# 基础

## 1.1【基本定义】

图像：二维函数f(x,y),xy空间坐标,f值为强度或灰度级

数字图像：有限的离散的f(x,y)

像素：数字图像的最小单元

应用领域：医学成像、遥感、航天应用、天文学

图像分类：电磁波谱、电子学的、声学的、计算机学的

顶刊：TPAMI，tip，Tmi, medical image analysis

## 1.2【人类视觉感知】

视锥细胞、视杆细胞，小孔成像的相似三角形

## 1.3【图像传感采集】

F(x,y)=i(x,y)r(x,y),i发光强度，r反射

## 1.4【图像采样量化】（科技论文>300dpi）

空间分辨率：单位距离下可识别的line pairs的最大数量

强度分辨率：对可分辨出的最小强度级变化，一般

## 1.4.4插值

最近邻：可能导致扭曲，按最近的

双线性：v=ax+by+cxy+d

双立方：

## 1.5【像素关系】

邻域neighbor：十字，对角，

邻接adjacency：4邻接（）8(),

m()

路径path：一组点。长度为点数目，有4、8、m三种路径

联通分量connected component：图像子集S(必须是方的)中，连接着的像素组（￥=必须给出邻接的类型才能求）

联通集connected set：只有一个连通域的S集(必￥)

区域region：即联通集。两区域相邻意味着R1∪R2为联通集，否则即两区域不相邻。(必￥)

边界boundaries：前景为全部不相邻区域之并集，其余为背景。区域R的边界为R中与邻接的像素集合 (必￥，一般使用8邻接定义)

距离：满足非负，对称，三角不等式的函数D(p,q)

欧氏距离=二范数，D4城市街区距离=横纵绝对值之和，D8棋盘距离=横纵绝对值最大值

## 1.6【基本数学工具】

### 1.6.1数学概念

Elementwise product：两矩阵对应位置相乘

Matrix product：矩阵乘法

算子：，线性

union并，intersection交，mutually exclusive互斥也叫 Disjoint不相交，complement补集，difference差集，set universe全集

空间算子：单像素算子如强度变换映射(s=Tz)；邻域算子如均值滤波；几何变换如仿射变换，某点改变后坐标=矩阵\*该点原来的坐标

identity等价：[1,0,0;0,1,0]为前两行，x竖y横下同

缩放/反射reflect：[cx,0,0;0,cy,0]

旋转：[,,0;,,*0*](顺时转θ为负,可用(0,y)验证

平移translation：[1,0,tx;0,1,ty]

错切shear单向拉伸，垂直[1,sv,0;0,1,0],水平[1,0,0;sh,1,0]

### 1.6.2正向变换Forward transform(如fft前的shift)：

判断其可分离性：

判断其对称性：当可分离，且

例如傅里叶核就是xy可分离(独立)、xy对称的核

矩阵写法：，其中F为图像方阵，A为变换核矩阵且，T为变换后结果。

矩阵变换流程：F’=BAFAB，如傅里叶，walsh，哈达玛变换，离散余弦，haar变换都是。先正向再变，反向再逆变

### 1.6.3 概率方法

强度值视为随机变量,k=1~255则概率为灰度值出现次数：

# 第二章 强度变换空域滤波

## 2.1【定义】

强度变换intensity transformation：s=T(r), ,s/r为变换前后图像的像素强度；空域滤波spatial filtering，滤波核filter=mask=kernel=template=window

## 2.2【强度变换】

线性变换：negative变换(s=L-1-r,L为灰度级)，增强灰色、白色细节，尤其是黑背景主导下的白前景；Identity变换(s=r)

对数logarithmic变换：log(s=c\*log(1+r),c常数，r>0), 拉伸暗像素压缩亮像素，压缩动态范围；inverse-log(s=exp r)也叫exponential反之，但也压缩动态范围。

幂次power-law变换：gamma()，γ<1变亮，γ>1变暗。相比对数变换，参数多，可调范围更大。

## 2.3 【直方图均衡化】

直方图histogram统计：1.计算出每个灰度级的个数，k=0~L-1；2.

