

TD1. Étude du robot Scara

Axel BENEULT LEFAUCHEUX

November 6, 2014

1 Établir le modèle géométrique direct en position et en rotation.

On utilise la table de Denavit et Hertenberg pour définir les matrices : H_1 , H_2 , H_3 , H_4 .

$$H_1 = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1^*) & -\sin(\theta_1^*) & 0 & a_1 \cos(\theta_1^*) \\ \sin(\theta_1^*) & \cos(\theta_1^*) & 0 & a_1 \sin(\theta_1^*) \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} \cos(\theta_2^*) & \sin(\theta_2^*) & 0 & a_2 \cos(\theta_2^*) \\ \sin(\theta_2^*) & -\cos(\theta_2^*) & 0 & a_2 \sin(\theta_2^*) \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3^* \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H_4 = \begin{pmatrix} \cos(\theta_4^*) & -\sin(\theta_4^*) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_4^*) & \cos(\theta_4^*) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En calculant le produit matricielle de ces matrices on obtient une matrice contenant le modèle géométrique direct.

$$H_0^4 = H_1.H_2.H_3.H_4$$

$$H_0^4 = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1^* + \theta_2^* - \theta_4^*) & \sin(\theta_1^* + \theta_2^* - \theta_4^*) & 0 & a_1 \cos(\theta_1^*) + a_2 \cos(\theta_1^* + \theta_2^*) \\ \sin(\theta_1^* + \theta_2^* - \theta_4^*) & -\cos(\theta_1^* + \theta_2^* - \theta_4^*) & 0 & a_1 \sin(\theta_1^*) + a_2 \sin(\theta_1^* + \theta_2^*) \\ 0 & 0 & -1 & d_1 - d_3^* - d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A partir de la matrice H_0^4 on peut déduire le modèle géométrique direct en position (MGDpos) et en orientation (MGDori)

$$MGDpos = \begin{pmatrix} a_1 \cos(\theta_1^*) + a_2 \cos(\theta_1^* + \theta_2^*) \\ a_1 \sin(\theta_1^*) + a_2 \sin(\theta_1^* + \theta_2^*) \\ d_1 - d_3^* - d_4 \end{pmatrix}$$

$$MGDori = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1^* + \theta_2^* - \theta_4^*) & \sin(\theta_1^* + \theta_2^* - \theta_4^*) & 0 \\ \sin(\theta_1^* + \theta_2^* - \theta_4^*) & -\cos(\theta_1^* + \theta_2^* - \theta_4^*) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2 Inverser le modèle géométrique en position.

Pour inverser le modèle géométrique en position on utilise une méthode analytique. Depuis le MGD en position on peut en déduire que :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} \theta_1^* \\ \theta_2^* \\ d_3^* \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \cos(\theta_1^*) + a_2 \cos(\theta_1^* + \theta_2^*) \\ a_1 \sin(\theta_1^*) + a_2 \sin(\theta_1^* + \theta_2^*) \\ d_1 - d_3^* - d_4 \end{pmatrix}$$

Cherchant θ_1^* , θ_2^* et d_3^* il suffit de trouver f^{-1} .

$$Z = d_1 - d_3^* - d_4 \tag{1}$$

L'équation (1) nous permet de déduire directement que :

$$d_3^* = d_1 - d_4 - Z$$

Pour exprimer θ_2^* on prend la somme de X^2 et Y^2 pour pouvoir faire sortir un $\cos(\theta_2^*)$:

$$X^2 + Y^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos(\theta_2^*)$$

$$\cos(\theta_2^*) = \frac{X^2 + Y^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1 a_2}$$

On peut donc dire que si : $|\frac{X^2 + Y^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1 a_2}| \leq 1$ alors $\theta_2^* = \pm \arccos(\frac{X^2 + Y^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1 a_2})$.

Pour déterminer θ_1^* , on considère θ_2^* comme connu.

$$X = a_1 \cos(\theta_1^*) + a_2 \cos(\theta_2^*) \cos(\theta_1^*) - a_2 \sin(\theta_2^*) \sin(\theta_1^*)$$

$$Y = a_1 \sin(\theta_1^*) + a_2 \sin(\theta_2^*) \cos(\theta_1^*) + a_2 \sin(\theta_1^*) \cos(\theta_2^*)$$

$$X = \underbrace{(a_1 + a_2 \cos(\theta_2^*))}_{k_1} \cos(\theta_1^*) - \underbrace{a_2 \sin(\theta_2^*)}_{k_2} \sin(\theta_1^*)$$

$$Y = \underbrace{(a_1 + a_2 \cos(\theta_2^*))}_{k_1} \sin(\theta_1^*) + \underbrace{a_2 \sin(\theta_2^*)}_{k_2} \cos(\theta_1^*)$$

$$X = k_1 \cos(\theta_1^*) - k_2 \sin(\theta_1^*)$$

$$Y = k_2 \cos(\theta_1^*) + k_1 \sin(\theta_1^*)$$

Si on pose $r = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$ on peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{x}{r} &= \cos(\alpha) \cos(\theta_1) - \sin(\alpha) \sin(\theta_1) \\ &= \cos(\theta_1 + \alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{y}{r} &= \sin(\alpha) \cos(\theta_1) + \cos(\alpha) \sin(\theta_1) \\ &= \sin(\theta_1 + \alpha) \end{aligned}$$

avec $\alpha = \text{atan2}(k_2, k_1)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \theta_1 + \alpha &= \text{atan2}(y, x) \\ \Rightarrow \theta_1 &= \text{atan2}(y, x) - \text{atan2}(k_2, k_1) \end{aligned}$$

Pour θ_4

$$MGDori = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1^* + \theta_2^* - \theta_4^*) & \sin(\theta_1^* + \theta_2^* - \theta_4^*) & 0 \\ \sin(\theta_1^* + \theta_2^* - \theta_4^*) & -\cos(\theta_1^* + \theta_2^* - \theta_4^*) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2.1 Ce modèle admet-il une solution unique?

Non, ce modèle admet deux solutions à cause de θ_2 qui est égal à plus ou moins $\arccos(\frac{X^2 + Y^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1 a_2})$.

3 Trajectoire du robot

3.1 Expliquer ce principe

3.2 Expliquer pourquoi il est nécessaire de choisir des vitesses et accélérations initiales et finales nulles.

3.3 Donner l'algorithme qui permet de déterminer les coefficients des polynômes d'ordre 5