 padding 到偶数
频谱泄露：加窗截断时，f0 处的能量分散到宽频带去。但整周期截断不会泄漏。改善：可加合适窗函数或延长时间窗

$\delta(x,y)$	1
Rect[a,b]	$absinc(ua)e^{-j\pi(ua+vb)}$
$Sin(2\pi(\frac{u_0x}{M}+\frac{v_0y}{N}))$	$\frac{jMN}{2}\left[\begin{matrix}\delta(u+u_0,v+v_0)\\-\delta(u-u_0,v-v_0)\end{matrix}\right]$
$Cos(2\pi(\frac{u_0x}{M}+\frac{v_0y}{N}))$	$\frac{1}{2}\left[\begin{matrix}\delta(u+u_0,v+v_0)\\\delta(u-u_0,v-v_0)\end{matrix}\right]$
$A2\pi\sigma^2e^{-2\pi^2\sigma^2(t^2+z^2)}$	$Ae^{-(\mu^2+\nu^2)/2\sigma^2}$
$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^m f(t,z)$ $\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^m f(t,z)$ $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^m\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^m f(t,z)$	$(j2\pi\mu)^mF(\mu,\nu)$ $(j2\pi\nu)^nF(\mu,\nu)$ $(j2\pi\mu)^m(j2\pi\nu)^nF(\mu,\nu)$

3.6【频域滤波】
定义：$g=\mathcal{F}^{-1}(H(u,v)F(u,v))$,H 为频率域传递函数
振铃效应：空域填充 0，导致边缘不连续，进而导致振铃
特例：高斯滤波器和一阶巴特沃斯没有振铃。
出现原因：函数中存在梯度过大的"剧烈变化"区域
频域滤波步骤：1.P=2M,Q=2N,填充 0；2.在时域乘$(-1)^{x+y}$位移；3.DFT；4.构造大小为 P*Q 的实对称滤波器 H 并乘在原图中心，得到 G；5.IDFT 和零频点位移：$g_p(x,y)=$(real{$\mathcal{F}^{-1}[G(u,v)]$})$(-1)^{x+y}$；7.左上角切割 M*N 得结果。
纽带：时域与频域分析的纽带是卷积定理。
高斯：高斯的 DFT、IDFT 还是实高斯函数。$H(u)=Ae^{-u\hat{\ }2/(2\sigma\hat{\ }2)},h(x)=\sqrt{2\pi}\sigma Ae^{-2\pi^2\sigma^2x^2}$。当频域均值 0 方差σ时，对应空域均值为 0,但方差为 1/2πσ.某些滤波核=高斯 A-高斯 B

3.7【低通频滤】
低通滤波：中心高四周低，过滤高频边缘、噪声
理想低通：$H(u,v)=1\ if\ D(u,v)<D_0\ else\ 0$
高斯低通：$=e^{-D^2(u,v)/2D_0^2}$,$D_0=\sigma$为截频,此处 H(u,v)=2/3
巴特沃斯低通：$1/(1+[D(u,v)/D_0]\hat{\ }2n)$，$D_0$处 H()=0.5
下 4 图为:高斯低通，巴特沃斯低通，同态(3.8),巴特沃斯环




3.8【高通频滤】
高通滤波：中心低四周高，保留边缘
高通滤波：$H_{hp}=1-H_{lp}(u,v)$
*n 阶巴特沃斯高通：$1/(1+[D_0/D(u,v)]\hat{\ }2n)$
拉普拉斯：$\nabla^2 f=(\partial^2 f)/(\partial x^2)+(\partial^2 f)/(\partial y^2)=f(x+1,y)+f(x-1,y)+f(x,y+1)+f(x,y-1)-4f(x,y)$；核[0,1,0;1,-4,1;0,1,0]；频率核$H(u,v)=-4\pi^2(u^2+v^2)$;拉普拉斯锐化增强后图像为$g(x,y)=f(x,y)+c\Delta^2f(x,y)$,其中 c=-1;在频域中$g(x,y)=\mathcal{F}^{-1}\{[1+4\pi^2D^2(u,v)]F(u,v)\}$
同态滤波：1.令 f=ir，p=ln(f)=ln(i)+ln(r);2.计算 P=DFT(p)，$P'=HP=H\mathcal{F}[ln(i)]+H\mathcal{F}[ln(r)]$,H 为同态核；3.p'=IDFT(P')=ln(i)'+ln(r)'(非求导)；4.$g=e^{p'}=i'*r'$
同态核：$H(u,v)=(\gamma_H-\gamma_L)[1-e^{-c[D^2(u,v)/D_0^2]}]+\gamma_L$，$\gamma_L<H(u,v)<\gamma_H,\gamma_L<1<\gamma_H$，c 用于控制尖锐度；能够同时压缩动态范围，增加对比度

3.9【带通陷波】
理想带阻：$H(u,v)=0\ if\ D\in\left[D_0-\frac{W}{2},D_0+\frac{W}{2}\right]else1$
巴特沃斯带阻：$H(u,v)=1/[1+(DW/(D^2-D_0^2))^{2n}]$
高斯带阻：$H(u,v)=1-e^{-[(D^2-D_0^2)/DW]^2}$,D0 截频，W 带宽
带通：1-带阻。Notch：陷波，单点阻塞，必定呈中心对称。可用高斯自己凑

第四章 图像变换

4.1【数学基础】
内积性质：$\langle u,v\rangle=\langle v,u\rangle^*$；$\langle u+v,w\rangle=\langle u,w\rangle+\langle v,w\rangle$；$\langle av,u\rangle=a\langle v,u\rangle$；$\langle v,v\rangle=0iif\ v=0,else\langle v,v\rangle>0$
欧式空间R^N(实数)：$\langle u,v\rangle=u^Tv=\sum_0^{N-1}u_iv_i$
酉空间C^N(复数)：$\langle u,v\rangle=u^{*T}v=\sum_0^{N-1}u_i{}^*v_i=\langle v,u\rangle^*$
积分内积$C[a,b]$(连续函数):$\langle f(x),g(x)\rangle=\int_a^bf^*(x)g(x)dx$
向量夹角$\theta=\cos^{-1}(\langle z,w\rangle/\|z\|\|w\|)$
正交基：$\langle w_k,w_l\rangle=0(k\ne l)$，=1($k=l$)
双正交基：$\langle\widetilde{w_k},w_l\rangle=0(k\ne l)$，基等于其对偶时简化为正交
展开系数：$z=\sum a_nw_n$时，系数$a_i=\langle w_i,z\rangle/\langle w_i,w_i\rangle$

