基础

1.1【基本定义】

图像：二维函数 f(x,y),xy 空间坐标,f 值为强度或灰度级
数字图像：离散的 xyf
像素：数字图像的最小单元
顶刊：TPAMI，tip，Tmi, medical image analysis

1.2【人类视觉感知】

视锥细胞、视杆细胞，小孔成像的相似三角形

1.3【图像传感采集】

F(x,y)=i(x,y)r(x,y),i 发光强度，r 反射

1.4【图像采样量化】

空间分辨率：单位距离下可识别的 line pairs 的最大数量
强度分辨率：对可分辨出的最小强度级变化，一般$2^{8,16,32}$

1.4.4 插值

最近邻：可能导致扭曲，按最近的
双线性：v=ax+by+cxy+d
双立方：$v(x,y)=\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3}a_{ij}x^iy^j$

1.5【像素关系】

邻域 neighbor：N_4十字，N_D对角，$N_8=N_4\cup N_D$
邻接 adjacency：4 邻接（$q\in N_4(p)$）8($q\in N_8(p)$),
m($q\in N_4(p)$, $or\ q\in N_D(p) and\ N_4(p)\cap N_4(q)=\phi$)
路径 path：一组点。长度为点数目，有 4、8、m 三种路径
联通域 connected component：图像子集 S(必须是方的)中，连接着的像素组（￥=必须给出邻接的类型才能求）
联通集 connected set：只有一个连通域的 S 集(必￥)
区域 region：即联通集。两区域相邻意味着 R1∪R2 为联通集，否则即两区域不相邻。(必￥)
边界 boundaries：前景为全部不相邻区域之并集，其余为背景Ru^c。区域 R 的边界为 R 中与R^c邻接的像素集合(必￥，一般使用 8 邻接定义)
距离：满足非负，对称，三角不等式的函数 D(p,q)
欧氏距离=二范数，D4 城市街区距离=横纵绝对值之和，D8 棋盘距离=横纵绝对值最大值

1.6【基本数学工具】

1.6.1 数学概念

Elementwise product：两矩阵对应位置相乘
Matrix product：矩阵乘法
算子：$H(f(x,y))=F(x,y)$，线性$H(af+bg)=aF+bG$
union 并，intersection 交，mutually exclusive 互斥也叫 Disjoint 不相交，complement 补集，difference 差集，set universe 全集

空间算子：单像素算子如强度变换映射(s=Tz)；邻域算子如均值滤波 g(xy)=1/mn\sum_D f in D，D 为矩形邻域；几何变换如仿射变换，某点改变后坐标=矩阵*该点原来的坐标

$$\begin{bmatrix}x'\\y'\\1\end{bmatrix}=\mathbf{A}\begin{bmatrix}x\\y\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\1\end{bmatrix}$$

identity 等价：[1,0,0;0,1,0]为前两行，下同
缩放/反射 reflect：[cx,0,0;0,cy,0]
旋转，顺时针正，可用(0,y)来验证：[$c\theta,-s\theta$,0;$s\theta,c\theta,0$]
平移 translation：[1,0,tx;0,1,ty]
错切 shear 单向拉伸，垂直[1,sv,0;0,1,0],水平[1,0,0;sh,1,0]

1.6.2 正向变换 Forward transform(如 fft 前的 shift)：

$$T(u,v)=\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)r(x,y,u,v)$$

判断其可分离性：$r(x,y,u,v)=r_1(x,u)r_2(y,v)$
判断其对称性：当可分离，且$r_1(x,u)=r_2(y,v)$
例如傅里叶核r_fft就是 xy 可分离(独立)、xy 对称的核
矩阵写法：$T=AFA$，其中 F 为图像方阵，A 为变换核矩阵且$a_ij=r1(i,j)$，T 为变换后结果。
矩阵变换流程：F'=BAFAB，如傅里叶，walsh，哈达玛变换，离散余弦，haar 变换都是。先正向再变，反向再逆变

1.6.3 概率方法

强度值视为随机变量z_k,k=1~255 则概率为灰度值出现次数：

$$p(z_k)=\frac{n_k}{MN},mean=\sum_k z_kp(z_k),var^2=\sum_k(z_k-m)^2p(z_k)$$

第二章 强度变换空域滤波

2.1【定义】

强度变换 intensity transformation：s=T(r), $r\in(0,1)$,s/r 为变换前后图像的像素强度；空域滤波 spatial filtering，滤波核 filter=mask=kernel=template=window

