

Conservación e interacción dinámica de especies nativas y exóticas en una reserva ecológica

Alumno: Benjamín Acuña Azócar

Profesor: Pablo Aguirre Olea

Ingeniería Civil Matemática
Universidad Técnica Federico Santa María

Agosto, 2025

Índice

Contexto ecológico

Modelo ecológico original

Estrategias propuestas

Análisis de estrategias de manejo

Estrategia 1: Tala constante del eucalipto

Estrategia 2: Replantación proporcional de Buddleja

Estrategia 3: Replantación proporcional de Palo Loco

Estrategia 4: Replantación conjunta de ambas especies nativas

Estrategia 5: Replantación conjunta con tala constante

Estrategia 6: Replantación conjunta con tala periódica

Conclusión



Contexto ecológico

La Reserva Ecológica del Pedregal de San Ángel (REPSA)

- Ubicada en el campus de la UNAM, en Ciudad de México.
- Extensión: aproximadamente 146.9 hectáreas.
- Vegetación: matorral xerófilo sobre campo de lava.
- Ecosistema único, adaptado a condiciones extremas.



Especies nativas y amenaza del eucalipto

- 🌲 **Pittocaulon praecox** (Palo loco)
- 🌲 **Buddleja cordata** (Tepozán)
- 💀 **Eucalyptus camaldulensis** (Eucalipto)

Las dos primeras son especies nativas relevantes en la REPSA, mientras que la tercera es una especie exótica invasora.





Modelo ecológico original

Modelo II-B: competencia, facilitación e inhibición

- El modelo utilizado fue propuesto por Acosta-Arreola et al. (2023) [1] para describir dinámicas en la REPSA.
- De entre varios modelos evaluados, el **modelo II-B** mostró mejor ajuste a los datos experimentales.
- Representa las poblaciones de:
 - **BS:** Buddleja cordata (nativa)
 - **PS:** Pittocaulon praecox (nativa)
 - **ES:** Eucalyptus camaldulensis (invasora)
- Supone:
 - **Competencia** por espacio libre y recursos.
 - **Facilitación** de BS sobre PS.
 - **Inhibición** del crecimiento de nativas por efecto del eucalipto.

Sistema de ecuaciones del modelo II-B

Las variables x_1, x_2 y x_3 representan el área ocupada por cada especie, estimada a partir del área de sombra proyectada por sus copas.

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \frac{\alpha_1 \cdot x_1 \cdot x_4}{1 + x_3 \cdot \gamma_1} - x_1 \cdot (\beta_1 + \mu_1 \cdot x_3), \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{\alpha_2 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot (1 + \tau \cdot x_1)}{1 + x_3 \cdot \gamma_2} - x_2 \cdot (\beta_2 + \mu_2 \cdot x_3), \\ \frac{dx_3}{dt} = \alpha_3 \cdot x_3 \cdot x_4 - \beta_3 \cdot x_3, \end{cases}$$

donde $x_4 = C - (x_1 + x_2 + x_3)$ es el *espacio libre*,
y C representa el *espacio total disponible*, considerado constante.

Parámetros del modelo

Parámetro	Unidades	Interpretación
α	$\text{ha}^{-1}\text{año}^{-1}$	Tasa de crecimiento dependiente del espacio libre
β	año^{-1}	Tasa de mortalidad natural
μ	$\text{ha}^{-1}\text{año}^{-1}$	Tasa de mortalidad inducida por el eucalipto
γ	ha^{-1}	Intensidad del efecto inhibidor del eucalipto
τ	ha^{-1}	Intensidad de la facilitación de PS sobre BS

Sistema de ecuaciones del modelo II-B

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \frac{\alpha_1 \cdot x_1 \cdot x_4}{1 + x_3 \cdot \gamma_1} - x_1 \cdot \beta_1 - x_1 \cdot \mu_1 \cdot x_3, \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{\alpha_2 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot (1 + \tau \cdot x_1)}{1 + x_3 \cdot \gamma_2} - x_2 \cdot \beta_2 - x_2 \cdot \mu_2 \cdot x_3, \\ \frac{dx_3}{dt} = \alpha_3 \cdot x_3 \cdot x_4 - \beta_3 \cdot x_3. \end{cases}$$

Verde Crecimiento natural,

Púrpura Muerte natural,

Rojo Muerte inducida por la especie exótica,

Naranja Inhibición del crecimiento por la especie exótica,

Azul Facilitación de x_1 sobre x_2 .