4.2【变换的矩阵形式】
若反变换核s(x,u)，则$\boldsymbol{s}_u$如下。A 为变换矩阵，且$AA^T=I$
$$\boldsymbol{s}_u=\begin{bmatrix}s(0,u)\\s(1,u)\\\vdots\\s(N-1,u)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s_{u,0}\\s_{u,1}\\\vdots\\s_{u,N-1}\end{bmatrix},\quad\begin{matrix}A=[s_0\ldots s_{N-1}]^T\\T=AFA^T\\F=A^TTA\end{matrix}$$
计算正交变换：检验基向量规范正交➡得到变换矩阵➡计算变换和反变换
复数：$T=AFA^T,F=A^{*T}TA^*$。连续：$f(x)=\sum_{u=-\infty}^{+\infty}a_us_u(x)$，$s_u$为基函数,$u\in Z$, 系数$a_u=\langle s_u,f\rangle$
FT: $s_u(x)=e^{j2\pi ux/T}/\sqrt{T},a_u=\int_{-T/2}^{T/2}f(x)e^{-j2\pi ux/T}dx/\sqrt{T}$
DFT: $T(u)=\sum_0^{N-1}f(x)e^{-j2\pi ux/N}/\sqrt{N}$，$s_u$也是 T 换成 N

4.3【相关】
$f\star g(\Delta x)=\int_{-\infty}^{\infty}f^*(x)g(x+\Delta x)dx=\langle f(x),g(x+\Delta x)\rangle$；$\Delta x=0$时$f\star g(0)=\langle f(x),g(x)\rangle$,因此$a_u=\langle s_u,f\rangle=s_u(0)\star f$
离散形式：$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u})=\langle\boldsymbol{s_u},\boldsymbol{f}\rangle=\boldsymbol{s_u}\star\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0})$【此处星号为空心】

4.4【1D 基本变换与时频分析】
海森堡不确定性：$\sigma_t^2\sigma_f^2\ge1/(16\pi\hat{\ }2)$

4.5【2D 基本变换】

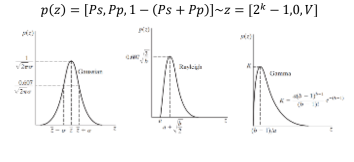
4.6【离散余弦变换】
$s(x,u)=a(u)\cos((2x+1)u\pi/2N)$, $a(u)=\sqrt{1/N}\ (u=0)$, $a(u)=\sqrt{2/N}(u=1,2,\ldots,N-1)$，$s(x,y,u,v)=a(u)a(v)\cos((2x+1)u\pi/2N)\cos((2y+1)v\pi/2N)$
DCT：①将 f 对称拓展为 g，②$t_F=A_Fg=[t_1,t_2]^T$，③$h(u)=e^{-j\pi u/2N},s=[1/\sqrt{2},1,\ldots,1]^T$，④$t_c=Re\{s\circ h\circ t_1\}$

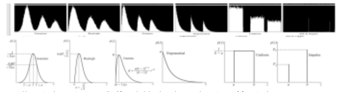
4.7【沃尔什-哈达玛 WHT】
递推变换矩阵：$A_W=H_N/\sqrt{N}$，$H_2=[1,1;1,-1]$，$H_{2N}=[H_N,H_N;H_N,-H_N]$
列率：A_W每行符号变化数，如 8 阶 Aw 为 07341625
列率排序：对A_W按列率排序，得$A_{W'}$；
变换：变换结果$t_{w'}$=变换矩阵*序列，$t_{w'}=A_{w'}*f$

4.8【haar 变换】
$q=u-2^p$
$$h_u(x)=\begin{cases}1,&u=0\ or\ 0\le x\le1\\2^{\frac{p}{2}},&u>0\ or\ q/2^p\le x<(q+0.5)/2^p\\-2^{\frac{p}{2}},&u<0\ or\ (q+0.5)/2^p\le x<(q+1)/2^p\\0,&other\end{cases}$$
$s(x,u)=(h_u\ (x/N))/\sqrt{N},x=0,1,\ldots,N-1$ (反变换核)
$$H_N=\begin{bmatrix}h_0(0/N)&h_0(1/N)&\cdots&h_0(N-1/N)\\h_1(0/N)&h_1(1/N)&\cdots&h_1(N-1/N)\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\h_{N-1}(0/N)&h_{N-1}(1/N)&\cdots&h_{N-1}(N-1/N)\end{bmatrix}$$
$A_H=H_N/\sqrt{N}$
4.9【小波变换】
哈尔变换：$N=2,A_H=1/\sqrt{2}[1\ 1;1\ -1]$；$N=4$，$A_H=1/2[1\ 1\ 1\ 1;1\ 1-1\ -1;\sqrt{2}-\sqrt{2}\ 0\ 0;0\ 0\ \sqrt{2}\ -\sqrt{2}]$
尺度函数 $\varphi_{j,k}(x)=2^{j/2}\varphi(2^jx-k)\ j,k\in\boldsymbol{Z}$
$\varphi_{0,k}(x)=\varphi_{1,2k}(x)/\sqrt{2}+\varphi_{1,2k+1}(x)/\sqrt{2}$
例：单位哈尔尺度函数$\varphi(x)=1\ if\ x\in[0,1)else\ 0$
$\varphi_{0,0}(x)=\varphi(x);\varphi_{0,1}(x)=\varphi(x-1);\varphi_{1,0}(x)=\sqrt{2}\varphi(2x)$
细化方程：$\varphi(x)=\sum_{k\in z}h_\varphi(k)\sqrt{2}\varphi(2x-k)$
尺度函数系数 $h_\varphi(k)=\langle\varphi(x),\sqrt{2}\varphi(2x-k)\rangle$
小波函数：$\psi(x)=\sum_kh_\psi(k)\sqrt{2}\varphi(2x-k)$
小波函数细化方程：$\psi(x)=\sum_kh_\psi(k)\sqrt{2}\varphi(2x-k)$
小波函数系数$h_\psi(k)=(-1)^kh_\varphi(1-k)$
级数展开$f(x)=\sum_kc_{j_0}(k)\varphi_{j_0,k}(x)+\sum_{j=j_0}^{\infty}\sum_kd_j(k)\psi_{j,k}(x)$
$c_{j_0}(k)=\langle f(x),\varphi_{j_0,k}(x)\rangle=\int f(x)\varphi_{j_0,k}(x)dx$
$d_j(k)=\langle f(x),\psi_{j,k}(x)\rangle=\int f(x)\psi_{j,k}(x)dx$
离散小波变换$T_\varphi(0,0)=\sum_{x=0}^{N-1}f(x)\varphi^*(x)/\sqrt{N}$
$T_\psi(j,k)=\sum_{x=0}^{N-1}f(x)\psi_{j,k}^*(x)/\sqrt{N}$
逆：$f(x)=\left[T_\varphi(0,0)\varphi(x)+\sum_{j=0}^{J-1}\sum_{k=0}^{2^j-1}T_\psi(j,k)\psi_{j,k}(x)\right]/\sqrt{N}$
$N=2^J$，$j=0,1,\ldots,J-1$，$k=0,1,\ldots,2^j-1$
二维小波变换：$\varphi(x,y)=\varphi(x)\varphi(y),\psi^H(x,y)=\psi(x)\varphi(y),\psi^V(x,y)=\varphi(x)\psi(y),\psi^D(x,y)=\psi(x)\psi(y)$

第五章 图像复原

5.1【图像退化模型】
退化模型：退化图=原图×退化函数+噪声
$g(x,y)=h(x,y)\star f(x,y)+\eta(x,y)$
频域：$G(u,v)=H(u,v)F(u,v)+N(u,v)$

