

Differential Geometry of Curves and Surfaces

originally written by Kristopher Tapp, Partly Translated by BacktoBed

前言

1. 本文档已共享在 github 仓库:<https://github.com/BacktoBedend/topology>

2. 如有发现错误, 请联系:

zsg2218@foxmail.com

(请在主题中注明“微分几何 Latex 讲义挑刺”)

(抱歉, 作者没有能力且没有精力提供答疑服务. 敬请谅解!)

在此, 我们对您的支持表示衷心感谢!

Contents

Contents	3
1 曲线	1
1.1 参数化曲线	2
1.2 内积 (线性代数背景)	4
1.3 加速度	8
1.4 重参数化	10
1.5 曲率	13
1.6 平面曲线	18
1.7 空间曲线	22
1.8 保距变换	27
1.9 曲率公式复习	35
2 曲线的其他话题	36
2.1 Hopf 和 Jordan 的定理	36
2.2 凹凸性和四顶点定理 (选读)	44
2.3 Fenchel 定理 (选读)	48
2.4 Green 定理 (微积分背景)	51
2.5 等周不等式	52
2.6 惠更斯等时降落钟 (选读)	55
3 曲面	59
3.1 从 \mathbb{R}^m 到 \mathbb{R}^n 的函数的导数	59
3.2 正则曲面	67
3.3 切平面	73
3.4 面积扰动和曲面定向	75
3.5 可定向曲面	78
3.6 曲面面积	83

3.7	等距同构和第一基本形式	87
3.8	保面积和保角映射 (选读)	91
3.9	局部坐标下第一基本形式	97
3.10	另一种特征化描述正则曲面的方法 (选读)	100
4	曲面曲率	101
4.1	高斯映射	102
4.2	自伴线性算子 (线性代数背景)	107
4.3	法曲率	111
4.4	高斯曲率的几何特征	115
4.5	局部坐标的第二基本形式	117
4.6	极小曲面 (选读)	123
4.7	费耶-缪勒定理 (选读)	128
5	测地线	129
5.1	测地线的定义和例子	129
5.2	指数映射	134
5.3	高斯绝妙定理	142
5.4	完备曲面	147
5.5	平行变换和协变导数	150
5.6	局部坐标内的测地线	156
5.7	高斯曲率衡量 Infinitesimal Holonomy	162
5.8	弧长变化: 弯曲的曲面的轮胎痕迹 (选读)	166
5.9	雅可比场 (选读)	169
6	高斯-博内定理	170
6.1	局部高斯-博内定理	170
6.2	全局高斯-博内定理	176
6.3	紧曲面	180
6.4	其他全局定理示例	184

Chapter 1

曲线

在此章中我们探讨为运动物体建模并研究其轨迹时用到的数学工具. 这些物体也许会在平面上移动, 比如停车场中的汽车:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\} \text{ (所有有序实数对);}$$

或是在空间中移动, 比如飞行中的蜜蜂的轨迹:

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) | x, y, z \in \mathbb{R}\} \text{ (所有有序实数三元组);}$$

本章中的许多结果都能够一般化到在 n 维欧氏空间中移动的对象身上:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | \text{all } x_i \in \mathbb{R}\} \text{ (所有有序实数 } n \text{ 元组).}$$

本章主要关心的是在 \mathbb{R}^2 (平面) 和 \mathbb{R}^3 (空间) 中的情况.

1.1 参数化曲线

假设 $x(t), y(t)$ 和 $z(t)$ 为在空间中运动的物体在 t 时刻的坐标, 则物体在某一时刻 t 时的位置向量 (或位矢) 为向量

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

记 $I \subset \mathbb{R}$ 为我们所要研究的物体运动的时刻的所在区间, 则有 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$. 我们称 γ 是光滑的若它的三个分量函数 $(x(t), y(t), z(t))$ 是在任意阶可导的意义下是光滑的. 也就是说, 在空间中运动的物体可以用 $n = 3$ 情况下的参数化曲线来描述:

Definition 1.1. \mathbb{R}^n 中的参数化曲线为光滑函数 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$, 其中 $I \subset \mathbb{R}$ 是区间.

回忆: 区间意为 \mathbb{R} 的非空连通子集. 为简洁性考虑, 我们将使用术语曲线来作为参数化曲线的代称.

Example 1.2 (圆). 函数 $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t)), t \in (-\infty, \infty)$ 为 \mathbb{R}^2 中的曲线 (“平面曲线”), 描述了物体沿单位圆逆时针方向的运动.

Example 1.3 (螺线). 函数 $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), t), t \in (-\infty, \infty)$ 为 \mathbb{R}^3 中的曲线 (“空间曲线”). 它描述了一个投影遍布例1.2中的圆, 同时其 z -坐标值随时间稳定提升的物体的运动. 这个运动的轨迹像是螺线.

Example 1.4 (图像). 函数 $\gamma(t) = (t, t^2), t \in (-\infty, \infty)$ 为 \mathbb{R}^2 中的曲线. 它描述了一个沿着抛物线 $y = x^2$ 的物体的运动, 且该物体在运动中 x -坐标值始终和时间的取值是相等的.

更一般的, 若 I 为区间且 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 为光滑函数, 则 $\gamma(t) = (t, f(t))$ 描述了沿着 $y = f(x)$ 的图像的物体的运动.

Example 1.5 (直线). 平面曲线 $\gamma(t) = (2 + 3t, 4 - t), t \in (-\infty, \infty)$ 具有线性的分量函数, 故而其轨迹为直线.

Definition 1.6. 若 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为曲线, 可表为 $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$, 则它的导数 $\gamma': I \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为定义为 $\gamma'(t) = (x'_1(t), x'_2(t), \dots, x'_n(t))$ 的曲线. 高阶导数可类似地定义.

例如, 空间曲线 $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ 有一阶导数 $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$, 二阶导数 $\gamma''(t) = (x''(t), y''(t), z''(t))$, 如此类推. 以下为等价定义.

Proposition 1.7. 曲线 $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ 在时间 $t \in I$ 处的导数由如下公式给出:

$$\gamma'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}$$

若 t 为 I 的端点, 那么此极限转为左极限或者右极限.

此公式看起来和微积分中的导数公式很像, 但是是不同的. 注意到右边的分子涉及两个向量之间的减法. 直观上来说, $\gamma(t+h) - \gamma(t)$ 为从 $\gamma(t)$ 指向 $\gamma(t+h)$ 的向量. 此向量除 h 后的大小逼近物体运动的速度, 方向逼近物体运动的方向. 所以, 若 $\gamma'(t)$ 被画为以 $\gamma(t)$ 为起始点的向量, 那么它将和物体的运动轨迹相切, 长度等于物体的速度. 因此, 以如下的方式定义速度和弧长是合适的:

Definition 1.8. 曲线 $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ 在时刻 t 处的速度是 $|\gamma'(t)|$. 在时刻 t_1 和 t_2 之间的弧长是 $\int_{t_1}^{t_2} |\gamma'(t)| dt$.

上述定义中的竖线指代向量的长度 (又称范数), 定义为

$$|(x_1, x_2, \dots, x_n)| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

Definition 1.9. 假设 $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为曲线, 则若它的速度恒不为零 ($|\gamma'(t)| \neq 0, \forall t \in I$), 则称它是正则的. 称它是单位速的或者是弧长参数化的若它的速度恒为 1 ($|\gamma'(t)| = 1, \forall t \in I$)

术语“弧长参数化”是很贴切的, 因为对这样的曲线, 时刻 t_1 与 t_2 间的弧长等于 $\int_{t_1}^{t_2} |\gamma'(t)| dt = \int_{t_1}^{t_2} 1 dt = t_2 - t_1$.

Example 1.10 (一个非正则平面曲线). 函数 $\gamma(t) = (t^3, t^2), t \in (-\infty, \infty)$ 为平面曲线. 它的分量函数为 $x(t) = t^3, y(t) = t^2$, 满足方程 $y(t) = x(t)^{2/3}, \forall t$. 因此, γ 描述了一个沿着 $y = x^{2/3}$ 的图像的物体的运动, 而且能够将此函数图像上的点全部取到. 分量函数是光滑的, 所以函数在原点处有一个尖锐的端点也许是出人意料的. 这是可能的, 因为 $|\gamma'(0)| = 0$, 故而 γ 不是正则的.

命题1.7中的定义仅仅在 γ 是正则曲线时是有效的. 此时, 曲线上没有尖角, 且将图像放得足够大时, 物体的运动轨迹就像是一条直线, $\gamma'(t)$ 给出了那条直线的方向. 如果在 t_0 时及以后物体所受的所有作用力全部消失, 那么它将沿着过 $\gamma(t_0)$ 点的直线向 $\gamma'(t_0)$ 的方向做匀速运动, 那么 h 秒后, 物体所处的位置为 $\gamma(t_0) + h\gamma'(t_0)$. 但是因为力是不会突变的, 所以此式仅仅为近似:

$$(1.1) \quad \gamma(t_0 + h) \approx \gamma(t_0) + h\gamma'(t_0).$$

物理学家将 $\gamma'(t_0)$ 称为 t_0 时的速度向量因为它表征运动的方向和速度. 它们把 $\gamma''(t_0)$ 称为 t_0 时的加速度向量. 在以下的小节中我们会探讨“加速度”这一名称的恰当性.

1.2 内积 (线性代数背景)

这一小节复习一些关于内积, 投影和正交基的基本知识.

Definition 1.11. 假设 \mathbf{x}, \mathbf{y} 是向量, 可用分量表示为 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, 则它们的内积为

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \in \mathbb{R}$$

Lemma 1.12 (内积的代数性质). 若 $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, 那么

- (1) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$ (对称性);
- (2) $\langle \lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \mu \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle, \langle \mathbf{x}, \lambda \mathbf{y} + \mu \mathbf{z} \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \mu \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle$ (双线性性);
- (3) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = |\mathbf{x}|^2$, 当且仅当 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 时 $|\mathbf{x}|^2 = 0$;
- (4) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \leq |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq |\mathbf{x}| |\mathbf{y}|$ (施瓦茨不等式).

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ 的几何意义涉及 \mathbf{x} 和 \mathbf{y} 之间的夹角 $\theta \in [0, \pi]$:

$$(1.2) \quad \boxed{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = |\mathbf{x}| |\mathbf{y}| \cos \theta}$$

在 $n = 2$ 的情形下, 利用余弦定理该公式很容易证明. 对于一般的 n 值, 我们可以将此公式作为角度的定义; 也就是说, 非零向量 \mathbf{x} 和 \mathbf{y} 之间的夹角定义为:

$$\angle(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \cos^{-1} \left(\frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{|\mathbf{x}| |\mathbf{y}|} \right) \in [0, \pi].$$

\mathbf{x}, \mathbf{y} 称为正交的若 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$. 它们是平行的若其中一个是另外一个的标量积. 假设 \mathbf{x}, \mathbf{y} 是非零向量, 则正交意味着 $\theta = \pi/2$, 平行意味着 $\theta = 0$ 或 $\theta = \pi$. 另外, 零向量与每个其他向量都是同时平行和正交的.

内积的计算只涉及加法和乘法运算, 但是它能够用来计算需要三角性质的某些几何性质. 尤其是, 内积在计算分量和投影时很好用, 定义如下:

Definition and Proposition 1.13. 若 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, 其中 $|\mathbf{y}| \neq 0$, 则 \mathbf{x} 存在唯一的分解:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^{\parallel} + \mathbf{x}^{\perp},$$

上式右边的第一项与 \mathbf{y} 平行, 第二项与 \mathbf{y} 正交. 向量 \mathbf{x}^{\parallel} 称为 \mathbf{x} 在 \mathbf{y} 方向上的投影, \mathbf{x}^{\parallel} 的有向长度 (指的是使 $\mathbf{x}^{\parallel} = \lambda \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|}$ 成立的标量 $\lambda \in \mathbb{R}$) 称为 \mathbf{x} 在 \mathbf{y} 方向上的分量.

Proof. 我们得说明存在唯一的 λ 使得若我们定义

$$\mathbf{x}^{\parallel} = \lambda \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|}, \mathbf{x}^{\perp} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^{\parallel},$$

则 \mathbf{x}^{\perp} 是和 \mathbf{y} 正交的. 也就是说, 我们得解下面的方程:

$$0 = \langle \mathbf{x}^{\perp}, \mathbf{y} \rangle = \left\langle \mathbf{x} - \frac{\lambda}{|\mathbf{y}|} \mathbf{y}, \mathbf{y} \right\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle - \frac{\lambda}{|\mathbf{y}|} \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle - \lambda |\mathbf{y}|.$$

$$\text{解为 } \lambda = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{|\mathbf{y}|}.$$

□

以下公式可以利用上述证明过程推出.

(1.3)

$$\text{分量} = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{|\mathbf{y}|} = \underbrace{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}_{\text{if } |\mathbf{y}|=1}, \quad \text{投影} = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{|\mathbf{y}|^2} \mathbf{y} = \underbrace{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \mathbf{y}}_{\text{if } |\mathbf{y}|=1}$$

一个向量 \mathbf{x} 到一组向量中的每个向量的方向上的投影常常是有必要的. 为使这么做有意义, 此向量的集合必须是正交的:

集合 $Y = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ 是规范正交的若 Y 中的每一个向量都是单位长度的, 且 Y 中任意两个不同的向量都是正交的; 也就是说,

$$(1.4) \quad \text{对任意 } i, j \in \{1, \dots, k\}, \langle \mathbf{y}_i, \mathbf{y}_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{若 } i = j \\ 0 & \text{若 } i \neq j \end{cases}$$

每个正规正交的集合都是线性独立的. 所以若在上面的定义中 $k = n$, 那么 Y 是一个基, 且必为 \mathbb{R}^n 的一个规范正交基.

即使 $k < n$, Y 也是它所张成的空间的一个规范正交基. 因此, 每个 $\mathbf{x} \in \text{span}(Y)$ 都能够写作唯一的线性组合 $\mathbf{x} = a_1 \mathbf{y}_1 + a_2 \mathbf{y}_2 + \dots + a_k \mathbf{y}_k$, 其中 $a_i \in \mathbb{R}$. 对每个 i , \mathbf{x} 在 \mathbf{y}_i 方向上的分量等于系数 a_i , 因为

$$\text{分量} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_i \rangle = \underbrace{\langle a_1 \mathbf{y}_1 + \dots + a_k \mathbf{y}_k \rangle}_{\text{由式(1.4)及双线性性得}} = a_i$$

这恰是规范正交基的优点: 用来以线性组合的形式表示 \mathbf{x} 的系数恰恰就是 \mathbf{x} 在基向量方向上的分量, 可以用内积进行运算.

Definition and Proposition 1.14. 若 $\mathcal{V} \in \mathbb{R}^n$ 为 \mathbb{R}^n 的子空间, 且 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, 那么 \mathbf{x} 可唯一地写为两个向量之和:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^{\parallel} + \mathbf{x}^{\perp},$$

上式右边第一项属于 \mathcal{V} , 第二项与 \mathcal{V} 中的每个向量都是正交的. 第一项 \mathbf{x}^{\parallel} 称为 \mathbf{x} 在 \mathcal{V} 上的投影. 若 $Y = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_k\}$ 是 \mathcal{V} 的规范正交基, 则 \mathbf{x}^{\parallel} 可以使用下式计算:

$$\mathbf{x}^{\parallel} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_1 \rangle \mathbf{y}_1 + \dots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_k \rangle \mathbf{y}_k.$$

注意这个线性组合的系数是 \mathbf{x} 的在 Y 中的向量上的分量.

Proof. 假设 $Y = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_k\}$ 为 \mathcal{V} 的规范正交基. 我们要证明存在唯一的标量组 $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ 使得若我们定义 $\mathbf{x}^{\parallel} = a_1 \mathbf{y}_1 + a_2 \mathbf{y}_2 + \dots + a_k \mathbf{y}_k$, $\mathbf{x}^{\perp} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^{\parallel}$, 那么 \mathbf{x}^{\perp} 与 \mathcal{V} 中的每个向量是正交的. 由于内积的双线性性, 这等价于说明 \mathbf{x}^{\perp} 和 \mathcal{V} 的正交基 Y 中的每个向量都是正交的. 所以我们必须选择使得对每个 i 下式都成立:

$$0 = \langle \mathbf{x}^{\perp}, \mathbf{y}_i \rangle = \underbrace{\langle \mathbf{x} - a_1 \mathbf{y}_1 - a_2 \mathbf{y}_2 - \dots - a_k \mathbf{y}_k, \mathbf{y}_i \rangle}_{\text{由双线性性和式(1.4)}} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_i \rangle - a_i.$$

如上所说, 那个唯一的解为 $a_i = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_i \rangle, i = \{1, 2, \dots, k\}$. □

我们定义两种投影间有如下关系: \mathbf{x} 在向量 \mathbf{y} 方向上的投影 (定义1.13) 等于向量 \mathbf{x} 在由 \mathbf{y} 张成的一维空间上的投影 (定义1.14).

Example 1.15. \mathbb{R}^n 的标准正交基是

$$\{\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, 1)\}$$

例如, \mathbb{R}^3 的标准正交基是

$$\{\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0), \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)\}$$

$\mathbf{v} = (5, 19, -3) \in \mathbb{R}^3$ 在 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 方向上的分量分别是 $\langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_1 \rangle = 5, \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_2 \rangle = 19, \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_3 \rangle = -3$. 这说明了之前我们对“分量”一词的不严谨的使用与定义1.13是一致的. 更进一步, \mathbf{v} 到 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ 张成的空间上的投影等于 $\langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_2 \rangle \mathbf{e}_2 = (5, 19, 0)$.

我们把注意力转回曲线. 我们现在复习内积和标量乘法的规律:

Lemma 1.16. 若 $\gamma, \beta: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为曲线, $c: I \rightarrow \mathbb{R}$ 为光滑函数, 那么:

$$(1) \quad \frac{d}{dt} \langle \gamma(t), \beta(t) \rangle = \langle \gamma'(t), \beta(t) \rangle + \langle \gamma(t), \beta'(t) \rangle.$$

$$(2) \quad \frac{d}{dt}(c(t)\gamma(t)) = c'(t)\gamma(t) + c(t)\gamma'(t).$$

规律 (1) 对理解保持正交性的两个曲线的导数有帮助:

Proposition 1.17. 令 $\gamma, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为曲线.

(1) 若 γ 的范数为常数 (即, $|\gamma(t)| = C$ 对任意的 $t \in I$ 成立), 那么对任意的 $t \in I$, $\gamma'(t)$ 是与 $\gamma(t)$ 正交的.

(2) 若 $\gamma(t)$ 与 $\beta(t)$ 正交对任意 $t \in I$ 成立, 那么

$$\langle \gamma'(t), \beta(t) \rangle = -\langle \gamma(t), \beta'(t) \rangle \text{ 对任意的 } t \in I \text{ 成立.}$$

注意到 (1) 和 (2) 中的假设都是正确的若 $\{\gamma(t), \beta(t)\}$ 对任意 $t \in I$ 都是规范正交的.

Proof. 对第 (1) 部分, 因为表达式 $\langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle = |\gamma(t)|^2 = C^2$ 为常数, 此表达式的导数必定为零:

$$0 = \frac{d}{dt} \langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle = \langle \gamma'(t), \gamma(t) \rangle + \langle \gamma(t), \gamma'(t) \rangle = 2 \langle \gamma(t), \gamma'(t) \rangle.$$

因此, $\langle \gamma(t), \gamma'(t) \rangle = 0$, 这意味着这些向量是正交的.

对第 (2) 部分, 由于 $\langle \gamma(t), \beta(t) \rangle = 0$ 是常数, 此表达式的导数为零:

$$0 = \frac{d}{dt} \langle \gamma(t), \beta(t) \rangle = \langle \gamma'(t), \beta(t) \rangle + \langle \gamma(t), \beta'(t) \rangle.$$

□

Proposition 1.18. 若 $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是速度为常值的曲线, 那么对任意的 $t \in I$, $\gamma'(t)$ 和 $\gamma''(t)$ 都是正交的.

Proof. 因为速度 $|\gamma'(t)|$ 是常值, 由命题 1.17 的第一部分可得 $\gamma'(t)$ 处处与它的导数即 $\gamma''(t)$ 正交. □

尽管标准正交基看起来是很自然的, 但是往往根据问题来选择基是更方便的.

Example 1.19 (两点间的最短路径). 令 $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为曲线. 定义 $\mathbf{p} = \gamma(a), \mathbf{q} = \gamma(b)$, 令 L 为 γ 的弧长. 由于两点间的直线具有长度 $|\mathbf{q} - \mathbf{p}|$, 我们只需证明 $L \geq |\mathbf{q} - \mathbf{p}|$.

作为热身, 我们先考虑 $n = 2, \mathbf{p} = (0, 0), \mathbf{q} = (5, 0)$ 的特殊情形. 记 $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, 可得

$$L = \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \geq \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + 0} dt$$

$$= \int_a^b |x'(t)| dt \geq \int_a^b x'(t) dt = x(b) - x(a) = 5 - 0 = 5.$$

直观上来看, 以上的等式说明其他路径的长度大于等于水平路径长度.

对于一般的情形, “水平” 将被替换为单位向量 $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{q} - \mathbf{p}}{|\mathbf{q} - \mathbf{p}|}$. 此转换在运算上可以如下方式获得:

$$\begin{aligned} L &= \underbrace{\int_a^b |\gamma'(t)| dt}_{\text{Schwarz 不等式}} \geq \int_a^b \langle \gamma'(t), \mathbf{n} \rangle dt = \int_a^b \frac{d}{dt} \langle \gamma(t), \mathbf{n} \rangle dt \\ &= \langle \gamma(b), \mathbf{n} \rangle - \langle \gamma(a), \mathbf{n} \rangle = \langle \gamma(b) - \gamma(a), \mathbf{n} \rangle = \left\langle \mathbf{q} - \mathbf{p}, \frac{\mathbf{q} - \mathbf{p}}{|\mathbf{q} - \mathbf{p}|} \right\rangle = |\mathbf{q} - \mathbf{p}|. \end{aligned}$$

之前的小例中 $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1 = (1, 0)$.

1.3 加速度

在这一小节, 我们将正则曲线的二阶导数作为加速度来研究.

假设 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为正则曲线. 我们将使用以下从物理中流传出来的说法:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{v}(t) = \gamma'(t) & \text{速度向量} \\ \mathbf{a}(t) = \gamma''(t) & \text{加速度向量} \end{array}$$

我们已经知道术语“速度”是恰当的, 因为 $\mathbf{v}(t)$ 表征了物体运动的方向和速率.

那么为何“加速度”是恰当的, 如何说明它的意义?

物理中“加速度”的概念源自于牛顿定律:

$$\mathbf{F}(t) = m\mathbf{a}(t)$$

其中 m 为物体质量, $\mathbf{F}(t)$ 表示 t 时刻作用在物体上的力. 为简单起见, 假设 $m = 1$. 此时若我们把向量 $\mathbf{a}(t)$ 的起始点设为 $\gamma(t)$, 那么它就可以看作是作用在物体上的使得物体沿轨迹运动的力.

牛顿定律不需要被证明或实验验证, 因为那就是力的定义. 然而, 我们能够让我们的说法更加严谨. 之前的讨论提示我们可以将 $\mathbf{a}(t)$ 沿 $\mathbf{v}(t)$ 做正交分解:

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}^{\parallel}(t) + \mathbf{a}^{\perp}(t)$$

Proposition 1.20. $\frac{d}{dt} |\mathbf{v}(t)| = \frac{\langle \mathbf{a}(t), \mathbf{v}(t) \rangle}{|\mathbf{v}(t)|} = (\mathbf{a}(t) \text{ 在 } \mathbf{v}(t) \text{ 方向上的分量}).$

Proof.

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} |\mathbf{v}(t)| &= \frac{d}{dt} \langle \mathbf{v}(t), \mathbf{v}(t) \rangle^{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{1}{2} \langle \mathbf{v}(t), \mathbf{v}(t) \rangle^{-\frac{1}{2}} (\langle \mathbf{v}'(t), \mathbf{v}(t) \rangle + \langle \mathbf{v}(t), \mathbf{v}'(t) \rangle) \\
 &= \frac{2 \langle \mathbf{v}'(t), \mathbf{v}(t) \rangle}{2 \langle \mathbf{v}(t), \mathbf{v}(t) \rangle^{\frac{1}{2}}} = \frac{\langle \mathbf{a}(t), \mathbf{v}(t) \rangle}{|\mathbf{v}(t)|}.
 \end{aligned}$$

□

其中 $\mathbf{a}^{\parallel}(t)$ 表征物体运动的速度大小变化, $\mathbf{a}^{\perp}(t)$ 表征物体运动的方向变化.

1.4 重参数化

当正则曲线 $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ 表示一个移动物体的位置函数的时候, 它的图像 $\gamma(I) = \{\gamma(t) | t \in I\}$ 表示物体运动的所沿的路径. 此图像称为 γ 的轨迹 (像集). 若此物体是飞机, 则它的尾部留下的烟雾可以看作轨迹. 注意到 γ 是个函数, 且它的轨迹为 \mathbb{R}^n 的一个子集. 轨迹不含任何时间信息.

在多数情况下, 我们只考虑轨迹. 例如, 我们在下一节的目标为 γ 的轨迹在各点处的曲率. 我们希望这个量在重参数化下是不变的.

Example 1.21. 考虑如下的两个正则的平面曲线:

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= (t, t^2), t \in [-2, 2], \\ \tilde{\gamma}(t) &= (2t, (2t)^2), t \in [-1, 1].\end{aligned}$$

它们的轨迹是相同的, 都是抛物线的一部分. 定义 $\phi : [-1, 1] \rightarrow [-2, 2]$ 为 $\phi(t) = 2t$, 注意到

$$\tilde{\gamma}(t) = \gamma(\phi(t)) = (\gamma \circ \phi)(t).$$

因此我们将 $\tilde{\gamma}$ 称为 γ 的一个重参数化, 且我们将 γ 和 $\tilde{\gamma}$ 看作是相同轨迹的两个参数表示.

Definition 1.22. 假设 $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为正则曲线. γ 的一个重参数化是指具有形式 $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \phi : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$, 其中 \tilde{I} 是区间且 $\phi : \tilde{I} \rightarrow I$ 是个光滑的导数处处不为零的双射.

ϕ 的导数不能为零的限制保证了 $\tilde{\gamma}$ 本身是一个正则的曲线:

$$(1.5) \quad \tilde{\gamma}'(t) = \phi'(t)\gamma'(\phi(t)) \neq \mathbf{0}(\text{零向量})$$

由 ϕ 的连续性及其导数处处不为零的假设可知 ϕ 要么是单调递增的要么是单调递减的, 所以可以做出如下的定义:

Definition 1.23. 在定义1.22中, $\tilde{\gamma}$ 是保定向的若 $\phi' > 0$, 是反定向的若 $\phi' < 0$.

定向大致意为遍历曲线轨迹的方向的选择. 例如, 阿拉巴契亚国家步道的定向是选择由北向南还是由南向北走遍它. 定义1.23决定了此选择是被保留下来还是改掉了.

Example 1.24. 函数 $\tilde{\gamma}(t) = (-t, (-t)^2), t \in [-2, 2]$ 是个例1.21中 γ 的反定向的重参数化. 它沿反方向走过那段抛物线 (从右到左).

更一般的, 若 $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是个正则曲线, 则 $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(-t), t \in \{-s | s \in I\}$, 为 γ 的反定向重参数化.

弧长参数化的曲线特别容易计算. 原则上, 有可能以单位速走遍每个曲线.

Proposition 1.25. 正则曲线 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ 能够被重参数化为弧长参数化的. 也就是说, γ 的弧长参数化的重参数化是存在的.

Proof. 选定 $t_0 \in I$, 考虑弧长函数 $s: I \rightarrow \mathbb{R}$, 定义如下:

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\gamma'(u)| du.$$

令 $\tilde{I} \subset \mathbb{R}$ 表示 s 的像集. 由微积分基本定理, $s'(t) = |\gamma'(t)| \neq 0$, 从此可看出 s 是具有处处不为零的导函数的到 \tilde{I} 上的光滑双射. 因此 s 有反函数 $\phi: \tilde{I} \rightarrow I$, 是个具有处处不为零的导数的光滑双射.

注意到 $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \phi: \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ 的构造的要求是要弧长参数化的. 因为 s 将时间转化为弧长, 所以它的反函数 ϕ 将弧长转化为时间. 所以 $\gamma(\phi(t))$ 是弧长取到 t 时物体的位置, 故而它是弧长参数化的. 如果要严谨计算的话:

$$|\tilde{\gamma}'(t)| = |\phi'(t)\gamma'(\phi(t))| = \phi'(t)|\gamma'(\phi(t))| = \frac{1}{s'(\phi(t))}|\gamma'(\phi(t))| = 1.$$

□

以上的证明提供了一个清晰的弧长重参数化曲线的方法; 然而, 实践中此方法常常在运算上并不可行. 因此, 命题 1.25 的理论意义大于运算意义. 我们几乎不把它用于运算, 但是这个证明我们可以在以后的证明中加入一句话: “不失一般性, 我们假设正则曲线都是弧长参数化的.”

我们得对重参数化的定义做一些微小的改动, 来适应一类非常重要的正则曲线. 这类曲线有一个特征: 起止点重合, 以此形成了一个光滑闭合回路:

Definition 1.26. 闭曲线意为具有形式 $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ 的正则曲线, 满足:

$$\gamma(a) = \gamma(b), \gamma'(a) = \gamma'(b), \gamma''(a) = \gamma''(b), \text{ 以此类推.}$$

此外, 若 γ 在 $[a, b]$ 上是一一映射, 那么它就是简单闭曲线.

最自然的简单闭曲线的例子是圆 $\gamma(t) = (\cos t, \sin t), t \in [0, 2\pi]$. 这恰恰是例 1.2 中的正则曲线在 $[0, 2\pi]$ 上的限制, 该曲线虽有较大的定义域 \mathbb{R} 却用相同方程表示; 它周期为 2π , 沿着该圆走了无数圈. 更一般的, 每个闭曲线都能够以此方式扩张:

Proposition 1.27. 正则曲线 $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为闭曲线去当且仅当有个周期为 $b - a$ 的正则曲线 $\hat{\gamma}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ 使得 $\hat{\gamma}(t) = \gamma(t), \forall t \in [a, b]$.

此命题的证明留作练习.

必须修改重参数化的定义的理由有两个. 首先, 我们希望每个闭曲线的重参数化都是闭曲线. 根据式(1.5), 这将要求 ϕ 的导数在边界处能够对应相等. 其次, 允许重参数化有不同的起止点是自然的. 最简单的改变闭曲线 $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ 的起止点的方法如下. 令 $\hat{\gamma}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ 表示 γ 的周期延拓, 其存在性由命题1.27保证. 对于 $\lambda \in \mathbb{R}$, 构造 γ_λ 为 $\hat{\gamma}$ 在 $[a + \lambda, b + \lambda]$ 上的限制. 则 γ_λ 为轨迹与 γ 相同但是起止点不同的闭曲线. 我们希望修改定义使得 γ_λ 也是 γ 的重参数化. 故而以下定义会在闭曲线的情形下取代定义1.22:

Definition 1.28. 令 $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为闭曲线. γ 的重参数化是具有形式 $\tilde{\gamma} = \gamma_\lambda \circ \phi: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$, 其中 $\lambda \in \mathbb{R}, \phi: [c, d] \rightarrow [a + \lambda, b + \lambda]$ 为导数处处不为零的光滑双射, 各阶导数在 c, d 处对应相等; 也就是说, $\phi'(c) = \phi'(d), \phi''(c) = \phi''(d)$, 以此类推.

如上文所提, 在 c, d 点 ϕ 的导数对应相等的要求确保了闭曲线的每个重参数化都是闭曲线. 修改后的闭曲线的重参数化的定义也能够导出如下结论:

Proposition 1.29. 两个简单闭曲线由相同的轨迹当且仅当一个是另一个的重参数化.

此结论对于非简单闭曲线是错误的. 例如, 沿单位圆绕一圈的闭曲线不是沿单位圆绕两圈的闭曲线的重参数化—它们甚至具有相同的轨迹.

尽管我们仍旧使用“曲线”作为“参数化曲线”的简称, 我们必须说明一些其他的书籍将“曲线”定义为参数化曲线的等价类, 等价关系由重参数化决定—如果某个曲线是另外一个曲线的重参数化, 那么这两个曲线是等价的. 在后者的定义下, “曲线”指的不仅仅是轨迹, 还有沿着轨迹绕了几圈.

1.5 曲率

令 $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为正则曲线. 在这个小节, 我们将定义和研究它的曲率函数 $\kappa : I \rightarrow [0, \infty)$. 对于 $t \in I$, $\kappa(t)$ 的值能够衡量 γ 的轨迹通过 $\gamma(t)$ 时的弯曲程度. 曲线的弯曲程度大时曲率值也会很大, 局部下接近直线时逼近于 0. 为将这样的度量标准化, 我们将它和 \mathbb{R}^2 中的圆比较, 较大的圆具有较小的曲率. 更准确地说, 若在 $\gamma(t)$ 处的轨迹的弯曲程度逼近半径为 r 的圆, 那么 $\kappa(t) = \frac{1}{r}$.

为保证我们的曲率度量值仅仅取决于通过的路径 (而不受通过的速度影响), 函数 κ 必须由与参数表示无关的公式来定义; 这意味着若 $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \phi$ 为 γ 的一个重参数化 (如定义 1.22 所言), $\tilde{\kappa}$ 是它的曲率函数, 那么我们能够得到

$$\tilde{\kappa} = \kappa \circ \phi.$$

这说明这两种参数化在轨迹上的相同位置处的曲率是相等的.

像之前一样定义 $\mathbf{v}(t) = \gamma'(t)$, $\mathbf{a}(t) = \gamma''(t)$. 直接将 $\kappa(t)$ 定义为 $|\mathbf{a}^\perp(t)|$ 不是行之有效的办法, 因为此定义产生的值会受到参数表示的影响. 我们在第 3 节的末尾就已经遇到了这个问题, 当时我们已经提到了 $|\mathbf{a}^\perp(t)|$ 的值不仅受到路径的弯曲程度的影响, 也受到物体的速度影响, 所以“快”的参数表示会让这个值变大. 我们可以量化这里的依赖性. 令 $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \phi$ 为 γ 的一个重参数化, 它的速度和加速度函数也分别记为 $\tilde{\mathbf{v}}(t)$ 和 $\tilde{\mathbf{a}}(t)$. 由式 (1.5) 中的链式法则以及乘积满足规律 (引理 1.16(2)) 可得

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{v}}(t) &= \phi'(t)\mathbf{v}(\phi(t)), \\ \tilde{\mathbf{a}}(t) &= \phi''(t)\mathbf{v}(\phi(t)) + \phi'(t)^2\mathbf{a}(\phi(t)), \\ \tilde{\mathbf{a}}^\perp(t) &= 0 + \phi'(t)^2\mathbf{a}^\perp(\phi(t)).\end{aligned}$$

省略输入的参量, 我们可以将上式总结为

$$\tilde{\mathbf{v}} = (\phi')\mathbf{v} \quad \text{且} \quad \tilde{\mathbf{a}}^\perp = (\phi')^2\mathbf{a}^\perp.$$

所以重参数化将会把 \mathbf{v} 依因子 (ϕ') 放缩, 把 \mathbf{a}^\perp 依因子 $(\phi')^2$ 放缩. 因此量 $\frac{|\mathbf{a}^\perp|}{|\mathbf{v}|^2}$ 不受重参数化影响; 也就是说,

$$(1.6) \quad \frac{|\tilde{\mathbf{a}}^\perp(t)|}{|\tilde{\mathbf{v}}(t)|^2} = \frac{|\mathbf{a}^\perp(\phi(t))|}{|\mathbf{v}(\phi(t))|^2}.$$

我们因此如下定义曲率函数:

Definition 1.30. 令 $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为正则曲线. 它的曲率函数 $\kappa : I \rightarrow [0, \infty)$ 定义为

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{a}^\perp(t)|}{|\mathbf{v}(t)|^2}.$$

式(1.6)保证了 $\tilde{\kappa} = \kappa \circ \phi$, 所以曲率函数如同期望的那样是与参数表示无关的. 因此, $\kappa(t)$ 仅仅取决于 γ 限制在 $t \in I$ 的一个小区间上的轨迹.

求解 $|\mathbf{a}^\perp(t)|$ 得出结论 $|\mathbf{a}^\perp(t)| = \kappa(t) \cdot |\mathbf{v}(t)|^2$, 这把第 3 节中的 $|\mathbf{a}^\perp(t)|$ 会随着速度提升和轨迹弯曲程度增大而增大量化地表现了出来.

因为曲率与参数表示无关, 所以选取一个单位速的重参数化在计算的化简中常常是很有用的.

Proposition 1.31. 若 γ 是弧长参数化的, 则 $\kappa(t) = |\mathbf{a}(t)|$.

Proof. 由命题 1.18, $\mathbf{a}(t)$ 是正交于 $\mathbf{v}(t)$ 的. 这意味着 $\mathbf{a}^\perp(t) = \mathbf{a}(t)$, 且有 $\kappa(t) = \frac{|\mathbf{a}^\perp(t)|}{|\mathbf{v}(t)|^2} = \frac{|\mathbf{a}(t)|}{1}$. \square

命题 1.31 说明了单位速曲线 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ 的一个很美妙的几何意义. 若它的每个速度向量都以原点为起始点画在坐标图中, 那么 $t \mapsto \mathbf{v}(t)$ 就可看作在 $n-1$ 维球面上的路径,

$$S^{n-1} = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \mid |\mathbf{p}| = 1\} = \mathbb{R}^n \text{ 中所有的单位向量构成的集合.}$$

Example 1.32. 平面曲线 $\gamma(t) = (r \cos(t), r \sin(t)), t \in [0, 2\pi]$, 将半径为 r 的圆参数化了. 速度函数和加速度函数是

$$\mathbf{v}(t) = (-r \sin(t), r \cos(t)), \mathbf{a}(t) = (-r \cos(t), -r \sin(t)).$$

注意到 $\mathbf{a}(t) = -\gamma(t)$, 与做圆周运动的物体必须受到指向圆心的力的物理事实是一致的. 因为 $\langle \mathbf{a}(t), \mathbf{v}(t) \rangle = 0$, 我们有 $\mathbf{a}^\perp(t) = \mathbf{a}(t)$, 所以

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{a}^\perp(t)|}{|\mathbf{v}(t)|^2} = \frac{|\mathbf{a}(t)|}{|\mathbf{v}(t)|^2} = \frac{r}{r^2} = \frac{1}{r}.$$

这说明我们的定义和上文曲率逼近于接近的圆的半径的倒数是一致的.

因为正交向量组处理起来很容易, 所以我们做了如下定义:

Definition 1.33. 令 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为正则曲线. 定义 $t \in I$ 处的单位切向量和单位法向量为

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\mathbf{v}(t)}{|\mathbf{v}(t)|}, \mathbf{n}(t) = \underbrace{\frac{\mathbf{a}^\perp(t)}{|\mathbf{a}^\perp(t)|}}_{\text{仅在 } \kappa \neq 0 \text{ 时有意义}}.$$

只要不会引起歧义, 我们都将会省略自变量 t 而只写 \mathbf{t}, \mathbf{n} . 由我们的构造, $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}\}$ 是正交的.

为使此概念扩展到任意速度的情况, 我们首先应注意到 $t \mapsto \mathbf{t}(t)$ 能够直观地理解为记录物体的移动方向的 S^{n-1} 上的路径. 此路径的导数 (物体移动方向变化快慢) 以如下方式与曲率联系起来:

Proposition 1.34. 若 $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是正则曲线 (不要求单位速的), 那么任意 $t \in I, \kappa(t) = \frac{|\mathbf{t}'(t)|}{|\mathbf{v}(t)|}$.

Proof. 由命题1.17, $\mathbf{t}' \perp \mathbf{t}$, 因此

$$\mathbf{a} = \mathbf{v}' = (|\mathbf{v}|\mathbf{t})' = \underbrace{|\mathbf{v}|'\mathbf{t}}_{\mathbf{a}^{\parallel}} + \underbrace{|\mathbf{v}|\mathbf{t}'}_{\mathbf{a}^{\perp}}.$$

$$\text{所以, } \kappa = \frac{\mathbf{a}^{\perp}}{|\mathbf{v}|^2} = \frac{|\mathbf{v}|\mathbf{t}'}{|\mathbf{v}|^2} = \frac{|\mathbf{t}'|}{|\mathbf{v}|}.$$

□

因此, 曲率等于运动方向变化快慢除以物体的运动速度, 而且这个量与曲线的重参数化是无关的. 上面的证明说明 $\mathbf{a}^{\parallel} = |\mathbf{v}|\mathbf{t}'$, 为命题1.20的一个简单表示. 这也说明 $\mathbf{a}^{\perp} = |\mathbf{v}|\mathbf{t}'$. 尤其是, \mathbf{a}^{\perp} 和 \mathbf{t}' 指向同一个方向, 所以以下两个 \mathbf{n} 的特征是一致的, 而且两种可能表示都是和 \mathbf{n} 为曲线转向的方向的思想是一致的:

$$(1.7) \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{a}^{\perp}}{|\mathbf{a}^{\perp}|} = \frac{\mathbf{t}'}{|\mathbf{t}'|}$$

Proposition 1.35.

若 $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是正则的 (不要求单位速的), 则任意 $\kappa \neq 0$ 的时刻都有 $\boxed{\mathbf{t}' = \kappa|\mathbf{v}|\mathbf{n}}$. 则有

$$\underbrace{-\langle \mathbf{n}', \mathbf{t} \rangle = \langle \mathbf{t}', \mathbf{n} \rangle}_{\text{由命题1.17}} = \kappa|\mathbf{v}|.$$

Example 1.36 (图像的临界点处的曲率).

令 $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ 为在 $t_0 \in I$ 处有一个临界点的光滑函数, 也就是说, $f'(t_0) = 0$. 如例1.4所说, f 的图像的一个自然的参数化是 $\gamma(t) = (t, f(t)), t \in I$. 注意到 $\mathbf{v}(t) = (1, f'(t)), \mathbf{a}(t) = (0, f''(t))$. 则有 $\mathbf{v}(t_0) = (1, 0), \mathbf{a}(t_0) = (0, f''(t_0))$ 是正交的, 所以 $\mathbf{a}^{\perp}(t_0) = \mathbf{a}(t_0)$. 因此,

$$\kappa(t_0) = \frac{|\mathbf{a}(t_0)|}{|\mathbf{v}(t_0)|^2} = |f''(t_0)|.$$

总之, 在临界点处, 曲率 = |弯曲程度|.

上面的例子中的结论仅仅对图像的临界点有效, 但是如果将图像旋转以下让 \mathbf{t} 来到水平位置, 那么任意一点都与临界点是相似的. 或者更一般地, 我们现在就会把结论一般化到 \mathbb{R}^n 中的曲线上的每一点.

为对此一般化过程做解释, 此小节中的剩余部分我们做如下假设: $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为单位速曲线, $t_0 \in I, \kappa(t_0) \neq 0$. γ 在时刻 t_0 时的 (与分量相关的) 二阶泰勒多项式¹

$$\begin{aligned}\gamma(t_0 + h) &\approx \gamma(t_0) + h\gamma'(t_0) + \frac{h^2}{2}\gamma''(t_0) \\ &= \gamma(t_0) + \textcolor{teal}{h}\mathbf{t} + \frac{\textcolor{violet}{\kappa}h^2}{2}\mathbf{n},\end{aligned}$$

其中 $\mathbf{t} = \mathbf{t}(t_0), \mathbf{n} = \mathbf{n}(t_0)$. 因此, 位移向量 $\mathbf{D}(h) = \gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)$ 的在 \mathbf{t} 和 \mathbf{n} 方向的分量的二阶泰勒多项式为

$$\begin{aligned}x(h) &= \langle \mathbf{D}(h), \mathbf{t} \rangle \approx \textcolor{teal}{h}, \\ y(h) &= \langle \mathbf{D}(h), \mathbf{n} \rangle \approx \frac{\textcolor{violet}{\kappa}h^2}{2}.\end{aligned}$$

此外, 若 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ 为与 \mathbf{n} 和 \mathbf{t} 都正交的单位向量, 则 \mathbf{D} 的在 \mathbf{b} 方向的分量的二阶泰勒多项式为

$$\langle \mathbf{D}(h), \mathbf{b} \rangle \approx 0.$$

上面每个含有 “ \approx ” 符号的等式都是二阶泰勒展开式, 所以式子的左边和右边会有偏差, 记为误差函数 $E(h)$, 则有 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|E(h)|}{h^2} = 0$.

记号 $x(h)$ 和 $y(h)$ 是恰当的, 若将图像平移旋转使得 $\text{span}\{\mathbf{t}, \mathbf{n}\}$ 为原点在 $\gamma(t_0)$ 的 xy -平面. 在此视角下, γ 在 t_0 处的二阶泰勒估计的轨迹是抛物线 $y = \frac{\kappa}{2}x^2$. 此抛物线的 *convacity* 是 $y''(0) = \kappa$, 这提供了曲率的一般解释: 曲线在某点处的曲率等于在该点附近能逼近曲线的抛物线的 *convacity*.

由 \mathbf{t} 和 \mathbf{n} 张成的平面称为在时刻 t_0 处的切平面:

$$\text{切平面} = \text{span}\{\mathbf{t}, \mathbf{n}\} = \text{span}\{\mathbf{v}, \mathbf{a}\}.$$

它包含了曲线转向和前进的方向, 因此, 在将该平面平移到物体位置时, 曲线的轨迹被抛物线很好地近似也就不足为奇了.

在这一小节的剩余部分中, 我们将讨论曲线的轨迹是如何被 (平移过²) 的平面上的圆良好地逼近的. 特别地, 定义密切圆为切平面上以原点为圆心, 半径为 $\frac{1}{\kappa(t_0)}$ 的圆. 这个圆可被参数化为

$$\mathbf{c}(s) = \frac{1}{\kappa(t_0)} (\cos(s)\mathbf{t} + \sin(s)\mathbf{n}), s \in [0, 2\pi].$$

此定义是为了让在原点处有密切圆的切平面成为 \mathbb{R}^n 的一个子空间, 在后面是有好处的. 但是密切圆的到你自然会认为它应该所处的位置的平移, 记为 $\epsilon(t_0)$, 是非平凡的.³此位置处于从 $\gamma(t_0)$ 出发沿 \mathbf{n} 方向平移 $\frac{1}{\kappa(t_0)}$ 的距离:

$$(1.8) \quad \boxed{\epsilon(t_0) = \gamma(t_0) + \frac{1}{\kappa(t_0)}\mathbf{n}.$$

¹原文为 The (componentwise) second-order Taylor polynomial of γ at time t_0 is

²原文为 translated

³原文有图, 这里为方便起见把图给删了, 所以翻译起来怪怪的.

术语“密切”(osculating) 来自于拉丁词根 “to kiss”, 因为当移动到这个位置的时候, 密切圆与曲线的轨迹在 $\gamma(t_0)$ 点是相切的. 更准确地说, 对于足够小的 $h > 0$, 存在唯一的一个圆经过 $\gamma(t_0), \gamma(t_0 + h), \gamma(t_0 - h)$, 且当 $h \rightarrow 0$ 的时候, 这些唯一的圆收敛到平移到 $\epsilon(t_0)$ 的密切圆.

注意到 $t \mapsto \epsilon(t)$ 自身在 t_0 的任意邻域上的便是个参数化的曲线 (不一定是正则的)(要求 $\kappa(t_0) \neq 0$). 这条曲线被称为曲线的渐屈线, 它的集合特征将在第2.6节进行讨论.

1.6 平面曲线

我们目前关于 \mathbb{R}^n 中曲线的所有结论都是对所有的 n 有效的. 但是每个维度上的曲线都会有它独一无二的特性. 在这一小节, 我们会研究正则平面曲线 (在平面 \mathbb{R}^2 中的曲线) 的独特性质.

$n = 2$ 的情形有什么特殊的? 它是唯一的一个“顺时针”和“逆时针”能够用来描述曲线转向的方向的维度. 更严格地说, 考虑线性自同构 $R_{90} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, 其定义为

$$R_{90}(x, y) = (-y, x),$$

它的作用是将向量 (x, y) 逆时针旋转 90 度. 若你更愿意将 \mathbb{R}^2 视为复平面, 那么 R_{90} 就是“乘 i ”的函数. 注意 $R_{90}(R_{90}(\mathbf{v})) = -\mathbf{v}$ 对任意 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ 成立.

现在假设 $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ 为单位速的平面曲线. 任何时刻 $t \in I$, 注意到 $\mathbf{a}(t)$ 和 $R_{90}(\mathbf{v}(t))$ 都是与 $\mathbf{v}(t)$ 正交的, 所以它们一定会是平行的, 这意味着关于某个标量函数 $\kappa_s : I \rightarrow \mathbb{R}$ 有

$$(1.9) \quad \mathbf{a}(t) = \kappa_s(t) \cdot R_{90}(\mathbf{v}(t)).$$

我们把 $\kappa_s : I \rightarrow \mathbb{R}$ 称为带符号曲率函数. 若曲线在 t 点顺时针旋转, 则函数此点取负值; 反之取正值.

此函数被称为是“带符号曲率”因为它的符号取法如上文, 绝对值等于该点处曲率:

Lemma 1.37. 与上文的记号相同, 我们有 $|\kappa_s(t)| = \kappa(t)$.

Proof. 注意到 $|R_{90}(\mathbf{v}(t))| = |\mathbf{v}(t)| = 1$, 所以由命题1.31, 我们有

$$\kappa(t) = |\mathbf{a}(t)| = |\kappa_s(t) R_{90}(\mathbf{v}(t))| = |\kappa_s(t)|.$$

□

等式(1.9)能够被表达为

$$(1.10) \quad \kappa_s(t) = \langle \mathbf{a}(t), R_{90}(\mathbf{v}(t)) \rangle.$$

到这为止, 我们已经假设 γ 是单位速的. 但是即使不是, 它的带符号曲率可以用等式(1.10)的一个一般化公式计算:

Definition 1.38. 若 $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ 为正则平面曲线 (不一定是弧长参数化的), 那么对任意的 $t \in I$,

$$\kappa_s(t) = \frac{\left\langle \mathbf{a}(t), R_{90} \left(\frac{\mathbf{v}(t)}{|\mathbf{v}(t)|} \right) \right\rangle}{|\mathbf{v}(t)|^2} = \frac{\langle \mathbf{a}(t), R_{90}(\mathbf{v}(t)) \rangle}{|\mathbf{v}(t)|^3}.$$

这个 $\kappa_s(t)$ 的定义是与我们前面 γ 是单位速的特殊情况是一致的. 此外, 此公式在保定向的重参数化下的值不变. 于是我们有 $|\kappa_s(t)| = \kappa(t)$ 对非单位速的曲线也成立. 这能够由将上面的 $\kappa_s(t)$ 的值的公式与定义 $\kappa(t) = \frac{|\mathbf{a}^\perp|}{|\mathbf{v}|^2}$ 进行比较来证明. 注意到

$$\left\langle \mathbf{a}(t), r_{90} \left(\frac{\mathbf{v}(t)}{|\mathbf{v}(t)|} \right) \right\rangle = \pm |\mathbf{a}^\perp|.$$

之前的小节里面有提及单位速空间曲线物体转变方向的速度是如何衡量的. 对于一个单位速的平面曲线, 情形会变得更简单. 若每个速度向量 $\mathbf{v}(t)$ 都将其起始点画在原点 (而非物体位置处), 那么 $t \mapsto \mathbf{v}(t)$ 可具有赋予直观意义—可作为单位元上的路径,

$$S^1 = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2 \mid |\mathbf{p}| = 1\}.$$

假设 S^1 为原点处的“罗盘”, 它的‘指针’永远指向物体运动的方向. 注意到 $\kappa(t) = |\mathbf{v}'(t)|$ 表示指针的速度, 而 $\kappa_s(t)$ 表示指针的“有向速度”(指针顺时针方向旋转时取负值, 逆时针方向旋转时取正值).⁴ 总之, 对于在平面中以单位速度移动的物体, κ_s 表示它的方向逆时针变换的速率.

因此, 罗盘指针的位置是由角度决定的. 此观点敦促我们定义一个角度函数 $\theta: I \rightarrow \mathbb{R}$, 来记录 $\mathbf{v}(t)$ 与 x 轴所成夹角. 但是我们对值域加上 $\theta(t) \in [0, 2\pi), \forall t \in I$ 的限制, 因为那会使函数在物体的速度旋转完一周处称为间断点.(连续性被破坏, 从 0 突变到 2π , 或者从 2π 突变到 0). 或者说, 为构建连续的角度函数, 我们必须调整定义使得 θ 可以在 \mathbb{R} 上取值而非周期性地从 2π 回到 0. 这么做的可能性是有难度的.

Proposition 1.39. 若 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ 为单位速的平面曲线, 那么存在一个光滑的角度函数 $\theta: I \rightarrow \mathbb{R}$ 使得对所有的 $t \in I$, 我们都有

$$(1.11) \quad \mathbf{v}(t) = (\cos \theta(t), \sin \theta(t)).$$

此函数在相差 2π 的整数倍的意义下是唯一的.

在开始证明之前, 注意到对所有的 $t_0 \in I$, 构造一个在 t_0 在 I 中的一个小邻域内生效的局部角度函数是相对简单的 (“生效”意味着等式 1.11 在此邻域中成立). 具体地说, 可以记速度函数的分量表示为 $\mathbf{v}(t) = (v_x(t), v_y(t))$. 在 $v_x > 0$ 的邻域中, 函数 $\theta(t) = \arcsin(v_y(t))$ 将生效. 类似的, 在 $v_y > 0$ 的邻域中, 函数 $\theta(t) = \arccos(v_x(t))$ 将生效. 在 $v_x < 0$ 和 $v_y < 0$ 的邻域中找出合适的表达式也相应地很简单. 因此, 真正困难的部分在于定义一个全局的, 在整个 I 上都能够生效的角度函数. 注意到局部角度函数加上 2π 之后依旧是能够生效的.

在开始证明之前, 还要说明一个更加重要的观点: 若 θ 是一个局部的在邻域中成立的角

⁴ 建议画图感受一下, 因为我懒得放图

度函数, 那么对所有的此邻域中的 t , 我们有

$$(1.12) \quad \boxed{\theta'(t) = \kappa_s(t)}.$$

也就是说, “带符号的曲率函数等于角度变化的速度”. 此事实能够在代数上证明, 通过对等式 1.11 进行微分可得

$$\mathbf{a}(t) = \theta'(t)(-\sin \theta(t), \cos \theta(t)) = \theta'(t)R_{90}(\mathbf{v}(t)).$$

等式(1.12)说明我们可以定义通过平移它的导数来生成一个全局的角度函数, 也就是 κ_s .

命题1.39的证明:

Proof. 选定 $t_0 \in I, \theta_0 \in \mathbb{R}$ 使得 $\mathbf{v}(t_0) = (\cos(\theta_0), \sin(\theta_0))$. 然后定义我们的全局的角度函数 $\theta: I \rightarrow \mathbb{R}$ 为,

$$\theta(t) = \int_{t_0}^t \kappa_s(u) du + \theta_0.$$

注意到由微积分基本定理, $\theta'(t) = \kappa_s(t)$ 对所有的 $t \in I$ 成立.

为说明此函数是符合要求的, 定义 $\hat{I} \subset I$ 为 I 中等式 1.11 成立的集合:

$$\hat{I} = \{t \in I | \mathbf{v}(t) = (\cos(t), \sin(t))\}.$$

为完成此证明, 只需证明 $\hat{I} = I$.

显然 $t_0 \in \hat{I}$. 我们提出命题: \hat{I} 也包含 I 的每个含有 t_0 的子区间. 因此, \hat{I} 是 I 中的开集. 为了说明这一点, 在局部角度函数上面加上 2π 使得局部和全局角度函数在 t_0 点取值相同. 但是因为它们的导数是相同的, 所以全局角度函数和局部角度函数一定在整个子区间上是一致的, 所以整个子区间都在 \hat{I} 中. 因此, t_0 的在 I 中的一个邻域⁵位于 \hat{I} 中.

相同的论点说明了 \hat{I} 中的每个元素都有包含在 \hat{I} 里面的邻域. 因此, \hat{I} 为 I 中的开集. 也可直接看出 \hat{I} 为 I 中的闭集. 但是 I 是连通的, 所以 I 没有非平凡的既开又闭的子集. 所以 $\hat{I} = I$.

若 $\Theta: I \rightarrow \mathbb{R}$ 是另外一个使等式 1.11 成立的光滑函数, 那么 $\Theta(t_0)$ 和 $\theta(t_0)$ 相差 2π 的整数倍. 因为 θ 和 Θ 在 I 上有相同的导数, 也就是 κ_s , 所以它们在 I 上一定相差 2π 的整数倍. □

命题1.39提供了一种严格定义环绕数的语言, 这可以衡量单位速曲线的逆时针循环的网眼 (net) 数⁶.

Definition 1.40. 单位速闭平面曲线 $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ 的**环绕数 (rotation index)** 为 $\frac{1}{2\pi}(\theta(b) - \theta(a))$, 其中 θ 为命题1.39中的角度函数. 正则闭平面曲线 (不一定单位速

⁵此处的“开集”, “闭集”, “邻域”等概念采用拓扑学中的基础概念

⁶译者也对此感到疑惑, 经查询Bing后得到有 net change 有“净变化”的意思, 在此供参考.

的) 的环绕数指的是它的保定向的重参数化的环绕数.

Example 1.41 (马车的轮胎印). 想象一辆在平直曲线 (平面) 上以单位速度沿任意路径行驶的马车. 令 $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 为马车的中心 (两轮之间的车轴的中点) 所沿着的轨迹. 当马车左转时, 它的右轮转得比左轮快; 右转时, 左轮转得更快. 为量化地理解此现象, 我们注意到左轮和右轮分别沿以下路径运动:

$$\gamma_L(t) = \gamma(t) + cR_{90}(\gamma'(t)), \quad \gamma_R(t) = \gamma(t) - cR_{90}(\gamma'(t)),$$

其中 $2c$ 为车轴的长度; 左轮的速度为

$$\gamma'_L = \gamma' + c(R_{90}(\gamma'))' = \gamma' + c(R_{90}(\gamma'')) = \gamma' + c(R_{90}(\kappa_s R_{90}(\gamma')))) = (1 - c\kappa_s)\gamma'.$$

类似的, 右轮的速度是 $\gamma'_R = (1 + c\kappa_s)\gamma'$. 因此, 右轮的速度减去左轮的速度等于 $2c\kappa_s$ (符号曲率乘车轴长度).

不妨假设 $1 \pm c\kappa_s > 0$ (即相对于马车的转弯半径, 车轴的长度很小), 因为否则的话我们的模型不能够拟合实际的运动情况. 轮胎印的长度可由积分获得:

$$\begin{aligned} \text{长度}(\gamma_L) &= \int_a^b |\gamma'_L(t)| dt = \int_a^b (1 - c\kappa_s(t)) dt \\ &= \text{长度}(\gamma) - c \int_a^b \kappa_s(t) dt = \text{长度}(\gamma) - c(\theta(b) - \theta(a)), \end{aligned}$$

其中 θ 为 γ 的一个角度函数. 总之, 任何一个时刻马车的左轮和右轮的速度差都是与符号曲率成正比的, 所以左轮和右轮经过的长度之差是与角度函数的纯净差成正比的. 比例常数就是车轴的长度.

下面我们简单聊聊一个古老的机械设备—指南车, 它的工作原理是与例1.41一致的. 当此指南车在平面上沿任意曲线行驶时, 在车上会有一个始终指向相同方向的标识—在现有的还原模型图中是个手指前方的人的小雕像. 如果在开始时, 雕像指向南方, 那么不论指南车是左转还是右转, 小人始终指向南方. 这是由与指南车内部精巧的齿轮机械结构. 例如, 当车子左转时, 它的右轮比左轮旋转更快, 则齿轮会让小雕像右转来补偿差距. 事实上, 齿轮结构使得雕像 (相对于马车的) 的顺时针角速度⁷是与右轮和左轮的速度差成正比的. 根据例1.41, 如果说相关的参数都是根据需求校准过的, 使得比例常数和车轴长是相等的, 那么这恰恰是保证指南车上的小雕像不会变向的条件.

因此, 雕像相对于马车的总体上的顺时针旋转为马车所沿着行驶的路径的角度函数. 所以在马车行驶完一个平面闭曲线之后⁸, 雕像会相对于马车转三圈, 环绕数是 3.⁹

⁷姑且这么叫吧, 以顺时针为正方向的角速度.

⁸在这里原作者建议看一些 Youtube 视频或是搜索一些可打印的指南车的 3D 模型.

⁹即 “rotation index”, 旋转指数为 3. 后来的笔者后悔没把这个术语加上, 只能以注释的形式补回来.

1.7 空间曲线

在这一小节, 我们将会研究正则空间曲线 (即 \mathbb{R}^3 中的曲线). \mathbb{R}^3 有什么独特的性质? 其中一个解答是仅仅在 \mathbb{R}^3 有叫做叉积 (也叫做向量积) 的运算. 这是它的很多代数性质的核心. 叉积的定义如下:

Definition 1.42. 若 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3), \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$, 那么

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \in \mathbb{R}^3.$$

熟悉的几何性质如下.

Lemma 1.43. 令 $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$,

- (1) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 与 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 都是正交的.
- (2) $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin(\theta) = \sqrt{|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle^2}$ 是以 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 为邻边的平行四边形面积.(其中 $\theta = \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$).
- (3) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 的方向由右手定则给出.¹⁰

熟悉的代数性质如下.

Lemma 1.44. 若 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, 那么

- (1) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$.
- (2) $(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + \mu(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$, 且
 $\mathbf{a} \times (\lambda\mathbf{b} + \mu\mathbf{c}) = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + \mu(\mathbf{a} \times \mathbf{c})$.

除上面的代数和几何性质之外, 我们由与引理1.16相似的乘积规律:

Lemma 1.45. 若 $\gamma, \beta: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ 为一对空间曲线, 那么

$$\frac{d}{dt}(\gamma(t) \times \beta(t)) = \gamma'(t) \times \beta(t) + \gamma(t) \times \beta'(t).$$

叉积使得形式简单的空间曲线的曲率公式变得可能:

¹⁰笔者懒, 自己上网查.[嚣张][理直气壮]

Proposition 1.46. 若 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ 为正则的空间曲线, 那么 $\forall t \in I$,

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{v}(t) \times \mathbf{a}(t)|}{|\mathbf{v}(t)|^3}.$$

Proof. 在下面的计算中省略自变量. 可以看出 $\mathbf{a}^\perp = \mathbf{a} \sin(\theta)$, 所以

$$\kappa = \frac{|\mathbf{a}^\perp|}{|\mathbf{v}|^2} = \frac{|\mathbf{a}| \sin(\theta)}{|\mathbf{v}|^2} = \frac{|\mathbf{v}| |\mathbf{a}| \sin(\theta)}{|\mathbf{v}|^3} = \frac{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}{|\mathbf{v}|^3}.$$

□

叉积也使得我们能够在标架 $[\mathbf{t}, \mathbf{n}]$ 上再加上更多向量.

Definition 1.47. 令 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ 为正则空间曲线. 令 $t \in I, \kappa(t) \neq 0$. 则在 t 处的 Frenet 标架是 \mathbb{R}^3 的基 $\{\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t)\}$, 定义如下:

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\mathbf{v}(t)}{|\mathbf{v}(t)|}, \mathbf{n}(t) = \frac{\mathbf{a}^\perp(t)}{|\mathbf{a}^\perp(t)|}, \mathbf{b}(t) = \mathbf{t}(t) \times \mathbf{n}(t).$$

它们分别被称为单位切向量, 单位法向量和单位副法向量.

在不会引发歧义的情况下, 我们会省略自变量 (参数), 而仅仅把标架写为 $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$. 由我们的构造过程, 此标架为 \mathbb{R}^3 的正交基.

密切平面是由 \mathbf{t} 和 \mathbf{n} 张成的, 所以它们的叉积 \mathbf{b} 是切平面的单位法向量. 将 $t \mapsto \mathbf{b}(t)$ 视为 S^2 上的道路, 将 S^2 直观理解为一个球体——一个“旋转仪”, 使你能够从原点处查看一个在很远处的物体的运动情况, 因为指向球心的向量 $\mathbf{b}(t)$ 永远能够说明物体的旋转情况. 因此, $|\mathbf{b}'|$ 衡量的是切平面的角度变化速度.

下一个关键的想法是需要定义一个 γ 的扭率来衡量切平面方向改变的快慢程度. $|\mathbf{b}'|$ 的值基本上能够衡量, 但是还有两点不令人满意. 首先, 我们希望能够与重参数化无关的度量. 我们真正想要的是以单位速度通过该曲线时切平面的变化速度. 其次, 我们能够通过定义一个带符号的量以衡量角度变化快慢, 这会获得比较好的结果. 为解释原因, 我们可以看出 \mathbf{b}' 与 \mathbf{b} 和 \mathbf{t} (由命题 1.17) 正交. 则有

$$(1.13) \quad \langle \mathbf{b}', \mathbf{t} \rangle = -\langle \mathbf{t}', \mathbf{b} \rangle = -\langle |\mathbf{t}'| \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle = -|\mathbf{t}'| \langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle = 0.$$

因此 \mathbf{b}' 和 \mathbf{n} 平行, 所以衡量量 $\langle \mathbf{b}', \mathbf{n} \rangle$ 的绝对值等于 $|\mathbf{b}'|$, 但是这个量带正负号, 正负号具有很重要的几何意义. 为使此衡量量与重参数化无关我们必须要将他除以速度, 就像这样:

Definition 1.48. 令 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ 为正则空间曲线. 令 $t \in I, \kappa(t) \neq 0$. γ 在 t 处的扭

率, 记为 $\tau(t)$, 为

$$\tau(t) = \frac{-\langle \mathbf{b}'(t), \mathbf{n}(t) \rangle}{|\mathbf{v}(t)|}.$$

Lemma 1.49. 扭率与重参数化无关.

