Curling Diplomarbeit an der Man Auszug

Uli Sutor

1988

Inhaltsverzeichnis

9	Theorie				
	9.1	Das Cı	urlen	3	
		9.1.1	Herleitung der Gleichungen	3	
			Kraft senkrecht auf Laufrichtung (bewirkt curlen)	4	
			Kraft parallel Laufrichtung (bremst Stein)	6	
			Drehmoment (bremst Drehung des Steins)	6	
		9.1.2	Analytische Auswertung	7	
			Allgemeine Bemerkungen	7	
			Näherungsweise Lösung	8	
			Auswertung der Näherungslösung	9	
		9.1.3	Numerische Lösung	9	
			Differentialgleichungen	9	
			Numerik	10	
			Modell für die Reibungskraft	10	

Abbildungsverzeichnis

9.1	Der Stein auf dem Eis-Rink	3
9.2	Der Laufring des Steins	4
9.3	Typische Bahnkurve eines Curlingsteins	5
9.4	Reibungsmodell Stein/Eis $F(v)$ nach Uli Sutor (grobe Näherung)	11

Kapitel 9

Theorie

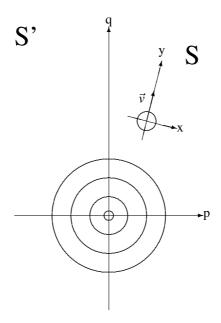


Abbildung 9.1: Der Stein auf dem Eis-Rink

9.1 Das Curlen

9.1.1 Herleitung der Gleichungen

Geschwindigkeit eines Punktes des Laufrings

- \vec{v}_R Geschwindigkeit eines Punktes auf dem Laufring
- \vec{v} Geschwindigkeit des Steins
- winkelgeschwindigkeit des Steins

$$\vec{v}_R = \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{pmatrix} -\omega r \sin \varphi \\ |\vec{v}| + \omega r \cos \varphi \end{pmatrix}$$
 (9.1)

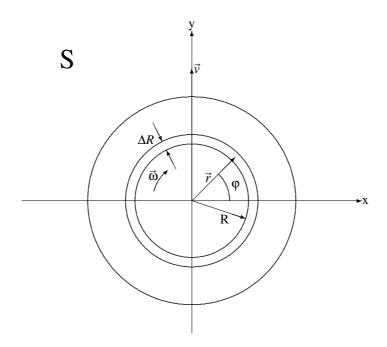


Abbildung 9.2: Der Laufring des Steins

$$|\vec{v}_R| = |\vec{v}| \sqrt{1 + 2\frac{\omega r}{|\vec{v}|} \cos \varphi + \left(\frac{\omega r}{|\vec{v}|}\right)^2}$$
 (9.2)

Für die geschwindigkeitsabhängige Kraft gilt

 \vec{f} Reibungskraft pro Flächeneinheit des Laufrings

$$\vec{f} = -\frac{\vec{v}_R}{|\vec{v}_R|} f \tag{9.3}$$

dabei wird für f die allgemeinste Form angenommen

$$f = f(|\vec{v}_R|, x, y, \mathbf{\omega}) \tag{9.4}$$

Für die Umwandlung in Polarkoordinaten gilt

$$x = r\cos\varphi \tag{9.5}$$

$$y = r\sin\varphi \tag{9.6}$$

damit ergibt sich für Gl. (9.4)

$$f = f(|\vec{v}_R|, r\cos\varphi, r\sin\varphi, \omega) \tag{9.7}$$

Kraft senkrecht auf Laufrichtung (bewirkt curlen)

Wenn man in Gl. (9.3) nur die *x*-Komponente von Gl. (9.1) einsetzt und sowohl über den ganzen Laufring, als auch über die Breite des Rings integriert, erhält man

