TD1. Étude du robot Scara

Axel BENEULT LEFAUCHEUX

November 6, 2014

1 Établir le modèle géométrique direct en position et en rotation.

On utilise la table de Denavit et Hertenberg pour définir les matrices : H_1, H_2, H_3, H_4.

$$H_1 = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1^*) & -\sin(\theta_1^*) & 0 & a_1\cos(\theta_1^*) \\ \sin(\theta_1^*) & \cos(\theta_1^*) & 0 & a_1\sin(\theta_1^*) \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} \cos(\theta_2^*) & \sin(\theta_2^*) & 0 & a_2\cos(\theta_2^*) \\ \sin(\theta_2^*) & -\cos(\theta_2^*) & 0 & a_2\sin(\theta_2^*) \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3^* \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H_4 = \begin{pmatrix} \cos(\theta_4^*) & -\sin(\theta_4^*) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_4^*) & \cos(\theta_4^*) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En calculant le produit matricielle de ces matrices on obtient une matrice contenant le modèle géométrique direct.

$$H_0^4 = H_1.H_2.H_3.H_4$$

$$H_0^4 = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1^* + \theta_2^* - \theta_4^*) & \sin(\theta_1^* + \theta_2^* - \theta_4^*) & 0 & a_1\cos(\theta_1^*) + a_2\cos(\theta_1^* + \theta_2^*) \\ \sin(\theta_1^* + \theta_2^* - \theta_4^*) & -\cos(\theta_1^* + \theta_2^* - \theta_4^*) & 0 & a_1\sin(\theta_1^*) + a_2\sin(\theta_1^* + \theta_2^*) \\ 0 & 0 & -1 & d_1 - d_3^* - d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A partir de la matrice H_0^4 on peut déduire le modèle géométrique direct en position (MGDpos) et en orientation (MGDori)

$$MGDpos = \begin{pmatrix} a_1\cos(\theta_1^*) + a_2\cos(\theta_1^* + \theta_2^*) \\ a_1\sin(\theta_1^*) + a_2\sin(\theta_1^* + \theta_2^*) \\ d_1 - d_3^* - d_4 \end{pmatrix}$$

$$MGDori = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1^* + \theta_2^* - \theta_4^*) & \sin(\theta_1^* + \theta_2^* - \theta_4^*) & 0 \\ \sin(\theta_1^* + \theta_2^* - \theta_4^*) & -\cos(\theta_1^* + \theta_2^* - \theta_4^*) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2 Inverser le modèle géométrique en position.

Pour inverser le modèle géométrique en position on utilise une méthode analytique. Depuis le MGD en position on peut en déduire que :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} \theta_1^* \\ \theta_2^* \\ d_3^* \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1\cos(\theta_1^*) + a_2\cos(\theta_1^* + \theta_2^*) \\ a_1\sin(\theta_1^*) + a_2\sin(\theta_1^* + \theta_2^*) \\ d_1 - d_3^* - d_4 \end{pmatrix}$$

Cherchant θ_1^*, θ_2^* et d_3^* il suffit de trouver f^{-1}.

$$Z = d_1 - d_3^* - d_4 \tag{1}$$

L'équation (1) nous permet de déduire directement que :

$$d_3^* = d_1 - d_4 - Z$$

Pour exprimer θ_2^* on prend la somme de X^2 et Y^2 pour pouvoir faire sortir un $\cos(\theta_2^*)$:

$$X^2 + Y^2\ a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos(\theta_2^*)$$

$$\cos(\theta_2^*) = \frac{X^2 + Y^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1a_2}$$

On peut donc dire que si : $|\frac{X^2+Y^2-a_1^2-a_2^2}{2a_1a_2}| \leq 1$ alors $\theta_2^* = \pm \arccos(\frac{X^2+Y^2-a_1^2-a_2^2}{2a_1a_2})$.

