1.1【基本定义】

图像: 二维函数 f(x,y),xy 空间坐标,f 值为强度或灰度级 数字图像: 有限的离散的 f(x,y) 俊素: 数字图像的最小单元

应用领域: 医学成像、遥感、航天应用、天文学 图像分类: 电磁波谱、电子学的、声学的、计算机学的 顶刊: TPAMI, tip, Tmi, medical image analysis

1.2【人类视觉感知】

视锥细胞、视杆细胞, 小孔成像的相似三角形

1.3【图像传感采集】

F(x,y)=i(x,y)r(x,y),i 发光强度, r反射

1.4【图像采样量化】(科技论文>300dpi)

空间分辨率: 单位距离下可识别的 line pairs 的最大数量 强度分辨率:对可分辨出的最小强度级变化,一般28,16,32

1.4.4 插值

最近邻: 可能导致扭曲, 按最近的 双线性: v=ax+by+cxy+d 双立方: $v(x,y) = \sum_{i=0}^{3} \sum_{i=0}^{3} a_{ij}x^{i}y^{i}$



1.5【像素关系】

邻域 neighbor: N_4 十字, N_D 对角, $N_8 = N_4 \cup N_D$ 邻接 adjacency: 4 邻接 $(q \in N_4(p))$ $8(q \in N_8(p))$, $m(q \in N_4(p), or \ q \in N_D(p) \ and \ N_4(p) \cap N_4(q) = \phi)$ 路径 path: 一组点。长度为点数目,有4、8、m三种路径 联通分量 connected component: 图像子集 S(必须是方的)中

连接着的像素组(Y=必须给出邻接的类型才能求 联通集 connected set: 只有一个连通域的 S 集(必Y) 区域 region: 即联通集。两区域相邻意味着 R1 UR2 为联通

集, 否则即两区域不相邻。(必Y) 边界 boundaries: 前景为全部不相邻区域之并集, 其余为背 (必Y,一般使用 8 邻接定义)

距离:满足非负,对称,三角不等式的函数 D(p,q) 欧氏距离=二范数, D4 城市街区距离=横纵绝对值之和, D8 棋盘距离=横纵绝对值最大值

1.6【基本数学工具】

1.6.1 数学概念

Elementwise product: 两矩阵对应位置相乘 Matrix product: 矩阵乘法

算子: H(f(x,y)) = F(x,y), 线性H(af + bg) = aF + bGunion 并, intersection 交, mutually exclusive 互斥也叫 Disjoint 不相交, complement 补集, difference 差集, se universe 全集

空间算子: 单像素算子如强度变换映射(s=Tz); 邻域算子如 均值滤波;几何变换如仿射变换,某点改变后坐标=矩阵*该 占原来的坐标

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$
 identity 等价: $[1,0,0,0,1,0]$ 为前两行,x 整 y 横下同

缩放/反射 reflect: [cx,0,0;0,cv,0] 旋转: $[c\theta, -s\theta, 0]$; $s\theta, c\theta, O]$ (顺时转 θ 为负,可用(0, y)验证

平移 translation: [1,0,tx;0,1,ty]

错切 shear 单向拉伸, 垂直[1,sv,0;0,1,0],水平[1,0,0;sh,1,0]

1.6.2 正向变换 Forward transform(如 fft 前的 shift):
$$T(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) r(x,y,u,v), f(x,y) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} T(u,v) s(x,y,u,v)$$

判断其可分离性: $r(x, y, u, v) = r_1(x, u)r_2(y, v)$ 判断其对称性: 当可分离,且 $r_1(x,u) = r_2(y,v)$ 例如傅里叶核 r_fft 就是 xy 可分离(独立)、xy 对称的核

矩阵写法: T = AFA, 其中 F 为图像方阵, A 为变换核矩 阵且 $a_i = r1(i,j)$, T为变换后结果。

矩阵变换流程: F'=BAFAB, 如傅里叶, walsh, 哈达玛变 换, 离散余弦, haar变换都是。先正向再变, 反向再逆变

强度值视为随机变量 z_k ,k=1~255 则概率为灰度值出现次数 $p(z_k) = \frac{n_k}{MN}$, $mean = \sum z_k p(z_k)$, $var^2 = \sum (z_k - m)^2 p(z_k)$ | 定义:将 f(t)变为 F(u),获取(原时域函数展成傅里叶级时,在(频率为u的正弦波)前的系数。其原变换和逆变换:

第二章 强度变换空域滤波

2.1【定义】

强度变换 intensity transformation: $s=T(r), r \in (0,1)$,s/r 为变 换前后图像的像素强度;空域滤波 spatial filtering,滤波核 filter=mask=kernel=template=window

2.2 【隔度变换】

线性变换: negative 变换(s=L-1-r,L 为灰度级), 增强灰色、 白色细节,尤其是黑背景主导下的白前景; Identity 变换(s=r) 对数 logarithmic 变换: log(s=c*log(1+r),c 常数, r>0), 拉伸 暗像素压缩亮像素,压缩动态范围; inverse-log(s=exp r)也叫 exponential 反之,但也压缩动态范围。

幂次 power-law 变换: gamma($s = c * r^{\gamma}$), $\gamma < 1$ 变亮, γ>1 变暗。相比对数变换,参数多,可调范围更大。