 ΔR Breite des Laufrings

R Radius des Laufrings

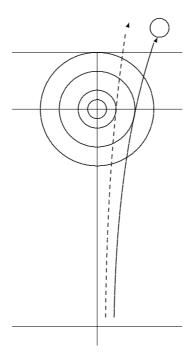


Abbildung 9.3: Typische Bahnkurve eines Curlingsteins

$$F_{x} = -\int_{R}^{R+\Delta R} dr \int_{0}^{2\pi} d\varphi \, r \frac{-(\omega r \sin \varphi) f}{|\vec{v}| \sqrt{1 + 2\frac{\omega r}{|\vec{v}|} \cos \varphi + \left(\frac{\omega r}{|\vec{v}|}\right)^{2}}}$$
(9.8)

mit der Substitution

$$\xi = \cos \varphi, \quad \text{dann} \quad \frac{d\xi}{d\varphi} = -\sin \varphi = \begin{cases} -\sqrt{1 - \xi^2}, \ 0 \le \varphi < \pi \\ +\sqrt{1 - \xi^2}, \ \pi \le \varphi < 2\pi \end{cases}$$
(9.9)

folgt mit Gl. (9.7)

$$F_{x} = -\frac{\omega}{|\vec{v}|} \int_{R}^{R+\Delta R} dr \, r^{2} \left[\int_{1}^{-1} d\xi \, \frac{f(|\vec{v}_{R}|, r\xi, +r\sqrt{1-\xi^{2}}, \omega)}{\sqrt{1+2\frac{\omega r}{|\vec{v}|}\xi + \left(\frac{\omega r}{|\vec{v}|}\right)^{2}}} + \int_{-1}^{1} d\xi \, \frac{f(|\vec{v}_{R}|, r\xi, -r\sqrt{1-\xi^{2}}, \omega)}{\sqrt{1+2\frac{\omega r}{|\vec{v}|}\xi + \left(\frac{\omega r}{|\vec{v}|}\right)^{2}}} \right]$$
(9.10)

und damit

$$F_{x} = -\frac{\omega}{|\vec{v}|} \int_{R}^{R+\Delta R} dr \, r^{2} \int_{-1}^{1} d\xi \, \frac{f(|\vec{v}_{R}|, r\xi, -r\sqrt{1-\xi^{2}}, \omega) - f(|\vec{v}_{R}|, r\xi, +r\sqrt{1-\xi^{2}}, \omega)}{\sqrt{1+2\frac{\omega r}{|\vec{v}|}\xi + \left(\frac{\omega r}{|\vec{v}|}\right)^{2}}}$$
(9.11)

Da die Summe im Nenner von Gl. (9.11) nur einen Unterschied in der *y*-Komponente der Kraft aufweist, ergibt sich nur dann ein von Null verschiedener Wert, wenn die Kraft eine *y*-Abhängigkeit hat.

Kraft parallel Laufrichtung (bremst Stein)

Wenn man in Gl. (9.3) nur die y-Komponente von Gl. (9.1) einsetzt, ergibt sich

$$F_{y} = -\int_{R}^{R+\Delta R} dr \int_{0}^{2\pi} d\varphi \frac{(|\vec{v}| + \omega r \cos\varphi)f}{|\vec{v}|\sqrt{1 + 2\frac{\omega r}{|\vec{v}|}}\cos\varphi + \left(\frac{\omega r}{|\vec{v}|}\right)^{2}} =$$

$$= -\int_{R}^{R+\Delta R} dr \left[\int_{1}^{-1} d\xi \left(-\sqrt{1 - \xi^{2}} \right)^{-1^{2}} \right) \frac{\left(1 + \frac{\omega r}{|\vec{v}|}\xi\right)}{\sqrt{1 + 2\frac{\omega r}{|\vec{v}|}}\xi + \left(\frac{\omega r}{|\vec{v}|}\right)^{2}} f(|\vec{v}_{R}|, r\xi, +r\sqrt{1 - \xi^{2}}, \omega) +$$