2.2【强度变换】

线性变换：negative 变换(s=L-1-r,L 为灰度级)，增强灰色、白色细节，尤其是黑背景主导下的白前景；Identity 变换(s=r)
对数 logarithmic 变换：log(s=c*log(1+r),c 常数，r>0), 拉伸暗像素压缩亮像素，压缩动态范围；inverse-log(s=exp r)也叫 exponential 反之，但也压缩动态范围。
幂次 power-law 变换：gamma($s=c*r^\gamma$)，γ<1 变亮，γ>1 变暗。相比对数变换，参数多，可调范围更大。

2.3 【直方图】

直方图 histogram 统计：1.计算出每个灰度级的个数n_k，k=1~L-1；2.$p(k)=n\_k/MN$
直方图变换：正向变换 s=T(r),$0\le r,s\le L-1$,T 为单调 monotonically 增函数；逆变换 r=T^(-1)(s)严格单调递减。

2.3.1 直方图均衡 HE

1、先计算原始图像强度值 r 的 PDF，记作：连续p_r(r)，一般会给出；或离散的 p_k(r_k)，需要自己计算。
2、按如下公式积分，得到 s=T(r)或 S_k=T(r_k)

$$s=(L-1)\int_0^r p_r(\omega)d\omega$$

$$S_k=T(r_k)=(L-1)\sum_{j=0}^{k}p_r(r_j),k=0,1,2,\cdots,L-1$$

s=T(r)的概率密度函数为

$$p_s(s)=p_r(r)\left|\frac{dr}{ds}\right|=\frac{2r}{(L-1)^2}\left|\left[\frac{ds}{dr}\right]^{-1}\right|=\frac{2r}{(L-1)^2}\left|\frac{(L-1)}{2r}\right|=\frac{1}{L-1}$$

3、根据 p 计算出所有的 s，若是离散值，则 sk 最后要四舍五入。

2.4【空域滤波】

2.4【空域滤波】

Correlation 相关，无需旋转卷积核直接滤波
Convolution 卷积，180 度旋转卷积核

2.5【平滑低通滤波】

Smoothing 平滑滤波，如 box filter=1/9*[1,1,1;1,1,1;1,1,1], gaussian kernel=1/16*[1,2,1;2,4,2;1,2,1]
Order-statistic 排序统计滤波，如中值（median，专去椒盐）

2.6【锐化高通滤波】

2.6.1 导数 derivative 及其性质

一阶导数$\frac{\partial f}{\partial x}=f(x+1)-f(x)$
二阶导数$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f(x+1)+f(x-1)-2f(x)$

2.6.2 laplacian 算子

定义为$\nabla^2f=\frac{\partial^2f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2f}{\partial y^2}$，离散情况下为计算核[0,1,0;1,-4,1;0,1,0]。具有各向同性(isotropic)或旋转不变性(rotation invariant)，线性性$\nabla^2(f+g)=\nabla^2f+\nabla^2g$，以及$\frac{\partial}{\partial x}(f+g)=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial x}$。
拉普拉斯锐化：$g(x,y)=f(x,y)+c[\nabla^2f(x,y)]$，c 取±1，符号与滤波核的中心相同。

2.6.3 梯度 gradient

定义：$\nabla f\equiv \mathrm{grad}(f)\equiv\begin{bmatrix}g_x\\g_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\\\frac{\partial f}{\partial y}\end{bmatrix}$，线性，非旋转不变；
梯度幅值 magnitude：$M(x,y)=\mathrm{mag}(\nabla f)=\sqrt{g_x^2+g_y^2}$，非线性，旋转可变
Roberts 交叉梯度算子：[-1,0;0,1]和[0,-1;1,0]，梯度值为 $M(x,y)=[(z_9-z_5)^2+(z_8-z_6)^2]^{1/2}\approx|z_9-z_5|+|z_8-z_6|$
Sobel 梯度算子，[-1,-2,-1;0,0,0;1,2,1],逆时z转90°，梯度值同上。

第三章 频域滤波

3.1【数学基础】

3.1.1 基本公式

欧拉公式：$z=x+jy=|z|(cos\theta+jsin\theta)=|z|e\hat{}j\theta$
连续冲激函数$\delta(t)$：$\delta(0)=\infty$，否则为 0；在全实轴积分值为 1；筛选性质$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t-t_0)dt=f(t_0)$
离散冲激函数：$\delta(0)=1$，否则为 0；在整数轴积分值为 1 筛选性质$\sum_{x=-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x-x_0)=f(x_0)$
离散冲激序列$s_{\Delta T}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n\Delta T)$