5.2【噪声模型】
来源：图像采集和传输
空间属性：与位置坐标无关，与图像无关
频率属性：白噪声的 FFT 频谱是常数。
噪声的概率密度函数：
1.高斯噪声$p(z)=(1/\sqrt{2\pi}\sigma)e^{-(z-\bar z)^2/2\sigma^2}$
2.Rayleigh 噪声$p(z)=$
$2/b*(z-a)e\hat{\ }(-(z-a^2)/b)$ if $z\ge a$ else 0
$\bar z=a+\sqrt{\pi b/4}$，$\sigma^2=(b(4-\pi))/4$
3.Erlang 厄蓝 gamma 噪声$p(z)=$
$(a^bz^{b-1})/(b-1)!*e\hat{\ }(-az)$ if $z\ge0$ else 0
$\bar z=b/a$，$\sigma^2=b/a^2$
4.指数噪声$p(z)=ae\hat{\ }(-az)$ if $z\ge0$ else 0
5.均匀噪声$p(z)=1/(b-a)$ if $z\in$[a,b] else 0
$\bar z=(b+a)/2$，$\sigma^2=(b-a)^2/12$
6.椒盐噪声
$p(z)=[Ps,Pp,1-(Ps+Pp)]\sim z=[2^k-1,0,V]$




周期噪声：源于成像时的电路、电子元件噪声
噪声参数估计：1.噪声区域取样；2.计算直方图；3.估计均值方差，套噪声模型确定参数

5.3【空域滤波复原】
退化模型中 h 为 1，此时噪声模型未知，无法直接作差
均值滤波器：若尺寸为 M*N 的区域
1.算术：区域求和除 M*N
2.几何：区域求积开 M*N 次根；损失细节更少
3.调和谐波：$f(x,y)=mn/[\sum1/g(s,t)]$，对盐+高斯,不对椒
4.逆谐波：$[\sum g(s,t)^{Q+1}]/[\sum g(s,t)^Q]$,Q 为阶，正对椒负对盐
排序统计滤波器：1.中值，对单峰双峰噪声都好，多次中值=模糊；2.最大，取区域最大值，对椒，找亮点；3.最小，区域最小值，对盐，找暗点；4.中点，区域最大最小/2，对高斯、均匀等随机噪声；5.Alpha 裁剪均值，去最低 d/2 和最高 d/2 再均值(分母是 mn-d)，对椒盐+高斯

5.4【周期噪声的频域复原】
带通、带阻滤波，把噪声点覆盖掉

5.5【线性位置不变退化】
任意退化函数 H 可表示为 g(x,y)=H[f(x,y)]
线性退化判定：H[af+bg]=aH(f)+bH(g)
位置无关退化判定：H[f(x-a,y-b)]=g(x-a,y-b)对任意 xyab 成
退化可建模：可将位置无关、线性的退化建模为退化函数 h，卷积全图，进行退化。复原=找到逆转这一过程的滤波器。
证明：由冲击函数试探属性有
$$g(x,y)=H\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(\alpha,\beta)\delta(x-\alpha,y-\beta)d\alpha d\beta\right]$$
第一类叠加积分：当退化线性，此时上式变为$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(\alpha,\beta)H[\delta(x-\alpha,y-\beta)]d\alpha d\beta$，其中$h(x,\alpha,y,\beta)=H[\delta(x-\alpha,y-\beta)]$，优化中，H 一般为点传播函数 PSF。若退化位置无关，则可得 G=HF+N。

5.6【退化函数 H 估计】
观察估计法（盲反卷积）：1.原图截出 gs；2.增强（锐化等）成$\widehat{fs}$；3.FFT 得 Gs$\widehat{Fs}$；4.退化函数认定为 Hs=Gs/$\widehat{Fs}$
试验确定法：用冲激响应在成像系统下拍照得 g，fft 得 G，则退化函数 H=G/A，A 为常数。
建模估计法：湍流模型$H(u,v)=e\hat{\ }(-k(u^2+v^2)^{5/6})$
运动模糊模型$\int_0\hat{\ }T\ e^{-j2\pi[ux_0(t)+vy_0(t)]}dt$，其中 x0(t)是竖直方向运动估计函数。例，$x0(t)=at/T,y0(t)=bt/T$时，运动模糊核为
$$H(u,v)=\frac{T}{\pi(ua+vb)}\sin[\pi(ua+vb)]e^{-j\pi(ua+vb)}$$
5.7【直接逆滤波复原】 不管噪声，直接除，$\hat F=G/H$。缺点：噪声未知，无法完美复原；受 H 中的 0 点和微小量影响较大。

5.8【维纳滤波】最小均方误差滤波
误差：$e^2=E\{(f-\hat f)^2\}$。三大假设：噪声图像无关，存在 0 均值，$\hat f$由 f 的线性计算而得
$$\hat f=\left[\frac{1}{H(u,v)}\frac{|H(u,v)|^2}{|H(u,v)|^2+S_\eta(u,v)/S_f(u,v)}\right]G(u,v)$$
$|*|^2=H^**H$，功率谱$S_\eta(u,v)=|N(u,v)|^2$，$S_f(u,v)=|F(u,v)|^2$，η/f比值为信噪比 K

5.9【受限最小二乘滤波】必不会考

5.10【几何平均滤波】
直接逆滤波和 wiener 滤波的组合
$$\hat F(u,v)=\left[\frac{H^*(u,v)}{|H(u,v)|^2}\right]^\alpha\left[\frac{H^*(u,v)}{|H(u,v)|^2+\beta\left[\frac{S_\eta(u,v)}{S_f(u,v)}\right]}\right]^{1-\alpha}G(u,v)$$

第六章 形态学处理

6.1【基本概念】
图像反射：中心对称$\hat B=\{w\mid w=-b,\text{ for }b\in B\}$
图像平移：整体移动$(B)_z=\{c\mid c=b+z,\text{ for }b\in B\}$
结构元素 SE：十字，矩形，方，椭圆，圆（注意中心点）
结构元素的使用：用 S 遍历原集 A 的每个内点【非边缘】

6.2【腐蚀膨胀】
腐蚀：不对 SE 取反，仅保留完全重合区域。能消除联通区，收缩边界，分离粘连，去除图像外部无意义的亮点噪声。
$$A\ominus B=\{z\mid(B)_z\subseteq A\}$$
膨胀：先对 SE 取反，有相交区域即保留。能延年益寿，合并断裂，向外扩展，填补空洞，消除图像内暗点。
$$A\oplus B=\{z\mid(\hat B)_z\cap A\ne\emptyset\}$$
将 SE 看做卷积 mask，对比空域卷积：相同处为都要翻转再运算；不同为膨胀非线性，卷积线性。

6.3【开闭】

开：空心圆，先腐蚀后膨胀。
闭：实心圆，先膨胀后腐蚀。
作用：均平滑轮廓，且不明显改变其面积；开（中）可消除凸出小物体，分离狭窄纤细区，抑制亮细节；闭（右）可填充孔洞，闭合狭窄区，连接临近物体，抑制暗细节