2.3 【直方图均衡化】

直方图 histogram 统计: 1.计算出每个灰度级的个数 n_k , $k=0\sim L-1$; $2.p(k) = n_k/MN$

monotonically 增函数; 逆变换 r=T^(-1)(s)严格单调递减。

2.3.1 直方图均衡 HE, 概率积分变换

1、先计算原始图像强度值 r 的 PDF, 记作: 连续p r(r),

一般会给出;或离散的 p_k(r_k),需要自己计算。 2、按如下公式积分, 得到 s=T(r)或 S_k=T(r_k)

$$s=(L-1)\int_0^r p_r(\omega)d\omega$$

$$S_k=T(r_k)=(L-1)\sum_{j=0}^k p_r(r_j), k=0,1,2,\cdots,L-1$$
 s=T(r)的概率密度函数为

 $p_s(s) = p_r(r) \left| \frac{dr}{ds} \right| = \frac{2r}{(L-1)^2} \left| \left| \frac{ds}{dr} \right|^{-1} \right| = \frac{2r}{(L-1)^2} \left| \frac{(L-1)}{2r} \right| = \frac{1}{L-1}$ 3、根据 p 计算出所有的 s, 若是离散值,则 sk 最后要四多

五入。对离散的: $p_s(s_k) = (H \overline{\rho} s_k \forall n \underline{\sigma} n \underline{h} f n_k n) / MN$ 2.4【空域滤波】

相关w(x,y)空心五角星f(x,y),无需旋转卷积核直接滤波 卷积 $w(x,y) \star f(x,y)$, 180 度旋转卷积核

2.5【平滑低通滤波】

平滑滤波(有低通效果), 如 box filter=1/9*[1,1,1;1,1,1,1,1] aussian kernel=1/16*[1,2,1;2,4,2;1,2,1]

Order-statistic 排序统计滤波,如中值(专去椒盐) 2.6【锐化高通滤波】

2.6.1 导数 derivative 及其性质

一阶导数 $\frac{\partial f}{\partial x} = f(x+1) - f(x)$ 二阶导数 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f(x+1) + f(x-1) - 2f(x)$

2.6.2 laplacian 算子

定义为 $\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, 离散情况下为计算核[0,1,0;1, 4,1;0,1,0]。 具有各向同性或旋转不变性($\nabla^2(f^{\theta}) = [\nabla^2(f^{\theta})]^{\theta}$ 线性性 $\nabla^2(f+g) = \nabla^2 f + \nabla^2 g$, 以及 $\frac{\partial}{\partial x}(f+g) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x}$. 拉普拉斯锐化: $g(x,y) = f(x,y) + c[\nabla^2 f(x,y)]$, c取±1, 符号与滤波核的中心相同。

定义:
$$\nabla f \equiv \operatorname{grad}(f) \equiv \begin{bmatrix} g_x \\ g_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix}$$
, 线性, 非旋转不变; 梯度幅值 magnitude: $M(x,y) = \operatorname{mag}(\nabla f) = \sqrt{g_x^2 + g_y^2}$

非线性, 旋转可变 Roberts 交叉梯度算子: [-1,0;0,1]和[0,-1;1,0], 梯度值为

 $M(x,y) = [(z_9 - z_5)^2 + (z_8 - z_6)^2]^{1/2} \approx |z_9 - z_5| + |z_8 - z_6|$ Sobel 梯度算子,[-1.-2.-1;0.00;1,2.1],逆时z转90°,梯度值

第三章 频域滤波

.1【数学基础】

3.1.1 基本公式

欧拉公式: $z = x + jy = |z|(\cos\theta + j\sin\theta) = |z|e^{j\theta}$ 连续冲激函数 $\delta(t)$: $\delta(0) = \infty$, 否则为 0; 在全实轴积分 值为 1; 筛选性质 $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$

离散冲激函数: $\delta(0) = 1$, 否则为 0; 在整数轴积分值为 筛选性质 $\sum_{x=-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x_0) = f(x_0)$ 离散冲激序列 $S_{\Lambda T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n\Delta T)$

3.1.2 傅里叶级数

定义: 一组不同频率的正弦余弦函数的加权和, 是周期函 数的另一种时域表达形式。任意周期函数都可以展开为傅里 叶级数,即下式。w0=2pi/T 为基础频率

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi n \frac{1}{T}t}$$
其中,系数求解方法为($n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$)
$$c_n = \frac{1}{T} \left[f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \left[f(t) e^{-jn(2\pi/T)t} dt \right] \right]$$

也可写作 $f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)]$ fi cn 是 an 和 bn 的统一

给定函数 ft 求其傅里叶展开: 先用 f 求 c_n, 然后直接写出 f(t)即可。

3.1.3 傅里叶变换

定义: 将 f(t)变为 F(u), 获取(原时域函数展成傅里叶级数

 $F(\mu) = \int f(t)e^{-j2\pi\mu t}dt, f(t) = \int F(\mu)e^{j2\pi\mu t}d\mu$ 性质: 线性性(F(af+bg)=aF+bG 反之亦然) 时移性 $\mathcal{F}(f(t-t0)) = e^{-iut0}F(u)$

 $\mathcal{F}^{-1}(F(u-u0)) = e^{iu0t}f(t)$ 缩放性 $\mathcal{F}(f(at)) = F(u/a)/|a|$ 对称性 $F(F(T)) = 2\pi f(-u)$

巻积(连续)F(f*g) = FG, $F(fg) = F*G/2\pi$ 求变换: 周期函数先傅展再傅变: 非周期函数直接傅变 例子:方波的傅里叶变换为辛格函数(常值也是)

$$f(t) = \begin{cases} A, -\frac{W}{2} \le t \le \frac{W}{2} \\ 0, \text{ otherwise} \end{cases}$$

$$F(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j2\pi\mu t} dt = \int_{-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}} Ae^{-j2\pi\mu t} dt$$

$$= AW \frac{\sin(\pi W \mu)}{\pi W \mu} \quad \mathbf{I} \operatorname{sinc}(m) = \frac{\sin(\pi m)}{\pi m} \mathbf{1}$$