直方图变换：正向变换s=T(r),,T为单调monotonically增函数；逆变换r=T^(-1)(s)严格单调递减。

### 2.3.1直方图均衡HE，概率积分变换

1、先计算原始图像强度值r的PDF，记作：连续(r)，一般会给出；或离散的p\_k(r\_k)，需要自己计算。

2、按如下公式积分，得到s=T(r)或S\_k=T(r\_k)

s=T(r)的概率密度函数为

3、根据p计算出所有的s，若是离散值，则sk最后要四舍五入。对离散的 ：

## 2.4【空域滤波】

相关，无需旋转卷积核直接滤波

卷积，180度旋转卷积核

## 2.5【平滑低通滤波】

平滑滤波(有低通效果)，如box filter=1/9\*[1,1,1;1,1,1;1,1,1], gaussian kernel=1/16\*[1,2,1;2,4,2;1,2,1]

Order-statistic排序统计滤波，如中值（专去椒盐）

## 2.6【锐化高通滤波】

### 2.6.1导数derivative及其性质

一阶导数

二阶导数

### 2.6.2 laplacian算子

定义为，离散情况下为计算核[0,1,0;1,-4,1;0,1,0]。具有各向同性或旋转不变性()，线性性，以及。

拉普拉斯锐化：，c取±1，符号与滤波核的中心相同。

### 2.6.3 梯度gradient

定义：，线性，非旋转不变；

梯度幅值magnitude：，非线性，旋转可变

Roberts交叉梯度算子：[-1,0;0,1]和[0,-1;1,0]，梯度值为

Sobel梯度算子，[-1,-2,-1;0,0,0;1,2,1],逆时转，梯度值同上。

# 第三章 频域滤波

## 3.1【数学基础】

### 3.1.1基本公式

欧拉公式：

连续冲激函数：，否则为0；在全实轴积分值为1；筛选性质

离散冲激函数：，否则为0；在整数轴积分值为1；筛选性质

离散冲激序列

### 3.1.2傅里叶级数

定义：一组不同频率的正弦余弦函数的加权和，是周期函数的另一种时域表达形式。任意周期函数都可以展开为傅里叶级数，即下式。w0=2pi/T为基础频率

其中，系数求解方法为（）

也可写作 ，而cn是an和bn的统一。

给定函数ft求其傅里叶展开：先用f求c\_n，然后直接写出f(t)即可。

### 3.1.3 傅里叶变换

定义：将f(t)变为F(u)，获取(原时域函数展成傅里叶级数) 时，在(频率为u的正弦波)前的系数。其原变换和逆变换：

性质：线性性((af+bg)=aF+bG反之亦然)

时移性

缩放性

对称性

卷积(连续)

求变换：周期函数先傅展再傅变；非周期函数直接傅变

例子：方波的傅里叶变换为辛格函数(常值也是)

例子：冲激函数，对于 有

例子：冲激序列，周期函数先展开再变换

即

其傅里叶变换为

指数函数，

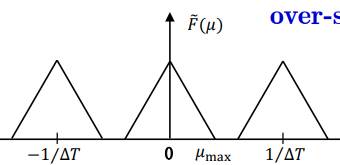
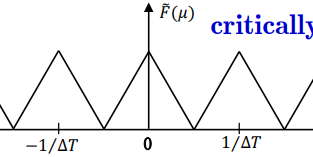
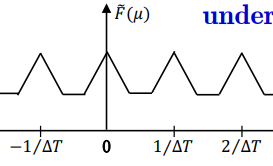
连续卷积：

卷积离散：

## 3.2【采样定理】

离散冲激采样:，，等价于以为周期将左右平移。

采样定理:若有限带宽函数最大频率为，则离散冲激采样频率应有，否则可能频域混叠(aliase)，如下图。

，，

理想低通滤波：。低通滤波结果的反变换时域结果为

频带混叠的原因：时域有限一般信号，其频带一定无限宽(采样带来截断)；时域无限的信号，频带一定有限宽；但若频带有限，且信号呈周期时，截断时可能整周期，此时不会混叠。

## 3.3【1D离散傅里叶】

定义：用离散冲激序列对连续函数采样，。离散，连续，周期与有关。,

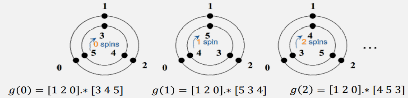
DFT和逆DFT都是周期性的，周期为M，与时域信号有关

例，,...