6.4【击中击不中变换 HMT】
作用：检测特定形状在图中位置，包含 A 击中 B1 且 A 补击中 B2 的所有点。（简化 HMT：$A\circledast B=(A\ominus B_1)$）
流程：1.定义待检测形状 D，D 的父集 W；2.令 D 为前景 B1，W-D 为背景 B2；3.[B1 腐蚀 A]与[B2 腐蚀 A 补]交集，联

合定位$A \circledast B = (A \ominus B_1) \cap (A^c \ominus B_2)$。

6.5 【灰度图像模板匹配】

相关系数：$c(x,y) = \sum_s \sum_t w(s,t) f(x+s, y+t)$

归一化相关系数：减均值，除两方差。最后一定在±1 之内

$$\gamma(x,y) = \frac{\sum_s \sum_t [w(s,t) - \bar{w}][f(x+s,y+t) - \bar{f}(x+s,y+t)]}{\{\sum_s \sum_t [w(s,t)-\bar{w}]^2 \sum_s \sum_t [f(x+s,y+t) - \bar{f}(x+s,y+t)]^2\}^{\frac{1}{2}}}$$

流程：原图 padding，模板遍历全图计算归一化相关系数，最大点即匹配结果

7 图像分割

7.1 基本概念：基于边缘的，基于区域的

7.2 点线边检测

【背景】边缘像素：强度突变的像素

边缘：连接的一组边缘像素

一阶导：f(x+1)-f(x)；二阶导：f(x+1)+f(x-1)-2*f(x)

【点检测】检测突出点

流程：用 laplacian 核[111,1-81,111]卷积，保留>阈值的点

【线检测】

整体线：用 Laplacian 核卷积，取正数（或取绝对值，较少）

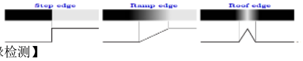
方向线：四个方向卷积核卷积，四响应中最大者。

水平：[-1-1-1;222;-1-1-1],垂直：(90° 水平旋转)

+45° [2-1-1;-12-1;-1-12],-45°：（45° 左右翻转）

【边缘模型】

台阶型，斜坡型，屋脊型



【边缘检测】

基于梯度：先算水平竖直梯度，再计算强度谱和方向谱。其中，边缘的梯度方向与边缘垂直。

梯度算子：gx,gy=[下][右]。垂直梯度[-1;1][-1,1]，Roberts[-1 0;0 1][0 -1;1 0]，Prewitt 0-90° [-1-1-1;000;111][逆]或 45° [011;-101;-1-10][顺]，Sobel 0-90° [-1-2-1;000;121][逆]或 45° [012;-101;-2-10][顺]。

梯度幅值：$M(x,y)$ =|gx|+|gy|，或 gxgy 平方和开根号

梯度幅角：反正切(gy/gx)

Canny 算子：空域 2D 高斯平滑；梯度算子计算横纵梯度、幅值图、幅角图；根据幅角，沿梯度方向(非边缘方向)对幅值图做 NMS；双阈值算法，去掉假边缘，连接真边缘。

NMS 流程：1.根据幅角图，将每个像素点的梯度方向，量化为横竖撇捺四类；2.对某点，沿其梯度方向在其 3×3 邻域中取 3 个点，若中心点梯度幅值最大则保留该点，否则置零；3.遍历全图做 2，即得 NMS 结果。

$$g_N(x,y) = \begin{cases} M(x,y), & \text{if } M(x,y) > \text{ two neighbors along } d_k \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

双阈值：设定强弱阈值(TH/TL=2 或 3)，根据每个点梯度幅值$g_N(x,y)$判断；小于弱阈值点置零，大于强阈值点置 1(确定边缘)；中间的点则判定，若与强阈值点 8 连通，则置 1(但不参与下次判定)，否则置零。

Canny 初衷：所有边缘均被找到，错误率低；定位边缘尽可能接近真实边缘；检测器指出边缘是单一的，不应指出多个像素边缘。Canny 特点：改进边缘细节，拒绝无关特征，所得边缘连续、细、直。

【直线检测】hough 变换：从空域到参数域的变换。

笛卡尔坐标系中概念：原图中点(xi,yi)代表的一簇直线(yi=axi+b)，对应参数空间一条线(b=-xia+yi)；原图中两点(x1,y1)(x2,y2)确定了一条直线(两簇的交集)，对应参数空间两线交点(b=-x1a+y1 与 b=-x2a+y2 的交点)。

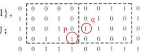
极坐标：法线式(xcos θ +ysin θ = ρ， θ ∈[±90])。点(xi,yi)确定的一簇直线(xicos θ +yisin θ = ρ)，在$\rho\theta$平面中代表一曲线；在空域中两点确定直线，在$\rho\theta$平面中代表两曲线交点。

用极坐标的理由：x=c 无法在笛卡尔坐标参数空间表示。

利用 hough 变换检测直线：1.canny 等获得二值化边缘图像；2.将每个点映射到极坐标参数空间$\rho\theta$平面中，得多个连续曲线；3.划分网格，对曲线离散化，统计网格中点的数目；4.包含点最多的网格，其所代表的参数即为直线参数。

计算步骤：1、离散化θ=-45，0,45,90；2.根据所给二值化图像，计算每个点的$\rho = x\cos\theta + y\sin\theta$（每个点对应多个 ρ，这里是 4 个），得到行 n 列 θ，内容为 ρ 的表格；3.统计表格中(ρ,θ)出现频数；4. 频数最高的 ρ 和 θ 即为检测的直线参数。

考虑右图中的两个图像子集 S_1 和 S_2。参考 2.5 节，假设 $V=\{1\}$，确定这两个子集是否是：(a)* 4 邻接的；(b) 8 邻接的；(c) m 邻接的。



令 p、q 如图所示，则对于 $V=\{1\}$ 有：

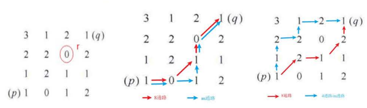
(a) S_1 与 S_2 不是 4 邻接的，因为 p 不在集合 $N_4(q)$ 中。

(b) S_1 与 S_2 是 8 邻接的，因为 p 在集合 $N_8(q)$ 中。

(c) S_1 与 S_2 是 m 邻接的，因为 p 在集合 $N_D(q)$ 中，且集合 $N_4(p) \cap N_4(q)$ 中没有值在 V 中的像素。

(a)* 如 2.5 节所示，令 $V=\{0, 1\}$是定义邻接的灰度值集合。计算右图中 p 和 q 之间的最短 4 通路、8 通路和 m 通路的长度。如果在这两点之间不存在一个特殊的通路，试说明原因。

(b) 令 $V=\{1, 2\}$，重做(a)问。



(a) 令 r 如图所示，因为 q 与 r 不是 4 邻接的，所以不存在 4 通路。

最短 8 通路与 m 通路如图所示，长度分别为 4 和 5。

(b) 最短 4 通路、8 通路、m 通路如图所示，长度分别为 6、4、6。

图像 $f(x,y)$ 和 $g(x,y)$ 的非归一化直方图分别为 h_f 和 h_g。给出能确定如下图像的直方图的条件（针对 f 和 g 中的像素值）：(a)* $f(x,y)+g(x,y)$；(b) $f(x,y)-g(x,y)$；(c) $f(x,y)\times g(x,y)$；(d) $f(x,y)\div g(x,y)$。证明每种情况下这些直方图是如何形成的。算术运算是对应像素运算，详见 2.6 节中的说明。