$$+ \int_{-1}^{1} d\xi \left(+\sqrt{1 - \xi^{2}} \right)^{-1^{2}} \frac{\left(1 + \frac{\omega r}{|\vec{v}|}\xi\right)}{\sqrt{1 + 2\frac{\omega r}{|\vec{v}|}}\xi + \left(\frac{\omega r}{|\vec{v}|}\right)^{2}} f(|\vec{v}_{R}|, r\xi, -r\sqrt{1 - \xi^{2}}, \omega)$$

$$(9.13)$$

Die beiden Integranden kann man wieder zusammenfassen

$$F_{y} = -\int_{R}^{R+\Delta R} dr \int_{-1}^{1} d\xi \frac{\left(1 + \frac{\omega r}{|\vec{v}|} \xi\right) \sqrt{1 - \xi^{2}}^{-1^{2}}}{\sqrt{1 + 2\frac{\omega r}{|\vec{v}|} \xi + \left(\frac{\omega r}{|\vec{v}|}\right)^{2}}} \left[f(|\vec{v}_{R}|, r\xi, +r\sqrt{1 - \xi^{2}}, \omega) + f(|\vec{v}_{R}|, r\xi, -r\sqrt{1 - \xi^{2}}, \omega) \right]$$
(9.14)

Drehmoment (bremst Drehung des Steins)

Für das Drehmoment gilt mit Gl. (9.3)

μ Drehmoment auf Flächenelement des Laufrings

$$\vec{\mu} = \vec{r} \times \vec{f} = -\frac{f}{|\vec{v}_R|} \vec{r} \times \vec{v}_R \tag{9.15}$$

Umgerechnet in Polarkoordinaten folgt in Vektorschreibweise für das Vektorprodukt

$$\vec{r} \times \vec{v}_{R} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\omega r\sin\varphi \\ |\vec{v}| + \omega r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r\cos\varphi(|\vec{v}| + \omega r\cos\varphi) + \omega r^{2}\sin^{2}\varphi \end{pmatrix}$$

$$= (|\vec{v}|r\cos\varphi + \omega r^{2}) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
(9.16)

Für den Betrag des Drehmoments also

$$\mu_3 = -\frac{f}{|\vec{v}_R|} \cdot (\vec{r} \times \vec{v}_R)_3 = -\frac{f}{|\vec{v}_R|} \cdot \left(|\vec{v}| r \cos \varphi + \omega r^2 \right) \tag{9.17}$$

setzt man Gl. (9.17) in Gl. (9.15) ein, mit Gl. (9.2)

$$\mu_{3} = -(|\vec{v}|r\cos\varphi + \omega r^{2})\frac{f}{|\vec{v}_{R}|} = -\frac{r(\cos\varphi + \frac{\omega r}{|\vec{v}|})f}{\sqrt{1 + 2\frac{\omega r}{|\vec{v}|}\cos\varphi + \left(\frac{\omega r}{|\vec{v}|}\right)^{2}}}$$
(9.18)

Damit ergibt sich für das Gesamtdrehmoment M

$$M = \int_{R}^{R+\Delta R} dr \int_{0}^{2\pi} d\varphi \, r\mu_3 \tag{9.19}$$

und nach Einsetzen von Gl. (9.18) mit der Substitution Gl. (9.9)

$$= -\int_{R}^{R+\Delta R} dr r^{2} \left[\int_{1}^{-1} d\xi \frac{-\left(\frac{\omega r}{|\vec{v}|} + \xi\right) \sqrt{1 - \xi^{2}}^{-1^{?}} f(|\vec{v}_{R}|, r\xi, +r\sqrt{1 - \xi^{2}}, \omega)}{\sqrt{1 + 2\frac{\omega r}{|\vec{v}|} \xi + \left(\frac{\omega r}{|\vec{v}|}\right)^{2}}} + \int_{-1}^{1} d\xi \frac{+\left(\frac{\omega r}{|\vec{v}|} + \xi\right) \sqrt{1 - \xi^{2}}^{-1^{?}} f(|\vec{v}_{R}|, r\xi, -r\sqrt{1 - \xi^{2}}, \omega)}{\sqrt{1 + 2\frac{\omega r}{|\vec{v}|} \xi + \left(\frac{\omega r}{|\vec{v}|}\right)^{2}}} \right]$$
(9.20)