逆，…

循环卷积，也叫圆卷积，计算时，f顺时针循环，h逆时针循环。





采样间隔与频率间隔：时域采样间隔，周期M，信号时长为；频域间隔，频带长度为

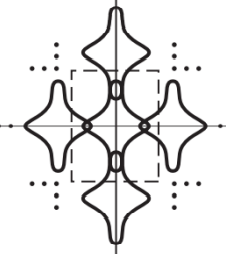
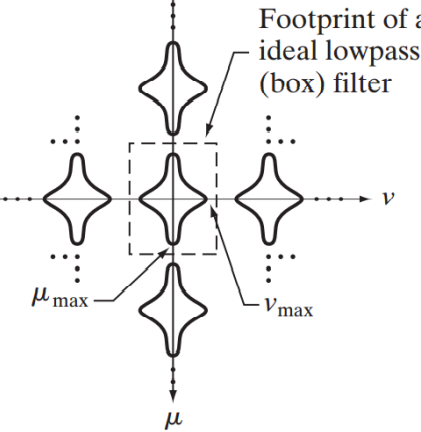
## 3.4【2D-FT、DFT】

2D冲激：，否则为0；在tz平面积分值为1；筛选性质;

离散2D冲激：类似1D

2D-fft：

采样定理：，



空域混叠欠采样，时域混叠欠采样、车轮倒转效应

解决方案：散焦衰减高频，均值滤波

2D-dft：

## 3.5【2D-DFT性质】

平移：

极坐标变换：

，旋转f后F也旋转相同角度。

周期：,

频谱居中：，重拼(非平移)

离散函数是偶函数iif. 所有样本加和为0

实函数f的fft共轭对称：

虚函数f的fft共轭反对称：

实函数的FT：实部偶，虚部奇；幅值偶，相位奇

虚函数的FT：实部奇，虚部偶；幅值奇，相位偶

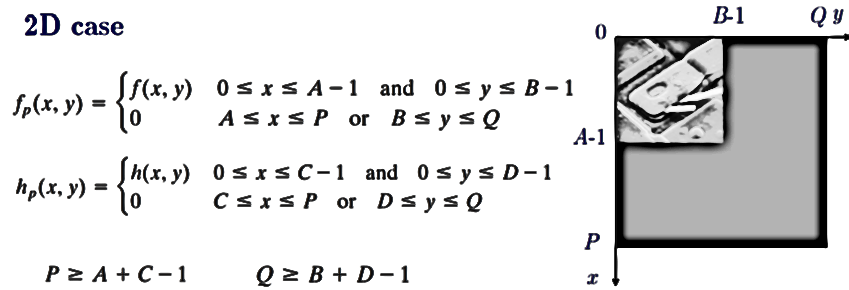
对称：f实+偶，F也为纯实+偶；f实+奇，F为纯虚+奇

幅值，相位，功率

直流分量平均值,是频谱最大分量

卷积：f(x,y)\*h(x,y)=

交叠误差：使用循环卷积计算卷积时，由于f和h的周期性，直接计算f\*g会交叠，导致卷积结果错误。因此需要在f和g末尾处补0，使得补零后长度,避免下一周期误入.若两图像尺寸相等，则可能需要P=2len(f)



DFT算法对偶尺寸计算更快，因此最好padding到偶数

频谱泄露：加窗截断时，f0处的能量分散到宽频带去。但整周期截断不会泄漏。改善：可加合适窗函数或延长时间窗

|  |  |
| --- | --- |
|  | 1 |
| Rect[a,b] |  |
|  |  |
| Cos() |  |
|  |  |
|  |  |

## 3.6【频域滤波】

定义：,H为频率域传递函数

振铃效应：空域填充0，导致边缘不连续，进而导致振铃

特例：高斯滤波器和一阶巴特沃斯没有振铃。

出现原因：函数中存在梯度过大的“剧烈变化”区域

频域滤波步骤：1.P=2M,Q=2N,填充0；2.在时域乘位移；3.DFT；4.构造大小为P\*Q的实对称滤波器H并乘在原图中心，得到G；5.IDFT和零频点位移：；7.左上角切割M\*N得结果。