 $F(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-j2\pi\mu t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi\mu t} \delta(t - t_0) dt$

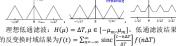
例子: 冲激序列, 周期函数先展开再变换 $\mathbb{H} f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta T) = \frac{1}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi \frac{n}{\Delta T}t}$ 其傅里叶变换为 $F(\mu) = \frac{1}{\Lambda T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta \left(\mu - \frac{n}{\Lambda T} \right)$

指数函数 $e^{j2\pi t_0\mu}$, $F(\mu) = \delta(\mu - \mu_0)$ 连续卷积: $f(t) \star h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau$ 卷积离散: $w(x) \star h(x) = \sum_{s=-a}^{a} w(s)h(x-s)$

3.2【采样定理】

离散冲激采样: $\tilde{f}(t) = f(t)s_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-n\Delta T)$ $F\left(\tilde{f}(t)\right) = F\left(f(t)\right) * F\left(\delta(t - n\Delta T)\right) = \frac{1}{\Lambda T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\mu - \frac{n}{\Lambda T}\right)$ 等价于以 $\frac{n}{-}$ 为周期将 $F(\mu)$ 左右平移。

采样定理:若有限带宽函数最大频率为 μ_{max} ,则离散冲激采 羊頻率 $\frac{1}{r}$ $\geq 2\mu_{max}$,否则可能頻域混叠(aliase),如下图



频带混叠的原因: 时域有限一般信号, 其频带一定无限第 采样带来截断); 时域无限的信号, 频带一定有限宽; 但若 颂带有限,且信号呈周期时,截断时可能整周期,此时不会 $(\operatorname{real}\{\mathcal{F}^{-1}[G(u,v)]\})(-1)^{x+y}$; 7.左上角切割 M*N 得结果。

3.3【1D 高散傅里叶】

定义: 用离散冲激序列对连续函数采样, Ϝ(μ)= 有关。 $F(u) = \sum_{x=0}^{M-1} f(x)e^{\frac{-j2\pi}{M}ux}, f(x) = \frac{1}{M}\sum_{u=0}^{M-1} F(u)e^{\frac{j2\pi}{M}ux}$ DFT 和逆 DFT 都是周期性的,周期为 M,与时域信号有关 [F], $F(0) = \sum_{x=0}^{M-1} f(x)e^{-j\frac{2\pi(0)}{M}x}$, $F(1) = \sum_{x=0}^{M-1} f(x)e^{-j\frac{2\pi(1)}{M}x}$. $\underline{j}\underline{\underline{u}}, f(0) = \frac{1}{M} \sum_{u=0}^{M-1} F(u) e^{j\frac{2\pi}{M}u(0)}...$

循环卷积,也叫圆卷积,计算g(x) = f(x) * h(x) $C_{m-0}^{M-1} f(m)h(x-m)$ 时,f 顺时针循环,h 逆时针循环。

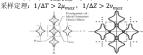


 $g(0) = [1\ 2\ 0] * [3\ 4\ 5]$ $g(1) = [1\ 2\ 0] * [5\ 3\ 4]$ $g(2) = [1\ 2\ 0] * [4]$ 采样间隔与频率间隔: 时域采样间隔 ΔT , 周期 M, 信号的

3.4 【2D-FT、DFT】

2D 冲激: $\delta(0,0) = \infty$, 否则为 0; 在 tz 平面积分值为 1; 帝选性质 $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t,z)\delta(t-t_0,z-z_0)dtdz = f(t_0,z_0)$;

离散 2D 冲激: 类似 1D $F(\mu,\nu)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(t,z)e^{-j2\pi(\mu t+\nu z)}dtdz$ $f(t,z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu,\nu) e^{j2\pi(\mu t + \nu z)} d\mu d\nu$



空域混叠欠采样, 时域混叠欠采样、车轮倒转效应 解决方案: 散焦衰减高频, 均值滤波 $F(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)}$

 $f(x,y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u,v) e^{j2\pi(ux/M + vy/N)}$

3.5【2D-DFT 性质】

平移. $f(x,y)e^{j2\pi(u_0x/M+v_0y/N)} \Leftrightarrow F(u-u_0,v-v_0)$ $f(x-x_0,y-y_0) \Leftrightarrow F(u,v)e^{-j2\pi(x_0u/M+y_0v/N)}$ 极坐标变换: $x = r\cos\theta y = r\sin\theta u = \omega\cos\varphi v = \omega\sin\varphi$ $f(r, \theta + \theta_0) \Leftrightarrow F(\omega, \varphi + \theta_0)$, 旋转 f 后 F 也旋转相同角度 周期: F(u,v) = F(u+M,v+N), f(x,y) = f(x+M,y+N)频谱居中: $f(x)(-1)^{x+y} \sim F(u-\frac{M}{2},v-\frac{N}{2})$, 重拼(非平移) 离散函数是偶函数 iif. 所有样本加和为 0 实函数 f 的 fft 共轭对称: $F^*(u,v) = F(-u,-v)$ 虚函数 f 的 fft 共轭反对称: $F^*(u,v) = -F(-u,-v)$ 实函数的 FT: 实部偶,虚部奇;幅值偶,相位奇 虚函数的 FT: 实部奇, 虚部偶; 幅值奇, 相位偶 对称: f实+偶, F也为纯实+偶; f实+奇, F为纯虚+奇 幅值= $\sqrt{R^2 + I^2}$,相位= $\arctan\left[\frac{I}{n}\right]$,功率= $R^2 + I^2$