Proof. 假设 $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \phi$ 为保定向的重参数化 ($\phi' > 0$). 我们会使用波浪线 (\sim) 来表示与 $\tilde{\gamma}$ 相关的函数. 首先注意到 Frenet 标架是不变的: $\tilde{\mathbf{t}} = \mathbf{t} \circ \phi$, $\tilde{\mathbf{n}} = \mathbf{n} \circ \phi$, 且 $\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{b} \circ \phi$. 因此

$$\tilde{\tau}(t) = \frac{-\langle \tilde{\mathbf{b}}'(t), \tilde{\mathbf{n}}(t) \rangle}{|\tilde{\mathbf{v}}(t)|} = \frac{-\langle \phi'(t)\mathbf{b}'(\phi(t)), \mathbf{n}(\phi(t)) \rangle}{|\phi'(t)\mathbf{v}(\phi(t))|} = \frac{-\langle \mathbf{b}'(\phi(t)), \mathbf{n}(\phi(t)) \rangle}{|\mathbf{v}(\phi(t))|} = \tau(\phi(t)).$$

另一方面, 若 $\tilde{\gamma}$ 是一个保定向的重参数化 ($\phi' < 0$), 那么 $\tilde{\mathbf{t}} = -\mathbf{t} \circ \phi$, $\tilde{\mathbf{n}} = -\mathbf{n} \circ \phi$, 且 $\tilde{\mathbf{b}} = -\mathbf{b} \circ \phi$. 这些在符号上的变化是能够抵消的, 从而获得相同的结论: $\tilde{\tau} = \tau \circ \phi$. \square

Example 1.50 (平面曲线的扭率). 令 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ 为限制在 x, y 平面中的空间曲线; 换句话说, $\gamma(t) = (x(t), y(t), 0)$. 在每一处 $\kappa(t) = 0$ 的点 $t \in I$, $\mathbf{n}(t)$, $\mathbf{b}(t)$ 和 $\tau(t)$ 的值都是没有定义的. 在每一处 $\kappa(t) \neq 0$ 的点 $t \in I$, 注意到 $\mathbf{t}(t)$ 和 $\mathbf{n}(t)$ 在 xy -平面内, 所以它们的叉积为 $\mathbf{b}(t) = (0, 0, \pm 1)$. 根据右手准则, 符号反映了平面曲线 $t \mapsto (x(t), y(t))$ 是在沿顺时针前进还是逆时针前进; 换句话说, 它表示平面曲线的带符号曲率的符号. 注意到 \mathbf{b} 在每个有定义的区间上为常数, 故而 $\tau = 0$ 在每个有定义的点成立.

若曲线是零扭 (Zero Torsion) 的, 这意味着曲线的切平面的角度是不变的. 正如上面的例子所说, 此现象发生在曲线的轨迹能够被限制在某个平面以内时. 以下的逆命题也是正确的:

Proposition 1.51. 令 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ 为正则空间曲线, 其中 $\kappa(t) \neq 0$ 对所有的 $t \in I$ 成立. γ 的轨迹能够被限制在平面内当且仅当 $\tau(t) = 0$ 对任意 $t \in I$ 成立.

Proof. 首先, 假设 γ 的轨迹被限制在平面 P (方程为 $ax + by + cz = d$) 内. 令 $\mathbf{w} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \in \mathbb{R}^3$, 注意到此平面能够被重新描述为

$$P = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{w} \rangle = d\}.$$

因为 $\langle \gamma(t), \mathbf{w} \rangle = d$ 是一个关于 t 的常值函数, 它的导数为零:

$$0 = \frac{d}{dt} \langle \gamma(t), \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}(t), \mathbf{w} \rangle, \quad 0 = \frac{d^2}{dt^2} \langle \gamma(t), \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{a}(t), \mathbf{w} \rangle.$$

由此可得 $\mathbf{t}(t)$ 和 $\mathbf{n}(t)$ 都是和 \mathbf{w} 正交的, 所以它们的叉积必然与 \mathbf{w} 平行: $\mathbf{b} = \pm \frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}$. 因为 \mathbf{b} 是连续的, 所以此符号是不能突变的, 所以它在 I 上为常值. 更严格地说, 函数 $t \mapsto \left\langle \mathbf{b}(t), \frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|} \right\rangle$

在 I 上只能取到两个不同的值, $+1$ 和 -1 . 所以由附录中的命题¹¹, 它在 I 上必然是常值. 因此, \mathbf{b} 为常值, 所以 $\tau = 0$.

另一方面, 假设 $\tau(t) = 0$ 对每个 $t \in I$ 都成立. 这会导致 $\mathbf{b}'(t) = 0$ 对任意 $t \in I$ 成立, 所以 $\mathbf{b}(t) = \mathbf{w}$ (常值) 对任意的 $t \in I$ 成立. 注意到

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{w}, \gamma(t) \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}(t) \rangle = 0,$$

因为 \mathbf{b} 和 \mathbf{t} 都是正交的. 因此 $\langle \mathbf{w}, \gamma(t) \rangle = d$ 为常值函数. 换句话说, γ 的轨迹位于定义为 $p = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 | \langle \mathbf{p}, \mathbf{w} \rangle = d\}$. \square

因此, 扭量粗略地描述了曲线的轨迹相对于一个平面的弯曲程度. 为将此思想公式化, 我们必须先计算 Frenet 标架的导数向量.

Proposition 1.52 (the Frenet equations). 令 $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ 为正则的空间曲线. 对每个使得 $\kappa(t) \neq 0$ 成立的 $t \in I$, Frenet 标架中的向量的导数是

$$\begin{aligned} \mathbf{t}' &= -|\mathbf{v}| \kappa \mathbf{n}, \\ \mathbf{n}' &= |\mathbf{v}| \kappa \mathbf{t} + |\mathbf{v}| \tau \mathbf{b}, \\ \mathbf{b}' &= -|\mathbf{v}| \tau \mathbf{n}. \end{aligned}$$

Proof. 从第 2 节中可知向量可以写成正交基中的向量的线性组合, 系数就是可由内积计算出的分量. 第一个等式, $\mathbf{t}' = -|\mathbf{v}| \kappa \mathbf{n}$ 为命题 1.35. 第二个等式, $\mathbf{n}' = |\mathbf{v}| \kappa \mathbf{t} + |\mathbf{v}| \tau \mathbf{b}$ 可由以下证明:

$$\langle \mathbf{n}', \mathbf{t} \rangle = -\langle \mathbf{t}', \mathbf{n} \rangle = -|\mathbf{v}| \kappa \quad (\text{命题 1.17(2) 和 命题 1.35})$$

$$\langle \mathbf{n}', \mathbf{n} \rangle = 0 \quad (\text{命题 1.17(1)})$$

$$\langle \mathbf{n}', \mathbf{b} \rangle = -\langle \mathbf{b}', \mathbf{n} \rangle = |\mathbf{v}| \tau \quad (\text{命题 1.17(2) 和 } \tau \text{ 的定义}).$$

第三个等式, $\mathbf{b}' = -|\mathbf{v}| \tau \mathbf{n}$, 可由 τ 的定义以及之前提到的 \mathbf{b}' 和 \mathbf{b} 和 \mathbf{t} 都正交来证明. \square

Frenet 方程可以用矩阵写成如下既对称又紧致形式:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}' = |\mathbf{v}| \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}.$$

其中的矩阵是反对称的这一性质是可以由命题 1.17 预言出来的.

现在我们就能够描述扭量对于曲线的轨迹相对于某一平面的弯曲程度的描述有多精确了. 在这一小节的剩余部分, 假设 $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ 是单位速的空间曲线, 且存在 $t_0 \in I$ 使得

¹¹原文为附录中的命题 A.19

$\kappa(t_0) \neq 0$. 我们在第 5 小节中就已经知道 γ 在 t_0 处的二阶 Taylor 多项式的轨迹是在其 (经过平移的) 切平面中的一个抛物线. 但是求解扭量涉及三次求导运算. 若 $\tau(t_0) \neq 0$, 我们将证明 γ 在 t_0 处的三阶 Taylor 多项式的轨迹将延伸到切平面之外. 事实上, $\tau(t_0)$ 的符号表示它会以从上方穿出还是穿进下方.

在第 5 小节中, 在 $t_0 \in I$ 处的 Taylor 多项式中加入 (三阶) 项将会得到

$$\mathbf{D}(h) = \gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0) \approx h\gamma'(t_0) + \frac{h^2}{2}\gamma''(t_0) + \frac{h^3}{6}\gamma'''(t_0).$$

如果我们在以下计算中省略输入变量, 例如, 将标架写为 $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$, 我们总是想要表示这是在 t_0 时的量. 注意到

$$\begin{aligned}\gamma' &= \mathbf{t}, \\ \gamma'' &= \kappa \mathbf{n}, \\ \gamma''' &= (\kappa \mathbf{n})' = \kappa' \mathbf{n} + \kappa \mathbf{n}' = \kappa' \mathbf{n} + \kappa(-\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}) \\ &= \kappa' \mathbf{n} - \kappa^2 \mathbf{t} + \kappa \tau \mathbf{b}.\end{aligned}$$

所以 $\mathbf{D}(h)$ 在 Frenet 标架中的向量的方向下的分量的三阶 Taylor 多项式是

$$\begin{aligned}(1.14) \quad x(h) &= \langle \mathbf{D}(h), \mathbf{t} \rangle \approx h - \frac{\kappa^2}{6}h^3, \\ y(h) &= \langle \mathbf{D}(h), \mathbf{n} \rangle \approx \frac{\kappa}{2}h^2 + \frac{\kappa'}{6}h^3, \\ z(h) &= \langle \mathbf{D}(h), \mathbf{b} \rangle \approx \frac{\kappa\tau}{6}h^3\end{aligned}$$

如果你想象经过平移和旋转之后使得 $\gamma(t_0) = \mathbf{0}$, $\mathbf{t} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{n} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{b} = (0, 0, 1)$ 成立, 你就会发现我们 $x(h), y(h), z(h)$ 的记号是合理的.

因为 $\kappa > 0$, 所以上述 $z(h)$ 的 Taylor 多项式说明, 若 $\tau > 0$, 那么 $z(h) > 0$ 对于足够小的正数 h 成立. 另一方面, 若 $\kappa < 0$, 那么 $z(h) < 0$ 对于足够小的正数 h 成立. 总之, t_0 处正的扭率值说明曲线从下方穿过平移到的该点 t_0 处的切平面. 负扭率值的情形下可类推从上方穿过. 这里 “above” 的意思就是从 \mathbf{b} 的方向穿出. 就算是重参数化为反向的曲线, 这依旧是成立的, 因为 \mathbf{b} 的方向也会随之变化.

上面的每一个含有约等于符号 “ \approx ” 的等式都是个三阶的 Taylor 多项式, 所以左侧和右侧之间差了一个误差项 $E(h)$, 且满足 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|E(h)|}{h^3} = 0$. 然而, 若我们忽视三阶项, 则等式(1.14)简化为以下的二阶逼近:

$$x(h) \approx h, \quad y(h) \approx \frac{\kappa}{2}h^2, \quad z(h) \approx 0,$$

这只是重复了我们在第 5 小节就已经取得的发现, γ 在 t_0 处的二阶 Taylor 多项式的轨迹是在 (平移后) 的切平面中的一条抛物线, 凹凸度为 κ .

1.8 保距变换

本章中的一个常常出现的方法是旋转和平移; 也就是说, 根据我们要求解的问题来构建坐标系. 一种具体的对此方法的解释是运用刚体运动的作用.¹²例如, 我们能够以“在 \mathbb{R}^3 的保距变换的作用下, 我们能够不失一般性地假设 $\gamma(t_0) = \mathbf{0}, \mathbf{t} = (1, 0, 0), \mathbf{n} = (0, 1, 0)$ ”为开始重新解释上一节的 Taylor 展开式.

这一小节将会专注于研究背景中的 \mathbb{R}^n 中的保距变换. 这对我们现在研究曲线和之后研究曲面是很有帮助的. 这一小节将会由一个基本定理结束, 该定理大致说的是曲线可以由它在各点处的带符号曲率 (平面曲线情形) 和挠率函数 (空间曲线情形) 严格定义.

Definition 1.53. \mathbb{R}^n 中的保距变换意为保持举例的值不变的变换 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$; 也就是说, $\text{dist}(f(\mathbf{p}), f(\mathbf{q})) = \text{dist}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ 对每一对 $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ 成立.

就如同在附录中约定的那样, $\text{dist}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = |\mathbf{p} - \mathbf{q}|$, 所以我们也能够将此式写为

$$|f(\mathbf{p}) - f(\mathbf{q})| = |\mathbf{p} - \mathbf{q}|, \text{ 对任意 } \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n.$$

保距变换中很重要的一类是线性保距变换. 因为线性变化是能够用矩阵来描述的, 所以我们得构建描述矩阵的记号. 令 M_n 表示所有 $n \times n$ 的实矩阵. 若 $\mathbf{A} \in M_n$, 令

$$L_{\mathbf{A}}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

表示“左乘 \mathbf{A} ”的函数. 也就是说, $L_{\mathbf{A}}(\mathbf{p}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}$, 其中的元素 $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ 被看作是 $n \times 1$ 矩阵, 所以矩阵乘法 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{p}$ 是有意义的. 换句话说, \mathbf{A} 表示关于 \mathbb{R}^n 的标准正交基的线性变换 $L_{\mathbf{A}}$.

那么, \mathbf{A} 要具有什么性质才能够使 $L_{\mathbf{A}}$ 是一个保距变换? $\forall \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n, |L_{\mathbf{A}}(\mathbf{p}) - L_{\mathbf{A}}(\mathbf{0})| = |\mathbf{p} - \mathbf{0}|$ 是个必要条件. 因为线性变换的原点都是不动点 ($L_{\mathbf{A}}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$), 即有 $|L_{\mathbf{A}}(\mathbf{p})| = |\mathbf{p}|$. 换句话说, 我们至少要求 \mathbf{A} 是个正交矩阵:

Definition 1.54. 矩阵 $\mathbf{A} \in M_n$ 被称为是正交的如果 $\forall \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n, |L_{\mathbf{A}}(\mathbf{p})| = |\mathbf{p}|$. M_n 中所有正交矩阵的集合记为 $O(n)$.

由定义知, \mathbf{A} 是正交的如果 $L_{\mathbf{A}}$ 是保范数的 (与保到原点的距离同义); 换句话说, $L_{\mathbf{A}}$ 将球面

$$S^{n-1} = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \mid |\mathbf{p}| = 1\}$$

上的一点映射到球面上的另外一点. 再加上 $L_{\mathbf{A}}$ 是线性变换的条件, 我们将证明这能够使得 $L_{\mathbf{A}}$ 保持所有的距离值不变. 此命题是建立在以下命题之上:

¹²在这里译者也没看懂, 乱七八糟的...

Proposition 1.55. 令 $\mathbf{A} \in M_n$, 以下是等价的:

- (1) $L_{\mathbf{A}}$ 是保距变换.
- (2) \mathbf{A} 是正交的.
- (3) $\langle L_{\mathbf{A}}(\mathbf{p}), L_{\mathbf{A}}(\mathbf{q}) \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$ 对任意的 $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ 成立.
- (4) $L_{\mathbf{A}}$ 是保规范正交基的; 也就是说, 如果 $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n\}$ 为 \mathbb{R}^n 的规范正交基, 那么 $\{L_{\mathbf{A}}(\mathbf{p}_1), L_{\mathbf{A}}(\mathbf{p}_2), \dots, L_{\mathbf{A}}(\mathbf{p}_n)\}$.
- (5) \mathbf{A} 的列向量形成 \mathbb{R}^n 的一个规范正交基.
- (6) $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = I$ (单位矩阵), 其中 \mathbf{A}^T 表示 \mathbf{A} 的转置.

为解释此命题, 回忆第 2 节中向量组是规范正交的若它们的范数为 1 且彼此正交. 同时, 我们知道 \mathbb{R}^n 的标准正交基为

$$\{\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 0, 1)\}$$

Proof.

$(1) \Leftrightarrow (2)$ 若 $L_{\mathbf{A}}$ 是个保距变换, 那么对所有的 $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$,

$$|L_{\mathbf{A}}(\mathbf{p})| = |L_{\mathbf{A}}(\mathbf{p}) - \mathbf{0}| = |L_{\mathbf{A}}(\mathbf{p}) - L_{\mathbf{A}}(\mathbf{0})| = |\mathbf{p} - \mathbf{0}| = |\mathbf{p}|.$$

所以 \mathbf{A} 是正交的. 反之, 若 \mathbf{A} 是正交的, 那么

$$|L_{\mathbf{A}}(\mathbf{p}) - L_{\mathbf{A}}(\mathbf{q})| = |L_{\mathbf{A}}(\mathbf{p} - \mathbf{q})| = |\mathbf{p} - \mathbf{q}|,$$

所以 $L_{\mathbf{A}}$ 是保距变换.

$(2) \Leftrightarrow (3)$ 若 (3) 为真, 那么对任意的 $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, 我们有

$$|L_{\mathbf{A}}(\mathbf{p})| = \langle L_{\mathbf{A}}(\mathbf{p}), L_{\mathbf{A}}(\mathbf{p}) \rangle^{\frac{1}{2}} = \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle^{\frac{1}{2}} = |\mathbf{p}|,$$

所以 (2) 为真. 换句话说, $L_{\mathbf{A}}$ 是保内积的, 那它就一定保范数.

反之, 我们得证明内积是由范数完全决定的. 解关于 $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$ 的方程

$$|\mathbf{p} - \mathbf{q}|^2 = \langle \mathbf{p} - \mathbf{q}, \mathbf{p} - \mathbf{q} \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle + \langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle - 2\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$$

可得

$$(1.15) \quad \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \frac{1}{2} (|\mathbf{p}|^2 + |\mathbf{q}|^2 - |\mathbf{p} - \mathbf{q}|^2).$$

从这, 我们可以直接看出若 $L_{\mathbf{A}}$ 是保范数的, 那么它是保内积的.

(3) \Rightarrow (4) 这是显然的.

(4) \Rightarrow (5) 因为 \mathbf{A} 的列向量是 $\{L_{\mathbf{A}}(\mathbf{e}_1), L_{\mathbf{A}}(\mathbf{e}_2), \dots, L_{\mathbf{A}}(\mathbf{e}_n)\}$.

(5) \Leftrightarrow (6) 因为 $(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})$ 的第 (i, j) 项是

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})_{ij} &= \langle (\mathbf{A}^T \text{ 的第 } i \text{ 行}), (\mathbf{A} \text{ 的第 } j \text{ 列}) \rangle \\ &= \langle (\mathbf{A} \text{ 的第 } i \text{ 列}), (\mathbf{A} \text{ 的第 } j \text{ 列}) \rangle. \end{aligned}$$

(5) \Rightarrow (3) 因为 \mathbf{A} 的列向量是规范正交的, 那么对于每对 $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n), \mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n$, 我们有

$$\begin{aligned} \langle L_{\mathbf{A}}(\mathbf{p}), L_{\mathbf{A}}(\mathbf{q}) \rangle &= \left\langle L_{\mathbf{A}} \left(\sum_{l=1}^n p_l \mathbf{e}_l \right), L_{\mathbf{A}} \left(\sum_{s=1}^n q_s \mathbf{e}_s \right) \right\rangle \\ &= \sum_{l,s=1}^n p_l q_s \langle L_{\mathbf{A}}(\mathbf{e}_l), L_{\mathbf{A}}(\mathbf{e}_s) \rangle \\ &= \sum_{l,s=1}^n p_l q_s \langle (\mathbf{A} \text{ 的第 } l \text{ 列}), (\mathbf{A} \text{ 的第 } s \text{ 列}) \rangle \\ &= p_1 q_1 + \dots + p_n q_n = \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle. \end{aligned}$$

□

正交矩阵是可逆的因为它的列向量构成一个基. 事实上, 我们有如下的引理:

Lemma 1.56. 正交矩阵的逆矩阵是正交的, 两个正交矩阵的乘积也是正交的.

证明留作练习.

我们现在对于线性保距变换有了更深刻的了解. 我们下面会证明每个保持原点不动的保距变换都是线性的.

Proposition 1.57. 若 f 是一个 \mathbb{R}^n 中固定原点的保距变换 ($f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$), 那么存在 \mathbf{A} 使得 $f = L_{\mathbf{A}}$. 值得注意的是, f 是线性的.

Proof. 等式(1.15)能够被重新表述为利用距离函数对内积运算的一个表示:

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \frac{1}{2} (\text{dist}(\mathbf{p}, \mathbf{0})^2 + \text{dist}(\mathbf{q}, \mathbf{0})^2 - \text{dist}(\mathbf{p}, \mathbf{q})^2).$$

□

因为 f 是保距的且原点为其不动点, 我们可以直接使用它一定是保内积的这一结论:

$$\langle f(\mathbf{p}), f(\mathbf{q}) \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle, \forall \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n.$$

令 \mathbf{A} 为第 i 列是 $f(\mathbf{e}_i)$ 构成的矩阵, 所以 $f(\mathbf{e}_i) = L_{\mathbf{A}}(\mathbf{e}_i)$ 对任意的 $i = 1, 2, \dots, n$ 成立. 注意到 $\mathbf{A} \in O(n)$, 因为它的列向量是正规正交的, 我们会通过验证 $g = (L_{\mathbf{A}})^{-1} \circ f$ 是恒等映射来证明 $f = L_{\mathbf{A}}$ (因此 f 是线性的). 注意到 g 是个保距变换使得 $g(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ (所以 g 如上文所述是保范数和内积的) 且 $g(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_i$ 对任意的 $i = 1, \dots, n$. 令 $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, 记 $\mathbf{p} = \sum a_i \mathbf{e}_i, g(\mathbf{p}) = \sum b_i \mathbf{e}_i$. 那么,

$$b_i = \langle g(\mathbf{p}), \mathbf{e}_i \rangle = \langle g(\mathbf{p}), g(\mathbf{e}_i) \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{e}_i \rangle = a_i,$$

这证明 $g(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$, 所以 g 是恒同映射.

那么那些不固定原点的保距变换有哪些性质呢? 对任意的 $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$, 平移映射 $T_{\mathbf{p}}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, 定义为 $T_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}) = \mathbf{p} + \mathbf{q}$, 显然是把原点映射到 \mathbf{q} 的一个保距映射. 我们下面将证明除了平移后的线性保距变换并无其他形式的保距变换.

Proposition 1.58. 若 f 是个 \mathbb{R}^n 中的保距变换, 那么存在唯一的 $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{A} \in O(n)$ 使得 $f = T_{\mathbf{q}} \circ L_{\mathbf{A}}$ 成立.

Proof. 定义 $\mathbf{q} = f(\mathbf{0})$, 注意到 $(T_{\mathbf{q}})^{-1} \circ f$ 是一个固定原点的保距变换. 由命题 1.57, $(T_{\mathbf{q}})^{-1} \circ f = L_{\mathbf{A}}$ 对于某个 $\mathbf{A} \in O(n)$ 成立. 因此, $f = T_{\mathbf{q}} \circ L_{\mathbf{A}}$. 唯一性证明留给读者. \square

Lemma 1.59. 若 $\mathbf{A} \in O(n)$, 那么 $\det(\mathbf{A}) = 1$ 或者 $\det(\mathbf{A}) = -1$.

Proof. 因为 $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = I$,

$$1 = \det(I) = \det(\mathbf{A}^T) \cdot \det(\mathbf{A}) = (\det(\mathbf{A}))^2.$$

\square

Definition 1.60. 保距变换 $f = T_{\mathbf{q}} \circ L_{\mathbf{A}}$ (就如同在命题 1.58 中那样) 被称为正当的¹³若 $\det(\mathbf{A}) = 1$, 是不正当的若 $\det(\mathbf{A}) = -1$.

Example 1.61. 若 $\mathbf{A} \in O(2)$, 那么它的两个列向量构成 \mathbb{R}^2 的一个规范正交基. 它的第一个列向量是 \mathbb{R}^2 中任意一个单位长度的向量, 可写为 $\mathbf{x} = (\cos \theta, \sin \theta)$ 对某些 $\theta \in (0, 2\pi]$ 成立. 第二个列向量也是单位长度的且与第一个列向量是正交的, 那么我们有两种选择: $R_{90}(\mathbf{x}) = (-\sin \theta, \cos \theta)$ 或者是 $-R_{90}(\mathbf{x}) = (\sin \theta, -\cos \theta)$. 所以我们知道

$$O(2) = \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \middle| \theta \in [0, 2\pi) \right\}}_{\det=1} \cup \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \middle| \theta \in [0, 2\pi) \right\}}_{\det=-1}.$$

¹³原文为 “proper” 和 “improper”, 听说有理论力学讲义是这么翻译的, 解释权归赵同学

若 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$, 那么 $L_{\mathbf{A}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 是一个关于原点的角度为 θ 的旋转, 同时若 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$, 那么 $L_{\mathbf{A}}$ 是关于通过原点且与 x -轴正半轴形成 $\frac{\theta}{2}$ 的角的直线的对称点.

以上的例子提供了一个 $O(2)$ 的完整描述, 也同时完整描述了 \mathbb{R}^2 上保持原点不变的保距变换. 那么 $O(3)$ 呢? 事实是, 每个 \mathbb{R}^3 中正当的固定原点的保距变换是关于某一坐标轴的旋转. 每个 \mathbb{R}^3 中非正当的固定原点的保距变换包含了对径映射, 定义为 $(x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z)$, 直观解释为关于原点的对称点. 保距变换也包含关于平面的对称; 例如, $(x, y, z) \mapsto (x, y, -z)$ 为关于 xy -平面的对称. \mathbb{R}^3 中的正当的保距变换在物理上是可实现的; 如果你正拿着一个坚固的物体, 你能够平移或者旋转它. 但是 \mathbb{R}^3 中非正当的保距变换在物理上是不可实现的; 将右脚的靴子投影穿过一个平面就会得到一只左脚的靴子, 但是在现实中你没有办法把一只右脚的靴子变成左脚的靴子.

我们下面将会描述除是否正当以外保距变换的另外一个特征, 此特征基于此变换在某个基的定向上的作用.

Definition 1.62. \mathbb{R}^n 的有序规范正交基 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ 称为是正定向的, 若是以 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ 为列向量的正交矩阵的行列式值为 1, 它是负定向的若它的行列式值为 -1 .

在 \mathbb{R}^2 中, 此记号是与顺时针/逆时针的区别相关的. \mathbb{R}^2 的带序规范正交基 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ 是正定向的若 $\mathbf{v}_2 = R_{90}(\mathbf{v}_1)$, 是负定向的若 $\mathbf{v}_2 = -R_{90}(\mathbf{v}_1)$. 就如同例 1.61 说的那样, 两者必居其一, 因为 \mathbf{v}_2 是单位长度的且与 \mathbf{v}_1 正交. 例如, 在平面曲线上具有正的带符号曲率的一点, 规范正交基 $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}\}$ 是正定向的. 在具有负的带符号曲率处, 此正交基为负定向的.

在 \mathbb{R}^3 中, 这个记号是与叉积相关的. 带序规范正交基 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ 是正定向的 (也叫右手系的) 若 $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$, 是负定向的 (也叫左手系的) 若 $\mathbf{v}_3 = -\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$. 两者必居其一, 因为 \mathbf{v}_3 是单位长度的且与 \mathbf{v}_1 和 \mathbf{v}_2 是正交的. 例如, 带序规范正交基 $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ 始终是正定向的, 如果对应的曲线是正则曲线.

以下的引理说明正当的保距变换会保持基的定向不变, 但是非正当的会逆转定向:

Lemma 1.63. 令 $\mathbf{A} \in O(n)$. \mathbb{R}^n 的带序规范正交基 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ 的定向 (无论是正定向的还是负定向的) 与 $\{\mathbf{A}\mathbf{v}_1, \mathbf{A}\mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{A}\mathbf{v}_n\}$ 是一致的当且仅当 $\det(\mathbf{A}) = 1$.

Proof. 令 \mathbf{B} 表示列向量为 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ 的正交矩阵. 注意到 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ 是列向量为 $\mathbf{A}\mathbf{v}_1, \mathbf{A}\mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{A}\mathbf{v}_n$ 的正交矩阵. 那么结论可以由 $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}$ 很容易地推出. \square

对一个曲线作用保距变换可能会平移, 旋转或是反射它, 但是这应该不会影响它的主要形状的度量的量, 比如曲率:

Proposition 1.64. 对于正则曲线, 以下的参量在正当的保距变换下是不变的:

- (1) \mathbb{R}^n 中曲线的曲率;
- (2) 空间曲线的扭率;
- (3) 平面曲线的带符号曲率.

非正当的保距变换也会保留曲率, 但是会把扭率和带符号曲率乘上 -1 .

为解释此命题, 假设 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为正则曲线, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为保距变换, $\hat{\gamma} = f \circ \gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$. 如果我们使用帽子 ($\hat{\cdot}$) 来表示与 $\hat{\gamma}$ 相关的相应函数, 第一个命题说的是 $\hat{\kappa} = \kappa$ (也就是说, $\hat{\gamma}$ 和 γ 有相同的曲率函数). 当 $n = 3$ 时, 第二个命题说的是 $\hat{\tau} = \pm\tau$ (且两条曲线在曲率没有定义的情况的周围是一致的), 符号取决于 f 是正当的还是非正当的. 当 $n = 2$ 时, 第三个命题说的是 $\hat{\kappa}_s = \pm\kappa_s$.

Proof. 令 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为正则曲线, 不失一般性地假设 γ 是弧长参数化的. 令 $f = T_{\mathbf{q}} \circ L_{\mathbf{A}}$ 为 \mathbb{R}^n 中的保距变换 (见命题1.58). 定义 $\hat{\gamma} = f \circ \gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$. 换句话说,

$$\hat{\gamma}(t) = \mathbf{A} \cdot \gamma(t) + \mathbf{q}.$$

我们将会使用帽子 ($\hat{\cdot}$) 来表示与 $\hat{\gamma}$ 相关的函数. 暂停一下, 在这里我们先搞清楚: 对于分量 $\forall t \in I$, 我们有

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \cdot \gamma(t)) = \mathbf{A} \cdot \gamma'(t).$$

此“常数乘法规则”将会被反复使用. 首先, 我们注意到:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{v}}(t) &= \frac{d}{dt}\hat{\gamma}(t) = \frac{d}{dt}(\mathbf{A} \cdot \gamma(t) + \mathbf{q}) = \mathbf{A} \cdot \gamma'(t) + \mathbf{0} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}(t), \\ \hat{\mathbf{a}}(t) &= \frac{d}{dt}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}(t)) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}(t).\end{aligned}$$

省略输入变量, 此式整理为 $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$, $\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}$. 尤其是, $|\hat{\mathbf{v}}| = |\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}| = |\mathbf{v}| = 1$, 所以 $\hat{\gamma}$ 也是弧长参数化的. 曲率是

$$\hat{\kappa} = |\hat{\mathbf{a}}| = |\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}| = |\mathbf{a}| = \kappa,$$

这证明了第一个命题. 关于第二个命题, 首先注意到

$$\hat{\mathbf{t}} = \frac{\hat{\mathbf{v}}}{|\hat{\mathbf{v}}|} = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}|} = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \mathbf{A} \cdot \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{t}.$$

因此, 每当 $\kappa \neq 0$ 时,

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\hat{\mathbf{t}}'}{|\hat{\mathbf{t}}'|} = \frac{(\mathbf{A} \cdot \mathbf{t})'}{|(\mathbf{A} \cdot \mathbf{t})'|} = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{t}'}{|\mathbf{A} \cdot \mathbf{t}'|} = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{t}'}{|\mathbf{t}'|} = \mathbf{A} \cdot \frac{\mathbf{t}'}{|\mathbf{t}'|} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}.$$

假设 $n = 3$. 注意到 $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ 是 \mathbb{R}^3 的正定向的规范正交基. 因为 \mathbf{A} 是正交的,

$$\{\mathbf{A} \cdot \mathbf{t}, \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}, \mathbf{A} \cdot \mathbf{b}\} = \{\hat{\mathbf{t}}, \hat{\mathbf{n}}, \mathbf{A} \cdot \mathbf{b}\}$$

是个规范正交基, 是正定向的当且仅当 $\det(\mathbf{A}) = 1$. 与正定向的规范正交基 $\{\hat{\mathbf{t}}, \hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{b}}\}$ 相比较, 容易知道 $\hat{\mathbf{b}} = \pm \mathbf{A} \cdot \mathbf{b}$, 符号取决于 $\det(\mathbf{A}) = \pm 1$. 因此,

$$\langle \hat{\mathbf{b}}', \hat{\mathbf{n}} \rangle = \langle (\pm \mathbf{A} \cdot \mathbf{b})', \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \rangle = \pm \langle \mathbf{A} \cdot \mathbf{b}', \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \rangle = \pm \langle \mathbf{b}', \mathbf{n} \rangle.$$

因此, $\hat{\tau} = \tau$ 若 $\det(\mathbf{A}) > 0$, $\hat{\tau} = -\tau$ 若 $\det(\mathbf{A}) < 0$. 关于第三个命题, 假设 $n = 2$. 因为 $\{\mathbf{v}, R_{90}(\mathbf{v})\}$ 是个正定向的规范正交基而 \mathbf{A} 是正交的,

$$\{\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}, \mathbf{A} \cdot R_{90}(\mathbf{v})\} = \{\hat{\mathbf{v}}, \mathbf{A} \cdot R_{90}(\mathbf{v})\}$$

是个正交基, 且是正定向的当且仅当 $\det(\mathbf{A}) > 0$. 与正定向的规范正交基 $\{\hat{\mathbf{v}}, R_{90}(\hat{\mathbf{v}})\}$ 相比, 我们很容易知道 $R_{90}(\hat{\mathbf{v}}) = \pm \mathbf{A} \cdot R_{90}(\mathbf{v})$, 符号取决于 $\det(\mathbf{A}) = \pm 1$. 所以带符号曲率为

$$\hat{\kappa}_s = \langle \hat{\mathbf{a}}, R_{90}(\hat{\mathbf{v}}) \rangle = \langle \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}, \pm \mathbf{A} \cdot R_{90}(\mathbf{v}) \rangle = \pm \langle \mathbf{a}, R_{90}(\mathbf{v}) \rangle = \pm \kappa_s.$$

因此, 若 $\det(\mathbf{A}) > 0$, 则 $\hat{\kappa}_s = \kappa_s$; 若 $\det(\mathbf{A}) < 0$, 则 $\hat{\kappa}_s = -\kappa_s$. □

我们将以两个基本定理结束本小节:

Theorem 1.65 (The fundamental theorems of plane and space curves).

- (1) 若 $I \subset \mathbb{R}$ 为区间, $\kappa_s : I \rightarrow \mathbb{R}$ 为光滑函数, 则存在一个单位速的平面曲线 $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, 它的带符号曲率函数等于 κ_s . 若 $\gamma, \hat{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ 都是这样的曲线, 那么存在一个 \mathbb{R}^2 中正当的保距变换 f 使得 $\hat{\gamma} = f \circ \gamma$.
- (2) 若 $I \subset \mathbb{R}$ 是个区间, $\kappa, \tau : I \rightarrow \mathbb{R}$ 是一对 $\kappa > 0$ 的光滑函数, 那么存在一个单位曲线 $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ 使得曲率函数等于 κ , 扭率函数等于 τ . 若 $\gamma, \hat{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ 是这样的曲线, 那么存在 \mathbb{R}^3 中正当的保距变换 f 使得 $\hat{\gamma} = f \circ \gamma$.

我们仅会证明 (1), 因为 (2) 的证明需要用到微分方程的相关知识. 下面是 (1) 的证明.

Proof of (1). 选定 $t_0 \in I$. 为方便起见, 我们会构造满足初始条件 $\gamma(t_0) = (0, 0)$, $\gamma'(t_0) = (1, 0)$ 的 γ . 为此, 定义角度函数 $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ 为

$$\theta(t) = \int_{t_0}^t \kappa_s(u) du + 0.$$

下面定义速度函数为 $\mathbf{v}(t) = (\cos(t), \sin(t))$. 最后, 定义 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ 为

$$\gamma(t) = \int_{t_0}^t \mathbf{v}(u) du + (0, 0).$$

此向量等式的意思恰是 γ 的分量被定义为 \mathbf{v} 的分量的积分.

就像我们期望的那样, γ 是个单位速的平面曲线, θ 是角度函数. 它的带符号曲率函数是 $\kappa_s = \theta'$, 它的初始条件是 $\gamma(t_0) = (0, 0), \gamma'(t_0) = (1, 0)$. 注意, 我们上面的红色部分是能够变化来满足任意的初始条件的.

对于第二个论断, 令 $\gamma, \hat{\gamma}: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ 为两个单位速度的平面曲线, 他们的带符号曲率函数都等于 κ_s . 每个角度函数 (分别记为 θ 和 $\hat{\theta}$) 都是 κ_s 的反导数¹⁴; 因为反导数在相差一个常数的情况下是独一无二的, 所以我们有 $\hat{\theta} = \theta + \theta_0$ 对某些 $\theta_0 \in \mathbb{R}$. 令 $\mathbf{v}, \hat{\mathbf{v}}$ 表示它们的速度函数, 注意到

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{v}}(t) &= (\cos \hat{\theta}(t), \sin \hat{\theta}(t)) = (\cos(\theta(t) + \theta_0), \sin(\theta(t) + \theta_0)) \\ &= L_{\mathbf{A}}(\cos \theta(t), \sin \theta(t)) = L_{\mathbf{A}}(\mathbf{v}(t)), \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_0) & -\sin(\theta_0) \\ \sin(\theta_0) & \cos(\theta_0) \end{pmatrix}$. 考虑保距变换 $f = T_{\mathbf{q}} \circ L_{\mathbf{A}}$ 和曲线 $\beta = f \circ \gamma$, 其中 $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$ 使 $\beta(t_0) = \hat{\gamma}(t_0)$ 成立. 因为 β 和 $\hat{\gamma}$ 有相同的导函数和初始值, 所以由反导数的唯一性可知 $\beta = \hat{\gamma}$. □

¹⁴“antiderivative” 不定积分去掉常数 C 之类的, 一个意思

1.9 曲率公式复习

下面使我们计算正则曲线的曲率或是带符号曲率的公式:

(1) 对于一般的曲线: $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$:

$$\kappa = \frac{|\mathbf{t}'|}{|\mathbf{v}|} = \frac{|\mathbf{a}^\perp|}{|\mathbf{v}|^2} = \underbrace{|\mathbf{a}|}_{\text{如果是单位速的}}.$$

(2) 对于平面曲线 $\gamma = (x, y): I \rightarrow \mathbb{R}^2$:

$$\kappa_s = \theta' = \frac{\langle \mathbf{a}, R_{90}(\mathbf{v}) \rangle}{|\mathbf{v}|^3} = \frac{x'y'' - x''y'}{((x')^2 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}} = \underbrace{\frac{f''}{(1 + (f')^2)^{3/2}}}_{\text{若 } \gamma(t) = (t, f(t))}.$$

(3) 对于空间曲线 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$:

$$\kappa = \frac{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}{|\mathbf{v}|^3}.$$

Chapter 2

曲线的其他话题

本章将介绍几种深入研究曲线几何的方法, 包括该领域的一些著名定理. 曲线理论是一个古老而又极其发达的数学课题. 我们的目的只是描述一些基本的、有趣的重点.

2.1 Hopf 和 Jordan 的定理

这一小节将会主要提供两个历史上很重要的定理的证明.

Theorem 2.1. 令 $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ 为简单平面闭曲线. 令 $C = \gamma([a, b])$ 表示它的轨迹.

- (1) (**Hopf 循环**¹) γ 的旋转指数要么是 1 要么是 -1 .
- (2) (**Jordan 曲线定理**) $\mathbb{R}^2 - C = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2 | \mathbf{p} \notin C\}$ 由两个道路连通分支. 它们的共同边界是 C . 其中一个分支 (我们称为**内部**) 是有界的, 另一个分支 (我们称为**外部**) 是无界的.

每个定理都提供了一种有意义地区分 γ 的两种可能定向的方法, 而且它们所提供的方法是等价的:

Definition 2.2. 简单闭曲线 $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ 是**正定向**的若它满足以下的等价条件:

- (1) γ 的旋转指数为 1.
- (2) 在物体穿过曲线 γ 时, 曲线的内部位于曲线运动方向的左侧; 更准确地说,

¹原文 “Hopf’s Umlaufsatz”, 前者为人名, 后者为德语, “循环速率, 循环, 循环率”. 笔者真的没辙了. 下面使用时会直接将拉丁字母原文放上去.

对每个 $t \in [a, b]$, $R_{90}(\gamma'(t))$ 在以下的意义下指向曲线的内部: 存在 $\delta > 0$ 使得 $\gamma(t) + sR_{90}(\gamma'(t))$ 位于曲线内部对于任意的 $s \in (0, \delta)$ 成立.

换句话说, γ 是负定向的, 如果它的旋转指数为 -1 , 且 $R_{90}(\gamma'(t))$ 在 t 取 $[a, b]$ 内的任意值的时候都指向曲线外部.

这两个条件的等价关系的最初灵感来自于 Hopf's Umlaufsatz 和 Jordan 曲线定理的证明.

这一小节的剩余内容主要包含以下几个内容: 1) 给出以上两个基本定理的证明概要, 这些内容读者初读时可以跳过; 2) 将 Hopf's Umlaufsatz 推广到分段正则的曲线上, 这是第 6 章的一个很重要的前置条件.

回忆: 单位速闭平面曲线 $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ 的速度函数可以被看作是函数 $\mathbf{v}: [a, b] \rightarrow S^1$, 其中 $\mathbf{v}(a) = \mathbf{v}(b)$, $S^1 = \{(\cos \theta, \sin \theta) | \theta \in \mathbb{R}\}$. 在前面的章节中, 此观点允许我们构造一个全局角度函数 $\theta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, 构造时就要求它使得 $\mathbf{v}(t) = (\cos \theta(t), \sin \theta(t))$ 对任意 $t \in [a, b]$ 成立. 从这些内容我们可以推断出平面曲线的旋转指数²是 $\frac{1}{2\pi}(\theta(b) - \theta(a))$.

现在, 不去想平面曲线的事儿了. 想象以下你只是在处理一个任意的 $[a, b] \rightarrow S^1$ 的连续函数, 函数在 a 和 b 处的函数值是一致的 (这意味着从函数值到各阶导数全部都是对应相等的). 暂时不考虑速度函数. 我们宣称上面的步骤依旧有用:

Definition and Proposition 2.3. 若 $\mathbf{f}: [a, b] \rightarrow S^1$ 是连续函数, $\mathbf{f}(a) = \mathbf{f}(b)$, 则存在连续的角度函数 $\theta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 使得对任意的 $t \in [a, b]$ 都有

$$\mathbf{f}(t) = (\cos \theta(t), \sin \theta(t)).$$

此函数在相差 2π 的整数倍的意义下是唯一的. \mathbf{f} 的度³定义为整数 $\frac{1}{2\pi}(\theta(b) - \theta(a))$.

若 \mathbf{f} 是光滑的, 那么命题可以由命题 1.39 推出, 因为对 \mathbf{f} 进行积分就能够得到速度函数为 \mathbf{f} 的单位速的曲线. 总之, 连续函数 $\mathbf{f}: [a, b] \rightarrow S^1$, $\mathbf{f}(a) = \mathbf{f}(b)$ 的度是粗糙地显示区域环绕着单位元逆时针旋转的次数的整数. 注意到闭曲线 γ 的旋转参数与它的单位切向量函数 $t \mapsto \mathbf{t}$ 的度是相等的.

我们将反复使用这一思想方法: 从 $[a, b]$ 映射到 S^1 的任意两个函数, 只要输出是足够接近的, 那么它们的度一定相同:

²rotation index

³degree, 不知道说的是什么.

Lemma 2.4. 令 $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 : [a, b] \rightarrow S^1$ 为连续函数且满足 $\mathbf{f}_1(a) = \mathbf{f}_1(b), \mathbf{f}_2(a) = \mathbf{f}_2(b)$. 若 \mathbf{f}_1 和 \mathbf{f}_2 的度数不同, 则存在 $t_0 \in [a, b]$ 使得 $\mathbf{f}_1(t_0) = -\mathbf{f}_2(t_0)$.

Proof. 令 $\theta_1, \theta_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 为 \mathbf{f}_1 和 \mathbf{f}_2 的角度函数. 考虑差值 $\delta(t) = \theta_2(t) - \theta_1(t)$. 因为度数不同, 所以

$$|\delta(b) - \delta(a)| = \underbrace{|\theta_2(b) - \theta_2(a)|}_{2\pi(\mathbf{f}_2 \text{ 的度数})} - \underbrace{|\theta_1(b) - \theta_1(a)|}_{2\pi(\mathbf{f}_1 \text{ 的度数})} \geq 2\pi.$$

因为 δ 有至少 2π 的净变化, 所以在 $\theta(a)$ 和 $\theta(b)$ 之间一定会有 π 的奇整数倍. 中值定理告诉我们 δ 在某个 $t_0 \in [a, b]$ 处可以取到该值, 所以 $\mathbf{f}_1(t_0) = -\mathbf{f}_2(t_0)$. \square

Proof of Hopf's Umlaufsatz. 令 $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ 为平面简单闭曲线. 用 C 表示它的轨迹. 设 $\mathbf{p} \in C$ 为轨迹上一点, 该点满足 C 完全位于该点处切线 L 的某一侧内. 这是能够做到的, 只需要考虑 \mathbb{R}^2 上一个足够大的圆, 该圆把整个曲线的轨迹都包含在内. 然后缩小半径直到该圆首次触碰到 C . 首次触碰到 C 的点即为满足条件的点.

不失一般性, 我们假设 γ 满足 $\gamma(a) = \mathbf{p}$, γ 是弧长参数化的. 考虑三角形

$$T = \{(t_1, t_2) | a \leq t_1 \leq t_2 \leq b\}.$$

定义函数 $\psi : T \rightarrow S^1$ 为

$$\psi(t_1, t_2) = \begin{cases} \gamma'(t_1) & \text{若 } t_1 = t_2, \\ \frac{\gamma(t_2) - \gamma(t_1)}{|\gamma(t_2) - \gamma(t_1)|} & \text{若 } t_1 \neq t_2 \text{ 且 } \{t_1, t_2\} \neq \{a, b\}, \\ -\gamma'(a) & \text{若 } \{t_1, t_2\} = \{a, b\} \end{cases}$$

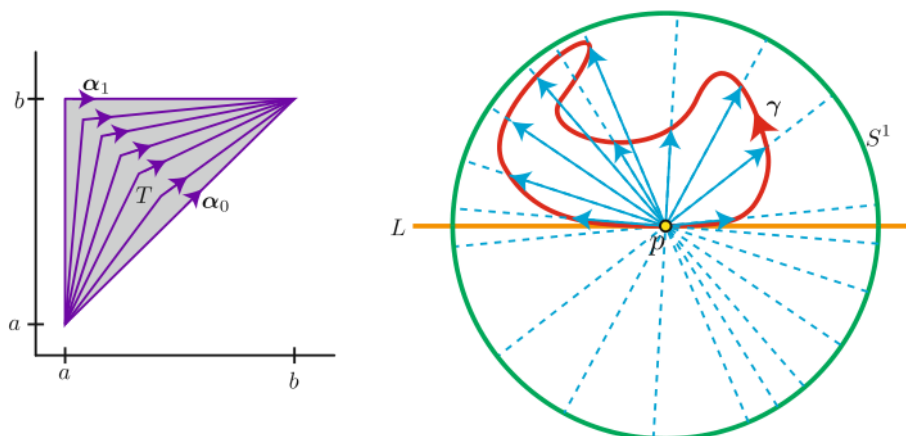
对于多数输入来说, $\psi(t_1, t_2)$ 为从 $\gamma(t_1)$ 指向 $\gamma(t_2)$ 的单位向量. 定义的剩余部分只是保证了 ψ 的连续性. 例如, 由命题 1.7, 正确的连续延拓 ψ 到 T 的斜边上一点 (t, t) 的方法是 $\psi(t, t) = \gamma'(t)$.

令 $\alpha_0 : [0, 1] \rightarrow T$ 从 (a, a) 到 (b, b) 的线段的参数化. 令 $\alpha_1 : [0, 1] \rightarrow T$ 为从 (a, a) 到 (a, b) 然后接从 (a, b) 到 b, b 的线段的参数化. 那么, 我们能够在函数于函数之间连续地插入一系列从 (a, a) 到 (b, b) 的道路 $\alpha_s : [0, 1] \rightarrow T, s \in [0, 1]$. 在这里“连续”是指 $(s, t) \mapsto \alpha_s(t)$ 是个从 $[0, 1] \times [0, 1]$ 到 T 的连续函数.

对每个 $s \in [0, 1]$, 令 $D(s)$ 表示 $\psi \circ \alpha_s : [0, 1] \rightarrow S^1$ 的度数. 引理 2.4 能够用来说明 $s \mapsto D(s)$ 是局部常值, 因此在 $[0, 1]$ 上是连续的. 因为 D 的值是整数且它是连续的, 所以由附录中的命题 A.19⁴ 可知 D 在 $[0, 1]$ 上为常数, 所以 $D(0) = D(1)$.

由定义知, $D(0)$ 等于 γ 的单位切向量函数的度数, 也等于 γ 的旋转指数. 现在, $D(1)$ 为何一定等于 1 或 -1 (Hopf's Umlaufsatz 本身的结论) 还有待说明.

⁴译者比较懒, 请读者自行前往原书查询



Hopf's Umlaufsatz 的证明

如上图⁵, 当 α_1 首先从 (a, a) 走向 (a, b) 时, 道路 $\psi \circ \alpha_1$ 的路径同蓝色向量, 逆时针沿着 S^1 的上半部分“走”了半圈. 随即当 α_1 从 (a, b) 走向 (b, b) 时, 道路 $\psi \circ \alpha_1$ 的路径同蓝色向量的反向, 逆时针沿着 S^1 的下半部分“走”了半圈 (与上面的半圈合起来是一圈). 因此, $D(1) = 1$. 若 γ 上配备了另外一种定向, 那么 $D(1) = -1$. 这样我们就完成了证明.⁶ \square

对于下一个证明, 我们需要一种叫做管状邻域 (*tubular neighborhood*) 的概念. 假设 $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ 为简单平面闭曲线. 对足够小的 $\epsilon > 0$, 考虑函数 $\varphi: (-\epsilon, \epsilon) \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, 定义为

$$\varphi(s, t) = \gamma(t) + s \cdot R_{90}(\mathbf{v}(t)).$$

对固定值 t_0 , 函数 $s \mapsto \varphi(t_0, s)$ 将一段垂直穿过 γ 的轨迹的小线段参数化了. 一个重要的事实是这些小线段是能够做到彼此没有交点的. 换句话说, 我们有以下结论:

Proposition 2.5. 对足够小的 $\epsilon > 0$, φ 是单射.

我们会把此命题的证明放在对反函数定理的讨论后面. 这个现象既是局部的也是全局的. ϵ 的值必须足够小才能够确保曲线急转弯时小线段之间仍然没有交点, 而且这也可看作是全局性质若曲线形成一个闭环. φ 的图像称为 γ 的一个管状邻域.

如果将 γ 的轨迹从管状邻域中移出, 那么将剩下两个道路连通分支, 即 $\varphi((-\epsilon, 0) \times (a, b])$ 和 $\varphi((0, \epsilon) \times (a, b])$. 这俩都是道路连通的, 因为对 φ 来说它是个矩形.

⁵译者认为他有理由相信作者在讲解这里的时候做了动态的效果演示... 因为这里的文字说明有点生硬, 但是联系 ppt 的动画效果会非常好懂... 迫不得已破戒放了本翻译第一张图片, 因为作者这一段说明就是看图说话... 怎么看都不像是什么严谨的证明的样子. 唉! 译者可太难了!

⁶作者: 为帮助读者更好地理解函数 $\psi \circ \alpha$ 和此函数的度数, 在这里有个很好的动画化图像:
<http://www.mathematik.com/Hopf/index.html>

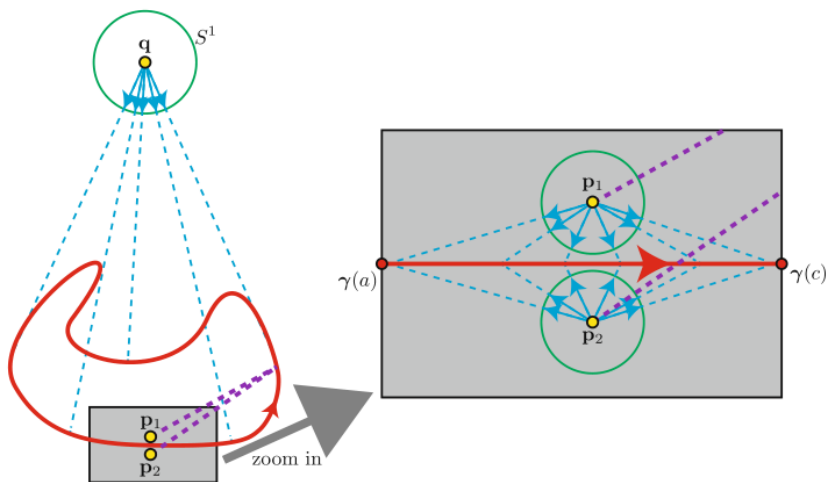
Proof of the Jordan Curve Theorem. 令 $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ 为简单平面闭曲线. 同 C 表示它的轨迹. 对任意的 $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2 - C$, 考虑函数 $\mathbf{f}_{\mathbf{p}}: [a, b] \rightarrow S^1$, 定义为

$$\mathbf{f}_{\mathbf{p}}(t) = \frac{\gamma(t) - \mathbf{p}}{|\gamma(t) - \mathbf{p}|}.$$

令 $W(\mathbf{p})$ 表示 $\mathbf{f}_{\mathbf{p}}$ 的度数. 直观来看, 如果你站在 \mathbf{p} 点, 手指指向正在沿着 C 前行的一个朋友, 那么 $W(\mathbf{p})$ 就是你始终指向朋友时的旋转的逆时针的净绕圈数⁷. 引理2.4能用来说明 W 在局部上是常值, 因此在其定义域 $\mathbb{R}^2 - C$ 上是连续的. 它在定义域内的任意一个道路连通分支内是常值, 因为在每个定义域内的道路上, W 是连续变化的但是只能取到整数值, 所以附录中的命题 A.19 说明它一定是个常值. 我们的目标是说明 $\mathbb{R}^2 - C$ 一定有两个道路连通分支, 在一个上 $W = 0$, 另一个上 $W = 1$ 或 -1 (取决于 γ 的定向).

如果 \mathbf{q} 距离 C 足够远, 那么 $\mathbf{f}_{\mathbf{q}}$ 不是满射, 因为它的图像被限制为 S^1 上的一段弧. 那么由引理2.4可知 $W(\mathbf{q})$ 等于常值函数的度数, 即为 0. 我们将说明 W 能够取到非零值, 所以 $\mathbb{R}^2 - C$ 至少有两个连通分支.

试想一下, 用足够的放大倍数放大 C 的某一点, 使放大窗口位于管状邻域内, 而在该窗口内, C 被其切线很好地逼近. 选择此窗口内的一对点 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$, 使得此两点彼此十分接近但是位于 C 的两侧. 我们宣布, 放大的部分和我们选定的两点可以使 $|W(\mathbf{p}_1) - W(\mathbf{p}_2)| = 1$ 成立. 为证明这一点, 设 ϵ 为一个较小的量, 且在放大的窗口变小, $|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2|$ 随之变小时会趋近于 0.⁸



$$W(\mathbf{q}) = 0, \text{ 且 } |W(\mathbf{p}_1) - W(\mathbf{p}_2)| = 1$$

为使证明更具体, 译者被迫放了上面的图. 我们假设曲线的情况就如图所示 (C 在水平方向被从左到右横穿, \mathbf{p}_1 在图线上方, \mathbf{p}_2 在图线下方), 且曲线使参数化的, $\gamma(t)$ 被放大显示到

⁷ 好拗口啊

⁸ 这一段好抽象啊

右侧灰色方框中的部分是 $t \in [a, c]$ 时的图像 ($a < c < b$). 仅看 $[a, c]$ 上的图像时, \mathbf{f}_{p_1} 和 \mathbf{f}_{p_2} 都始于距离 $(-1, 0)$ 为 ϵ 的点, 都结束于距离 $(1, 0)$ 为 ϵ 的点. \mathbf{f}_{p_1} 大致逆时针覆盖了 S^1 的下半部分, \mathbf{f}_{p_2} 大致逆时针覆盖了 S^1 的上半部分. 此外, 对于 $t \in [c, b]$, 我们有 $|\mathbf{f}_{p_1}(t) - \mathbf{f}_{p_2}(t)| < \epsilon$, 就如图中的紫线所示.

我们将给 \mathbf{f}_{p_1} 和 \mathbf{f}_{p_2} 一个小小的, 不会改变函数的度数的扰动 (根据引理 2.4). 首先, 可以修改函数在 $[a, c]$ 上的值使得它们的起止点恰为 $\mathbf{f}_{p_1}(a) = \mathbf{f}_{p_2}(a) = (-1, 0)$, $\mathbf{f}_{p_1}(c) = \mathbf{f}_{p_2}(c) = (1, 0)$. 然后, 我们能够重新定义 \mathbf{f}_{p_2} 使得它在 $[c, b]$ 上与 \mathbf{f}_{p_1} 相等. 在经过这些改变后, 它们的度数相差 1. 为解释此现象, 想象先沿着 \mathbf{f}_{p_1} 的图像走一遍再沿着 \mathbf{f}_{p_2} 的图像再反着走回去. 此道路, 记作 $\mathbf{f}_{p_1} - \mathbf{f}_{p_2}$, 能逆时针穿过 S^1 的下半部分后, 走了别的路径转转再原路返回后逆时针又穿过了 S^1 的上半部分. 则最终结果就是逆时针绕了一圈. 因为 $\mathbf{f}_{p_1} - \mathbf{f}_{p_2}$ 的度数等于 1, 所以可得 \mathbf{f}_{p_1} 的度数 $- \mathbf{f}_{p_2}$ 的度数 $= 1$.

我们现在知道 \mathbf{p}_1 和 \mathbf{p}_2 位于 $\mathbb{R}^2 - C$ 的不同的道路连通分支之内. 我们认为这就是两个仅有的分支. 换句话说, 任意的其他点 $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2 - C$ 都能够构造在 $\mathbb{R}^2 - C$ 中的连续的道路与 \mathbf{p}_1 或者 \mathbf{p}_2 连接上. 为此, 选择一个从 \mathbf{p} 到 C 的最短路径. 在抵达 C 之前, 此路径就会接触到一个 C 的一个管状邻域, 在其内可以与 \mathbf{p}_1 或 \mathbf{p}_2 连接上.

因此, $\mathbb{R}^2 - C$ 恰有两条道路连通分支. 令 $B \subset \mathbb{R}^2$ 表示足够将 C 容纳在内的球. 显而易见的是, $\mathbb{R}^2 - C$ 的一个分支包含了 B 的补集, 因此是无界的, 所以另一个分支被包含在 B 内, 且是无界的. \square

此小节的剩余部分会把它的主要定理一般化. Jordan 曲线定理在 $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ 仅仅是个满足 $\gamma(a) = \gamma(b)$ 的且在 $[a, b]$ 上是双射的连续函数时也是正确的, 但是在这样的设定下证明却要困难得多.

Hopf's Umlaufsatz 在 γ 不连续的条件下是无意义的, 但是它至少能够一般化到分片正则的曲线的情形:

Definition 2.6. \mathbb{R}^n 中分片正则曲线是连续函数 $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ 且配有一个分割 $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, 使得 γ 在子区间 $[t_{i-1}, t_i]$ 上的限制 γ_i 是正则曲线. 它是闭曲线若 $\gamma(a) = \gamma(b)$, 是简单曲线若在 $[a, b]$ 上它是双射. 它是单位速的若每个 γ_i 都是单位速的.

换句话说, 只有在有限多个点处 γ 仅连续但是不光滑. 闭曲线的定义不要求在 a 和 b 处 γ 的导数对应相等, 这意味着 $t = a$ 处对应 γ 上的某个不光滑的点也是可能的.

分片正则的简单闭平面曲线 γ 称为正定向的若 $R_{90}(\gamma'(t))$ 指向曲线的内部对每一个对应于光滑点的 t 成立 (即除了定义中的分割的端点外的所有点); 否则, 它就是负定向的.

设 $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ 为分片正则的平面曲线, 配备有记为 $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ 的分割. 每个不光滑的点 $\gamma(t_i)$ 都被称为是 γ 的一个拐角 (corner). 在这个点处, 由左极限和右

极限可以计算出两个速度向量:

$$\mathbf{v}^-(t_i) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\gamma(t_i + h) - \gamma(t_i)}{h} = \lim_{t \rightarrow t_i^-} \gamma'(t),$$

$$\mathbf{v}^+(t_i) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\gamma(t_i + h) - \gamma(t_i)}{h} = \lim_{t \rightarrow t_i^+} \gamma'(t).$$

由我们的正则性假设, 两个值都是非零的. 为此我们定义了 $\gamma(t_i)$ 处的带符号角度, 记为 $\alpha_i \in [-\pi, \pi]$. 它满足它的绝对值等于 $\mathbf{v}^-(t_i)$ 和 $\mathbf{v}^+(t_i)$ 之间的角度的最小的测量值. 它的符号是正的若 $\mathbf{v}^-(t_i)$ 经逆时针旋转该角度值能够转到 $\mathbf{v}^+(t_i)$ 的方向上 (负值, 如果旋转必须是顺时针的). 注意, γ 的反定向会改变角度的符号但是不会改变角度的绝对值.

拐角 $\gamma(t_i)$ 被称为是一个尖角 (cusp) 如果 $\mathbf{v}^+(t_i)$ 是 $\mathbf{v}^-(t_i)$ 的负值标量积. 尖角处的带符号角度的值是该规范化规定为 π 还是 $-\pi$ 在 γ 是正定向的简单闭曲线的时候是最容易描述的. 在上面附加的假设下, $\alpha_i = \pi$ 若 $\mathbf{v}^-(t_i)$ 指向外部, $\alpha_i = -\pi$ 若 $\mathbf{v}^-(t_i)$ 指向内部; 对符号的约定在曲线负定向时是相反的.

若 γ 是闭曲线且 $\gamma'(a) \neq \gamma'(b)$, 那么 $\gamma(a)$ 就是一个拐角, 相应的带符号角度与上面的定义是相同的, 只不过 $\mathbf{v}^-(a)$ 换为 $\mathbf{v}^-(b)$.

Theorem 2.7 (一般化 Hopf's Umlaufsatz). 设 $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ 是一个单位速的正定向的分片正则的简单平面闭曲线. 设 κ_s 表示它的带符号曲率函数, 设 $\{\alpha_i\}$ 为拐角处的带符号角度值. 则

$$\int_a^b \kappa_s(t) dt + \sum_i \alpha_i = 2\pi.$$

此处 “ $\int_a^b \kappa_s(t) dt$ ” 是 $\sum_i \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \kappa_s(t) dt \right)$ 的简写 (意思是 κ_s 在各个光滑区间段上的积分之和).

若 γ 是正则的 (即没有拐角), θ 表示 γ 的全局角度函数, 则回忆第1.6节的内容, $\kappa_s = \theta'$, 所以

$$\int_a^b \kappa_s(t) dt = \int_a^b \theta'(t) dt = \theta(b) - \theta(a) = 2\pi \cdot (\text{环绕数}^9).$$

所以在这样的情况下, 定理2.7说明环绕数为 1, 这与定理2.1一致.

当 γ 有拐角的时候, 定义一个 “角度函数” θ 使得在每个拐角处都有一个等于该拐角处的带符号角度的 “跳跃”, 在其他的地方满足 $\kappa_s = \theta'$ 是可行的. 表达式 $\int_a^b \kappa_s(t) dt + \sum_i \alpha_i$ 等于这个 (不连续的) 角度函数的净变化. 定理2.7的证明涉及到将拐角处光滑化来获得连续的角度函数:

证明思路. 直观一点的想法就是在拐角的邻域内把 γ 光滑化. 若 $\tilde{\gamma}$ 表示 γ 光滑化后的版本, $\tilde{\kappa}_s$ 表示 $\tilde{\gamma}$ 的带符号曲率函数, 则原版本的 Hopf's Umlaufsatz 说的是 $\int_a^b \tilde{\kappa}_s(t) dt = 2\pi$.

⁹就是 “rotation index”, 原来的译法 “旋转参数” 非常拗口, 就改成环绕数了.

尽管我们不会讨论分析细节, 但是直观上, 我们可以相信光滑化过程是可以做到使得下式成立:

$$\int_a^b \kappa_s(t) dt + \sum_i \alpha_i = \int_a^b \tilde{\kappa}_s(t) dt = 2\pi.$$

□

上面的证明对解释我们之前对拐角处的带符号角度的定义. 该定义基本上是为了与光滑化后角度函数的净变化相匹配而设计的; 换句话说, α_i 是光滑化后该拐角附近的逆时针旋转角 (若顺时针则为负). 此描述在尖角处也是合适的.