纽带：时域与频域分析的纽带是卷积定理。

高斯：高斯的DFT、IDFT还是实高斯函数。。当频域均值0方差时，对应空域均值为0,但方差为1/2.某些滤波核=高斯A-高斯B

## 3.7【低通频滤】

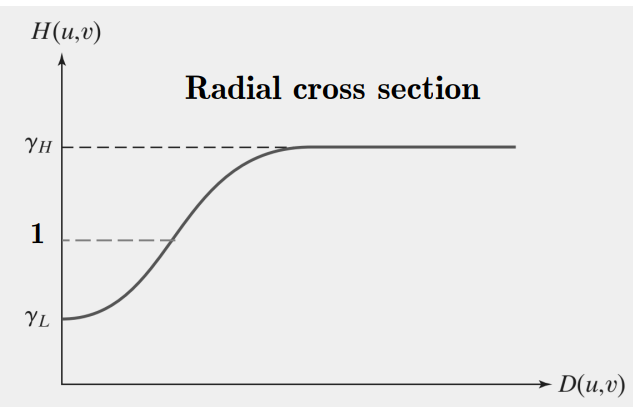
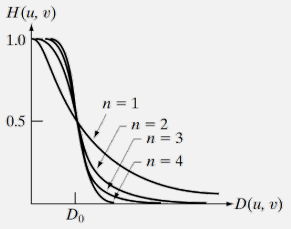
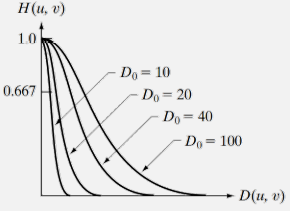
低通滤波：中心高四周低，过滤高频边缘、噪声

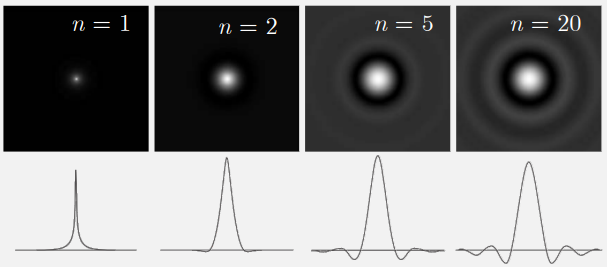
理想低通：

高斯低通：,为截频,此处H(u,v)=2/3

巴特沃斯低通：，处H()=0.5

下4图为:高斯低通，巴特沃斯低通，同态(3.8),巴特沃斯环





## 3.8【高通频滤】

高通滤波：中心低四周高，保留边缘

高通滤波：

\*n阶巴特沃斯高通：

拉普拉斯：;核[0,1,0;1,-4,1;0,1,0]；频率核;拉普拉斯锐化增强后图像为,其中c=-1; 在频域中

同态滤波：1.令f=ir，p=ln(f)=ln(i)+ln(r);2.计算P=DFT(p)，,H为同态核；3.p’=IDFT(P’)=ln(i)’+ln(r)’(非求导)；4.

同态核：，, ，c用于控制尖锐度；能够同时压缩动态范围，增加对比度

## 3.9【带通陷波】

理想带阻：

巴特沃斯带阻：

高斯带阻：,D0截频，W带宽

带通：1-带阻。Notch：陷波，单点阻塞，必定呈中心对称。可用高斯自己凑

# 第四章 图像变换

## 4.1【数学基础】

内积性质：;;；

欧式空间(实数) ：

酉空间(复数)：

积分内积(连续函数):

向量夹角

正交基： ，=1

双正交基： ，基等于其对偶时简化为正交

展开系数：时，系数

## 4.2【变换的矩阵形式】

若反变换核，则如下。A为变换矩阵，且

，

计算正交变换：检验基向量规范正交➡得到变换矩阵➡计算变换和反变换

复数：, 。连续：, 为基函数,, 系数

FT: ,

DFT: ，也是T换成N

## 4.3【相关】

；时因此。 离散形式： 【此处星号为空心】

## 4.4【1D基本变换与时频分析】

海森堡不确定性：

## 4.5【2D基本变换】

## 4.6【离散余弦变换】

, , ,

DCT：①将f对称拓展为g, ②, ③, ④

## 4.7【沃尔什-哈达玛WHT】

递推变换矩阵：, ,

列率：每行符号变化数，如8阶Aw为07341625

列率排序：对按列率排序，得；

变换：变换结果=变换矩阵\*序列，

## 4.8【haar变换】

(反变换核)

4.9【小波变换】

哈尔变换：；

尺度函数

例：单位哈尔尺度函数

;;