直流分量 $F(0,0) = M * N * \bar{f}(x,y)$ 平均值,是频谱最大分量 巻积: $f(x,y)*h(x,y)=\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}f(m,n)h(x-m,y-n)$ を登误差: 使用循环卷积计算卷积时, 由于 f 和 h 的周期性 直接计算 f*g 会交叠,导致卷积结果错误。因此需要在 f 和 g 末尾处补 0,使得补零后长度 $P \ge len(f) + len(g) - 1$,避免下 ·周期误入.若两图像尺寸相等,则可能需要 P=2len(f)

$f_p(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & 0 \le x \le A - 1 \text{ and } 0 \le y \le B - 1\\ 0 & A \le x \le P \text{ or } B \le y \le Q \end{cases}$

DFT 算法对偶尺寸计算更快,因此最好 padding 到偶数 s_u 为基函数, $u \in Z$, 系数 $a_u = \langle s_u, f \rangle$ 频谱泄露: 加窗截断时, f0 处的能量分散到宽频带去。但 逐周期截断不会泄漏。改善: 可加合适窗函数或延长时间窗

. (.,,,,	
Rect[a,b]	$absinc(ua)e^{-j\pi(ua+vb)}$
$Sin(2\pi(\frac{u_0x}{M} + \frac{v_0y}{N}))$	$\frac{jMN}{2} \left[\frac{\delta(u + u_0, v + v_0)}{-\delta(u - u_0, v - v_0)} \right]$
$\cos(2\pi(\frac{u_0x}{M} + \frac{v_0y}{N}))$	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \delta(u + u_0, v + v_0) \\ \delta(u - u_0, v - v_0) \end{bmatrix}$
$A2\pi\sigma^{2}e^{-2\pi^{2}\sigma^{2}(t^{2}+z^{2})}$	$Ae^{-(\mu^2+v^2)/2\sigma^2}$
$ \frac{\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{m} f(t,z) \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{m} f(t,z)}{\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{m} \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{m} f(t,z)} $	$(j2\pi\mu)^m F(\mu, v)$ $(j2\pi v)^n F(\mu, v)$ $(j2\pi\mu)^m (j2\pi v)^n F(\mu, v)$

3.6【頻域滤波】

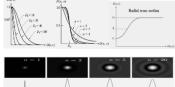
定义: $g = \mathcal{F}^{-1}(H(u,v)F(u,v)),H$ 为频率域传递函数 振铃效应: 空域填充 0, 导致边缘不连续, 进而导致振铃 特例: 高斯滤波器和一阶巴特沃斯没有振铃。 出现原因: 函数中存在梯度过大的"剧烈变化"区域

频域滤波步骤: 1.P=2M,Q=2N,填充 0; 2.在时域乘(-1)*+ 2移; 3.DFT; 4.构造大小为 P*Q 的实对称滤波器 H 并乘在 原图中心,得到 G; 5.IDFT 和零频点位移: $g_p(x,y)$ = 纽带: 时域与频域分析的纽带是卷积定理。

高斯: 高斯的 DFT、IDFT 还是实高斯函数。 $H(u) = q = u - 2^{\mu}$ $Ae^{-u^2/(2\sigma^2)}$, $h(x) = \sqrt{2\pi}\sigma Ae^{-2\pi^2\sigma^2x^2}$ 。当频域均值 0 方差 σ $\sum_{n=-\omega}^{\omega} f_n e^{-j2m\Delta T \mu} \cdot f_n = f(n\Delta T)$ 离散, $\vec{F}(\mu)$ 连续,周期与 μ 1 种,对应空域均值为 0.但方差为 $1/2\pi\sigma$ 某些滤波核=高斯 A·

3.7【低通频滤】

低通滤波: 中心高四周低, 过滤高频边缘、噪声 理想低通: H(u,v) = 1 if $D(u,v) < D_0$ else 0 高斯低通: $= e^{-D^2(u,v)/2D_0^2}$, $D_0 = \sigma$ 为截频,此处 H(u,v)=2/3巴特沃斯低通: $1/(1 + [D(u,v)/D_0]^2n)$, D_0 处 H()=0.5下 4 图为:高斯低通, 巴特沃斯低通, 同态(3.8),巴特沃斯环



3.8【高通频滤】

高通滤波: 中心低四周高, 保留边缘 高通滤波: $H_{hn} = 1 - H_{ln}(u, v)$

*n 阶巴特沃斯高通: $1/(1 + [D_0/D(u,v)]^2n)$ 拉普拉斯: $\nabla^2 f = (\partial^2 f)/(\partial x^2) + (\partial^2 f)/(\partial y^2) = f(x +$ f(x,y) + f(x-1,y) + f(x,y+1) + f(x,y-1) - 4f(x,y); § [0,1,0;1,-4,1;0,1,0]; 頻率核 $H(u,v) = -4\pi^2(u^2 + v^2)$;拉普拉 斯锐化增强后图像为 $g(x,y) = f(x,y) + c\Delta^2 f(x,y)$,其中 c=-1;

E频域中 $g(x,y) = \mathcal{F}^{-1}\{[1 + 4\pi^2D^2(u,v)]F(u,v)\}$ 同态滤波: 1. 令 f=ir, p=ln(f)=ln(i)+ln(r);2. 计算 P=DFT(p), $P'=HP=H\mathcal{F}[ln(i)]+H\mathcal{F}[ln(r)]$.H 为同态核: $3.p' = IDFT(P') = ln(i)' + ln(r)'(非求导); 4.g = e^{p'} = i' * r'$