有时利用内角重新描述之前的定理是很方便的. 设 $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ 为逐段光滑的简单闭平面曲线, 带符号角度记为 $\{\alpha_i\}$. γ 的第 i 个内角, 记为 $\beta_i \in [0, 2\pi]$, 为曲线内部的角¹⁰. 注意, 定向的改变会改变带符号角度的符号但是对内角没有影响. 内角与带符号角度的关系如下:

$$\beta_i = \begin{cases} \pi - \alpha_i & \text{若 } \gamma \text{ 是正定向的,} \\ \pi + \alpha_i & \text{若 } \gamma \text{ 是负定向的.} \end{cases}$$

在定理2.7中, γ 被认为是正定向的, 所以定理就变成

$$\int_a^b \kappa_s(t) dt = \sum_i \beta_i - (n - 2)\pi,$$

其中 n 是拐角的数量. 若 γ 的光滑区段是直线段, 则这个表达式就会变成

$$\sum_i \beta_i = (n - 2)\pi,$$

这就是我们熟知的平面多边形的内角和公式.

¹⁰原文的定义是“如图所示”, 译者试图找一个靠谱点的定义, 但是失败了. 直观理解一下吧.

2.2 凹凸性和四顶点定理 (选读)

在这个小节, 我们将描述微分几何最早的一个全局性的结论, 这提供了简单平面闭曲线的顶点数目的限制.

Definition 2.8. 设 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ 为正则平面曲线. 轨迹上一点 $\gamma(t)$ 被称为是**顶点 (vertex)** 若在该点 t 处其带符号曲率函数有极大值或是极小值 (局部最大/小值).

此定义与重参数化是独立的 (相互无影响). 容易计算, 椭圆有四个顶点, 两个处 κ_s 取极大, 两个处 κ_s 取极小. $r = 1 - 2\sin(\theta)$ 的极坐标图恰有两个顶点. 闭曲线至少有两个顶点, 因为带符号曲率函数一定能够在它的紧定义域上取到最大值和最小值 (由附录中的推论 A.25 得到). 注意到圆上的每一点都能够看作是极大值/极小值, 也就是顶点, 所以圆实际上有无穷多顶点. 相同原因下性质类似的还有直线.

这一节的主要定理说的是一个简单闭平面曲线一定会至少有和椭圆相同数量的顶点数.

Theorem 2.9 (四顶点定理). 每个闭平面简单曲线都有至少四个顶点.

这一小节将会专注于证明这个定理, 但是仅限于曲线是个凸曲线的情形:

Definition 2.10. 简单闭平面曲线是**凸的**若它的轨迹位于它每一点处的切线的某一侧的闭半平面¹¹.

术语“闭半平面”意思是切线本身被包含在该半平面内, 因为切线的轨迹是于曲线的轨迹有公共点的 (即为切点 \mathbf{p}) (说不定还有其他点, 如果在 \mathbf{p} 的邻域内还有其他直线的话).

我们对下列关于凹凸性的结论有要求:

Lemma 2.11. 设 C 为简单平面闭凸曲线的轨迹, 设 L 为直线.

- (1) 若 L 在两个不同的点处与 C 相切, 那么 C 包含 L 在这两点之间的整个区段.
- (2) 如果 $L \cup C$ 包含不止两个点, 那么他包含这些点中的任意两个之间的整个区段.

Proof. 第 (1) 部分留作练习. 关于第 (2) 部分, 假设 $L \cup C$ 包含至少三个点, 且具有顺序 $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$, \mathbf{p}_2 位于 \mathbf{p}_1 和 \mathbf{p}_3 之间. 注意到若 C 在 \mathbf{p}_2 处必有切线, 且该切线就是 L , 否则另

¹¹ 这里是为了上下文连贯性强行加的, 加下划线的部分完全可以不看.

外两点将位于切线的不同侧. 因为 L 是个切线, 而凸性要求 C 不能够在 L 上的任意一点穿过 L , 所以 L 一定在三点都与 C 相切. 然后就是再利用 (1) 的结论. \square

证明需要的最后的前置准备是曲线分别关于 x -分量和 y -分量的带符号曲率的熟悉的定义的公式化. 对于一个正则平面曲线, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, 我们回忆

$$\mathbf{v}(t) = (x'(t), y'(t)), \mathbf{a}(t) = (x''(t), y''(t)), R_{90}(\mathbf{v}(t)) = (-y'(t), x'(t)).$$

当 γ 是单位速时, 它的带符号曲率由 $\mathbf{a}(t) = \kappa_s R_{90}(\mathbf{v}(t))$ 定义 (等式(1.9)). 此等式分离 x -分量和 y -分量后可得

$$(2.1) \quad x''(t) = -\kappa_s(t)y'(t), y''(t) = \kappa_s(t)x'(t).$$

四顶点定理在凸曲线情形下的证明. 设 γ 为简单平面闭凸曲线, 设 C 表示它的轨迹. 不失一般性, 不妨设 γ 是正定向的. 假设 κ_s 是在任何区间上不是常数, 因为这样的区间上每一点都可以被看作是一个顶点, 那么 C 就有无穷多顶点. 尤其是, 我们能假设 C 上的任意区段都不是直线段.

若 γ 恰有 3 个顶点, 那么沿着 C 有连续的两个点会是同一类型的两个顶点 (曲率都是极大值或是极小值点). 但这是不可能的, 因为一个非常值的光滑实值函数不可能有连续两个相同类型的极值点.

现在我们假设 γ 有小于 3 个顶点; 也就是说, 它的轨迹的顶点只有在 κ_s 在 \mathbf{p} 处取得最大值或是在 \mathbf{q} 处取得最小值时两处. 注意, $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$, 因为否则 κ_s 就是个常值函数. 令 L 为穿过 \mathbf{p} 和 \mathbf{q} 的直线. 由引理2.11可知 L 与 C 的公共点仅有 \mathbf{p} 和 \mathbf{q} .

选定一个保定向的单位速重参数化, $\gamma: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$, 使得 $\gamma(0) = \gamma(l) = \mathbf{p}$, $\gamma(a) = \mathbf{q}$, $a \in (0, l)$ 成立. 注意, 在 $(0, a)$ 上 $\kappa'_s \leq 0$ (因为 κ_s 从最大值降到最小值), 在 (a, l) 上 $\kappa'_s \geq 0$ (因为 κ_s 从最小值升到最大值). 不失一般性, 再次不妨设 \mathbf{p} 为原点, L 就是 x 轴.

把 γ 写为分量表示式: $(\gamma(t) = (x(t), y(t)))$. 注意到 $y(t)$ 仅仅会在 $t = a$ 时变号, 因为 γ 在 $t \in (0, a)$ 时在 L 上方, 在 $t \in (a, l)$ 时在 L 下方, 或者相反 (取决于 \mathbf{p} 在 \mathbf{q} 的左边还是右边). 在任意一种情况下, 注意 $y(t)\kappa'_s(t)$ 从不变号; 此表达式要么在 $(0, l)$ 上恒 ≥ 0 , 要么在 $(0, l)$ 上恒 ≤ 0 .

更进一步, 表达式 $y(t)\kappa'_s(t)$ 仅当 $\kappa'_s = 0$ 时等于零, 但是在任何一个长度大于零的区间上都是不会发生的. 因此, 以下表达式的均值不为零:

$$\int_0^l y(t)\kappa'_s(t)dt \neq 0.$$

但是, 分部积分, 利用式(2.1)以及函数是周期函数的事实 (在 0 处和 l 处的取值相等), 我们知道

$$\int_0^l y(t)\kappa'_s(t)dt = y(t)\kappa_s(t)\Big|_{t=0}^{t=l} - \int_0^l \kappa_s(t)y'(t)dt = 0 + \int_0^l x''(t)dt = x'(t)\Big|_{t=0}^{t=l} = 0.$$

此矛盾说明 γ 至少有四个顶点. \square

由于凹凸性的概念同样重要, 我们将会以一些它的定义的等价形式来结束本节:

Proposition 2.12. 设 γ 为简单闭平面曲线. 令 C 为它的轨迹. 令 \mathcal{I} 表示它的内部. 以下命题等价:

- (1) γ 是凸的; 也就是说, C 位于其切线分割出的某一半平面上 (包括边界);
- (2) 连接 \mathcal{I} 中的任意两点的线段一定整个都位于 \mathcal{I} 中.
- (3) κ_s 不会变号; 也就是说, 要么 $\kappa_s \geq 0$ 在整个定义域上成立, 要么 $\kappa_s \leq 0$ 在整个定义域上成立.

Proof.

(1) \implies (2) (由矛盾证明¹²) 假设 γ 是凸曲线, 但是存在一对点 $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathcal{I}$ 使得连接它们的直线段并不整个位于 \mathcal{I} 之内. (无限长的) 包含点 \mathbf{p}, \mathbf{q} 的直线 L 一定与 C 有至少 3 个公共点. 由引理 2.11(2) 知 C 包含 L 的对应区段, 因此 $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in C$, 这与它们是内点矛盾.

(2) \implies (1) 留作练习.

(3) \implies (1) (反证法) 假设 κ_s 不变号, 但是 C 位于其在 $\mathbf{p} = \gamma(t_0)$ 处的切线的两侧. 向量 $\mathbf{n} = -R_{90}(\mathbf{v}(t_0))$ 是与 C 在 \mathbf{p} 处正交的. 考虑函数

$$h(t) = \langle \gamma(t) - \gamma(t_0), \mathbf{n} \rangle.$$

直观来看, $h(t)$ 是 $\gamma(t)$ 在 C 在 $\gamma(t_0)$ 处的切线上方的“高度”, \mathbf{n} 表示向“上”. 注意, $h(t_0) = 0$. 因为 C 位于该切线的两侧, h 既可以取到正值又可以取到负值, 所以我们设它分别在时间 t_1 和 t_2 处取得全局的最大和最小值, 且它们彼此间且与 t_0 都不相等. 显而易见, 速度向量 $\{\mathbf{v}(t_0), \mathbf{v}(t_1), \mathbf{v}(t_2)\}$ 分别都是彼此平行的.

因此, 这三个向量至少有一对向量是指向相同方向的 (而非相反方向). 哪一对向量是无所谓的, 所以我们不妨假设 $\mathbf{v}(t_0)$ 和 $\mathbf{v}(t_2)$ 是相同方向的. 这意味着全局角度函数 θ 在 t_0 点处与 t_2 点处之间的差为 2π 的整数倍. 由 Hopf's Umlaufsatz, θ 在定义域上会改变 $\pm 2\pi$. 因为 $\kappa_s = \theta'$ 不会变号, 所以 θ 会单调的做出这一改变. 这仅当 θ 在 C 上 $\{\gamma(t_0), \gamma(t_1), \gamma(t_2)\}$ 之间的某段是常数 (这一段的 C 也就必然是直线) 是可能的. 但是这与 h 在此三点取值不同矛盾.

(1) \implies (3) (反证法): 假设 γ 是凸的, $\kappa_s = \theta'$ 会变号. 则我们可以选择很近的两点 $t_1 \neq t_2$, 使得 θ' 在这两点之间变号并且 $\theta(t_1) = \theta(t_2)$, 这意味着 $\mathbf{v}(t_1)$ 和 $\mathbf{v}(t_2)$ 是同向的. 由 Hopf's Umlaufsatz, 存在时间点 t_3 使得 $\mathbf{v}(t_3)$ 指向相反方向. C 在这三点 $\{t_1, t_2, t_3\}$ 处的切线是平行的. 如果这三条切线互不重合, 那么中间那一条就会违反凸性的定义, 所以它们中的两条一定会重合 (在这里“中间”是就它们在平面 \mathbb{R}^2 上的位置关系而言). 引理 2.11 说明 γ 在这两点间的轨迹是一条直线. 但是 γ 在 t_1 和 t_2 之间不可能是直线, 因为 θ' 在这两点

¹²译者怀疑是“反证法”的意思, 但是没有证据. 下面直接以“反证法”代替.

之间变号. γ 在 t_3 与其他的任一点之间不可能是直线, 因为角度函数 θ 变化了 π . 这是个矛盾. \square

2.3 Fenchel 定理 (选读)

考察一条曲线的整个卷曲量是很自然的:

Definition 2.13. 正则曲线 $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ 的总卷曲量的定义为

$$\text{总卷曲} = \int_a^b \kappa(t) |\gamma'(t)| dt.$$

γ 的总卷曲量是关于重参数化不变的, 所以我们通常会假设 γ 是单位速的, 在这种情况下它的总卷曲量化为 $\int_a^b \kappa(t) dt$.

为使一个曲线成为闭曲线, 它必须回到起始点. 这需要多少的总卷曲量? 对平面简单闭曲线来说, 这能够由之前的定理和结论很快的得到:

Lemma 2.14. 简单平面闭曲线的总卷曲量 $\geq 2\pi$, 当且仅当凸曲线情形取等号.

Proof. 设 γ 为单位速简单平面闭曲线. 带符号曲率函数的积分值可以由 Hopf's Umlaufsatz 得到:

$$\int_a^b \kappa_s(t) dt = \int_a^b \theta'(t) dt = \theta(b) - \theta(a) = 2\pi \cdot (\text{环绕数}) = \pm 2\pi.$$

与无符号曲率函数的关系如下:

$$\int_a^b \kappa(t) dt = \int_a^b |\kappa_s(t)| dt \geq \left| \int_a^b \kappa_s(t) dt \right| = 2\pi,$$

这在当且仅当 κ_s 不变号的时候是等价的, 由命题 2.12 知当且仅当 γ 是紧的. □

这一节的主要目标是证明以下对 \mathbb{R}^n 中曲线的推广:

Theorem 2.15 (Fenchel 定理). \mathbb{R}^n 中闭曲线的总卷曲量 $\geq 2\pi$, 当且仅当它是平面内 (即 \mathbb{R}^n 中的二维子空间的平移¹³) 的简单闭凸曲线时取等.

术语“凸曲线”之前仅仅在 \mathbb{R}^2 上有定义, 但是它在任意平面上依然可以是有意义的. 为简单起见, 我们仅仅会证明 Fenchel 定理在 $n = 3$ 的情形. 一般情形可以用基本相同的论证得出.

我们将会使用一些球面上的集合的术语和结论:

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

¹³作者的“二维子空间”专指过原点的二维子空间, 故而需要加“平移”二字. 下同, 不加“平移”就一定指过原点的平面.

“ S^2 中的曲线”意思是轨迹为 S^2 的子集的空间曲线。“大圆”意思是 S^2 与 \mathbb{R}^3 的二维子空间的交. 例如, 赤道线 (equator) $E = \{(x, y, 0) | x^2 + y^2 = 1\}$ 是个大圆. 若 $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in S^2$, 那么 $\overline{\mathbf{p}\mathbf{q}}$ 表示它们在 S^2 中的本质距离 (意为连接 \mathbf{p} 和 \mathbf{q} 的 S^2 上的最短的正则弧线的长度). 我们会用到下面的事实:

Lemma 2.16. 若 $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in S^2$ 是一对不同的点, 则 $\overline{\mathbf{p}\mathbf{q}} \leq \pi$, 不等号取等当且仅当 $\mathbf{p} = -\mathbf{q}$. 存在大圆上从 \mathbf{p} 到 \mathbf{q} 的一段弧长为 $\overline{\mathbf{p}\mathbf{q}}$ 的弧, 且当 $\mathbf{p} \neq -\mathbf{q}$ 时此弧是唯一的. S^2 中每个从 \mathbf{p} 到 \mathbf{q} 的弧的长度为 $\overline{\mathbf{p}\mathbf{q}}$ 的轨迹都是大圆的一段.

这个引理我们在第5章讨论在一般曲面中的最短路径时会很轻松地被证明. 现在, 我们假定读者对它是很熟悉的. 它大体上只是说大圆的弧段是 S^2 中点与点之间的唯一的的最短路径, 这是所有跨大西洋飞行员都知道的.

证明 Fenchel 定理的大部分工作都包含在证明以下的事实中:

Lemma 2.17. 设 β 为 S^2 中的正则闭曲线. 若 β 的轨迹与 S^2 中的每个大圆都相交, 那么 β 的弧长 $\geq 2\pi$, 当且仅当 β 为大圆的一个简单重参数化时取等.

Proof of lemma 2.17. 不失一般性, 我们假设 $\beta : [0, l] \rightarrow S^2$ 是弧长参数化的. 定义 $\mathbf{p} = \beta(0) = \beta(l), \mathbf{q} = \beta(l/2)$. 设 β_1, β_2 分别表示 β 在区域 $[0, l/2]$ 和 $[l/2, l]$ 上的限制.

若 $\mathbf{p} = -\mathbf{q}$, 则 $\overline{\mathbf{p}\mathbf{q}} = \pi$, 所以 β_1 和 β_2 都有 $\geq \pi$ 的弧长, 当且仅当轨迹是大圆的一半时同时取等. 因此 β 的弧长 $\geq 2\pi$, 当且仅当 β 的轨迹等于大圆的两半时取等, 且必须是同一个大圆的两半, 因为 β 是光滑的.

若 $\mathbf{p} \neq -\mathbf{q}$, 那么由唯一的大圆 C 包含 \mathbf{p} 和 \mathbf{q} . 设 G 表示正交于 C 并与 \mathbf{p} 和 \mathbf{q} 等距的大圆. β 的轨迹与 G 相交于某一点 \mathbf{r} (因为它与每个大圆都有公共点). 注意到 $\overline{\mathbf{r}\mathbf{p}} = \overline{\mathbf{r}\mathbf{q}}$, 因为关于相关的轴进行 180° 旋转是一个保距变换, 其中 $\mathbf{p} \mapsto \mathbf{q}, \mathbf{r} \mapsto -\mathbf{r}$. 下面我们就有

$$\overline{\mathbf{r}\mathbf{p}} + \overline{\mathbf{r}\mathbf{q}} = \overline{-\mathbf{r}\mathbf{q}} + \overline{\mathbf{r}\mathbf{q}} = \pi.$$

β_1 和 β_2 中有一个会经由 \mathbf{r} 穿过 \mathbf{p} 和 \mathbf{q} , 所以它的弧长一定是 $\overline{\mathbf{r}\mathbf{p}} + \overline{\mathbf{r}\mathbf{q}} = \pi$. 事实上, 他的弧长一定 $> \pi$ (因为等号会强迫记为 θ 的角度等于 180° , 为使 β 光滑, 这与 $\mathbf{p} \neq -\mathbf{q}$ 矛盾). 因为这是 β 的一半, 所以 β 的全弧长一定会 $> 2\pi$, 就像我们期望的那样. \square

Fenchel 定理在空间曲线情形的证明.

设 $\gamma : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^3$ 为单位速闭曲线. 因为 γ 是单位速的, 他的速度函数 \mathbf{v} 是 S^2 上的一个路径.

我们会使用事实 γ 是闭的来证明 \mathbf{v} 的轨迹与每个大圆相交. 为此, 假设 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^3$ 为任意的二维子空间, 则 $G = \mathcal{P} \cap S^2$ 是任意一个大圆. 设 \mathbf{n} 为到 \mathcal{P} 的法向量. 注意到 S^2 上一点

位于 G 上当且仅当他是和 \mathbf{n} 正交的. 因为 $\frac{d}{dt} \langle \gamma(t), \mathbf{n} \rangle = \langle \mathbf{v}(t), \mathbf{n} \rangle$, 微积分基本定理给出

$$\int_0^l \langle \mathbf{v}(t), \mathbf{n} \rangle dt = \langle \gamma(l), \mathbf{n} \rangle - \langle \gamma(0), \mathbf{n} \rangle = 0 \text{ (因为 } \gamma \text{ 是周期函数).}$$

因为 $\langle \mathbf{v}(t), \mathbf{n} \rangle$ 的均值等于 0, 我们会有 $\langle \mathbf{v}(t_0), \mathbf{n} \rangle = 0$ 对于某些 $t_0 \in [0, l]$ 成立. 因此, \mathbf{v} 的轨迹与每个大圆相交. 由引理 2.17, \mathbf{v} 的弧长 $\geq 2\pi$.

因为 γ 是单位速的, $\kappa(t) = |\mathbf{v}'(t)|$, 所以我们有

$$\gamma \text{ 的全卷曲量} = \int_0^l \kappa(t) dt = \int_0^l |\mathbf{v}'(t)| dt = (\mathbf{v} \text{ 的弧长}) \geq 2\pi.$$

若等式成立, 那么 \mathbf{v} 一定是个大圆的简单的重参数化, 大圆为 $G = S^2 \cap \mathcal{P}$. 因为 $\gamma(t) = \int_0^t \mathbf{v}(u) du + \gamma(0)$, 所以 γ 一定位于平面 $\{\gamma(0) + z | z \in \mathcal{P}\}$. 在运用保距变换后, 我们能够把该平面看作 xy 平面, 所以我们将 γ 看作平面曲线. 它的速度函数 \mathbf{v} 是个单位元 S^1 的简单参数化. 这说明 γ 的环绕数是 ± 1 , 有单调的全局角度函数 (或等价地说, 它的带符号曲率始终没变号). 练习 2.10 的结论说明 γ 是简单曲线, 引理 2.14 说明 γ 是凸曲线. \square

2.4 Green 定理 (微积分背景)

此节因为上课进度问题跳过.

2.5 等周不等式

在这一届, 我们在平面上证明经典的等周不等式, 作为格林定理的一个应用.

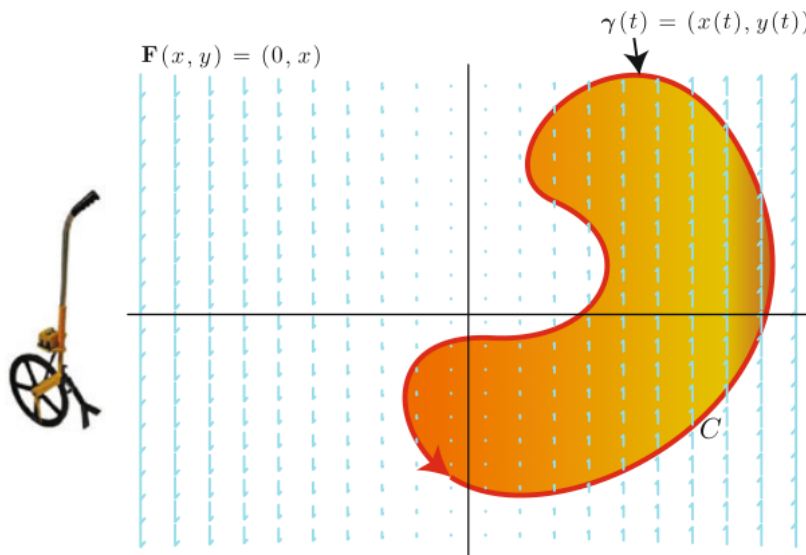
我们从在计算领域中很有用的格林定理的推论开始:

Corollary 2.38. 设 C 为正定向的简单闭平面曲线, $\gamma(t) = (x(t), y(t)), t \in [a, b]$ 是它的一个参数化. C 的内部 D 的面积等于

$$\text{面积}(D) = \int_a^b x(t)y'(t)dt = - \int_a^b y(t)x'(t)dt.$$

Proof. 为获得此关于面积的公式, 可以分别对两个向量场 $\mathbf{F}_1(x, y) = (0, x)$,

$\mathbf{F}_2(x, y) = (-y, 0)$ 运用格林公式. 每个向量场都有恒定值为 1 的无限小循环¹⁴. □



$$\text{Area} = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\gamma = \int_a^b x(t)y'(t)dt^{15}$$

在上面的证明中用到的向量场 $\mathbf{F}_1(x, y) = (0, x)$ 在上图中有直观说明. 在你看图的时候, 想象一下你要怎么设计机械仪器, 通过描画 C 的边界来测量 C 内部的面积. 测量 C 的弧长要简单得多—在轮子上绑上一根棍子再连上一个里程表 (odometer) 就行, 就像上图左侧的那样. 但是通过测量 $\oint_C \mathbf{F}_1 d\gamma = \int_a^b x(t)y'(t)dt$ 来测量面积再机械上是可能的. 这需要对轮子和里程表进行改装, 使其只对运动的垂直分量敏感, 敏感度与到 y 轴的距离成正比. 练习

¹⁴原文 “constant infinitesimal circulation”.

¹⁵呜呜, 被迫营业.jpg

2.33 有个求积仪, 是个利用格林公式求解面积的机械设备 (尽管不是完全运用上面的办法).

可以验证, 长度 l 和任意半径的圆的面积的关系可以由等式 $l^2 = 4\pi A$ 给出 (在这里“长度”指的是“弧长”, 通常叫“周长”). 本小节的剩余部分主要是想证明任意的具有相同面积的平面简单闭曲线的周长都比圆长. 更准确地说, 是如下的定理

Theorem 2.39 (等周不等式). 设 C 为简单闭平面曲线. 若 l 表示 C 的周长, A 表示 C 的内部面积, 那么

$$l^2 \geq 4\pi A,$$

当且仅当 C 为圆时取等.

因此, 如果 C 不是圆, 那么它的周长比和它面积相等的圆的周长要长. 你也能这么解读这个定理: 如果 C 不是圆, 那么它的面积一定会比具有相同的周长的圆的面积要小. 第二种解读对应了定理名字中的“等周”(isoperimetric) 一词, 意为“周长相等”——在所有周长相等的图形中, 圆的面积最大.

Proof. 画两条竖直的线段, 与 C 不相交. 然后将他们向 C 一起挪动知道首次接触到 C , 这样 C 与这两条竖直的线都是相切的, 且 C 位于这两条竖线之间. 设 S^1 为圆, 且与这两条竖线相切. 它的半径 r 等于这两条竖线之间的距离的一半. 不失一般性, 我们假设 C 和 S^1 是无交的, 但是 S^1 的竖直方向的位置对我们的证明过程无影响——只要保证圆和 C 是无交的就行.

设 $\gamma(t) = (x(t), y(t)), t \in [0, l]$ 表示 C 的一个关于弧长参数化, 满足 $\gamma(0)$ 是个上文中 C 与竖直线的交点, $\gamma(t_0), t_0 \in (0, l)$ 是另外的那个交点. 我们会选定 S^1 的一个参数化, 记为 $\beta: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$, 构造时满足 $\forall t \in [0, l], \gamma$ 和 γ 的 x -坐标是一致的; 也就是说, 我们将穿越 S^1 , 同时与以单位速度穿越 C 的人保持竖直方向对齐. 这是可以做到的, 只需构造 $\beta(t) = (x(t), \tilde{y}(t))$, 其中

$$\tilde{y}(t) = \pm \sqrt{r^2 - x(t)^2},$$

符号取决于 $t \in [0, t_0]$ 还是 $t \in [t_0, l]$. 注意到 β 不一定是个正则参数化, 但是这不影响下面的计算.

由引理2.38, C 的面积为 $A = \int_0^l x(t)y'(t)dt$, S^1 的面积是 $\pi r^2 = -\int_0^l \tilde{y}(t)x'(t)dt$ (可以验证, 这在 C 的参数化不是正则的或是简单的时候也是有效的.) 把这些面积加起来 (并省略

自变量) 可以得到

$$\begin{aligned}
 A + \pi r^2 &= \int_0^l (xy' - \tilde{y}x') dt \leq \int_0^l |xy' - \tilde{y}x'| dt = \int_0^l \sqrt{(xy' - \tilde{y}x')^2} dt \\
 &= \int_0^l \sqrt{x^2 y'^2 - 2xy'\tilde{y}x' + \tilde{y}^2 x'^2} dt \\
 &= \int_0^l \sqrt{(x^2 + \tilde{y}^2)(x'^2 + y'^2) - (xx' + \tilde{y}y')^2} dt \\
 &\leq \int_0^l \sqrt{(x^2 + \tilde{y}^2)(x'^2 + y'^2)} dt \\
 &= \int_0^l \sqrt{x^2 + \tilde{y}^2} dt && \text{因为 } \gamma \text{ 是单位速的.} \\
 &= \int_0^l |\beta(t)| dt = \int_0^l r dt = lr && \text{因为 } \beta(t) = (x(t), \pm \sqrt{r^2 - x(t)^2}).
 \end{aligned}$$

总之, $A + \pi r^2 \leq lr$. 我们现在使用几何平均数的上下界来得到下面的式子:

$$\sqrt{A}\sqrt{\pi r^2} \leq \frac{1}{2}(A + \pi r^2) \leq \frac{1}{2}lr.$$

这个式子能够得到 $l^2 \leq 4\pi A$, 就像期望的那样.

还需讨论取等的情况, 也就是 $l^2 = 4\pi A$. 在这样的情况下, 上面的所有不等号都必须取等号, 尤其是 $(xx' + \tilde{y}y')^2 = 0$. 因此,

$$0 = xx' + \tilde{y}y' = \langle (x, \tilde{y}), (x', y') \rangle = \langle \beta, \gamma' \rangle.$$

因为 $|\beta|$ 是常数, 所以我们知道 $\langle \beta, \beta' \rangle = 0$. 因为 β' 和 γ' 都是和 β 正交的, 它们是彼此平行的. 但是因为它们的 x -坐标是一致的, 这说明它们是相等的, 至少当它们相同的第一个分量 x' 非零的时候.

总之, $\beta'(t) = \gamma'(t)$ 在 $t \in [0, l]$ 成立, 当 $\gamma(t)$ 不是竖直的时候. 由连续性可得在 $\gamma'(t)$ 是竖直的时候, 在孤立的时间点处, 相同结论也是成立的. 事实上, 所有这样的时间点都一定是孤立的, 因为否则 γ 会在某个区间上是竖直的, 则 β 会在此区间上速度为零, 与它的速度的连续性矛盾.

因此, $\beta'(t) = \gamma'(t)$ 对所有的 $t \in [0, l]$ 成立. 因为反导数 (不定积分的原函数) 在相差常数的意义下是唯一的, 所以对于某个常向量 $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$, $\gamma = \beta + \mathbf{w}$. 换句话说, C 是圆的平移. □

2.6 惠更斯等时降落钟 (选读)¹⁶

对于欧洲的主要国家来说, 十七和十八世纪代表了一个海洋探索的时代. 海上航行的主要障碍是经度问题——尽管在海洋中获得纬度信息是相对容易的, 但是并没有有效的方法能够确定所处位置的经度. 这项限制导致了大量的船舶遇难. 随着生命和财产的损失逐渐增多, 几个国家提供了奖金并设立了天文台和科学中心来解决这个问题. 例如, 1744 年, 英国政府建立了经度委员会 (Board of Longitude), 提供了 20000 英镑的经度奖金, 宣称:

经度方面的科学发现对英国军舰和商船的安全以及贸易的提升都具有重要意义, 许多船只因为缺乏经度的精确测量而延误了航程, 有许多船只下落不明...

基于天文观测的可能的解决方法首先由伽利略, 牛顿, 哈雷等一些给出. 在这个方向的相关工作带来了一些关键的科学发现, 比如, 光的速度. 其他的主要的可能方案包括了构造更精确的时钟的尝试. 如果能够造出能够在长距离海洋航行中持续给出精确时间的时钟, 那么每天船只所处位置的经度就能够由日出和正午的时间得到.

克里斯蒂安·惠更斯因为发明摆钟而著称, 但是摆钟只能在陆地上给出精确时间, 在海洋上则不行. 波浪摇动船只的运动会使摆钟不稳定——在某些摆动中, 摆锤会比其他摆动幅度更大. 摆过稍宽的幅度比稍窄的幅度所需的时间稍长, 最终导致读数不准确.

事实上, 惠更斯是第一个给出圆弧不是完全等时的证明的人 (宽圆弧要比窄圆弧所需时间稍长). 给此现象建模的最好方法就是不考虑弦. 假装摆锤划过的圆弧是一条实际存在的轨道, 摆锤是一个无摩擦的物体在轨道上滑动. 惠更斯证明了若起转的角度越高到达底部所需要的时间越长. 这听起来是显然的, 但是并非所有的曲线都是如此. 他发现了一种轨迹, 在该轨迹上物体落到底部的时间和轨迹上物体开始降落的位置无关. 他把这种形状叫做“等时降落曲线”(Tautochrone curve, 希腊语“同时”).

惠更斯的下一个想法是建造一个缓冲器, 让摆线缠绕在缓冲器上, 从而使摆锤沿着等时降落曲线运动而非圆弧; 他在此设计的基础上构造了等时降落钟, 以期解决经度问题. 他相信他的钟能够在海上给出精确的时间, 因为他的钟摆降落时间和位置无关, 尽管海浪会影响钟摆的降落位置. 不幸的是, 在试航中, 他的钟并没有像他预期的那样给出精确时间. 也许是绳子与保险杠之间增加的摩擦力抵消了理论上的优势, 也许是暴风雨太过猛烈, 导致摇杆晃动. 最终, 经度奖励被奖给了约翰·哈里森 (John Harrison) 以表彰他所设计的基于弹簧和杠杆 (天平? 原文为 balance) 足以出海时使用的钟表.

尽管惠更斯没能赢得关于经度的奖项, 他为设计他的等时降落钟所构建的数学却存留了下来, 在后来找到了有趣的应用. 这一节的剩余部分会专注于介绍这些数学, 给出它们的一些应用.

数学的部分从摆线开始. 想像半径为 1 的一个轮子, 初始时中心在点 $(0, 1)$ 处, 所以它和 x -轴在 origin 相切. 想像一下, 我们用粉笔给切点处做上标记, 然后让轮子沿 x -轴做无摩擦

¹⁶ 原文为 “Huygens’s Tautochrone Clock”, 其中 “Tautochrone” 有 “等时降落曲线” 之义, 放在这里供参考.

滑动. 粉笔印划出的轨迹就是摆线. 把摆线参数化的过程很简单:

$$(2.5) \quad \gamma(t) = (t, 1) + (-\sin(t), -\cos(t)) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t)).$$

摆线在 $(0, 2\pi)$ 上是正则曲线, 看起来与上半个椭圆类似.

摆线可以利用保距变换 $(x, y) \mapsto (x, -y)$ 上下翻转. 如此所获得的翻转摆线可参数化为 $\hat{\gamma}(t) = (t - \sin(t), \cos(t) - 1)$. 惠更斯证明了这是等时降落问题的一个解:

Theorem 2.40. 翻转摆线 $\hat{\gamma}(t) = (\underbrace{t - \sin(t)}_x, \underbrace{\cos(t) - 1}_y), t \in (0, 2\pi)$, 是个等时降落曲线.

Proof. 考虑一个起始时位于 $\hat{\gamma}(t_0) = (x_0, y_0)$ 的物体, 在仅受重力的作用下 (不考虑摩擦) 滑向曲线的底部 $\hat{\gamma}(\pi)$. 我们得证明滑动需要的时间是和 t_0 无关的. 因为曲线的右半部分和左半部分对称, 所以我们可以不失一般性地假设 $t_0 \in (0, \pi)$.

我们的第一项工作是要把下面的几个变量在曲线的翻转中的变化联系起来: t, x, y, s, T . 在这里, s 是定义为 $s(t) = \int_{t_0}^t |\hat{\gamma}'(t)| dt$ 的弧长参数化, T 是时间参数化, 所以 $T(t)$ 表示物体从 $\hat{\gamma}(t_0)$ 处滑到 $\hat{\gamma}(t)$ 处所需要的时间. 注意到

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left|\frac{d\hat{\gamma}}{dt}\right|^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = (1 - \cos(t))^2 + (-\sin(t))^2 = 2 - 2\cos(t).$$

动能转换为势能, 所以下面的式子总是正确的:

$$(2.6) \quad \frac{1}{2}mv^2 = mg(y_0 - y),$$

其中 g 是地球的重力常量, v 是物体的速度, 可表为:

$$\frac{ds}{dT} = v = \sqrt{2g(y_0 - y)}.$$

链式法则说明 $\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dT} \cdot \frac{dT}{dt}$. 求解 $\frac{dT}{dt}$, 我们得到

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)}{\left(\frac{ds}{dT}\right)} = \frac{\sqrt{2 - 2\cos(t)}}{\sqrt{2g(y_0 - y)}} = \frac{\sqrt{2 - 2\cos(t)}}{\sqrt{2g(\cos(t_0) - \cos(t))}}.$$

所以到达底部需要的时间是

$$T(\pi) = \int_{t_0}^{\pi} \left(\frac{dT}{dt}\right) dt = \int_{t_0}^{\pi} \frac{\sqrt{2 - 2\cos(t)}}{\sqrt{2g(\cos(t_0) - \cos(t))}} dt = \frac{1}{\sqrt{g}} \int_{t_0}^{\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos(t)}{\cos(t_0) - \cos(t)}} dt.$$

利用一些积分上的技巧或者是计算机的辅助, 最后的这个积分是与 t_0 无关的, 它等于 π , 所以我们有 $T(\pi) = \frac{\pi}{\sqrt{g}}$. □

伯努利 (Bernoulli) 和欧拉 (Euler) 之后证明了反命题: 每一段等时降线都是翻转后的摆线的一段 (也许会有大小变化或者平移).

惠更斯的下一个数学问题是确定缓冲器的形状. 为此, 设 $\beta: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ 为自然导出的摆锤运动路径的参数化. 考虑以下情形是最简单的: 假设物体最初位于 $t = 0$ 的位置, 弦线弯曲着紧贴缓冲器, 末端位于 $\beta(0)$, 在即将的运动过程中逐渐伸直. 所以缓冲器的初始位置是 $\gamma(0) = \beta(0)$. 因为 γ 的轨迹仅仅与 β 的轨迹相关, 我们能够假设 β 是弧长参数化的. 在每处 $t \in [0, l]$, 拉直的弦线长度等于 t , 所以缓冲器的位置在 β 的 $-\beta'(t)$ 方向距离 t 处; 也就是说, $\gamma(t) = \beta(t) - t\beta'(t)$.

下面的定义将上述的讨论稍作一般化了一下, 允许了初始时弦线有未拉直的长度为 λ_0 的一段“尾巴”.

Definition 2.41. 设 B 为具有非零曲率的可定向平面曲线. B 的渐开线是平面曲线 G , 它具有如下形式的参数化 $\gamma(0, l) \rightarrow \mathbb{R}^2$:

$$(2.7) \quad \gamma(t) = \beta(t) - (t + \lambda_0)\beta'(t),$$

其中 $\beta: (0, l) \rightarrow \mathbb{R}^2$ 是 B 的单位速重参数化, $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ 是个满足 $\lambda_0 \notin (-l, 0)$ 的常量.

注意到 $\gamma'(t) = -(t + \lambda_0)\beta''(t)$, 这是非零的, 因为 $\lambda_0 \notin (-l, 0)$, 且 B 具有非零曲率, 所以 γ 是正则的. 比如说, 曲率非零的假设并不允许 B 是直线, 因为那么 G 就会成为一个点. $\lambda \geq 0$ 的情形与“拉直弦线”有关. $\lambda \leq -l$ 的情形与弯曲着紧贴 B 的弦线有关.

若 $\beta: (0, l) \rightarrow \mathbb{R}^2$ 是 B 的正则的 (不一定是单位速的) 重参数化, 那么我们能通过把式(2.7)替换为下式来避免把它弧长参数化:

$$(2.8) \quad \gamma(t) = \beta(t) - (s(t) + \lambda_0) \frac{\beta'(t)}{|\beta'(t)|},$$

其中 $s(t) = \int_0^t |\beta'(u)| du$ 是弧长函数.

惠更斯真的需要解决反方向的问题: 找到缓冲器曲线 B , 它的渐伸线是等速降线 G . 他通过理解渐伸线和渐屈线的对应关系解决了此问题. 这里是式(1.8)的一个更精确的形式:

Definition 2.42. 设 G 为参数化为 $\gamma: (0, l) \rightarrow \mathbb{R}^2$ 的一个定向平面. 假设对于每个 $t \in (0, l)$, 都有 $\kappa(t) \neq 0, \kappa'(t) \neq 0$. 设 \mathbf{n} 表示 γ 的单位法向量. G 的渐屈线 B 是参数化 $\beta: (0, l) \rightarrow \mathbb{R}^2$ 由下式给出的平面曲线:

$$\beta(t) = \gamma(t) + \frac{1}{\kappa(t)} \mathbf{n}(t) = G \text{ 在 } \gamma(t) \text{ 处的密切圆的圆心.}$$

你能够验证 $\beta'(t) = -\frac{\kappa'(t)}{\kappa(t)^2} \mathbf{n}(t)$, 所以 κ' 是非零的假设确保了 β 是正则的. 比如说, 那个假设不允许 G 是一个圆, 因为这样的话 B 就会成为一个单点——也就是它的圆心. 变量的

选择已经暗示了渐屈线和渐伸线之间的互逆关系:

Proposition 2.43.

- (1) 在定义2.41的假设下, B 是 G 的渐屈线.
- (2) 在定义2.42的假设下, B 是 G 的渐伸线.

命题2.43(2) 的证明:

为证明 (2), 设 G 为可定向平面曲线, 参数化为 $\gamma: (0, l) \rightarrow \mathbb{R}^2$, 假设它的曲率函数对每一点 $t \in (0, l)$ 满足 $\kappa(t) \neq 0, \kappa'(t) \neq 0$. 我们会考虑 $\kappa'(t)$ 是严格的负数的情形 (在其他的情况下, κ' 是严格正的, 情况, 可以用类似的方法去处理). G 的渐屈线是 B , B 可参数化为

$$(2.9) \quad \beta(t) = \gamma(t) + \frac{1}{\kappa(t)} \mathbf{n}(t).$$

就像之前提到的那样, $\beta'(t) = \frac{\kappa'(t)}{\kappa(t)^2} \mathbf{n}(t)$. 尤其, $\frac{\beta'(t)}{|\beta'(t)|} = \mathbf{n}(t)$; 因此, 式(2.9)能够写为

$$\gamma(t) = \beta(t) - \frac{1}{\kappa(t)} \frac{\beta'(t)}{|\beta'(t)|}.$$

与式(2.8)相比较, 为证明 G 是 B 的渐伸线, 证明下式便足够了:

$$\frac{1}{\kappa(t)} = s(t) + \lambda_0$$

对某些 $\lambda_0 \notin (-l, 0)$, 其中 $s(t) = \int_0^t |\beta'(u)| du$ 是 β 的弧长函数. 对此, 我们观察到

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\kappa(t)} - s(t) \right) = -\frac{\kappa'(t)}{\kappa(t)^2} - |\beta'(t)| = -\frac{\kappa'(t)}{\kappa(t)^2} - \left| \frac{\kappa'(t)}{\kappa(t)^2} \right| = 0.$$

因此, $\frac{1}{\kappa(t)} - s(t)$ 是个常数, 且通过考虑时间 $t = 0$, 我们就能够证实常数 ≥ 0 . 第 (1) 部分的证明在练习中留给读者. □

由于命题2.43, 惠更斯能够让他的缓冲器曲线成为等时降线 (翻转摆线) 的渐屈线.

Proposition 2.44. 翻转摆线的渐屈线也是翻转摆线.

证明见练习.

Chapter 3

曲面

在此书的剩余部分中,我们会把目光从曲线转向曲面.多元微积分中的双变量函数的图像就是我们熟悉的曲面例子.就像曲线在局部能够用它的切线 \mathbb{R} 近似一样,性质足够好的曲面也能够局部用它的切平面 \mathbb{R}^2 近似.所以,本质上我们是从一维物体转向了二维物体.

3.1 从 \mathbb{R}^m 到 \mathbb{R}^n 的函数的导数

在这一节中,我们定义和研究多变量输入和多变量输出的导数.该阐述旨在概述关键定义和直观思想方法,以方便以前可能只考虑过仅具有多个输入或多个输出变量(之一)的函数的导数的读者.当他们的技能还不足以理解此书的剩余部分时,证明会被省略.被省略的证明能够在大部分的实分析教材中找到.

我们因此用记号 $f: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ 来表示 f 是个从 \mathbb{R}^m 中的开集 U 指向 \mathbb{R}^n 的函数.在这种情况下, f 能被看做 n 个独立的分量函数,记为 $f = (f_1, \dots, f_n)$, 其中每个 i 都有 $f_i: U \rightarrow \mathbb{R}$. 例如,函数 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 定义为 $f(x, y) = (\sin(xy), e^{x+5y}, x^2y^3)$, 具有分量函数 $f_1(x, y) = \sin(xy)$, $f_2(x, y) = e^{x+5y}$, $f_3(x, y) = x^2y^3$.

f 关于输入变量 x_i 的偏导数(记为 f_{x_i} 或是 $\frac{\partial f}{\partial x_i}$)的定义如下: 对任意的 $p \in U$,

$$(3.1) \quad f_{x_i}(p) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + te_i) - f(p)}{t}$$

(如果极限存在), 其中 $e_i \in \mathbb{R}^m$ 表示标准正交基的第 i 个量.¹我们会简短地解释直观含义,但是目前,注意到偏导数能够逐分支计算:

$$(3.2) \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(p), \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(p) \right).$$

¹在本书的剩余部分,我们不会继续使用粗体表示向量值的量.这个新的约定对于我们讨论曲面是更一般的也是看起来更自然的.

每个分量都具有与多元微积分中相同的含义 (即 x_i 增加时 p 处该分量变化的速度), 可以用类似的方法计算 (把输入变量除 x_i 之外全部看成常数).

对固定的 i 值, 若 $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$ 对每个 $p \in U$ 存在, 那么 $p \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$ 是另外一个从 U 到 \mathbb{R}^n 的函数; 它的偏导数 (如果存在) 被称为 f 的二阶偏导数, 以此类推. 例如, 函数 $f_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ 关于 x_j 的偏导数记为 $f_{x_i x_j}$ 或 $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ (如果偏导数存在). 一个重要的结论是这里的顺序不重要; 换句话说, 混合偏导数可交换:

$$(3.3) \quad \boxed{f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i}}$$

(我们在这里假设两边的偏导数都是存在的且在 U 上连续). 我们会在本书的剩余部分中多次使用式(3.3)—如果这个式子不成立, 微分几何就不存在了!

函数 f 称为 U 上的 C^r 函数如果在 U 上所有的 r 阶偏导数存在且连续, f 称为 U 上的光滑函数若对任意的正整数 r , f 都是 U 上的 C^r 函数.

Example 3.1. 光滑函数 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 的定义为

$$f(x, y) = (\sin(xy), e^{x+5y}, x^2 y^3),$$

它有如下二阶导数:

$$f_x = (y \cos(xy), e^{x+5y}, 2xy^3), \quad f_y = (x \cos(xy), 5e^{x+5y}, 3x^2 y^2),$$

有如下二阶导数:

$$\begin{aligned} f_{xx} &= (-y^2 \sin(xy), e^{x+5y}, 2y^3), & f_{yy} &= (-x^2 \sin(xy), 25e^{x+5y}, 6x^2 y), \\ f_{xy} &= f_{yx} = (\cos(xy) - xy \sin(xy), 5e^{x+5y}, 6xy^2). \end{aligned}$$

注意, 函数在定义域上光滑当且仅当它的每个分量函数都是光滑的. 在上面的例子中, 分量函数是光滑的, 因为这些我们熟悉的函数类型 (多项式函数, 有理函数, 指数函数, 对数函数, 三角函数, 反三角函数; 幂函数除零点之外) 在微积分中就已经知道是光滑的. 光滑函数的和, 差, 积在相同定义域上也是光滑函数 (对商也成立, 但是要去除分母为零的点). 此外, 每个光滑函数的分量都是光滑的. 我们可以把这一点更准确地如下表述:

Proposition 3.2. 若 $g: U \subset \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^m$ 在 U 上是光滑函数, $f: V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是在 V 上光滑的, $g(U) \subset V$, 则函数的复合 $f \circ g: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是在 U 上光滑的.

例如, 上面的函数 $f(x, y) = (\sin(xy), e^{x+5y}, x^2 y^3)$ 能够被视作以下两个光滑函数: $(x, y) \mapsto (xy, x + 5y, x^2 y^3)$ 和 $(u, v, w) \mapsto (\sin u, e^v, w)$ 的复合.

在式(3.1)中的定义能够通过把坐标向量 e_i 替换为 \mathbb{R}^m 中的任意向量来进行一般化改造; 结果被称为方向导数.²

²一些资料书籍把“方向导数”的术语特化到 $|v| = 1$ 的情形, 但是我们会使用其更广泛的含义.

Definition 3.3. 设 $f: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, p \in U, v \in \mathbb{R}^m$. f 在 p 处 v 方向上的方向导数是

$$df_p(v) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p+tv) - f(p)}{t} = (f \circ \gamma)'(0)$$

(若极限存在), 其中 $\gamma(t) = p + tv$.

换句话说, $df_p(v)$ 是在时间 $t = 0$ 时经过点 p 并且具有初速度 v 的 \mathbb{R}^m 中直线 γ 与函数 f 复合后的初速度向量³. 在 $v = e_i$ 的特殊情况, 这为偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = df_p(e_i)$ 提供了一个很好的直观上的解释.

如果方向导数 $df_p(v) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p+tv) - f(p)}{t}$ 存在, 那么这个极限能够重新表述为

$$(3.4) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p+tv) - f(p) - tdf_p(v)}{t} = 0,$$

事实上就是说

$$(3.5) \quad f(p+tv) - f(p) \approx tdf_p(v)$$

是对点 p 附近处的 f 很好的估计.

若 f 是 p 的邻域上的光滑函数, 一个来自分析的重要结论说, 不止在 p 处的所有方向导数存在, 它们结合在一起能够性能一致的在 p 附近很好地估计 f 的线性变换:

Proposition 3.4. 若 $f: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是 U 上的光滑函数 (或仅仅是 C^1 的), 那么对于任意一点 $p \in U$:

- (1) 对任意一点 $v \in \mathbb{R}^m$ 方向导数 $df_p(v)$ 存在.
- (2) $v \mapsto df_p(v)$ 是个从 \mathbb{R}^m 到 \mathbb{R}^n 的线性变换 (我们称为 f 在 p 处的微分).
- (3) $f(q) \approx f(p) + df_p(p - q)$ 是个在如下意义下对 f 在 p 点附近很好的估计: 在每个 U 中收敛到 p 的无穷序列 $\{q_1, q_2, \dots\}$, 我们都有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|f(q_t) - f(p) - df_p(q_t - p)|}{|q_t - p|} = 0.$$

注意, 条件 (3) 与式(3.4)等价, 若所有的点 q_t 都位于单个单位长度的向量 $v \in \mathbb{R}^m$ 张成的空间中. 因此, 条件 (3) 本质上说的是式(3.5)在所有单位长向量 v 的选项下在 p 附近很好地一致估计 f .

因为导数 df_p 是线性变换, 我们得回忆起每个线性变换可以用某个矩阵的左乘的方式来表示. 若 A 是个 $n \times m$ 矩阵, 回忆 $L_A: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ 表示“左乘 A ”的线性变换. 它

³这句话是 chatpgt 翻译的, 逻辑太难搞懂了. 经过讨论, 比较能通过图灵测试的翻译为: $df_p(v)$ 是在 $(f$ 的定义域) \mathbb{R}^m 中 $t = 0$ 时以速度 v 经过点 p 的直线 γ (这一曲线) 和 f 复合 (得到的曲线 $f \circ \gamma$) 的初速度向量.

定义为 $L_A(v) = A \cdot v$, 其中 v 被看做是 $m \times 1$ 列的矩阵, 则矩阵乘法 $A \cdot v$ 是有意义的. 注意, A 的第 i 列等于 $L_A(e_i)$. 尤其是, 线性变换 $df_p: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ 可以由第 i 列等于 $df_p(e_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(p), \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(p) \right)$ 的矩阵的左乘表示. 总之,

Definition and Proposition 3.5. 若 $f: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是光滑的, $p \in U$, 那么 $df_p = L_A$, 其中 A 是由 f 在 p 处的所有一阶偏导数构成的 $n \times m$ 矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(p) \end{pmatrix}.$$

这个矩阵 A 称为 f 在 p 处的雅可比矩阵 (Jacobian Matrix). $df_p = L_A$ 的事实常常简称为 “ $df_p = A$ ”.

注意到当 $n = 1$ 时, $A = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) \cdots \frac{\partial f}{\partial x_m}(p) \right)$ 是 f 在 p 处的梯度 (gradient) (我们在这里把它看做是一个 $1 \times m$ 矩阵而不是向量, 尽管两者在本质上是相同的). 在这种情况下, 我们由: 对所有的 $v = (v_1, \dots, v_m) \in \mathbb{R}^m$,

$$\begin{aligned} df_p(v) &= L_A(v) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) \cdots \frac{\partial f}{\partial x_m}(p) \right) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(p)v_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(p)v_m = \langle \nabla f(p), v \rangle. \end{aligned}$$

这重现了我们熟悉的事实 (之前在式 2.3 提到过): 方向导数是由于梯度计算内积得到的. 若 $n > 1$, 注意到 A 的行向量是 f 的分量, 则 df_p 的每个分量都等于 v 和 f 的响应分量的梯度的内积. 尤其是, 方向导数能够逐分量地计算.

Example 3.6. 从极坐标到直角坐标的转换可以用以下定义为 $f(r, \theta) = (\underbrace{r \cos \theta}_x, \underbrace{r \sin \theta}_y)$ 的光滑函数 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 来表示. 当 $r = 2, \theta = \pi/4$ 时, f 在 $p = (r, \theta)$ 处的雅可比矩阵等于

$$df_p = \begin{pmatrix} x_r(p) & x_\theta(p) \\ y_r(p) & y_\theta(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

矩阵的列向量是 $f_r(p) = df_p(1, 0)$ 和 $f_\theta(p) = df_p(0, 1)$, 它们是在 $r\theta$ -平面中经过点 p 的坐标线在 f 下的像的初速度.

假设 f 是在 U 上的 C^2 函数, 我们现在希望通过证明把式(3.5)转化为一个二阶的泰勒展开, 但是仅仅在 $m = 2$ 的情形下因为本书只需要 $m = 2$ 的情形. 如果我们把这种情况下

的 v 的分量记为 $v = (a, b)$, f 在 p 处 v 方向下的二阶泰勒估计为

$$(3.6) \quad f(p + tv) - f(p) \approx t \underbrace{(af_x(p) + bf_y(p))}_{df_p(v)} + \frac{t^2}{2}(a^2 f_{xx}(p) + 2ab f_{xy}(p) + b^2 f_{yy}(p)).$$

若 f 为 U 上的 C^2 函数, 能够证明式(3.6)的左右两边的范数相差一个误差函数 $E(t)$ 且满足 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{E(t)}{t^2} = 0$.

对于可微函数而言, 定义3.3中的直线 γ 能够被任意一个具有相同的初速度和初始位置的路径 (也许是弯曲的) 代替:

Proposition 3.7. 若 $f: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是光滑的, $v \in \mathbb{R}^m$, γ 是 U 中的任意一个满足 $\gamma(0) = p$ 且 $\gamma'(0) = v$, 那么

$$(3.7) \quad df_p(v) = (f \circ \gamma)'(0).$$

在本书的剩余的部分中, 这个命题会不断地被用来构造更灵活更有用的 $df_p(v)$ 的特征描述.

Example 3.8. 命题3.7中的 $\{m = 2, n = 3\}$ 的情形在本书中将会很重要, 通常变量名称与如下的示例是相同的. 设 $\sigma: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 是光滑函数, 分量函数记为

$\sigma(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$. 设 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ 是个在 uv -平面中的平面曲线, 分量函数记为 $\gamma(t) = (u(t), v(t))$. 在这种情况下, 命题3.7说的是

$$(\sigma \circ \gamma)'(t) = d\sigma_{\gamma(t)}(\gamma'(t))$$

对任意的 $t \in I$ 成立 (因为 $t = 0$ 并非特别的 t 值). 这可以简化为, 假设我们的计算是在任意的某个 $t \in I$ 或是其对应点 $(u(t), v(t))$ 附近进行的:

$$(\sigma \circ \gamma)' = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = u' \sigma_u + v' \sigma_v.$$

命题3.7本质上是下列的基本规则在 $l = 1$ 的特殊情形, 也就是说两个函数的复合的导数等于导数的复合:

Proposition 3.9 (链式法则). 若 $g: U \subset \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是 U 上的光滑函数, $f: V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是 V 上的光滑函数, $g(U) \subset V$ (就像是命题3.2中的那样), 则对任意的 $q \in U$,

$$d(f \circ g)_q = df_p \circ dg_q,$$

其中 $p = g(q)$.

链式法则是一个很重要的工具, 下面是对它的几个评论. 首先, 注意到链式法则的两边都是从 \mathbb{R}^l 到 \mathbb{R}^n 的线性变换. 这条规则告诉我们它们是同一个线性变换, 这意味着它们把相同的向量变到相同的向量; 换句话说,

$$d(f \circ g)_q(w) = df_p(v), \text{ 对任意的 } w \in \mathbb{R}^l, \text{ 其中 } v = dg_q(w).$$

其次, 链式法则的右侧是两个线性变换的复合. 这样的复合是能够由表示两个线性变换的矩阵的积来表示的. 所以你真的可以将链式法则的右侧看做是矩阵的乘积 (两个 Jacobian 矩阵的乘积).

第三, 链式法则暗示反函数的导数是个逆矩阵. 更准确地说, 假设 $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (维数相同) 是从 U 到它的像 $f(U)$ 的可逆函数. 假设 f 在 $q \in U$ 的邻域上是光滑的, 且 f^{-1} 是在 $f(q)$ 的邻域上是光滑的. 则链式法则说明

$$(3.8) \quad d(f^{-1} \circ f)_q = d(f^{-1})_{f(q)} \circ df_q.$$

换句话说, $f^{-1} \circ f$ 是恒等函数, 在每一点的微分都是恒同映射.⁴ 所以 $d(f^{-1})_{f(q)} \circ df_q$ 是个恒同线性变换, 这说明 df_q 是个可逆线性变换 (也就是说, 相应的矩阵一定是可逆矩阵.)

一个来自分析的重要结论是下面的反命题:

Theorem 3.10 (反函数定理). 若 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是在 $p \in \mathbb{R}^n$ 光滑的函数, df_p 是可逆线性变换, 则存在一个 p 的邻域 (也许会小上一点) 使得 $V = f(U)$ 为 $f(p)$ 的邻域, 且 $f: U \rightarrow V$ 是具有光滑逆的可逆函数.

反函数定理非常重要. 它把看似很困难的判定 f 在 p 点附近是否是局部可逆的问题转化为计算上很容易的验证线性变换 df_p 的行列式是否为 0 的计算上很容易的任务. 证明是非平凡的, 但是定理本身应该很容易相信, 因为 $f(q) \approx f(p) + df_p(q - p)$ 是个 f 在 p 附近的一阶估计. 定理说明如果一阶估计是可逆的 (局部上的), 那么 f 也是可逆的 (局部上的).

例如, 极坐标函数 $f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ 确保了是在 $p = (2, \frac{\pi}{4})$ 的邻域中是可逆的, 因为 df_p 的矩阵 (在 3.6 中有计算) 具有非零的行列式. 在这个例子中, 可以很直接地找到 $f^{-1}(x, y)$ 的显式表达式 (将直角坐标转换为极坐标), 但是在其他的例子中, 并非如此.

Example 3.11. 定义为 $f(x, y) = (\underbrace{x^2 + y}_{f_1}, \underbrace{xy}_{f_2})$ 的函数 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 是光滑的. 在 $p \in (x, y) \in \mathbb{R}^2$ 中, 我们有

$$df_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(p) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(p) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(p) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ y & x \end{pmatrix}.$$

⁴这里译者也迷糊, 放上原文: On the other hand, $f^{-1} \circ f$ is the identity function, whose derivative at every point is the identity map.

例如, $df_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 具有非零的行列式值. 反函数定理说明 f 在 $(1,1)$ 的足够小的 $(1,1)$ 的邻域上的限制是具有光滑逆的在这个邻域和它的像 (为 $f(1,1) = (2,1)$ 的邻域) 之间的可逆函数且反函数光滑. 如果不使用反函数定理, 要明确地验证这一点, 就需要在 $x=1, y=1$ 附近用 a 和 b 求解系统 $\{a = x^2 + y, b = xy\}$ 中的 x 和 y 的唯一值.

同时, 注意到 $df_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 并非可逆矩阵, 所以围绕式(3.8)的讨论说明 f 在 $(0,0)$ 和 $f(0,0)$ 的邻域中不是具有光滑逆的光滑函数. 特别地, 我们得指出, 上面讨论的 $(1,1)$ 的邻域不包含 $(0,0)$.

我们在本节最后指出具有非开定义域的函数的光滑特征. 假设 $X \subset \mathbb{R}^m$ 是个 (不一定是开的) 集合, $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是个函数. f 在 $p \in X$ 的偏导数也许是无意义的, 因为 f 仅在 X 上有定义, 但是如果你沿着 \mathbb{R}^m 的坐标轴方向离开 p , 你就能立即离开 X . 为求解这个问题, 我们称 f 是光滑的, 若它能够局部拓展为 \mathbb{R}^m 上的光滑函数. 更准确地说,

Definition 3.12. 若 $X \subset \mathbb{R}^m$ 是个 (不一定开的) 集合, 则 $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ 称为光滑的若对任意的 $p \in X$, 存在 $p \in \mathbb{R}^m$ 的邻域 U 和光滑函数 $\tilde{f}: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ 与 f 在 $X \cap U$ 上一致.

注意 $m=1$ 时, 这个定义是和习题 1.2 中关于曲线 $\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ 的光滑性在定义域端点 a, b 处意味着什么的讨论的约定是一致的. 这个一般性经过扩展的记号允许我们定义一种欧几里得空间中的子集的很重要的等价关系:

Definition 3.13. $X \subset \mathbb{R}^{m_1}, Y \subset \mathbb{R}^{m_2}$ 称为是微分同胚的若存在光滑双射 $f: X \rightarrow Y$ 使得它的反函数也是光滑的. 在这种情况下, f 被称为两个子集间的微分同胚.

微分同胚也是同胚, 是自身光滑又具有光滑逆的函数.

Example 3.14. 球面和椭球面:

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1 \right\},$$

对任意的 $a, b, c > 0$ 都是微分同胚的. 一种微分同胚是由函数 $f: S^2 \rightarrow E, f(x, y, z) = (ax, by, cz)$ 给出的. 它是光滑的, 因为它在 \mathbb{R}^3 上的扩张是光滑的. 反函数由 $f^{-1}(x, y, z) = (x/a, y/b, z/c)$ 给出, 由于相同原因, 它也是光滑的.

Example 3.15. 平面 \mathbb{R}^2 与双曲面

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = x^2 + y^2\}$$

通过微分同胚 $\sigma: \mathbb{R}^2 \rightarrow P, \sigma(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$. 反函数 $\sigma^{-1}: P \rightarrow \mathbb{R}^2$ 是由 $\sigma^{-1}(x, y, z) = (x, y)$ 给出的. 它是光滑的, 因为它可以通过相同的公式 $(x, y, z) \mapsto (x, y)$ 扩展为 $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 的光滑函数.

Example 3.16. 上半球面和单位圆盘:

$$S_+^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0\},$$

$$D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 1\},$$

是微分同胚的, 微分同胚为 $\sigma: D^2 \rightarrow S_+^2$, 定义为

$$\sigma(x, y) = \left(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}\right).$$

反函数 $\sigma^{-1}: S_+^2 \rightarrow D$ 是由 $\sigma^{-1}(x, y, z) = (x, y)$ 给出的. 它是光滑的, 因为它可以通过相同的公式 $(x, y, z) \mapsto (x, y)$ 扩展为 $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 的光滑函数.

后两个例子似乎是重复的, 因为它们都是下面的一般原则的特殊情形, 其证明现在应该是显然的:

Lemma 3.17. 若 $U \subset \mathbb{R}^2$ 是开集, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ 是光滑的, 那么它的图像 $G = \{(x, y, f(x, y)) | (x, y) \in U\}$ 是与 U 微分同胚的, 通过微分同胚 $\sigma: U \rightarrow G$, 定义为 $\sigma(x, y) = (x, y, f(x, y))$.

因此, 双变量光滑函数的图像“看起来很像”(是微分同胚的) 它的定义域 (\mathbb{R}^2 中的开集). 下一节我们会研究正则曲面.

3.2 正则曲面

此书的剩余部分会专注于处理正则曲面上的集合的事儿. 正则曲面的大致意思是 \mathbb{R}^3 中局部看起来像是平面 \mathbb{R}^2 中的子集.

我们对于正则曲面的定义基于如下的几个相关的概念:“某一集合中的开集”和“某一集合中的邻域”, 可以在本书的附录中找到:

Definition 3.18. 设 $S \subset \mathbb{R}^n$ 是个子集. 集合 $V \subset S$ 称为 S 中的开集若 V 是 \mathbb{R}^n 中的某个开集和 S 的交. 若 $p \in S$, 那么 p 在 S 中的邻域为 S 中的一个包含 p 的开集.

附录很值得一读, 而现在这个进度下去读附录是比较合适的. 它包含了一些处理上述概念的很有用的方法.

Definition 3.19. 集合 $S \subset \mathbb{R}^3$ 称为正则曲面 (*regular surface*) 若它的每一点在 S 中都有邻域是和 \mathbb{R}^2 中的开集微分同胚的. 也就是说, 对每个 $p \in S$, 存在 p 的一个在 S 中的邻域 V , \mathbb{R}^2 中的开集 U , 和微分同胚 $\sigma : U \rightarrow V$. 这样的微分同胚 σ 称为曲面切片 (*surface patch*) 或是坐标曲线图 (*coordinate chart*). 能够覆盖 S 的一系列坐标曲线图的集合称为 S 的地图集 (*atlas*).

在定义3.19中, 我们把“微分同胚”换成“同胚”就得到了曲面的定义. 因此, 修饰语“正则”是说曲面切片能够全部取得光滑且有光滑逆, 所以它们间不止是同胚, 也是微分同胚.

Example 3.20. 锥形曲面 $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \sqrt{x^2 + y^2}\}$ 是个能够被简单曲面切片 $\sigma : \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ 覆盖. 切片定义为 $\sigma(u, v) = (u, v, \sqrt{u^2 + v^2})$. 注意, σ 是个同胚但是不是微分同胚, 因为它在原点不可微.