3.1.2 傅里叶级数

定义：一组不同频率的正弦余弦函数的加权和，是周期函数的另一种时域表达形式。任意周期函数都可以展开为傅里叶级数，即下式。w0=2pi/T 为基础频率

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{jn\omega_0t}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{j2\pi n\frac{1}{T}t}$$

其中，系数求解方法为（$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$）

$$c_n=\frac{1}{T}\int_T f(t)e^{-jn\omega_0t}dt=\frac{1}{T}\int_T f(t)e^{-jn(2\pi/T)t}dt$$

也可写作$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}[a_n\cos(n\omega t)+b_n\sin(n\omega t)]$，而 cn 是 an 和 bn 的统一。
给定函数 ft 求其傅里叶展开：先用 f 求 c_n，然后直接写出 f(t)即可。

3.1.3 傅里叶变换

定义：将 f(t)变为 F(u)，获取(原时域函数展成傅里叶级数)时，在(频率为 u 的正弦波)前的系数。其原变换和逆变换：

$$F(\mu)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j2\pi\mu t}dt，f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}F(\mu)e^{j2\pi\mu t}d\mu$$

性质：线性性($\mathcal{F}$(af+bg)=aF+bG 反之亦然)
时移性$\mathcal{F}(f(t-t0))=e^{-iut0}F(u)$
$\mathcal{F}^{-1}(F(u-u0))=e^{iu0t}f(t)$
缩放性$\mathcal{F}(f(at))=F(u/a)/|a|$
对称性$\mathcal{F}(F(T))=2\pi f(-u)$
卷积(连续)$\mathcal{F}(f*g)=FG,\mathcal{F}(fg)=F*G/2\pi$
求变换：周期函数先傅展再傅变；非周期函数直接傅变
例子：方波的傅里叶变换为辛格函数

$$f(t)=\begin{cases}A,-\frac{W}{2}\le t\le\frac{W}{2}\\0,\text{otherwise}\end{cases}$$

$$F(\mu)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j2\pi\mu t}dt=\int_{-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}}Ae^{-j2\pi\mu t}dt$$

$$=\frac{A}{j2\pi\mu}(e^{j\pi W\mu}-e^{-j\pi W\mu})=\frac{A}{j2\pi\mu}2j\sin(\pi W\mu)$$

$$=AW\frac{\sin(\pi W\mu)}{\pi W\mu}【\mathrm{sinc}(m)=\frac{\sin(\pi m)}{(\pi m)}】$$

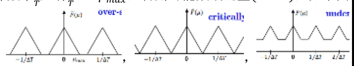
例子：冲激函数

$$F(\mu)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)e^{-j2\pi\mu t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j2\pi\mu t}\delta(t-t_0)dt=e^{-j2\pi t_0\mu}$$

例子：冲激序列，周期函数先展开再变换
即$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n\Delta T)=\frac{1}{\Delta T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{j2\pi\frac{n}{\Delta T}t}$
其傅里叶变换为$F(\mu)=\frac{1}{\Delta T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\mu-\frac{n}{\Delta T}\right)$
连续卷积：$f(t)\star\star h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)h(t-\tau)d\tau$
卷积离散：$w(x)\star\star h(x)=\sum_{s=-a}^{a}w(s)h(x-s)$

3.2【采样定理】

离散冲激采样:$\tilde f(t)=f(t)s_{\Delta T}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t-n\Delta T)$，$\mathcal{F}\left(\tilde f(t)\right)=\mathcal{F}(f(t))*\mathcal{F}(\delta(t-n\Delta T))=\frac{1}{\Delta T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F\left(\mu-\frac{n}{\Delta T}\right)$
等价于以$\frac{n}{\Delta T}$为周期将$F(\mu)$左右平移。
采样定理:若有限带宽函数最大频率为μ_{max}，则离散冲激采样频率$\frac{1}{T}$应有$\frac{1}{T}>2\mu_{max}$，否则可能频域混叠(aliase)，如下图