同 态 核 : $H(u,v) = (\gamma_H - \gamma_L) [1 - e^{-c[D^2(u,v)/D_0^2]}] + \gamma_L$ $\gamma_L < H(u,v) < \gamma_H, \gamma_L < 1 < \gamma_H, \ c$ 用于控制尖锐度:能够同 5.1 【图像退化模型】 **」**压缩动态范围,增加对比度

3.9【带通陷波】

理想带阻: H(u,v) = 0 if $D \in \left[D_0 - \frac{w}{2}, D_0 + \frac{w}{2}\right]$ else1 巴特沃斯带阻: $H(u,v) = 1/[1 + (DW/(D^2 - D_0^2))^{2n}]$ 高斯带阻: $H(u,v) = 1 - e^{-[(D^2 - D_0^2)/DW]^2}$, D0 截频, W 带宽 带通: 1-带阻。Notch: 陷波, 单点阻塞, 必定呈中心对称 J用高斯自己凑

第四章 图像变换

4.1【数学基础】

内积性质: $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle^*$; $\langle u+v,w\rangle = \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle$ $\langle av, u \rangle = a \langle v, u \rangle$: $\langle v, v \rangle = 0$ iif v = 0, else $\langle v, v \rangle > 0$ 欧式空间 R^N (实数): $\langle u, v \rangle = u^T v = \sum_{i=1}^{N-1} u_i v_i$ 酉空间 $C^N(复数)$: $\langle u, v \rangle = u^{*T}v = \sum_{i=0}^{N-1} u_i^* v_i = \langle v, u \rangle^*$ 积分内积C[a,b](连续函数): $\langle f(x),g(x)\rangle = \int_a^b f^*(x)g(x)dx$ 向量夹角 $\theta = \cos^{-1}(\langle z, w \rangle / ||z|| ||w||)$ E交基: $\langle w_k, w_l \rangle = 0 (k \neq l)$, = 1 (k = l)双正交基: $\langle \widehat{w_k}, w_l \rangle = 0 (k \neq l)$,基等于其对偶时简化为正交 展开系数: $z = \sum a_n w_n$ 时, 系数 $a_i = \langle w_i, z \rangle / \langle w_i, w_i \rangle$

4.2【变换的矩阵形式】

若反变换核s(x,u),则 s_u 如下。A 为变换矩阵,且 $AA^T = I$ s(0,u)] [Su,0] $A = [s_0 ... s_{N-1}]^T$ s(1,u) $S_{u,1}$ $T = AFA^T$ $F = A^TTA$ s(N-1,u)

复数: $T = AFA^T$, $F = A^{*T}TA^*$ 。连续: $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n s_n(x)$

FT: $s_u(x) = e^{j2\pi ux/T}/\sqrt{T}$, $a_u = \int_{-T/2}^{T/2} f(x)e^{-j2\pi ux/T} dx/\sqrt{T}$

DFT: $T(u) = \sum_{n=1}^{N-1} f(x)e^{-j2\pi ux/N} / \sqrt{N}$, s_u to $\mathbb{E} T$ $\mathbb{E} \mathbb{E} N$ 4.3【相关】

 $f \star g(\Delta x) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) g(x + \Delta x) dx = \langle f(x), g(x + \Delta x) \rangle$ $\Delta x = 0$ 时 $f \star g(0) = \langle f(x), g(x) \rangle$, 因此 $a_u = \langle s_u, f \rangle = s_u(0) \star f$ 离散形式: $T(u) = \langle s_u, f \rangle = s_u \star f(0)$ 【此处星号为空心】

4.4【1D基本变换与时频分析】

海森堡不确定性: $\sigma_r^2 \sigma_r^2 > 1/(16\pi^2)$ 4.5【2D 基本变换】

4.6【离散余弦变换】

 $s(x,u) = a(u) \cos((2x+1)u\pi/2N), a(u) = \sqrt{1/N} (u=0),$ 2.几何: 区域求积开 M*N 次根: 损失细节更少 $a(u) = \sqrt{2/N}(u = 1, 2, ..., N - 1)$ $a(u)a(v)\cos((2x+1)u\pi/2N)\cos((2y+1)v\pi/2N)$ DCT: ①将 f 对称拓展为 g, ② $t_F = A_F g = [t_1, t_2]^T$, ③

4.7【沃尔什-哈达玛 WHT】

递推变换矩阵: $A_W = H_N/\sqrt{N}$, $H_2 = [1,1;1,-1]$, H_{2N} $[H_N, H_N; H_N, -H_N]$

列率: A_W每行符号变化数,如8阶Aw为07341625 列率排序: 对 A_w 按列率排序, 得 $A_{w'}$: 变换: 变换结果 $t_{w'}$ =变换矩阵*序列, $t_{w'} = A_{w'} * f$

 $h(u) = e^{-j\pi u/2N}, s = [1/\sqrt{2}, 1, ..., 1]^T, (4)t_c = Re\{s \circ h \circ t_1\}$

4.8【haar 变换】

u = 0 or 0 < x < 1 $2^{\frac{p}{2}}$, u > 0 or $q/2^p \le x < (q + 0.5)/2^p$ $h_u(x) =$ $-2^{\frac{p}{2}}$, u < 0 or $(q + 0.5)/2^p \le x < (q + 1)/2^p$ 0. other

 $s(x,u) = (h_u(x/N))/\sqrt{N}, x = 0,1,...,N-1 (反变换核)$ $h_0(0/N) = h_0(1/N) \cdots h_0(N-1/N)$ $h_1(0/N)$ $h_1(1/N)$... $h_1(N-1/N)$ $h_{N-1}(0/N)$ $h_{N-1}(1/N)$... $h_{N-1}(N-1/N)$ $A_H = H_N / \sqrt{N}$