Die Integranden kann man wieder zusammenfassen

$$M = -\int_{R}^{R+\Delta R} dr \, r^{2} \int_{1}^{-1} d\xi \, \frac{\left(\frac{\omega r}{|\vec{v}|} + \xi\right) \sqrt{1 - \xi^{2}}^{-1^{2}}}{\sqrt{1 + 2\frac{\omega r}{|\vec{v}|}\xi + \left(\frac{\omega r}{|\vec{v}|}\right)^{2}}} \left[f(|\vec{v}_{R}|, r\xi, +r\sqrt{1 - \xi^{2}}, \omega) + f(|\vec{v}_{R}|, r\xi, -r\sqrt{1 - \xi^{2}}, \omega) \right]$$
(9.21)

9.1.2 Analytische Auswertung

Allgemeine Bemerkungen

Aus Gleichung Gl. (9.11) folgt, daß der Stein nur curlt, wenn eine *y*-Abhängigkeit der Kraft vorhanden ist, d.h. die Reibungskraft muß auf der Vorderseite des Steins (in Laufrichtung gesehen) verschieden von der auf der Rückseite sein. Dabei muß die Kraft auf der Vorderseite betragsmäßig kleiner sein. ¹ Diese Abhängigkeit hat nichts mit der Geschwindigkeitsabhängigkeit zu tun. Aus einer reinen Geschwindigkeitsabhängigkeit ergibt sich kein Curlen des Steins, egal, welche genaue Form diese Geschwindigkeitsabhängigkeit hat.

Die physikalische Ursache für diese Ortsabhängigkeit ist die Verdrängung des Wasserfilms durch den laufenden Stein, d.h. die Vorderseite gleitet auf einem etwas dickeren Wasserfilm als die Rückseite und hat daher eine niedrigere Reibung (gleicher Effekt wie bei der Reibungsverminderung durch das Wischen).²

Beim Shuffleboard, bei dem die Scheiben ja in der "falschen" Richtung curlen, wird die y-Abhängigkeit vermutlich durch kleine Schmutzpartikel auf der Bahn verursacht, daher hat die Rückseite, bei der weniger

¹Anm.: Meiner Meinung nach kommt *nur* eine Geschwindigkeitsabhängigkeit in Frage, da alle Effekte lokal und isoliert an den einzelnen Pebble wirken. Aus der Kreisbewegung + Längsbewegung ergibt sich rein geometrisch die geforderte Reibungsverteilung.

²Anm.: Auch dies trifft nicht zu, da der Stein keinen Wasserfilm benötigt um darauf zu gleiten. Das Eis selbst ist schon 'glatt'. Man beachte die Forschungsergebnisse von Gabor Somorjai.

Schmutzpartikel vorhanden sind, *mehr*³ Reibung. Damit ergibt sich das Curlen in die andere Richtung. Dies bestätigen auch Versuche mit einem Curlingstein auf einem Linoleumbelag.

Des weiteren muß die y-Abhängigkeit der Reibungskraft ω-abhängig sein, da bei einem sehr schnell drehenden Stein der Unterschied zwischen Vorder- und Rückseite nicht mehr so ausgeprägt sein sollte.

Für die Tatsache, daß der Stein curlt ist die Geschwindigkeitsabhängigkeit ohne Bedeutung, sie hat nur einen Einfluß auf den Betrag des Curlens.