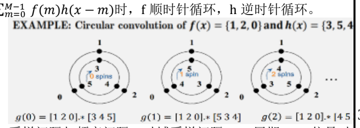


理想低通滤波：$H(\mu)=\Delta T,\mu\in[-\mu_m,\mu_m]$。低通滤波结果的反变换时域结果为$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{sinc}\left[\frac{t-n\Delta T}{\Delta T}\right]f(n\Delta T)$

频带有限	时域无限持续	频叠不可避免
频带无限	时域无限持续	频叠不可避免
频带有限	时域有限持续	实信号：混叠

3.3【1D 离散傅里叶】

定义：用离散冲激序列对连续函数采样，$\tilde F(\mu)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f_ne^{-j2\pi n\Delta T\mu}$。$f_n=f(n\Delta T)$离散，$\tilde F(\mu)$连续，周期与$\mu$有关。$F(u)=\sum_{x=0}^{M-1}f(x)e^{-\frac{j2\pi}{M}ux}$,$f(x)=\frac{1}{M}\sum_{u=0}^{M-1}F(u)e^{\frac{j2\pi}{M}ux}$
DFT 和逆 DFT 都是周期性的，周期为 M，与时域信号有关
例，$F(0)=\sum_{x=0}^{M-1}f(x)e^{-j\frac{2\pi(0)}{M}x}$,$F(1)=\sum_{x=0}^{M-1}f(x)e^{-j\frac{2\pi(1)}{M}x}$…
逆，$f(0)=\frac{1}{M}\sum_{u=0}^{M-1}F(u)e^{j\frac{2\pi}{M}u(0)}$…
循环卷积，也叫圆卷积，计算$g(x)=f(x)\star h(x)=\sum_{m=0}^{M-1}f(m)h(x-m)$时，f 顺时针循环，h 逆时针循环。



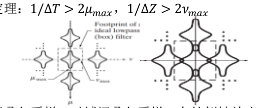
采样间隔与频率间隔：时域采样间隔ΔT，周期 M，信号时长为$T=\Delta TM$；频域间隔$\Delta u=1/T$，频带长度为$U=1/\Delta T$

3.4【2DFFT、DFT】

2D 冲激：$\delta(0,0)=\infty$，否则为 0；在 tz 平面积分值为 1；筛选性质$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(t,z)\delta(t-t_0,z-z_0)dtdz=f(t_0,z_0)$;
离散 2D 冲激：类似 1D

2D-fft：
$$F(\mu,\nu)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(t,z)e^{-j2\pi(\mu t+\nu z)}dtdz$$
$$f(t,z)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(\mu,\nu)e^{j2\pi(\mu t+\nu z)}d\mu d\nu$$

采样定理：$1/\Delta T>2\mu_{max}$，$1/\Delta Z>2\nu_{max}$

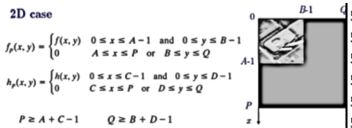


空域混叠欠采样，时域混叠欠采样、车轮倒转效应
解决方案：散焦衰减高频，均值 blur

2D-dft：
$$F(u,v)=\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}$$
$$f(x,y)=\frac{1}{MN}\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)e^{j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

3.5【2D-DFT 性质】

平移：$f(x,y)e^{j2\pi(u_0x/M+v_0y/N)}\Leftrightarrow F(u-u_0,v-v_0)$
$f(x-x_0,y-y_0)\Leftrightarrow F(u,v)e^{-j2\pi(x_0u/M+y_0v/N)}$
极坐标变换：$x=r\cos\theta y=r\sin\theta u=\omega\cos\varphi v=\omega\sin\varphi$
$f(r,\theta+\theta_0)\Leftrightarrow F(\omega,\varphi+\theta_0)$，旋转 f 后 F 也旋转相同角度
周期：$F(u,v)=F(u+M,v+N)$, $f(x,y)=f(x+M,y+N)$
频谱居中：$f(x)(-1)^{x+y}\sim F(u-\frac{M}{2},v-\frac{N}{2})$，重拼(非平移)
离散函数是偶函数 iif. 所有样本加和为 0
实函数 f 的 fft 共轭对称：$F^*(u,v)=F(-u,-v)$，即实部偶，虚部奇；幅值(或 spectrum)偶，相位奇
虚函数 f 的 fft 共轭反对称：$F^*(u,v)=-F(-u,-v)$，实部奇，虚部偶；幅值奇，相位偶
对称：f 实+偶，F 也为纯实+偶；f 实+奇，F 为纯虚+奇
幅值=$\sqrt{R^2+I^2}$，相位=arctan $[\frac{I}{R}]$，功率=R^2+I^2
直流分量$F(0,0)=M*N*\bar f(x,y)$平均值,是频谱最大分量
卷积：f(x,y)*h(x,y)=$\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}f(m,n)h(x-m,y-n)$
交叠误差：使用循环卷积计算卷积时，由于 f 和 h 的周期性，直接计算 f*g 会交叠，导致卷积结果错误。因此需要在 f 和 g 末尾处补 0，使得补零后长度$P\ge len(f)+len(g)-1$,避免下一周期误入。若两图像尺寸相等，则可能需要 P=2len(f)