由于直方图不包含图像的空间属性信息，因此只有**至少一个图像中的所有像素为相同强度**，才能根据原始直方图确定运算后形成图像的直方图。

由直方图的定义可知，$h_f(r_k)$ 表示在图像 $f(x,y)$ 中强度为 r_k 的像素个数。假设图像 $g(x,y)$ 中的所有像素强度均为 c，并令 u_k 表示两原始图像经过运算后形成图像的强度，则有以下结论：

(a) 当两幅图像对应相加时，可得 $u_k = r_k + c$，$h_{sum}(u_k) = h_f(r_k)$，即 h_{sum} 在高度上与 h_f 上对应相等，在强度轴上向右平移了 c。

(b) 当两幅图像对应相减时，可得 $u_k = r_k - c$，$h_{diff}(u_k) = h_f(r_k)$，即 h_{diff} 在高度上与 h_f 上对应相等，在强度轴上向左平移了 c。

(c) 当两幅图像对应相乘时，可得 $u_k = c \cdot r_k$，$h_{prod}(u_k) = h_f(r_k)$，即 h_{prod} 在高度上与 h_f 上对应相等，在强度轴上拓展了 c 倍。

灰度在区间[0, 1]内的图像具有如右图所示的概率密度函数 $p_r(r)$。我们希望变换这幅图像的灰度级，以便它们在所示的图形中具有规定的 $p_z(z)$。假设各个量是连续的，求实现这一目的的变换（用 r 和 z 表示）。

通过直方图均衡化得到：$s = \int_0^r p_r(\omega) d\omega = \int_0^r (-2\omega + 2) d\omega = -r^2 + 2r$

$s = \int_0^z p_z(\omega) d\omega = \int_0^z 2\omega d\omega = z^2$ 由 $z \ge 0$ 可得：$z = \sqrt{-r^2 + 2r}$

证明式(3.50)中定义的拉普拉斯是各向同性的（旋转不变的）。假设量是连续的。根据表 2.3，角度旋转 θ 后的坐标由下式给出：

$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta \quad 和 \quad y' = x\sin\theta + y\cos\theta$$

式中，(x,y) 和 (x',y') 分别是旋转前和旋转后的坐标。

拉普拉斯算子定义为$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ 对于未旋转的坐标有 $\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}$

又由$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases}$

$$\frac{\partial f}{\partial x'} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x'} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cos^2\theta + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\sin\theta\cos\theta + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\cos\theta\sin\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\sin^2\theta$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y'} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y'} = \frac{\partial f}{\partial x}\sin\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\theta$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\sin^2\theta - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\cos\theta\sin\theta - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\sin\theta\cos\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cos^2\theta$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \text{ 得证}$$

考虑函数 $f(t) = \sin(2\pi nt)$，其中 n 是整数，它的傅里叶变换 $F(\mu)$ 是纯虚数（见习题 4.9）。由于取样数据的变换 $\tilde{F}(\mu)$ 由 $F(\mu)$ 的周期副本组成，因此 $\tilde{F}(\mu)$ 也是纯虚数。画出一个类似于图 4.6 的图表，并根据所

(a) 函数 $f(t)$ 的周期为 $t = \frac{1}{n}$

(b) 函数 $f(t)$ 的频率为 n

(c) 若 $f(t)$ 的采样率高于奈奎斯特率，则取样后的函数的傅里叶变换与原函数相同，可无损的恢复为原函数。

(d) 若 $f(t)$ 的采样率低于奈奎斯特率，则取样后的函数的傅里叶变换与频率低于原函数，取样后的函数如图中曲线所示。

(e) 若以奈奎斯特率对 $f(t)$ 进行采样，则所有的正负脉冲将抵消，傅里叶变换为 0，无法复原。

证明如下二维连续傅里叶变换对成立。

(a) 对于冲激函数 $\delta(t,z)$ 有 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t,z) dtdz = 1$ 且根据筛选性质，则有：

$$\Im(\delta(t,z)) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t,z) e^{-j2\pi(\mu t + \nu z)} dtdz = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi(\mu t+\nu z)} \delta(t,z) dtdz = e^{-j2\pi(\mu t+\nu z)}\Big|_{t=0,z=0} = e^0 = 1$$

由傅里叶逆变换 $\Im^{-1}(1) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot e^{j2\pi(\mu t+\nu z)} d\mu d\nu = \delta(t,z)$ 得 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi(\mu t+\nu z)} d\mu d\nu = \delta(t,z)$

(b) $\Im(1) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot e^{-j2\pi(\mu t+\nu z)} dtdz = \delta(\mu,\nu)$

(c) $\Im(\delta(t-t_0, z-z_0)) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0, z-z_0) e^{-j2\pi(\mu t+\nu z)} dtdz$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi(\mu t+\nu z)} \delta(t-t_0, z-z_0) dtdz$$

$$= e^{-j2\pi(\mu t+\nu z)}\Big|_{t=t_0,z=z_0} = e^{-j2\pi(t_0\mu + z_0\nu)}$$

(d) $\Im(e^{j2\pi(t_0 t + z_0 z)}) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi(t_0 t+z_0 z)} e^{-j2\pi(\mu t+\nu z)} dtdz = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi((\mu - t_0)t + (\nu - z_0)z)} dtdz = \delta(\mu - t_0, \nu - z_0)$

(e)

$$\Im(\cos(2\pi\mu_0 t + 2\pi\nu_0 z)) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi\mu_0 t + 2\pi\nu_0 z) e^{-j2\pi(\mu t+\nu z)} dtdz$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \left[e^{j2\pi(\mu_0 t+\nu_0 z)} + e^{-j2\pi(\mu_0 t+\nu_0 z)}\right] e^{-j2\pi(\mu t+\nu z)} dtdz$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{-j2\pi((\mu-\mu_0)t + (\nu-\nu_0)z)} + e^{-j2\pi((\mu+\mu_0)t+(\nu+\nu_0)z)}\right) dtdz$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi((\mu-\mu_0)t+(\nu-\nu_0)z)} dtdz + \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi((\mu+\mu_0)t+(\nu+\nu_0)z)} dtdz\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\delta(\mu-\mu_0, \nu-\nu_0) + \delta(\mu+\mu_0, \nu+\nu_0)\right]$$

(f)

$$\Im(\sin(2\pi\mu_0 t + 2\pi\nu_0 z)) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2\pi\mu_0 t + 2\pi\nu_0 z) e^{-j2\pi(\mu t+\nu z)} dtdz$$

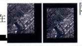
$$= \frac{1}{2j}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \left[e^{j2\pi(\mu_0 t+\nu_0 z)} - e^{-j2\pi(\mu_0 t+\nu_0 z)}\right] e^{-j2\pi(\mu t+\nu z)} dtdz$$

$$= \frac{1}{2j}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{-j2\pi((\mu-\mu_0)t+(\nu-\nu_0)z)} - e^{-j2\pi((\mu+\mu_0)t+(\nu+\nu_0)z)}\right) dtdz$$

$$= \frac{1}{2j}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi((\mu-\mu_0)t+(\nu-\nu_0)z)} dtdz - \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi((\mu+\mu_0)t+(\nu+\nu_0)z)} dtdz\right]$$