从现在开始, 我们会专注研究正则曲面. 微分几何需要在曲面上进行微积分运算, 所以我们需要我们的曲面是正则的. 这里有一个关于正则性的有用的结论:

Proposition 3.21. 若 S 是正则曲面, $\sigma : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \subset S$ 是个曲面切片, 则对任意的 $q \in U$, 线性变换 $d\sigma_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 的秩为 2.

Example 3.22 (平面). 每个开集 $U \subset \mathbb{R}^2$ 是由简单曲面切片覆盖的正则曲面, 也就是, 从 U 到 U 的恒同映射. 因为从技术上来说, 只有 \mathbb{R}^3 中的开集能够被称为曲面, 我们默认把 \mathbb{R}^2 看做是 \mathbb{R}^3 中的 xy -平面.

在下面的每个例子中, 我们将会通过构造显式曲面切片来证明给定的集合是个曲面. 我们然后会独立会对这些平面切片独立地验证 2-秩结论 (尽管在命题3.21中它被保证成立).

这不必要的工作是值得的, 因为我们将会看到, 2 秩结论的验证有独立的应用, 能够代替一些验证所谓的曲线切片是微分同胚的一些步骤.

Example 3.23 (柱面). 我们会证明柱面

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = 1\}$$

是个正则曲面. 每个点 $p = (x, y, z) \in C, x \neq -1$ 都位于光滑函数 $\sigma : \underbrace{(-\pi, \pi) \times \mathbb{R}}_U \rightarrow C, \sigma(u, v) = (\underbrace{\cos(u)}_{x(u,v)}, \underbrace{\sin(u)}_{y(u,v)}, \underbrace{v}_{z(u,v)})$.

图像 $V = \sigma(U)$ 是在 C 中的开集, 因为它是 C 和开集 $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x \neq -1\}$ 的交. 可以直接验证 σ 是单射. 为使验证 σ 是微分同胚 (因此也是个有效的曲面切片) 的过程更完整, 还需要证明逆映射 $\sigma^{-1} : V \rightarrow U$ 是光滑的. 在 $V_+ = \{(x, y, z) \in V | x > 0\}$ 中的点处, 映射 σ^{-1} 由公式 $(x, y, z) \mapsto (\tan^{-1}(y/x), z)$ 给出. 它是光滑的因为它可以以相同的公式扩展成为开集 $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x > 0\}$ 上的光滑函数. σ^{-1} 在 V 中的其他点的光滑性能够用类似的方法验证. 因此, σ 是个曲面切片.

C 中的 $x = -1$ 的点能够被第二个函数 $\mu : (-\pi, \pi) \times \mathbb{R} \rightarrow C, \mu(u, v) = (\cos(u + \pi), \sin(u + \pi), v)$ 覆盖, 可以由类似过程验证它也是个曲面切片. 注意, μ 是 σ 和 \mathbb{R}^3 中关于 z -轴旋转 180° 的保距变换的复合.

这样, 我们就完成了 C 是正则曲面的验证. 为之后引用方便, 我们现在会单独为曲面切片 σ 验证命题 3.21 已经确保的 2-秩条件. $q = (u, v) \in U$ 处的 Jacobian 矩阵是

$$d\sigma_q = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(q) & \frac{\partial x}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(q) & \frac{\partial y}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(q) & \frac{\partial z}{\partial v}(q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(u) & 0 \\ \cos(u) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

它对于任意的 $q \in U$ 的秩都是 2, 因为两个列向量

$$\sigma_u(q) = (-\sin(u), \cos(u), 0), \sigma_v(q) = (0, 0, 1),$$

之间是线性独立的. 注意到 $\sigma_u(q)$ 是向“外 (around)”指的但是 $\sigma_v(q)$ 是向“上 (up)”指的.

我们在例 3.16 中看到 S^2 的上半球面 $z > 0$ 的部分是与 \mathbb{R}^2 中的一个开集微分同胚的. 剩下的 5 个半球 ($z < 0, x > 0, x < 0, y > 0, y < 0$) 也是与圆盘微分同胚的, 这可以由类似的步骤论证. 例如, 半球 $y < 0$ 可以由曲面切片 $\sigma(x, z) = (x, -\sqrt{1 - x^2 - z^2}, z)$ 覆盖, 其定义域为 xz -平面中的开圆盘 $\{(x, z) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + z^2 < 1\}$. 因此, S^2 是个有一个有六个曲面切片的地图集所覆盖的正则曲面. 但是我们能做得更好—下一个例子中我们会用两个曲面切片覆盖 S^2 .

Example 3.24 (球面). 回忆一个 S^2 上的点, 其球面坐标记为 (θ, ϕ) . 从球面坐标到直角坐标的转换蕴含在定义为

$$\sigma(\theta, \phi) = (\underbrace{\sin \phi \cos \theta}_{x(\theta, \phi)}, \underbrace{\sin \phi \sin \theta}_{y(\theta, \phi)}, \underbrace{\cos \phi}_{z(\theta, \phi)}).$$

的曲面切片 $\sigma : \underbrace{(0, 2\pi) \times (0, \pi)}_U \rightarrow S^2$.

它的图像 $V = \sigma(U)$ 在 S^2 中是开集, 因为它是开集 $\mathbb{R}^3 - \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 | x \geq 0\}$ 和 S^2 的交. 为证明 $\sigma : U \rightarrow V$ 是个微分同胚 (因此是个有效的曲面切片), 我们还需要证明 σ 是双射, 且 $\sigma^{-1} : V \rightarrow U$ 是光滑的. 这要求我们给出从直角坐标转换为球面坐标的显式公式. 我们把细节留给读者完成.

这个曲面切片覆盖了 S^2 上的所有点, 除了南北极和 $\theta = 0$ 处连接南北极的半圆 (x 轴正半轴处). 我们把没能覆盖的点构成的集合称为 C . 构造正交矩阵 A 使得 $L_A(C)$ 与 C 是无交的. 例如, 若 $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $L_A(C)$ 就会成为球体与赤道面 (xy -平面) 相交的那个圆的半圆 (x 轴负半轴处). 复合 $L_A \circ \sigma$ 是能够覆盖除了 $L_A(C)$ 之外的所有点的另一个曲面切片, 所以这两个曲面切片就能够覆盖 S^2 的所有点.

为之后的引用方便, 我们现在会单独为曲面切片 σ 验证命题3.21已经确保的 2-秩条件. 点 $q = (\theta, \phi) \in U$ 处的 Jacobian 矩阵是

$$d\sigma_q = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta}(q) & \frac{\partial x}{\partial \phi}(q) \\ \frac{\partial y}{\partial \theta}(q) & \frac{\partial y}{\partial \phi}(q) \\ \frac{\partial z}{\partial \theta}(q) & \frac{\partial z}{\partial \phi}(q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \phi \sin \theta & \cos \phi \cos \theta \\ \sin \phi \cos \theta & \cos \phi \sin \theta \\ 0 & -\sin \phi \end{pmatrix}.$$

列向量 σ_θ 和 σ_ϕ , 是线性独立的, 因为它们的外积是非零的. 事实上, 我们可以直接计算

$$|\sigma_\theta \times \sigma_\phi| = |(-\sin^2 \phi \cos \theta, -\sin^2 \phi \sin \theta, -\sin \phi \cos \phi)| = \sin \phi \neq 0.$$

因此, 对于任意的 $q \in U$, $d\sigma_q$ 的秩是 2.

下一个例子不是某个曲面而是一类曲面. 这一类曲面的范围已经狭窄到足以给出清晰的运算式, 但是也广泛到能够作为许多的具有重要意义的曲面的示例.

Example 3.25 (旋转曲面). 设 $\gamma(t) = (x(t), 0, z(t))$, $t \in (a, b)$ 为 xz -平面中的正则曲线. 设 C 表示它的迹. 为简单起见, 我们做出下面的两个假设 (在之后我们会进行弱化):

- (1) $\forall t \in (a, b), x(t) > 0$ (注意, C 与 z 轴无交).
- (2) $\forall t \in (a, b), z'(t) > 0$ (注意, C 与自身无交).

设 S 表示 C 绕 z 轴旋转形成的旋转曲面. 我们声明, S 是正则曲面.

一个自然的曲面切片 $\sigma : \underbrace{(-\pi, \pi) \times (a, b)}_U \rightarrow S$ 的定义为

$$\sigma(\theta, t) = (x(t) \cos \theta, x(t) \sin \theta, z(t)).$$

注意, $\sigma(\theta, t) = R_\theta(\gamma(t))$, 其中 R_θ 是关于 z -轴旋转 θ 角度的线性变换, 可以用下面的正交矩阵来表示:

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

图像 $V = \sigma(U)$ 在 S 中是开集, 因为它是开集 $\mathbb{R}^3 - \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 | x \leq 0\}$ 和 S 的交. 可以直接验证 σ 是单射. 为完成 σ 是微分同胚 (因此是曲面切片) 的验证, 我们还要证明 $\sigma^{-1} : V \rightarrow U$ 是光滑的. 在 $V_+ = \{(x, y, z) \in V | x > 0\}$ 中的点处, 映射 σ^{-1} 由公式 $(x, y, z) \mapsto (\tan^{-1}(y/x), t(z))$, 其中 $t(z)$ 是函数 $z(t)$ 的逆. 它是光滑的, 因为它可以用相同的公式扩展为开集 $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x > 0, z \in (z(a), z(b))\}$ 上的光滑函数. σ^{-1} 在其他点处的光滑性能够用相似的过程说明. 因此, σ 是个曲面切片.

这个曲面切片能够覆盖整个 S , 除了它与 xz -平面 $x < 0$ 的半平面相交的那一部分的曲线. 就和圆柱面的例子一样, 这个被排除在外的曲线可以由把 σ 绕 z 轴旋转 180° 得到的切片覆盖.

这样, 我们就完成了 S 是正则曲线的验证. 为之后的引用方便, 我们现在会单独为曲面切片 σ 验证命题 3.21 已经确保的 2-秩条件. 点 $q = (\theta, t)$ 处的 Jacobian 矩阵是

$$d\sigma_q = \begin{pmatrix} -x(t) \sin \theta & x'(t) \cos \theta \\ x(t) \cos \theta & x'(t) \sin \theta \\ 0 & z'(t) \end{pmatrix}.$$

列向量

$$\sigma_\theta(q) = (-x(t) \sin \theta, x(t) \cos \theta, 0), \sigma_t(q) = (x'(t) \cos \theta, x'(t) \sin \theta, z'(t)),$$

是线性无关的, 因为它们的叉积是非零的:

$$(3.9) \quad |\sigma_\theta \times \sigma_t| = |(x(t)z'(t) \cos \theta, x(t)z'(t) \sin \theta, -x(t)x'(t))| = x(t) |\gamma'(t)| \neq 0.$$

S 上以 θ 为参数的曲线称为**纬线**, 以 t 为参数的曲线称为**经线**. 注意, σ_θ 是和**纬线**相切的, σ_t 是和**经线**相切的.

球面和柱面都是旋转曲面的例子. 事实上, 之前针对球面和柱面的曲面切片的构造都来自于上述旋转曲面中的一般构造方法. 对柱面来说, 选定了 $\{x(t) = 1, z(t) = t\}, t \in \mathbb{R}$; 对球面来说 (除了南北极点), 选定了 $\{x(t) = \sin t, z(t) = \cos(t)\}, t \in (0, \pi)$.

我们下面会给出一个定理, 这个定理会使得验证特定的 \mathbb{R}^3 中的曲面是正则曲面变得很容易. 我们首先需要一些术语:

Definition 3.26. 设 $U \subset \mathbb{R}^3$ 是开集, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ 是光滑的, 且 $\lambda \in \mathbb{R}$ 在 f 的图像中.

(1) 集合 $f^{-1}(\lambda) = \{p \in U | f(p) = \lambda\}$ 被称为 λ 的原像.

(2) λ 称为 f 的一个正则值若对所有的 $p \in f^{-1}(\lambda)$, f 在 p 处的 Jacobian 矩阵都不是零矩阵, 也就是说, 若

$$df_p = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p), \frac{\partial f}{\partial z}(p) \right) \neq (0, 0, 0).$$

就像是前面提到的那样, 此处的 Jacobian 矩阵只是 f 的梯度, 所以, 这个条件等同于说 f 在 $f^{-1}(\lambda)$ 中的每一点具有非零的梯度.

Theorem 3.27. 在定义3.26假设下, 若 λ 是 f 的正则值, 那么原像 $f^{-1}(\lambda)$ 是个正则曲面.

证明不想写.

原像 $f^{-1}(\lambda)$ 称为 f 的水平集. 当 λ 是正则值的时候, 这个名称能被提升为水平曲面.

这个定理使得验证特定的集合是正则曲面变成了很快的计算工作. 例如, 考虑二次函数 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$. 则 f 在 $p = (x, y, z)$ 处的 Jacobian 矩阵为 $df_p = (2x, 2y, -2z)$, 仅仅在原点处是零向量. 这个定理保证了每个其他的这个函数的水平集都是正则曲面. $f = 1$ 的水平曲面是个单叶双曲面, $f = -1$ 的水平曲面是个双叶双曲面.

在这一小节的最后, 我们得说明, 一些关于曲面的文献不是专门讨论正则曲面, 而是专门讨论参数化曲面, 定义如下:

Definition 3.28. 参数化曲面是光滑函数 $\sigma: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ (其中 U 为 \mathbb{R}^2 中的开集) 使得对任意的 $q \in U, d\sigma_q$ 的秩为 2.

注意, 正则曲面是个集合, 但是参数化曲面是个函数. 每个正则曲面的曲面切片都是一个参数化曲面. 参数化曲面不一定是个双射. 例如, 函数

$$\sigma: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \sigma(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$$

是个参数化曲面, 把平面沿着柱面折叠了无穷多次; 这个曲面在较小的定义域上的限制, 我们在3.23中用作柱面的曲面切片. 联系中有关于更复杂的自交情形的非双射参数化曲面的相关信息. 由于下面的命题, 在仅研究局部性质的时候, 正则曲面 (或者参数化曲面) 是否是一对一的是没有关系的:

Proposition 3.29. 若 $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ 是参数化曲面, 则对每个 $q_0 \in U$, 存在含 q_0 的开集 $\tilde{U} \subset U$ 使得图像 $S = \sigma(\tilde{U})$ 是个由简单曲面切片覆盖的正则曲面 (也就是 σ 在 \tilde{U} 上的限制).

证明不想写.

由于命题3.29, 你能够猜测出每个单射的参数化曲线的图像都是正则曲线, 但是第10节将会给出反命题的一个反例.

3.3 切平面

在这一节中, 我们定义曲面在某点处的切平面, 还会修改前面关于微分的定义来使之适用于定义域为曲面的函数. 我们从下面的定义开始:

Definition 3.30. 设 S 为正则曲面. S 中的正则曲线为轨迹包含在 S 中的 \mathbb{R}^3 中的正则曲线. $p \in S$ 处 S 的切平面为所有起始位置在 p 的 S 中正则曲线的初速度向量. 也就是说,

$$T_p S = \{\gamma'(0) \mid \gamma \text{ 是 } S \text{ 中的正则曲线, 且满足 } \gamma(0) = p.\}$$

对小的正值 $\epsilon > 0$, 你能够考虑这样的曲线 γ 在区域 $(-\epsilon, \epsilon)$ 内的情形. 尽管 γ 可能拥有更大的定义域, 但是这不会有啥影响, 因为 $\gamma'(0)$ 才是相关的. $T_p S$ 中的向量称为是“与 S 在 p 点处相切的”.

S 在 p 点处的切平面能够用坐标图 $\sigma: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \subset S$ 来特征化描述 (其中 $p \in V$). 令 $q = \sigma^{-1}(p)$, $\{u, v\}$ 为坐标变量, 那么我们就有如下的结论:

Lemma 3.31. $T_p(S) = \text{span}\{\sigma_u(q), \sigma_v(q)\}$. 特别的, $T_p(S)$ 是个 \mathbb{R}^3 的二维子空间.

Proof. 定义 3.30 是局部的, 所以把“ S 中的正则曲面”替换为“ V 中的正则曲面”也不会有什么影响. 因为 $\sigma: U \rightarrow V$ 是微分同胚, 所以 V 中初始位置在 p 的正则曲线恰是 U 中初始位置为 q 的正则曲线和 σ 的复合. 命题 3.7 给出

$$\begin{aligned} \text{span}\{\sigma_u(q), \sigma_v(q)\} &= \text{图像}(\text{d}\sigma_q) \\ &= \{(\sigma \circ \beta)'(0) \mid \beta \text{ 是 } U \text{ 中的正则曲线且满足 } \beta(0) = q\} \\ &= \{\gamma'(0) \mid \gamma \text{ 是 } V \text{ 中的正则曲线且满足 } \gamma(0) = p\} \\ &= T_p S. \end{aligned}$$

□

注意, $T_p S \subset \mathbb{R}^3$ 是子空间, 因为它通过原点.

而它到 p 的平移, 记为 $p + T_p S = \{p + v \mid v \in T_p S\}$, 经过点 p 且与曲面相切. 放的足够大的话, S 在 p 附近看起来会像是一个平面, $p + T_p S$ 能很好地拟合这个平面.

我们本也能够把切平面定义为 $\text{span}\{\sigma_u(q), \sigma_v(q)\}$, 但是那样的话我们就会需要说明定义和曲面切片的选择无关. 为避免这些运算, 我们构造了 $T_p S$ 的原始几何定义而非依赖于曲面切片定义, 然后证明了我们的定义和特定的曲面切片的关系. 我们在定义新的集合对象和度量的时候会尽可能多地运用这个原则.

Example 3.32. 开集 $U \subset \mathbb{R}^2$ 能被视为正则曲面, 就像在例3.22中提及的那样. 注意, 对每个 $p \in U, T_p U = \mathbb{R}^2$.

定义域为曲面的函数的微分能够通过把命题3.7的结论修改为定义来给出:

Definition 3.33. 设 S 为正则曲面, $f: S \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为光滑函数 (就像在定义3.12一样.) f 在 $p \in S$ 处的微分是线性变换 $df_p: T_p S \rightarrow \mathbb{R}^n$, 且满足对任意的 $v \in T_p S$,

$$df_p(v) = (f \circ \gamma)'(0),$$

其中 γ 是 S 中任意的正则曲面, 且满足 $\gamma(0) = p, \gamma'(0) = v$.

为何 df_p 是线性的, 以及这个定义为何是良定义的? 因为 f 的光滑性保证了存在 $p \in \mathbb{R}^3$ 的一个邻域 \mathcal{O} 和光滑函数 $\tilde{f}: \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$, 与 f 在 $\mathcal{O} \cap S$ 是一致的. 对于任意的 $v \in \mathbb{R}^3$, 命题3.7说 $d\tilde{f}_p(v) = (\tilde{f} \circ \gamma)'(0)$, 其中 γ 是 \mathbb{R}^3 中的正则曲线且满足 $\gamma(0) = p, \gamma'(0) = v$. 若 $v \in T_p S$, 则存在 S 中的正则曲线能够满足下面的三个条件. 因为在 S 中这样的曲线 γ 附近我们有 $\tilde{f} = f, d\tilde{f}_p(v) = (\tilde{f} \circ \gamma)'(0) = (f \circ \gamma)'(0) = df_p(v)$. 总之, df_p 等于良定义的线性变换 $d\tilde{f}_p: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^n$ 在区域 $T_p S$ 上的限制.

若 $f: S_1 \rightarrow S_2$ 是正则曲面间的光滑函数, 且 $p \in S_1$, 则 $df_p: T_p S_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 使用上述定义后是有意义的, 只要我们忽视 S_2 , 把 f 视为从 S_1 到更大的 \mathbb{R}^3 中的函数. 但是不要把 S_2 忽视太长时间, 否则你会略过一个有用的事实— df_p 的图像位于 $T_{f(p)} S_2$ 里面, 仅仅是因为 f 把 S_1 中的曲线映射到 S_2 . 这个事实在下面的命题中有总结:

Proposition 3.34. 若 $f: S_1 \rightarrow S_2$ 是光滑的, 则对所有的 $p \in S_1$,

$$df_p: T_p S_1 \rightarrow T_{f(p)} S_2.$$

反函数定理是关于欧几里得空间中的开集之间的函数的微分的最重要的结果. 我们在这一节的最后放上这个基本定理的曲面版本.

Theorem 3.35 (曲面的反函数定理). 设 S_1 和 S_2 为正则曲面, $f: S_1 \rightarrow S_2$ 为光滑函数. 对于 $p \in S_1$, 若 $df_p: T_p S_1 \rightarrow T_{f(p)} S_2$ 是可逆的, 则 f 限制在 p 在 S_1 中的足够小的邻域上是到它的图像的微分同胚, 且这个图像是 $f(p)$ 在 S_2 中的一个邻域.

放得足够大的情况下, S_1 在点 p 附近, S_2 在点 $f(p)$ 附近看起来像是平面. 平面上的情形正是反函数定理的原始版本. 所以证明中我们会尝试使用原始结论.

证明懒得写.

3.4 面积扰动和曲面定向

就像我们这门学科的名字微分几何所显示的那样, 研究曲面之间的光滑函数 $f: S \rightarrow \tilde{S}$, 就必须研究它在 $p \in S$ 点处的微分 $df_p: T_p S \rightarrow T_{f(p)} \tilde{S}$. 这个思想将会在下面几个小节重复出现. 在预备阶段, 我们在本节将专注于抽象地讨论 df_p 在最使我们感兴趣的成分, 也就是在 \mathbb{R}^3 的两个二维子空间之间的线性同构.

所以在本节中, \mathcal{V} 和 $\tilde{\mathcal{V}}$ 表示一对 \mathbb{R}^3 中的二维子空间, $g: \mathcal{V} \rightarrow \tilde{\mathcal{V}}$ 表示线性同构.

Definition 3.36. 我们说矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ 关于 \mathcal{V} 的有序基向量 $B = \{v_1, v_2\}$ 和 $\tilde{\mathcal{V}}$ 的有序基向量 $\tilde{B} = \{\tilde{v}_1, \tilde{v}_2\}$ 表示了 g 若

$$g(v_1) = a\tilde{v}_1 + b\tilde{v}_2, g(v_2) = c\tilde{v}_1 + d\tilde{v}_2.$$

换句话说, 若我们通过 $a_1 v_1 + a_2 v_2 \leftrightarrow (a_1, a_2)$ 来描述 $\mathcal{V} \cong \mathbb{R}^2$, 通过 $a_1 \tilde{v}_1 + a_2 \tilde{v}_2 \leftrightarrow (a_1, a_2)$ 来描述 $\tilde{\mathcal{V}} \cong \mathbb{R}^2$, 那么 g 就可以通过线性变化 $L_A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 来描述, 就像下面的交换图描述的那样:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V} & \xrightarrow{g} & \tilde{\mathcal{V}} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{L_A} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

我们下面会构造一个度量 g 造成的面积扰动程度的因子的量. 要更好地理解下面的内容, 回忆两个向量的叉积的范数等于以他们为边的平行四边形的面积.

Definition and Proposition 3.37. 下面的表达式, 称为 g 的面积扰动 (符号记为 $\|g\|$), 并不依赖于 \mathcal{V} 的基 $B = \{v_1, v_2\}$ 的选择:

$$\|g\| = \frac{|g(v_1) \times g(v_2)|}{|v_1 \times v_2|}.$$

Proof. 任意的其他的基都具有形式 $\{av_1 + bv_2, cv_1 + dv_2\}$ (其中 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ 为标量, 且 $ad - bc \neq 0$). 利用叉积的代数性质, 我们知道关于这个任意的另外的基的面积扰动是和关于原基 $\{v_1, v_2\}$ 相同的, 因为

$$\frac{|g(av_1 + bv_2) \times g(cv_1 + dv_2)|}{|(av_1 + bv_2) \times (cv_1 + dv_2)|} = \frac{|(ad - bc)(g(v_1) \times g(v_2))|}{|(ad - bc)(v_1 \times v_2)|} = \frac{|g(v_1) \times g(v_2)|}{|v_1 \times v_2|}.$$

□

术语“面积扰动”是很恰当的, 因为 \mathcal{V} 中的每一对向量张成平行四边形面积为 A , 在映射 g 下都会变成 $\tilde{\mathcal{V}}$ 中的另一对向量, 张成的平行四边形面积为 $\|g\| \cdot A$. 记号 $\|g\|$ 不是之前

出现过的标准范数符号, 加粗是为了将它与范数符号区分开来, 尽管本书在其他地方不会用到双竖线. 这个记号是自然的, 因为读者们可以把外面的竖线想成绝对值记号, 而把里面的竖线想成表示行列式值的那个记号:

Proposition 3.38. $\|g\|$ 等于 g 的关于任意的 \mathcal{V} 和 $\tilde{\mathcal{V}}$ 的任意规范正交基的表示矩阵的行列式值的绝对值.

Proof. 若 $B = \{v_1, v_2\}$, $\tilde{B} = \{\tilde{v}_1, \tilde{v}_2\}$ 分别是 $\mathcal{V}, \tilde{\mathcal{V}}$ 的任意的基, $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ 是 g 关于这些基的表示, 则

$$(3.10) \quad \begin{aligned} g(v_1) \times g(v_2) &= (a\tilde{v}_1 + b\tilde{v}_2) \times (c\tilde{v}_1 + d\tilde{v}_2) = (ad - bc)(\tilde{v}_1 \times \tilde{v}_2) \\ &= \det(A)(\tilde{v}_1 \times \tilde{v}_2) \end{aligned}$$

因此,

$$\|g\| = \frac{|g(v_1) \times g(v_2)|}{|v_1 \times v_2|} = |\det(A)| \frac{|\tilde{v}_1 \times \tilde{v}_2|}{|\tilde{v}_1 \times \tilde{v}_2|},$$

这两个基是规范正交的时候是等于 $\det(A)$ 的. □

Example 3.39. 关于极坐标函数 $f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$, 我们在3.6中计算了在 $p = (r, \theta)$ 时,

$$df_p = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

(这是关于标准正交基的). 因此, $\|df_p\| = \det(df_p) = r$. 我们下面会讨论一个重要事实: df_p 的面积扰动反应了 f 将 p 的一个小邻域的面积扰动的量.

回忆, 代表一个二维子空间到它自己 (只依赖于一对基) 的线性变换的矩阵的行列式值不依赖于基的选取, 它的绝对值就表示面积扰动. 但是在我们的情形中, g 是在不同的向量空间之间的线性变换, 我们必须加上基向量必须是规范正交的限制来确保这个值能够用来衡量面积扰动, 以及它是与基向量的选择无关的.

但是行列式值的符号又代表什么呢? 如果我们把其中一个基的顺序进行调换, 例如 $B = \{v_1, v_2\}, \tilde{B} = \{\tilde{v}_2, \tilde{v}_1\}$, 则表示 g 的矩阵的行列式很显然会变号. 为确保符号是和基无关的, 我们必须在规范正交之外再加一条正定向的限制:

Definition 3.40. \mathcal{V} 的定向指的是对 \mathcal{V} 的单位法向量 N 的选择. 关于一个给定的 \mathcal{V} 的定向 N , \mathcal{V} 的有序基 $B = \{v_1, v_2\}$ 是正定向的若 $\frac{v_1 \times v_2}{|v_1 \times v_2|} = N$. 仅有的另一种可能是 $\frac{v_1 \times v_2}{|v_1 \times v_2|} = -N$, 此时称 B 是负定向的.

注意 \mathcal{V} 的定向仅有两种可能, 每一种都是彼此的负值. 改变定向会把“哪些基是正定向的”和“哪些基是负定向的”的这样的问题的答案交换.

\mathcal{V} 的一个定向允许我们定义“逆时针旋转 90° ”的这么一个映射 $R_{90} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ (就像在第1.6节 $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$ 时做的那样). 这是因为定义了定向之后“逆时针”就有了意义. 特别地, 定义 R_{90} 使得对任意的 $a, b \in \mathbb{R}$,

$$(3.11) \quad R_{90}(av_1 + bv_2) = -bv_1 + av_2,$$

能够证明这个式子是不依赖于 \mathcal{V} 的基 $\{v_1, v_2\}$ 的选择的. 事实上, 变换 R_{90} 具有如下的不依赖于基的描述:

$$(3.12) \quad R_{90}(v) = N \times v.$$

Definition 3.41. 映射 g 称为 (关于 \mathcal{V} 和 $\tilde{\mathcal{V}}$ 的给定定向是) **保定向** 的若满足下面的等价条件:

- (1) 若 $B = \{v_1, v_2\}$ 是 \mathcal{V} 的正定向的一对基, 那么 $\tilde{B} = \{\tilde{v}_1, \tilde{v}_2\}$ 是 $\tilde{\mathcal{V}}$ 的正定向的一对基.
- (2) 关于 \mathcal{V} 和 $\tilde{\mathcal{V}}$ 的任意的正定向的有序基向量的表示 g 的矩阵具有正的行列式值.

等价性的证明: 假设 $\{v_1, v_2\}$ 和 $\{\tilde{v}_1, \tilde{v}_2\}$ 分别是 \mathcal{V} 和 $\tilde{\mathcal{V}}$ 的正定向的有序基, 设 $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ 是关于这些基的表示 g 的矩阵. 式(3.10)说的是

$$g(v_1) \times g(v_2) = \det(A)(\tilde{v}_1 \times \tilde{v}_2).$$

因此, $\{\tilde{v}_1, \tilde{v}_2\}$ 是正定向的当且仅当 $\det(A) > 0$. □

总之, 表示 g 的矩阵的行列式值并不依赖于 \mathcal{V} 和 $\tilde{\mathcal{V}}$ 的正定向有序规范正交基的选取. 它的符号能够显示 g 是保定向的还是反定向的, 绝对值表示 g 的面积扰动.

3.5 可定向曲面

在这一节中, 我们定义和研究可定向曲面. 在正则曲面 S 中的一点 p 处, 我们之前把 $T_p S$ 直观解释为将 S 放得足够大之后利用平面对该正则曲面的逼近. 那么这个平面的“方向”是怎么确定的?

Definition 3.42. S 在 p 处的法向量是指在 \mathbb{R}^3 中的一个与 $T_p S$ 正交的向量. 也就是说, 在 $N \in \mathbb{R}^3$ 若满足对任意的 $v \in T_p S$ 都有 $\langle N, v \rangle = 0$, 则称 N 是 S 在 p 处的法向量. S 在 p 处的单位法向量意为单位长度的法向量, 或者等价的说, $T_p S$ 的定向.

像之前一样, 设 $\sigma : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \subset S$ 是满足 $\sigma(q) = p$ 的坐标图. 因为 $\sigma_u(q)$ 和 $\sigma_v(q)$ 张成 $T_p S$, 它们的叉积一定和 $T_p S$ 正交, 所以以下是 p 的一个单位法向量:

$$(3.13) \quad N(p) = \frac{\sigma_u(q) \times \sigma_v(q)}{|\sigma_u(q) \times \sigma_v(q)|}.$$

事实上, 在 p 点处只有两个单位法向量, 也就是 $N(p)$ 和 $-N(p)$. 第一个选择看上去是最好的, 但是它并不是特殊的, 因为它是依赖于 σ 的. 在不同的坐标图下, 式(3.13)也许会产生其他的选项. 事实上, 总是有可能构造一个不同的产生其他选项的坐标图. 为此, 定义区域 $\hat{U} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 | (u, -v) \in U\}$, 考虑映射 $\hat{\sigma} : \hat{U} \rightarrow S, \hat{\sigma}(u, v) = \sigma(u, -v)$. 把前面式(3.13)计算用的坐标图换成这个坐标图会导致 σ_v 的符号改变, 同时 N 的符号也就改变了. 总之, 在 $p \in S$ 处有两种不同的可能的法向量, 但是还不清楚是否有独立于坐标图选择的方法来辨认哪一种法向量的选择更好.

式(3.13)定义的不仅仅是在某一点处的法向量, 也是在 $p \in V$ 的任意一点处的法向量, 也就是 V 上的整个向量场.

Definition 3.43. 在正则曲面 S 的向量场是指光滑映射 $v : S \rightarrow \mathbb{R}^3$. 若 $\forall p \in S, v(p) \in T_p S$, 则它是 S 的切向量场; 若 $\forall p \in S, v(p)$ 是 S 的法向量, 则它是 S 的法向量场.

S 上的向量场是从 S 到 \mathbb{R}^3 的函数, 由定义3.12可知光滑性在这里意味着什么. 但是向量场和其他的函数有不一样的直观解释. 将 $v(p)$ 想像成起始点在 p 的向量.

由式(3.13)关于坐标图 σ 定义的向量场称为 V 上的单位法向量场 (意思是向量的长度都是单位长的). 但是注意 V 仅仅是其中一个坐标图的像, 有可能不会覆盖整个 S . 这里有一个很重要的问题: 定义一个全局的单位法向量场是否是可能的? 如果是可能的, 那么称这个曲面是可定向的.

Definition 3.44. 正则曲面的定向指的是它的一个单位法向量场. 正则曲面 S 称为可定向的若存在 S 的定向. 可定向曲面加上其上的一个定向称为定向曲面. 定向曲面 S 的曲面切片 σ 称为是和定向一致的若式(3.13)与 S 的给定定向一致.

下面的例子说明许多我们熟悉的曲面类型都是可定向的.

Example 3.45 (平面是可定向的). 设 $x, y \in \mathbb{R}^3$ 是线性无关的, S 表示它们张成的 \mathbb{R}^3 的二维子空间. 注意 S 是正则曲面, 可以由定义为 $\sigma(u, v) = ux + vy$ 的简单曲面切片 $\sigma: \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ 覆盖. 因为 $\sigma_u = x, \sigma_v = y$ 是常数, $T_p S = \text{span}\{x, y\} = S$ 对任意的 $p \in S$ 成立. 式(3.13)决定了常向量场 $N(p) = \frac{x \times y}{|x \times y|}$, 这是个 S 上的全局单位法向量场.

Example 3.46 (水平曲面可定向). 若 $\lambda \in \mathbb{R}$ 是个光滑函数 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ 的正则值, 则定理3.27说明 $S = f^{-1}(\lambda)$ 是个正则曲面. 我们假设 λ 是个正则值是为了保证函数的梯度 $\nabla f(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p), \frac{\partial f}{\partial z}(p) \right)$ 在 S 上的限制是个 S 上的非零向量场. 因此, $N(p) = \frac{\nabla f(p)}{|\nabla f(p)|}$ 是个 S 上的全局向量场. 要验证这是个法向量场, 我们得验证每个 $p \in S$ 都有 $\nabla f(p)$ 都是和切平面 $T_p S$ 中的每个向量正交的. 为此, 考虑 S 中的正则曲线 γ 且有 $\gamma(0) = p, \gamma'(0) = v$. 因为 f 在 S 上是常数, 我们有 $0 = (f \circ \gamma)'(0) = df_p(v) = \langle v, \nabla f(p) \rangle$.

Example 3.47 (球面可定向). 球面 S^2 是函数 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ 的 $f = 1$ 处的水平曲面. 梯度为 $\nabla f(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$. 换句话说, $\nabla f(p) = 2p$. 之前我们的策略能够自然的生成 S^2 上的全局单位法向量场 $N(p) = \frac{\nabla f(p)}{|\nabla f(p)|}$. 向量场是向外指向的. 另一方面, $N(p) = -p$ 是向内指向的全局单位法向量场.

Example 3.48 (图像可定向). 根据引理3.17, 若 $U \subset \mathbb{R}^2$ 是开集且 $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ 是光滑的, 那么它的图像 $G = \{(x, y, f(x, y)) | (x, y) \in U\}$ 是与 U 微分同胚的, 微分同胚为 $\sigma: U \rightarrow G, \sigma(x, y) = (x, y, f(x, y))$. 尤其是, G 是正则曲面. 因为 G 是由这么一个简单的坐标图覆盖的, 所以由式(3.13)产生的 G 上的法向量场也是全局的. 为找到此向量场在 $p = (x, y, f(x, y))$ 的清晰的表达式, 我们进行计算 (假设在 $q = (x, y)$ 附近进行的):

$$\sigma_x = (1, 0, f_x), \quad \sigma_y = (0, 1, f_y), \quad \sigma_x \times \sigma_y = (-f_x, -f_y, 1).$$

因此,

$$N = \frac{\sigma_x \times \sigma_y}{|\sigma_x \times \sigma_y|} = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{(f_x)^2 + (f_y)^2 + 1}}.$$

每个紧正则曲面都是可定向的. 这个不平凡的事实是由下面的 Jordan 曲线定理的三维情形推出的, 其证明超出了本书的范畴:

Theorem 3.49. 若 S 是个紧正则曲面, 则 $\mathbb{R}^3 - S = \{p \in \mathbb{R}^3 | p \notin S\}$ 有两个道路连通分支. 它们的共同边界是 S . 一个分支 (我们称为内部) 是有界的, 另一个分支 (我们称为外部) 是无界的.

因此, 紧正则曲面能够被通过统一选择法向量指向内部还是外部来实现定向. 总体上看, 选择可定向曲面的定向一般不是大问题——通常而言仅有两种选择:

Lemma 3.50. 若 S 连通的可定向正则曲面, 则 S 仅有两种定向, 互为相反数.

Proof. 因为 S 是可定向的, 所以至少存在 S 的一种定向, 我们称为 $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$. 注意到 $-N$ 就是另外一种定向. 设 M 为 S 的任意一种定向. 我们得证明 M 等于 N 或者是 $-N$. 为此, 定义 $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ 使得对任意的 $p \in S$,

$$f(p) = \langle N(p), M(p) \rangle.$$

在任意一点 $p \in S$ 处, 要么 $M(p) = N(p)$, 要么 $M(p) = -N(p)$, 所以要么 $f(p) = 1$, 要么 $f(p) = -1$. 因为 S 是连通的, 所以由附录中的命题 A.19 可知 f 在 S 上是常数, 所以 M 等于 N 或 $-N$. \square

如果你想要把曲面的上面涂上颜色, 那么定向大致的意思就是你把哪个面看成是上面. 除了定向之外我们没有其他的因素能影响我们对曲面的上下面的判定.

曲面的定向的记号能够与上下文中的其他的“定向”这个术语联系起来. 特别地, 曲面的定向意为对每个切平面的定向的选择, 此选择的变化是光滑的, 这反过来又决定了给定切平面 $T_p S$ 的给定基是否是正定向的. 有了这个区别, 我们就能为 $T_p S$ 中的简单闭曲线选择一个比较好的定向; 为此, 我们只需要用正定向的基来表示 \mathbb{R}^2 中的 $T_p S$, 为产生的平面曲线选择一个“正定向”. 这个区别也使得我们能够通过定向的行为来区分微分同胚:

Definition 3.51. 定向曲面间的微分同胚 $f : S \rightarrow \tilde{S}$ 若满足对任意的 $p \in S, df_p : T_p S \rightarrow T_{f(p)} \tilde{S}$ 是保定向的, 则称该微分同胚是保定向的.

当曲面是连通的时, 只要验证在单个点是满足条件的就行了:

Proposition 3.52. 连通的定向曲面间的微分同胚 $f : S \rightarrow \tilde{S}$ 是保定向的当且仅当存在一点 $p \in S$ 使得 df_p 是保定向的.

证明留作练习.

Example 3.53 (S^2 上的保距变换). 设 $A \in O(3)$ 为正交矩阵, 记 $f: S^2 \rightarrow S^2$ 表示保距变换 $L_A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 在 S^2 上的限制. 我们假设 S^2 具有“向外指”的定向, 即 $N(p) = p$. 我们说此微分同胚 f 是保定向的当且仅当 $\det(A) = 1$ (或等价地说, L_A 是恰当的).

为说明这一点, 设 $p \in S^2$, 设 $\{v_1, v_2\}$ 为 $T_p S^2$ 的正定向的有序基. 注意到 $\{v_1, v_2, N(p)\}$ 为 \mathbb{R}^3 的正定向的有序基 (如定义 1.62 所说). 由引理 1.63, $\det(A) = 1$ 当且仅当有序基在 L_A 下的像也是 \mathbb{R}^3 的正定向的有序基. 有序基的像是

$$\{L_A(v_1), L_A(v_2), L_A(N(p))\} = \{df_p(v_1), df_p(v_2), N(f(p))\}.$$

上面的关于 $L_A(v_1) = df_p(v_1)$ 的声明, 注意到 df_p 是 $d(L_A)_p$ 在 $T_p S^2$ 上的限制以及 $d(L_A)_p = L_A$ —因为线性变换的导数就是它自身—就能验证成立. 现在, 注意到 $\{df_p(v_1), df_p(v_2), N(f(p))\}$ 是 \mathbb{R}^3 的正定向的有序基, 当且仅当 $\{df_p(v_1), df_p(v_2)\}$ 是 $T_{f(p)} S^2$ 的正定向的有序基. 总之, $\det(A) = 1$ 当且仅当 $df_p: T_p S^2 \rightarrow T_{f(p)} S^2$ 是保定向的.

最臭名昭著的不可定向曲面的例子是莫比乌斯带 (Möbius Strip). 很容易做一个实物模型—找个细长条的纸带, 扭一下再首尾粘接, 就行了. 在延拓为闭曲面之前, 你可以通过做一个实物来感受一下—它只有一条边界!

如果你尝试把其中一面染色, 你就会发现它不可定向的原因: 它只有一个面. 引擎, 工厂和超市中的传送带有的时候会做成莫比乌斯带的形状. 与传统的双面带相比, 这样的设计有了一条双倍长度的单面, 因此使用寿命会延长 (一般会翻倍).

更精确地, 让我们把莫比乌斯带 S 参数化. 为此, 首先设 B 表示竖线部分, 参数化为 $b(v) = (2, 0, v), v \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. S 可以看做是由 B 绕 z 轴旋转同时 B 本身也进行旋转, 回到原点的时候旋转了 180° (也就是说, 到原点的时候刚好上下颠倒). 也就是说, 绕 z 轴旋转了 u 角度时, 必须自转了 $\frac{u}{2}$ 角度. 想像一下 B 首先关于它的中心 $(2, 0, 0)$ 在 xz -平面中旋转 $\frac{u}{2}$ 角度, 此时它的参数化变成 $b_{u/2}(v) = (2, 0, 0) + v(\sin(u/2), 0, \cos(u/2))$. 然后将它用 $A_u = \begin{pmatrix} \cos u & -\sin u & 0 \\ \sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 左乘来实现绕 z -轴旋转 u 的角度. 所以它的参数化是

$$\begin{aligned} \sigma(u, v) &= L_{A_u}(b_{u/2}(v)) \\ (3.14) \quad &= \left(\cos(u) \left(2 + v \sin\left(\frac{u}{2}\right) \right), \sin(u) \left(2 + v \sin\left(\frac{u}{2}\right) \right), v \cos\left(\frac{u}{2}\right) \right) \end{aligned}$$

注意到上面的 σ 的公式关于变量 u 具有周期 4π . 这看起来是挺奇怪的, 因为将 σ 限制在区域 $u \in [0, 4\pi), v \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 内的话会覆盖 S 两次 (可以想象一下, 你要给实物 (纸做的模型) 涂色, 通过涂两次来使“两面”都涂上色—但是你发现沿着面涂只需要涂一遍, 所以它只有一个面). σ 在这个区域上的限制并不是双射, 所以它根本不是曲面切片; 然而, 当 σ 被限制在满足 $v \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), u$ 位于一个长度小于 2π 的长度内. 这个“双覆盖”的特性允许我们证明下面的命题:

Proposition 3.54. 莫比乌斯带 S 是不可定向的.

证明懒得写.

3.6 曲面面积

在这一节我们定义和研究曲面上的区域的面积. 假设 $\sigma : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ 为曲面切片. 设 $q \in U$, 定义 $p = \sigma(q)$. 通过选择定义3.37中的基 $\{e_1, e_2\}$, 我们了解到线性变换 $d\sigma_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow T_p S$ 的面积扰动是

$$\|d\sigma_q\| = |\sigma_u(q) \times \sigma_v(q)|.$$

这个面积扰动因子受到 $q \in U$ 的影响, 所以我们将 $\|d\sigma\|$ 看作是从 U 到正实数的函数.

为避免积分技巧上的问题, 我们只考虑某些特定区域上的光滑函数.

Definition 3.55. 设 S 为正则曲面且 $R \subset S$. 若 R 由单个坐标图 $\sigma : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ 覆盖且 $\sigma^{-1}(R)$ 等于 \mathbb{R}^2 中一个分片正则的简单闭曲线的内部, 则称 R 是 S 中的一个多边形区域. 在这种情况下:

(1) 我们定义 R 的面积 (或者叫曲面面积) 为

$$\text{面积}(R) = \iint_{\sigma^{-1}(R)} \|d\sigma\| \, dA.$$

(2) 我们定义光滑函数 $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ 在 R 上的积分为

$$\iint_R f \, dA = \iint_{\sigma^{-1}(R)} (f \circ \sigma) \cdot \|d\sigma\| \, dA.$$

若 R 是有限多个交集仅有边界的多边形区域的并, 那么我们定义 R 的面积 (或者 f 在 R 上的积分) 为各个多边形区域上的面积 (积分) 之和.

σ 的微分在 $q \in U$ 处的面积扰动的值是 $\|d\sigma_q\|$, 但它自身也能称为 σ 在 q 处的无穷小量面积扰动 (infinitesimal area distortion), 因为若 $\sigma^{-1}(R) \ni q$ 足够小那么 $\|d\sigma\|$ 会大致地接近于一个常数, 则上面的定义就会给出

$$\|d\sigma_q\| \approx \frac{\text{面积}(R)}{\text{面积}(\sigma^{-1}(R))}.$$

为何 $\iint_{\sigma^{-1}(R)} \|d\sigma\| \, dA$ 是个合理的 R 的面积的定义? 换句话说, 为什么 R 的面积应该被定义为 σ 的无穷小量面积扰动在 $\sigma^{-1}(R)$ 的积分值? 因为一种对这个积分 (在直角坐标下) 的黎曼和估计看起来是下面这样的:

$$\|d\sigma\| \Delta u \Delta v = |\sigma_u \times \sigma_v| \Delta u \Delta v = |(\Delta u \sigma_u) \times (\Delta v \sigma_v)|$$

= 由 $(\Delta u \sigma_u)$ 和 $(\Delta v \sigma_v)$ 张成的平行四边形面积,

其中 σ_u 和 σ_v 是在 $\sigma^{-1}(R)$ 所分成的第 i 个矩形 \mathcal{R}_i 上的采样点 (u_i, v_i) 取值的. 这个平行四边形是能够逼近 \mathcal{R}_i 的面积, 所以整个黎曼和是能够逼近整个 R 的面积.

为什么 $\iint_{\sigma^{-1}(R)} (f \circ \sigma) \cdot \|d\sigma\| dA$ 是个合理的 f 在 R 上的积分的定义? 把 S 想像为地球, R 想像为英国, f 是表示每单位面积上的昆虫数量的密度函数. 一种黎曼和的估计等于 $\sigma(R_i)$ 中的每个样本点的昆虫密度乘以 $\sigma(R_1)$ 中模拟的每个区域的面积来估算该地区的昆虫数量. 整个黎曼和就能够估计英国地区的昆虫数量, 而这正是这个积分 $\int_R f dA$ 本该蕴含的意义. 因为定义不需要证明, 上面的讨论只是为了说明这个定义是合理的. 但是下面的条件也是需要满足的:

Proposition 3.56. 定义3.55是良定义的. 换句话说, 若存在两个曲面切片 $\sigma_i : U_i \rightarrow V_i (i \in \{1, 2\})$ 使得每个都覆盖 R , 那么积分 $\iint_R f dA$ 关于每个曲面切片计算出的值都是相同的.

证明依赖于下面的二重积分“坐标变换”规则, 在任意一本分析学或是多元微积分的书籍中都能够找到:

$$\iint_K \varphi dA = \iint_{\psi^{-1}(K)} (\varphi \circ \Psi) \cdot \|d\Psi\| dA.$$

Lemma 3.57. 若 $\Psi : U_1 \rightarrow U_2$ 是在 \mathbb{R}^2 中的开集之间的微分同胚, $\varphi : U_2 \rightarrow \mathbb{R}$ 是光滑的, $K \subset U_2$ 是多项式区域, 则

$$\iint_K \varphi dA = \iint_{\psi^{-1}(K)} (\varphi \circ \Psi) \cdot \|d\Psi\| dA.$$

命题3.56的证明. 考虑变换映射 $\psi = \sigma_2^{-1} \circ \sigma_1$. 技术上, ψ 是个从 $\sigma_1^{-1}(V_1 \cap V_2)$ 到 $\sigma_2^{-1}(V_1 \cap V_2)$ 的微分同胚. 但是我们可以不失一般性地假设 $V_1 = V_2$, 则 ϕ 变为从 U_1 到 U_2 的微分同胚. 为达成这种简化效果, 只需要把 U_1 重定义为等于 $\sigma_1^{-1}(V_1 \cap V_2)$, 把 U_2 重定义为等于 $\sigma_2^{-1}(V_1 \cap V_2)$.

因为 $\sigma_1 = \sigma_2 \circ \psi$, 链式法则和练习 3.56 中的结论给出

$$\|d(\sigma_1)\| = \|d(\sigma_2) \circ d\psi\| = \|d(\sigma_2)\| \cdot \|d\psi\|.$$

f 关于 σ_1 在 R 上的积分就变成

$$\begin{aligned} \int_R f dA &= \iint_{\sigma_1^{-1}(R)} (f \circ \sigma_1) \cdot \|d(\sigma_1)\| dA \\ &= \iint_{\sigma_1^{-1}(R)} (f \circ \sigma_2 \circ \psi) \cdot \|d(\sigma_2)\| \cdot \|d\psi\| dA \\ &= \iint_{\sigma_2^{-1}(R)} (f \circ \sigma_2) \cdot \|d(\sigma_2)\| dA \end{aligned}$$

等于 f 在 R 上关于 σ_2 的积分值. 最后的等式是引理3.57的应用. □

Example 3.58 (函数图像的面积). 光滑函数 $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 的图像 G 是由定义为 $\sigma : U \rightarrow G, \sigma(x, y) = (x, y, f(x, y))$ 的单个曲面切片覆盖的. 我们在例3.48中计算了

$$|\sigma_x \times \sigma_y| = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}.$$

因此, 多边形区域 $R \subset G$ 的面积是

$$\text{面积}(R) = \iint_{\sigma^{-1}(R)} \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} dA.$$

Example 3.59 (球面面积). 回忆, 例3.24中球面 S^2 除了一段弧之外都能被球面坐标图 $\sigma : \underbrace{(0, 2\pi) \times (0, \pi)}_U \rightarrow S^2$ 覆盖, 其中

$$\sigma(\theta, \phi) = (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi).$$

我们在那个例子中计算出 $\|\mathrm{d}\sigma\| = |\sigma_\theta \times \sigma_\phi| = \sin \phi$. 因为没覆盖住的弧段的面积可以视作零 (它是一维的), S^2 的曲面面积是

$$\iint_U (\sin \phi) dA = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\sin \phi) d\phi d\theta = 2\pi \int_0^\pi (\sin \phi) d\phi = 4\pi.$$

我们讨了一点巧——我们把 U 的边界包括在 U 里面了. 我们事实上应该计算

$\int_{0+\epsilon}^{2\pi-\epsilon} \int_{0+\epsilon}^{\pi-\epsilon} (\sin \phi) d\phi d\theta$, 其中 ϵ 很小且为正数, 然后求 $\epsilon \rightarrow 0$ 的极限, 但是这显然会给出一样的结果.

面积扰动因子 $\|\mathrm{d}\sigma\| = \sin \phi$ 在南极点和北极点取 0, 在这两点附近坐标网格线越来越密集.

尽管我们目前仅仅提及了曲面切片的微分的面积扰动, 其他类型的函数的面积扰动, 比如曲面之间的微分同胚的面积扰动, 也很重要:

Proposition 3.60. 若 $f : S_1 \rightarrow S_2$ 是个正则曲面之间的微分同胚, R 是个 S_1 上的多项式区域, 则它的图像 $f(R)$ 是 S_2 上的多项式区域且

$$\text{面积}(f(R)) = \iint_R \|\mathrm{d}f\| dA.$$

Proof. 设 $\sigma : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_1$ 是个覆盖 R 的曲面切片. 则 $f(R)$ 是被曲面切片 $f \circ \sigma : U \rightarrow S_2$ 覆盖的. 由曲面之间的链式法则我们有 (练习 3.46 和 3.56),

$$\|\mathrm{d}f \circ \sigma\| = \|\mathrm{d}f \circ \mathrm{d}\sigma\| = \|\mathrm{d}f\| \cdot \|\mathrm{d}\sigma\|.$$

因此,

$$\text{面积}(f(R)) = \iint_{\sigma^{-1}(R)} \|d(f \circ \sigma)\| dA = \iint_{\sigma^{-1}(R)} \|df\| \cdot \|d\sigma\| dA = \iint_R \|df\| dA.$$

□

对于 $p \in S$, 数值 $\|df_p\|$ 是 f 的微分在 p 处的面积扰动, 但是它也能被称为 f 自身在 p 处的无穷小量面积扰动, 因为 $R \ni p$ 足够小的话, $\|df\|$ 就会大致接近于一个常数, 则上面的命题就给出

$$(3.15) \quad \|df_p\| \approx \frac{\text{面积}(f(R))}{\text{面积}(R)}.$$

3.7 等距同构和第一基本形式

在这一节, 我们定义和研究曲面的第一基本形式, 并开始讨论什么样的纯度量能够在其中被定义.

回忆在第1.2节中有提及一对向量 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ 的内积是

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \in \mathbb{R}.$$

代数上, 内积是 \mathbb{R}^n 上的对称双线性函数. 几何上, 单纯借助内积就能够定义范数和角度:

$$(3.16) \quad |x|^2 = \langle x, x \rangle, \quad \angle(x, y) = \cos^{-1} \left(\frac{\langle x, y \rangle}{|x| |y|} \right).$$

反之, 内积能够用范数来表达. 简而言之, 只需要解关于 $\langle x, y \rangle$ 的方程

$$|x - y|^2 = \langle x - y, x - y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle - 2 \langle x, y \rangle$$

就能得到

$$(3.17) \quad \langle x, y \rangle = \frac{1}{2} (|x|^2 + |y|^2 - |x - y|^2).$$

因此, 内积和范数包含的是完全相同的信息, 只是用不同的方式表达罢了. 式(3.17)之前在第1.8节提到过.

假设 S 是个正则曲面, $p \in S$. 在 $x, y \in T_p S$ 时, 我们有时会使用记号 $\langle x, y \rangle_p$ (而非仅仅是 $\langle x, y \rangle$). 换句话说, $\langle \cdot, \cdot \rangle_p : T_p S \times T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ 表示 \mathbb{R}^3 中的内积在 $T_p S$ 中的向量组上的限制. 类似的, 我们在 $x \in T_p S$ 时也会使用记号 $|x|_p$ (而非仅仅使用 $|x|$). 换句话说, $|\cdot|_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ 表示 \mathbb{R}^3 中的范数在 $T_p S$ 中的向量上的限制. 这个限制和平方函数的复合有一个听起来很重要的名字:

Definition 3.61. S 的第一基本形式是将 $p \in S$ 映射到 \mathbb{R}^3 中的范数的平方函数在 $T_p S$ 中的向量上的限制的函数, 也就是从 $T_p S$ 到 \mathbb{R} 的映射 $x \mapsto |x|_p^2$.

术语形式能够由它自己精确定义, 但是我们对此不做要求. 在模糊的术语表达中, S 上的形式将点 $p \in S$ 映射到一个有一个或多个 $T_p S$ 上的向量输入的函数. 在第一基本形式的例子中, 这个函数输入一个向量, 输出它的范数的平方.

这似乎是一个冠上大标题的简单定义. 真正基本的是下面这个问题: S 上的什么度量能够被单纯用第一基本形式来描述? 正则曲面上的度量如果能够单纯用第一基本型来描述, 就称它是内蕴的. 这是个很重要的区分. 在本书中, 我们会不断地提问我们的度量是否是内蕴的.

现在, 我们从式(3.17)就能知道 (一对在任意一点与 S 相切的向量的) 内积是内蕴的. 进一步讲, 等式(3.16)允许我们仅仅使用第一基本形式来描述 (一对在任意一点和 S 相切的向量之间的) 角度, 所以角度也是内蕴的.

一个不那么明显的例子是 (一对在任意一点和 S 相切的向量张成的) 平行四边形的面积也是内蕴的. 这个面积等于 $|a \times b|$, 乍看起来似乎不仅仅依赖于第一基本形式——它包含了叉积和不与 S 相切的向量的范数. 但是引理1.43允许我们重新表达这个公式为

$$|x \times y| = \sqrt{|x|^2 |y|^2 - \langle x, y \rangle^2},$$

这就只依赖于第一基本形式了.

有一种更精确的定义“内蕴”的方法. 我们真正寻找的是能够在保第一基本形式的微分同胚的变换下保持不变的度量. 这样的微分同胚我们称为等距同构 (*isometries*):

设 S_1, S_2 为一对正则曲面. 微分同胚 $f: S_1 \rightarrow S_2$ 称为等距同构 (**isometry**) 若 df 是保第一基本形式的, 也就是若

$$|x|_p^2 = |df_p(x)|_{f(p)}^2, \text{ 对任意的 } p \in S_1, x \in T_p S_1.$$

这和说 df 是保内积的是等价的:

$$\langle x, y \rangle_p = |df_p(x), df_p(y)|_{f(p)}, \text{ 对任意的 } p \in S_1, x, y \in T_p S_1.$$

两个正则曲面称为是等距同构的 (**isometric**) 若它们之间存在等距同构. 曲面上的度量或者是结构是内蕴的若它在等距同构下保持不变.

等价关系是式(3.17)的一个直接结果, 该等式用范数来表达内积. 这个“内蕴”的定义和前面是一致的, 但是更精确. 例如, 上面的“平行四边形面积是内蕴的”的结论事实上说的是: 若 $f: S_1 \rightarrow S_2$ 是个等距同构, 那么 $|df_p(x) \times df_p(y)| = |x \times y|$ 对任意的 $p \in S_1, x, y \in T_p S_1$ 成立.

主要的等距同构的例子来源在下面:

Lemma 3.62. 若 f 为 \mathbb{R}^3 中的保距变换, S 是正则曲面, 则图像 $f(S)$ 也是正则曲面, f 限制在 S 上就是从 S 到 $f(S)$ 的等距同构.

证明留作练习.

在这个引理中, 若 $f(S) = S$, 则 f 能导出从 S 到它自身的一个等距同构, 我们称为 S 的等距自同构 (**isometry of S**)⁵. 例如, 每个关于 z 轴的旋转都是任意 (例3.25所构造的类型的) 旋转曲面的等距自同构. 类似地, 若 $A \in O(3)$ 是个正交矩阵, 那么 L_A 限制在 S^2 上就是个等距自同构.

下面的例子展示了一对曲面件的等距同构, 这个同构并非来自于 \mathbb{R}^3 中的保距变换.

⁵译者也懵了, 为啥自同构和同构的英文长得一样? 看懂符号还得判断一下是否自同构?

Example 3.63 (圆柱面曲面切片是等距同构). 在例3.23中, 我们覆盖了圆柱面 C 除了一条直线以外的部分, 用的是下面的曲面切片: $\sigma : \underbrace{(-\pi, \pi) \times \mathbb{R}}_U \rightarrow C, \sigma(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$. 在任意一点 $q = (u, v) \in U$ 处, 我们计算得:

$$\sigma_u(q) = (-\sin(u), \cos(u), 0), \quad \sigma_v(q) = (0, 0, 1).$$

这两个向量构成了切平面 $T_{\sigma(q)}C$ 的一组规范正交基. 换句话说, 对每个 $q \in U$, 我们找到了一个 $T_q U = \mathbb{R}^2$ 的规范正交基 (也就是 $\{e_1, e_2\}$), 线性变换 $d\sigma_q$ 会把这个规范正交基映射到 $T_{\sigma(q)}C$ 的规范正交基上. 这说明 σ 是 U 和它的图像之间的等距同构.

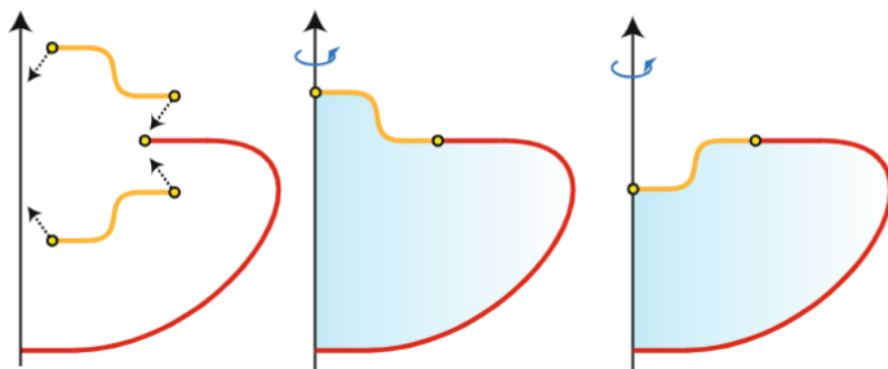
一个等距同构的等价定义是保所有曲线长度的微分同胚. 上面的圆柱面的曲面切片能够被视为将平面绕着金属制的轴卷起来. 直觉上来说, 这个卷绕的过程并不会改变上面的曲线的长度, 所以直观上他是个等距同构也是可信的.

这个圆柱面的例子改善了我们正在形成的关于那些度量是内蕴的的直觉. 等距同构会保持曲面的弯曲以及周围 \mathbb{R}^3 中的曲线不变吗? 我们之后会回到这个重要的问题. 事实上, 我们下面会证明一个叫做曲面的高斯曲率 (*Gaussian Curvature*) 的如基石般重要的度量是内蕴的. 但是现在, 我们会说明更显然的弯曲/缠绕的度量不是内蕴的:

Example 3.64 (最小曲率不是内蕴的). 设 S 是正则曲面, $p \in S, v \in T_p S$ 是单位长的. S 在 p 处 v 方向的“最小曲率”指的是 S 中满足 $\gamma(0) = p, \gamma'(0) = v$ 的正则曲线 γ 在 p 处的曲率的最小可能值. 例如, \mathbb{R}^2 的开子集的任一点处任意方向的最小曲率都是 0, 因为 γ 可以是直线段. 另一方面, 练习 1.41 说明柱面有非零的最小曲率值—每个与柱面的腰相切的曲线都至少有曲率 1 来确保能够具有足以留在柱面中的弯曲程度. 因此, 例3.63说明最小曲率不是在等距同构下保持不变的. 尽管术语“最小曲率”不会在本书中再次出现, 第四章将会讨论一个叫做“正则曲率”的东西, 是一个最小曲率的带符号版本.

在甚至紧曲面之间都有不来源于 \mathbb{R}^3 中的保距变换的等距同构:

Example 3.65 (不来自于保距变换的紧曲面之间的等距同构). 考虑下图中由红色和黄色部分关于垂直的轴旋转生成的旋转曲面. 在图中可生成两种曲线—它们之间的区别在于黄色部分是向上翻还是向下翻. 为确保两种曲面的光滑性, 红黄两个部分的线在连接处附近以及和垂直轴连接处附近都是水平的, 就像在图中画出来的那样. 产生的一对曲面有个很显然的等距同构存在. 那个映射显然是个等距同构, 因为在红色部分, 它是恒同映射, 在黄色部分, 它是关于一个水平面的翻折 (这是个 \mathbb{R}^3 中的保距变换).



曲面内部的容积取决于生成曲面的黄色部分是向上翻还是向下翻⁶

你也许曾错误地猜测“内部容积”是等距同构不变量(至少在紧正则曲面之间是不变的,此时“内部”在定理3.49的意义下成立).但是上面的例子中的那对曲面是等距同构但是具有不同容积.因此,“内部容积”不是等距同构不变量.

⁶原文:“The volume inside the surface of revolution depends on whether the yellow portion of the generating curve is flipped before being attached to the red portion.”

3.8 保面积和保角映射 (选读)

这个小节是关于两种比等距同构更具有一般性的微分同胚的, 也即保面积 (equiareal) 和保角 (conformal) 映射. 这一小节基于它在地图学 (cartography) 的一个基本问题中的应用: 什么是构造球面形的地球表面的平面地图的最好方法?

下面是第一种弱化等距同构的限制的重要的方法:

Definition 3.66. 设 S_1, S_2 是一对正则曲面. 微分同胚 $f: S_1 \rightarrow S_2$ 被称为是保面积的若对任意的 $p \in S_1$, 面积扰动 $\|df_p\|$ 等于 1.

“保面积 (equiareal)” 的一个同义词是 “保面积 (area-preserving)”, 因为我们有下面的结果:

Proposition 3.67. 微分同胚 $f: S_1 \rightarrow S_2$ 是保面积的 (equiareal) 当且仅当它在以下意义下是保面积的 (area-preserving): 若 $R \subset S_1$ 是多边形区域, 则 $\text{面积}(R) = \text{面积}(f(R))$.

证明的一个方向是命题 3.60 的直接结果, 另一个方向留作练习.

等距同构是保面积的, 但是保面积的微分同胚并不都是等距同构. 就像下面的这个例子:

Example 3.68. 设 $\lambda > 0, f = L_A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 表示关于标准正交基 $\{e_1, e_2\}$ 由矩阵 $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}$ 表示的线性变换. 对每个 $p \in \mathbb{R}^2$, 我们都有 $df_p = f$ (由练习 3.1 得知). 因此

$$\|df_p\| = \|f\| = |\det(A)| = 1,$$

这说明了 f 是保面积的. 这个线性变换的作用是横向拉伸 λ 倍纵向压缩为 $1/\lambda$ 倍, 因此能保持水平与竖直线所成的 90° 角但是其他的角都会发生改变. 因此它不是保角的.