4.9【小波变换】

哈尔变换: $N=2, A_H=1/\sqrt{2}[1\ 1; 1\ -1]$: N=4, $A_H=1/2[1\ 1; 1\ 1-1\ -1; \sqrt{2}\ -\sqrt{2}\ 0\ 0; 0\ 0\sqrt{2}\ -\sqrt{2}]$ 尺度函数 $\varphi_{i,k}(x) = 2^{j/2}\varphi(2^jx - k)$ $j,k \in \mathbb{Z}$

 $\varphi_{0,k}(x) = \varphi_{1,2k}(x)/\sqrt{2} + \varphi_{1,2k+1}(x)/\sqrt{2}$ 例: 单位哈尔尺度函数 $\varphi(x)=1$ if $x\in[0,1)$ else 0 $\varphi_{0,0}(x) = \varphi(x); \varphi_{0,1}(x) = \varphi(x-1); \varphi_{1,0}(x) = \sqrt{2}\varphi(2x)$ 细化方程: $\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{\varphi}(k) \sqrt{2} \varphi(2x - k)$ 尺度函数系数 $h_{\omega}(k) = \langle \varphi(x), \sqrt{2}\varphi(2x - k) \rangle$ 小波函数: $\psi(x) = \sum_k h_{\psi}(k)\sqrt{2}\varphi(2x - k)$ 小波函数细化方程: $\psi(x) = \sum_k h_{\psi}(k) \sqrt{2} \varphi(2x - k)$ 小波函数系数 $h_{\psi}(k) = (-1)^k h_{\omega}(1-k)$ 级数展开 $f(x) = \sum_k c_{j_0}(k)\varphi_{j_0,k}(x) + \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_k d_j(k)\psi_{j,k}(x)$

 $c_{j_0}(k) = \langle f(x), \varphi_{j_0,k}(x) \rangle = \int f(x) \varphi_{j_0,k}(x) dx$ $d_j(k) = \langle f(x), \psi_{j,k}(x) \rangle = \int f(x) \psi_{j,k}(x) dx$ 离散小波变换 $T_{\varphi}(0,0) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \varphi^*(x) / \sqrt{N}$ $T_{\psi}(j, k) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \psi_{j,k}^{*}(x) / \sqrt{N}$

逆: $f(x) = \left[T_{\varphi}(0,0)\varphi(x) + \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^{J}-1} T_{\psi}(j,k)\psi_{j,k}(x)\right]/\sqrt{N}$ $N = 2^{J}$, j = 0,1,...,J-1, $k = 0,1,...,2^{J}-1$ 维 小 波 变 换 : $\varphi(x,y)=\varphi(x)\varphi(y),\psi^{\mathrm{H}}(x,y)=$ 5.10【几何平均滤波】 $\psi(x)\varphi(y),\psi^{\mathrm{v}}(x,y)=\varphi(x)\psi(y),\psi^{\mathrm{D}}(x,y)=\psi(x)\psi(y)$

第五章 图像复原

退化模型: 退化图=原图×退化函数+噪声 $g(x,y) = h(x,y) \star f(x,y) + \eta(x,y)$ 频域: G(u,v) = H(u,v)F(u,v) + N(u,v)

5.2【噪声模型】

来源:图像采集和传输

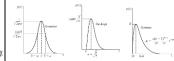
空间属性: 与位置坐标无关, 与图像无关 频率属性: 白噪声的 FFT 频谱是常数。 噪声的概率密度函数:

1.高斯噪声 $p(z) = (1/\sqrt{2\pi}\sigma)e^{-(z-z)^2/2\sigma^2}$ 2.Rayleigh 噪声p(z) = $2/b*(z-a)e^{(-(z-a^2)/b)}$ if $z \ge a$ else 0

 $\bar{z} = a + \sqrt{\pi b/4}, \ \sigma^2 = (b(4-\pi))/4$ 3.Erlang 厄蓝 gamma 噪声p(z) = $(a^b z^{b-1})/(b-1)! * e^{(-az)}$ if $z \ge 0$ else 0

 $\bar{z} = b/a$, $\sigma^2 = b/a^2$ 4.指数噪声 $p(z) = ae^{-(-az)}$ if $z \ge 0$ else 0 5.均匀噪声p(z) = 1/(b - a) if z ∈ [a,b] else 0 $\bar{z} = (b+a)/2$, $\sigma^2 = (b-a)^2/12$

 $p(z) = [Ps, Pp, 1 - (Ps + Pp)] \sim z = [2^k - 1, 0, V]$



周期噪声:源于成像时的电路、电子元件噪声 噪声参数估计: 1.噪声区域取样; 2.计算直方图; 3.估计均 值方差,套噪声模型确定参数

5.3【空域滤波复原】

退化模型中 h 为 l, 此时噪声模型未知, 无法直接作差 均值滤波器: 若尺寸为 M*N 的区域

.算术:区域求和除 M*N

s(x,y,u,v) = 3. 调和谐波: $f(x,y) = mn/[\sum 1/g(s,t)]$, 对盐+高斯,不对椒 4.逆谐波: $[\sum g(s,t)^{Q+1}]/[\sum g(s,t)^{Q}],Q$ 为阶,正对椒负对盐 排序统计滤波器: 1.中值, 对单峰双峰噪声都好, 多次中值= 模糊; 2.最大, 取区域最大值, 对椒, 找亮点; 3.最小, 区域 最小值,对盐,找暗点; 4.中点,区域最大最小/2,对高斯、 均匀等随机噪声: 5.Alpha 裁剪均值, 去最低 d/2 和最高 d/2