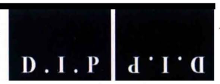
$$= \frac{1}{2j}\left[\delta(\mu-\mu_0, \nu-\nu_0) - \delta(\mu+\mu_0, \nu+\nu_0)\right]$$

下图所示的两个傅里叶频谱是同一幅图像的傅里叶频谱。左侧的频谱对应于原图像，右侧的频谱对应于填充零后的图像。解释右侧的频谱中，沿中心纵轴和横轴信号谱明显增强的原因。



除非原图像的四个边界本身就是纯黑的，否则用 0 填充图像会在原图像的边界处引入明显的不连续特征。这些在水平和垂直边缘的空间域强烈变化在频谱的垂直和水平轴上引入了高频分量，因此在右侧的频谱中，沿中心纵轴和横轴的信号谱明显增强。

考虑如下图像。右侧的图像是这样得到的：(a)用 $(-1)^{x+y}$ 乘以左侧的图像；(b)计算 DFT；(c)取变换的复共轭；(d)计算傅里叶反变换；(e)用 $(-1)^{x+y}$ 乘以结果的实部。（从数学上）解释出现右图所示现象的原因。



$$f'(x,y) = \Im^{-1}[F^*(u,v)] = \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} F(u,v) e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)} = \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} F(u,v) e^{j2\pi\left(\frac{u(-x)}{M}+\frac{v(-y)}{N}\right)} = f(-x,-y)$$

因此变换后的图像为原图像通过原点作反射。

完成如下工作：

(a) 证明两个连续变量 t 和 z 的连续函数 $f(t, z)$的拉普拉斯变换满足如下傅里叶变换对：

$$\nabla^2 f(t,z) \Leftrightarrow -4\pi^2(\mu^2+\nu^2)F(\mu,\nu)$$

（提示：见式(3.50)和表 4.4 中的第 12 项。）

(b)*(a)问中的结果仅对连续变量成立。对于离散变量，如何实现连续频率域传递函数 $H(\mu,\nu) = -4\pi^2(\mu^2+\nu^2)$？

(c) 如例 4.21 所示，频率域中的拉普拉斯变换类似于图 3.46(d)中的结果，后者是用中心系数为−8 的空间核得到的。说明频率域结果与图 3.46(c)中的结果不相似的原因，图 3.46(c)是用中心系数为−4 的核得到的。

(a) 拉普拉斯算子的定义为$\nabla^2 f(t,z) = \frac{\partial^2 f(t,z)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 f(t,z)}{\partial z^2}$

则它的傅里叶变换为：

$$\Im[\nabla^2 f(t,z)] = \Im\left(\frac{\partial^2 f(t,z)}{\partial t^2}\right) + \Im\left(\frac{\partial^2 f(t,z)}{\partial z^2}\right) = (j2\pi\mu)^2 F(\mu,\nu) + (j2\pi\nu)^2 F(\mu,\nu) = -4\pi^2(\mu^2+\nu^2)F(\mu,\nu)$$

(b) 对上述函数进行采样，设$H(u,v) = -4\pi^2(u^2+v^2)$

对于离散采样：$uv = 0,1,2,\cdots,M-1$，$v = 0,1,2,\cdots,N-1$ 有 $H(u,v) = -4\pi^2\left(\left(u-\frac{M}{2}\right)^2 + \left(v-\frac{N}{2}\right)^2\right)$

因此，原式可表示为$\nabla^2 f(x,y) \Leftrightarrow -4\pi^2\left(\left(u-\frac{M}{2}\right)^2 + \left(v-\frac{N}{2}\right)^2\right)F(u,v)$

(c) 拉普拉斯滤波器是各向同性的，因此它的对称性更接近于中心为−8 的空间模板。如果使用中心为−4 的空间模板，由于缺少对角线项，则更加注重水平和垂直方向上的处理。

考虑下图所示的手的 X 射线图像。右图是首先用一个高斯低通滤波器对左图进行低通滤波，然后用一个高斯高通滤波器对结果进行高通滤波得到的。图像大小为 420×344 像素，两个滤波器传递函数的截止频率都是 D_0= 25。

(a)* 说明右图中戒指的中心部分明亮且实心的原因，考虑滤波后图像的主要特征是手指、腕骨的边缘和这些边缘之间的暗色区域。换句话说，因为高通滤波器会消除直流项，所以你并不希望高通滤波器将戒指内部的恒定区域渲染为暗色吗？

（原图像由密歇根大学医学院解剖科学系的 Thomas R.Gest 博士提供）

(a) 戒指区域在经过高通变换后，中心区域应该是暗的，但由于又经过了一个低通滤波器，将暗的中心与亮的边缘进行了平均，因此形成了一片。又因为戒指边界上亮度的突变性比图像中的其他地方高得多，因此主导了结果的显示。

(b) 傅里叶滤波是一个线性变换过程，处理的顺序不会影响结果。

已知列向量

$$s_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad s_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad s_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(a) 证明 s_0, s_1 和 s_2 是正交的。

(b)*它们是规范正交的吗？如果不是，将它们归一化以创建规范正交向量的一个变换矩阵。

(c) 利用(b)问的结果，写出 s_0, s_1 和 s_2 的一个正交变换矩阵。

(d) 计算列向量 $f = [3\ \ -6\ \ 5]$ 的变换。

(e) 计算(d)问中结果的反变换。

$\langle s_0, s_1\rangle = 1+0-1 = 0$

$\langle s_1, s_2\rangle = 1+0-1 = 0$，因此它们是正交的。

$\langle s_0, s_2\rangle = 1-2+1 = 0$

(b) 不是规范正交。$e_0 = \frac{s_0}{\|s_0\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, e_1 = \frac{s_1}{\|s_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, e_2 = \frac{s_2}{\|s_2\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(c) $A = [e_0\ \ e_1\ \ e_2]^T = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$

(d) $t = Af = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ -\sqrt{2} \\ \frac{14}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$ (e) $f = A^T t = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 5 \end{bmatrix}$

使用式(7.4)和式(7.5)：

(a) 求 $f = [3+j2\ \ 1-j]^T$ 的范数。

(b) 求 $g = [0.707\ \ -0.707]^T$ 的范数。

(c) 求 $h = [0.707\ \ 0.707]^T$ 和 g 的夹角。

(d)*求 $f(x) = \cos x$ 的范数。

(e) 求(d)中 $f(x)$ 和 $g(x) = \sin x$ 的夹角。

(f) f 和 g 正交吗？

(g) f 和 g 规范正交吗？

(a) $\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle} = \sqrt{f^{*T}f} = \sqrt{f_0^* f_0 + f_1^* f_1} = \sqrt{15}$

(b) $\|g\| = 0.707\sqrt{2} = 1$ (d) $\|f(x)\| = \sqrt{\langle f(x), f(x)\rangle} = \sqrt{\int_0^{2\pi}\cos^2 x dx} = \sqrt{\pi}$