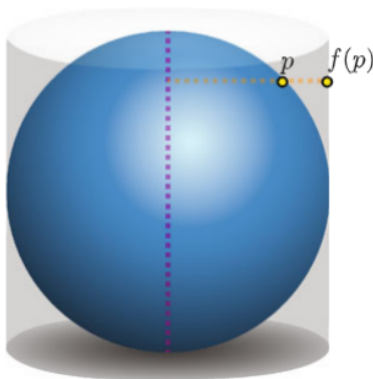
上面的例子是很特殊的, 因为 f 是线性的, 但是它展示了保面积映射的一个方面. 也就是说. 若 $f: S_1 \rightarrow S_2$ 是保面积映射, 那么对于任意的 $p \in S_1$, 我们可以选择特定的 $T_p S_1$ 和 $T_p S_2$ 的规范正交基, 使得表示线性变换 $df_p: T_p S_1 \rightarrow T_{f(p)} S_2$ 的矩阵具有 $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}$ 的形式, 其中 $\lambda > 0$. 借此, 保面积映射就避免了通过在一个方向拉伸和在另一个方向压缩的调节模式来改变每个无穷小区域的面积 (把这个调节部分挑出来了). 拉伸-压缩的因数 λ 是 p 的函数.

最著名的保面积映射的例子来自于阿基米德 (Archimedes). 定义域是去除了南北极点的球面: $S^2 - \{(0, 0, \pm 1)\}$. 值域是下面的柱面:

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, -1 < z < 1\}$$

函数 $f: S^2 - \{(0, 0, \pm 1)\} \rightarrow C$ 在下图中有展示. 它把每个点 $p \in S^2 - \{(0, 0, \pm 1)\}$ 映射到 C 上与之最近的点 $f(p) \in C$. 最近的点显然会有与 p 相同的 z -坐标值. 如果你想像 z 轴会发光, 球面是在 p 点处有一点颜料标记的玻璃球, 则 $f(p)$ 就是该标记点在柱面上的阴影. 这个函数的一个表达式是

$$(3.18) \quad f(x, y, z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, z \right).$$



从球面到柱面的保面积映射

Theorem 3.69 (阿基米德定理). 在式(3.18)中的函数 f 是保面积的.

阿基米德使用了这个定理来计算球面面积 (它等于柱面面积, 后者很容易计算). 在传说中, 阿基米德要求在墓碑上刻上他在证明中使用到的一幅图. 尽管他是微积分的先驱, 但是他的证明比下面的证明更 involved:

Proof. 在例3.24中我们定义了球面的坐标图 $\sigma: \underbrace{(0, 2\pi) \times (0, \pi)}_U \rightarrow S^2$ 为

$$\sigma(\theta, \phi) = (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi).$$

设 $q = (\theta, \phi) \in U$, 令 $p = \sigma(q)$. 我们在例子中计算出 $|\sigma_\theta \times \sigma_\phi| = \sin \phi$. 因为 $\{\sigma_\theta, \sigma_\phi\}$ 是 $T_p S^2$ 的基, 面积扰动的定义给出了

$$\|df_p\| = \frac{|df_p(\sigma_\theta) \times df_p(\sigma_\phi)|}{|\sigma_\theta \times \sigma_\phi|} = \frac{|df_p(\sigma_\theta) \times df_p(\sigma_\phi)|}{\sin \phi}.$$

我们还需要说明 $|df_p(\sigma_\theta) \times df_p(\sigma_\phi)| = \sin \phi$, 这样就能得到我们想要的 $\|df_p\| = 1$.

函数复合 $\tilde{\sigma} = f \circ \sigma: U \rightarrow C$ 是 C 的曲面切片, 其表达式可以简单地写为

$$\tilde{\sigma}(\theta, \phi) = (\cos(\theta), \sin(\theta), \cos \phi).$$

因为 $df_p(\sigma_\theta) = \tilde{\sigma}_\theta, df_p(\sigma_\phi) = \tilde{\sigma}_\phi$, 我们知道

$$|df_p(\sigma_\theta) \times df_p(\sigma_\phi)| = |\tilde{\sigma}_\theta \times \tilde{\sigma}_\phi| = |(-\sin \theta, \cos \theta, 0) \times (0, 0, -\sin \phi)| = \sin \phi,$$

这样, 我们就完成了证明. \square

由前面的证明的表达式, 你能够很容易的验证 $\|df_p\| = 1$. 事实上, 关于规范正交基 $\left\{ \frac{\sigma_\theta}{|\sigma_\theta|}, \frac{\sigma_\phi}{|\sigma_\phi|} \right\}$ 和 $\left\{ \frac{\tilde{\sigma}_\theta}{|\tilde{\sigma}_\theta|}, \frac{\tilde{\sigma}_\phi}{|\tilde{\sigma}_\phi|} \right\}$, 线性变换 df_p 能够使用矩阵 $\begin{pmatrix} 1/\sin \phi & 0 \\ 0 & \sin \phi \end{pmatrix}$; 和例3.68作比较. 拉伸压缩系数 $\lambda = 1/\sin \phi$, 在赤道附近等于 1, 在 p 靠近极点的时候趋于无穷.

阿基米德定理能够被用来构造性质足够好的从地球球面到直角坐标平面的映射.⁷ 特别地, 兰勃特投影 (Lambert Projection) 是 (通过式(3.18)中的函数 f) 将球面映射到圆柱面上, 然后再 (通过例3.23中柱面曲面切片的逆) 将圆柱面展开为平面矩形获得的.

由阿基米德定理, 兰勃特投影构造了一个“保面积”的映射. 球面上任意一个大陆或是国家的面积都和投影中的大陆和国家的面积是相等的. 因此此法绘制的地图能够很好地展现面积之间的相对关系, 比如说, 非洲大陆是澳大利亚的 3.7 倍大. 一个很常见的平凡的改动是水平方向上压缩兰勃特投影. 例如, 高尔-彼得斯映射 (Gall-Peters map) 只是把兰勃特投影水平压缩, 直到在南北纬为 45° 的平行线上的拉伸-压缩系数为 1 (而非赤道) ($\phi = \pi/4$ 和 $\phi = 3\pi/4$). 在这两条平行线上的形状会保持原样.

尽管这些保面积映射能够精确地保留原图形的面积, 但是我们还是看到他们会扭曲图形和角度. 这种扭曲越靠近极点越明显. 地球球面的映射有可能是保角的吗? 这个问题引出了我们的等距同构的另一个推广:

Definition 3.70. 设 S_1, S_2 为一对正则曲面. 微分同胚 $f: S_1 \rightarrow S_2$ 称为**保角映射** 若 df 保持角度不变, 也就是说, 若

$$\angle(x, y) = \angle(df_p(x), df_p(y)) \text{ 对任意的 } p \in S_1, x, y \in T_p S_1 \text{ 成立.}$$

Example 3.71. 设 $\lambda > 0$, 令 $f = L_A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 表示由矩阵 $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, 也就是说, $f(p) = \lambda p$. 设 $p \in \mathbb{R}^2, x, y \in T_p \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2$.

注意到 $df_p = f(x) = \lambda x$. 因此

$$\begin{aligned} \angle(df_p(x), df_p(y)) &= \cos^{-1} \left(\frac{\langle df_p(x), df_p(y) \rangle}{|df_p(x)| |df_p(y)|} \right) \\ &= \cos^{-1} \left(\frac{\langle \lambda x, \lambda y \rangle}{|\lambda x| |\lambda y|} \right) \\ &= \cos^{-1} \left(\frac{\langle x, y \rangle}{|x| |y|} \right) \\ &= \angle(x, y), \end{aligned}$$

⁷原文: “Archimedes’s theorem can be used to create a flat rectangular map of the spherical Earth with desirable properties.”

所以 f 是保角的.

上面的例子是很特殊的, 因为 f 是线性映射, 但是它显示了保角映射的冰山一角. 那就是, 若 $f: S_1 \rightarrow S_2$ 是保角映射, 那么对每个 $p \in S_1$, 存在 $T_p S_1$ 和 $T_p S_2$ 的规范正交基使得关于这两个规范正交基的线性变换 df_p 是由形式为 $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. 扭曲因子 λ 取决于 p , 也是 mdf_p 会放缩向量范数的影响因素之一. 总之:

Proposition 3.72. 微分同胚 $f: S_1 \rightarrow S_2$ 是保角的当且仅当存在一个光滑正值函数 $\lambda: S_1 \rightarrow \mathbb{R}$ 使得

$$\langle df_p(x), df_p(y) \rangle_{f(p)} = \lambda(p)^2 \cdot \langle x, y \rangle_p \text{ 对任意的 } p \in S_1, x, y \in T_p S_1 \text{ 成立.}$$

证明留作练习. 最广为人知的保角映射是球极投影函数 $f: S^2 - \{0, 0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}^2$. 由定义, $f(p)$ 给出平面 $z = -1$ 与含有点 $(0, 0, 1)$ 和 p 的直线的交点.

Proposition 3.73. 球极投影函数 f 是保角的.

证明略. 两个式子提一下:

$$(3.19) \quad R = \frac{2r}{1-z} = \frac{2r}{1 \pm \sqrt{1-r^2}} \xrightarrow{\text{解 } r} r = \frac{4R}{R^2 + 4}$$

$$(3.20) \quad \lambda = \frac{|d(f^{-1})_q(\frac{\partial}{\partial \theta})|}{|\frac{\partial}{\partial \theta}|} = \frac{|d(f^{-1})_q(\frac{\partial}{\partial R})|}{|\frac{\partial}{\partial R}|} = \frac{4}{4 + R^2}.$$

尽管完整的把球面画上平面需要一个无穷大的平面, 但是我们可以通过用两张不同投影起始点的地图来解决这个问题. 事实上一个不比大圆大多少的正方形 (边长为两倍大圆直径) 就能够把整个北半球的平面投影上去——我们还能够对此做放缩. 我们推荐 Youtube 视频《Stereographic projection of the Riemann sphere》来更直观地感受球极投影的性质.

球极投影在数学上很重要但是在地图绘制上没那么重要. 地图绘制工作者更关心另一个保角映射——麦卡托投影法 (Mercator projection). 这种投影方法极大地影响了我们对地球表面样貌的直观印象.

Example 3.74 (麦卡托投影法 (Mercator Projection)). 这个方法的本意是为了对球面坐标图做调整使得它是保角的. 回忆, 例3.24中球面坐标图 $\sigma: \underbrace{(0, 2\pi) \times (0, \pi)}_U \rightarrow S^2$, 定义为

$$\sigma(\theta, \phi) = (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi).$$

我们在例子中计算出

$$\sigma_\theta = (-\sin \phi \sin \theta, \sin \phi \cos \theta, 0), \sigma_\phi = (\cos \phi \cos \theta, \cos \phi \sin \theta, -\sin \phi).$$

向量 σ_θ 和 σ_ϕ 是正交的, 但是 σ 不是保角的, 因为

$$\sin \phi = |\sigma_\theta| \neq |\sigma_\phi| = 1.$$

我们能够通过用恰当的扭曲区域中的垂直轴的函数来重构 σ 来解决这个问题.⁸也就是说我们能够定义函数

$$\Psi = \underbrace{(0, 2\pi) \times (a, b)}_{\tilde{U}} \rightarrow \underbrace{(0, 2\pi) \times (0, \pi)}_U$$

使得 $\Psi(\theta, y) = (\theta, \phi(y))$ 对某些待定的数 $a, b \in \mathbb{R}$ 以及函数 $\phi : (a, b) \rightarrow (0, \pi)$ 成立. 在这里我们把 \tilde{U} 视为 θy -平面, 把 U 视为 $\theta \phi$ -平面.

函数复合 $\tilde{\sigma} = \sigma \circ \Psi : \tilde{U} \rightarrow S^2$ 为我们调整过的球面坐标图. 注意到对每个 $q = (\theta, y) \in \tilde{U}$, 我们有

$$|\tilde{\sigma}_\theta| = \sin(\phi(y)), |\tilde{\sigma}_y| = |\phi'(y)|.$$

因为 $T_q \tilde{U} = \mathbb{R}^2$ 的规范正交基 $\{e_1, e_2\}$ 在映射 $d\tilde{\sigma}_q$ 映射到 $T_{\tilde{\sigma}(q)} S^2$ 的正交基 $\{\tilde{\sigma}_q, \tilde{\sigma}_y\}$, 为证明 $\tilde{\sigma}$ 是保角的, 我们只需要证明 $|\tilde{\sigma}_\theta| = |\tilde{\sigma}_y|$. 为此, 我们得选择函数 $\phi(y)$ 来解微分方程 $\phi'(y) = \sin(\phi(y))$.

令 $a = -\infty, b = \infty$, 验证 $\phi(y) = 2 \cot^{-1}(e^{-y})$ 是具有自然初值条件 $\phi(0) = \pi/2$. 为获得地球的有界的地图我们一般选择 $a = -L, b = L$, 由此极点附近的区域可能画不上.

总之, 球面的坐标图保纵向长度但是压缩横向长度. 麦卡托投影法对这种方法做了调整, 从而在纵向它会压缩长度, 使得压缩程度和横向一致. 因为麦卡托生活的时期微积分尚未发明, 他也许仅仅是通过没那么准确地机械上的调整了经线之间的距离直到角度看起来差不多; 更准确地讲, 调整到在他的地图上在和纬线形成某一角度 α 的线确确实实与球面上的一个“指向线 (rhumb line)”之间的角度为 α . 这个“指向线性质”用在导航的用途上是足够理想的, 但是我们会在练习中进一步探索它的性质.

和其他的保角映射一样, 麦卡托的映射能精确地表示角. 等价的, 它能够精确地保持小的图形不变—真的圆形的小岛在他的映射下也会是一个圆形小岛, 在这个岛足够小以至于命题3.72中的函数的 λ 值在它附近近似于是常数. 但是, 麦卡托投影法会改变面积, 这个改变会在越接近极点的地方越明显. 地图上的南极洲比南极洲实际面积大很多.

是否可能保留世界的全貌—绘制一张既保面积又保角的地图? 由下面的命题, 这仅仅在等距同构的球面的曲面切片下能做到:

Proposition 3.75. 微分同胚 $f : S_1 \rightarrow S_2$ 是等距同构当且仅当它既保面积又保角.

证明见练习.

⁸原文: “We can fix this problem by precomposing σ with a function that appropriately warps the vertical axis of the domain.”

我们下面会证明在平面上的开集和球面之间不存在等距同构. 直观上, 如果一个平直的橡胶垫 (flat rubber sheet) 是从球面上的任意部分拽下来的, 那么距离一定会被改变——一定会有在橡胶垫上的正则曲线的长度在被拽下来展平的过程中被改变. 因此, 地球的平面地图是不可能既保面积又保角的. 至于哪种地图最好, 这取决于用途. 麦卡托投影法绘制的地图在历史上由于保角性更适合用于航海导航, 保面积的地图更适合用于统计方面的工作.

我们在本节最后总结此前的内容所研究的映射的统一的方法. 微分同胚 $f: S_1 \rightarrow S_2$ 是等距同构/保面积/保角的若对每个 $p \in S_1, df_p: T_p S_1 \rightarrow T_{f(p)} S_2$ 保持内积/面积/角度不变. 我们就能从保持这些量不变对线性变换来说意味着什么来理解这些映射, 证明留作练习:

Proposition 3.76. 设 $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2 \subset \mathbb{R}^3$ 为 \mathbb{R}^3 中的一对二维子空间. $g: \mathcal{V}_1 \rightarrow \mathcal{V}_2$ 为线性变换. 设 $\mathcal{B}_1 = \{x_1, y_1\}, \mathcal{B}_2 = \{x_2, y_2\}$ 分别表示 \mathcal{V}_1 和 \mathcal{V}_2 的规范正交基. 设 A 为关于这两个正交基表示 g 的矩阵.

(1) “保内积”的等价特征:

- (a) $\langle g(x), g(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ 对任意的 $x, y \in \mathcal{V}_1$ 成立.
- (b) $|g(x)| = |x|$ 对任意的 $x \in \mathcal{V}_1$ 成立.
- (c) A 是正交矩阵.
- (d) \mathcal{B}_2 能够被重新选择使得 A 是单位矩阵.

(2) “保面积”的等价特征:

- (a) $|g(x) \times g(y)| = |x \times y|$ 对任意的 $x, y \in \mathcal{V}_1$.
- (b) $\|g\| = 1$.
- (c) $\det(A) = \pm 1$.
- (d) \mathcal{B}_1 和 \mathcal{B}_2 能够被重新选择从而使得 $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}$.

(3) “保角度”的等价特征:

- (a) $\angle(g(x), g(y)) = \angle(x, y)$ 对任意的 $x, y \in \mathcal{V}_1$ 成立.
- (b) $\exists \lambda > 0$ 使得 $\langle g(x), g(y) \rangle = \lambda^2 \langle x, y \rangle$ 对任意的 $x, y \in \mathcal{V}_1$.
- (c) $\exists \lambda > 0$ 使得 $|g(x)| = \lambda |x|$ 对任意的 $x \in \mathcal{V}_1$ 成立.
- (d) A 是某个正交矩阵的标量倍数.
- (e) \mathcal{B}_1 能够被重新选择使得 $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ 对 $\lambda > 0$ 成立.
- (f) 存在一对非正交的非零向量 $x, y \in \mathcal{V}_1$ 使得 $g(x), g(y)$ 是正交的, 且 $\frac{|g(x)|}{|x|} = \frac{|g(y)|}{|y|}$.

3.9 局部坐标下第一基本形式

在这一节中我们将呈现一些用于表达第一基本形式的约定俗成的记号, 这些记号约定比较方便, 对我们下面的计算比较有利.

设 S 为正则曲面, 令 $\sigma: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \subset S$ 为曲面切片. 定义函数 $E, F, G: U \rightarrow \mathbb{R}$ 使得对任意的 $q \in U$,

$$E(q) = |\sigma_u(q)|_p^2, \quad F(q) = \langle \sigma_u(q), \sigma_v(q) \rangle_p, \quad G(q) = |\sigma_v(q)|_p^2,$$

其中 $p = \sigma(q)$. 我们会经常省略自变量和下标, 而仅仅写为

$$E = |\sigma_u|^2, \quad F = \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle, \quad G = |\sigma_v|^2.$$

这些函数记录了 V 中的点处的第一基本形式. 只需要这些函数, 我们就能够计算任何内蕴的度量 (任意仅和第一基本形式有关的度量), 包括长度, 角度和面积. 下面是如何计算:

Lemma 3.77.

(1) 若 $x = (a, b), y = (c, d) \in \mathbb{R}^2$, 则

$$\begin{aligned} \langle d\sigma_q(x), d\sigma_q(y) \rangle_p &= \langle a\sigma_u(q) + b\sigma_v(q), c\sigma_u(q) + d\sigma_v(q) \rangle_p \\ &= (ac)E(q) + (ad + bc)F(q) + (bd)G(q). \end{aligned}$$

(2) 若 $x = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, 则 $|d\sigma_q(x)|_p^2 = a^2E(q) + 2abf(q) + b^2G(q)$.

(3) 若 $\gamma: [0, l] \rightarrow U$ 是正则曲面, 分量函数为 $\gamma(t) = (u(t), v(t))$, 则

$$\text{弧长}(\sigma \circ \gamma) = \int_0^l \sqrt{u'(t)^2 E(\gamma(t)) + 2u'(t)v'(t)F(\gamma(t)) + v'(t)^2 G(\gamma(t))} dt$$

(4) 若 $R \subset V$ 是多边形区域, 那么

$$\text{面积}(R) = \iint_{\sigma^{-1}(R)} \sqrt{EG - F^2} dA.$$

角度 $\angle(d\sigma_q(x), d\sigma_q(y))$ 也能够利用 $\{E, F, G\}$ 把 (1) 和 (2) 和式(3.16)结合起来来表示.

Proof. 对 (1), 利用内积的双线性性和对称性.(2) 则是 (1) 在 $x = y$ 时的特殊情况.(3) 则可以把 (2) 中 x 替换为 $\gamma'(t) = (u'(t), v'(t))$ 来得到.(4) 可以通过引理1.43以及面积本身的定义得到, 因为

$$\|d\sigma\| = |\sigma_u \times \sigma_v| = \sqrt{|\sigma_u|^2 |\sigma_v|^2 - \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle^2} = \sqrt{EG - F^2}.$$

□

这个引理能够引出下面的定义:

Definition 3.78. 局部坐标 $\{u, v\}$ 的第一基本形式 (也称为 “ σ 的第一基本形式”) 的表达式为

$$\mathcal{F}_1 = Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2.$$

在初学时你可以把上面的记号看做是上面的引理的 (3) 部分的一种记忆方法:

$$\begin{aligned} \text{弧长}(\sigma \circ \gamma) &= \int_0^l \sqrt{\mathcal{F}_1} \\ &= \int_0^l \sqrt{Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2} \\ &= \int_0^l \sqrt{E \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2F \left(\frac{du}{dt} \right) \left(\frac{dv}{dt} \right) + G \left(\frac{dv}{dt} \right)^2} dt. \end{aligned}$$

“ dt ”并不是严格的记号说明——我们只是把它看做是记住引理中第 (3) 条的一种记忆上的小技巧。

但是事实上, 局部坐标下的第一基本形式不仅仅是个记忆上的小技巧. 表达式 “ du ” 应该被理解为 U 上的函数 $(u, v) \mapsto u$ 的微分. 类似的, “ dv ” 是 U 上的函数 $(u, v) \mapsto v$ 的微分. 所以若 $x = (a, b)$, 则 $du_q(x) = a, dv_q(x) = b$ 对任意的 $q \in U$ 成立. 在这样的理解下, $q \in U$ 处的局部坐标的第一基本形式不仅仅是个形式上的表达式——它也是把 $x \in T_q U = \mathbb{R}^2$ 映射到 $|d\sigma_q(x)|^2$ 的函数. 总之,

$$(\mathcal{F}_1)_q(x) = |d\sigma_q(x)|^2 \text{ 对任意的 } q \in U, x \in T_q U = \mathbb{R}^2 \text{ 成立.}$$

口头上, \mathcal{F}_1 把 $q \in U$ 映射到把 U 在 q 处的切向量 x 转化为数值 $|d\sigma_q(x)|^2$ 的函数. 这有时会被总结为 \mathcal{F}_1 是 S 上的第一基本形式对 U 的 σ 回调.⁹

事实上, 重点是通过曲面切片 σ 从 U 中重新获得关于 S 的信息. 想像在 U 上存在一些小小的居民, 他们知道它们所处的曲面是和曲面 S (的某一部分) 通过 σ 等价地联系起来的, 但是他们不知道 S 或是 σ 的表达式. 他们能了解到 S 的哪些信息? 啥都了解不到 (Absolutely nothing). 但是如果他们也知道在局部坐标下的第一基本形式的表达式呢? 这意味着他们知道 E, F, G 的表达式. 等价地, 这意味着他们有了能够计算任意的 $q \in U, x \in T_q U = \mathbb{R}^2$ 的情况下的 $|d\sigma_q(x)|^2$ 的值的公式. 现在他们对 S 了解的就不少了. 对他们的世界的每条正则曲线 γ , 他们都能够计算 $\sigma \circ \gamma$ 的长度. 对他们的世界中的每个区域, 他们都能够计算出 σ 下 S 中对应区域的面积. 我们之前的问题——为什么 S 中的度量仅仅取决于第一基本形式?——事实上是在问这些居民能够计算出哪些量. 内蕴的度量仅仅是在局部坐标下能够用 E, F, G 表达出的量.

⁹原文: “This is sometimes summarized by saying that \mathcal{F}_1 is the σ -pullback to U of the first fundamental form on S .”

Example 3.79.

球面坐标图 $\sigma : \underbrace{(0, 2\pi) \times (0, \pi)}_U \rightarrow S^2, \sigma(\theta, \phi) = (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi)$. 在例3.24中, 我们计算出

$$\sigma_\theta = (-\sin \phi \sin \theta, \sin \phi \cos \theta, 0), \sigma_\phi = (\cos \phi \cos \theta, \cos \phi \sin \theta, -\sin \phi).$$

由此, 我们就能计算

$$E = |\sigma_\theta|^2 = \sin^2 \phi, F = \langle \sigma_\theta, \sigma_\phi \rangle = 0, G = |\sigma_\phi|^2 = 1.$$

总之, S^2 在球面坐标下的第一基本形式为表达式

$$(3.21) \quad \underbrace{\sin^2 \phi}_{E} d\theta^2 + \underbrace{0}_{F} d\theta d\phi + \underbrace{1}_{G} d\phi^2,$$

或者更简洁的, $\sin^2 \phi d\theta^2 + d\phi^2$. 这个表达式同时将 E, F, G 联系起来, 同时还记录了这几个函数与哪些变量有关.

S^2 中具有形式 $\gamma(t) = \sigma(\theta(t), \phi(t)), t \in [0, l]$ 的正则曲线的弧长可以用这个表达式的平方根的积分来计算:

$$\text{弧长}(\gamma) = \int_0^l \sqrt{\sin^2(\phi(t))\theta'(t)^2 + \phi'(t)^2} dt.$$

区域 $R \subset S^2$ 的面积是

$$\text{面积}(R) = \iint_{\sigma^{-1}(R)} \sqrt{EG - F^2} dA = \iint_{\sigma^{-1}} \sin(\phi) dA,$$

就像我们之前在例3.59中发现的那样.

Example 3.80 (图像). 若 $U \subset \mathbb{R}^2$ 是开集, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ 是光滑函数, 则由引理3.17可得图像 $G = \{(x, y, f(x, y)) | (x, y) \in U\}$ 是正则曲面. 它可以由单个曲面切片 $\sigma : U \rightarrow G, \sigma(x, y) = (x, y, f(x, y))$ 覆盖. 在 $q = (x, y) \in U$ 处我们有

$$\sigma_x(q) = (1, 0, f_x(q)), \sigma_y(q) = (0, 1, f_y(q)).$$

所以 G 在这些坐标下的第一基本形式为

$$\underbrace{(1 + f_x^2)}_E dx^2 + \underbrace{f_x \cdot f_y}_F dx dy^{10} + \underbrace{1 + f_y^2}_G dy^2.$$

¹⁰ 我们认为这里少了系数 2, 在此申明.

3.10 另一种特征化描述正则曲面的方法 (选读)¹¹

此节内容略.

¹¹ An Alternative Characterization of Regular Surfaces

Chapter 4

曲面曲率

在某一点处将正则曲面放得足够大的话它看起来和平面差不多, 但是放回正常大小之后它还是会在空间 \mathbb{R}^3 中折叠扭曲旋转. 这是微分几何内容比欧氏几何丰富得多的原因.

这一章的目标是研究正则曲面的曲率. 我们很快就会定义正则曲面 S 上的 p 点处的高斯曲率 $K(p)$, 这是个能够反映 S 离开 $T_p S$ 的迅速程度的数.

这里是我们会如何做到这件事的简短说明. 首先, 回忆命题 1.35, \mathbb{R}^n 中单位速曲线 γ 的曲率为

$$\kappa = \langle -\mathbf{n}', \mathbf{t} \rangle,$$

其中 \mathbf{t} 和 \mathbf{n} 表示 γ 的单位切向量和单位法向量. 因为 \mathbf{n} 是和切线是正交的, 它蕴含了方向的信息, 所以这大体上就是说曲率就是曲线变换的速度.

为把这种概念推广到曲面上, 我们会把 \mathbf{n} 替换为曲面的单位法向量场, 用 N 表示. 也就是说, 给定由单位法向量场 N 定向的正则曲面 S , 一点 $p \in S$, 单位向量 $v \in T_p S$, 我们会选择一个 S 中的曲线 γ 使得 $\gamma(0) = p, \gamma'(0) = v$. 我们令 $N(t) = N(\gamma(t))$, 则量

$$II_p(v) = \langle -N'(0), v \rangle$$

被称为 S 在 p 点处 v 方向上的法曲率. 因为 N 是切平面的法向量, 所以它记载了切平面方向改变和扭曲的信息, 所以 $II_p(v)$ 粗略地描述了沿 v 的方向远离 p 点时切平面的扭转速度. 如果我沿着 γ 插旗杆, 那么 $II_p(v)$ 衡量了我所需要的将旗杆的前摆或后仰以使得旗杆尖端垂直指向曲面斜坡上方的速度. 这就是我们的部分说明.

你也许会问, 为啥不直接测量 $|N'(0)|$ 而是测量 $\langle -N'(0), v \rangle$? 因为 $-N'(0)$ 并不一定和 v 是平行的, 我们似乎在忽视它和 v 正交的分量. 换句话说, 我们不该同时关心插旗杆的时候左右摆动的速度吗? 别担心, 我们开始时会跟踪 $-N'(0)$ 的所有分量. 事实上, 我们开始时会学习魏恩加滕映射 (Weingarten map), 这是将 $v \in T_p S$ 映射到向量 $-N'(0)$ (而不仅仅是到它和 v 的内积). 但是我们会发现, 即便我们只关心法曲率 (normal curvature), 我们也没

有遗失任何信息. 我们将会看到, 只知道 $II_p(v)$, $v \in T_p S$ 的值就足以把整个魏恩加滕映射定义出来. 一点点线性代数的知识就够用很长时间.

你也许也会问, 由于 $II_p(v)$ 会受到 v 的影响, 我们要如何去描述曲面“在一点处”的曲率而非“在一点处某一方向下的曲率”? 某点处的各个方向的曲率中, 那个方向的曲率会被称为“高斯曲率”? 线性代数的知识会给出解答——我们会定义高斯曲率为魏恩加滕映射的行列式值, 这是和该点处的最大和最小的法曲率值的积是相等的.

上面的几段文字仅仅是给出了一个非常简短的我们会用来衡量曲率的方法的说明, 引进了法曲率, 魏恩加滕映射和高斯曲率等关键概念, 从而强调了曲线曲率和曲面曲率的联系. 我们现在开始我们的讲授. 下面几节会更详细地解释这些概念, 这次我们会按照严格全面的发展的顺序来介绍这些概念.

4.1 高斯映射

在这一节中, 我们开始时会通过定义魏恩加滕映射和高斯映射来应用上面大致描述的策略.

设 S 为定向曲面, 令 $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ 表示定向; 也就是说, N 是 S 上的单位法向量场. 它是个单位法向量场意味着它只会输出单位长度的向量; 也就是说, 它所输出的向量都可以看做是 $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ 的元素. 因此, N 是从 S 到 S^2 的函数. 我们以这种方式看待它 (为从正则曲面 S 到正则曲面 S^2 的光滑映射) 时, N 被称为是高斯映射. 换句话说, 高斯映射就只是曲面 S 上的单位法向量场 N , 只不过所有的向量的起始点都被移动到了原点 (而不是停留在曲面上) 而已, 所以你可以直观地理解为 S^2 上的点.

对于 $p \in S$, 考虑微分 $dN_p : T_p S \rightarrow T_{N(p)} S^2$. 这个线性变换的定义域和陪域事实上是相同的子空间:

$$T_p S = T_{N(p)} S^2,$$

因为 $N(p)$ 同时是这两个子空间的法向量. 我们因此可以看做是 $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$. 这样考虑下, 这个线性变换的负值就被称为 S 在 p 处的魏恩加滕映射. 它的行列式值被称为 S 在 p 处的高斯曲率. 它的迹的一半称为 S 在 p 处的平均曲率. 这两个度量都是良定的, 因为一个从线性空间到自身的线性变换的行列式值和迹是和表示它的矩阵所以来的基无关的. 总之:

Definition 4.1. 设 S 为定向曲面. S 的高斯映射 (Gauss map) 意为被视为从 S 到 S^2 的映射的单位法向量场 N . 对每个 $p \in S$, 线性变换

$$\mathcal{W}_p = -dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$$

被称为 S 在 p 处的魏恩加滕映射 (Weingarten map). 它的行列式值和迹的一半,

$$K(p) = \det(\mathcal{W}_p) \text{ 和 } H(p) = \frac{1}{2} \text{trace}(\mathcal{W}_p),$$

分别称为 S 在 p 处的高斯曲率 (Gaussian curvature) 和平均曲率 (mean curvature).

在 \mathcal{W}_p 定义中的负号开始时看起来像是不必要的, 但是它的内在逻辑我们会在后面解释. 我们现在描述魏恩加滕映射的几何意义 (这依赖于对3.7中建立的微分的直观理解). 设 γ 为 S 中的正则曲线, $\gamma(0) = p, \gamma'(0) = v$. 设 $N(t)$ 为 $N(\gamma(t))$ 为单位法向量场在 γ 上的限制. 想象每个 $N(t)$ 都是起始点在原点的向量, 则它们的终点就会在 S^2 上画出一条路径, 这条道路的初速度向量是

$$dN_p(v) = N'(0) = -\mathcal{W}_p(v).$$

我们能够把这个初速度向量看做是 S 在 p 点处的切向量 (而非 $N(t)$ 处 S^2 的切平面), 因为这两个切平面是相同的. 直观上, 如果我在 γ 边插旗杆, 则 $-\mathcal{W}_p(v)$ 能粗略地描述我扭动旗杆的速度和方向以使得旗杆始终指向曲面正上方.

高斯曲率的几何解释会成为本书剩余部分的一个主要的话题, 但是平均曲率的几何解释仅仅会在这一章的第六节涉及. 但是就目前而言, 由于魏恩加滕映射具有一个如此自然的几何意义, 且行列式值和迹几乎就是仅有的良定义的 (不受基的选择的影响的) 能够描述二维线性空间之间的线性变换的度量, 我们有足够的动力去定义高斯曲率和平均曲率, 然后再为这两个量找到一个直观的几何解释.

有时, v 会几乎与 $-\mathcal{W}_p(v)$ 平行. 换句话说, v 与 \mathcal{W}_p 的特征向量很接近. 这一般只会对某些特殊的 $v \in T_p S$ 生效.

注意, 如果 S 的定向反向, 那么对于每个 $v \in T_p S, \mathcal{W}_p$ 的值都会变为原来的值的负值. 那么高斯曲率和平均曲率会怎样? (关于某个固定的基的) 表示 \mathcal{W}_p 的四个元素都会变号, 因为 2 是偶数, 所以能直接推出这样的变化对矩阵的行列式值没有影响, 但是会使矩阵的迹变号.

因此, 高斯曲率 (但不是平均曲率) 不受 S 的定向的影响, 因此对非定向曲面 (甚至是不可定向曲面) 都是良定的. 若 S 是任意曲面, $p \in S$, 那么每个能够覆盖 p 的坐标图都会导出 p 在 S 中的邻域的一个定向. 尽管线性变换 \mathcal{W}_p 和 $H(p)$ 的符号会受到坐标图导出的定向的选择的影响, $K(p)$ 不会, 因此它是良定义的.

Example 4.2 (平面). 设 S 表示 \mathbb{R}^3 的二维子空间. 根据例3.45, S 可能被常值单位法向量场定向. 因为 N 是常值, 所以它的微分在其中任一道路上的限制是 0. 因此, $\mathcal{W}_p = \mathbf{0}$ 对任意的 $p \in S, v \in T_p S$ 成立. 因此, S 的各点处的高斯曲率和平均曲率都等同于 0.

Example 4.3 (球面). 半径为 r 的球面,

$$S^2(r) = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid |p| = r\},$$

具有向外指向的单位法向量场, 可以描述为

$$N(p) = \frac{p}{|p|} = \frac{p}{r}, \forall p \in S^2(r).$$

若 γ 是 $S^2(r)$ 中的正则曲线且 $\gamma(0) = p, \gamma'(0) = v$, 则

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} N(\gamma(t)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \frac{\gamma(t)}{r} = \frac{v}{r},$$

所以 $\mathcal{W}_p(v) = -\frac{v}{r}$. 因此, \mathcal{W}_p 的 (关于 $T_p S$ 的任意的基的) 矩阵是 $-\frac{1}{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. 因为 p 是任意的, 所以 $S^2(r)$ 拥有常值高斯曲率, 等于这个矩阵的行列式值, 也就是 $K = \frac{1}{r^2}$. 更进一步, $S^2(r)$ 拥有常值平均曲率, 值为这个矩阵的迹的一半, 也就是 $H = -\frac{1}{r}$. 关于另一个定向下 (也就是指向内部), $S^2(r)$ 具有常值平均曲率 $H = \frac{1}{r}$.

Example 4.4 (图像的临界点). 设 $U \subset \mathbb{R}^2$ 是开集, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ 是光滑函数. f 的图像 G 是可以由单个的曲面切片 $\sigma: U \rightarrow G, \sigma(x, y) = (x, y, f(x, y))$ 覆盖的正则曲面. 在例3.48中, 我们计算出

$$\sigma_x = (1, 0, f_x), \quad \sigma_y = (0, 1, f_y), \quad N = \frac{\sigma_x \times \sigma_y}{|\sigma_x \times \sigma_y|} = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}}.$$

设 $q = (x_0, y_0) \in U$. 我们希望在附加上 q 为 f 的临界点的条件的前提下计算 $p = \sigma(q) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ 处的魏恩加滕映射; 也就是说, 加上假设 $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$, 则 $N(p) = (0, 0, 1), T_p G = \text{span}\{e_1, e_2\}$, 其中 $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0)$.

定义 $\gamma_1(t) = (x_0 + t, y_0, f(x_0 + t, y_0))$, 这是个 G 中的正则曲线, 满足 $\gamma_1(0) = p, \gamma_1'(0) = e_1$. N 在 γ_1 上的限制为

$$N_1(t) = N(\gamma_1(t)) = \frac{(-f_x(x_0 + t, y_0), -f_y(x_0 + t, y_0), 1)}{\sqrt{f_x^2(x_0 + t, y_0) + f_y^2(x_0 + t, y_0) + 1}}.$$

在 $t = 0$ 的时刻, 注意到这个 $N_1(t)$ 的表达式的分母的值 1, 微分为 0 (这是因为那个我们关于临界值的假设). 因此,

$$\begin{aligned} N_1'(0) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (-f_x(x_0 + t, y_0), -f_y(x_0 + t, y_0), 1) \\ &= (-f_{xx}(x_0, y_0), -f_{yx}(x_0, y_0), 0). \end{aligned}$$

因此,

$$\mathcal{W}_p(e_1) = -dN_p(e_1) = -N_1'(0) = (f_{xx}(x_0, y_0), f_{yx}(x_0, y_0), 0).$$

下面, 我们类似地定义 $\gamma_2(t) = (x_0, y_0 + t, f(x_0, y_0 + t))$, 这也是个 G 上的正则曲线, 满足 $\gamma_2(0) = p, \gamma_2'(0) = e_2$. 令 $N_2(t) = N(\gamma_2(t))$. 类似的计算能够给出

$$\mathcal{W}_p(e_2) = -dN_p(e_2) = -N_2'(0) = (f_{xy}(x_0, y_0), f_{yy}(x_0, y_0), 0).$$

总之,

$$\mathcal{W}_p(e_1) = f_{xx}(x_0, y_0)e_1 + f_{yx}(x_0, y_0)e_2,$$

$$\mathcal{W}_p(e_2) = f_{xy}(x_0, y_0)e_1 + f_{yy}(x_0, y_0)e_2.$$

这说明 \mathcal{W}_p 关于基 $\{e_1, e_2\}$ 的矩阵是

$$\mathcal{W}_p = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

高斯曲率是行列式值

$$K(p) = \det(\mathcal{W}_p) = f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}(x_0, y_0)^2.$$

回忆多元微积分中的二阶导数判据: 若 $K(p) > 0$, 则临界点是个局部极值点; 若 $K(p) < 0$, 则临界点是个鞍点.

上面的例子中的结论是: 一个 (具有有图像的坐标图自然生成的定向的) 函数图像的 (被看做关于自然的基的矩阵的) 在临界点处的魏恩加滕映射仅仅是函数的二阶导数构成的矩阵.

(这里摆了一张图, 四个子图分别是 $f = 1 - x^2 - 2y^2, f = x^2 - y^2, f = 1 - x^2, f = 2xy$ 的情形)

我们能从这些例子中意识到什么? 对于其中三个例子 (除了 $f = 2xy$), \mathcal{W}_p 是对角矩阵; 换句话说, e_1 和 e_2 是 \mathcal{W}_p 的特征向量. 但是当 $f = 2xy$ 时, 情形不同了. 这里 \mathcal{W}_p 仅仅在对角线之外的位置上具有非零元素. 这个函数不坏, 只是我们对基的选择没那么好. 验证一下, 关于旋转 45° 的基

$$(4.1) \quad \{R_{45}(e_1), R_{45}(e_2)\} = \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\},$$

则魏恩加滕映射就会由矩阵 $\mathcal{W}_p = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ 表示. 这是和 $f = x^2 - y^2$ 时相同的矩阵. 这可以用 $f = 2xy$ 的图像可以通过把 $f = x^2 - y^2$ 的图像关于 z 轴旋转 45° 得到来解释.

这些例子或许会引导你猜测魏恩加滕映射的矩阵是 (1) 对称的, 如果是关于规范正交基, (2) 对角矩阵, 如果是关于某一恰当地选定的规范正交基. 我们现在验证 (1), 这是在下一节证明 (2) 的一个前置步骤.

Lemma 4.5. 若 S 是个可定向正则曲面, $p \in S$, 则关于任意的规范正交基下表示魏恩加滕映射 \mathcal{W}_p 的矩阵是个对称矩阵.

我们会给出在下一节的末尾给出这个引理的初等证明, 但是现在我们会使用反函数定理证明这一点. 事实上, 下面的证明显露出例4.4的重要性: 每个正则表面上的点都是类似于图像上的临界点的, 在使用了保距变换之后.

Proof. 设 $\{v_1, v_2\}$ 为 $T_p S$ 的任意一对规范正交基. 令 $A \in O(3)$ 为正交矩阵, 其列向量为 $\{v_1, v_2, N(p)\}$, 设 $g = L_A$ 为相对应的 \mathbb{R}^3 中的线性变换. 定义 $\tilde{S} = g^{-1}(S)$, $\tilde{p} = (\tilde{x}_0, \tilde{y}_0, \tilde{z}_0) = g^{-1}(p)$. 注意, \tilde{S} 是正则曲面, 使得 $T_{\tilde{p}} \tilde{S} = \text{span}\{e_1, e_2\}$.

由练习中的结论 (需要用到反函数定理), 我们知道 \tilde{p} 在 \tilde{S} 中的邻域等价于光滑函数 $f(x, y)$ 的图像. 例4.4现在就能够说明 \tilde{S} 在 \tilde{p} 处的关于基 $\{e_1, e_2\}$ 的魏恩加滕映射是 $\begin{pmatrix} f_{xx}(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) & f_{xy}(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) \\ f_{yx}(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) & f_{yy}(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) \end{pmatrix}$, 这是对称矩阵, 因为 $f_{xy} = f_{yx}$.

可以直接验证 S 在 p 处的魏恩加滕映射关于基 $\{v_1 = g_1(e_1), v_2 = g(e_2)\}$ 的表示恰恰也是这个矩阵 (若 $\det(A) = -1$ 则需要再每一项乘上 -1). \square

为选择一个基, 要求关于这个基 \mathcal{W}_p 是对角的 (而不仅仅是对称的) 矩阵, 我们需要理解自伴线性变换, 这将在下一节进行介绍.

4.2 自伴线性算子 (线性代数背景)

除了几何视角之外, 微分几何有时候也需要一些线性代数来进一步探索. 在这一节中, 我们会抽象地学习在引理4.5所揭示的魏恩加滕映射那样具有对称性的线性变换.

Definition and Proposition 4.6. 设 $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$ 为一个二维子空间. 线性变换 $W : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ 被称为**自伴随 (self-adjoint)** 的若它满足下列等价性质:

- (1) 存在 \mathcal{V} 的规范正交基使得关于这组正交基 W 可以表示为对称矩阵.
- (2) 关于 \mathcal{V} 的任意的规范正交基, W 都可以用对称矩阵表示.
- (3) 对任意的 $x, y \in \mathcal{V}, \langle W(x), y \rangle = \langle x, W(y) \rangle$.

等价性证明. 假设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ 关于基 $\{v_1, v_2\}$ 表示 W . 就像我们在第3.4节所复习的那样, 这意味着

$$W(v_1) = a_{11}v_1 + a_{21}v_2, \quad W(v_2) = a_{12}v_1 + a_{22}v_2.$$

若这个基是规范正交的, 那么就像我们在第1.2节所讨论的那样, 这些系数能够被表示为 $a_{ij} = \langle v_i, W(v_j) \rangle$, 所以

$$(4.2) \quad A = \begin{pmatrix} \langle v_1, W(v_1) \rangle & \langle v_1, W(v_2) \rangle \\ \langle v_2, W(v_1) \rangle & \langle v_2, W(v_2) \rangle \end{pmatrix}$$

$(3) \implies (2)$: 关于任意的 \mathcal{V} 的规范正交基 $\{v_1, v_2\}$, W 是由式(4.2)中的矩阵表示的, 由性质 (3), 它是对称的.

$(2) \implies (1)$: 显而易见.

$(1) \implies (3)$: 令 $\{v_1, v_2\}$ 为 \mathcal{V} 的规范正交基, W 关于这一组基的矩阵是对称矩阵. 这个矩阵是由式(4.2)给出的, 所以 $\langle v_1, W(v_2) \rangle = \langle v_2, W(v_1) \rangle$. \mathcal{V} 中任意的一对线性无关的向量都能被表达为 $x = av_1 + bv_2, y = cv_1 + dv_2$, 其中 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. 由线性性,

$$\begin{aligned} \langle W(x), y \rangle &= \langle W(av_1 + bv_2), cv_1 + dv_2 \rangle \\ &= ac \langle W(v_1), v_1 \rangle + bc \langle W(v_2), v_1 \rangle + ad \langle W(v_1), v_2 \rangle + bd \langle W(v_2), v_2 \rangle \\ &= ac \langle v_1, W(v_1) \rangle + bc \langle v_2, W(v_1) \rangle + ad \langle v_1, W(v_2) \rangle + bd \langle v_2, W(v_2) \rangle \\ &= \langle av_1 + bv_2, W(cv_1 + dv_2) \rangle = \langle x, W(y) \rangle. \end{aligned}$$

□

不仅是对称的, 我们甚至能使得这个矩阵成为对角矩阵:

Proposition 4.7. 若 $W : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ 是个自伴随的线性变换, 则存在 \mathcal{V} 的规范正交基 $\{v_1, v_2\}$ 使得关于它的表示 W 的矩阵是个对角矩阵 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. 换句话说, v_1 和 v_2 是 W 的特征向量, 相应的特征值为 λ_1 和 λ_2 .

Proof. 考虑函数 $Q : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}, Q(v) = \langle v, W(v) \rangle$. 令 $S^1 \subset \mathcal{V}$ 表示 \mathcal{V} 中的单位长向量. 因为 S^1 是紧的, 所以限制在 S^1 上的连续函数 Q 就能够在 $v_1 \in S^1$ 处取到一个最小值 $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ (附录中的引理 A.25). 令 $v_2 \in S^1$ 是和 v_1 正交的, 定义 $\lambda_2 = Q(v_2)$. 由式(4.2), W 关于基 $\{v_1, v_2\}$ 被表示为矩阵 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & b \\ b & \lambda_2 \end{pmatrix}$, 其中 $b = \langle W(v_1), v_2 \rangle = \langle v_1, W(v_2) \rangle$.

任意的 $v \in S^1$ 都有 $v = (\cos \theta)v_1 + (\sin \theta)v_2$ 的形式, 这对于某个角度 θ 成立. 更进一步,

$$Q(v) = \lambda_1 \cos^2 \theta + 2b \cos \theta \sin \theta + \lambda_2 \sin^2 \theta.$$

这个关于 θ 的函数有一个全局最小值 (因此也有一个临界点) 位于 $\theta = 0$ 处 (对应 $v = v_1$). 因此,

$$0 = \left. \frac{d}{d\theta} \right|_{\theta=0} (\lambda_1 \cos^2 \theta + 2b \cos \theta \sin \theta + \lambda_2 \sin^2 \theta) = 2b.$$

因此, $b = 0$, 所以矩阵是对角矩阵. □

一些来自于上面的证明的概念值得总结和命名.

Definition and Proposition 4.8. 一个自伴随线性变换 $W : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ 对应的二次型 (quadratic form) 指的是函数 $Q : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$, 它的定义为

$$Q(v) = \langle v, W(v) \rangle, \forall v \in \mathcal{V}.$$

若 $\{v_1, v_2\}$ 是由 W 的特征向量构成的规范正交基, 对应的特征值为 $\lambda_1 \leq \lambda_2$ (其存在性由命题4.7保证), 则 Q 在 \mathcal{V} 中任意的单位向量的作用就是

$$Q((\cos \theta)v_1 + (\sin \theta)v_2) = \lambda_1 \cos^2 \theta + \lambda_2 \sin^2 \theta.$$

特别地, λ_1 和 λ_2 分别为 Q 在 \mathcal{V} 中的所有单位长的向量下所能取到的最大值和最小值.

最后一个值得一提的一般性的事实是 Q 的信息能够完全决定 W , 利用与式(3.7)类似的技巧就能得到: 也就是说, 解关于 $\langle x, W(y) \rangle$ 的方程

$$Q(x - y) = \langle x - y, W(x - y) \rangle = \underbrace{\langle x, W(x) \rangle}_{Q(x)} + \underbrace{\langle y, W(y) \rangle}_{Q(y)} - 2\langle x, W(y) \rangle,$$

我们得到

$$(4.3) \quad \langle x, W(y) \rangle = \frac{1}{2}(Q(x) + Q(y) - Q(x - y)).$$

因此, W 和 Q 包含完全相同的信息, 只是用不同的方式包装了起来: W 是从 \mathcal{V} 到 \mathcal{V} 的线性变换, Q 是个从 \mathcal{V} 到 \mathbb{R} 的二次函数. 任意一个的表达式中都可以推出另外一个.

我们在这一节最后提供一个引理4.5的一个初等的证明, 不需要用反函数定理:

引理4.5的另一种证明. 设 $\sigma : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ 为曲面切片. 对每个 $q \in U$, $N \circ \sigma(q)$ 是与 $\sigma_u(q)$ 正交的; 换句话说, 函数 $q \mapsto \langle (N \circ \sigma)(q), \sigma_u(q) \rangle$ 等于 U 的零值函数. 尤其是, 这个函数关于 v 的偏导数等于 0:

$$0 = \frac{\partial}{\partial v} \langle N \circ \sigma, \sigma_u \rangle = \langle (N \circ \sigma)_v, \sigma_u \rangle + \langle N \circ \sigma, \sigma_{uv} \rangle.$$

因此,

$$\langle (N \circ \sigma)_v, \sigma_u \rangle = -\langle N \circ \sigma, \sigma_{uv} \rangle$$

$$\langle (N \circ \sigma)_u, \sigma_v \rangle = -\langle N \circ \sigma, \sigma_{vu} \rangle$$

(第二个等式只需要改变上面几个计算步骤中 u 和 v 的地位就能得到.) 上面两个式子的右侧是相等的, 因为 $\sigma_{uv} = \sigma_{vu}$. 因此, 左侧也一定是相等的:

$$\langle (N \circ \sigma)_v, \sigma_u \rangle = \langle (N \circ \sigma)_u, \sigma_v \rangle.$$

另一方面, 可以直接看到, 对任意的 $q \in U$,

$$(4.4) \quad (N \circ \sigma)_u(q) = -\mathcal{W}_p(\sigma_u(q)), \quad (N \circ \sigma)_v(q) = -\mathcal{W}_p(\sigma_v(q)),$$

其中 $p = \sigma(q)$, 仅仅是因为魏恩加滕映射是高斯映射的微分的负值. 因此,

$$\langle \mathcal{W}_p(\sigma_u(q)), \sigma_v(q) \rangle = \langle \mathcal{W}_p(\sigma_v(q)), \sigma_u(q) \rangle.$$

总之, $\langle \mathcal{W}_p(x), y \rangle = \langle x, \mathcal{W}_p(y) \rangle$ 对任意的一对 x, y 成立, 基向量从 $T_p S$ 中的向量 $\sigma_u(q), \sigma_v(q)$ 中选择. 尽管这些基不一定是规范正交的, 但是由 \mathcal{W}_p 的线性性 (就像在命题4.6的证明的末尾那样), 对于其他 $T_p S$ 中任意的一对向量 x, y 这个式子都是成立的. 因此, \mathcal{W}_p 是自伴随的. \square

我们现在希望引进并借此应用一个共识, 这个共识能够帮助降低计算符号的冗余程度, 就像在上面的证明中的那样. 当 $\sigma : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \subset S$ 为一个曲面切片时, 用一个相同的名字表示 V 上的一个函数以及它和 σ 的复合是很常见的. 例如, 在不会引起歧义的情况下, 函数 $K \circ \sigma : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 仅仅会简单地被记为 K . 更重要的是, 函数 $N \circ \sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ 在不会引起歧义的情况下全部都会被记为 N . 例如, 表达式 N_u 和 N_v 将会含糊地表示 $(N \circ \sigma)_u$ 和 $N \circ \sigma_v$; 这仅仅是可能的含义, 假设 $\{u, v\}$ 是 U 中的坐标变量名的情况下.

在这些记号观念的改进之后, 证明中的关键步骤可以总结为

$$(4.5) \quad \boxed{\langle \underbrace{N_u}_{-\mathcal{W}(\sigma_u)}, \sigma_v \rangle = -\langle N, \sigma_{vu} \rangle = \langle N, \sigma_{uv} \rangle = \langle \underbrace{N_v}_{-\mathcal{W}(\sigma_v)}, \sigma_u \rangle.}$$

相同的方法也能验证

$$(4.6) \quad \boxed{\langle \underbrace{N_u}_{-\mathcal{W}(\sigma_u)}, \sigma_u \rangle = -\langle N, \sigma_{uu} \rangle} \quad \boxed{\langle \underbrace{N_v}_{-\mathcal{W}(\sigma_v)}, \sigma_v \rangle = -\langle N, \sigma_{vv} \rangle}$$

加了下括号的等式是来自于式(4.4), 为简便起见省略了自变量. 例如, 表达式“ $-\mathcal{W}(\sigma_u)$ ”应被理解为 U 上的函数, 其在 $q \in U$ 处的值是 $-\mathcal{W}_{\sigma(q)}(\sigma_u(q))$.

4.3 法曲率

在这一节中, 我们会定义和研究第二基本形式和法曲率. 我们开始时会对魏恩加滕映射应用一些来自上一节的很广泛的线性代数的事实.

Definition 4.9. 设 S 为定向正则曲面, $p \in S$. 令 $\{v_1, v_2\}$ 为 $T_p S$ 的一对规范正交基, 关于这对规范正交基, 魏恩加滕映射能够用对角矩阵 $\mathcal{W}_p = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$ (存在性由命题4.7保证).

- (1) 特征向量 $\pm v_1$ 和 $\pm v_2$ 被称为 S 在 p 处的**主方向** (*principal direction*).
- (2) 特征值 k_1 和 k_2 被称为 S 在 p 处的**主曲率** (*principal curvature*). 若 $k_1 = k_2$, 则 p 被称为**脐点** (*umbilical point*).
- (3) \mathcal{W}_p 对应的二次型被称为 S 在 p 处的**第二基本形式** (*second fundamental form*), 记为 II_p . 换句话说, 对任意的 $v \in T_p S$,

$$II_p(v) = \langle \mathcal{W}_p(v), v \rangle = \langle -dN_p(v), v \rangle.$$

- (4) 若 $v \in T_p S$ 且 $|v| = 1$, 那么值 $II_p(v)$ 称为 S 在 p 处的 v 方向下的**法曲率** (*normal curvature*).

若 $k_1 \neq k_2$, 则 v_1 和 v_2 是独立决定的, 除了任意一个都可能乘 -1 , 这是在上面的 (1) 里面“ \pm ”出现的原因. 若 p 是脐点 ($k_1 = k_2$), 那么 $T_p S$ 的每一对正交基都是 \mathcal{W}_p 的特征向量的基, 那么在这样的情况下, 每个 $T_p S$ 中的单位向量都可以看做是一个主方向.

根据例4.2和例4.3, 平面和球面上的每一点都是脐点. 我们知道主方向曲率就是给定的矩阵的特征值.

根据命题4.8中的结论, II_p 作用在 $T_p S$ 中的任意单位长向量上时,

$$(4.7) \quad II_p((\cos \theta)v_1 + (\sin \theta)v_2) = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta.$$

特别地, 主曲率 k_1 和 k_2 是法曲率的最大和最小值.

高斯曲率 $K(p)$ 等于 \mathcal{W}_p 的行列式值, 也就是主曲率的乘积. 平均曲率 $H(p)$ 等于 \mathcal{W}_p 的迹的一半, 也就是主曲率的均值 (名字“平均曲率”的来源):

$$K(p) = k_1 k_2, \quad H(p) = (1/2)(k_1 + k_2).$$

Example 4.10 (柱面的曲率). 记半径为 r 的柱面为

$$C(r) = \{(r \cos \theta, r \sin \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \theta \in [0, 2\pi), z \in \mathbb{R}\}.$$

向外指向的单位法向量场为

$$N(p) = (\cos \theta, \sin \theta, 0), \text{ 其中 } p = (r \cos \theta, r \sin \theta, z) \in C(r).$$

设 $p_0 = (r \cos \theta_0, r \sin \theta_0, z_0) \in C_r$. 合理猜测 p_0 处曲率的极值出现在“横向” $v_1 = (-\sin \theta_0, \cos \theta_0, 0)$ 和“纵向” $v_2 = (0, 0, 1)$ 上, 所以我们会通过这对基来描述魏恩加滕映射.

$C(r)$ 中的曲线 $\gamma_1(t) = (r \cos(\theta_0 + t/r), r \sin(\theta_0 + t/r), z_0)$ 满足 $\gamma_1(0) = p_0, \gamma_1'(0) = v_1$. N 在 γ_1 上的限制为

$$N_1(t) = N(\gamma_1(t)) = (\cos(\theta_0 + t/r), \sin(\theta_0 + t/r), 0),$$

故

$$\mathcal{W}_{p_0}(v_1) = -N_1'(0) = -\frac{1}{r}v_1.$$

$C(r)$ 中曲线 $\gamma_2(t) = (r \cos \theta_0, r \sin \theta_0, z_0 + t)$ 满足 $\gamma_2(0) = p_0, \gamma_2'(0) = v_2$. N 在 γ_2 上的限制是 $N_2(t) = N(\gamma_2(t)) = (\cos \theta_0, \sin \theta_0, 0)$. 由于这是个常量, 所以

$$\mathcal{W}_{p_0}(v_2) = -N_2'(0) = (0, 0, 0) = \mathbf{0} \cdot v_2.$$

总之, $v_1 = (-\sin \theta_0, \cos \theta_0, 0), v_2 = (0, 0, 1)$ 为主方向, 主曲率为 $k_1 = -\frac{1}{r}, k_2 = \mathbf{0}$. 柱面因此具有常值高斯曲率 $K = k_1 k_2 = 0$ 和常值平均曲率 $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = -\frac{1}{2r}$.

回忆, 例3.63中柱面的自然曲面切片是等距同构. 这个等距同构保高斯曲率 (平面上和柱面上都是 0), 但是不保主曲率 (仅仅柱面上有非零的主曲率). 我们会在第 5 章学到, 等距同构是保高斯曲率的.

当 $|v| = 1$ 时, 回忆, 数值 $II_p(v)$ 被称为“ S 中 p 处 v 方向上的法曲率”. 它等于 $-N'(0)$ 在 v 方向上的分量, 其中 $N(t)$ 为 N 在 S 中曲线 γ 上的限制, 且 γ 满足 $\gamma(0) = p, \gamma'(0) = v$. 直观地说, 这可以衡量我沿着 γ 前行时要使旗杆的顶端垂直于曲面所需要将旗杆前后摆动的速度. 由于我们在对法向量场 N 做微分, 术语“法曲率”也许会从某种意义上在语义上是很合适的, 但是这仅仅是个巧合. 历史上, “法曲率”的名称来源于它的值的另外一个重要的特征:

Proposition 4.11 (法曲率的另外一个特征). 设 S 为定向正则曲面, $p \in S, v \in T_p S$, 其中 $|v| = 1$. 考虑 S 中具有性质 $\gamma(0) = p$ 和 $\gamma'(0) = v$ 的曲线 γ 组成的正则曲线族.

(1) 对这个曲线族中的每个曲线 γ ,

$$\langle \gamma''(0), N(p) \rangle = II_p(v).$$

也就是说, 法曲率等于 γ 的初始加速度向量的法向分量.

(2) 在这个曲线族中的曲线在 p 处的最小曲率 (看做空间曲线) 等于 $|II_p(v)|$.

一个重要的 (或许令人惊讶的)(1) 的结论就是 $\langle \gamma''(0), N(p) \rangle$ 仅仅取决于 $v = \gamma'(0)$, 不受 $\gamma''(0)$ 影响. 加速度向量的法向分量不会受到这个曲线族中 γ 的选择的影响.

第 (2) 部分说的是法曲率是例3.64中所定义的“最小曲率”的度量的带符号版本.

Proof. 对 (1), 因为对任意的 $t, \gamma'(t)$ 是和 $N(\gamma(t))$ 正交的, 我们有

$$0 = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \langle \gamma'(t), N(\gamma(t)) \rangle = \langle \gamma''(0), N(p) \rangle + \langle v, -\mathcal{W}_p(v) \rangle.$$

因此, $\langle \gamma''(0), N(p) \rangle = \langle v, \mathcal{W}_p(v) \rangle = II_p(v)$.

对 (2), 这个曲线族之中任意的曲线 γ 在 p 处的曲率 κ 等于 $\gamma''(0)$ 与 v 正交的量的范数, 所以 $\kappa \geq |\langle \gamma''(0), N(p) \rangle|$. 我们还需要证明它的下限是可以取到的, 也就是说, 在这个曲线族之中存在曲线 γ 使得 $\gamma''(0)$ 平行于 $N(p)$. 为此, 考虑子空间 $P = \text{span}\{v, N(p)\} \subset \mathbb{R}^3$. 在练习中, 我们构造了一个结构, 使得 $p + P$ 的与 S 中 p 点的一个足够小的邻域的交等于正则曲线 γ 的轨迹. 在弧长参数化的 γ 满足 $\gamma(0) = p$ 和 $\gamma'(0) = v$ 的情况下, 它被称为 S 在 p 处的 v 方向的法截面 (**normal section**). 因为 γ 位于平面 $p + P$ 中, 所以其加速向量位于 P 中, 因此和 $N(p)$ 是平行的. 它的曲率因此等于

$$\kappa = |\gamma''(0)| = |\langle \gamma''(0), N(p) \rangle| = |II_p(v)|.$$

□

这个证明说明了词汇的含义: 法向曲率的绝对值等于法截面的曲率. 这是这个曲线族中所有的其他曲线的曲率的下界, 但是这些曲率无上界的—这个曲线族中的其他曲线都能够构造出任意大的曲率, 比如说, 任意小的半径的“圆”.

在本节的剩余部分, 设 γ 属于前面的命题中设定的曲线族. 我们的目标是定义一种能够衡量曲线在 p 点附近的左/右转向的快慢的度量. 为此, 设 $\kappa_n = II_p(v)$ 表示正则曲率, 为简单起见假设 γ 是单位速的, 则其初始的加速度向量 $a = \gamma''(0)$ 是和 v 正交的. 根据 (1), 这个加速度向量能够分解为

$$(4.8) \quad a = \kappa_n \cdot N(p) + \kappa_g \cdot R_{90}(v)$$

其中标量 $\kappa_g \in \mathbb{R}$, 我们称为“ γ 在 p 处的测地曲率”. 在这里, $R_{90} : T_p S \rightarrow T_p S$ 表示顺着定向所对应的逆时针方向旋转 90° , 就像是在式(3.11)和(3.12)中定义的那样. 为获得更加对称的语法¹, 我们会把 κ_n 称为“ γ 在 p 处的法曲率”, 尽管它是和曲线族之中曲率的选择无关的.

由于 γ 上一点 p 处的曲率 κ (视为空间曲线) 等于 a 的范数, 我们有

$$(4.9) \quad \kappa^2 = \kappa_n^2 + \kappa_g^2.$$

¹原文 “To achieve more symmetric grammar”.

特别地, $\kappa \geq |\kappa_n|$, 这是我们在前面的命题的 (2) 就了解到的. 这量化了 S 中正则曲线的曲率的可能值受到 S 本身的曲率限制的直观想法. 为了弯曲得足够留在 S 中, γ 在 p 点处的曲率必须不小于 $|\kappa_n|$.

另一方面, 测地曲率又是没有限制的:

Proposition 4.12. 保持命题4.11中的记号和假设不变, 在这个曲线族中的曲线 γ 在 p 处的 κ_g 的值能够取到任意的实数.

我们会把这个结论的证明留作下一章的练习题. 下一章, 我们会更好地构造 S 中测地曲率处处为零的曲线 (称为测地线).

4.4 高斯曲率的几何特征

在这一节中, 我们讨论高斯曲率的大小和符号的几何特征.

我们之前把 $K(p)$ 描述为衡量“ S 在 p 附近远离 $T_p S$ 的速度有多快”的量, 但是这是过度简化的描述. $K(p)$ 只是一个数值. 两个主方向的信息和两个 p 点处的主曲率所能够描述的关于 S 在 p 如何远离 $T_p S$ 的信息远比单个数值要丰富. 例如, 平面和柱面都具有常值高斯曲率 0 (例 4.10 和例 4.2). 这两个曲面之间很明显的肉眼可见的差异能够用柱面在各点处都有非零的主曲率来描述.

尽管有这些限制, 高斯曲率仍是几何学中最基础的几个概念之一. 本书的剩余部分很多都在研究这个量能够做些什么. 我们现在先对最直观的高斯曲率的集合解释进行探究. 为此, 最好分开讨论它的符号 (正或负) 和它的绝对值.