Resultado clave de la simulación

- ⚠ El punto $p_{90} = (0.0790 \text{ ha}, 15.4667 \text{ ha}, 8.9326 \text{ ha})$ corresponde al estado observado en 1990, año en el que se obtuvieron datos simultáneos para las tres especies.
- ⚠ Al simular el sistema desde el estado inicial p_{90} , se observa:
 - Disminución progresiva de x_1 y x_2 ,
 - Dominancia de la especie exótica x_3 ,
 - **Extinción total de las especies nativas en ausencia de intervención.**
- ⚠ Esto resalta la necesidad de estrategias de manejo que eviten la pérdida de biodiversidad.



Estrategias propuestas

Resumen de estrategias de intervención

☒ **Estrategia 1:** Tala constante del eucalipto.

Resumen de estrategias de intervención

- ☒ **Estrategia 1:** Tala constante del eucalipto.
- ☐ **Estrategia 2:** Replantación proporcional de Tepozán.

Resumen de estrategias de intervención

- ☒ **Estrategia 1:** Tala constante del eucalipto.
- ☐ **Estrategia 2:** Replantación proporcional de Tepozán.
- ☐ **Estrategia 3:** Replantación proporcional de Palo Loco.

Resumen de estrategias de intervención

- ☒ **Estrategia 1:** Tala constante del eucalipto.
- ☐ **Estrategia 2:** Replantación proporcional de Tepozán.
- ☐ **Estrategia 3:** Replantación proporcional de Palo Loco.
- ☐ **Estrategia 4:** Replantación conjunta de ambas especies nativas.

Resumen de estrategias de intervención

- ☒ **Estrategia 1:** Tala constante del eucalipto.
- ☛ **Estrategia 2:** Replantación proporcional de Tepozán.
- ☛ **Estrategia 3:** Replantación proporcional de Palo Loco.
- ☛ **Estrategia 4:** Replantación conjunta de ambas especies nativas.
- ☛ **Estrategia 5:** Replantación conjunta + tala constante.

Resumen de estrategias de intervención

- ☒ **Estrategia 1:** Tala constante del eucalipto.
- ☛ **Estrategia 2:** Replantación proporcional de Tepozán.
- ☛ **Estrategia 3:** Replantación proporcional de Palo Loco.
- ☛ **Estrategia 4:** Replantación conjunta de ambas especies nativas.
- ☛ **Estrategia 5:** Replantación conjunta + tala constante.
- ☛ **Estrategia 6:** Replantación conjunta + tala periódica.

Resumen de estrategias de intervención

- ☒ **Estrategia 1:** Tala constante del eucalipto.
- ☐ **Estrategia 2:** Replantación proporcional de Tepozán.
- ☐ **Estrategia 3:** Replantación proporcional de Palo Loco.
- ☐ **Estrategia 4:** Replantación conjunta de ambas especies nativas.
- ☒ **Estrategia 5:** Replantación conjunta + tala constante.
- ☒ **Estrategia 6:** Replantación conjunta + tala periódica.

Objetivo: Identificar estrategias que permitan restaurar la comunidad nativa y evitar el dominio del eucalipto.



Análisis de estrategias de manejo

Estrategia 1: Tala constante del eucalipto



Estrategia 1: Tala constante del eucalipto

- Se introduce un término de tala constante en la ecuación de x_3 (eucalipto).
- Este control busca reducir la presencia del invasor a través de una extracción continua con tasa η .

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \frac{\alpha_1 \cdot x_1 \cdot x_4}{1 + x_3 \cdot \gamma_1} - x_1 \cdot (\beta_1 + \mu_1 \cdot x_3), \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{\alpha_2 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot (1 + \tau \cdot x_1)}{1 + x_3 \cdot \gamma_2} - x_2 \cdot (\beta_2 + \mu_2 \cdot x_3), \\ \frac{dx_3}{dt} = \alpha_3 \cdot x_3 \cdot x_4 - \beta_3 \cdot x_3 - \eta \cdot x_3. \end{cases}$$

Obtención de los puntos de equilibrio

- Se igualaron a cero las ecuaciones del sistema.
- El análisis se realizó por casos, según los posibles valores nulos de x_1 , x_2 y x_3 :
 - **Caso 1:** $x_1 = 0$
 - **Subcaso 1.1:** $x_2 = 0$
 - $x_3 = 0 \rightarrow p_0 = (0, 0, 0)$
 - $x_3 \neq 0 \rightarrow p_1 = (0, 0, x_3^*)$
 - **Subcaso 1.2:** $x_2 \neq 0$
 - $x_3 = 0 \rightarrow p_2 = (0, x_2^*, 0)$
 - $x_3 \neq 0 \rightarrow p_3 = (0, x_2^*, x_3^*)$
 - En total, se obtuvieron **8 posibles puntos críticos**.