Pour déterminer θ_1^*, on considère θ_2^* comme connu.

$$X = a_1 \cos(\theta_1^*) + a_2 \cos(\theta_2^*) \cos(\theta_1^*) - a_2 \sin(\theta_2^*) \sin(\theta_1^*)$$
$$Y = a_1 \sin(\theta_1^*) + a_2 \sin(\theta_2^*) \cos(\theta_1^*) + a_2 \sin(\theta_1^*) \cos(\theta_2^*)$$

$$X = \underbrace{(a_1 + a_2 \cos(\theta_2^*))}_{k_1} \cos(\theta_1^*) - \underbrace{a_2 \sin(\theta_2^*)}_{k_2} \sin(\theta_1^*)$$
$$Y = \underbrace{(a_1 + a_2 \cos(\theta_2^*))}_{k_1} \sin(\theta_1^*) + \underbrace{a_2 \sin(\theta_2^*)}_{k_2} \cos(\theta_1^*)$$

$$X = k_1 \cos(\theta_1^*) - k_2 \sin(\theta_1^*)$$
$$Y = k_2 \cos(\theta_1^*) + k_1 \sin(\theta_1^*)$$

Si on pose $r = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$ on peut écrire

$$\begin{array}{rcl} \frac{x}{r} & = & \cos(\alpha)\cos(\theta_1) - \sin(\alpha)\sin(\theta_1) \\ & = & \cos(\theta_1 + \alpha) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \frac{y}{r} & = & \sin(\alpha)\cos(\theta_1) + \cos(\alpha)\sin(\theta_1) \\ & = & \sin(\theta_1 + \alpha) \end{array}$$

avec $\alpha = \text{atan2}(k_2, k_1)$

$$\begin{array}{lcl} \Rightarrow \theta_1 + \alpha & = & \text{atan2}(y, x) \\ \Rightarrow \theta_1 & = & \text{atan2}(y, x) - \text{atan2}(k_2, k_1) \end{array}$$

Pour θ_4^*, on peut considérer que ψ s'exprime :

$$MGDori = \begin{pmatrix} \cos(\overbrace{\theta_1^* + \theta_2^* - \theta_4^*}^{\psi}) & \sin(\theta_1^* + \theta_2^* - \theta_4^*) & 0 \\ \sin(\theta_1^* + \theta_2^* - \theta_4^*) & -\cos(\theta_1^* + \theta_2^* - \theta_4^*) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On obtient alors que $\theta_4^* = \theta_1^* + \theta_2^* - \psi$.

2.1 Ce modèle admet-il une solution unique?

Non, ce modèle admet deux solutions à cause de θ_2^* qui est égal à plus ou moins $\arccos(\frac{X^2+Y^2-a_1^2-a_2^2}{2a_1a_2})$.

3 Trajectoire du robot

3.1 Expliquer ce principe

Pour générer une trajectoire articulaire il faut exprimer la trajectoire $q_i(t)$ à l'aide d'un polynôme. Si on ne considérait que la position initiale et la position finale nous ne pourrions pas obtenir autre chose qu'une trajectoire linéaire(une droite passant pas les deux positions). Pour adoucir la trajectoire il faut utiliser un polynôme avec un ordre plus grand. Nous allons donc prendre un polynôme d'ordre cinq. Nous aurons alors six équations : positions, vitesses et accélération initiales et finales pour six coefficients issus du polynôme d'ordre cinq. On obtient alors un système à six inconnues et à six équations.

3.2 Expliquer pourquoi il est nécessaire de choisir des vitesses et accélérations initiales et finales nulles.

Pendent le mouvement la vitesse et l'accélération varient, mais à l'état initial comme à l'état final, le robot est immobile et à la position voulue. C'est pourquoi les vitesses et accélérations initiales et finales sont nulles.

3.3 Donner l'algorithme qui permet de déterminer les coefficients des polynômes d'ordre 5

Il suffit de poser le système composé des équations de positions, vitesses, accélérations initiales et finales, puis de le résoudre afin d'obtenir les coefficients du polynôme de degré cinq.