DFT 算法对偶尺寸计算更快，因此最好 padding 到偶数
频谱泄露：加窗截断时，f0 处的能量分散到宽频带去

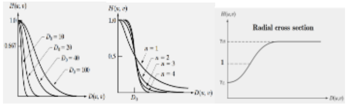
$\delta(x,y)$	1
Rect[a,b]	$ab\,sinc(ua)e^{-j\pi(ua+vb)}$
$Sin(2\pi(\frac{u_0x}{M}+\frac{v_0y}{N}))$	$\frac{jMN}{2}\left[\begin{matrix}\delta(u+u_0,v+v_0)\\-\delta(u-u_0,v-v_0)\end{matrix}\right]$
$Cos(2\pi(\frac{u_0x}{M}+\frac{v_0y}{N}))$	$\frac{1}{2}\left[\begin{matrix}\delta(u+u_0,v+v_0)\\\delta(u-u_0,v-v_0)\end{matrix}\right]$
$A2\pi\sigma^2e^{-2\pi^2\sigma^2(t^2+z^2)}$	$Ae^{-(\mu^2+\nu^2)/2\sigma^2}$

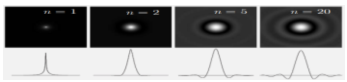
3.6【频域滤波】

定义：$g=\mathcal{F}^{-1}(H(u,v)F(u,v))$,H 为频率域传递函数
振铃效应：时域填充 0 后函数不连续性会导致振铃
频域滤波步骤：1.P=2M,Q=2N,填充 0；2.在时域乘$(-1)^{x+y}$位移；3.DFT；4.构造大小为 P*Q 的实对称滤波器 H 并乘在原图中心，得到 G；5.IDFT 和零频点位移：$g_p(x,y)=(\mathrm{real}\{\mathcal{F}^{-1}[G(u,v)]\})(-1)^{x+y}$；7.左上角切割 M*N 得结果。
纽带：时域与频域分析的纽带是卷积定理。
高斯：高斯的 DFT、IDFT 还是实高斯函数。$H(u)=Ae^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}$,$h(x)=\sqrt{2\pi}\sigma Ae^{-2\pi^2\sigma^2x^2}$。当频域均值 0 方差$\sigma$时，对应空域均值为 0,但方差为 1/2$\pi\sigma$.某些滤波核=高斯 A-高斯 B

3.7【低通频滤】

低通滤波：中心高四周低，过滤高频边缘、噪声
理想低通：$H(u,v)=1\ if\ D(u,v)<D_0\ else\ 0$
高斯低通：$=e^{-D^2(u,v)/2D_0^2}$,$D_0=\sigma$为截频,此处 H(u,v)=2/3
巴特沃斯低通：$1/(1+[D(u,v)/D_0]\hat{}2n)$，$D_0$处 H()=0.5
下 4 图为:高斯低通，巴特沃斯低通，同态(3.8),巴特沃斯环





3.8【高通频滤】

高通滤波：中心低四周高，保留边缘
高通滤波：$H_{hp}=1-H_{lp}(u,v)$
*巴特沃斯高通：$1/(1+[D_0/D(u,v)]\hat{}2n)$
拉普拉斯：$\nabla^2f=\frac{\partial^2f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2f}{\partial y^2}=f(x+1,y)+f(x-1,y)+f(x,y+1)+f(x,y-1)-4f(x,y)$;核[0,1,0;1,-4,1;0,1,0]；频率核$H(u,v)=-4\pi^2(u^2+v^2)$;拉普拉斯锐化增强后图像为$g(x,y)=f(x,y)+c\Delta^2f(x,y)$,其中 c=-1;
同态滤波：1.令 f=ir，p=ln(f)=ln(i)+ln(r);2.计算 P=DFT(p)，$P'=HP=H\mathcal{F}[ln(i)]+H\mathcal{F}[ln(r)]$,H 为同态核；3.p'=IDFT(P')=ln(i)'+ln(r)'(非求导)；4.$g=e^{p'}=i'*r'$
同态核：$H(u,v)=(\gamma_H-\gamma_L)[1-e^{-c[D^2(u,v)/D_0^2]}]+\gamma_L$，$\gamma_L<H(u,v)<\gamma_H,\gamma_L<1<\gamma_H$，c 用于控制尖锐度；能够同时压缩动态范围，增加对比度

