

TD1. Étude du robot Scara

Axel BENEULT LEFAUCHEUX

November 6, 2014

1 Établir le modèle géométrique direct en position et en rotation.

On utilise la table de Denavit et Hertenberg pour définir les matrices : H_1 , H_2 , H_3 , H_4 .

$$H_1 = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1^*) & -\sin(\theta_1^*) & 0 & a_1 \cos(\theta_1^*) \\ \sin(\theta_1^*) & \cos(\theta_1^*) & 0 & a_1 \sin(\theta_1^*) \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} \cos(\theta_2^*) & \sin(\theta_2^*) & 0 & a_2 \cos(\theta_2^*) \\ \sin(\theta_2^*) & -\cos(\theta_2^*) & 0 & a_2 \sin(\theta_2^*) \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3^* \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H_4 = \begin{pmatrix} \cos(\theta_4^*) & -\sin(\theta_4^*) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_4^*) & \cos(\theta_4^*) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En calculant le produit matricielle de ces matrices on obtient une matrice contenant le modèle géométrique direct.

$$H_0^4 = H_1.H_2.H_3.H_4$$

$$H_0^4 = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1^* + \theta_2^* - \theta_4^*) & \sin(\theta_1^* + \theta_2^* - \theta_4^*) & 0 & a_1 \cos(\theta_1^*) + a_2 \cos(\theta_1^* + \theta_2^*) \\ \sin(\theta_1^* + \theta_2^* - \theta_4^*) & -\cos(\theta_1^* + \theta_2^* - \theta_4^*) & 0 & a_1 \sin(\theta_1^*) + a_2 \sin(\theta_1^* + \theta_2^*) \\ 0 & 0 & -1 & d_1 - d_3^* - d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A partir de la matrice H_0^4 on peut déduire le modèle géométrique direct en position (MGDpos) et en orientation (MGDori)

$$MGDpos = \begin{pmatrix} a_1 \cos(\theta_1^*) + a_2 \cos(\theta_1^* + \theta_2^*) \\ a_1 \sin(\theta_1^*) + a_2 \sin(\theta_1^* + \theta_2^*) \\ d_1 - d_3^* - d_4 \end{pmatrix}$$

$$MGDori = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1^* + \theta_2^* - \theta_4^*) & \sin(\theta_1^* + \theta_2^* - \theta_4^*) & 0 \\ \sin(\theta_1^* + \theta_2^* - \theta_4^*) & -\cos(\theta_1^* + \theta_2^* - \theta_4^*) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2 Inverser le modèle géométrique en position.

Pour inverser le modèle géométrique en position on utilise une méthode analytique. Depuis le MGD en position on peut en déduire que :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} \theta_1^* \\ \theta_2^* \\ d_3^* \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \cos(\theta_1^*) + a_2 \cos(\theta_1^* + \theta_2^*) \\ a_1 \sin(\theta_1^*) + a_2 \sin(\theta_1^* + \theta_2^*) \\ d_1 - d_3^* - d_4 \end{pmatrix}$$

Cherchant θ_1^* , θ_2^* et d_3^* il suffit de trouver f^{-1} .

$$Z = d_1 - d_3^* - d_4 \quad (1)$$

L'équation (1) nous permet de déduire directement que :

$$d_3^* = d_1 - d_4 - Z$$

Pour exprimer θ_2^* on prend la somme de X^2 et Y^2 pour pouvoir faire sortir un $\cos(\theta_2^*)$:

$$X^2 + Y^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos(\theta_2^*)$$

$$\cos(\theta_2^*) = \frac{X^2 + Y^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1a_2}$$

On peut donc dire que si : $|\frac{X^2+Y^2-a_1^2-a_2^2}{2a_1a_2}| \leq 1$ alors $\theta_2^* = \pm \arccos(\frac{X^2+Y^2-a_1^2-a_2^2}{2a_1a_2})$.

Pour déterminer θ_1^* , on considère θ_2^* comme connu.

$$X = a_1 \cos(\theta_1^*) + a_2 \cos(\theta_2^*) \cos(\theta_1^*) - a_2 \sin(\theta_2^*) \sin(\theta_1^*)$$

$$Y = a_1 \sin(\theta_1^*) + a_2 \cos(\theta_2^*) \cos(\theta_1^*) + a_2 \sin(\theta_2^*) \cos(\theta_1^*)$$

$$X = \underbrace{a_1 \cos(\theta_1^*) + a_2 \cos(\theta_2^*) \cos(\theta_1^*)}_{k_1} - \underbrace{a_2 \sin(\theta_2^*)}_{k_2} \sin(\theta_1^*)$$

$$Y = \underbrace{a_1 \cos(\theta_1^*) + a_2 \cos(\theta_2^*) \cos(\theta_1^*)}_{k_1} \sin(\theta_1^*) + \underbrace{a_2 \sin(\theta_2^*)}_{k_2} \cos(\theta_1^*)$$

$$X = k_1 \cos(\theta_1^*) - k_2 \sin(\theta_1^*) \quad Y = k_2 \cos(\theta_1^*) + k_1 \sin(\theta_1^*)$$

Si on pose $r = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$ on peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{x}{r} &= \cos(\alpha) \cos(\theta_1) - \sin(\alpha) \sin(\theta_1) \\ &= \cos(\theta_1 + \alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{y}{r} &= \sin(\alpha) \cos(\theta_1) + \cos(\alpha) \sin(\theta_1) \\ &= \sin(\theta_1 + \alpha) \end{aligned}$$

avec $\alpha = \text{atan2}(k_2, k_1)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \theta_1 + \alpha &= \text{atan2}(y, x) \\ \Rightarrow \theta_1 &= \text{atan2}(y, x) - \text{atan2}(k_2, k_1) \end{aligned}$$

2.1 Ce modèle admet-il une solution unique?

Non, ce modèle admet deux solutions à cause de θ_2 qui est égal à plus ou moins $\arccos(\frac{X^2+Y^2-a_1^2-a_2^2}{2a_1a_2})$.

3 Trajectoire du robot

- 3.1 Expliquer ce principe
- 3.2 Expliquer pourquoi il est nécessaire de choisir des vitesses et accélérations initiales et finales nulles.
- 3.3 Donner l'algorithme qui permet de déterminer les coefficients des polynômes d'ordre 5