Näherungsweise Lösung

1. Schmaler Laufring: $\Delta R \ll R$

$$r = (R + dR) = R(1 + \varepsilon), \quad \varepsilon \ll 1 \tag{9.22}$$

Man nähere innerhalb der Integrale über ξ alle r durch R an, und berücksichtige beim Integral über r nur das Glied nullter Ordnung in ε .

dann folgt aus Gl. (9.11)

$$F_{x} = -\frac{\omega R}{|\vec{v}|} \int_{-1}^{1} d\xi \frac{R\Delta R \left(f(|\vec{v}_{R}|, R\xi, -R\sqrt{1-\xi^{2}}, \omega) - f(|\vec{v}_{R}|, R\xi, +R\sqrt{1-\xi^{2}}, \omega) \right)}{\sqrt{1 + 2\frac{\omega R}{|\vec{v}|}\xi + \left(\frac{\omega R}{|\vec{v}|}\right)^{2}}}$$
(9.23)

und aus Gl. (9.14)

$$F_{y} = -\int_{-1}^{1} d\xi \frac{\left(1 + \frac{\omega R}{|\vec{v}|} \xi\right) \sqrt{1 - \xi^{2}}^{-1^{?}}}{\sqrt{1 + 2\frac{\omega R}{|\vec{v}|} \xi + \left(\frac{\omega R}{|\vec{v}|}\right)^{2}}} R\Delta R \left(f(|\vec{v}_{R}|, R\xi, +R\sqrt{1 - \xi^{2}}, \omega) + f(|\vec{v}_{R}|, R\xi, -R\sqrt{1 - \xi^{2}}, \omega)\right)$$
(9.24)

das Gesamtdrehmoment ergibt sich

$$M = -\int_{1}^{-1} d\xi \frac{R\left(\frac{\omega R}{|\vec{v}|} + \xi\right)\sqrt{1 - \xi^{2}}^{-1?}}{\sqrt{1 + 2\frac{\omega R}{|\vec{v}|}\xi + \left(\frac{\omega R}{|\vec{v}|}\right)^{2}}} R\Delta R\left(f(|\vec{v}_{R}|, R\xi, +R\sqrt{1 - \xi^{2}}, \omega) + f(|\vec{v}_{R}|, R\xi, -R\sqrt{1 - \xi^{2}}, \omega)\right)$$
(9.25)

2. Einfachster Ansatz für f:

Da nur eine y-Abhängigkeit der Kraft interessiert, wird für diese als einfachster Ansatz eine lineare Beziehung angesetzt.

$$f(|\vec{v}_R|, x, y, \mathbf{\omega}) = f_0\left(1 - \alpha \frac{y}{R}\right), \quad \text{mit} \quad \alpha > 0.$$
 (9.26)

Bei diesem Ansatz ist die ω -Abhängigkeit von f vernachlässigt, ebenso die Geschwindigkeitsabhängigkeit. Die y-Abhängigkeit wird durch eine lineare Beziehung genähert.

Als willkürliche Kraftkonstante wird nun K eingeführt mit

$$K = \pi R \Delta R f_0$$
, dann gilt:

³Anm.: weniger

Für den Zähler von Gl. (9.23) mit Gl. (9.25)

$$R\Delta R\left(f(|\vec{v}_R|, R\xi, -R\sqrt{1-\xi^2}, \omega) - f(|\vec{v}_R|, R\xi, +R\sqrt{1-\xi^2}, \omega)\right) = \frac{2}{\pi}\alpha K\sqrt{1-\xi^2}$$
(9.27)

$$R\Delta R\left(f(|\vec{v}_R|, R\xi, +R\sqrt{1-\xi^2}, \omega) + f(|\vec{v}_R|, R\xi, -R\sqrt{1-\xi^2}, \omega)\right) = \frac{2}{\pi}K$$
 (9.28)