细化方程：

尺度函数系数

小波函数：

小波函数细化方程：

小波函数系数

级数展开

离散小波变换

逆：

二维小波变换：

# 第五章 图像复原

## 5.1【图像退化模型】

退化模型：退化图=原图×退化函数+噪声

频域：

## 5.2【噪声模型】

来源：图像采集和传输

空间属性：与位置坐标无关，与图像无关

频率属性：白噪声的FFT频谱是常数。

噪声的概率密度函数：

1.高斯噪声

2.Rayleigh噪声

，

3.Erlang厄蓝gamma噪声

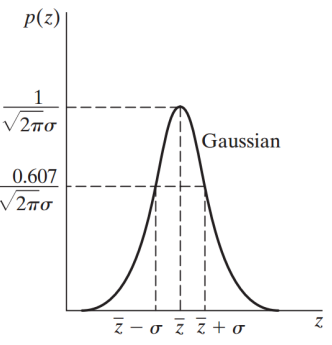
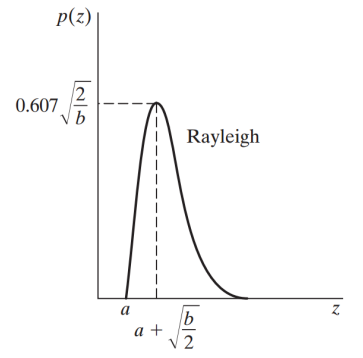
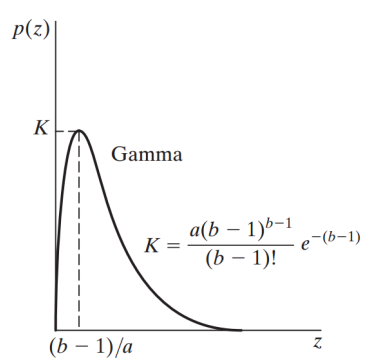
，

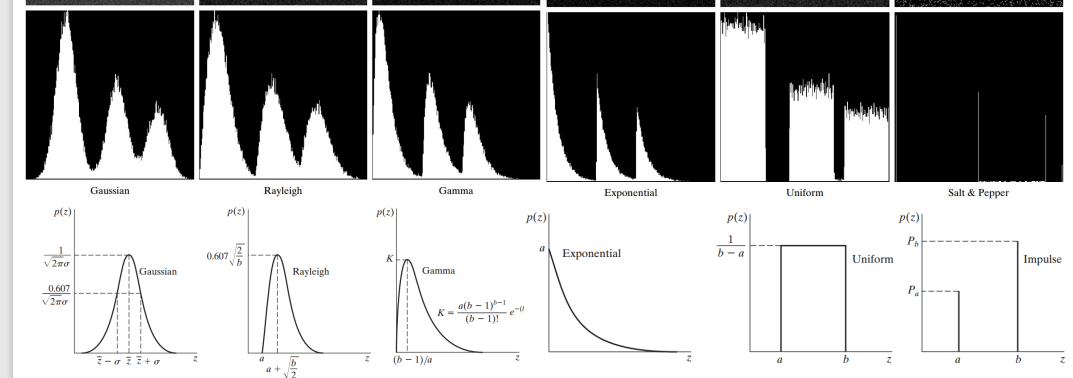
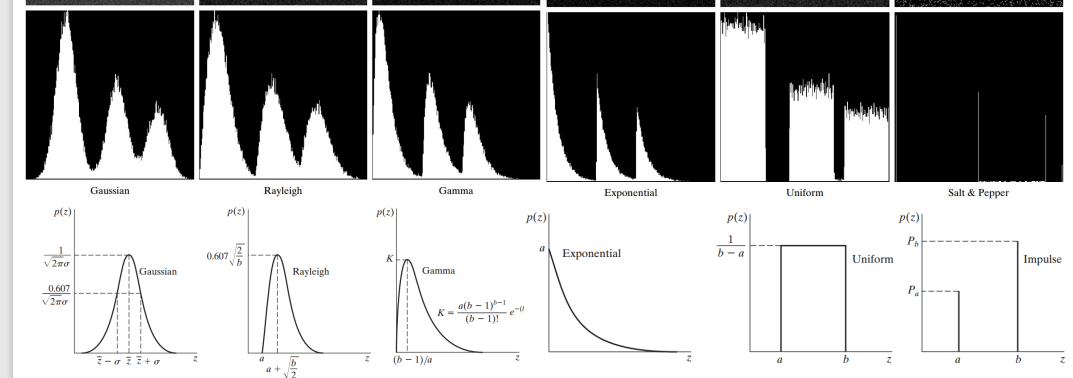
4.指数噪声