我们从高斯曲率的符号开始. 由定义, $K(p)$ 是线性变换 $\mathcal{W}_p : T_p S \rightarrow T_p S$ 的行列式值. 根据 3.4 节中的对线性变换的行列式的符号的解释,

$$(4.10) \quad K(p) \text{ 为 } \begin{cases} \text{正} \\ \text{负} \\ \text{零} \end{cases} \iff \mathcal{W}_p \begin{cases} \text{是保定向的同构} \\ \text{是反定向的同构} \\ \text{不是同构} \end{cases}.$$

关于 $T_p S$ 的这一事实可以升级为下面关于 S 中 p 的邻域的断言:

Proposition 4.13. 设 S 为定向正则曲面, 令 $p \in S$. 若 $K(p) \neq 0$, 那么存在 S 中一点 p 的邻域使得高斯映射 $N : S \rightarrow S^2$ 限制在其上是到它的像的微分同胚. 更进一步, $K(p)$ 为 $\begin{cases} \text{正} \\ \text{负} \end{cases}$ 当且仅当微分同胚是关于 S 的指定定向和 S^2 的向外指向的定向 $\begin{cases} \text{保定向} \\ \text{反定向} \end{cases}$ 的.

Proof. 由于 $K(p) = \det(\mathcal{W}_p) = \det(-dN_p) = \det(dN(p))$, 我们能够把式 (4.10) 中的 \mathcal{W}_p 替换为 dN_p . 由曲面上的反函数定理 (定理 3.35) 立即就能够得到 N 是小邻域之间的微分同胚. 回忆, $dN_p : T_p S \rightarrow T_{N(p)} S^2$ 是相同的向量空间; 也就是说, $T_p S = T_{N(p)} S^2$. 在这个线性空间上的定向 $N(p)$ 可以同时解释为 S 在 p 处的给定定向或是 S^2 在 $N(p)$ 处的向外指向的定向. 在尽可能地缩小邻域之后, 我们能够假设它们是连通的, 则结论可以由命题 3.52 直接得到. \square

当 $K(p) \neq 0$ 时, 高斯映射把 S 中 p 点附近的一个小的逆时针的回路映射为 S^2 中的一个回路, 如果 $K(p) > 0$ 则是逆时针的, 如果 $K(p) < 0$ 则是顺时针的.

要从几何上解释高斯曲率的绝对值的含义, 注意到

$$(4.11) \quad |K(p)| = |\det(dN_p)| = \|dN_p\|,$$

这是高斯映射在 p 处的无穷小量面积扰动. 若 $K(p) \neq 0$, 且 R 是个 S 中包含 p 的足够小的多边形区域, 则式(3.15)给出

$$|K(p)| \approx \frac{\text{面积}N(R)}{\text{面积}(R)}.$$

在本节的最后, 我们给出另外一个高斯曲率的符号的特征, 这是个很简单的结论, 因为没有提及高斯映射:

Proposition 4.14. 设 S 为 (不一定已定向的) 正则曲面, 设 $p \in S$. 若 $K(p) > 0$, 则 S 中 p 的一个足够小的邻域就能够位于平面 $p + T_p S$ 的一侧 (除了 p 点自身, 但是这个点是位于平面上的). 如果 $K(p) < 0$, 则 S 中 p 点的每个邻域都和 $p + T_p S$ 的两侧都是相交的.

Proof. 就像在引理4.5的证明中那样, 在施加一个保距变换之后, 我们就能够不失一般性地假设 $T_p S = \text{span}\{e_1, e_2\}$, p 在 S 中的某个邻域等于光滑函数 f 的图像. 根据例4.4, $K(p) = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$. 下面的结果由多元微积分的二阶导数测试得到, 它将临界点分类为 (严格) 局部极值点若 $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$, 鞍点若 $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$. □

4.5 局部坐标的第二基本形式

为了评估第二基本形式和高斯曲率的几何意义, 我们目前在从定义出发来计算这些度量, 但是这种方法有计算上的限制. 例如, 我们只能计算临界点出的图像的曲率, 但是不能够计算其他的更一般点处的曲率. 在这一节, 我们会通过给出第二基本形式和高斯曲率的局部坐标下的表达式极大地改善我们的计算能力.

在这一节中, 设 S 为定向正则曲面, 令 $\sigma: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \subset S$ 为曲面切片. 设 N 表示定向, 假设曲面切片和定向是一致的.

回忆第3.9节中我们按照如下表达式定义了函数 $E, F, G: U \rightarrow \mathbb{R}$:

$$E = |\sigma_u|^2, \quad F = \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle, \quad G = |\sigma_v|^2.$$

我们之后定义了局部坐标 $\{u, v\}$ 下的第一基本形式 (也称为“ σ 的第一基本形式”), 表达式如下:

$$\mathcal{F}_1 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2.$$

在这里, 表达式“ du ”为 U 上的函数 $(u, v) \mapsto u$ 的微分, 类似的, 表达式“ dv ”为 U 上的函数 $(u, v) \mapsto v$ 的微分. 所以如果 $x = (a, b)$, 则 $du_q(x) = a, dv_q(x) = b$, 对任意的 $q \in U$. 有了这样的理解之后, 局部坐标的第一基本形式就会把 $q \in U$ 映射到把 $x \in T_q U = \mathbb{R}^2$ 映到 $|d\sigma_q(x)|^2$ 的函数. 也就是说,

$$(\mathcal{F}_1)_q(x) = |d\sigma_q(x)|^2.$$

换句话说, 如果你将 σ 视为将 U 和 S (的一部分) 之间的对应, 那么 \mathcal{F}_1 是 U 上由 S 的第一基本形式标记的形式. 例如, 给定 U 中的曲线 γ , 那么我们能够计算 S 中相应的曲线 (也就是 $\sigma \circ \gamma$) 的长度, 只需要了解在这些局部坐标中的第一基本形式就足够了. 只用 \mathcal{F}_1 就可以类似的在 U 上计算出 S 中的角度和面积.

我们的下一个目标是在局部坐标中表示出第二基本形式. 在不会引起歧义的情况下我们会继续使用用“ N ”简单地表示“ $N \circ \sigma$ ”的约定. 利用这个约定, 我们首先如下定义函数 $e, f, g: U \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} e &= \langle \sigma_{uu}, N \rangle = -\langle N_u, \sigma_u \rangle = \langle \mathcal{W}(\sigma_u), \sigma_u \rangle, \\ f &= \langle \sigma_{uv}, N \rangle = -\langle N_v, \sigma_u \rangle = -\langle N_u, \sigma_v \rangle = \langle \mathcal{W}(\sigma_u), \sigma_v \rangle, \\ g &= \langle \sigma_{vv}, N \rangle = -\langle N_v, \sigma_v \rangle = \langle \mathcal{W}(\sigma_v), \sigma_v \rangle, \end{aligned} \tag{4.12}$$

这些等式是由式(4.5)和式(4.6)推出来的, 其自变量为简便性省略了. 例如, 第一个红色的相等项事实上指的是 $e(q) = \langle \mathcal{W}_{\sigma_q}(\sigma_u(q)), \sigma_u(q) \rangle, \forall q \in U$, 对其他的表达式也是类似的. 由于函数 e, f, g 与魏恩加滕映射之间的联系, 作出如下的定义是恰当的:

Definition 4.15. 局部坐标 $\{u, v\}$ 下的第二基本形式 (也称为“ σ 的第二基本形式”) 为表达式

$$\mathcal{F}_2 = edu^2 + 2fdudv + gdv^2.$$

这个术语是合理的, 原因如下:

Proposition 4.16. 若 $q \in U, x \in T_q U = \mathbb{R}^2$, 设 $p = \sigma(q)$, 则

$$(\mathcal{F}_2)_q(x) = II_p(d\sigma_q(x)).$$

换句话说, 如果把 σ 看做是把 U 和 S (的一部分) 的对应, 那么 \mathcal{F} 就是 U 上由 S 的第二基本型对应的形式.

Proof. 将 x 的分量记为 $x = (a, b)$. 回忆

$$du(x) = a, \quad dv(x) = b, \quad d\sigma_q(x) = a\sigma_u + b\sigma_v$$

(在这里且在整个证明里, 我们都假设所有量都是在 q 附近估算的). 因此

$$\begin{aligned} II_p(d\sigma_q(x)) &= II_p(a\sigma_u + b\sigma_v) = \langle \mathcal{W}_p(a\sigma_u + b\sigma_v), a\sigma_u + b\sigma_v \rangle \\ &= a^2 \langle \mathcal{W}_p(\sigma_u), \sigma_u \rangle + 2ab \langle \mathcal{W}_p(\sigma_u), \sigma_v \rangle + b^2 \langle \mathcal{W}_p(\sigma_v), \sigma_v \rangle \\ &= a^2 e + 2abf + b^2 g \\ &= edu(x)^2 + 2fdv(x)du(x) + gdv(x)^2 = (\mathcal{F}_2)_q(x). \end{aligned}$$

□

这个命题说明 $(\mathcal{F}_2)_q$ 在局部坐标中表示 II_p . 回忆, II_p 是和魏恩加滕映射 \mathcal{W}_p 对应的二次形式. 特别地, II_p 和 \mathcal{W}_p 包含的信息是相同的, 只是用不同的方式包装了起来; 也就是说, 任意一个都能够用另外一个来表达, 就像在4.2节所说的那样. 因此, 通过 e, f, g 来描述 \mathcal{W}_p 对应的矩阵 (也得用到 E, F, G , 因为在式(4.3)中出现的内积). 下面的命题说明了这是怎么做到的. 所有的函数都假设是在 $q = \sigma^{-1}(p)$ 点附近被估算的.

Proposition 4.17. 关于 $T_p S$ 的基 $\{\sigma_u, \sigma_v\}$ 表示 \mathcal{W}_p 的矩阵 $\begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix}$ 由下式给出:

$$\begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} eG - fF & fG - gF \\ fE - eF & gE - fF \end{pmatrix}.$$

在基 $\{\sigma_u, \sigma_v\}$ 规范正交的极端特殊的情况下 (同时也有 $E = G = 1, F = 0$), 这个命题中的表达式简化为 $\begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$. 这种特殊情况可以由式(4.12)直接得到. 但是在一般的情况下, $\begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix}$ 不一定是对称矩阵, 遑论等于 $\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$.

Proof. 由式(4.12)的红色部分,

$$\begin{aligned} e &= \langle \mathcal{W}_p(\sigma_u), \sigma_u \rangle = \langle w_{11}\sigma_u + w_{21}\sigma_v, \sigma_u \rangle = w_{11}E + w_{21}F, \\ f &= \langle \mathcal{W}_p(\sigma_u), \sigma_v \rangle = \langle w_{11}\sigma_u + w_{21}\sigma_v, \sigma_v \rangle = w_{11}F + w_{21}G, \\ f &= \langle \mathcal{W}_p(\sigma_v), \sigma_u \rangle = \langle w_{12}\sigma_u + w_{22}\sigma_v, \sigma_u \rangle = w_{12}E + w_{22}F, \\ g &= \langle \mathcal{W}_p(\sigma_v), \sigma_v \rangle = \langle w_{12}\sigma_u + w_{22}\sigma_v, \sigma_v \rangle = w_{12}F + w_{22}G. \end{aligned}$$

这是具有四个变量 $\{w_{11}, w_{12}, w_{21}, w_{22}\}$ 和四个线性等式的系统. 我们并不会使用一个 4×4 的矩阵来求解它. 注意到这个系统等价于下面的涉及两个 2×2 矩阵的等式:

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{21} \\ w_{12} & w_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

因此,

$$\begin{pmatrix} w_{11} & w_{21} \\ w_{12} & w_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}.$$

注意, 左边是我们想要求解的矩阵的转置. 那么结论就只需要计算出右边的矩阵乘积就可以得出. \square

高斯曲率是命题4.17中的矩阵的行列式值, 平均曲率是其迹的一半, 计算出来的结果是

$$(4.13) \quad \boxed{K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}} \quad \boxed{2H = \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}}.$$

主曲率可以通过计算矩阵的特征值得到, 但是一般而言我们会有另外一种方法, 多数情况下比较简单. 当式(4.13)被用来决定某点处的 K 和 H 的值时, 我们就知道了主曲率的和与积: $k_1 + k_2 = 2H, k_1 k_2 = K$. 求解这两个方程构成的系统, 我们就知道主曲率为

$$(4.14) \quad \{k_1, k_2\} = \left\{ H - \sqrt{H^2 - K}, H + \sqrt{H^2 - K} \right\}.$$

Example 4.18 (图像上的点的一般情况). 设 $U \subset \mathbb{R}^2$ 为开集, $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ 光滑函数. φ 的图像 G 是可以由单个曲面切片 $\sigma: U \rightarrow G, \sigma(x, y) = (x, y, \varphi(x, y))$ 覆盖的正则曲面. 在例3.48中, 我们计算出

$$\sigma_x = (1, 0, \varphi_x), \quad \sigma_y = (1, 0, \varphi_y), \quad N = \frac{\sigma_x \times \sigma_y}{|\sigma_x \times \sigma_y|} = \frac{(-\varphi_x, -\varphi_y, 1)}{\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + 1}}.$$

第一基本形式的系数为

$$E = \langle \sigma_x, \sigma_x \rangle = 1 + \varphi_x^2, \quad F = \langle \sigma_x, \sigma_y \rangle = \varphi_x \varphi_y, \quad G = \langle \sigma_y, \sigma_y \rangle = 1 + \varphi_y^2.$$

σ 的二阶偏导数为

$$\sigma_{xx} = (0, 0, \varphi_{xx}), \quad \sigma_{xy} = (0, 0, \varphi_{xy}), \quad \sigma_{yy} = (0, 0, \varphi_{yy}),$$

所以第二基本形式的系数为

$$e = \frac{\varphi_{xx}}{\sqrt{1 + \varphi_x^2 + \varphi_y^2}}, \quad f = \frac{\varphi_{xy}}{\sqrt{1 + \varphi_x^2 + \varphi_y^2}}, \quad g = \frac{\varphi_{yy}}{\sqrt{1 + \varphi_x^2 + \varphi_y^2}}.$$

一般情况下一点处的高斯曲率为

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{\left(\frac{\varphi_{xx}\varphi_{yy} - \varphi_{xy}^2}{1 + \varphi_x^2 + \varphi_y^2} \right)}{(1 + \varphi_x^2)(1 + \varphi_y^2) - (\varphi_x\varphi_y)^2} = \frac{\varphi_{xx}\varphi_{yy} - \varphi_{xy}^2}{(1 + \varphi_x^2 + \varphi_y^2)^2}.$$

在临界点处, 分母为 1, 所以 K 的表达式简化为 [例4.4](#) 的简单表达式. 平均曲率为

$$2H = \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} = \frac{\varphi_{xx}(1 + \varphi_y^2) - 2\varphi_{xy}\varphi_x\varphi_y + \varphi_{yy}(1 + \varphi_x^2)}{(1 + \varphi_x^2 + \varphi_y^2)^{3/2}}.$$

Example 4.19 (旋转曲面). 在 [3.25](#) 中, 我们研究了关于 z -轴旋转曲线 $\gamma(t) = (x(t), 0, z(t))$ 的轨迹所得到的曲面. 我们构造曲面切片为 $\sigma(\theta, t) = (x(t)\cos(\theta), x(t)\sin(\theta), z(t))$, 我们计算出在任意一点 $q = (\theta, t)$ 有

$$\sigma_\theta(q) = (-x\sin(\theta), x\cos(\theta), 0), \quad \sigma_t(q) = (x'\cos(\theta), x'\sin(\theta), z').$$

在这里我们省略了自变量, 例如, 我们写的是 z' 而非 $z'(t)$. 我们假设 γ 是弧长参数化的, 也就是说, $(x'(t))^2 + (z'(t))^2 = 1$. 第一基本形式的系数是

$$E = \langle \sigma_\theta, \sigma_\theta \rangle = x^2, \quad F = \langle \sigma_\theta, \sigma_t \rangle = 0, \quad G = \langle \sigma_t, \sigma_t \rangle = 1.$$

因为 $\sigma_\theta \times \sigma_t = (xz'\cos\theta, xz'\sin\theta, -xx')$ 且 $|\sigma_\theta \times \sigma_t|^2 = (xz')^2 + (xx')^2 = x^2$, 由此曲面切片生成的单位长法向量场为

$$N = \frac{\sigma_\theta \times \sigma_t}{|\sigma_\theta \times \sigma_t|} = (z'\cos\theta, z'\sin\theta, -x').$$

当 $\theta = 0$ 时, 注意到 $N = (z', 0, -x')$ 为生成曲线的法向量, 可以通过将 $\gamma' = (x', 0, z')$ 在 xz -平面中顺时针旋转 90° 获得. 二阶偏导数为

$$\sigma_{\theta\theta} = (-x\cos\theta, -x\sin\theta, 0), \quad \sigma_{\theta t} = (-x'\sin\theta, x'\cos\theta, 0), \quad \sigma_{tt} = (x''\cos\theta, x''\sin\theta, z''),$$

所以第二基本形式的系数为

$$e = -xz', \quad f = 0, \quad g = x''z' - x'z''.$$

总之, 局部坐标 $\{\theta, t\}$ 下的第一和第二基本形式为

$$\mathcal{F}_1 = x^2 d\theta^2 + dt^2, \quad \mathcal{F}_2 = (-xz')d\theta^2 + (x''z' - x'z'')dt^2.$$

高斯曲率等于

$$\begin{aligned} K &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{-xz'(x''z' - x'z'')}{x^2} = \frac{-x''(z')^2 + x'z'z''}{x} = \frac{-x''(z')^2 + x'(-x'x'')}{x} \\ &= \frac{-x''((z')^2 + (x')^2)}{x} = -\frac{x''}{x}. \end{aligned}$$

红色表达式的等价性是由 $(x')^2 + (z')^2 = 1$ 推出来的. 总之,

$$(4.15) \quad \boxed{K = -\frac{x''}{x}}.$$

平均曲率等于

$$2H = \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} = \frac{-xz' + x^2(x''z' - x'z'')}{x^2} = \frac{-z' + x(x''z' - x'z'')}{x}.$$

主曲率可以由式(4.14)算出, 但是最好利用推出这个等式的逻辑来推导. 由于 $f = F = 0$, 式(4.13)化简为

$$K = \frac{eg}{EG}, \quad 2H = \frac{eG + gE}{EG},$$

所以我们能够使用肉眼观察法得出乘积为 K , 和为 $2H$ 的两个数, 也就是

$$(4.16) \quad \{k_1, k_2\} = \left\{ \frac{e}{E}, \frac{g}{G} \right\} = \left\{ -\frac{z'}{x}, \frac{x''z' - x'z''}{1} \right\}.$$

Example 4.20 (伪球面). 我们希望构造具有常值高斯曲率 1 的旋转曲面. 若 $K = 1$, 那么式(4.15)就说明 $x'' = -x$. 下面是其中一个解 (对任意 $a > 0$ 成立):

$$(4.17) \quad x(t) = a \cos(t).$$

我们假设了 γ 是弧长参数化的, 所以 $(x')^2 + (z')^2 = 1$, 这意味着 z 和 x 有如下关系:

$$(4.18) \quad z(t) = \int_0^t \sqrt{1 - x'(s)^2} ds = \int_0^t \sqrt{1 - a^2 \sin^2(s)} ds.$$

我们将选定生成曲线 $\gamma(t) = (x(t), 0, z(t))$ 的定义域 I 使得它是 0 周围的最大的区间. 更准确地说, 若 $0 < a < 1$, 那么我们会选出 $I = (-\pi/2, \pi/2)$ 来保证 $x(t) > 0$, 所以生成曲线和旋转轴是无交的. 若 $a > 1$, 那么我们会选定 $I \subset (-\pi/2, \pi/2)$ 作为保证式(4.18)中根号下的表达式非负的最大区间.

若选定 $a = 1$, 那么就有 $x(t) = \cos(t), z(t) = \sin(t), I = (-\pi/2, \pi/2)$, 这时生成的旋转曲面就是球面. 这是能够使得生成的曲面为闭合紧正则曲面的 a 的唯一值. 对于 a 的其他

值, 式(4.18)不能够写出初等函数的表示式, 但依然是 I 上的光滑函数. 其他的值产生的伪球面并没有脐点, 这使得它们真正地 and 球面 S^2 在性质上区分开来 (甚至局部上也是). 特别是, 空间中的保距变换不能够让伪球面中的邻域和球面中的邻域对应起来. 在这之前你预料到具有常值曲率 1 但是和球面完全不同的曲面存在了吗? 但是我们之后会在 5.3 节中了解到伪球面是和球面局部等距同构的, 原因和柱面和平面局部等距同构是相同的; 也就是说, 每一对拥有相同的常值高斯曲率的曲面都一定是局部等距同构的. 你还认为具有常值曲率 1 的紧正则曲面与 S^2 完全不同吗?

在这一节中, 我们计算 \mathcal{F}_2 的系数 $\{e, f, g\}$ 的主要的理由是这是在特定的例子中计算高斯, 平均和主曲率的一个步骤. 但是, 在这一节最后提及第二基本形式的直观解释是值得的:

Proposition 4.21. 若 $q \in U, p = \sigma(q)$, 且 $x \in T_q U = \mathbb{R}^2$, 那么

$$\langle \sigma(q + tx) - \sigma(q), N(p) \rangle \approx \frac{t^2}{2} (\mathcal{F}_2)_q(x)$$

是个在左右差值等于一个误差函数 $E(t)$, 这个误差函数满足 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{E(t)}{t^2} = 0$ 的意义下是很好的估计.

Proof. 将 q 的分量记为 $q = (u_0, v_0)$, 将 x 的分量记为 $x = (du_q(x), dv_q(x)) = (a, b)$. 利用 σ 在 q 处的二阶的泰勒估计 (见式(3.6)) 我们有

$$\begin{aligned} \langle \sigma(q + tx) - \sigma(q), N(p) \rangle &= \langle \sigma(u_0 + ta, v_0 + tb) - \sigma(u_0, v_0), N(p) \rangle \\ &\approx \left\langle \underbrace{t(a\sigma_u(q) + b\sigma_v(q))}_{\text{和 } N(p) \text{ 正交}} + \frac{t^2}{2}(a^2\sigma_{uu}(q) + 2ab\sigma_{uv}(q) + b^2\sigma_{vv}(q)), N(p) \right\rangle \\ &= \frac{t^2}{2} \langle du_q(x)^2\sigma_{uu}(q) + 2du_q(x)dv_q(x)\sigma_{uv}(q) + dv_q(x)^2\sigma_{vv}(q), N(p) \rangle \\ &= \frac{t^2}{2} (du_q(x)^2e(q) + 2du_q(x)dv_q(x)f(q) + dv_q(x)^2g(q)) = \frac{t^2}{2} (\mathcal{F}_2)_q(x). \end{aligned}$$

□

回忆, 命题4.16中有 $(\mathcal{F}_2)_q(x) = II_p(d\sigma_q(x))$; 这说明 \mathcal{F}_2 为第二基本形式的局部坐标表示, 这本来是一种不需要坐标图的几何的描述方法. 与之形成对比的是, 命题4.21整个都是关于坐标图 σ 的. 这说明 $\frac{t^2}{2}(\mathcal{F}_2)_q(x)$ 大致为 S 中的点在 $T_p S$ 上的“高度”, 对应于 U 中从 q 向 x 的方向上距离为 t 的位移.

4.6 极小曲面 (选读)

这一节的目标是提供一种平均曲率的几何解释并构造几个最小曲面的例子 (平均曲率处处为 0). 平均曲率的重要性来源于它出现在下列表达式中, 这个表达式描述了当 S 在法方向上按照一个按照任意的光滑函数 φ 从点到点之间变化的距离形变时多边形区域的面积是如何受到影响的:

Proposition 4.22. 设 S 为正则曲面, N 为 S 的定向, $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}$ 为光滑函数. 对 $t \in \mathbb{R}$, 定义

$$S_t = \{p + t\varphi(p)N(p) | p \in S\}.$$

设 $R \subset S$ 为多边形区域, 令 $R_t = \{p + t\varphi(p)N(p) | p \in R\}$, $A(t) = \text{面积}(R_t)$, 我们有

$$A'(0) = - \iint_R 2\varphi H dA.$$

回忆, 在之前的练习之中有结论, 假定 φ 是紧支撑的, 那么在 I 是包含 0 的足够小的区间的时候对任意的 $t \in I$, S_t 都是正则曲面. 这种情况下, 曲面族 $\{S_t | t \in I\}$ 为 S 的一个形变 (deformation), 指的是正则曲面的一个光滑单参数曲面族, 起始为 $S_0 = S$. 尽管若 φ 并不是紧支撑的, 但是命题始终是有效的; S_t 是否是正则曲面是不重要的, 因为对足够小的 t , R_t 自身就等于正则曲面的一个多边形区域, 所以它的面积是有意义的一个度量.

Proof. 设 $\sigma : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \subset S$ 为覆盖 R 的曲面切片. 将 σ 的第一和第二基本型表示为

$$\mathcal{F}_1 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, \quad \mathcal{F}_2 = edu^2 + 2fdudv + gdv^2.$$

设 $T = \sigma^{-1}(R) \subset U$. 回忆, R 的面积等于

$$\text{面积}(R) = \iint_R 1 dA = \iint_T \sqrt{EG - F^2} dA.$$

和平常一样, 我们会将 S 上的函数和它与 σ 的复合用同一个符号表示, 只要这种表示不会引起歧义. 特别地, 我们有时会用 N, φ , 和 H 表示 U 上的函数. 对于 $q \in T, t \in \mathbb{R}$, 定义

$$(4.19) \quad \sigma_t(q) = \sigma(q) + t\varphi(q)N(q),$$

所以 σ_t 是 S_t (的一部分) 的曲面切片, $R_t = \sigma_t(T)$. 注意到

$$(\sigma_t)_u = \sigma_u + t\varphi N_u + t\varphi_u N, \quad (\sigma_t)_v = \sigma_v + t\varphi N_v + t\varphi_v N.$$

因此, σ_t 的第一基本形式的系数是

$$\begin{aligned} E_t &= E + 2t\varphi \underbrace{\langle \sigma_u, N_u \rangle}_{-e} + t^2\varphi^2 \langle N_u, N_u \rangle + t^2\varphi_u\varphi_u, \\ F_t &= F + 2t\varphi \underbrace{(\langle \sigma_u, N_v \rangle + \langle \sigma_v, N_u \rangle)}_{-2f} + t^2\varphi^2 \langle N_u, N_v \rangle + t^2\varphi_u\varphi_v, \\ G_t &= G + 2t\varphi \underbrace{\langle \sigma_v, N_v \rangle}_{-g} + t^2\varphi^2 \langle N_v, N_v \rangle + t^2\varphi_v\varphi_v. \end{aligned}$$

因此, 利用从式(4.13)中得到的事实 $H = \frac{eG-2fF+gE}{2(EG-F^2)}$, 我们有

$$\begin{aligned} E_t G_t - (F_t)^2 &= EG - F^2 - 2t\varphi(eG - 2fF + gE) + \mathcal{E}(t) \\ &= (EG - F^2) \left((1 - 4t\varphi) \left(\frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)} \right) \right) + \mathcal{E}(t) \\ &= (EG - F^2)(1 - 4t\varphi H) + \mathcal{E}(t), \end{aligned}$$

其中 $\mathcal{E}(t)$ 是满足 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathcal{E}(t)}{t} = 0$ 的误差函数. 因此,

$$\begin{aligned} A'(0) &= \frac{d}{dt} \bigg|_{t=0} \iint_T \sqrt{E_t G_t - (F_t)^2} dA \\ &= \iint_T \left(\frac{d}{dt} \bigg|_{t=0} \sqrt{(EG - F^2)(1 - 4t\varphi H) + \mathcal{E}(t)} \right) dA \\ &= \iint_T \left(-2\varphi H \sqrt{EG - F^2} \right) dA = - \iint_R 2\varphi H dA. \end{aligned}$$

□

Corollary 4.23. 若 $p \in S$ 满足 $H(p) \neq 0$, 那么存在 S 在 p 附近的减面积的形变.

更准确地说, 对每个 S 中足够小的包含 p 的多边形区域 R , 存在一个正则曲面的单参数族, 是由把 R 替换为多边形区域 R_t 得到的, 边界和 R 相同但是面积比 R 小.

Proof. 设 $R \subset V$ 为包含 p 的多边形区域, 小到 H (平均曲率) 在整个 R 上的符号都是不变的. 选定光滑函数 $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}$, 满足在 $S - R$ 上为零, 在 R 中的某些点处不为 0. 对命题4.22中描述的 S 的形变, $A'(0) < 0$, 所以 R_t 的面积比 R 小. □

考虑下面的向量值版本的平均曲率是很方便的:

Definition 4.24. 定向曲面 S 的平均曲率场 (*mean curvature field*) 指的是法向量场 $\mathbf{H} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$, 满足对任意的 $p \in S$,

$$\mathbf{H}(p) = H(p)N(p).$$

这个定义的一个好处是 \mathbf{H} 不受 S 的定向的影响. 另一个定向会改变 H 和 N 两者的符号, 这样 \mathbf{H} 的符号就不会改变. 因此, \mathbf{H} 甚至在不可定向曲面上都是良定的法向量场. 几何上, 若 $\mathbf{H}(\mathbf{p}) \neq 0$, 那么它会指向想要减小面积所需要对 S 进行的形变的方向. 事实上, 这一点有助于消除在上面引理 4.23 的证明中的两种情况 ($H > 0$ 和 $H < 0$) 的对立性. 在这两种情形下, S 在 p 附近各处的减面积形变都会向着 \mathbf{H} 的正向标量积移动, 也能够把式 (4.19) 改写为

$$\sigma_t = \sigma + t\varphi N = \sigma + t \underbrace{\frac{\varphi}{H}}_{\geq 0} \mathbf{H}.$$

推论 4.23 有助于我们理解金属框架浸入肥皂溶液后形成的气泡表面. 大自然在这里解决的是什么优化问题? 肥皂膜就像绷紧的弹性纤维. 它永远有变小的倾向, 即缩小表面积的倾向. 但是它被迫以金属框架为边界, 因为分子键阻止它离开金属框架. 在这种限制下, 表面张力往往会使肥皂溶液迅速变成在边界相同时具有最小面积的那种曲面形状. 虽然我们无法先验地保证肥皂解会找到这个优化问题的全局最小值, 但我们确实期望它至少能找到局部最小值——一个没有任何 (上文我们所讨论的那种) $A'(0) < 0$ 的形变 (存在) 的曲面. 根据推论 4.23, 这样一个曲面的平均曲率必然为零:

Definition 4.25. 一个 (正则或参数化的) 曲面被称为是**最小的**若其平均曲率处处为 0.

最小曲面表示微分几何中研究得最广泛的专题之一, 它与物理, 复分析, 拓扑, 微分方程的联系很深. 一些在这个领域的研究动力来源于柏拉图问题 (*Plateau's problem*), 大致问的就是对于空间中的简单闭曲线 C , 是否总是存在以 C 为边界的面积最小化曲面. 将电线环浸入肥皂水的实验也许会让人假设这个问题有肯定的回答. 尽管足够精确地表述这个问题涉及到很多技巧, 但是对于一大类简单闭空间曲线而言答案确实是肯定的.

最近的一些文献涉及了在把线圈从肥皂溶液中拎出时肥皂溶液迅速“缩”成最小曲面的形状的过程的建模. 这一过程能够被建模为初始肥皂表面形成的曲面的减面积形变, 称为平均曲率流. 表面张力作用的效果是任意时刻肥皂溶液的每个液滴在法方向上的移动的速度和当前曲面在该处的平均曲率成正比. 为简单起见, 我们通常把比例系数设置为 1. 换句话说, 液滴的速度向量等于当前曲面形状的平均曲率向量. 这最初与在命题 4.22 中令 $\varphi = H$ 是相同的, 但是它之后的变化取决于之后的曲面的平均曲率向量而并不是完全取决于初始曲面的. 平均曲率流是一个现代微分几何研究的占了很大一部分的课题.

平面显然是最小曲面. 我们的下一个目标是确认其他的最小曲面, 而下面的一般化的命题在确定最小曲面时非常有用:

Lemma 4.26. 保角的参数化曲面 $\sigma : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 是最小化的当且仅当 $\sigma_{uu} + \sigma_{vv} = 0$.

Proof. 由于 σ 是保角的, 所以我们有 $E = G, F = 0$. 由式(4.13), $2H = \frac{e+g}{G}$, 它取零当且仅当

$$0 = e + g = \langle \sigma_{uu} + \sigma_{vv}, N \rangle.$$

证明这个引理因此只需要说明 $\sigma_{uu} + \sigma_{vv}$ 是法向量场, 也就是说, 它是没有切向分量的. 为此, 改写方程 $E = G$ 和 $F = 0$ 为

$$\langle \sigma_u, \sigma_u \rangle = \sigma_v, \sigma_v \quad \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle = 0.$$

通过对这些等式关于 u 和 v 求偏导, 我们知道

$$\langle \sigma_{uu}, \sigma_u \rangle = \langle \sigma_{vu}, \sigma_v \rangle = -\langle \sigma_u, \sigma_{vv} \rangle,$$

所以 $\langle \sigma_{uu} + \sigma_{vv}, \sigma_u \rangle = 0$. 类似地, $\langle \sigma_{uu} + \sigma_{vv}, \sigma_v \rangle = 0$. □

Example 4.27 (悬链面是最小化的). 悬链面是通过关于 z 轴旋转曲线 $\gamma(t) = (c \cosh(t), 0, ct)$ (其中 $c > 0$ 为常数) 的轨迹得到的曲线. 由例3.25, 曲面可被参数化为

$$(4.20) \quad \sigma\theta, t = (c \cosh t \cos \theta, c \cosh t \sin \theta, ct).$$

一阶偏导数为

$$\sigma_\theta = (-c \cosh t \sin \theta, c \cosh t \cos \theta, 0),$$

$$\sigma_t = (c \sinh t \cos \theta, c \sinh t \sin \theta, c).$$

因此, $E = G = c^2 \cosh^2 t, F = 0$, 这意味着 σ 是保角的. 二阶偏导数为

$$\sigma_{\theta\theta} = (-c \cosh t \cos \theta, -c \cosh t \sin \theta, 0),$$

$$\sigma_{tt} = (c \cosh t \cos \theta, c \cosh t \sin \theta, 0).$$

因为 $\sigma_{\theta\theta} = -\sigma_{tt}$, 引理4.26说明悬链面是最小曲面.

Example 4.28 (螺旋面是最小曲面). 螺旋面是在练习中有定义的能够被单个曲面切片 $\sigma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 覆盖的正则曲面, 其中

$$\sigma(\theta, \tilde{t}) = (\tilde{t} \cos \theta, \tilde{t} \sin \theta, c\theta),$$

其中 $c > 0$ 是个常数. 这个曲面切片不是保角的, 但是它能够通过代换 $\tilde{t} = c \sinh t$ 变成保角的. 换句话说, 曲面的下面这个曲面切片是保角的:

$$(4.21) \quad \sigma(\theta, t) = (c \sinh t \cos \theta, c \sinh t \sin \theta, c\theta).$$

它是个曲面切片因为 $\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 为具有处处为正的导数的光滑函数. 一阶偏导数为

$$\sigma_\theta = (-c \sinh t \sin \theta, c \sinh t \cos \theta, c),$$

$$\sigma_t = (c \cosh t \cos \theta, c \cosh t \sin \theta, 0).$$

因此, $E = G = c^2 \cosh^2 t, F = 0$. 这证实了 σ 是保角的. 二阶偏导数为

$$\sigma_{\theta\theta} = (-c \sinh t \cos \theta, -c \sinh t \sin \theta, 0),$$

$$\sigma_{tt} = (c \sinh t \cos \theta, c \sinh t \sin \theta, 0).$$

因为 $\sigma_{\theta\theta} = -\sigma_{tt}$, 引理4.26说明螺旋面是最小曲面.

上面的红色部分提醒我们注意螺旋面和悬链面具有相同的第一基本形式. 由习题中的结论, 这说明螺旋面的开集是和悬链面上的开集等距同构的. 我们在练习中放了一种解释.

一些其他的最小曲面的例子被放在了练习中, 但是和在这个专题上的大量文献不同, 我们在这一节中对最小曲面的处理是非常简单的. 更详细的研究可以查询参考文献.

4.7 费耶-缪勒定理 (选读)

由于上课进度问题, 此节跳过.

Fary-Milnor Theorem

Chapter 5

测地线

\mathbb{R}^2 中最基础的几何概念是直线. 这一章的目标是把 \mathbb{R}^2 中的最基础的概念推广到任意的正则曲面中. 尽管大多数曲面都会扭到不包含任何直线, 但是它们包含一种叫测地线的曲线, 和直线具有很多共同的重要特征.

为使得我们开始的时候专注于几何, 我们会把一些基础的结论的代数证明拖到后面 (第 5.6 节, 比如说), 也就是 (1) 测地线的存在性和唯一性, (2) 在一般的极坐标下高斯曲率计算公式.

5.1 测地线的定义和例子

如果一个小的玩具车模型放在平面上, 它会沿着直线前行. 那么如果它被放在地球的曲面上呢 (我们假设地球是一个完美的球体, 大小比玩具车大得多)? 由于重力和摩擦, 玩具小车会停留在地球上, 但是不会沿着直线前进—因为球面压根就不含直线. 它会转化成什么样的曲线呢? 它会保持一个常值速度, 这意味着 $\gamma''(t)$ 在 $\gamma'(t)$ 的方向上不会有任何的分量¹. 它不会左转或者是右转, 这意味着 $\gamma''(t)$ 在 $R_{90}(\gamma'(t))$ 上不会有分量. 则我们只剩下垂直于曲面的方向—也就是曲面的法向—有可能有 $\gamma''(t)$ 的分量存在了. 由此, 我们预测玩具小车会沿着测地线 (geodesic) 来运动—这是只会沿着曲面法向弯曲的线:

Definition 5.1. 正则曲面 S 中的正则曲线 $\gamma: I \rightarrow S$ 被称为测地线 (geodesic) 若对每个 $t \in I$, 加速度向量 $\gamma''(t)$ 都是 S 在 $\gamma(t)$ 处的法向量.

在这个定义中, 区域 I 可以是任意类型的区间. 我们用术语测地线段 (geodesic segment) 来指称定义域是紧区间 $[a, b]$ 的测地线. 下面的结论可以由定义直接得到:

¹事实上, 这样的定义和限制容易带来困惑—相同轨迹的曲线有些是测地线有些却不是. 在更多的场景中, 我们只要求加速度位于速度和曲面法向量张成的平面内就行. 在本书中, 我们与原作者的定义保持一致.

Lemma 5.2. 设 S 为正则曲面, $\gamma: I \rightarrow S$ 为正则曲线.

- (1) 若 γ 是测地线, 那么 γ 的速度为常值 (因为 $\gamma'' \perp \gamma'$).
- (2) 若 γ 是单位速的, 那么 γ 是测地线当且仅当对任意的 $t \in I, \kappa_g(t) = 0$.

回忆第4.3节 κ_g 表示测地曲率 (geodesic curvature) 函数, 这能够粗略地描述 γ 向左转动的快速程度 (就像在练习 4.24 中讨论的那样). 尽管 κ_g 的符号取决于 (局部) 定向的选择, 但是它是否为零却是不受影响的, 所以 “ $\kappa_g = 0$ ” 的条件就算是对于不可定向的曲面也是良定义的. 这个条件大致意思是加速度向量没有左/右分量.

如果玩具小车沿任一方向被放置在表面上的任意一点处, 那么它会沿着该方向前进一点—无论多小的一点—到曲面的边界. 它的轨迹 (trajectory) 完全由初始位置和方向决定, 且随着这两个因素光滑变化. 这里是更加准确的描述:

Proposition 5.3 (测地线的存在性和唯一性). 设 S 为正则曲面, $p \in S, v \in T_p S, r = |v| \neq 0$. 存在 $\epsilon = \epsilon(p, r) > 0$ (关于 p 和 r 光滑变化) 使得:

- (1) 存在测地线 $\gamma_v: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ 满足初始条件 $\gamma_v(0) = p, \gamma'_v(0) = v$.
- (2) 任意两个这个定义域上的满足这个初始条件的测地线一定是相同的.

此外, $\gamma_v(t)$ 关于 p, v, t 光滑变化.

这个命题说的是沿特定方向 v 经过给定点 p 的测地线是唯一的. 光滑性的说明有一点技巧性; 它的意思是

$$(p, v, t) \mapsto \begin{cases} p & \text{若 } |v|=0, \\ \gamma_v(t) & \text{其他情形.} \end{cases}$$

是在下面的定义域上光滑的:

$$\{(p, v, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^7 \mid p \in S, v \in T_p S, |t| < \epsilon(p, |v|)\}.$$

我们会把这个命题的证明放到第5.6节, 为的是现在专注于研究例子和几何应用.

首先注意理解单位速的测地线是足够的, 因为其他的测地线仅仅是这些测地线的重参数化. 具体一点地说, 若 $u \in T_p S$ 是单位长的, $r \neq 0$ 是足够小的, 那么

$$(5.1) \quad \gamma_{ru}(t) = \gamma_u(rt).$$

也就是说, 沿方向 ru 通过 p 的测地线仅仅是沿方向 u 通过 p 的测地线的速度为 r 的重参数化. 尤其是, $\epsilon(p, r)$ 对 r 的依赖性直接的: $\epsilon(p, r) = \frac{\epsilon(p, 1)}{r}$.

Example 5.4 (平面中的测地线). 平面 \mathbb{R}^2 的正则曲线 γ 是测地的当且仅当它是具有常速度值的直线. 这是因为 $\gamma''(t) \in \mathbb{R}^2$, 则 $\gamma''(t)$ 是 \mathbb{R}^2 的法向当且仅当它是零.

Example 5.5 (带孔平面的测地线). 如果原点从平面中被移除, 那么我们所获得的集合, 记为 $S = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, 是个正则曲面. 就像在前面的例子中的那样, 一个 S 中的正则曲线是测地线当且仅当它是具有恒定速度的直线 (或者其一部分). 我们举下面两个有趣的现象为例:

- (1) S 中不存在同时经过 $(-1,0)$ 和 $(1,0)$ 的测地线 (因为这条测地线会经过原点, 但是原点已经被我们踢出去了).
- (2) 命题5.3中的 ϵ 的最大可能值是 $\epsilon(p,1) = |p|$. 在每一点处的限制因子是指向原点的方向. 注意, $p \rightarrow (0,0)$ 时 $\epsilon(p,1) \rightarrow (0,0)$.

Example 5.6 (球面的测地线). 回忆球面 S^2 的向外指向的法向量场, 描述为 $N(p) = p$. 令 $p \in S^2$, 设 $v \in T_p S^2$ 是单位长的. 曲线 $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow S^2$ 的定义为

$$\gamma(t) = (\cos t)p + (\sin t)v$$

是个测地线, 因为 $\gamma''(t) = -\gamma(t) = -N(\gamma(t))$. 注意 γ 的轨迹是个大圆 (great circle), 即 S^2 和过原点的平面的交 (在这里, 这个平面是由 p 和 v 张成的). 命题5.3的第 (2) 点说明 S^2 中的每一条测地线是大圆 (或者其一部分). 关于圆上的测地线有一些有趣的结论. 比如, 南北极之间有无穷多的测地线段. 长度大于 π (大圆的周长的一半) 的测地线段不是它的两个端点之间的最短线段.

Example 5.7 (柱面上的测地线). 考虑柱面

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

它的向外指向的法向量场能够用公式 $N(x,y,z) = (x,y,0)$ 表示. 对于每个 $c \in \mathbb{R}$, 螺线 $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), ct)$ 都是一条测地线, 因为 $\gamma''(t) = -N(\gamma(t))$. 它的初始位置是 $p = \gamma(0) = (1,0,0)$, 它的初速度是 $\gamma'(0) = (0,1,c)$. 在不考虑上下翻转的情况下, 我们可以选择 c , 使 γ 的初速度向量指向 $T_p C$ 中除 $(0,0,\pm 1)$ 之外的任何单位矢量方向.

上面的例子能够帮助梳理出一些对测地线的错误的直观印象. 例如, 连接曲面的两点之间不一定存在唯一的测地线; 事实上, 可能有更多甚至是无穷多的测地线. 更进一步, 尽管测地线具有许多与直线相似的性质, 但是测地线段不一定是曲面上它的两个端点之间的最短路径 (但是在下一节我们就会知道足够短的测地线一定有这样的性质. 也就是说, 最短路径一定是测地线).

对于比上面的例子更复杂的曲面, 通常显式表达出所有的测地线是不可能的. 但是, 有一大族的曲面, 也就是旋转曲面, 其上的测地线的行为是能够用一个相对一般的方法来描述:

Theorem 5.8 (克莱罗定理 (Clairaut's Theorem)). 设 S 为旋转曲面 (见例3.25). 令 $\beta: I \rightarrow S$ 为 S 中的单位速曲线. 对每个 $s \in I$, 设 $\rho(s)$ 表示从 $\beta(s)$ 到旋转轴 (z -轴) 的距离. 令 $\psi(s) \in [0, \pi]$ 表示 $\beta'(s)$ 和经过 $\beta(s)$ 的经线之间的角度.

(1) 若 β 是测地线, 那么 $\rho(s) \sin(\psi(s))$ 在 I 上是常数.

(2) 若 $\rho(s) \sin(\psi(s))$ 在 I 上是常数, 那么 β 是测地线, 假设 β 的线段中没有等于经线的线段的.

$\sin \psi$ 的值不受 ψ 是 β' 和经线上方向向上的切向量还是方向向下的切向量之间的角度的影响. 任一选择都挺好的, 或者, 你也可以把 ψ 定义为两者中较小的那一个, 则对于任意的 $s \in I$ 都有 $\psi(s) \in [0, \frac{\pi}{2}]$. 有了这个约定, 克莱罗定理说的就是沿着测地线处在 ψ 减小时 ρ 一定会增加, 反之亦然. 由此, 测地线在 ρ 较大的时候会比较接近竖直方向 (经线方向), 在 ρ 较小的时候会接近水平方向 (纬线方向).

在参数化为常值速度的情况下, 每一条经线都是一条测地线. 这可以从克莱罗定理 (因为 $\psi = 0$) 或者是从一些基本论断中 (因为经线是平面曲线, 所以其加速度向量必定也在该平面内). 另一方面, 由于文字上的限制, 克莱罗定理无法告诉我们哪些纬向曲线是测地线. 在纬向曲线中, $\rho \sin \psi = \rho$ 的值是常数, 但是我们可以知道 $t = t_0$ 处的纬线是测地线当且仅当 $x'(t_0) = 0$, 其中 $\gamma(t) = (x(t), 0, z(t))$ 表示生成曲线. 注意在生成曲线上 $\rho = x$, 所以事实上它说的是在 ρ 的临界点处的纬线是测地线.

对于物理学家来说, 克莱罗定理只是一个单位速度粒子的角动量守恒定律, 该粒子被限制在 S 上, 在每一点处都只受到 S 的法向力场的作用. 在这样的情况下角动量是守恒的, 因为这样的力场关于旋转轴没有力矩. 粒子的角动量是和 $\rho v_\theta = \rho \sin \psi$ 成比例的, 其中 v_θ 是纬线方向的速度分量; 这个量的守恒就是克莱罗定理. 因此, 它的速度的纬线方向的分量 (对角动量有贡献的那部分) 在粒子远离旋转轴的时候会变小. 这不禁让人联想到滑冰运动员通过将双手伸得离身体更远来减缓旋转速度的方法.

克莱罗定理能够提供很好的关于旋转曲面上的测地线的行为的量化信息.

克莱罗定理的证明. S 的自然的曲面切片在例3.25中有定义, 为

$$\sigma(\theta, t) = (x(t) \cos \theta, x(t) \sin \theta, z(t)),$$

其中旋转曲面的生成曲线为 $\gamma(t) = (x(t), 0, z(t))$. 根据练习 3.105 中的结论, σ 的第一基本形式为

$$(5.2) \quad \underbrace{(x'(t)^2 + z'(t)^2)}_E dt^2 + \underbrace{x(t)^2}_{G} d\theta^2.$$

正则曲线 $\beta : I \rightarrow S$ 在 S 上被这个曲面切片覆盖的部分具有形式 $\beta(s) = \sigma(\theta(s), t(s))$, 对某些 $\theta, t : I \rightarrow \mathbb{R}$ 成立. 利用撇号 ' 表示关于 s 的导数, 假设在 $s \in I$ 的计算中或是在 $(\theta(s), t(s))$ 处的每个量都是恰当的, 链式法则会给出

$$\beta' = \theta' \sigma_\theta + t' \sigma_t, \text{ 以及 } \beta'' = \theta'' \sigma_\theta + \theta' (\theta' \sigma_{\theta\theta} + t' \sigma_{\theta t}) + t'' \sigma_t + t' (\theta' \sigma_{t\theta} + t' \sigma_{tt}).$$

我们能够验证 (直观意义下或者是量化计算) 向量 σ_θ 和这几个向量都是正交的: $\sigma_t, \sigma_{tt}, \sigma_{\theta\theta}$. 因此,

$$(5.3) \quad \langle \beta'', \sigma_\theta \rangle = \langle \theta'' \sigma_\theta + 2\theta' t' \sigma_{\theta t}, \sigma_\theta \rangle = \underbrace{\theta'' \langle \sigma_\theta, \sigma_\theta \rangle + 2\theta' t' \langle \sigma_{\theta t}, \sigma_\theta \rangle}_{\text{因为 } (G)' = t' G_t + \theta' G_\theta = t' G_t = 2t' \langle \sigma_\theta, \sigma_{\theta t} \rangle}} = (\theta' G)' ,$$

其中 $G = \langle \sigma_\theta, \sigma_\theta \rangle = x^2 = \rho^2$, 就像在式(5.2)中的那样. 总之,

$$(5.4) \quad \langle \beta'', \sigma_\theta \rangle = (\theta' G)' = (\theta' \rho^2)' .$$

若 β 是个单位速的测地线, 那么 $\beta'' \perp \sigma_\theta$, 所以 $(\theta' \rho^2)' = 0$, 这意味着 $\theta' \rho^2 = \rho \sin \psi$, 或者等价地, $\theta' \rho = \sin \psi$. 但是这仅仅是来自于 $\sin \psi$ 是 β' 在纬线方向上的投影的长度的事实.

定理的第二个命题留作练习. \square

我们已经知道测地线 (段) 不一定是两个点之间的最短线段. 但是上面的那些例子中的测地线段只是太长了. 我们在下一节就会了解到足够短的测地线段就是端点之间的最短线段. 有了这样的预期, 我们在本节了最后放上一些讨论最短线段的术语.

Definition 5.9. S 为连通的正则曲面. S 上的内蕴距离函数, 记为 $d : S \times S \rightarrow \mathbb{R}$, 被定义为

$$d(p, q) = \inf \{ \text{长度}(\gamma) \mid \gamma \text{ 是 } S \text{ 中从 } p \text{ 到 } q \text{ 的分片正则曲线} \}$$

对任意的 $p, q \in S$ 成立.

$d(p, q)$ 的值是有限的, 因为在曲面上的两点之间是存在分片正则的曲线的. 更进一步, 我们有如下的引理:

Lemma 5.10. 设 S 为连通正则曲面. 对任意的 $p, q, r \in S$,

- (1) $d(p, q) \geq 0$, 当且仅当 $p = q$ 时取等;
- (2) $d(p, q) = d(q, p)$;
- (3) $d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q)$ (三角不等式).

证明见练习.

术语“内蕴的距离函数”和我们在3.7节所使用的“内蕴”的概念是一致的. 也就是说, S 上的内蕴的度量是仅仅取决于内蕴距离函数的, 因为这也是仅仅取决于第一基本形式的. 例如, \mathbb{R}^3 中的距离函数 ($\text{dist}(p, q) = |p - q|$) 在 S 上的限制就不是内蕴的.

Example 5.11. 设 S 为例5.5中的穿孔平面, $p = (-1, 0), q = (1, 0)$. 则 $d(p, q) = 2$, 但是 S 中并不存在从 p 到 q 的长度为 2 的曲线, 因为 \mathbb{R}^2 在这两点之间的直线经过被我们先行删除的原点. 因此, 定义5.9中的下确界不一定能够取到.

下面的定义提供了讨论了定义5.9中的下确界能取到 (有可能相关曲线唯一) 的情形所用的术语:

Definition 5.12. 设 S 为正则曲面, $\gamma: I \rightarrow S$ 为 S 中的分片正则曲线.

- (1) 当 $I = [a, b]$ 是紧的, γ 被称为是**最小化的 (minimizing)** 若 $\text{长度}(\gamma) = d(\gamma(a), \gamma(b))$, γ 被称为是**唯一最小化的 (uniquely minimizing)** 若除此之外, 任意的 S 中的其他的从 $\gamma(a)$ 到 $\gamma(b)$ 的正则曲线长度相同的正则曲线一定和 γ 有相同的轨迹.
- (2) 对于一般的 I , γ 被称为是**最小化的 (minimizing)**(或**唯一最小化的 (uniquely minimizing)**) 若对每个 γ 在 I 的紧子区间上的限制都有如同 (1) 所定义的性质.
- (3) 对于一般的 I , γ 被称为是**局部最小化的 (locally minimizing)** 若对于每个 $t_0 \in I$ 的内部, 存在 I 的一个紧子区间使得其内部包含 t_0 , γ 在其上的限制是最小化的, 就像在 (1) 中所定义的那样.

当 I 是紧集时, 你也许会担心定义 (2) 需要比 (1) 更多的限制, 但是你能够在练习 5.16 看到这些定义在这些情况下是等价的. 所以不存在不一致性, 尽管 (2) 事实上是应用在非紧区间的, 比如 $(a, b), [a, \infty), (-\infty, \infty)$.

下一节的主要目标是常速曲线是局部极小化的当且仅当它是一条测地线. 这个事实会消除术语“局部最小化曲线”的需要——我们会说“测地线”.

5.2 指数映射

在这一节中, 我们会证明每一条足够短的测地线段都是最小化的. 主要的证明这一点和其他的一些基础结论的数学工具是指数映射 (*exponential map*), 描述了 (至少在一小段时间内的) 所有的从某一点起始的测地线的行为.

Definition 5.13. 设 S 为正则曲面, $p \in S$. 命题5.3中保证了让测地线唯一的 $\epsilon = \epsilon(p, r)$ 存在, 我们取最大的可能的 $\epsilon = \epsilon(p, 1)$ (有可能是无限的). 令 $B_\epsilon = \{v \in T_p S \mid |v| < \epsilon\}$ (表示为 $B_\epsilon = T_p S$ 若 $\epsilon = \infty$). 则 S 在 p 处的指数映射 (exponential map) 是函数 $\exp_p : B_\epsilon \rightarrow S$, 定义为

$$\exp_p(v) = \begin{cases} p & \text{若 } v = \mathbf{0} \text{ (零向量)}, \\ \gamma_v(1) & \text{对其他任意的 } v \in B_\epsilon, \end{cases}$$

其中 γ_v 表示 S 中的测地线且满足 $\gamma(0) = p, \gamma'(0) = v$.

式(5.1)提供了较为简单的另外一种指数映射的描述; 也就是说, 对 $T_p S$ 中的每个单位长度的向量 $u \in T_p S$ 以及 $0 < r < \epsilon$, 我们有

$$\exp_p(ru) = \gamma_u(r).$$

由此, $\exp_p(ru)$ 是 S 中的沿着从 p 出发 u 方向上的单位速测地线前进 r 的时间后所抵达的点 (因此前进的距离也是 r). 特别地, $T_p S$ 中的直线 $t \mapsto tu$ 会被 \exp_p 映射到 S 中的测地线 $t \mapsto \gamma_u(t)$. 总之, \exp_p 和 $T_p S$ 中的通过原点的单位速的直线的复合都是 S 中经过 p 点的单位速测地线.

命题5.3说明 \exp_p 是光滑的. 甚至更好地, 我们有下面的结论:

Proposition 5.14. 设 S 为正则曲面, $p \in S$. 存在 $\epsilon > 0$ (也许会比定义 5.3 中的小) 使得 \exp_p 是个从 B_ϵ 到它的图像 $\mathcal{O}_\epsilon(p) = \exp_p(B_\epsilon)$ 上的微分同胚.

图像 $\mathcal{O}_\epsilon(p)$ 被称为是 S 中 p 点半径为 ϵ 的法邻域 (normal neighborhood).

Proof. 根据曲面上的反函数定理 (即定理3.35), 我们只需要证明它在零点 $\mathbf{0}$ 处的微分

$$d(\exp_p)_0 : T_0(T_p S) \rightarrow T_{\exp_p(0)} S$$

是可逆的. 这里的定义域和值域能够描述为

$$d(\exp_p)_0 : T_p S \rightarrow T_p S.$$

事实上, $d(\exp_p)_0$ 仅仅是 $T_p S$ 上的恒等映射, 因为它把每个 $v \in T_p S$ 映射到测地线 $t \mapsto \gamma_v(t)$ 的初速度向量, 也就是 v . □

Example 5.15 (穿孔平面, 球面和柱面的最大的法邻域). 在例5.5中的穿孔平面上的一点 p 处, 我们得选定一个 $\epsilon \leq |p|$ 值使得 \exp_p 在 B_ϵ 上有定义. 在这个限制下, \exp_p 自动就成了 B_ϵ 到它的像上的微分同胚; 事实上, 这还是个等距同构.

球面 S^2 和柱面 C 上的测地线族在例5.5和例5.6中分别有过描述. 每个测地线的定义域都是整个 \mathbb{R} ; 换句话说, 在 (上面两个曲面中的) 任意一个曲面上的每一点 p 处, $\epsilon(p, 1) = \infty$, 所以 \exp_p 的定义域是 p 处的整个切平面. 但是为了使得 \exp_p 在 B_ϵ 上的限制为到它的图像的微分同胚, 我们必须让 $\epsilon \leq \pi$; 这样选的话, 选出来的值就能够看做是任一曲面上的任意点处的有效的法邻域的半径. 选择 $\epsilon > \pi$ 就不会达到这样的效果, 因为 \exp_p 此时在 B_ϵ 上不是双射. 为直观理解柱面的情形, 考虑 C 为你的手指的表面, B_ϵ 看做是圆形的创口贴, \exp_p 会把它贴在你的手指上, 在创口贴的直径大于你的手指的圆周长度的时候就会有重叠.

我们会在第4节了解到 \exp_p 是定义在闭合正则曲面 S 的每一个 p 点的整个切平面上的, 所以对于闭合曲面来说, 法邻域半径的仅有限制来自于局部微分同胚的考量.

如果我们使用 $T_p S$ 的规范正交基 $\{e_1, e_2\}$ 通过映射 $(u, v) \leftrightarrow (ue_1 + ve_2)$ 来描述 $\mathbb{R}^2 \cong T_p S$, 我们就能够把 \exp_p 看做是曲面切片. 相应的局部变量 $\{u, v\}$ 称为 p 处的法坐标 (*normal coordinate*). 如果这个曲面切片是由例3.6的从极坐标转到直角坐标的微分同胚组成的, 那么生成的曲面切片的局部变量 $\{r, \theta\}$ 被称为 p 处的法向极坐标 (*normal polar coordinates*). 这在下面的定义中有总结:

Definition 5.16. 设 S 为正则曲面, $p \in S$. 令 $\epsilon > 0$ 为 p 的法邻域的半径. 令 $\{e_1, e_2\}$ 为 $T_p S$ 的规范正交基.

- (1) p 处的法坐标 (**normal coordinate**) 是与下面的曲面切片相关的局部变量 $\{u, v\}$:

$$\mu(u, v) = \exp_p(ue_1 + ve_2),$$

定义域为 $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < \epsilon^2\}$.

- (2) p 处的法向极坐标 (**normal polar coordinate**) 是与下面的曲面切片相关的局部变量 $\{r, \theta\}$:

$$\sigma(r, \theta) = \exp_p((r \cos \theta)e_1, (r \sin \theta)e_2),$$

定义域为 $\{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < r < \epsilon, 0 < \theta < 2\pi\}$.

尽管法坐标参数化了 S 中 p 的一个法邻域, 但是正则极坐标的曲面切片不能够覆盖 p 或是 e_1 方向上的测地线段. 这是不幸的, 因为 p 是我们研究的中心, 但是这会被证明仅仅是个小的不方便的地方.

高斯证明了下面的引理:

Lemma 5.17 (高斯引理). 设 S 为正则曲面, $p \in S$. 关于 p 处的法向极坐标的曲面

切片 σ 的第一基本形式具有下面的形式:

$$\mathcal{F}_1 = dr^2 + Gd\theta^2.$$

换句话说, 在 σ 的整个定义域上, $\langle \sigma_r, \sigma_r \rangle = 1, \langle \sigma_r, \sigma_\theta \rangle = 0$ 都是成立的.

Proof. 像通常那样, $\mathcal{F}_1 = Edr^2 + 2Fdrd\theta + Gd\theta^2$. 但是 $E = 1$, 这是因为以 r 为参数的曲线都是单位速的测地线. 因此只需要证明 $F = \langle \sigma_r, \sigma_\theta \rangle$ 处处为零即可. 为此, 我们观察到 σ_{rr} 是处处与 S 法向的, 因为它是测地线的加速度向量. 因此

$$\begin{aligned} F_r &= \frac{\partial}{\partial r} \langle \sigma_r, \sigma_\theta \rangle = \langle \sigma_{rr}, \sigma_\theta \rangle + \langle \sigma_r, \sigma_{\theta r} \rangle = 0 + \langle \sigma_r, \sigma_{\theta r} \rangle \\ &= \langle \sigma_r, \sigma_{r\theta} \rangle = (1/2) \frac{\partial}{\partial \theta} \langle \sigma_r, \sigma_r \rangle = (1/2) E_\theta = 0. \end{aligned}$$

对于每个固定的 $\theta_0 \in (0, 2\pi)$, 函数 $r \mapsto F(r, \theta_0)$ 因此是个常数. 我们希望证明这个常数等于 0. 为此, 记 $\sigma = \mu \circ f$. 因为 $\lim_{r \rightarrow 0} |f_\theta(r, \theta_0)| = 0, d(\exp_p)_0$ 是恒同映射, 链式法则给出 $\lim_{r \rightarrow 0} |\sigma_\theta(r, \theta_0)| = 0$. 因此,

$$\lim_{r \rightarrow 0} F(r, \theta_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \langle \sigma_\theta(r, \theta_0), \sigma_r(r, \theta_0) \rangle = 0.$$

□

高斯引理是关于法向极坐标的, 但是它能够推出下面的关于法坐标的重要事实:

Corollary 5.18 (带符号曲率 \leftrightarrow 测地曲率). 设 S 为正则曲面, $p \in S$. 设 $\mu: U \rightarrow S$ 表示 p 处的法坐标的曲面切片. 设 $\mathbf{0} \in U$ 表示原点.

- (1) 向量 $\mu_{uu}(\mathbf{0}), \mu_{vv}(\mathbf{0}), \mu_{uv}(\mathbf{0})$ 都是和 $T_p S$ 正交的.
- (2) 假设 S 是定向的, (μ 的定义所依赖的) 基 $\{e_1, e_2\}$ 是正定向的. 若 $\hat{\gamma}: I \rightarrow U$ 是正则曲线, $\hat{\gamma}(0) = \mathbf{0}, \gamma = \mu \circ \hat{\gamma}$ 是单位速的, 则 $\hat{\gamma}$ 的带符号曲率函数在 $t = 0$ 处等于 γ 在 $t = 0$ 处的测地曲率.

第 (2) 部分让人想起练习 4.15, 但是需要一种不同的证明方式.

Proof. 对于 (1), $\mu_{vv}(\mathbf{0})$ 是和 $T_p S$ 正交的, 因为 $v \mapsto \mu_{vv}(0, v)$ 是测地线 $v \mapsto \mu(0, v)$ 的加速度向量场. 类似的, $\mu_{uu}(\mathbf{0})$ 是和 $T_p S$ 正交的. 混合偏导能够用下面的式子处理:

$$\langle \mu_{uv}, \mu_v \rangle = \frac{\partial}{\partial v} \langle \mu_u, \mu_v \rangle - \langle \mu_u, \mu_{vv} \rangle.$$

这个等式右边的第一项, $\frac{\partial}{\partial v} \langle \mu_u, \mu_v \rangle$ 在 $\mathbf{0}$ 处取 0, 因为高斯引理说了 μ_u 和 μ_v 在测地线 $v \mapsto \mu(0, v)$ 保持正交. 第二项在 $\mathbf{0}$ 取值为 0, 因为 $\mu_{vv}(\mathbf{0})$ 是和 $T_p S$ 正交的. 因此, 等式左边

$\langle \mu_{uv}, \mu_v \rangle$ 在 $\mathbf{0}$ 处也一定取 0. 类似的论证可以知道 $\langle \mu_{uv}, \mu_u \rangle$ 在 $\mathbf{0}$ 处也取 0. 这证明了 $\mu_{uv}(\mathbf{0})$ 是和 $T_p S$ 正交的.

对于部分 (2), 记 $\hat{\gamma}$ 的分量为 $\hat{\gamma}(t) = (u(t), v(t))$, 所以 $\gamma(t) = \mu(u(t), v(t))$. 利用撇号 ' 来表示关于 t 的导数, 假设每一项数值都是在任意的 $t \in I$ 或是在 $(u(t), v(t))$ 酌情进行的, 链式法则就会给出

$$\gamma' = u' \mu_u + v' \mu_v, \quad \gamma'' = u'' \mu_u + u'(u' \mu_{uu} + v' \mu_{uv}) + v'' \mu_v + v'(u' \mu_{vu} + v' \mu_{vv}).$$

和 (1) 中的结论结合起来我们就能够得到

$$\gamma''(\mathbf{0}) \text{ 在 } T_p S \text{ 上的投影} = u''(\mathbf{0}) \mu_u(\mathbf{0}) + v''(\mathbf{0}) \mu_v(\mathbf{0}),$$

这样就能够推出我们想要的结果. □

高斯引理最终使我们能够履行我们证明足够短的测地线就是最小化的的诺言:

Theorem 5.19. 设 S 为正则曲面, $p \in S, \mathcal{O} = \mathcal{O}_\epsilon(p)$ 为 p 的法邻域. 那么 \mathcal{O} 中每一个从 p 起始的测地线段都是唯一地最小化的.