und damit wegen

$$\int_{-1}^{1} d\xi \sqrt{1 - \xi^2} = \frac{\pi}{2} \tag{9.29}$$

$$F_x = -\frac{\omega R}{|\vec{v}|} \alpha K \tag{9.30}$$

$$F_{\rm v} = -K \tag{9.31}$$

$$M = -\frac{\omega R}{|\vec{v}|} RK \tag{9.32}$$

In dieser Näherung wurde noch verwendet, daß $\frac{\omega R}{|\vec{v}_R|} \ll 1$, eine Annahme, die bei einer der Realität entsprechenden Winkelgeschwindigkeit von ca. $1\frac{1}{S}$ richtig ist, bis kurz vor dem Stillstand des Steins.

Auswertung der Näherungslösung

Die Gleichungen Gl. (9.30) bis Gl. (9.32) beschreiben das grobe Verhalten des Steins in dem Bereich, in dem die Bahngeschwindigkeit groß ist gegen die Geschwindigkeit eines Punktes auf dem Laufring, solage der Stein sich nicht zu schnell dreht.

In dieser Näherung ist die bestimmende Größe die den Stein abbremsende Reibungskraft K. Die senkrecht auf die Bewegungsrichtung wirkende Kraft, die das Curlen verursacht, ist demgegenüber verringert. Dabei gibt der Parameter α die y-Abhängigkeit der Kraft an.

Auch das Drehmoment ist proportional zur Kraft K.

9.1.3 Numerische Lösung

Verwendet wird das Koordinatensystem S' zu S dazu. In diesem System gibt es folgende Einheitsvektoren in b.z.w. senkrecht zur Laufrichtung des Steins: Fig. (9.1)

$$\vec{s}_{\parallel} = \frac{1}{\sqrt{\dot{p}^2 + \dot{q}^2}} \begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \end{pmatrix}$$

$$\vec{s}_{\perp} = \frac{1}{\sqrt{\dot{p}^2 + \dot{q}^2}} \begin{pmatrix} \dot{q} \\ -\dot{p} \end{pmatrix}$$
(9.33)

Das Vorzeichen von \vec{s}_{\perp} ergibt sich aus der Forderung, daß S ein Rechtssystem sein muß.

Differentialgleichungen

Mit F_x , F_y und M aus Kapitel (9.1.1) ergeben sich damit folgende Differentialgleichungen für die Bahnkurve

$$mit \quad K = \frac{F}{m}\vec{e} \tag{9.34}$$

$$\ddot{q} = \frac{F_y}{m\sqrt{\dot{p}^2 + \dot{q}^2}} \dot{q} - \frac{F_x}{m\sqrt{\dot{p}^2 + \dot{q}^2}} \dot{p}$$
 (9.36)

$$\dot{\omega} = \frac{M}{\Theta} \tag{9.37}$$

Dabei ist m die Masse des Steins, Θ sein Trägheitsmoment.

Numerik

Mit dem Eulerschen Verfahren ergeben sich folgende Gleichungen für die Integration von Gl. (9.35) bis Gl. (9.37) mit dem einfachen Ansatz

$$\ddot{\vec{x}}^{(n)} = \frac{\dot{\vec{x}}^{(n+1)} - \dot{\vec{x}}^{(n)}}{\Delta t}$$

$$\dot{\vec{x}}^{(n+1)} = \Delta t \cdot \ddot{\vec{x}}^{(n)} + \dot{\vec{x}}^{(n)}$$

$$\vec{x}^{(n+1)} = \Delta t \cdot \dot{\vec{x}}^{(n)} + \vec{x}^{(n)}$$

oder komponentenweise ausgeschrieben

$$\ddot{p}^{(n)} = \frac{\dot{p}^{(n+1)} - \dot{p}^{(n)}}{\Delta t} \tag{9.38}$$

$$\dot{p}^{(n+1)} = \frac{\Delta t}{m\sqrt{\dot{p}^{(n)^2} + \dot{q}^{(n)^2}}} \left(F_y \dot{p}^{(n)} + F_x \dot{q}^{(n)} \right) + \dot{p}^{(n)}$$
(9.39)