再均值(分母是 mn-d), 对椒盐+高斯 5.4【周期噪声的频域复原】

带通、带阻滤波, 把噪声点覆盖掉 5.5【线性位置不变退化】

任意退化函数 H 可表示为 g(x,v)=H[f(x,v)]线性退化判定: H[af+bg]=aH(f)+bH(g)

位置无关退化判定: H[f(x-a,y-b)]=g(x-a,y-b)对任意 xyab 成 退化可建模: 可将位置无关、线性的退化建模为退化函数 卷积全图,进行退化。复原=找到逆转这一过程的滤波器。

证明: 由冲击函数试探属性有
$$g(x,y) = H \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha,\beta) \delta(x-\alpha,y-\beta) d\alpha d\beta \right]$$

一类叠加积分: 当退化线性,此时上式变为 $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) H[\delta(x - \alpha, y - \beta)] d\alpha d\beta, \quad \text{if } h(x, \alpha, y, \beta) =$ $H[\delta(x-\alpha,y-\beta)]$, 优化中, H 一般为点传播函数 PSF。若 退化位置无关,则可得 G=HF+N。

5.6【退化函数 H 估计】

观察估计法(盲反卷积): 1.原图截出 gs; 2.增强(锐化等 成fs; 3.FFT 得 GsFs; 4.退化函数认定为 Hs=Gs/Fs

试验确定法: 用冲激响应在成像系统下拍照得 g, fft 得 G, 则退化函数 H=G/A, A 为常数。

建模估计法: 湍流模型 $H(u,v) = e^{(-k(u^2 + v^2)^{5/6})}$ 运动模糊模型 $\int 0^T e^{-j2\pi[ux_0(t)+vy_0(t)]}dt$, 其中 x0(t)是竖 直方向运动估计函数。例, x0(t) = at/T, y0(t) = bt/T时, 运动模糊核为

 $H(u,v) = \frac{1}{\pi(ua+vb)} \sin\left[\pi(ua+vb)\right] e^{-j\pi(ua+vb)}$ 5.7【直接逆滤波复原】 不管噪声, 直接除, $\hat{F} = G/H$ 。缺点:

噪声未知,无法完美复原;受 H中的 0 点和微小量影响较大。 5.8【维纳滤波】最小均方误差滤波

误差: $e^2 = E\{(f - \hat{f})^2\}$ 。三大假设: 噪声图像无关,存在 0 均值, f 由 f 的线性计算而得

 $|H(u, v)|^2$ $f = \left| \frac{1}{H(u,v)} \frac{|H(u,v)|^2}{|H(u,v)|^2 + S_{\eta}(u,v)/S_f(u,v)} \right| G(u,v)$ $|*|^2 = H^* *H$, $\Im \approx \text{ if } S_n(u,v) = |N(u,v)|^2$, $S_t(u,v) =$

$|F(u,v)|^2$, η/f 比值为信噪比 K 5.9【受限最小二乘滤波】必不会考

直接逆滤波和 wiener 滤波的组合

$$\hat{F}(u,v) = \frac{\left[H^*(u,v)\right]^2}{|H(u,v)|^2} \left[\frac{H^*(u,v)}{|H(u,v)|^2 + \beta \left[\frac{S_{\eta}(u,v)}{S_{\eta}(u,v)}\right]}\right]^{1-\alpha}}{H(u,v)|^2 + \beta \left[\frac{S_{\eta}(u,v)}{S_{\eta}(u,v)}\right]}$$

第六章 形态学处理

6.1 【基本概念】

图像反射: 中心对称 $\hat{B} = \{w \mid w = -b, \text{ for } b \in B\}$ 图像平移: 整体移动(B)_z = $\{c \mid c = b + z, \text{ for } b \in B\}$ 结构元素 SE: 十字, 矩形, 方, 椭圆, 圆(注意中心点) 结构元素的使用:用S遍历原集A的每个内点【非边缘】

腐蚀: 不对 SE 取反, 仅保留完全重合区域。能消除联通区,

收缩边界, 分离粘连, 去除图像外部无意义的亮点噪声。 $A \ominus B = \{z \mid (B)_{\alpha} \subseteq A\}$ 膨胀: 先对 SE 取反,有相交区域即保留。能延年益寿,合

并断裂,向外扩展,填补空洞,消除图像内暗点。 $A \oplus B = \{z \mid (\hat{B})_z \cap A \neq \emptyset\}$ 将 SE 看做卷积 mask, 对比空域卷积: 相同处为都要翻转

再运算;不同为膨胀非线性,卷积线性。

开:空心圆,先腐蚀后膨胀。 闭:实心圆,先腐蚀后膨胀。 作用:均平器於血 6.3 【开闭】

作用: 均平滑轮廊, 目不明显改变其面积: 开(中)可消

填充孔洞,闭合狭窄区,连接临近物体,抑制暗细节 6.4 【击中击不中变换 HMT】

作用: 检测特定形状在图中位置, 包含 A 击中 B1 且 A 补 击中 B2 的所有点。(简化 HMT: $A \odot B = (A \ominus B_1)$)

除凸出小物体,分离狭窄纤细区,抑制亮细节;闭(右)可

流程: 1.定义待检测形状 D, D 的父集 W; 2.令 D 为前景 B1, W-D 为背景 B2; 3.[B1 腐蚀 A]与[B2 腐蚀 A 补]交集, 联

直方图变换: 正向变换 $s=T(r), 0 \le r, s \le L-1, T$ 为单词 例子: 冲激函数 $\delta(t) \leftrightarrow 1$, 对于 $\delta(t-t_0)$ 有 $h_p(x, y) = \begin{cases} h(x, y) & 0 \le x \le C - 1 \text{ and } 0 \le y \le D - 1\\ 0 & C \le x \le P \text{ or } D \le y \le Q \end{cases}$ †算正交变换:检验基向量规范正交➡得到变换矩阵➡计算 合定位 $A \otimes B = (A \ominus B_1) \cap (A^c \ominus B_2)$ 。