因此, 每个起始点为 p 的测地线段在离开 \mathcal{O} 之前都是 S 中 p 与其上另一点之间的最短曲线段. 下面的证明能够粗略地推出 \mathbb{R}^n 中两点之间的最短线段是直线段:

Proof of theorem 5.19. 设 $\sigma : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{O} \subset S$ 为 p 处的法向极坐标的曲面切片. 设 $q_0 \in \mathcal{O}, q_0 \neq p$. 在重新选择 $\{e_1, e_2\}$ 之后, 我们就能够保证 q_0 是被 σ 覆盖住的; 这意味着 q_0 不在 e_1 方向上的测地线的轨迹 C 上. 因此, $q_0 = \sigma(r_0, \theta_0)$ 对某些 $(r_0, \theta_0) \in U$ 成立. 曲线

$$\gamma(t) = \begin{cases} p & \text{若 } t = 0 \\ \sigma(t, \theta_0) & \text{若 } t \in (0, r_0], \end{cases}$$

是个长度等于 r_0 的从 p 到 q_0 的单位速的测地线段. 我们必须证明 γ 是 S 中唯一的从 p 到 q_0 的最短的曲线.

设 $\beta : [a, b] \rightarrow S$ 为另外一条从 $\beta(a) = p$, 起始, 结束于 $\beta(b) = q_0$ 的曲线. 为简单起见, 我们假设 β 是正则的; β 仅仅是分片正则的情形留作练习. 设 L 表示 β 的弧长. 现在假设 β 的像 (除点 p) 是被 σ 覆盖的, 则我们能够写出 $\beta(s) = \sigma(r(s), \theta(s))$, 其中 $s \mapsto (r(s), \theta(s)), s \in (a, b]$ 是 U 中的正则曲线.

引理 3.77 描述了利用第一基本形式来表示弧长的方法, 而前者由高斯引理可以知道在我们所计算的情形下具有 $\mathcal{F}_1 = dr^2 + Gd\theta^2$ 的形式. 把下面的式子看做是反常积分我们就知道, 因为 $r(t)$ 和 $\theta(t)$ 在 $t = a$ 处没有定义:

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b \sqrt{r'(t)^2 + G(r)\theta'(t)^2} dt \geq \int_a^b \sqrt{r'(t)^2 + 0} dt \\ &= \int_a^b |r'(t)| dt \geq \int_a^b r'(t) dt = r(b) - \lim_{t \rightarrow a} r(t) = r(b) = r_0, \end{aligned}$$

取等条件是当且仅当 $\theta' = 0$, 也就是说 $\theta = \theta_0$ 是常数. 换句话说, $L \geq r_0$, 当且仅当 β 是 γ 的一个重参数化的时候取整.

我们还需要讨论 β 的像没有被 σ 覆盖的情形. 如果 β 穿过 C 有限多次, 那么我们可以将 $[a, b]$ 分出有限多个与 C 无交的子区间. 上面的观点说明 β 的在每个子区间上的长度都是 $\geq \Delta r$ 的 (r 在其端点处的变化), 所以 $L \geq \sum \Delta r = r_0$. 另一方面, 若 β 穿过 C 无穷多次, 那么无论 $\{e_1, e_2\}$ 如何选择, β 一定会在接近 p 时绕 p 旋转无穷多次, 这和 β 在 $t = a$ 处的正则性矛盾. 最后, 如果 β 离开 \mathcal{O} , 那么上面的论证说明了 β 的区段的长度在它首次离开 \mathcal{O} 之前就有 $\geq \epsilon > r_0$. \square

定理5.19说明特别地, p 的法邻域等于 S 中与 p 的固有距离小于半径的点的集合:

$$\mathcal{O}_\epsilon(p) = \{q \in S \mid d(p, q) < \epsilon\}.$$

在法邻域的半径小到足够保证更强的性质后定理的威力还会增强:

Proposition 5.20 (比法邻域性质更好的邻域). 若 S 是正则曲面, $p \in S$, 则 p 的法邻域 \mathcal{O} 的半径足够小时, 具有额外的性质, 也就是它会被包含在它的每一点的法邻域内. 特别地, 这说明每个 \mathcal{O} 中的测地线段 (不一定要从 p 开始) 都是唯一的且是最小化的.

Proof. 真正的工作留在练习中, 那儿的结论说明了 S 中存在 p 的邻域 W , 以及作为 W 中每个点的有效法邻域半径的单一值 $\delta > 0$.

假设如此, 选定 $\epsilon > 0$ 使得 $\epsilon < \delta/2$, 且法邻域 $\mathcal{O}_\epsilon(p)$ 被包含在 W 里面. 由三角不等式, 这个选择保证了 $\mathcal{O}_\epsilon(p) \subset \mathcal{O}_\delta(q)$, 对于每个 $q \in \mathcal{O}_\epsilon(p)$; 换句话说, $\mathcal{O}_\epsilon(p)$ 被包含在它内的每一点的法邻域中的. 第二个声明可以用命题5.19证明出来. \square

这样的比法邻域性质更好的邻域 \mathcal{O} 具有这样的性质: 在 \mathcal{O} 中的每一对点之间都存在唯一的最小化测地线 β . 但是不幸的是, β 的轨迹并不一定位于 \mathcal{O} 中; 只能保证位于任意一个端点的包含整个邻域的法邻域之中. 但是我们可以证明是可能选定 \mathcal{O} 的半径使其足够小来保证 β 一定在 \mathcal{O} 之内的:

Proposition 5.21 (凸邻域). 若 S 为正则曲面, $p \in S$, 那么 p 的法邻域 \mathcal{O} 如果半径足够小的话, 会具有下面的额外性质: 在 \mathcal{O} 中的每一点之间都有唯一的最小化的测地线, 测地线的轨迹位于 \mathcal{O} 之内. 这样的邻域我们称为凸邻域 (convex neighborhood).

我们的术语“比法邻域性质更好”并不是标准化的术语. 这个性质其实不需要被命名的, 因为它仅仅是更强的凸性质的基石.

Example 5.22. 就像在5.15中讨论的那样, $\delta = \pi$ 是球面 S^2 和柱面 C 中的每一点 p 的法邻域的最大半径. 因为这个选择不是依赖于 p 的, 上面的证明过程就能够说明其值的一半, $\epsilon = \pi/2$, 就是个能够保证5.20中“比法邻域性质更好”的邻域. 在球面上, ϵ 更大的话这个性质就会失效. 柱面上呢?

命题5.20的一个结果就是测地线能够由局部最小性质特征化:

Corollary 5.23. S 中的常速曲线是个测地线当且仅当它是局部最小化的.

Proof. 设 $\gamma : I \rightarrow S$ 为常速曲线, $t_0 \in I, \epsilon > 0$ 满足任意一个比这个值小的数都能够作为 (命题5.20中的)“比法邻域性质更好”的 $\gamma(t_0)$ 的邻域的半径. 若 γ 是测地线, 那么 γ 在 $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] \cap I$ 上的限制是最小化的.²

反之, 若 γ 是局部最小化的, 那么命题5.20中的主张强迫 γ 的这个限制是测地线. \square

由于这种测地线的特征描述, 命题5.3大致说明了给定正则曲面中的一点, 沿着任意方向都存在唯一的一条路径使得你沿着这条路径走时沿途所做的标记之间 (撒面包屑) 的距离最短.

关于局部最小化的测地线的特征化描述的一个重要的结论是等距同构是保测地线的:

Corollary 5.24 (测地线是内蕴的). 若 $f : S \rightarrow \tilde{S}$ 是正则曲面之间的等距同构, γ 是 S 中的测地线, 那么 $f \circ \gamma$ 是 \tilde{S} 中的测地线.

这个事实不是很容易从定义5.1中得到, 但是它的证明能够很快的从测地线的特征化描述中得到, 我们在练习中留给读者.

只要知道函数 E, F, G 的值, 区域 $U \subset \mathbb{R}^2$ 上知道它们的世界是和某种曲面相同的居民们 (原则上) 就能够知道它们的世界中的哪些曲线是和该曲面的测地线是对应的. 显式的表达式会在第6节给出. 事实上, 这些居民不只是能够知道哪些曲线对应的是测地线, 它们也知道任意的曲线与测地线之间的偏离程度:

Corollary 5.25 (测地曲率是内蕴的). 若 $f : S \rightarrow \tilde{S}$ 是定向曲面之间保定向的等距同构, 那么每个单位速曲线 $\gamma : I \rightarrow S$ 都拥有与 \tilde{S} 中的函数复合 $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$ 相同的测地曲率函数.

Proof. 设 $t_0 \in I$. 定义 $p_0 = \gamma(t_0), \tilde{p}_0 = f(p_0) = \tilde{\gamma}(t_0)$. 令 $\mu : U \rightarrow S$ 为 p 点处的关于 $T_p S$ 的正定向的规范正交基 $\{e_1, e_2\}$ 定义的法坐标的曲面切片. 因为 f 把单位速度的测地线映

²“比法邻域性质更好”的条件是必要的, 因为如果仅仅是法邻域的话, 那么 γ 有可能会在 $[t_0 - \epsilon, t_0]$ 和 $[t_0, t_0 + \epsilon]$ 上是最小化的, 但是在 $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$ 上不一定是; 考虑例子 $S = S^2, \epsilon = \pi$.

射到单位速度的测地线 (引理5.24), $f \circ \mu$ 等于 \tilde{S} 在 $f(p)$ 处的曲面切片 (关于正定向的规范正交基 $\{df_p(e_1), df_p(e_2)\}$). 目前命题 5.18 提供了 γ 和 $\tilde{\gamma}$ 的 t_0 时刻的相同的几何解释, 也就是在 U 的原点处 $\mu^{-1} \circ \gamma$ 的带符号曲率. \square

5.3 高斯绝妙定理

在这一节中, 我们会介绍一个关于法向极坐标中的高斯曲率的一个简单强有力的公式(会在第 6 节证明). 这个公式会提供目前来讲最好的高斯曲率的几何直观; 也就是说, $K(p)$ 表示经过 p 点的测地线的 “infinitesimal spreading”(不会翻). 与我们之前的高斯曲率的特征化不同, 这个解释是仅仅依赖于内蕴的度量和构造的 (包括测地线). 因此, 高斯曲率自身也是内蕴的! 当高斯最初发现这个事实之后, 他将它命名为 *Theorema Egregium* (拉丁语 “很棒的定理”(remarkable theorem)). 它象征了这一领域的一个基础性的突破, 而这一切都来源于下面的结论:

Theorem 5.26. 设 S 为正则曲面, $p \in S$. 法向极坐标中 p 处的高斯曲率由下式给出:

$$K = -\frac{(\sqrt{G})_{rr}}{\sqrt{G}},$$

其中 $\mathcal{F} = dr^2 + Gd\theta^2$ 为在这些坐标中的第一基本形式, 根据引理 5.17 的结果.

证明我们会拖延到第 6 节给出, 所以我们就能够专注于下面这个著名的定理的几何意义和应用:

Corollary 5.27 (高斯绝妙定理). 高斯曲率是内蕴的. 换句话说, 若 $f: S \rightarrow \tilde{S}$ 为正则曲面之间的等距同构, 那么 $\forall p \in S, K(p) = K(f(p))$.

Proof. 设 $p \in S, \sigma: U \rightarrow S$ 为 S 在 p 处的法向极坐标的曲面切片. 由于 f 将单位速测地线映射到单位速测地线 (见推论 5.24), $f \circ \sigma$ 等于 \tilde{S} 在 $f(p)$ 处的法向极坐标. 由于 f 是等距同构, 所以 σ 和 $f \circ \sigma$ 的第一基本形式是一致的. 这个共同的第一基本形式为 $\mathcal{F}_1 = dr^2 + Gd\theta^2$ (引理 5.17). 定理 5.26 给出了高斯曲率的纯依赖于此第一基本形式的表达, 因此 $K(p) = K(f(x))$ 对任意的一个被 σ 覆盖的 x 成立. 尽管 σ 不能够覆盖 p 本身 (p 点处的, 原点被抠了), 它能够覆盖与 p 任意接近的点, 则由 K 的连续性, $K(p) = K(f(p))$. \square

我们得承认, 这样的简短的证明能够成立是因为我们把定理 5.26 的证明拖到了第 6 节, 这才是这项结果困难的关键. 事实上, 第 6 节中有关于任意曲面的 K 的基于 $\{E, F, G\}$ 的局部坐标表达式, 那样的话我们就能给出比上面的证明更加简短的证明.

回忆, 高斯曲率等于主曲率的乘积, 但是主曲率本身并不是内蕴的. 定理的大致意思是区域 $U \subset \mathbb{R}^2$ 上的了解他们的世界能够用某一种曲面描述的居民 (原则上) 能够知道在这个曲面上各点处的高斯曲率, 如果他们知道如何测量曲线的长度. 令人惊讶的是, 这足以衡量曲面在 \mathbb{R}^3 中的弯曲, 假设 U 中的二维居民捉摸不透 \mathbb{R}^3 .

高斯的定理在我们讨论了高斯曲率的几个仅仅依赖于内蕴的度量的集合特征之后也许就不会那么令人惊讶了. 为此, 我们先研究定理5.26给出的 K 的关于 G 的那个表达式, 用它来证明下面的结论:

Proposition 5.28 (几何扩张). 设 S 为正则曲面, $p \in S$. 记在 p 处的法向极坐标的第一基本形式为 $\mathcal{F}_1 = dr^2 + Gd\theta^2$. 固定 $\theta_0 \in (0, 2\pi)$, 对任意的 $r \in (0, \epsilon)$, 定义

$$g(r) = \sqrt{G(r, \theta_0)} = |\sigma_\theta(r, \theta_0)|.$$

将 g 的定义域进行扩张, 把 $r = 0$ 包含进去, 定义 $g(0) = 0$. 这样, g 在 $[0, \epsilon]$ 上就是光滑的, 其在 $r = 0$ 处的三阶泰勒多项式为

$$g(r) \approx r - \frac{r^3}{6} K(p).$$

换句话说, $g'(0) = 1, g''(0) = 0, g'''(0) = -K(p)$.

Proof. 只要把 σ 看做是一个函数复合, g 能够光滑扩张的断言就是合理的, 因为对于 $r \in (0, \epsilon)$, 链式法则给出

$$\begin{aligned} g(r) &= |\sigma_\theta(r, \theta_0)| = |\mathrm{d}\sigma_{(r, \theta_0)}(0, 1)| \\ &= |\mathrm{d}\mu_{(r \cos \theta_0, r \sin \theta_0)}(\mathrm{d}f_{(r, \theta_0)}(0, 1))| \\ &= |\mathrm{d}\mu_{(r \cos \theta_0, r \sin \theta_0)}(-r \sin \theta_0, r \cos \theta_0)| \\ &= r |\mathrm{d}\mu_{(r \cos \theta_0, r \sin \theta_0)}(-\sin \theta_0, \cos \theta_0)|. \end{aligned}$$

这个 g 的表达式是在区域 $r \in (-\epsilon, \epsilon)$ 上光滑的. 我们也会从 $g'(0) = 1$ 的事实中了解到这一点, 因为 $\mathrm{d}\mu_{(0,0)}$ 是单位映射.

定义 $K(r) = K(r, \theta_0)$, 则定理5.26说明

$$(5.5) \quad g''(r) = -g(r)K(r)$$

对任意的 $r \in (0, \epsilon)$ 成立, 因此, 由连续性, 对 $r = 0$ 也成立. 特别地,

$$g''(0) = -g(0)K(0) = 0.$$

最终, 对式(5.5)求微分我们就能够得到

$$g'''(0) = -g'(0)K(0) - g(0)K'(0) = -g'(0)K(0) - 0 = -K(p).$$

□

在命题5.28中, r 表示沿测地线 $\gamma_0(r) = \sigma(\theta_0, r)$ 的距离. $g(r)$ 的增长速度可以直观地表示其他的通过 p 的测地线 (σ 的 r 参数化的曲线, 角度 θ 取一个与 θ_0 很接近的固定值) 从

γ_0 向周围扩张的速度有多快. 如果两个朋友沿着过 p 点的两条单位速测地线 (它们之间在 p 点处形成一个小角度 $\Delta\theta$) 前进, 那么它们的路径能够多快地分离? 他们在很短的时间 r 后之间的距离大约是

$$(5.6) \quad \text{距离} \approx (2\pi\Delta\theta)g(r).$$

g 的一阶的泰勒多项式为 $g(r) \approx r$, 所以其路径的分离速度会和在平面上时的情形一样. 这很重要, 因为 S 的一阶估计就是通过切平面完成的. 但是 g 的三阶泰勒多项式就会涉及 S 的曲率了. 若 $K(p) > 0$, 那么它们之间的路径初始时会比在平面上分离的慢一些. 若 $K(p) < 0$, 那就会快一些.

注意到 g 的三阶的泰勒多项式仅仅取决于 $K(p)$ (尽管更高阶的多项式也许会依赖于 θ_0). 因此, 三阶导数的预测结果是, 每个方向上的成对邻近测地线以近似相同的初始速率分开. 如果 360 个朋友从 p 点沿着依次相差 $\Delta\theta = 1^\circ$ 的单位速测地线前进, 那么他们会大致地会在短小时后处在他们的位置形成的一个圆上. 这样的圆被称为距离圆:

Definition 5.29. 正则曲面 S 上关于一点 p 的半径 $r > 0$ 的距离圆是 $C_r(p) = \{q \in S \mid d(p, q) = r\}$.

对于足够小的 $r > 0$, 注意到 $C_r(p)$ 是 p 点处的法向极坐标中的具有固定 r 值的 θ 参数化的曲线的轨迹的闭包. 如果阐明“距离”事实上意味着“ $C_r(p)$ 中的距离”那么式(5.6)所说的事实会更准确.

一个有趣的问题是, 距离圆的周长会如何增长? 无穷小量的答案包含在下面的命题里面:

Proposition 5.30 (距离圆的增长速度). 在正则曲面 S 中的每一点 $p, r = 0$ 处函数 $r \mapsto \text{周长}(C_r(p))$ 的三阶泰勒多项式是

$$\text{周长}(C_r(p)) \approx 2\pi r - \frac{\pi}{3} r^3 K(p).$$

Proof. 命题5.28说明对每个固定值 $\theta_0, g(r) = r - \frac{r^3}{6} K(p) + \epsilon(r, \theta_0)$, 其中 $\epsilon(r, \theta_0)$ 为满足 $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\epsilon(r, \theta_0)}{r^3} = 0$ 的误差项. 因此,

$$\begin{aligned} \text{周长}(C_r(p)) &= \int_0^{2\pi} |\sigma_\theta(r, \theta)| d\theta = \int_0^{2\pi} \left(r - \frac{r^3}{6} K(p) + \epsilon(r, \theta) \right) d\theta \\ &= 2\pi \left(r - \frac{r^3}{6} K(p) \right) + \int_0^{2\pi} \epsilon(r, \theta) d\theta \approx 2\pi \left(r - \frac{r^3}{6} K(p) \right), \end{aligned}$$

因为 $r \mapsto \int_0^{2\pi} \epsilon(r, \theta) d\theta$ 的在 $r = 0$ 处的前三阶导数为 0. □

一阶泰勒多项式是 周长($C_r(p)$) $\approx 2\pi r$, 这说明 S 中距离圆的周长的增长和在平面中的情形是相同的. 但是三阶泰勒多项式涉及到 S 的曲率. 若 $K(p) > 0$, 那么半径较小的距离圆的周长会比平面中半径相同的圆略短. 若 $K(p) < 0$, 则会略长.

求解 $K(p)$ 产生了下面的高斯曲率的结合特征:

$$(5.7) \quad K(p) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{3}{\pi} \frac{2\pi r - \text{周长}(C_r(p))}{r^3}.$$

这个特征仅仅取决于内蕴的度量和构造 (包括测地线), 所以高斯绝妙定理将会变得很明显, 如果使用这个公式定义高斯曲率. 注意, 分子等于 $C_r(p)$ 的周长和平面上的等半径的圆的周长的差.

我们希望接下来对上面的结果在常值高斯曲率的曲面上的情形进行解释. 这是个计算自然的曲面分类, 部分是因为其他的曲面都能够通过和这个曲面进行比较来理解. 例如, 在一点 p 的一个足够小的邻域, $K(p)$ 大致是个常值, 那么测地线从 p 分离时会大致和高斯曲率为常数的曲面情况接近. K 为常数时, 我们能做到的不仅仅是求解 $g(r)$ 的泰勒多项式; 我们能够求解等式(5.5)来获得 $g(r)$ 的显式表达式:

Lemma 5.31. 若 $g: [0, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ 为满足下列条件的光滑函数:

$$g(0) = 0, \quad g'(0) = 1, \quad \forall t \in [0, \epsilon), g''(t) = -\lambda \cdot g(t),$$

其中 $\lambda \in \mathbb{R}$ 为常数, 则

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin(\sqrt{\lambda}t) & \text{若 } \lambda > 0, \\ t & \text{若 } \lambda = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{|\lambda|}} \sinh(\sqrt{|\lambda|}t) & \text{若 } \lambda < 0. \end{cases}$$

我们省略了证明, 这需要用到一些微分方程方面的知识.

因此, 在定理5.26中若 S 具有常值曲率 $K = \lambda$, 那么 G 仅仅取决于 r (而与 θ 无关) 且由 λ 完全决定. 这将允许我们证明下面的事实:

Proposition 5.32 (等曲率曲面的同质性). 若 S 和 \tilde{S} 是具有相同的常值高斯曲率 $K = \lambda$ 的正则曲面, 那么它们是局部等距同构的 (*locally isometric*); 也就是说, 对每个 $p \in S$ 和 $\tilde{p} \in \tilde{S}$, 存在 S 中 p 的邻域 \mathcal{O} 和 \tilde{S} 中 \tilde{p} 的邻域 $\tilde{\mathcal{O}}$ 使得 \mathcal{O} 和 $\tilde{\mathcal{O}}$ 是等距同构的.

Proof. 设 $p \in S, \tilde{p} \in \tilde{S}$. 设 $\sigma: U \rightarrow V \subset S, \tilde{\sigma}: U \rightarrow \tilde{V} \subset \tilde{S}$ 分别是 S 在 p 处和 \tilde{S} 在 \tilde{p} 处的法向极坐标的曲面切片. 注意, σ 和 $\tilde{\sigma}$ 的定义域是相同的, 只要找到一个足够小的半径使得这

个半径下相应性质在两个点处都是成立的. 它们的第一基本形式为 $\mathcal{F}_1 = dr^2 + Gd\theta^2, \tilde{\mathcal{F}}_1 = dr^2 + \tilde{G}d\theta^2$. 引理5.31给出了 G 和 \tilde{G} 的相同的解. 事实上, 特别地, 我们有 $G = \tilde{G}$.

考虑微分同胚 $f = \tilde{\sigma} \circ \sigma^{-1} : V \rightarrow \tilde{V}$. 由于 $\tilde{\sigma} = f \circ \sigma$, 习题中有结论可以得出 f 是个等距同构. 由于 V 和 \tilde{V} 定义为正则极坐标的曲面切片的像, 它们事实上不一定是 p 和 \tilde{p} 的邻域, 但是我们可以直接地将 f 扩展到相应的法坐标曲面切片的像 \mathcal{O} 和 $\tilde{\mathcal{O}}$ 上. \square

我们可以从上面的证明中看到事实上在 \mathcal{O} 和 $\tilde{\mathcal{O}}$ 之间有很多的等距同构, 因为 σ 和 $\tilde{\sigma}$ 定义所依赖的规范正交基 $\{e_1, e_2\} \subset T_p S$ 和 $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2\} \subset T_{\tilde{p}} \tilde{S}$ 是任意的. 它们的任意性使得在上面的证明中甚至没有提及这两个规范正交基. 如果我们假设 $h : T_p S \rightarrow T_{\tilde{p}} \tilde{S}$ 为把 e_1 映到 \tilde{e}_1, e_2 映到 \tilde{e}_2 的线性变换, 则在上面的证明中构造的等距同构 f 的另一个描述是 $f = (\exp_{\tilde{p}}) \circ h \circ (\exp_p)^{-1}$, 就像在下图中所展现的那样: 注意到 $h = df_p$. 因此, 我们能够构造

$$\begin{array}{ccc} T_p S & \xrightarrow{h=df_p} & T_{\tilde{p}} \tilde{S} \\ \exp_p \downarrow & & \downarrow \exp_{\tilde{p}} \\ \mathcal{O} \subset S & \xrightarrow{f} & \tilde{\mathcal{O}} \subset \tilde{S} \end{array}$$

造等距同构 $f : \mathcal{O} \rightarrow \tilde{\mathcal{O}}$ 使得 $df_p : T_p S \rightarrow T_{\tilde{p}} \tilde{S}$ 变为任意的正交线性变换.

命题5.32说明柱面是与平面局部等距同构的, 这是我们在例3.63中就知道的事实. 更令人惊讶的是, 这个命题也能够说明伪球面 (见例4.20) 是与球面 S^2 局部等距同构的, 尽管这并不明显.

5.4 完备曲面

在之前的几章的关于一个一般的正则曲面 S 的所有的定义和定理都同样适用于 S 中的开集 $V \subset S$ (因为这样的一个集合 V 本身就是个正则曲面). 这样的结果被归到局部微分几何里面. 在我们把我们的关注点移向全局微分几何的过程中, 我们希望我们的曲面是完备的, 我们现在就会给出定义.

Definition 5.33. 设 S 为连通正则曲面, 序列 S 中的 $\{p_1, p_2, \dots\}$ 被称为是 d -柯西的 (d -Cauchy) 如果对于任意的 $\epsilon > 0$, 存在整数 N 使得对任意的 $i, j > N$ 都有 $d(p_i, p_j) < \epsilon$.

这和附录中柯西序列的定义是相同的, 但是其中 \mathbb{R}^n 中的距离函数 “dist” 被替换为 S 上的内蕴距离函数 d , 这是在定义 5.9 中定义的. 因为 $d(p_i, p_j) \geq \text{dist}(p_i - p_j)$, 每个 S 上的 d -柯西序列都是柯西序列.

Definition and Proposition 5.34. 设 S 为连通正则曲面, 下面的几条是 S 是完备的等价条件:

- (1) S 中的每个 d -柯西列都收敛到 S 中的一点.
- (2) 每个测地线 $\gamma: I \rightarrow S$ 都能够被扩展为定义域 \mathbb{R} 上的测地线.
- (3) 对于每个 $p \in S, \exp_p$ 的定义域为整个 $T_p S$.

Proof.

$(1) \implies (2)$ (反证法) 假设 (1) 为真, 而 (2) 为假. 如果单位速测地线 γ 是在具有形式 $(a, b]$ 的区间上定义的, 那么它可以拓展到 $(a, b + \epsilon)$, 其中 ϵ 是 $\gamma(b)$ 的法邻域的半径. 因此, 仅有的 (2) 为假的可能是存在某一条单位速的测地线 γ , 它定义在 (a, b) 上但是不可以拓展到 b . 在这种情况下, 设 $\{t_1, t_2, \dots\}$ 为 (a, b) 中收敛到 b 的一个序列. 由于序列是收敛的, 所以它是个柯西列. 由于 $d(\gamma(t_i), \gamma(t_j)) \leq |t_i - t_j|$, 序列 $\{\gamma(t_1), \gamma(t_2), \dots\}$ 也是 d -柯西列, 所以由我们的假设, 它收敛到一点 $p \in S$. 在 \mathcal{O} 之内, 注意 γ 是边界点为 p 的测地线, 所以它必然和经过 p 的一条测地线是重合的, 因此在 p 周围必然是可扩展的, 而这与我们的假设矛盾.

$(2) \iff (3)$ 显然.

$(3) \implies (2)$ 设 $\{p_1, p_2, \dots\}$ 为 S 中的 d -柯西列. 存在整数 N 使得对所有的 $i > N$ 都有 $d(p_i, p_N) \leq 1$. 换句话说, 这个序列的整个 “末尾” 都被包含在球

$$B = \{q \in S | d(q, p_N) \leq 1\}$$

里面. 利用假设 (3), B 是紧集, 因为这是连续函数 \exp_{p_N} 在紧集 $\{v \in T_{p_N} S \mid |v| \leq 1\}$ 下的像. 每个紧集中的序列都有子列收敛到该集合中的一个点. 具有收敛子列的柯西列是收敛的. 因此, 这个序列收敛到 B 中的一个点. \square

穿孔平面 (例 5.5) 不是完备的. 任意曲面上任意一点的足够小的法邻域都不是完备的. 问题在于这些例子中缺失了极限点, 这引得人们思考曲面的“完备性”和集合的“闭性”之间的关系. 事实上, 我们有下列结论:

Proposition 5.35. 每个连通的正则闭曲面 S 都是完备的. 特别地, 每个紧连通正则曲面都是完备的.

Proof. 设 $\{p_1, p_2, \dots\}$ 为 S 中的 d -柯西序列. 就像我们在前面提到的, 这个序列是柯西列, 所以它收敛到一点 $p \in \mathbb{R}^3$. 因为 S 是闭的, 我们有 $p \in S$. \square

完备但是不是闭的曲面是存在的. 我们现在就能够举出一个一般化柱面的例子. 沿着螺线逐渐逼近于圆的圆柱面就是这样的曲面, 其显式的表达式可以写为:

$$S = \{((1 + e^{-s}) \cos s, (1 + e^{-s}) \sin s, t) \mid s, t \in \mathbb{R}\}.$$

在这个曲面上构造出是柯西列但不是 d -柯西列的一系列点是有可能的. 这样的序列说明这个曲面不是闭的 (它不会收敛到某个极限点, 或者这个极限点并不在这个曲面上), 但是它和完备性不冲突. 尽管有这样的奇形怪状的例子, “完备”可以粗略地看做是“闭”的同义词. 事实上, “完备性”基于“ d -柯西列”的定义是最自然的量化“包含所有的极限点”的内蕴的方法——也就是在曲面上的二维的对周围的 \mathbb{R}^3 或是 \mathbb{R}^3 中的距离函数毫无感知但是知道曲面的第一基本形式的小居民也能够理解的方法.

关于完备曲面的最重要的结论位于下面的定理之中:

Theorem 5.36 (Hopf-Rinow 定理). 若 S 为完备连通正则曲面, 则在 S 中任意给定两点之间都存在最小化的测地线段.

Proof. 设 $p, q \in S$, 定义 $r = d(p, q)$. 设 $C = C_\epsilon(p)$ 为关于 p 的距离圆 (见定义 5.29), 其半径 ϵ 比 r 更小, 且足够小到保证 C 被包含在 p 的一个法邻域内. 注意到 C 是紧的, 因为 C 是 $T_p S$ 中的一个圆在连续函数 \exp_p 下的像.“到 q 的距离”函数是在 S 上连续的, 所以它在 C 上的限制在某一点 x 处取得最小值; 也就是说, x 是 C 上最接近 q 的那一点. 设 $v \in T_p S$ 为从 p 到 x 的最小化测地线的单位长度切向量. 因此, 定义为 $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ 的单位速测地线 $\gamma: [0, \infty) \rightarrow S$ 满足 $\gamma(0) = p, \gamma(\epsilon) = x$. 我们的目标是证明 $\gamma(r) = q$, 因此 γ 在 $[0, r]$ 上的限制是从 p 到 q 的最小化测地线.

为此, 我们的思路是大致证明沿着 γ 前进时会稳定地接近于 q ; 沿着 γ 的每一步都会更加接近于 q . 在这里, 我们通过考虑在这个稳定接近的过程中的时间集合来精确地描述这一

点:

$$U = \{t \in [\epsilon, r] | d(\gamma(t), q) = r - t\}.$$

我们只需要证明 $U = [\epsilon, r]$, 因为这足以说明 $\gamma(r) = q$, 就像我们所期望的那样. 我们将会通过说明 $\epsilon \in U$ (这说明 U 非空) 以及 U 在 $[\epsilon, r]$ 上既开又闭来达成这一点.

U 在 $[\epsilon, r]$ 上是闭集的断言可以直接得到, 我们把他留给读者. $\epsilon \in U$ 的断言可以通过 S 中每对 p 和 q 两点之间的曲线都是与 C 相交的这个结论得到, 所以

$$r = d(p, q) = \inf \{d(p, y) + d(y, q) | y \in C\} = \inf \{\epsilon + d(y, q) | y \in C\} = \epsilon + d(x, q).$$

我们还需要证明 U 在 $[\epsilon, r]$ 中是开集. 为此, 假设 $t_0 \in U, t_0 < r$. 设 $\tilde{C} = C_\delta(\gamma(t_0))$ 为关于 $\gamma(t_0)$ 的距离圆, 其半径 δ 比 $r - t_0$ 更小, 且小到足够保证 \tilde{C} 包含在 $\gamma(t)$ 的法邻域内. 就像之前那样, 紧性说明 \tilde{C} 中的某点 y 是和 q 最接近的, 然后我们宣称 $y = \gamma(t_0 + \delta)$. 为使得这个宣称更加合理, 我们假设 $y \neq \gamma(t_0 + \delta)$. 我们之前用来证明 $\epsilon \in U$ 的论证在这里也是适用的, 能够用来说明 $d(y, q) = r - (t_0 + \delta)$. 三角不等式给出

$$d(p, y) \geq d(p, q) - d(y, q) = r - r - (t_0 + \delta) = t_0 + \delta.$$

在 p 和 y 之间的距离因此能够由从 p 到 y 的不光滑的曲线得到, 也就是那条先沿着 γ 从 p 走到 $\gamma(t_0)$, 再沿着最小化测地线从 $\gamma(t_0)$ 到 y 的曲线. 这和最小化曲线的正则性矛盾. 因此, $y = \gamma(t_0 + \delta)$ 到 q 的距离为 $r - (t_0 + \delta)$. 接着我们就能够得到 $t_0 + \delta \in U$. 在 ϵ 和 U 中的元素之间的每个数都是 U 中的元素, 所以这就能够结束我们的证明——我们已经得到了 U 在 $[\epsilon, r]$ 中是开集. \square

5.5 平行变换和协变导数

平面 \mathbb{R}^2 是一个正则曲面的原型, 但是在平面上依然存在一些度量和构造到目前为止我们还不知道如何把它扩张到一般的曲面上. 例如, 我们能够沿着 \mathbb{R}^2 中的每一个正则曲线对 \mathbb{R}^2 中每个向量场进行微分. 这里给出了我们是如何把这个概念一般化到任意一个曲面上的.

Definition 5.37. 设 S 为正则曲面, 令 $\gamma: I \rightarrow S$ 为 S 中的正则曲线. 设 v 为沿着 γ 的向量场 (*a vector field along γ*), 指的是光滑函数 $v: I \rightarrow \mathbb{R}^3$, 使得 $v(t) \in T_{\gamma(t)}S$ 对任意的 $t \in I$ 成立.

- (1) v 的协变导数 (*covariant derivative*) (记为 $\frac{Dv}{dt}$, $\frac{D}{dt}v$, 或是 v°) 是沿着 γ 的向量场, 满足于对任意的 $t_0 \in I$,

$$v^\circ(t_0) = \left. \frac{Dv}{dt} \right|_{t=t_0} = v'(t_0) \text{ 到 } T_{\gamma(t_0)}S \text{ 的投影.}$$

- (2) v 称为平行的若 $v^\circ(t_0) = \mathbf{0}$ 对所有的 $t_0 \in I$ 成立.

术语“投影”就是第1.2节定义的那个. 注意到通常的 v 的导数记为 $\frac{dv}{dt}$ 或 v' (见定义1.6), 但是 v 的协变导数记为 $\frac{Dv}{dt}$ 或 v° . 后者并不是标准记号, 但是我们会使用这个记号来避免“ $\left. \frac{Dv}{dt} \right|_{t=t_0}$ ”的麻烦写法.

Example 5.38 ($S = \mathbb{R}^2$). 沿着 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ 的向量场的意思是任意的光滑函数 $v: I \rightarrow \mathbb{R}^2$. 在这样的情况下, $\frac{Dv}{dt} = \frac{dv}{dt}$; 也就是说, 协变导数就是正常的导数. 因此, v 是平行的当且仅当它是常数.

这个例子说明我们对于任意曲面中沿着某一条曲线的平行向量场的定义产生了沿着 \mathbb{R}^2 上的一条曲线的常值向量场. 居住在一个一般的曲面上的相信他们的世界是平直的短视的小居民会相信, 一条平行的向量场会是常值, 因为它仅会在他们所不可知的曲面法向有所偏转.

Lemma 5.39 (代数性质). 设 S 为正则曲面, $\gamma: I \rightarrow S$ 为 S 中的正则曲线. 设 v 和 w 为沿 γ 的向量场, 设 $a, b: I \rightarrow \mathbb{R}$ 为光滑函数.

- (1) $(v + w)^\circ = v^\circ + w^\circ$.

特别地, 如果 v 和 w 是平行的, 那么 $v + w$ 也是平行的.

- (2) $(av)^\circ = a'(v) + av^\circ$.

特别地, 若 v 是平行的, 那么 av 是平行的当且仅当 a 是常值.

$$(3) \quad \frac{d}{dt} \langle v, w \rangle = \langle v^\mathcal{O}, w \rangle + \langle v, w^\mathcal{O} \rangle.$$

特别地, 平行的向量场具有常值范数, 同时, 两个平行向量场之间所成的角度是常值.

(4) (重参数化)(*Reparametrization*) 若 $\phi: \tilde{I} \rightarrow I$ 是光滑的, 那么 $\tilde{v} = v \circ \phi$ 是沿着 $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \phi$ 的向量场, 且对任意的 $t \in \tilde{I}$ 都有 $\tilde{v}^\mathcal{O}(t) = \phi'(t)v^\mathcal{O}(\phi(t))$.

特别地, \tilde{v} 是沿着 $\tilde{\gamma}$ 平行的, 当且仅当 v 沿着 γ 是平行的.

Proof. 所有的结论都可以从通常意义下的导数的性质直接推出. 蓝色的断言来源于对向量场平行的特殊情况的考虑. \square

Example 5.40. 设 σ 为例3.24中给出的 S^2 的球面坐标曲面切片. 对一固定的 $\phi_0 \in (0, \pi)$, 设 γ 为 ϕ_0 纬线的单位速参数化; 也就是说, $\gamma(t) = \sigma(\frac{t}{\delta}, \phi_0)$, $t \in [0, 2\pi\delta]$, 其中 $\delta = \sin \phi_0$ 是使 γ 为单位速的参数. 设 v 为 σ_ϕ 在 γ 上的限制, 也就是说 $v(t) = \sigma_\phi(\frac{t}{\delta}, \phi_0)$. 因为 v 是单位长的, 所以引理5.39(3) 说明 $v^\mathcal{O} \perp v$, 所以 $v^\mathcal{O}$ 必然是 γ' 的倍数. 可以计算 $v^\mathcal{O} = (-\cot \phi_0)\gamma'$. 特别地, v 是平行的仅当 $\phi_0 = \frac{\pi}{2}$. 对于 ϕ_0 的其他值, 我们会决定沿着 γ 的平行向量场, 在我们先证明一般情形下的存在性之后.

Theorem 5.41 (平行向量场的存在性和唯一性). 设 S 为正则曲面, $\gamma: I \rightarrow S$ 为正则曲线. 设 $t_0 \in I$. 对任意的 $w_0 \in T_{\gamma(t_0)}S$, 沿着 γ 存在唯一的平行向量场 w 满足初始条件 $w(t_0) = w_0$.

Proof. 因为引理5.39, 我们能够不失一般性地假设 γ 是单位速的, v_0 是单位长的. 为简单起见, 我们也会从现在开始假设 S 是定向的, 设 κ_g 为 γ 的测地曲率函数. 设 $v = \gamma'$, 这是个沿着 γ 的单位长向量场. 注意到 $n = R_{90} \circ v$ 是另外一个沿着 γ 的单位长的向量场, 其中 R_{90} 表示关于相应的定向逆时针旋转 90° .

我们首先构造下面的类似于 Frenet 方程的等式:

$$(5.8) \quad \boxed{v^\mathcal{O} = \kappa_g n, \quad n^\mathcal{O} = -\kappa_g v.}$$

左边的等式可以从式(4.8)中给出的 κ_g 的原始定义里直接得到. 为证明右边的等式成立, 因为 n 是单位长的, 所以它的协变导数是和它自身正交的, 因此是 v 的倍数, 此倍数的系数是

$$\langle n^\mathcal{O}, v \rangle = \langle n, v \rangle' - \langle n, v^\mathcal{O} \rangle = 0 - \kappa_g.$$

我们现在希望能够构造一个沿着 γ 的平行向量场 w 满足 $w(t_0) = w_0$. 这样的向量场一定是单位长的, 所以最自然的策略就是找到光滑函数 $\theta: I \rightarrow \mathbb{R}$ 使得下式成立:

$$w(t) = (\cos \theta(t))v(t) + (\sin \theta(t))n(t).$$

式(5.8)和引理5.39结合起来我们就能够得到

$$w^{\mathcal{O}}(t) = -(\sin \theta(t))(\theta'(t) + \kappa_g(t))v(t) + (\cos \theta(t))(\theta'(t) + \kappa_g(t))n(t).$$

因此, w 是平行的当且仅当 $\theta' = -\kappa_g$. 一个解是

$$\theta(t) = \theta_0 - \int_{t_0}^t \kappa_g(s) ds,$$

其中 $\theta_0 \in \mathbb{R}$ 的值被特殊选定使得 $w(t_0) = w_0$.

这个解的唯一性能够由上面的构造看出来, 但是我们会不会那样做. 我们会像下面这样证明它的唯一性. 设 w 为上面所构造出的满足 $w(t_0) = w_0$ 的沿着 γ 的平行向量场. 注意到 $R_{90} \circ w$ 也是沿着 γ 的平行向量场 (通过给 θ 函数加 $\frac{\pi}{2}$ 的角度得到). 任意的其他的沿着 γ 的平行向量场都会具有形式 $aw + b(R_{90} \circ w)$, 其中 $a, b: I \rightarrow \mathbb{R}$ 是光滑函数. 引理5.39说明这是平行的当且仅当 a 和 b 是常值函数. 解因此是唯一的.

S 不是可定向曲面的情形只需要通过对 γ 被单个曲面切片覆盖的部分应用上述论证进行处理就行 (当然得引入局部定向). 细节留作练习留给读者. \square

在上面的证明中, 函数 θ 被描述为关于 γ' 的平行向量场. 但是我们会定义一个 γ 的角度函数, 指的就是这个函数的负值, 但是做的事情是相反的: 它通过平行向量场来描述 γ' , 而这通常是更加方便的. 在引入这个小小的改变之后, 证明的关键点可以总结如下:

Definition and Proposition 5.42. 设 S 为定向正则曲面, $\gamma: I \rightarrow S$ 为单位速曲线, $\kappa_g: I \rightarrow \mathbb{R}$ 是测地曲率函数. 设 $\theta: I \rightarrow \mathbb{R}$ 为 κ_g 的反导数, 则 θ 被称为 γ 的**角度函数 (angle function)**. 这个函数在相差一个常数的情况下是唯一的, 具有下面的性质: 对任意的沿着 γ 的单位长平行向量场 w , 存在 $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ 使得

$$\gamma'(t) = \cos(\theta(t) + \theta_0)w(t) + \sin(\theta(t) + \theta_0)R_{90}(w(t))$$

对任意的 $t \in I$ 成立.

$\kappa_g = \theta'$ 的事实的意思是: γ 的测地曲率衡量了它的速度方向改变的快慢, 这个量是关于沿着 γ 的平行向量场估计的.

Example 5.43. 若 γ 是命题5.42的测地线, 则 $\kappa_g = 0$, 所以 θ 是个常值函数. 也就是说, 沿着 γ 的单位长度的向量场是平行的当且仅当它和 γ' 维持常值的角度. 特别地, γ' 是平行的, 这明显可以直接从测地线的定义导出.

Example 5.44 ($S = \mathbb{R}^2$). 沿着 \mathbb{R}^2 中的任一曲线 γ , 向量场是平行的当且仅当它是常值的. 如果在命题5.42中附加常值 (additive constant) 能够选定使得与平行向量场 $w(t) = (1, 0)$ 的相关的 $\theta_0 = 0$, 那么 θ 就是1.6节中定义的角度函数. γ (关于定向 $N = (0, 0, 1)$ 的) 测地曲率等于 γ 的带符号曲率函数, 所以命题5.42能够产生1.6节中的所有结果.

Definition 5.45. 设 S 为正则曲面, $\gamma: [a, b] \rightarrow S$ 为 S 中的正则曲线.

- (1) 沿着 γ 的平行变换 (*Parallel transport*) 是函数 $P_\gamma: T_{\gamma(a)}S \rightarrow T_{\gamma(b)}S$, 它将每个 $w_0 \in T_{\gamma(a)}S$ 映射到沿着 γ 的在 $t = a$ 时等于 w_0 的平行向量场 γ 在 $t = b$ 时的值.
- (2) 若 γ 是闭的 (也就是 $\gamma(a) = \gamma(b) = p$), 则 $P_\gamma: T_pS \rightarrow T_pS$ 称为 γ 周围的完整 (*holonomy*, 下面会直接使用原文单词而不作翻译).
- (3) 若 S 是定向的, γ 是单位速的, 则沿着 γ 的 $\Delta\theta = \theta(b) - \theta(a)$, 其中 θ 是 γ 的角度函数.

由引理5.39, 沿着 γ 的平行变换是从 $T_{\gamma(a)}S$ 到 $T_{\gamma(b)}S$ 的线性变换, 在保定向的 γ 的重参数化下是不变的. 当 S 是定向的, γ 是单位速的的时候, P_γ 等于逆时针转动 $\Delta\theta$ 的角度, 但是这仅仅在通过基 $\{\gamma', R_{90}(\gamma')\}$ 将两个切平面与 \mathbb{R}^2 对应起来之后才有意义. 若除此之外 γ 还是闭的, 那么下面的结论不需要任何特别的对应就能够成立:

Proposition 5.46. 若 S 是定向的正则曲面, $\gamma: [a, b] \rightarrow S$ 为 S 中的单位速闭曲线, 则在 γ 周围的 holonomy 等价于将 $T_{\gamma(a)}S$ 顺时针旋转 $\Delta\theta$ (沿着 γ 的角度变化).

Proof. 因为基 $\{\gamma'(t), R_{90}(\gamma'(t))\}$ 在 $t = a$ 和 $t = b$ 处是相同的, 所以这个断言可以由命题5.42推出. \square

但是, 注意到 $\Delta\theta$ 也许会比 2π 更大, 所以它会比 P_γ 包含更多的信息. 例如, 当 $S = \mathbb{R}^2$, γ 是个闭合回路的时候, P_γ 是恒同映射, 同时 $\Delta\theta$ 等于 γ 的转动参量的 2π 倍. 在这个例子中, P_γ 并没有包含任何信息, 但是 $\Delta\theta$ 包含了旋转参量的信息.

下面的例子展示了在一般的定向曲面中沿着闭合回路的角度变化也许不会是 2π 的整数倍, 所以旋转参量的记法不会扩展到这里来.

Example 5.47 (沿着球面的纬线的平行变换). 就像在例5.40中的那样, 设 γ 为 S^2 的 ϕ_0 纬度的曲线的单位速重参数化. 由练习中的结论, γ 的测地曲率为常值 $\kappa_g = \cot \phi_0$ (关于 S^2 的向外指向的定向). γ 的长度是 $l = 2\pi \sin \phi_0$. 因此, 沿着 γ 的角度变化等于

$$(5.9) \quad \Delta\theta = \int_0^l \theta'(s) ds = \int_0^l \kappa_g(s) ds = (2\pi \sin \phi_0) \cot \phi_0 = 2\pi \cos \phi_0.$$

在纬度 $\phi_0 = 90^\circ$ 时是条测地线 (赤道), 所以它具有 $\Delta\theta = 0$ 的角度变化. 在另外的极端情形下, 若 $\phi_0 \approx 0$, 则 $\Delta\theta \approx 360^\circ$. 北极点的足够小的邻域在性质上接近于 \mathbb{R}^2 , 所以环绕极点

的足够小的回路上的平行场就接近于常值, Hopf's Umlaufsatz 是大致有效的. 在 $\phi_0 \approx 0^\circ$ 和 $\phi_0 \approx 90^\circ$ 之间的情形位于两极端情形之间.

$\phi_0 = 41^\circ$ 的纬线具有的角度差为 $\Delta\theta = 272^\circ$, 这条纬线经过了巴黎, 1851 年有一项著名的实验在这里进行:

Example 5.48 (傅科摆 (Foucault's pendulum)). 1851 年, 让·傅科 (Jean Foucault) 利用一个用长绳吊在巴黎先贤祠 (the Pantheon in Paris) 的穹顶上的用很重的铁球制成的摆锤进行了一次著名的展览; 这个展览说明了地球的自转. 由地球自转产生的科里奥利力使得傅科摆的摆动平面逐渐旋转, 速度取决于摆锤所处的纬度. 在巴黎, 摆锤的摆动平面每小时旋转约 11° , 或是每天 272° , 和上面给出的数字是相同的, 因为地球自转中摆动平面的转动和初始的摆动平面沿着纬线的平行变换是相同的.

网络上很容易找到科里奥利力的物理学解释以及这个现象的动画模拟. 我们在这里仅仅会列出一个很自然的讨论, 是关于为何摆锤的摆动平面会沿着平行向量场转动. 若 ϕ_0 非常小, 那么摆锤就会位于北极点附近, 则连续性就会要求它的行为和它位于极点时的行为类似. 处于极点时, 位于地球上的观察者会观察到它的摆动平面每天顺时针旋转 360° . 类似地, 在南极点处的摆锤的摆动平面会每天逆时针旋转 360° . 2001 年, 在南极点确实建立了这么样的一个摆锤来验证这一点. 在赤道上, 从南到北旋转的摆锤会维持它从南到北的旋转. 这些行为都和式 (5.9) 的 $\phi_0 = 0^\circ, \phi_0 = 90^\circ, \phi_0 = 180^\circ$ 的情形是一致的. 所以或许这个等式能够正确地描述在中间纬度处的摆锤的移动似乎就不那么令人惊讶了.

傅科摆的再现使得科学博物馆的参观者每天都能够“看到”旋转中的地球的纬线上的平行向量场. 或者更好地, 存在使我们能够看到任意曲面上的任意曲线上的平行向量场的机械设备, 也就是第 1.6 节的指南车. 回忆, 它的齿轮结构能够使得雕像的 (相对与车子的) 顺时针角速度和右轮与左轮的差成比例. 我们会在第 8 节证明如果指南车在任意的定向曲面上沿着某些曲线行驶, 且指南车和曲面比起来足够小, 那么雕像就会大致指向沿着曲线的平行向量场的方向. 换句话说, 雕像的总体上相对车子的旋转就是曲线的角度函数. 例如, 如果车子从巴黎沿着纬线向东行驶, 那么它的右轮会比左轮旋转得更快, 使得车子的驾驶者会观察到雕像沿途大约旋转了 272° , 和上面所说的数字相同; 我们会在第 8 节进行证明. 目前, 只需注意到指南车沿着靠北边的纬线一定会以某种方式取得 ϕ_0 很小 (指南车以很小的圈子绕北极点前行, 由 Hopf's Umlaufsatz, 雕像会在一圈内顺时针旋转 360°) 和 $\phi_0 = \frac{\pi}{2}$ (指南车沿着赤道前进, 它的两个轮子速度相同, 雕像不会旋转) 两种极端情况直接的折中情况.

我们在本节最后证明由等距同构保留的关键结构:

Proposition 5.49 (协变导数是内蕴的). 设 $f: S \rightarrow \tilde{S}$ 为正则曲面之间的等距同构. 设 $\gamma: I \rightarrow S$ 为 S 中的正则曲线, $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$. 设 v 为 S 中沿着 γ 的向量场, 设 \tilde{v} 为相应的 \tilde{S} 中沿着 $\tilde{\gamma}$ 的向量场, 定义为 $\forall t \in I, \tilde{v}(t) = df_{\gamma(t)}(v(t))$.

1. 对任意的 $t \in I, \tilde{v}^\mathcal{O}(t) = df_{\gamma(t)}(v^\mathcal{O}(t))$.
2. v 沿着 γ 是平行的当且仅当 \tilde{v} 是沿着 $\tilde{\gamma}$ 平行的.

Proof. 我们假设 γ 是单位速的, S 是定向的, f 是保定向的. 我们把如何从特殊情况推到一般情况的解释留给读者. 尽管 (2) 能够从 (1) 直接推出, 我们会以相反的顺序来证明.

对于 (2), 引理5.25说明 γ 和 $\tilde{\gamma}$ 具有相同的测地曲率函数 κ_g . 由命题5.42, 它们具有共同的角度函数 θ . 因为对于任意的 $p \in S, df_p$ 是保定向的和保角的, 现在结论就能够从全局角度函数决定平行向量场的方式中推出了.

对于 (1), 设 w_1 为沿着 γ 的单位长的平行向量场. 就像前面提到的, $w_2 = R_{90} \circ w_1$ 是另外一个沿着 γ 的处处和 w_1 正交的单位长平行向量场. 任意的向量场 v 都能够表示成 $v = aw_1 + bw_2$ 的形式, 其中 $a, b: I \rightarrow \mathbb{R}$ 为光滑函数. 引理5.39给出 $v^\mathcal{O} = a'w_1 + b'w_2$. 由 (1), 沿着具有定义 $\tilde{w}_1(t) = df_{\gamma(t)}(w_1(t))$ 和 $\tilde{w}_2(t) = df_{\gamma(t)}(w_2(t))$ 的向量场是平行的, 所以

$$\tilde{v}^\mathcal{O} = (a\tilde{w}_1 + b\tilde{w}_2)^\mathcal{O} = a'\tilde{w}_1 + b'\tilde{w}_2 = df(v^\mathcal{O}).$$

□

5.6 局部坐标内的测地线

在这一节中, 我们会引入局部坐标中计算测地线和协变导数的表达式. 干别的事的同时我们还会履行我们前面的诺言, 使用这些表达式来证明命题5.3和定理5.26.

在本节中, 设 S 为定向正则曲面, 定向为 N , 令 $\sigma : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \subset S$ 为与 N 一致的曲面切片, 其第一和第二基本形式分别是

$$\mathcal{F}_1 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, \quad \mathcal{F}_2 = edu^2 + 2fdudv + gdv^2.$$

回忆式(4.12)中有 $e = \langle \sigma_{uu}, N \rangle, f = \langle \sigma_{uv}, N \rangle, g = \langle \sigma_{vv}, N \rangle$, 但是 $\sigma_{uu}, \sigma_{uv}, \sigma_{vv}$ 沿 S 的切向的分量呢? 为在 U 的任意一点处将 $\sigma_{uu}, \sigma_{uv}, \sigma_{vv}$ 表示为基 $\{\sigma_u, \sigma_v, N\}$ 的线性组合, 我们需要几个额外的从 U 到 \mathbb{R} 的函数 (不止 e, f 和 g). 这些函数称为克里斯托夫记号 (Christoffel symbols):

Definition 5.50. 克里斯托夫记号 (*Christoffel symbols*) 为 $\Gamma_{ij}^k : U \rightarrow \mathbb{R}$, 其中 $i, j, k \in \{1, 2\}$, 满足:

$$\begin{aligned} \sigma_{uu} &= \Gamma_{11}^1 \sigma_u + \Gamma_{11}^2 \sigma_v + eN = \frac{D}{du} \sigma_u + eN, \\ \sigma_{uv} &= \Gamma_{12}^1 \sigma_u + \Gamma_{12}^2 \sigma_v + fN = \frac{D}{du} \sigma_v + fN, \\ \sigma_{vu} &= \Gamma_{21}^1 \sigma_u + \Gamma_{21}^2 \sigma_v + fN = \frac{D}{dv} \sigma_u + fN, \\ \sigma_{vv} &= \Gamma_{22}^1 \sigma_u + \Gamma_{22}^2 \sigma_v + gN = \frac{D}{dv} \sigma_v + gN. \end{aligned}$$

想要理解这个定义的话, 考虑 “1 = u ” 和 “2 = v ”. 尽管有八种克里斯托夫记号, 从 $\sigma_{uv} = \sigma_{vu}$ 我们可以推出 $\Gamma_{21}^1 = \Gamma_{12}^1, \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2$, 所以事实上只有六种不同的克里斯托夫记号.

在定义5.50中的表达式 “ $\frac{D}{du}$ ” 和 “ $\frac{D}{dv}$ ” 表示沿 u -参数化和 v -参数化的曲线所求的 σ_u 和 σ_v 的协变导数. 例如, $\frac{D}{du} \sigma_v : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ 满足对于任意的 $q \in U, \frac{D}{du} \sigma_v(q)$ 都是等于 σ_v 的在经过 q 的 u -参数化的曲线上的限制在 q 处的协变导数, 其他的表达式都是类似地定义出的. 简言之, 克里斯托夫记号蕴含了坐标方向上坐标向量场的协变导数的信息. 所以, 利用它们能够表示出任意向量场沿着任意曲线的协变导数就不那么令人惊讶了:

Lemma 5.51 (局部坐标下的协变导数). 设 $\gamma : I \rightarrow V$ 为 V 中的任意的正则曲线, 能够表达为 $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$, 其中 $u, v : I \rightarrow \mathbb{R}$ 为光滑函数. 令 w 为沿着 γ 的任意的向量场, 表达式为

$$w(t) = a(t)\sigma_u(u(t), v(t)) + b(t)\sigma_v(u(t), v(t)),$$

其中 $a, b: I \rightarrow \mathbb{R}$ 为光滑函数. 则

$$\begin{aligned} w^{\mathcal{O}} = & (a' + au'\Gamma_{11}^1 + (av' + bu')\Gamma_{12}^1 + bv'\Gamma_{22}^1)\sigma_u \\ & + (b' + au'\Gamma_{11}^2 + (av' + bu')\Gamma_{12}^2 + bv'\Gamma_{22}^2)\sigma_v \end{aligned}$$

在整个 I 上成立. 特别地, w 是平行的当且仅当在这个表达式中 σ_u 和 σ_v 的系数都是零.

Proof. 这个结论可以由定义5.50得到, 运用链式法则我们就有

$$w' = a'\sigma_u + a(u'\sigma_{uu} + v'\sigma_{uv}) + b'\sigma_v + b(u'\sigma_{vu} + v'\sigma_{vv}).$$

□

这个引理的 $w = \gamma'$ 时的特殊情况尤为重要:

Lemma 5.52 (测地恒等式). V 中的正则曲线 $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ 是测地线当且仅当

$$\begin{aligned} u'' + (u')^2\Gamma_{11}^1 + 2(u'v')\Gamma_{12}^1 + (v')^2\Gamma_{22}^1 &= 0 \\ \text{且} \quad v'' + (u')^2\Gamma_{11}^2 + 2(u'v')\Gamma_{12}^2 + (v')^2\Gamma_{22}^2 &= 0. \end{aligned}$$

Proof. 由于 γ 是测地线当且仅当 γ' 是平行的, 这就是引理5.51在 $w = \gamma'$ 的特殊情况. □

熟悉微分方程中的定理的读者很容易看出引理5.52中的系统能够分别对 $\{u, v\}$ 求解 (需要给定 $t_0 \in I$ 处的 u, u', v, v'), 这又为命题5.3(测地线的存在和唯一性) 提供了一个证明.

引理5.51有另外一个很重要的结果. 这个引理中 $w^{\mathcal{O}}$ 的表达式中只出现了 u 和 v 的一阶偏导数. 换句话说, $w^{\mathcal{O}}(t)$ 对曲线 γ 的依赖仅仅涉及到 $\gamma'(t)$. 这意味, 比如说, 在定义表达式 “ $\frac{D}{du}\sigma_v(q)$ ” 的时候我们可以稍微宽松一些. 我们只需要说明它等于 σ_v 在任意经过 q 的初速度为 σ_u 的正则曲线上的限制在 q 处的值. 更一般地, 若 w 是整个 S 上的切线场, 那么它在 S 中正则曲线上的限制的协变导数能够在某一点处计算出来, 计算时只需曲线在该点处 (以及在这一点的邻域中的点 w) 的速度向量.

高斯发现克里斯托夫记号能够用第一基本形式的系数以及它们的偏导数来表达:

Proposition 5.53. 令 $\alpha = 2(EG - F^2)$, 我们有

$$\begin{aligned} (a) \quad \alpha\Gamma_{11}^1 &= GE_u - 2FF_u + FE_v, & \alpha\Gamma_{11}^2 &= 2EF_u - EE_v - FE_u, \\ (b) \quad \alpha\Gamma_{12}^1 &= GE_v - FG_u, & \alpha\Gamma_{12}^2 &= EG_u - FE_v, \\ (c) \quad \alpha\Gamma_{22}^1 &= 2GF_v - GG_u - FG_v, & \alpha\Gamma_{22}^2 &= EG_v - 2FF_v + FG_u. \end{aligned}$$

Proof. 计算 $\{\sigma_{uu}, \sigma_{uv}, \sigma_{vv}\}$ 中的向量和 $\{\sigma_u, \sigma_v\}$ 的向量的内积的方法有两种.(1) 利用内积的乘积公式;(2) 利用定义了克里斯托夫记号的定义5.50. 将两种方法得到的结果划上等号我们就得到

$$\begin{aligned} (a) \quad & \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \langle \sigma_{uu}, \sigma_u \rangle = \frac{1}{2} E_u, & \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = \langle \sigma_{uu}, \sigma_v \rangle = F_u - \frac{1}{2} E_v, \\ (b) \quad & \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \langle \sigma_{uv}, \sigma_u \rangle = \frac{1}{2} E_v, & \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = \langle \sigma_{uv}, \sigma_v \rangle = \frac{1}{2} G_u, \\ (c) \quad & \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = \langle \sigma_{vv}, \sigma_u \rangle = F_v - \frac{1}{2} G_u, & \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = \langle \sigma_{vv}, \sigma_v \rangle = \frac{1}{2} G_v. \end{aligned}$$

上面的每一行,(a),(b),(c), 都是涉及克里斯托夫记号的即有两个等时的线性系统. 将这些线性系统中的克里斯托夫记号求解出来我们就能够得到想要的等式. \square

有时, 这些特别的公式很有用, 但是多数情况下我们只需要知道克里斯托夫记号的仅仅关于第一基本形式的系数及其偏导的某些表达式是存在的就行了. 为了说明曲率是内蕴的, 高斯继续推导出了函数 $\{E, F, G, e, f, g\}$ 之间的下列关系式:

Proposition 5.54 (相容性等式). 下面的等式在整个 U 上成立:

$$\begin{aligned} (1u) \quad & FK = (\Gamma_{12}^1)_u - (\Gamma_{11}^1)_v + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1, \\ (1v) \quad & EK = (\Gamma_{11}^2)_v - (\Gamma_{12}^2)_u + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - (\Gamma_{12}^2)^2, \\ (1N) \quad & e_v - f_u = e \Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^1) - g \Gamma_{11}^2, \\ (2u) \quad & GK = (\Gamma_{22}^1)_u - (\Gamma_{12}^1)_v + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{22}^1 - (\Gamma_{12}^1)^2, \\ (2v) \quad & FK = (\Gamma_{12}^2)_v - (\Gamma_{22}^2)_u + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^2, \\ (2N) \quad & g_u - f_v = \Gamma_{12}^2 + f(\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^2) - e \Gamma_{22}^1. \end{aligned}$$

Proof. 所有的六个等式都来自于下面的关系式:

$$(1) \quad (\sigma_{uu})_v = (\sigma_{uv})_u, \quad (2) \quad (\sigma_{vv})_u = (\sigma_{uv})_v.$$

更具体地说, 来自于将(1)中基 $\{\sigma_u, \sigma_v, N\}$ 的左右两边的系数划上等号, 蓝色的式子可以由(2)以类似的方式生成.

我们大致列出我们生成三个红色的等式的步骤. 为此,(1)式变为

$$(5.10) \quad (\Gamma_{11}^1 \sigma_u + \Gamma_{11}^2 \sigma_v + eN)_v = (\Gamma_{12}^1 \sigma_u + \Gamma_{12}^2 \sigma_v + fN)_u.$$

式(5.10)的左侧扩展为:

$$\begin{aligned} & (\Gamma_{11}^1)_v \sigma_u + \Gamma_{11}^1 \underbrace{(\Gamma_{12}^1 \sigma_u + \Gamma_{12}^2 \sigma_v + fN)}_{\sigma_{uv}} \\ & + (\Gamma_{11}^2)_v \sigma_v + \Gamma_{11}^2 \underbrace{(\Gamma_{22}^1 \sigma_u + \Gamma_{22}^2 \sigma_v + gN)}_{\sigma_{vv}} + e_v N + e \underbrace{(-w_{12} \sigma_u - w_{22} \sigma_v)}_{N_v = -W(\sigma_v)}, \end{aligned}$$

其中矩阵 $\begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix}$ 是在命题4.17中定义利用基 $\{\sigma_u, \sigma_v\}$ 表示魏恩加滕映射 \mathcal{W} 的矩阵. 这个命题中我们得到了

$$w_{12} = \frac{fG - gF}{EG - F^2}, \quad w_{22} = \frac{gE - fF}{EG - F^2}.$$

这些代换完成了展开式(5.10)的左半部分的工作. 右侧可以以类似的方式展开. 三个红色的等式就来自于式(5.10)的展开版本的左右两边 σ_u, σ_v, N 的系数的分别相等.