5.均匀噪声

，

6.椒盐噪声



周期噪声：源于成像时的电路、电子元件噪声

噪声参数估计：1.噪声区域取样；2.计算直方图；3.估计均值方差，套噪声模型确定参数

## 5.3【空域滤波复原】

退化模型中h为1，此时噪声模型未知，无法直接作差

均值滤波器：若尺寸为M\*N的区域

1.算术：区域求和除M\*N

2.几何：区域求积开M\*N次根；损失细节更少

3.调和谐波：，对盐+高斯,不对椒

4.逆谐波：,Q为阶，正对椒负对盐

排序统计滤波器：1.中值，对单峰双峰噪声都好，多次中值=模糊；2.最大，取区域最大值，对椒，找亮点；3.最小，区域最小值，对盐，找暗点；4.中点，区域最大最小/2，对高斯、均匀等随机噪声；5.Alpha裁剪均值，去最低d/2和最高d/2再均值(分母是mn-d)，对椒盐+高斯

## 5.4【周期噪声的频域复原】

带通、带阻滤波，把噪声点覆盖掉

## 5.5【线性位置不变退化】

任意退化函数H可表示为g(x,y)=H[f(x,y)]

线性退化判定：H[af+bg]=aH(f)+bH(g)

位置无关退化判定：H[f(x-a,y-b)]=g(x-a,y-b)对任意xyab成

退化可建模：可将位置无关、线性的退化建模为退化函数h，卷积全图，进行退化。复原=找到逆转这一过程的滤波器。

证明：由冲击函数试探属性有

第一类叠加积分：当退化线性，此时上式变为，其中，优化中，H一般为点传播函数PSF。若退化位置无关，则可得G=HF+N。

## 5.6【退化函数H估计】

观察估计法（盲反卷积）：1.原图截出gs；2.增强（锐化等）成；3.FFT得Gs；4.退化函数认定为Hs=Gs/

试验确定法：用冲激响应在成像系统下拍照得g，fft得G，则退化函数H=G/A，A为常数。

建模估计法：湍流模型

运动模糊模型，其中x0(t)是竖直方向运动估计函数。例，时，运动模糊核为

5.7【直接逆滤波复原】 不管噪声，直接除，。缺点：噪声未知，无法完美复原；受H中的0点和微小量影响较大。

## 5.8【维纳滤波】最小均方误差滤波

误差：。三大假设：噪声图像无关，存在0均值，由f的线性计算而得

|\*|²=\*H，功率谱,，比值为信噪比K

## 5.9【受限最小二乘滤波】必不会考

## 5.10【几何平均滤波】

直接逆滤波和wiener滤波的组合

# 第六章 形态学处理

## 6.1 【基本概念】

图像反射：中心对称

图像平移：整体移动

结构元素SE：十字，矩形，方，椭圆，圆（注意中心点）

结构元素的使用：用S遍历原集A的每个内点【非边缘】

## 6.2 【腐蚀膨胀】

腐蚀：不对SE取反，仅保留完全重合区域。能消除联通区，收缩边界，分离粘连，去除图像外部无意义的亮点噪声。

膨胀：先对SE取反，有相交区域即保留。能延年益寿，合并断裂，向外扩展，填补空洞，消除图像内暗点。

将SE看做卷积mask，对比空域卷积：相同处为都要翻转再运算；不同为膨胀非线性，卷积线性。

## 6.3 【开闭】

开：空心圆，先腐蚀后膨胀。

闭：实心圆，先膨胀后腐蚀。

作用：均平滑轮廓，且不明显改变其面积；开（中）可消除凸出小物体，分离狭窄纤细区，抑制亮细节；闭（右）可填充孔洞，闭合狭窄区，连接临近物体，抑制暗细节

## 6.4 【击中击不中变换HMT】

作用：检测特定形状在图中位置，包含A击中B1且A补击中B2的所有点。（简化HMT：）

流程：1.定义待检测形状D，D的父集W；2.令D为前景B1，W-D为背景B2；3.[B1腐蚀A]与[B2腐蚀A补]交集，联合定位。

## 6.5 【灰度图像模板匹配】

相关系数：

归一化相关系数：减均值，除两方差。最后一定在±1之内