$$\dot{q}^{(n+1)} = \frac{\Delta t}{m\sqrt{\dot{p}^{(n)^2} + \dot{q}^{(n)^2}}} \left(F_y \dot{q}^{(n)} - F_x \dot{p}^{(n)} \right) + \dot{q}^{(n)}$$
(9.40)

$$p^{(n+1)} = \Delta t \ \dot{p}^{(n)} + p^{(n)}$$
 (9.41)

$$q^{(n+1)} = \Delta t \, \dot{q}^{(n)} + q^{(n)} \tag{9.42}$$

$$\omega^{(n+1)} = \frac{\Delta t}{\Theta} M + \omega^{(n)} \tag{9.43}$$

Dabei bezeichnen der Index (n+1) den Zeitpunkt $(n+1) \cdot \Delta t$, der Index (n) den Zeitpunkt $n \cdot \Delta t$.

Die Anfangswerte für n = 0 müssen gegeben sein. F_x , F_y , M müssen zu jedem Zeitpunkt als Funktionen der Geschwindigkeit und der Winkelgeschwindigkeit berechnet werden.

Modell für die Reibungskraft

Die in Kapitel (6.1) gemessene geschwindigkeitsabhängige Reibung wird mit der folgenden Funktion angenähert.

Ansatz für *f*:

$$f = f_1(v) f_2(y, \mathbf{\omega}) \tag{9.44}$$

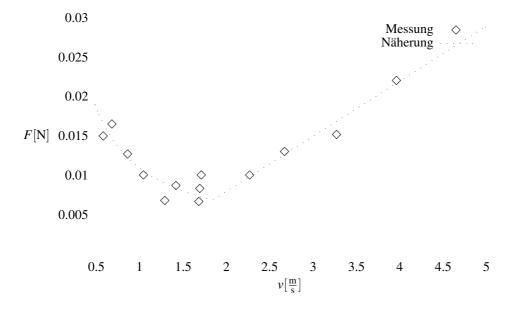


Abbildung 9.4: Reibungsmodell Stein/Eis F(v) nach Uli Sutor (grobe Näherung)

$$f_1(v) = \frac{1}{2} \frac{f_{\min}}{v_b} \left(v + v_a + \frac{v_b^2}{v + v_a} \right)$$
 (9.45)

Die Funktion hat an der Stelle $v_b - v_a$ ein absolutes Minimum mit dem Wert f_{min} . Ist der Wert von f_1 für v = 0 bekannt, nämlich f_0 , so läßt sich daraus v_a bestimmen:

$$v_a = v_b \left(\frac{f_0}{f_{\min}} - \sqrt{\left(\frac{f_0}{f_{\min}} \right)^2 - 1} \right)$$
 (9.46)

Diese Form der Geschwindigkeitsabhängigkeit entspricht den experimentellen Daten. Der Abfall von v = 0 bis $v_b - v_a$ läßt sich durch das Wegfallen der Haftreibung, der Anstieg danach durch die normale Zunahme der Gleitreibung mit der Geschwindigkeit erklären.

$$f_2(y, \omega) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{\alpha y}{r}}\right) e^{1 - \frac{\omega}{\omega_0}}$$
 (9.47)

Exponentieller Abfall mit y beschreibt die y-Abhängigkeit, diese wird durch den zweiten Exponentialfaktor gedämpft, um die ω -Abhängigkeit richtig zu erhalten. Für kleine α und $\omega=\omega_0$ ergibt sich die lineare Abhängigkeit als Näherung, die im analytischen Modell gemacht wurde.

Die Auswertung der numerischen Formeln der Näherung $R \gg \Delta R$ erfolgt im FORTRAN-Programm CURL.PRG. (siehe Anhang)