蓝色的式子可以用类似的方式生成. 但是有更快的方法— u 和 v 在这两个式子中的地位是对称的, 所以可以通过以下的符号变化得到蓝色的式子: $u \leftrightarrow v, 1 \leftrightarrow 2, E \leftrightarrow G, e \leftrightarrow g$. \square

由于克里斯托夫记号能够用第一基本形式来表达, 高斯绝妙定理可以由(1u), (1v), (2u), (2v)中的任意一个直接得到. 更清晰地说, 将命题5.53中的克里斯托夫记号的表达式替换为这四个等式中的任意一个就能够得到下面的 K 的公式:

$$(5.11) \quad K = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{1}{2}E_{vv} + F_{uv} - \frac{1}{2}G_{uu} & \frac{1}{2}E_u & F_u - \frac{1}{2}E_v \\ F_v - \frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{vmatrix}}{(EG - F^2)^2},$$

其中的竖线表示行列式值. 展开这个一般表达式涉及的代数是杂乱, 但是在以下的假设下情况没那么糟:

Corollary 5.55. 若 $E = 1, F = 0$, 那么

$$K = -\frac{(\sqrt{G})_{uu}}{\sqrt{G}}.$$

这个推论是定理5.26(这个定理在法向极坐标下给出了 K 的表达式)的一般化. 它也是式(4.15)的一般化 (给出了旋转曲面下 K 的表达式). 事实上, 它形式化了这两种情况的共同点.

在这一节的最后我们给出高斯曲率的一个代数特征: 它衡量了我们所熟悉的 “ $\frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial}{\partial u}$ ” 的法则转移到协变导数的情形上时的失效程度:

Proposition 5.56. 若 w 是 S 的切向量场, 那么

$$\underbrace{\frac{D}{dv} \frac{D}{du} w - \frac{D}{du} \frac{D}{dv} w}_{\text{记为 } (\frac{D}{dv} \frac{D}{du} - \frac{D}{du} \frac{D}{dv})w} = K \cdot |\sigma_u \times \sigma_v| \cdot R_{90}(w).$$

回忆我们关于定义5.50的讨论, 若 X 是个在 S 上的切向量场, 那么 $\frac{D}{dv}(X)$ 指的是 S 上的切向量场, 它在 $p \in S$ 处的值等于 X 在经过 p 的 v -参数化的曲线在 p 处的协变导数. 表

达式“ $\frac{D}{du}$ ”能够类似地进行解释. 同时, 回忆 $|\sigma_u \times \sigma_v|$ 等于 σ 的无穷小量面积扰动, $R_{90}(w)$ 表示 w 逆时针旋转 90° .

命题5.56中的等式的两边都是 S 上的切向量场. 等式右侧在 $p \in S$ 处的值显然仅仅取决于 w 在 p 处的值 (甚至附近的值都没有影响). 这个命题说明左边的也一定具有此性质, 事实上是证明这个命题所需说明的一个重要的部分.

对 σ 的依赖也值得一叙. 等式右侧在 $p \in S$ 处的值在将 σ 替换为其他具有相同定向的且在 p 附近时具有相同的面积扰动的曲面切片时是不变的. 这个命题说明左侧也一定具有这个性质, 这也许令人惊讶.

Proof. 我们得首先证明 $w = \sigma_u$ 的结论. 克里斯托夫的记号的定义和引理5.39结合在一起就能够得到

$$\begin{aligned} \frac{D}{dv} \frac{D}{du} \sigma_u &= \frac{D}{dv} \underbrace{(\Gamma_{11}^1 \sigma_u + \Gamma_{11}^2 \sigma_v)}_{\frac{D}{du} \sigma_u} \\ &= (\Gamma_{11}^1)_v (\sigma_u) + \Gamma_{11}^1 \underbrace{(\Gamma_{12}^1 \sigma_u + \Gamma_{12}^2 \sigma_v)}_{\frac{D}{dv} \sigma_u} + (\Gamma_{11}^2)_v (\sigma_v) + \Gamma_{11}^2 \underbrace{(\Gamma_{22}^1 \sigma_u + \Gamma_{22}^2 \sigma_v)}_{\frac{D}{dv} \sigma_v} \\ &= ((\Gamma_{11}^1)_v + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1) \sigma_u + ((\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2) \sigma_v. \end{aligned}$$

类似地,

$$\begin{aligned} \frac{D}{du} \frac{D}{dv} \sigma_u &= \frac{D}{du} \underbrace{(\Gamma_{12}^1 \sigma_u + \Gamma_{12}^2 \sigma_v)}_{\frac{D}{dv} \sigma_u} \\ &= (\Gamma_{12}^1)_u (\sigma_u) + \Gamma_{12}^1 \underbrace{(\Gamma_{11}^1 \sigma_u + \Gamma_{11}^2 \sigma_v)}_{\frac{D}{du} \sigma_u} + (\Gamma_{12}^2)_u (\sigma_v) + \Gamma_{12}^2 \underbrace{(\Gamma_{12}^1 \sigma_u + \Gamma_{12}^2 \sigma_v)}_{\frac{D}{du} \sigma_v} \\ &= ((\Gamma_{12}^1)_u + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1) \sigma_u + ((\Gamma_{12}^2)_u + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2) \sigma_v. \end{aligned}$$

作差得

$$\begin{aligned} \frac{D}{dv} \frac{D}{du} \sigma_u - \frac{D}{du} \frac{D}{dv} \sigma_u &= ((\Gamma_{11}^1)_v - (\Gamma_{12}^1)_u + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^2) \sigma_u \\ &\quad + ((\Gamma_{11}^2)_v - (\Gamma_{12}^2)_u + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2) \sigma_v \\ &= -(FK) \sigma_u + (EK) \sigma_v \quad (\text{由命题 5.54}) \\ &= K (E \sigma_v - F \sigma_u) \\ &= K (|\sigma_u|^2 \sigma_v - \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle \sigma_u) \\ &= K |\sigma_u|^2 \left(\sigma_v - \frac{\langle \sigma_u, \sigma_v \rangle \sigma_u}{|\sigma_u|^2} \right) \\ &= K |\sigma_u|^2 (\sigma_v)^\perp = K |\sigma_u| |\sigma_v^\perp| \left(|\sigma_u| \frac{\sigma_v^\perp}{|\sigma_v^\perp|} \right) \\ &= K |\sigma_u \times \sigma_v| R_{90}(\sigma_u), \end{aligned}$$

其中 $(\sigma_v)^\perp$ 表示 σ_v 正交于 σ_u 的投影. 这证明了 $w = \sigma_u$ 时的结论. $w = \sigma_v$ 时的结论能够类似地被证明. 因为 S 上任意的切向量场都能够写作 $a\sigma_u + b\sigma_v$, $a, b: U \rightarrow \mathbb{R}$ 为光滑函数, 一般的结论就能够由这两种特殊情况推出, 假设我们能够说明下面的线性性质:

$$\left(\frac{D}{dv} \frac{D}{du} - \frac{D}{du} \frac{D}{dv} \right) (a\sigma_u + b\sigma_v) = a \left(\frac{D}{dv} \frac{D}{du} - \frac{D}{du} \frac{D}{dv} \right) \sigma_u + b \left(\frac{D}{dv} \frac{D}{du} - \frac{D}{du} \frac{D}{dv} \right) \sigma_v.$$

这个线性性质实际说的是 $\left(\frac{D}{dv} \frac{D}{du} - \frac{D}{du} \frac{D}{dv} \right) w$ 在 p 处的值仅仅取决于 w 在 p 处的值 (甚至附近的点都没有影响). 它的证明利用是协变导数的代数性质的直接运算, 留作练习. \square

命题5.56和它的证明似乎是纯代数的, 但是下一节我们会引入一个表达式 $\frac{D}{dv} \frac{D}{du} - \frac{D}{du} \frac{D}{dv}$ 的几何解释, 称为 “infinitesimal holonomy”³.

³ 没找到合适的中文翻译.

5.7 高斯曲率衡量 Infinitesimal Holonomy

在这一节中, 我们会一般化我们前面的平行变换, 角度函数以及 *holonomy* 的定义, 将它们扩展到仅仅是分片正则的曲线上. 这会允许我们解释命题5.56中表达式 “ $\frac{D}{dv} \frac{D}{du} - \frac{D}{du} \frac{D}{dv}$ ”, 将它的含义解释为 “无穷小量 holonomy”.

在本节中, 我们始终假设 S 是定向的正则曲面, $\gamma: [a, b] \rightarrow S$ 为 S 中分片正则的曲线. 由定义2.6, 这意味着 γ 是连续的, 存在一个分划 $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, 使得 γ 在每个子区间 $[t_i, t_{i+1}]$ 上的限制 (我们记为 γ_i) 是 S 中的正则曲线. 和以前意向, 若 $\gamma(a) = \gamma(b)$, 则曲线是闭合的; 若 γ 在 $[a, b]$ 上是双射那么曲线是简单的; 若 γ_i 都是单位速的那么曲线也是单位速的.

几个关键的定义就能够自然的生成下面的设定:

Definition 5.57. 设 v 为沿着 γ 的向量场, 意指连续函数 $v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, 其在每个子区间 $[t_i, t_{i+1}]$ 上的限制都是沿着 γ_i 上的向量场.

- (1) v 被称为是沿着 γ 平行的若它在每个子区间 $[t_i, t_{i+1}]$ 上的限制是沿着 γ_i 平行的.
- (2) 沿着 γ 的平行变换指的是函数 $P_\gamma: T_{\gamma(a)}S \rightarrow T_{\gamma(b)}S$, 它是由光滑的平行变换的区间组成的:

$$P_\gamma = P_{\gamma_{n-1}} \circ P_{\gamma_{n-2}} \circ \dots \circ P_{\gamma_1} \circ P_{\gamma_0}.$$

- (3) 若 γ 是闭合的, 那么 P_γ 也称为环绕 γ 的 *holonomy*.

对任意的 $w \in T_{\gamma(a)}S$, 注意 $P_\gamma(w) \in T_{\gamma(b)}S$ 为一个沿着 γ 的为题的平行向量场在 $t = b$ 处的取值, 其在 $t = a$ 处的值等于 w , 和光滑时的情形是一样的.

每个在曲线上非光滑的点称为顶点 (*vertex*)⁴或是拐角 (*corner*). 在顶点 $\gamma(t_i)$ 处, 我们和2.1节那样定义带符号角度 $\alpha_i \in [-\pi, \pi]$. 更准确地说, α_i 的绝对值等于 $v^-(t_i)$ 和 $v^+(t_i)$ 之间的角度 (这个和之前的定义相同) 的最小值, α_i 的符号为正若是 $v^-(t_i)$ 逆时针旋转绝对值的角度能够得到 $v^+(t_i)$, 顺时针则为负. “顺时针/逆时针” 的含义来自于曲面的定向 (如式(3.11)和式(3.12)所示). 等价地, α_i 为正当且仅当 $\{v^-(t_i), v^+(t_i), N\}$ 是 \mathbb{R}^3 的一组正定向的基, 其中 N 表示 S 的定向.

若 γ 不是闭的, 那么 $\gamma(a)$ 和 $\gamma(b)$ 就不会被记为顶点. 若 γ 是闭的但 $\gamma'(a) \neq \gamma'(b)$, 则 $\gamma(a) = \gamma(b)$ 就能被视作一个顶点, 相应的带符号角度的定义和上面相同, 只不过把 $v^-(a)$ 换成 $v^-(b)$.

和之前一样, 顶点 $\gamma(t_i)$ 被称为是一个尖角 (*cusp*) 若 $v^+(t_i)$ 是 $v^-(t_i)$ 的负值标量积. 确定尖角的带符号角度是 π 还是 $-\pi$ 需要用到的过程是相同的, 但是这个过程需要用到 “定

⁴这个定义和2.2节中的顶点的定义是不一样的, 在本书中以后我们不会在用到之前的定义—不加说明的话.

向”和“内部”的概念,我们在6.1节之前不会用到这个概念.所以就目前而言,我们为简单起见假设不存在尖角.角度函数和角度差的概念很自然的生成:

Definition and Proposition 5.58. 假设 γ 是单位速的, 令 α_i 表示顶点处的带符号角度.

(1) 函数 $\theta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 被称为是 γ 的**角度函数**若对于每个 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, θ 在 t_i 处有个 α_i 的不连续跳跃, 在其他的地方都满足 $\theta'(t) = \kappa_g(t)$. 角度函数存在且在相差一个常数的情况下唯一.

(2) 沿着 γ 的**角度差**的意思是角度函数 $\Delta\theta = \theta(b) - \theta(a)$ 的净变化. 等价地说,

$$\Delta\theta = \int_a^b \kappa_g(t) dt + \sum_i \alpha_i,$$

其中 “ $\int_a^b \kappa_g(t) dt$ ” 是 γ 的各个光滑区段上的测地曲率的积分的和的简写.

(3) 若 γ 是闭的, 那么 P_γ 等于 $T_{\gamma(a)}S$ 的 $\Delta\theta$ 角度的顺时针旋转.

Proof. 留作练习. □

注意到 (3) 可以生成命题5.46. 可以很直接地证明角度函数 θ 将 γ' 和沿着 γ 的任意的平行向量场联系起来, 就和命题5.42中的一样. 更进一步, 就和定理2.7的证明一样, 每个顶点处都能够光滑化, 顶点处的带符号角度表示光滑化后的角度函数在该顶点处的角度的净变化 (取光滑化区间为顶点的愈来愈小的邻域的极限).

我们现在就能够给出命题5.56中的表达式 $\frac{D}{dv} \frac{D}{du} - \frac{D}{du} \frac{D}{dv}$ 的“无穷小量 holonomy”的解释了:

Proposition 5.59 (高斯曲率衡量无穷小量 holonomy). 设 S 为定向正则曲面, $\sigma: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \subset S$ 为和定向相一致的曲面切片, $p \in V, w \in T_p S$. 对于小的 $s > 0$, 令 $\gamma_s: [0, 4\sqrt{s}] \rightarrow S$ 表示 σ 和 U 中左下顶点为 $q = \sigma^{-1}(p)$, 边长为 \sqrt{s} . 设 $w(s) \in T_p S$ 为 w 沿 γ 的平行变换. 则

$$w'(0) = \left(\left(\frac{D}{dv} \frac{D}{du} - \frac{D}{du} \frac{D}{dv} \right) W \right) (p) = \underbrace{K(q) \cdot |\sigma_u(q) \times \sigma_v(q)| \cdot R_{90}(w)}_{\text{由命题5.56}},$$

其中 W 是 w 到任意的 p 的邻域中的切向量场的扩张.

Proof. 由命题5.56的证明我们知道左侧和扩张 W 的选择是无关的, 所以我们首先选择一种方便的扩张. 为此, 为简单起见, 假设 $q = (0, 0), (u, v)$ 和 $(0, 0)$ 很接近, 令 $W(u, v) \in T_{\sigma(u, v)} S$

表示 w 沿着先以 u 为参数从 p 到 $\sigma(u, 0)$, 再以 v 为参数从 $\sigma(u, 0)$ 到 $\sigma(u, v)$ 的曲线的平行变换. 这样的选择下, 在 p 附近 $\frac{D}{dv}W$ 为 $\mathbf{0}$, 所以我们还需要证明 $w'(0) = \left(\frac{D}{dv}\frac{D}{du}W\right)(p)$.

定义 $A(u, v) \in T_{\sigma(0, v)}S$ 为 $W(u, v)$ 沿着从 $\sigma(u, v)$ 到 $\sigma(0, v)$ 的 u -参数化曲线的平行变换. 注意, 对于固定的 $v_0, u \mapsto A(u, v_0)$ 是 $T_{\sigma(0, v_0)}S$ 中的曲线, 其微分初始值能够由练习中的结论算出来为

$$\left.\frac{d}{du}\right|_{u=0} A(u, v_0) = \left(\frac{D}{du}W\right)(0, v_0).$$

下面定义 $B(u, v) \in T_p S$ 为 $A(u, v)$ 沿着从 $\sigma(0, v)$ 到 p 的 v -参数化的曲线的平行变换. 再次利用练习中的结论我们就能够知道

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial v \partial u}B\right)(0, 0) = \left(\frac{D}{dv}\frac{D}{du}W\right)(p).$$

因为 $B: (\mathbb{R}^2 \text{ 中 } (0, 0) \text{ 的邻域}) \rightarrow T_p S$ 将 u -轴和 v -轴映射到向量 w, B 的二阶泰勒多项式(式(3.6))简化为

$$B(u, v) - B(0, 0) \approx uv \left(\frac{\partial^2}{\partial v \partial u}B\right)(0, 0) = uv \left(\frac{D}{dv}\frac{D}{du}W\right)(p).$$

因为 $w(s) = B(\sqrt{s}, \sqrt{s})$,

$$w'(0) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{B(\sqrt{s}, \sqrt{s}) - B(0, 0)}{s} = \left(\frac{D}{dv}\frac{D}{du}W\right)(p).$$

□

这个命题的结论是

$$(5.12) \quad w'(0) = K(q) \cdot |\sigma_u(q) \times \sigma_v(q)| \cdot R_{90}(w).$$

$w \in T_p S$ 的选择在这里是不重要的, 因为所有的选择都是一样的. 为理解这一点, 令 $(\Delta\theta)(s)$ 表示沿着 γ_s 的单位速重参数化的角度差. 对于每一个固定的 w 的选择, $w(s)$ 等于 w 的顺时针旋转 $(\Delta\theta)(s)$ 角度; 也就是说,

$$w(s) = \cos((-\Delta\theta)(s))w + \sin((-\Delta\theta)(s))R_{90}(w).$$

注意到 $w'(0) = -(\Delta\theta)'(0) \cdot R_{90}(w)$. 因此, 式(5.12)事实上在说

$$(5.13) \quad (\Delta\theta)'(0) = -K(q) \cdot |\sigma_u(q) \times \sigma_v(q)|.$$

因为 $\lim_{s \rightarrow 0} (\Delta\theta)(s) = 2\pi$, 一阶估计为

$$\boxed{(\Delta\theta)(s) \approx 2\pi - K(q) \cdot \underbrace{s \cdot |\sigma_u(q) \times \sigma_v(q)|}_{\gamma_s \text{ 中的面积估算}}.}$$

总之, 对于足够小的 s, γ_s 附近的 holonomy 是个顺时针旋转大约 2π 减去 $K(q)$ 倍 γ_s 包围区域的面积. 它是和下面的说法等价 (有时会简单一些), 对于足够小的 s, γ_s 附近的 holonomy 是逆时针转动大约 γ_s 所包围的面积 $K(q)$ 倍. 两种解释都使得命题5.59的标题是合理的.

下一章的主要目标是获得这个无穷小量的结论的全局版本. 在特定的条件下, 就连在一个很大的闭合回路周围, holonomy 都是等于逆时针旋转 K 在所包围的区域的积分的角度的.

5.8 弧长变化: 弯曲的曲面的轮胎痕迹 (选读)

在1.6节中, 我们研究了沿着平面中的曲线行驶的马车的轮胎轨迹. 在任意时刻, 在任意时刻, 左轮和右轮的速度差和车轴终点轨迹的带符号曲率成正比. 指南车 (在1.6节中亦有提及) 上安装了一个垂直的小雕像, 其齿轮结构使得它相对于车厢以与左右轮的速度差成正比的速度顺时针旋转. 这印证了它的名字——它总是指向同一个方向, 无论它是向左转还是向右转.

本节的一个目标是研究一种沿着任意曲面中的曲线行驶的常规马车或是指南车. 这个问题能够用下面的很常用的语言来进行描述:

Definition 5.60. 设 $\gamma: I \rightarrow S$ 为正则曲面中的正则曲线. γ 的形变 (variation) 为光滑函数 $\sigma: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$, 其中 $\epsilon > 0$, 它满足 $\forall t \in I, \gamma(t) = \sigma(0, t)$. 对每个固定的 $s \in (-\epsilon, \epsilon)$, 道路 $\gamma_s(t)$ 称为 γ 的形变的曲线 (a curve of the variation). 沿着 γ 的向量场 $w(t) = \sigma_s(0, t)$ 称为 σ 的形变向量场 (variational vector field). 此形变称为是正交的 (orthogonal) 若 $\forall t \in I, w(t) \perp \gamma'(t)$. 它被称为是恰当的 (proper) 若 $I = [a, b]$ 且曲线具有相同的端点; 也就是说, $\forall s \in (-\epsilon, \epsilon), \sigma(s, a) = \gamma(a), \sigma(s, b) = \gamma(b)$.

形变是个很一般化的构造, 应用很广泛, 包括在马车问题上也有应用. 利用此一般性, 我们开始计算形变曲线的长度关于 s 变化的速度:

Proposition 5.61. 设 S 为正则曲面, $\gamma: [a, b] \rightarrow S$ 为单位速的曲线. 若 σ 是 γ 的正交形变, w 是沿着 σ 的形变向量场, 那么

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \text{弧长}(\gamma_s) = - \int_a^b \langle \gamma''(t), w(t) \rangle dt.$$

Proof. 固定 $t_0 \in [a, b]$, 考虑沿着曲线 $s \mapsto \sigma(s, t_0)$ 向量场 $s \mapsto \sigma_t(s, t_0)$. 它的长度的平方具有下面的导数初始值:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} |\sigma_t(s, t_0)|^2 &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \langle \sigma_t(s, t_0), \sigma_t(s, t_0) \rangle = 2 \langle \sigma_{ts}(0, t_0), \sigma_t(0, t_0) \rangle \\ &= 2 \langle \sigma_{st}(0, t_0), \sigma_t(0, t_0) \rangle = 2 \langle w'(t_0), \gamma'(t_0) \rangle \\ &= 2 \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} \underbrace{\langle w(t), \gamma'(t) \rangle}_0 - \langle w(t_0), \gamma''(t_0) \rangle \right) = -2 \langle w(t_0), \gamma''(t_0) \rangle. \end{aligned}$$

上面的表达式的平方根的初始导数为

$$(5.14) \quad \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} |\gamma'_s(t_0)| = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} |\sigma_t(s, t_0)| = - \langle w(t_0), \gamma''(t_0) \rangle.$$

因此,

$$\begin{aligned}\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \text{弧长}(\gamma_s) &= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \int_a^b |\gamma'_s(t)| dt \\ &= \int_a^b \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} |\gamma'_s(t)| dt \\ &= \int_a^b \langle w(t), \gamma''(t) \rangle dt.\end{aligned}$$

□

Example 5.62 (马车轮胎印). 为给马车问题建立模型, 我们首先得假设 S 是定向的, 那么马车在 S 的“上方”行驶的说法就合法了. γ 表示马车的车轴的终点所经过的曲线. 我们假设 w 是单位长的 (向量场). 我们希望 w 指向左轮, 所以我们假设定向满足 $R_{90}(\gamma'(t)) = w(t)$. 若车轴长度为 $2s_0$, 那么曲线 γ_{s_0} 和 γ_{-s_0} 就分别能够大致地模拟左轮和右轮的轨迹. 有了这些假设, 命题5.61中的被积函数就变成

$$\langle \gamma''(t), w(t) \rangle = \langle \gamma''(t), R_{90}(\gamma'(t)) \rangle = \kappa_g(t).$$

那么由式(5.14)和命题5.61可得

$$(5.15) \quad \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} |\gamma'_s(t_0)| = -\kappa_g(t_0) = -\theta'(t_0), \quad \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \text{弧长}(\gamma_s) = -\int_a^b \kappa_g(t) dt = -\Delta\theta,$$

其中 $\Delta\theta$ 表示 γ 的角度函数 θ 的净变化.

式(5.15)产生了1.6节中例1.41的结论. 它们说明了轮胎速度的变化速率 (左边公式) 和轮胎轨迹长度的变化速率 (右边公式) 相对于车轴长度的关系. 左边的公式决定了指南车的行为:

Example 5.63 (指南车). 假设例5.62中的马车是一辆指南车. 假设指南车的车轴长度 $2s_0$ 相对于曲面的特性是很小的. 更准确地说, 假设式(5.15)左边的公式给出了一个轮胎速度的一个很好的一阶估计. 那么对于每个时刻 t_0 ,

$$\text{右轮速度减去左轮速度} \approx s_0 \cdot \kappa_g(t_0) = s_0 \cdot \theta'(t_0).$$

因为指南车的齿轮结构会产生雕像的 (相对于马车车厢的) 和这个轮胎速度的差成正比的顺时针角速度, 雕像大致会指向一个平行向量场. 换句话说, 雕像的相对于车厢的顺时针旋转 (坐在车厢里面的人很容易观察) 大致就相当于 γ 的一个角度函数.

这些结论在 γ 仅仅是分片正则的曲线的时候依然有效, 如果假定马车在顶点处以进行相应的转动⁵. 那么马车的方向会改变但是雕像的指向不会改变.

命题5.61由和马车问题无关的各种应用. 例如, 它提供了一个测地线的另一个很有用的特征:

⁵不是转向!!! 那得先光滑化!!!

Proposition 5.64 (测地线的形变特征). 正则曲面中的单位速曲线 $\gamma: [a, b] \rightarrow S$ 是测地线当且仅当对每个 γ 的恰当形变都有 $\frac{d}{ds}\big|_{s=0} \text{弧长}(\gamma_s) = 0$.

Sketch of proof. 若 γ 是测地线, 那么 $\langle \gamma''(t), w(t) \rangle = 0$ 对于每个形变都成立, 所以由命题5.61, 弧长的一阶导数等于 0.

反之, 假设 γ 不是测地线, 那么存在 $t_0 \in (a, b)$ 使得 $\gamma''(t_0)$ 不是 S 的法向. 由连续性, 存在 $\delta > 0$ 使得对任意的 $t \in I = (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, $\gamma''(t)$ 不是 S 的法向. 设 w 为沿着 γ 的向量场, 在 $t \in I$ 时非零, 在 $t \notin I$ 时非零. 构造一个具有 w 为形变向量场的恰当的形变是可行的 (留作练习). 通过上面的选择我们能够使得 $\langle \gamma''(t), w(t) \rangle$ 在 I 上的符号不变, 在 I 外等于 0. 所以根据命题5.61, 弧长的一阶导数不为零. \square

在命题5.64中,

由于进度问题, 此节跳过.

5.9 雅可比场 (选读)

理由和上节相同, 此节跳过

Chapter 6

高斯-博内定理

高斯-博内定理 (*Gauss-Bonnet Theorem*) 是对曲面的研究中最负盛名的结论. 它能够作为本教材的一个令人满意的终章, 因为它把许多前面五章的基本概念联系了起来.

在6.1节, 我们会讨论局部版本的高斯-博内定理, 这是我们曲面的情形的 Hopf's Umlaufsatz 的一般化 (定理2.7). 这个一般化过程为这个等式引入了新的意义: 高斯曲率在闭曲面的内部的积分. 这个定理为正式我们之前关于曲线附近的 holonomy 是和曲线内部的高斯曲率相关的猜想.

在6.2节, 我们会说明和证明全局版本的高斯-博内定理, 并附上足够多的局部版本的应用. 这是最棒的数学——简单, 美丽, 强大, 有许多绝妙的应用! 现在, 开始我们的学习.

6.1 局部高斯-博内定理

现在最好重新读读定理2.7, 在这里我们打算将它一般化到曲面上. 它是关于一条“ \mathbb{R}^2 中的正定向分片正则的简单闭曲线”的. 从5.7节我们知道其中多数定语在修饰曲线时是什么意思, 但是“正定向”有是什么鬼?

为确定这一点, 设 S 为定向曲面. $\gamma : [a, b] \rightarrow S$ 为 S 上的分片正则简单闭曲线, 其带符号角度记为 $\{\alpha_i\}$ (和5.7节定义的相同). 在 $S = \mathbb{R}^2$ 的情况下, 我们在2.1节就确定了它是正定向的若其内部位于经过轨迹时的前进方向的左侧. 但是对于任意的曲面 S , “内部”的定义不一定是有意义的. 在这样的设定下 Jordan 曲线定理是不成立的. 谁能够说明任意的曲面中的某一侧曲线就能够被称为是曲线的内部? 例如, 若 γ 为遍历球面的赤道线的曲线, 那么 γ 是正定向的还是负定向的取决于我们认定南半球还是北半球是它的“内部” (也取决于球面本身的定向的选择). 因此, 定语“正定向的”仅仅在关于 S 的定向和曲线的内部确定方式时才有意义. 我们在开始时先介绍区域的概念:

Definition 6.1. 设 S 为定向曲面,

- (1) 子集 $R \subset S$ 称为 S 中的一个区域 (*region*) 若它等于某个 S 中的开集和它的边界的并.
- (2) S 中的正则区域 (*regular region*) 指的是紧区域 $R \subset S$, 其边界 (记为 ∂R) 等于 S 有限多的无交的分片正则的简单闭曲线的轨迹的并. 每个单独的轨迹都称为一个 R 的边界分支 (*boundary component*).
- (3) 设 R 为 S 中的正则区域. R 的边界分支的一个重参数化 $\gamma: [a, b] \rightarrow R$ 被称为是正定向的 (*positively oriented*) 若 R 位于经过 γ 的方向的左侧; 更精确地, $R_{90}(\gamma'(t))$ 对所有 $t \in [a, b]$ 都指向 R (不包括顶点).

“多边形区域 (*polygonal region*)”(见定义3.55) 和 “具有能被单个曲面切片覆盖的单个边界分支的正则区域” 是一样的.

全局高斯-博内定理 (在下一节会讲到) 适用于复杂的正则区域, 但是局部版本只对较简单的多边形区域生效:

Theorem 6.2 (局部高斯-博内定理). 设 S 为定向正则曲面, $R \subset S$ 为多边形区域. 设 $\gamma: [a, b] \rightarrow R$ 为 ∂R 的单位速的正定向的重参数化, 其带符号角度记为 $\{\alpha_i\}$. 那么

$$\underbrace{\int_a^b \kappa_g(t) dt + \sum_i \alpha_i}_{\text{关于 } \gamma \text{ 的角度变化}} = 2\pi - \iint_R K dA.$$

和之前一样, “ $\int_a^b \kappa_g dt$ ” 是 $\sum_i \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \kappa_g(t) dt \right)$, 意思是各个光滑区段上 γ 的测地曲率的积分的和. 当 γ 是光滑的时候 (没有顶点), 它称为 γ 的总测地曲率.

我们之前证实了这个定理的一些特殊情况. 首先, 若 S 是具有定向 $(0, 0, 1)$ 的 xy -平面, 那么 $\iint_R K dA = 0, \kappa_g = \kappa_s$, 所以我们的结论就退化为定理2.7的情形. 其次, 当 γ 为 S^2 中的经线的时候, 定理在练习中已经得到验证. 第三, 在另外一个练习中我们已经验证了定理在一个足够小到处在一个顶点的法向球 (normal ball) 中的测地三角形的情形.

和我们在5.7节讨论的一样, $\Delta\theta = \int_a^b \kappa_g(t) dt + \sum_i \alpha_i$ 关于 γ 的角度变换, 指的是 γ 的角度函数的净变化. 关于 γ 的 holonomy 就是顺时针旋转这个角度. 在例 5.63 中, 我们直观解释了这一点—想像一辆沿着 γ 行驶的指南车, 那么 $\Delta\theta$ 就表示驾车的人看到的雕像关于车厢的旋转的角度. 局部高斯-博内定理说的是这个角度差和 2π 的差就是高斯曲率在其内部的积分. 由于顺时针旋转 $2\pi - \iint_R K dA$ 角度和逆时针旋转 $\iint_R K dA$ 是一样的, 我们就能重新把这一点描述为:

Corollary 6.3. 记号和假设与定理6.2相同, 关于 γ 的 holonomy 等于将 $T_{\gamma(a)}$ 逆时针旋转 $\iint_R K dA$ 角度.

Proof of theorem 6.2. 设 $\sigma : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \subset S$ 为曲面切片, $R \subset V$. 由多边形区域的定义, 我们知道 $\tilde{\gamma}(t) = \sigma^{-1}(\gamma(t)), t \in [a, b]$ 是 U 中的分片正则的简单闭曲线, 边界 $\tilde{R} = \sigma^{-1}(R)$. 假设 σ 是和 S 的定向相一致的, 那么 $\tilde{\gamma}$ 也是正定向的. 将 $\tilde{\gamma}$ 的坐标分量表示为 $\tilde{\gamma}(t) = (u(t), v(t))$. 设 C 表示 $\tilde{\gamma}$ 的轨迹.

对于每个 $q \in U$, 定义

$$X(q) = \frac{\sigma_u(q)}{|\sigma_u(q)|}, Y(q) = R_{90}(X(q)).$$

注意, X 和 Y 能够确定使得 $\forall q \in U, \{X(q), Y(q)\}$ 为 $T_{\sigma(q)}S$ 的正定向的有序规范正交基的 V 上的向量场. 特别地, 函数 $N : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ 定义为 $N(q) \times Y(q)$, 它等于用局部坐标表示的定向. 由于 $\{X, Y, N\}$ 都是处处正交的, 命题1.17产生了下列微分关系式:

$$\begin{aligned} \langle X_u, Y \rangle &= -\langle X, Y_u \rangle, & \langle X_u, N \rangle &= -\langle X, N_u \rangle, & \langle Y_u, N \rangle &= -\langle Y, N_u \rangle, \\ (6.1) \quad \langle X_v, Y \rangle &= -\langle X, Y_v \rangle, & \langle X_v, N \rangle &= -\langle X, N_v \rangle, & \langle Y_v, N \rangle &= -\langle Y, N_v \rangle, \\ \langle X_u, X \rangle &= \langle X_v, X \rangle = \langle Y_u, Y \rangle = \langle Y_v, Y \rangle = \langle N_u, N \rangle = \langle N_v, N \rangle = 0. \end{aligned}$$

令 $I = [t_i, t_{i+1}]$ 为使得 γ 正则的子区间之一. 对于 $t \in I$, 定义 $X(t) = X(\tilde{\gamma}(t)), Y(t) = Y(\tilde{\gamma}(t))$. 和命题 2.3 的证明一样, 存在光滑函数 $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ 使得

$$\gamma'(t) = (\cos \theta(t)) \cdot X(t) + (\sin \theta(t)) \cdot Y(t)$$

对任意的 $t \in I$ 成立. 注意, θ 衡量 γ' 与 u -正半轴方向形成的角度.

若 X 恰好是沿着 γ 平行的, 那么 γ 和命题5.42中定义的角度函数是一致的, 则 $\kappa_g = \theta'$. 若 X 不是沿着 γ 平行的, 那么我们预期 κ_g 等于 θ' 加上一个能够反映 X 和沿着 γ 的平行变换之间的偏差的量. 这能够做到的. 在下面的表达式中我们省略了自变量. 我们有

$$\gamma'' = \underbrace{-(\theta' \sin \theta)X + (\theta' \cos \theta)Y}_{\theta' R_{90}(\gamma')} + (\cos \theta)X' + (\sin \theta)Y'.$$

因此,

$$\begin{aligned} \kappa_g &= \langle \gamma'', R_{90}(\gamma') \rangle \\ &= \langle \theta' \cdot R_{90}(\gamma') + (\cos \theta)X' + (\sin \theta)Y', R_{90}\gamma' \rangle \\ &= \langle \theta' \cdot R_{90}(\gamma'), R_{90}(\gamma') \rangle + \left\langle (\cos \theta)X' + (\sin \theta)Y', \underbrace{-(\sin \theta)X + (\cos \theta)Y}_{R_{90}(\gamma')} \right\rangle \\ &= \theta' + \langle X, Y \rangle \quad (\text{利用式(6.1)}) \end{aligned}$$

所以要证明这个定理, 只需要验证

$$(1) \int_a^b \theta'(t) dt + \sum_i \alpha_i = 2\pi,$$

$$(2) \int_a^b \langle X'(t), Y(t) \rangle dt = - \iint_R K dA,$$

其中的两个积分式都是在 γ 的光滑区段的相应积分的和的简写.

(1) 也许并不令人惊讶. 在 σ 保角的特殊情况¹, (1) 可以通过直接对 $\tilde{\gamma}$ 应用命题2.7得到. 为处理非保角的情形, 我们得利用定理2.7的证明过程 (而不仅仅是结论). 具体而言, 我们首先将 γ 的拐角处光滑化, 这样就只需要处理 γ 是光滑的情形, 在这种情况下 θ 是在整个 $[a, b]$ 上的光滑函数, 且

$$\int_a^b \theta'(t) dt = \theta(b) - \theta(a) = 2\pi \cdot (t \mapsto (\cos \theta(t), \sin \theta(t)) \text{ 的度}).$$

映射 $t \mapsto \frac{\tilde{\gamma}'(t)}{|\tilde{\gamma}'(t)|}$ 是 $\tilde{\gamma}$ 的旋转参量, 由 Hopf's Umlaufsatz, 这是等于 1 的. 所以为证明 (1), 我们必须验证映射 $t \mapsto \frac{\tilde{\gamma}'(t)}{|\tilde{\gamma}'(t)|}$ 和映射 $t \mapsto (\cos \theta(t), \sin \theta(t))$ 的度是相同的. 为此, 练习中已有证明这两个映射的输出不会出现在相反方向. 由引理2.4, 这足以让我们得出这两个映射的度相等的结论.

对于 (2), 我们将沿着 $\tilde{\gamma}$ 对向量场 $\mathcal{F}: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ 应用格林定理 (定理 2.32), 该向量场定义为:

$$\mathcal{F} = (\underbrace{\langle X_u, Y \rangle}_P, \underbrace{\langle X_v, Y \rangle}_Q).$$

因为 $X' = u'X_u + v'X_v$, 这将产生

$$\begin{aligned} \int_a^b \langle X'(t), Y(t) \rangle dt &= \oint_{\tilde{C}} \mathcal{F} \cdot d\tilde{\gamma} = \iint_{\tilde{R}} (Q_u - P_v) du dv \\ &= \iint_{\tilde{R}} (\langle X_v, Y \rangle_u - \langle X_u, Y \rangle_v) du dv \\ &= \iint_{\tilde{R}} (\langle X_v, Y_u \rangle - \langle X_u, Y_v \rangle) du dv \\ &= \iint_{\tilde{R}} \frac{\langle X_v, Y_u \rangle - \langle X_u, Y_v \rangle}{\|\mathbf{d}\sigma\|} \|\mathbf{d}\sigma\| du dv \\ &= \iint_{\tilde{R}} -K \|\mathbf{d}\sigma\| du dv = - \iint_R K dA. \end{aligned}$$

要完成证明, 我们必须证明上面的两个蓝色的表达式在 U 中的任一点处相等. 为此, 令 $q \in U$ 为任意一点, 定义 $p = \sigma(q)$. p 点处的高斯曲率等于关于 $T_p S$ 的任意一个基表示魏恩加滕映射的矩阵的行列式值. 我们会使用基 $\{X, Y\}$, 但是在这个基和基 $\{\sigma_u, \sigma_v\}$ 之间的转换是必要的. 定义转换矩阵为 $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, 使得

$$X = a \cdot \sigma_u + b \cdot \sigma_v, \quad Y = c \cdot \sigma_u + d \cdot \sigma_v$$

¹ 这种特殊情况并没有看上去那么严格; 可以证明, 每一个正则曲面都有保角曲面切片构成的地图集.

在 q 点处成立. 注意到

$$\|\mathrm{d}\sigma_q\| = \det(M^{-1}) = \frac{1}{\det M} = \frac{1}{ad - bc}.$$

S 在 p 处的高斯曲率是

$$\begin{aligned} K(p) &= \det \begin{pmatrix} \langle \mathrm{d}N_p(X), X \rangle & \langle \mathrm{d}N_p(Y), X \rangle \\ \langle \mathrm{d}N_p(X), Y \rangle & \langle \mathrm{d}N_p(Y), Y \rangle \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} \langle \mathrm{d}N_p(a \cdot \sigma_u + b \cdot \sigma_v), X \rangle & \langle \mathrm{d}N_p(c \cdot \sigma_u + d \cdot \sigma_v), X \rangle \\ \langle \mathrm{d}N_p(a \cdot \sigma_u + b \cdot \sigma_v), Y \rangle & \langle \mathrm{d}N_p(c \cdot \sigma_u + d \cdot \sigma_v), Y \rangle \end{pmatrix} \\ &= \det \left(\begin{pmatrix} \langle N_u, X \rangle & \langle N_v, X \rangle \\ \langle N_u, Y \rangle & \langle N_v, Y \rangle \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{\|\mathrm{d}\sigma_q\|} (\langle N_u, X \rangle \cdot \langle N_v, Y \rangle - \langle N_u, Y \rangle \cdot \langle N_v, X \rangle) \\ &= \frac{1}{\|\mathrm{d}\sigma_q\|} (\langle N, X_u \rangle \cdot \langle N, Y_v \rangle - \langle N, Y_u \rangle \cdot \langle N, X_v \rangle) \text{ (由式(6.1))} \\ &= \frac{1}{\|\mathrm{d}\sigma_q\|} (\langle (X_u)^N, (Y_v)^N \rangle - \langle (Y_u)^N, (X_v)^N \rangle) \\ &= \frac{1}{\|\mathrm{d}\sigma_q\|} (\langle X_u, Y_v \rangle - \langle Y_u, X_v \rangle), \end{aligned}$$

其中上标 N 表示 N 方向的投影. 最后的等式来自于式(6.1), 它说明了 X 方向上和 Y 方向上的投影无效. 这样我们就完成了证明. \square

有时候用内角去表示局部高斯-博内定理是很方便的. 沿用定理6.2的记号和假设, 定义 γ 在第 i 个顶点处的内角 (*interior angle*) 为

$$(6.2) \quad \beta_i = \pi - \alpha_i.$$

对一般的曲线中的内角的几何解释和平面上的闭曲线的内角是相同的. 来自于定理的结论变为

$$\int_a^b \kappa_g(t) dt = \sum_i \beta_i - (m-2)\pi - \iint_R K dA,$$

其中 m 是顶点数. 若 γ 的光滑区段是测地线, 那么这就会变为

$$(6.3) \quad \sum_i \beta_i = (m-2)\pi + \iint_R K dA,$$

这就能产生我们熟知的平面多边形的内角和公式. 上述公式在 $m=3$ 的情形下, γ 被称为是测地三角形 (*geodesic triangle*), 公式说明

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = \pi + \iint_R K dA.$$

在正曲率区域中, 相应的三角形有 $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 > \pi$, 这样的三角形称为是“胖”(fat) 的; 在负曲率区域中, 相应的三角形有 $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 < \pi$, 这样的三角形称为是“瘦”(thin) 的.

6.2 全局高斯-博内定理

在这一节中, 我们会将局部高斯-博内定理一般化为一个对任意的正则区域都生效的结论 (而非必须限制在多边形区域上).

更具体地说, 设 S 为定向曲面, $R \subset S$ 为具有正定向边界分支的正则区域. 若 R 是多边形区域, 回忆, 局部高斯-博内定理说的是

$$(6.4) \quad \int \kappa_g(t) dt + \sum \alpha_i = 2\pi - \iint_R K dA.$$

尽管 R 不是多边形区域, 这个等式中的概念依旧是有意义的. 我们会把 “ $\int \kappa_g(t) dt$ ” 解释为所有边界分支的光滑区段上测地曲率积分的和. 类似地, 我们会将 “ $\sum \alpha_i$ ” 解释为所有边界分支的顶点的带符号角度的和. 最后, 术语 $\iint_R K dA$ 可以通过定义 3.55 生效, 假设 R 为有限的仅仅在边界处有交集的多边形区域的并. 我们很快就会看到正则区域和这样的区域是相等的.

有了这样的解释, 就有很多使得式 (6.4) 失效的例子. 每个多边形区域都是和圆盘同胚的, 但是正则区域 R 不一定, 这样就可能和式 (6.4) 冲突.

为修正式 (6.4), 我们得定义一个正则曲面的拓扑不变量, 称为欧拉示性数 (*Euler characteristic*):

Definition 6.4. 设 R 为正则曲面 S 上的正则区域,

- (1) S 中的三角形 (*triangle*) 指的是 S 中具有三个顶点的多边形区域. 三角形的边界的三个光滑区段称为它的三条边 (*edges*).
- (2) R 的三角剖分指的是三角形的一个有限族 $\{T_1, \dots, T_F\}$ 使得:
 - (a) $\bigcup_i T_i = R$.
 - (b) 若 $i \neq j$, 则 $T_i \cap T_j$ 要么是空集, 要么是 T_i 和 T_j 的公共边, 要么是 T_i 和 T_j 的公共顶点.
- (3) R 的三角剖分 $\{T_1, \dots, T_F\}$ 的欧拉示性数 (*Euler characteristic*) 为

$$\chi = V - E + F,$$

其中 F 为面 (三角形) 的数量, E 为边的数量 (每条边只计一次, 就算是两个三角形的公共边也是如此), V 为顶点数量 (每个顶点只计一次, 就算是两个三角形的公共顶点也是如此).

这个定义的重要性来自于下面的定理:

Theorem 6.5. 若 R 是正则曲面 S 上的正则区域, 那么 R 的三角剖分是存在的. 更进一步, R 的两个不同的三角剖分的欧拉示性数是相同的.

我们不会证明三角剖分的存在性命题, 因为证明带点技巧性. 但是同一个图形的两个不同的三角剖分的欧拉示性数相等是即将到来的定理6.8的直接结论.

因为 R 三角剖分的欧拉示性数仅仅取决于 R 本身, 我们由此将它记为 $\chi(R)$, 叫做 R 的欧拉示性数 (*Euler characteristic of R*).

如果两个正则区域 $R \subset S$ 和 $\tilde{R} \subset \tilde{S}$ 是微分同胚的, 那么它们的欧拉示性数是相同的. 这是因为微分同胚 $f: R \rightarrow \tilde{R}$ 会将 R 的一个三角剖分映射为 \tilde{R} 的一个具有相同的 V, E, F 值的三角剖分.

欧拉示性数能够更一般地被定义, 就算在 S 不一定是正则曲面的时候, 只要 R 的边界是连续 (甚至不需要是分片正则的) 曲线的轨迹. 在这样的一般化之后, 三角剖分的存在性依旧是成立的, 其三角剖分的欧拉示性数也是仅仅取决于 R 的. 在这样的一般化情形之下, 两个同胚的区域一定具有相同的欧拉示性数.

$R \subset S$ 的三角剖分中的边是内边线 (*interior edge*) 若它是两个三角形的公共边, 是外边线 (*exterior edge*) 若它仅仅属于某一个三角形. 所有的外边线组成 R 的边界. 若 S 是定向的, 且若三角剖分中每个三角形的边界都是正定向的, 那么两个具有公共边的三角形在这个公共边上会有不同的方向. 更进一步, 每一条外边线的定向都应该和 R 的边界的正定向是一致的.

Example 6.6 (简单区域具有 $\chi = 1$). 简单区域指的是和圆盘 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 同胚的正则区域. 这和多边形区域是相同的, 除了我们并没有加上它能够被单个曲面切片覆盖的假定. 简单绘图后可以算出这样的图形的欧拉示性数是 1.

Example 6.7 (柱面有 $\chi = 0$). 柱面的平面展开可以是个长方形—我们将长方形的两条对边粘贴起来就能够得到一个柱面. 那么, 这样的方法加速那欧拉示性数为 $\chi = V - E + F = 2 - 3 + 1 = 0$.

Theorem 6.8 (全局高斯-博内定理). 若 S 为定向曲面, $R \subset S$ 为具有正定向单位速边界分支的正则区域, 那么

$$\int \kappa_g(t) dt + \sum \alpha_i = 2\pi\chi(R) - \iint_R K dA,$$

在上式中, “ $\int \kappa_g(t) dt$ ” 表示测地曲率在 R 的边界分支在各个光滑区段上的积分的和, 而 “ $\sum \alpha_i$ ” 表示所有边界分支的所有顶点处的带符号角度的和. kanwu

和定义3.55中的一样, 概念“ $\iint_R K dA$ ”指的是 K 的在三角剖分的面上的积分的和, 能够证明它和三角剖分的选择无关.

Proof. 设 m 表示 R 的所有边界分支的顶点总数, 那么定理中的表达式“ $\sum \alpha_i$ ”就能够更精确地写成“ $\sum_{i=1}^m \alpha_i$ ”. 对每个 $i = 1, 2, \dots, m$, 令 $\beta_i = \pi - \alpha_i$ 表示相应的内角 (和式(6.2)一致).

选定 R 的一个三角剖分, 记为 $\{T_1, \dots, T_F\}$. 分别记这个三角剖分的顶点数, 面数和边数为 V, F, E . 令 E_{ext} 和 E_{int} 分别表示外边线和内边线的数量, 所以

$$E = E_{\text{ext}} + E_{\text{int}}.$$

类似地, 令 V_{ext} 和 V_{int} 分别表示外顶点 (属于 ∂R) 和内顶点 (不属于 ∂R) 的数量. 注意到

$$V = V_{\text{ext}} + V_{\text{int}} = m + V_{\text{ext}}^+ + V_{\text{int}},$$

其中 V_{ext}^+ 表示由三角剖分引入的外顶点数量.

对于这个三角剖分中的每个三角行, 选定一个正定向的单位速重参数化. 对每个三角形应用局部高斯-博内定理, 对结果进行求和我们就得到

$$(6.5) \quad \underbrace{\sum_{i=1}^F \left(\int_{\partial T_i} \kappa_g(t) dt \right)}_{\boxed{\int \kappa_g(t) dt}} + \underbrace{\sum_{i=1}^F \left(\begin{array}{c} T_i \text{ 的三个带} \\ \text{符号角度之和} \end{array} \right)}_{\boxed{A}} = 2\pi F - \underbrace{\sum_{i=1}^F \iint_{T_i} K dA}_{\boxed{\iint_R K dA}}.$$

左侧的和式可以简化为 $\int \kappa_g(t) dt$, 因为每个内边线都能够收到来自它所属的三角形的正定向. 这样, 内边线上的积分就被抵消了, 那么只有外边线上的积分值生效, 外边线组成了 R 的边界.

(这里的分页是因为下面的行间公式太大, 这一页放不下.)

我们还需要简化中间的和式, 它计算的是所有三角形的带符号角度和:

$$\begin{aligned}
 \boxed{A} &= 3\pi F - \sum_{i=1}^F \left(T_i \text{ 的三个带符号角度之和} \right) \\
 &= 3\pi F - \left(\begin{array}{c} \text{所有内定点处} \\ \text{的内角之和} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{所有外顶点处} \\ \text{的内角之和} \end{array} \right) \\
 &= 3\pi F - (2\pi V_{\text{int}}) - \left(\sum_{i=1}^m \beta_i + \pi V_{\text{ext}}^+ \right) \\
 &= 3\pi F - (2\pi V_{\text{int}}) - \left(\left(\pi m - \sum_{i=1}^m \alpha_i \right) + \pi V_{\text{ext}}^+ \right) \\
 &= \sum_{i=1}^m \alpha_i + \pi (2E_{\text{int}} + E_{\text{ext}}) - 2\pi V_{\text{int}} - \pi V_{\text{ext}}^+ - \pi m \quad (3F = 2E_{\text{int}} + E_{\text{ext}}) \\
 &= \sum_{i=1}^m \alpha_i + \pi (2E_{\text{int}} + 2E_{\text{ext}}) - 2\pi V_{\text{int}} \underbrace{-\pi V_{\text{ext}}^+ - \pi m}_{-\pi V_{\text{ext}}} - \pi V_{\text{ext}} \quad (V_{\text{ext}} = E_{\text{ext}}) \\
 &= \sum_{i=1}^m \alpha_i + 2\pi E - 2\pi V.
 \end{aligned}$$

将这个式子带入式(6.5)就能够证明定理. \square

有许多全局高斯-博内定理的强而有力的结果. 例如, 局部高斯-博内定理的结论在 R 是任何简单区域的时候都是对的 (而不仅仅在多边形区域的情况下), 因为由例6.6, 每个简单区域的欧拉示性数都等于 1. 这一点允许我们证明下面的推论:

Corollary 6.9. 若 S 是正则曲面, $K \leq 0$, 那么从某一点 $p \in S$ 处出发的两条测地线不可能以下面的方式在 $q \in S$ 处相交: 它们的轨迹形成一个简单区域的边界.

Proof. 如果真的是这样的, 那么式(6.3)就会给出 $\beta_1 + \beta_2 = \iint_R K dA \leq 0$, 其中 β_1, β_2 为 p 和 q 处形成的内角. 因此, $\beta_1 = \beta_2 = 0$, 和测地线的唯一性 (定理 5.3) 矛盾. \square

引理6.9是个命题 5.76 的强化版本, 该命题说明无穷小意义下测地线在 $\kappa \leq 0$ 的曲面上从不相交. 另一方面, 在曲面不是单连通 (simply connected) 的时候, 测地线是可以在 $K \leq 0$ 时相交的:

Definition 6.10. 正则曲面 S 被称为是单连通的 (*simply connected*) 若 S 中每个分片正则的简单闭曲线都是简单区域的边界.

一个推论6.9的结论如下:

Corollary 6.11. 若 S 是连通的, 单连通的, 完备的正则曲面, 且满足 $K \leq 0$, 那么对于任意的 $p \in S, \exp_p : T_p S \rightarrow S$ 为微分同胚.

Proof. 指数映射是满射, 应为 S 是完备的, 且由推论 5.79 是个局部微分同胚, 由推论 6.9 双射, 所以它是微分同胚. \square

对覆盖空间理论熟悉的读者能够直接用推论 5.79 证明推论 6.11, 不需要用到高斯-博内定理.

我们的下一个推论如下:

Corollary 6.12. 若 S 是和柱面微分同胚的正则曲面, 具有高斯曲率 $K < 0$, 那么 S 至多有一个简单闭测地线 (关于重参数化唯一).

Proof. 假设 S 具有两个不同的简单闭测地线, 记它们的轨迹为 C_1, C_2 . 通过考虑它们在从 S 到穿孔平面 $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ 的微分同胚的图像, 我们能够得出结论:

- (1) 若 C_1 和 C_2 在某一点处相交, 那么这将会和测地线的唯一性矛盾.
- (2) 若 C_1 和 C_2 在多个点处相交, 那么它们在这几个交点之间的区段将会围出一个简单区域, 和推论 6.9 矛盾.
- (3) 若 C_1 和 C_2 无交, 那么它们会形成一个区域 R 的边界, 此区域和例 6.7 中的有界柱面微分同胚 (因此欧拉示性数相同). 高斯-博内定理给出 $\iint_R K dA = 2\pi\chi(R) = 0$, 和 $K < 0$ 的假定矛盾.

\square

6.3 紧曲面

紧正则曲面能够被视作无边界分支的正则区域. 因为边界是空集, 所以所有的三角剖分的边都是内边线. 在这样的情况下, 全局高斯-博内定理说的就是下面这个事儿:

Corollary 6.13. 若 S 是紧连通正则曲面, 那么

$$\iint_S K dA = 2\pi\chi(S).$$

一些文献将这个推论称为“高斯-博内定理”, 因为这个结论很重要, 担得起这个名头, 尽管它事实上仅仅是高斯-博内定理的一个特殊情况. 在这一节, 我们会讨论它的强大的推论, 包括庞加莱定理 (Poincaré's theorem).

我们开始计算一些紧曲面的欧拉示性数, 开始时我们选择球面:

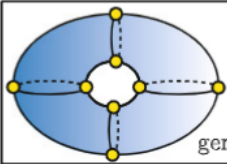
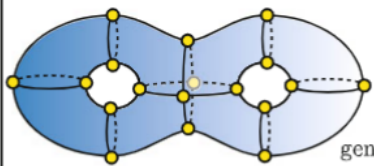
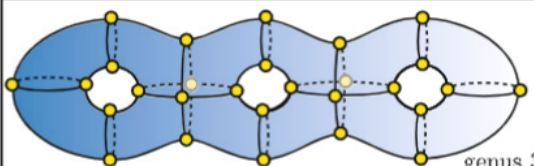
Example 6.14 ($\chi(S^2) = 2$). S^2 具有数种不同的三角剖分, 比较常用的是将它分为正四面体的一种剖分方法. 最直观地说就是沿着坐标平面将球面分割开来 (只割两道). 很容易计算出 $\chi(S^2) = 2$. 由推论 6.13 知道 $\iint_S K dA = 4\pi$ 对任意的与球面微分同胚的正则曲面 S 成立, 这非常美妙!

球面 S^2 的亏格为零, 其定义如下:

Definition 6.15. 紧连通正则曲面的亏格 (*genus*) 指的是

$$g = 1 - \frac{1}{2}\chi(S).$$

下图展示了一些亏格值的曲面的拓扑构型——长得就像粘在一起的甜甜圈. 这些曲面的一般化三角剖分 (见练习 6.7 中的定义) 说明亏格等于甜甜圈数量. 尽管只有 $g = 1, 2, 3$ 的情形画了出来, 但是省略号和一般表达式说明了这些数字会怎样变化. 因此, 对于每个 $g \geq 1$ 的整数, 具有亏格 g 的曲面的欧拉示性数为 $2 - 2g$.

	V	E	F	χ
 genus 1	8	16	8	0
 genus 2	18	36	16	-2
 genus 3	28	56	24	-4
surface of genus g	$10g - 2$	$20g - 4$	$8g$	$2 - 2g$

总之, S^2 的亏格为 0, 同时对于 $g \geq 1$, g 个粘在一起的甜甜圈的亏格是 g . 我们不加证明地宣告如下定理, 也就是说除了上面的例子, 没有其他的不同的紧正则曲面的拓扑构型:

Theorem 6.16. 每个连通紧正则曲面的亏格都是 ≥ 0 的整数. 更进一步, 每一对具有相同亏格的紧正则曲面都一定是微分同胚的.

等价地说, 每个紧连通正则曲面的欧拉示性数都是 $\{\dots, -6, -4, -2, 0, 2\}$ 中的一个元素, 任意两个欧拉示性数相同的连通紧正则曲面都一定是微分同胚的. 这说明下面的结论:

Corollary 6.17. 紧连通正则曲面 S , 若它满足 $K > 0$, 那么它一定是和球面 S^2 微分同胚的.

Proof. 假设它不是和 S^2 微分同胚的, 那么 $\chi(S) \neq 2$, 那么 $\chi(S) \leq 0$. 因此,

$$\iint_S K dA = 2\pi\chi(S) \leq 0,$$

这和我们曲率为正的假设矛盾. □

我们在本节的最后将说明庞加莱定理 (Poincaré's theorem), 这是个高斯-博内定理的强有力的应用. 我们先设定一些术语:

Definition 6.18. 设 V 为正则曲面 S 上的切向量场 (见定义3.43). 我们称 $p \in S$ 为 V 的奇点 (singular point) 若 $V(p) = \mathbf{0}$. 在这种情况下, 若在 p 在 S 中的一个邻域内 p 是 V 的唯一一个奇点那么称 p 是孤立的 (isolated).

若 S 是紧的, V 的所有奇点都是孤立的, 那么仅仅可能有有限多的孤立点.

假设 S 是定向的, 那么我们下面会定义 V 在 p 处的指数, 它是个能够回答下面这个问题的整数: 假设我逆时针围绕着以 p 为中心的一个小环路行走, 且我始终面朝我所遇到的向量的方向 (也就是 $V(p_t)$ 的值, p_t 为我所处的位置), 那么我再这个过程中总体而言会逆时针旋转多少圈? 作为热身, 我们首先通过 \mathbb{R}^2 中的向量场使得这个概念更加精确, 利用来自定义2.3的度的概念:

Definition 6.19. 向量场 V 在一个孤立奇点 p 处的指数 (index) 等于函数 $f_\epsilon : [a, b] \rightarrow S^1$ 的度, 它满足

$$f_\epsilon(t) = \frac{V(\gamma_\epsilon(t))}{|V(\gamma_\epsilon(t))|},$$

其中 $\gamma_\epsilon : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 为以 p 为中心的绕半径为 ϵ 的圆的逆时针旋转的参数化, $\epsilon > 0$ 且足够小到在这个圆中除了 p 之外没有其他的奇点.

这个定义和 ϵ 的选择是无关的, 因为 f_ϵ 的度是个整值量, 引理2.4能够被用来说明它关于 ϵ 连续变化, 因此而必须是个常数.

为定义 $S \neq \mathbb{R}^2$ 时的“指数”，我们得在局部坐标中应用定义6.19. 但是为使定义更具广泛性，我们把圆换成任意的多边形区域：

Definition 6.20. 设 p 为定向正则曲面 S 上的切向量场 V 上的一个孤立奇异点. 设 $R \subset S$ 为内部包含 p 但是在边界和内部没有其他奇异点的一个多边形区域. 设 $\gamma : [a, b] \rightarrow S$ 为 ∂R 的正定向重参数化. 设 $\sigma : U \subset \mathbb{R}^2$ 是与定向一致的覆盖 R 的曲面切片. 对 $t \in [a, b]$, 设 $\sigma_u(t)$ 和 $V(t)$ 表示 σ_u 和 V 在 $\gamma(t)$ 处的值. 设 $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 连续函数, 它满足对任意的 $t \in [a, b]$, 它等于从 $\sigma_u(t)$ 到 $V(t)$ 的角度. 更准确地说, $V(t)$ 是将 $\sigma_u(t)$ 逆时针旋转 $\varphi(t)$ 的角度的正向标量积. V 在 p 处的**指数 (index)** 指的是

$$(6.6) \quad I(p) = \frac{1}{2\pi} \Delta\varphi = \frac{1}{2\pi} (\varphi(b) - \varphi(a)).$$

定义6.20是独立于多边形区域的. 尽管我们会略去细节, 但是证明这个假定需要证明任意一个多边形区域都能够连续地变形为另外一个; 由于指数是整数且随着形变连续变化, 它肯定是个常数.

定义6.20也是独立于 S 的 (局部) 定向的, 所以在无定向曲面上衡量向量场在奇异点处的指数是有意义的.

我们现在证明定义6.20也是和曲面切片 σ 的选择无关的. 为此, 所有的假设和记号都和定义保持一致, 我们令 $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ 为沿着 γ 的平行向量场, 令 $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 为连续函数, 满足对于所有的 $t \in [a, b]$, $\phi(t)$ 等于从 $\sigma_u(t)$ 到 $w(t)$ 的角度. 根据推论6.3,

$$(6.7) \quad \Delta\phi = \phi(b) - \phi(a) = \iint_R K dA.$$

将式(6.6)和式(6.7)作差我们得到

$$(6.8) \quad \Delta(\phi - \varphi) = (\phi - \varphi)(b) - (\phi - \varphi)(a) = \iint_R K dA - 2\pi \cdot I(p).$$

因为 ϕ 是个从 σ_u 到 w 的角度, 同时 φ 是从 σ_u 到 V 的角度, 它们的差就等于从 V 到 w 的角度. 因此, 数值 $\Delta(\phi - \varphi)$ 就等于 V 相对于 γ 的平行向量场的净旋转角度, 这个是和 σ 无关的. 所以利用式(6.8)求解 $I(p)$ 就能够求解出仅涉及与 σ 无关的度量的表达式.

式(6.8)也是证明下列定理的关键:

Theorem 6.21 (庞加莱定理). 若 S 是紧连通正则曲面, V 是其上的切向量场, 其所有的奇异点都是孤立的, 那么这些孤立点处的所有的指数之和等于 $\chi(S)$.

Proof. 首先, 找出 S 的一个三角剖分, 使得没有 V 的奇异点位于边上且每个三角形内的奇异点只有至多一个是可行的.

若 T 是个包含一个奇异点 p 的面, 式(6.8)就会给出

$$\iint_T K dA - 2\pi \cdot I(p) = V \text{ 相对于绕着 } \partial T \text{ 的平行向量场的净旋转.}$$

若 T 是个其内不包含任何奇异点的面, 那么式(6.8)中的逻辑就简化为

$$\iint_T K dA - 0 = V \text{ 相对于绕着 } \partial T \text{ 的平行向量场的净旋转.}$$

注意, 每个“净旋转”的概念都是和沿着三角形边界的平行向量场的选择无关的. 事实上, 每个这样的概念都是三条边线上的 V 相对于沿着该边的净旋转的和. 这个度量对于单条边也是有意义的 (甚至选定三条边上的平行向量场的时候都不需要保持一致). 这个度量在变的定向改变的时候会变号.

对每个面都进行求和就能够得到

$$\iint_S K dA - 2\pi \cdot (\text{所有奇异点处的指数}) = 0.$$

这是因为所有的边界都是内部边界, 所以净旋转量就会相互抵消. 因为 $\iint_S K dA = 2\pi\chi(S)$, 这样我们就能够完成证明. \square

Corollary 6.22. 在其上存在处处不为零的切向量场的紧连通正则曲面 S 一定是和圆环面 (torus, 即甜甜圈的形状) 微分同胚的.

Proof. 处处不为零的切向量场是没有奇异点的, 由庞加莱定理, 这说明 $\chi(S) = 0$. 换句话说, S 的亏格是 1. \square

这个推论说明了 S^2 上面是没有处处不为零的向量场的; 这个事实有的时候会被称为毛球定理 (*hairy ball theorem*), 被戏谑地描述为:“你永远梳理不顺一个毛球.”Wikipedia 关于“毛球定理”的文章²包含了一个 S 上仅有一个指数为 2 的奇异点的动态演示.

6.4 其他全局定理示例

微分几何的一个基本的主题就是曲率和全局形状之间的关系. 简单闭曲线的全局形状和曲率之间的关系可以用包括但是不限于 Hopf's Umlaufsatz, 四顶点定理, Fenchel's theorem, Fary-Milnor theorem 的等等定理来描述. 对于紧曲面, 高斯-博内定理提供了一种曲率和大致形状的大致的关系描述.

在这一节中, 我们概览一些 (无证明) 其他的重要的基本定理, 都是关于曲率和曲线的形状的关系的.

(不想写了, 本节略)

(正文完结 (才怪, 还有很多省略了的, 不过期末之前就写这么多了))

² 建议去查英文版