(c) $\theta = \arccos\frac{\langle h, g\rangle}{\|h\|\|g\|} = \arccos 0 = 90°$

e) $\theta = \arccos\frac{\langle f(x), g(x)\rangle}{\|f(x)\|\|g(x)\|} = \arccos\frac{\int_0^{2\pi}\sin x\cos x dx}{\pi} = \arccos 0 = 90°$

f) 正交，$\langle f(x), g(x)\rangle = \int_0^{2\pi}\sin x\cos x dx = 0$ (g) $\|f(x)\| = \|g(x)\| = \sqrt{\pi}$

推导哈尔尺度系数。 哈尔尺度函数满足相关条件，因此其展开系数

$h_\varphi(k) = \langle\varphi(x), \sqrt{2}\varphi(2x-k)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{2}\varphi(x)\varphi(2x-k)dx$，其中 $k \in Z$

又因为哈尔尺度函数为$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < 1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$

若需系数不为 0，则需满足$\begin{cases} 0 \le x < 1 \\ 0 \le 2x - k < 1 \end{cases}$对 x 有解

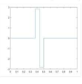
化简得$\begin{cases} \frac{k}{2} < 1 \\ \frac{k+1}{2} > 0 \end{cases}$，解得$-1 < k < 2$。因为 k 为整数，因此 $k = 0$或1。

$k=0$时，$h_\varphi(0) = \sqrt{2}\int_0^{1/2} 1dx = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $k=1$时，$h_\varphi(1) = \sqrt{2}\int_{1/2}^1 1dx = \frac{\sqrt{2}}{2}$

因此哈尔尺度系数为$\{h_\varphi(n) | n = 0,1\} = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

画出哈尔小波函数的小波 $\psi_{3,3}(x)$。根据哈尔尺度函数写出 $\psi_{3,3}(x)$ 的表达式。

$\psi_{3,3}(x) = 2^{\frac{3}{2}}\psi(2^3 x - 3) = 2\sqrt{2}\psi(8x-3)$利用哈尔小波函数定义，得到小波图如下：



根据哈尔尺度函数$h_\psi(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}, h_\psi(1) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$，得到$\psi(x) = \sum h_\psi(n)\sqrt{2}\varphi(2x-n)$，

因此，$\psi(8x-3) = \sum h_\psi(n)\sqrt{2}\varphi(2(8x-3)-n)$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}\varphi(16x-6) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{2}\varphi(16x-7) = \varphi(16x-6) - \varphi(16x-7)$

得到$\psi_{3,3}(x) = 2\sqrt{2}\psi(8x-3) = 2\sqrt{2}\varphi(16x-6) - 2\sqrt{2}\varphi(16x-7)$

式(7.137)和式(7.138)中 DWT 的初始尺度为 j_0= 0。

(a)* 对于任何初始尺度 $j_0 \le J$，重写这些公式。

(b) 对于 j_0= 1（而非 0）的例 7.19，重新计算 $0 \le x \le 3$ 时函数 $f(x) = \{1,4,-3,0\}$ 的一维 DWT。

(c) 用来自(b)问的结果由变换值计算 $f(1)$。

(a)对于任何 $j_0 \le J$

$$T_\varphi(j,k) = \langle f(x), \varphi_{j,0}(x)\rangle = \left\langle f(x), 2^{\frac{j}{2}}\varphi(2^j x - k)\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{x=0}^{N-1} f(x) 2^{\frac{j}{2}}\varphi^*(2^j x - k)$$

$$T_\psi(j,k) = \langle f(x), \psi_{j,k}(x)\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{x=0}^{N-1} f(x)\psi_{j,k}^*(x)$$

(b) 因为$M = 2, J = 2, j_0 = 1$，求得哈尔函数在$n = 0,1,2,3$，$j = 1$，$k = 0,1$上的分布：

$$W_\varphi(1,0) = \frac{1}{2}[f(0)\varphi_{1,0}(0) + f(1)\varphi_{1,0}(1) + f(2)\varphi_{1,0}(2) + f(3)\varphi_{1,0}(3)] = \frac{1}{2}[\sqrt{2} + 4\sqrt{2} + 0 + 0] = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$W_\varphi(1,1) = \frac{1}{2}[f(0)\varphi_{1,1}(0) + f(1)\varphi_{1,1}(1) + f(2)\varphi_{1,1}(2) + f(3)\varphi_{1,1}(3)] = \frac{1}{2}[0 + 0 - 3\sqrt{2} + 0] = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$W_\psi(1,0) = \frac{1}{2}[f(0)\psi_{1,0}(0) + f(1)\psi_{1,0}(1) + f(2)\psi_{1,0}(2) + f(3)\psi_{1,0}(3)] = \frac{1}{2}[\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 0 + 0] = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$W_\psi(1,1) = \frac{1}{2}[f(0)\psi_{1,1}(0) + f(1)\psi_{1,1}(1) + f(2)\psi_{1,1}(2) + f(3)\psi_{1,1}(3)] = \frac{1}{2}[0 + 0 - 3\sqrt{2} + 0] = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

因此，$f(n)$的一维 DWT 为$\left\{\frac{5\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right\}$

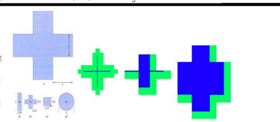
(c) $f(n) = \frac{1}{2}[W_\varphi(1,0)\varphi_{1,0}(n) + W_\varphi(1,1)\varphi_{1,1}(n) + W_\psi(1,0)\psi_{1,0}(n) + W_\psi(1,1)\psi_{1,1}(n)]$

$n=1$时 $f(1) = \frac{\sqrt{2}}{4}[(5)(\sqrt{2}) + (-3)(0) + (-3)(\sqrt{2}) + (-3)(0)] = 1$

(a)* $(A \ominus B^4) \oplus B^2$

(b) $(A \ominus B^1) \oplus B^3$

(c) $(A \oplus B^1) \oplus B^3$



$(A \circ B)^c = [(A \ominus B) \oplus B]^c = (A \ominus B)^c \ominus \hat{B} = (A^c \oplus \hat{B}) \ominus \hat{B} = A^c \cdot \hat{B}$

$(A \cdot B)^c = [(A \oplus B) \ominus B]^c = (A \oplus B)^c \oplus \hat{B} = (A^c \ominus \hat{B}) \oplus \hat{B} = A^c \circ \hat{B}$

考虑一个线性位置不变系统，其冲激响应为

$$h(x,y) = e^{-[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2]}$$

式中，x 和 y 是连续变量。假设这个系统的输入是一幅二值图像，二值图像由黑色背景上 $x = a$ 处的一条宽度无限小的白色垂线组成。这样的图像可以建模为 $f(x,y) = \delta(x-a)$。假设噪声可以忽略不计，使用式(5.61)求输出图像 $g(x,y)$。

$g(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha,\beta)h(x-\alpha, y-\beta)d\alpha d\beta$