流程：原图padding，模板遍历全图计算归一化相关系数，最大点即匹配结果

# 7 图像分割

## 7.1 基本概念：基于边缘的，基于区域的

## 7.2点线边检测

【背景】边缘像素：强度突变的像素

边缘：连接的一组边缘像素

一阶导：f(x+1)-f(x)；二阶导：f(x+1)+f(x-1)-2\*f(x)

【点检测】检测突出点

流程：用laplacian核[111,1-81,111]卷积，保留>阈值的点

【线检测】

整体线：用Laplacian核卷积，取正数（或取绝对值，较少）

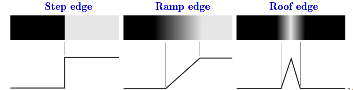
方向线：四个方向卷积核卷积，四响应中最大者。

水平：[-1-1-1;222;-1-1-1],垂直：(90°水平旋转)

+45°[2-1-1;-12-1;-1-12],-45°：（45°左右翻转）

【边缘模型】

台阶型，斜坡型，屋脊型



【边缘检测】

基于梯度：先算水平竖直梯度，再计算强度谱和方向谱。其中，边缘的梯度方向与边缘垂直。

梯度算子：gx,gy=[下][右]。垂直梯度[-1;1][-1,1]，Roberts[-1 0;0 1][0 -1;1 0]，Prewitt 0-90°[-1-1-1;000;111][逆]或45°[011;-101;-1-10][顺]，Sobel 0-90°[-1-2-1;000;121][逆]或45°[012;-101;-2-10][顺]。

梯度幅值：|gx|+|gy|，或gxgy平方和开根号

梯度幅角：反正切(gy/gx)

Canny算子：空域2D高斯平滑；梯度算子计算横纵梯度、幅值图、幅角图；根据幅角，沿梯度方向(非边缘方向)对幅值图做NMS；双阈值算法，去掉假边缘，连接真边缘。

NMS流程：1.根据幅角图，将每个像素点的梯度方向，量化为横竖撇捺四类；2.对某点，沿其梯度方向在其3×3邻域中取3个点，若中心点梯度幅值最大则保留该点，否则置零；3.遍历全图做2，即得NMS结果。

双阈值：设定强弱阈值(TH/TL=2或3)，根据每个点梯度幅值判断；小于弱阈值点置零，大于强阈值点置1(确定边缘)；中间的点则判定，若与强阈值点8连通，则置1(但不参与下次判定)，否则置零。

Canny初衷：所有边缘均被找到，错误率低；定位边缘尽可能接近真实边缘；检测器指出边缘是单一的，不应指出多个像素边缘。Canny特点：改进边缘细节，拒绝无关特征，所得边缘连续、细、直。

【直线检测】hough变换：从空域到参数域的变换。

笛卡尔坐标系中概念：原图中点(xi,yi)代表的一簇直线(yi=axi+b)，对应参数空间一条线(b=-xia+yi)；原图中两点(x1,y1)(x2,y2)确定了一条直线(两簇的交集)，对应参数空间两线交点(b=-x1a+y1与b=-x2a+y2的交点)。

极坐标：法线式(xcosθ+ysinθ=ρ，θ∈[±90])。点(xi,yi)确定的一簇直线(xicosθ+yisinθ=ρ)，在平面中代表一曲线；在空域中两点确定直线，在平面中代表两曲线交点。

用极坐标的理由：x=c无法在笛卡尔坐标参数空间表示。

利用hough变换检测直线：1.canny等获得二值化边缘图像；2.将每个点映射到极坐标参数空间平面中，得多个连续曲线；3.划分网格，对曲线离散化，统计网格中点的数目；4.包含点最多的网格，其所代表的参数即为直线参数。

计算步骤：1、离散化=-45，0,45,90；2.根据所给二值化图像，计算每个点的（每个点对应多个ρ，这里是4个），得到行n列θ，内容为ρ的表格；3.统计表格中出现频数；4. 频数最高的ρ和θ即为检测的直线参数。