3.9【带通陷波】

理想带阻：$H(u,v)=0\ if\ D\in\left[D_0-\frac{W}{2},D_0+\frac{W}{2}\right]else1$
巴特沃斯带阻：$H(u,v)=1/[1+(DW/(D^2-D_0^2))^{2n}]$
高斯带阻：$H(u,v)=1-e^{-[(D^2-D_0^2)/DW]^2}$,D0 截频，W 带宽
带通：1-带阻
Notch：陷波，单点阻塞，必定呈中心对称。可用高斯自己凑

第四章 图像变换

4.1【数学基础】

4.2【变换的矩阵形式】

4.3【相关】

4.4【1D 基本变换与时频分析】

4.5【2D 基本变换】

4.6【离散余弦变换】

4.7【沃尔什哈达玛 WH 变换】

4.8【haar 变换】

4.9【小波变换】

第五章 图像复原

5.1【图像退化模型】

5.2【噪声模型】

5.3【空域滤波复原】

5.4【周期噪声的频域复原】

5.5【线性位置不变退化】

5.6【退化函数估计】

5.7【直接逆滤波】

5.8【维纳滤波】

5.9【受限最小二乘滤波】

5.10【几何平均滤波】

第六章 形态学处理

6.1【基本概念】

图像反射：中心对称$\hat B=\{w\mid w=-b,\text{ for }b\in B\}$
图像平移：整体移动$(B)_z=\{c\mid c=b+z,\text{ for }b\in B\}$
结构元素 SE：十字，矩形，方，椭圆，圆（注意中心点）
结构元素的使用：用 S 遍历原集 A 的每个内点【非边缘】

6.2【腐蚀膨胀】

腐蚀：不对 SE 取反，仅保留完全重合区域。能消除联通区收缩边界，分离粘连，去除图像外部无意义的亮点噪声。

$$A\ominus B=\{z\mid(B)_z\subseteq A\}$$

膨胀：先对 SE 取反，有相交区域即保留。能延年益寿，合并断裂，向外扩展，填补空洞，消除图像内暗点。

$$A\oplus B=\{z\mid(\hat B)_z\cap A\ne\emptyset\}$$

将 SE 看做卷积 mask，对比空域卷积：相同处为都要翻转再运算；不同为膨胀非线性，卷积线性。

6.3【开闭】

开：空心圆，先腐蚀后膨胀。
闭：实心圆，先膨胀后腐蚀。
作用：均平滑轮廓，且不明显改变其面积；开（中）可消除凸出小物体，分离狭窄纤细区，抑制亮细节；闭（右）可填充孔洞，闭合狭窄区，连接临近物体，抑制暗细节

6.4【击中击不中变换 HMT】

作用：检测特定形状在图中位置，包含 A 击中 B1 且 A 补击中 B2 的所有点。(简化 HMT：$A\circledast B=(A\ominus B_1)$)
流程：1.定义待检测形状 D，D 的父集 W；2.令 D 为前景 B1，W-D 为背景 B2；3.[B1 腐蚀 A]与[B2 腐蚀 A 补]交集，联合定位$A\circledast B=(A\ominus B_1)\cap(A^c\ominus B_2)$。

6.5【灰度图像模板匹配】

相关系数：$c(x,y)=\sum_s\sum_t w(s,t)f(x+s,y+t)$
归一化相关系数：减均值，除两方差。最后一定在±1 之内

$$\gamma(x,y)=\frac{\sum_s\sum_t[w(s,t)-\bar w][f(x+s,y+t)-\bar f(x+s,y+t)]}{\{\sum_s\sum_t[w(s,t)-\bar w]^2\sum_s\sum_t[f(x+s,y+t)-\bar f(x+s,y+t)]^2\}^{\frac{1}{2}}}$$