其中 $f(x,y) = \delta(x-\alpha)$，因此 $f(\alpha,\beta) = \delta(\alpha-\alpha)$，可得

$g(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\alpha-\alpha)e^{-[(x-2\alpha)^2+(y-2\beta)^2]}d\alpha d\beta = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\alpha-\alpha)e^{-(x-2\alpha)^2}e^{-(y-2\beta)^2}d\alpha d\beta$

$= \int_{-\infty}^{\infty}\delta(\alpha-\alpha)e^{-(x-2\alpha)^2}d\alpha\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(y-2\beta)^2}d\beta = e^{-(x-2\alpha)^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(y-2\beta)^2}d\beta = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-(x-2\alpha)^2}$

考虑在 x 方向匀加速运动导致的图像模糊问题。图像在时刻 $t=0$ 静止，并在时间 T 内以匀加速度 $x_0(t) = at^2/2$ 加速，求模糊函数 $H(u,v)$。假设快门的开关时间可以忽略不计。

$H(u,v) = \int_0^T e^{-j2\pi u x_0(t)}dt = \int_0^T e^{-j2\pi u\frac{at^2}{2}}dt = \int_0^T e^{-j\pi u a t^2}dt = \int_0^T\left[\cos(\pi a t^2) - j\sin(\pi a t^2)\right]dt$

$= \sqrt{\frac{T^2}{2\pi u a T^2}}\left[C(\sqrt{\pi u a}T) - jS(\sqrt{\pi u a}T)\right]$

其中，$C(z) = \sqrt{\frac{2\pi}{T}}\int_0^z\cos t^2 dt$，$S(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^z\sin t^2 dt$

某个 X 射线成像几何结构产生模糊退化，这种模糊退化可建模为感测图像与如下空间圆对称函数的卷积：

$$h(x,y) = \frac{x^2+y^2-2\sigma^2}{\sigma^4}e^{-(x^2+y^2)/2\sigma^2}$$

假设 x 和 y 是连续变量，证明频率域中的退化为

$$H(u,v) = -8\pi^4\sigma^2(u^2+v^2)e^{-2\pi^2\sigma^2(u^2+v^2)}$$

对于$s(x,y) = e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$ 有$\nabla^2 s(x,y) = \frac{\partial^2 s(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s(x,y)}{\partial y^2} = \frac{x^2+y^2-2\sigma^2}{\sigma^4}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$

因此，$H(u,v) = \Im[h(x,y)] = \Im[\nabla^2 s(x,y)] = -4\pi^2(u^2+v^2)F(u,v)$

其中，$F(u,v) = \Im[s(x,y)] = \Im(e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}) = 2\pi\sigma^2 e^{-2\pi^2\sigma^2(u^2+v^2)}$

因此，$H(u,v) = -4\pi^2(u^2+v^2)\cdot 2\pi\sigma^2 e^{-2\pi^2\sigma^2(u^2+v^2)} = -8\pi^3\sigma^2(u^2+v^2)e^{-2\pi^2\sigma^2(u^2+v^2)}$

使用习题 5.31 中的传递函数，给出维纳滤波器传递函数的表达式，假设噪声图像和未退化图像的功率谱之比为常数。

$$H_W(u,v) = \left[\frac{1}{H(u,v)}\frac{|H(u,v)|^2}{|H(u,v)|^2 + K}\right]$$

其中，$|H(u,v)|^2 = H^*(u,v)H(u,v) = H^2(u,v) = 64\pi^6\sigma^4(u^2+v^2)^2 e^{-4\pi^2\sigma^2(u^2+v^2)}$

因此，$H_W(u,v) = \frac{8\pi^3\sigma^2(u^2+v^2)e^{-2\pi^2\sigma^2(u^2+v^2)}}{64\pi^6\sigma^4(u^2+v^2)^2 e^{-4\pi^2\sigma^2(u^2+v^2)} + K}$

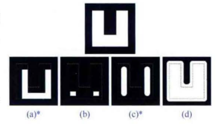
参照下图顶部的图像，回答如下问题。

(a)*给出产生图像(a)的结构元和形态学运算。显示结构元的原点。虚线表示原目标的边界，仅供参考，不是结果的一部分（白色元素是前景像素）。

(b) 对图像(b)所示的输出重做(a)问。

(c)*对图像(c)所示的输出重做(a)问。

(d) 对图(d)所示的解重做(a)问。注意，图(d)中的所有角都是圆角。



a）通过使用原点在右下角的矩形对原图像进行腐蚀所得到的。

b）通过使用长条矩形对原图像进行腐蚀所得到的。

c）先使用矩形对原图进行腐蚀得到两条竖线，再使用◯进行膨胀。

d）先使用大一些◯的进行腐蚀，再使用小一些的◯进行膨胀。

(a) 给出从斜截式 $y = ax + b$ 得到直线的法线表示的一般过程。

(b)*求直线 $y = -2x + 1$ 的法线表示。

a) $x\cos\theta + y\sin\theta = \rho$ 可表示为 $y = -(\cot\theta)x + \rho/\sin\theta$

因此斜截式 $y = ax + b$ 中 $a = -\cot\theta$，$b = \rho/\sin\theta$，计算可得 $\theta = \cot^{-1}a$，$\rho = b\sin\theta$

b) $\theta = \cot^{-1}2 = 26.6°$，$\rho = 1\sin\theta = 0.45$

证明 10.3 节中的基本全局阈值处理算法会在有限的步数内收敛。

假设初始阈值在图像中的最小和最大强度之间选择。首先，考虑如图所示的直方图。它显示了第 k 个迭代步骤的阈值。$m_1(k+1)$将使用大于$T(k)$的强度乘以其直方图值来计算。类似地，$m_2(k+1)$将使用小于或等于$T(k)$的强度乘以其直方图值来计算。则第$k+1$次迭代的阈值$T(k+1) = 0.5[m_1(k+1) + m_2(k+1)]$。

首先，我们需要先证明阈值在 0 和$L-1$之间有界。

如果$m_2(k+1) = 0$，则$m_1(k+1)$等于图像的强度均值M，因此$T(k+1) = M/2 < L-1$。同理可证明$m_1(k+1) = L-1$时$T(k+1) = M/2 > 0$，因此$T(k)$总是在 0 和$L-1$之间。

接着我们需要证明算法将会收敛。

当$T(k+1) = T(k)$时，则已收敛。

当$T(k+1) < T(k)$时，阈值将向左移动，则$m_1(k+2)$与$m_2(k+2)$都将减小或不变，进一步可得$T(k+2) \le T(k+1)$，阈值将不断向左移动直到收敛。

同理可得，当$T(k+1) > T(k)$时，阈值将不断向右移动直到收敛

右侧图像中的目标和背景在区间[0, 255]上的平均灰度分别为 170 和 60。图像被均值为 0、标准差为 10 个灰度级的高斯噪声污染。提出一种正确分割率达 90%以上的阈值分割方法。（回顾可知，高斯曲线面积的 99.7%在关于均值的±3σ 区间内，其中σ 是标准差。）

由于$170-60 = 110$，而$\sigma = 10$，$110 \gg 3\sigma = 30$，因此图像的直方图将有两个显著的峰，使用简单的全局阈值处理算法即可达到良好的效果。