6.5 【灰度图像模板匹配】

相关系数: $c(x,y) = \sum_s \sum_t w(s,t) f(x+s,y+t)$ 归一化相关系数: 减均值,除两方差。最后一定在 ± 1 之

 $\textstyle \sum_s \sum_t \left[w(s,t) - \overline{w} \right] \left[f(x+s,y+t) - \bar{f}(x+s,y+t) \right]$

 $\{\sum_{s} \sum_{t} [w(s,t) - \overline{w}]^{2} \sum_{s} \sum_{t} [f(x+s,y+t) - \overline{f}(x+s,y+t)]^{2}\}^{\frac{1}{2}}$ 流程: 原图 padding,模板遍历全图计算归一化相关系数, 最大点即匹配结果

7图像分割

7.1 基本概念: 基于边缘的, 基于区域的

7.2 点线边检测

【背景】边缘像素:强度突变的像素

边缘:连接的一组边缘像素

- 阶导: f(x+1)-f(x); 二阶导: f(x+1)+f(x-1)-2*f(x)

【点检测】检测突出点

流程: 用 laplacian 核[111,1-81,111]卷积,保留>阈值的点

【线检测】

整体线: 用 Laplacian 核卷积,取正数(或取绝对值,较少) 方向线: 四个方向卷积核卷积, 四响应中最大者。

水平: [-1-1-1;222;-1-1-1],垂直: (90°水平旋转)

+45° [2-1-1;-12-1;-1-12],-45°: (45° 左右翻转)

【边缘模型】

台阶型,斜坡型,屋脊型



基于梯度: 先算水平竖直梯度, 再计算强度谱和方向谱。 其中, 边缘的梯度方向与边缘垂直。

梯度算子: gx,gy=[下][右]。垂直梯度[-1;1][-1,1], Roberts[-1 0;0 1][0 -1;1 0], Prewitt 0-90° [-1-1-1;000;111][逆]或 45° [011;-101;-1-10][順], Sobel 0-90° [-1-2-1;000;121][逆]或 45° [012:-101:-2-10][順]。

梯度幅值: M(x,y) = |gx| + |gy|, 或 gxgy 平方和开根号

梯度編角: 反正切(gy/gx) Canny 算子: 空域 2D 高斯平滑; 梯度算子计算模纵梯度、 幅值图、幅角图: 根据幅角,沿梯度方向(非边缘方向)对幅值 图做 NMS; 双阈值算法, 去掉假边缘, 连接真边缘。

图版 NMS: 双阀值界法,去挥帜边缘,连接其边缘。 NMS 流程: 1.根据幅角图,将每个像素点的梯度方向,量 化为横竖撇捺四类: 2.对某点,沿其梯度方向在其 3×3 邻域 中取 3 个点,若中心点梯度幅值最大则保留该点,否则置零: 3.遍历全图做 2, 即得 NMS 结果。

. 週历至图像 2,即得 NMS 結果。
$$g_N(x,y) = \begin{cases} M(x,y), & \text{if } M(x,y) > \text{two neighbors along } d_k \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

双阈值: 设定强弱阈值(TH/TL=2 或 3), 根据每个点梯度幅 值 $q_N(x,y)$ 判断;小于弱阈值点置零,大于强阈值点置 1(确定 边缘); 中间的点则判定, 若与强阈值点 8 连通, 则置 1(但不 参与下次判定), 否则置零。

Canny 初衷: 所有边缘均被找到,错误率低; 定位边缘尽 可能接近真实边缘; 检测器指出边缘是单一的, 不应指出多 个像素边缘。Canny 特点: 改进边缘细节, 拒绝无关特征, 所得边缘连续、细、直。

【直线检测】hough变换:从空域到参数域的变换。

笛卡尔坐标系中概念:原图中点(xi,yi)代表的一簇直线(yi=axi+b),对应参数空间一条线(b=-xia+yi):原图中两点 (x1,y1)(x2,y2)确定了一条直线(两簇的交集),对应参数空间两

线交点(b=xla+yl 与 b=x2a+y2 的交点)。 极坐标: 法线式(xcos θ +ysin θ = ρ , θ \in [±90])。点(xi,yi) 确定的一簇直线(xicos θ +ysin θ = ρ)。 $Re\theta$ 平面中代表一曲 线; 在空域中两点确定直线, 在ρθ平面中代表两曲线交点。

用极坐标的理由: x=c 无法在笛卡尔坐标参数空间表示。

利用 hough 变换检测直线: 1.canny 等获得二值化边缘图像; 2.将每个点映射到极坐标参数空间ρθ平面中, 得多个连续曲 线; 3.划分网格, 对曲线离散化, 统计网格中点的数目; 4.包 含点最多的网格, 其所代表的参数即为直线参数。

计算步骤: 1、离散化 θ =-45, 0,45,90; 2.根据所给二值化 图像, 计算每个点的 $\rho = x\cos\theta + y\sin\theta$ (每个点对应多个 ρ , 这里是 4 个),得到行 n 列 θ ,内容为 ρ 的表格; 3.统计表格 中(ρ, θ)出现频数; 4. 频数最高的 ρ 和 θ 即为检测的直线参数。