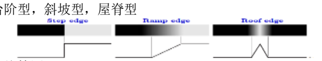
流程：原图 padding，模板遍历全图计算归一化相关系数，最大点即匹配结果

7 图像分割

7.1 基本概念：基于边缘的，基于区域的

7.2 点线边检测

【背景】边缘像素：强度突变的像素
边缘：连接的一组边缘像素
一阶导：f(x+1)-f(x)；二阶导：f(x+1)+f(x-1)-2*f(x)
【点检测】检测突出点
流程：用 laplacian 核[111,1-81,111]卷积，保留>阈值的点
【线检测】
整体线：用 Laplacian 核卷积，取正数（或取绝对值，较少）
方向线：四个方向卷积核卷积，四响应中最大者。
水平：[-1-1-1;222;-1-1-1],垂直：(90°水平旋转)
+45°[2-1-1;-12-1;-1-12],-45°：(45°左右翻转)
【边缘模型】
台阶型，斜坡型，屋脊型



【边缘检测】
基于梯度：先算水平竖直梯度，再计算强度谱和方向谱。其中，边缘的梯度方向与边缘垂直。
梯度算子：gx,gy=[下][右]。垂直梯度[-1;1][-1,1]，Roberts[-1 0;0 1][0 -1;1 0]，Prewitt 0-90°[-1-1-1;000;111][逆]或 45°[011;-101;-1-10][顺]，Sobel 0-90°[-1-2-1;000;121][逆]或 45°[012;-101;-2-10][顺]。
梯度幅值：$M(x,y)$=|gx|+|gy|，或 gxgy 平方和开根号
梯度幅角：反正切(gy/gx)
Canny 算子：空域 2D 高斯平滑；梯度算子计算横纵梯度、幅值图、幅角图；根据幅角，沿梯度方向(非边缘方向)对幅值图做 NMS；双阈值算法，去掉假边缘，连接真边缘。
NMS 流程：1.根据幅角图，将每个像素点的梯度方向，量化为横竖撇捺四类；2.对某点，沿其梯度方向在其 3×3 邻域中取 3 个点，若中心点梯度幅值最大则保留该点，否则置零；3.遍历全图做 2，即得 NMS 结果。

$$g_N(x,y)=\begin{cases}M(x,y), & \text{if } M(x,y)>\text{ two neighbors along } d_k\\0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

双阈值：设定强弱阈值(TH/TL=2 或 3)，根据每个点梯度幅值$g_N(x,y)$判断；小于弱阈值点置零，大于强阈值点置 1(确定边缘)；中间的点则判定，若与强阈值点 8 连通，则置 1(但不参与下次判定)，否则置零。
Canny 初衷：所有边缘均被找到，错误率低；定位边缘尽可能接近真实边缘；检测器指出边缘是单一的，不应指出多个像素边缘。Canny 特点：改进边缘细节，拒绝无关特征，所得边缘连续、细、直。
【直线检测】hough 变换：从空域到参数域的变换。
笛卡尔坐标系中概念：原图中点(xi,yi)代表的一簇直线(yi=axi+b)，对应参数空间一条线(b=-xia+yi)；原图中两点(x1,y1)(x2,y2)确定了一条直线(两簇的交集)，对应参数空间两线交点(b=-x1a+y1 与 b=-x2a+y2 的交点)。
极坐标：法线式(xcos θ +ysin θ = ρ， θ ∈[±90])。点(xi,yi)确定的一簇直线(xicos θ +yisin θ = ρ)，在$\rho\theta$平面中代表一曲线；在空域中两点确定直线，在$\rho\theta$平面中代表两曲线交点。
用极坐标的理由：x=c 无法在笛卡尔坐标参数空间表示。
利用 hough 变换检测直线：1.canny 等获得二值化边缘图像；2.将每个点映射到极坐标参数空间$\rho\theta$平面中，得多个连续曲线；3.划分网格，对曲线离散化，统计网格中点的数目；4.包含点最多的网格，其所代表的参数即为直线参数。
计算步骤：1、离散化θ=-45，0,45,90；2.根据所给二值化图像，计算每个点的$\rho=xcos\theta+ysin\theta$（每个点对应多个 ρ，这里是 4 个），得到行 n 列 θ，内容为 ρ 的表格；3.统计表格中(ρ,θ)出现频数；4. 频数最高的 ρ 和 θ 即为检测的直线参数。