Análisis de estabilidad

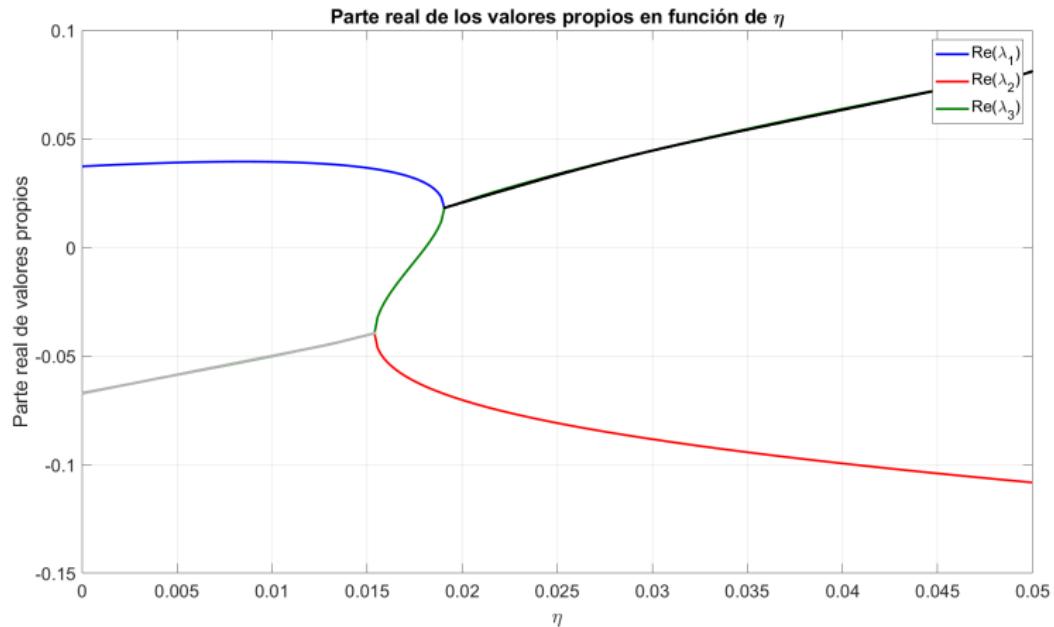
- Se calculó la **matriz Jacobiana** del sistema evaluada en cada punto de equilibrio.
- Debido a la alta complejidad del sistema, obtener expresiones exactas para los valores propios es muy difícil. Por esto se utilizaron **valores numéricos de los parámetros** reportados en Acosta-Arreola et al. (2023) [1].

$$\begin{array}{llll}\alpha_1 = 0.00137, & \beta_1 = 0.07, & \gamma_1 = 0.01, & \mu_1 = 0.01, \\ \alpha_2 = 0.0011, & \beta_2 = 0.29, & \gamma_2 = 0.01, & \mu_2 = 0.01, \\ \alpha_3 = 0.001, & \beta_3 = 0.1, & \tau = 0.0995, & C = 146.9.\end{array}$$

Análisis de estabilidad (continuación)

- Para cada punto de equilibrio obtenido:
 - Se calculó su Jacobiana asociada.
 - Se analizaron los **valores propios en función de η** .
- Algunos puntos permitieron obtener **restricciones algebraicas** sobre η que garantizan estabilidad. Por ejemplo, para p_0 tenemos
 - $\lambda_1 \approx 0.131$,
 - $\lambda_2 \approx -0.12841$,
 - $\lambda_3 \approx 0.0469 - \eta$.
- En otros puntos, el análisis simbólico fue complejo, por lo que se aplicó un **método gráfico**.

Ejemplo gráfico del análisis de estabilidad



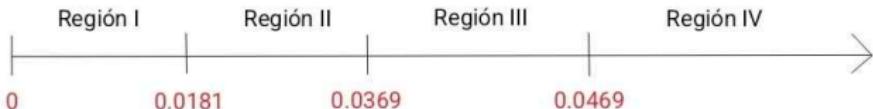
Ejemplo: comportamiento de los valores propios de p_7 al variar η .

Resumen de estabilidad

Punto	Rango de existencia	Estabilidad
$p_0 = (0, 0, 0)$	$\eta > 0$	Punto silla
$p_1 = (0, 0, 46.9 - 1000 \cdot \eta)$	$0 < \eta < 0.0469$	Atractor si $\eta < 0.0369$ Punto silla si $\eta > 0.0369$
$p_4 = (95.8051, 0, 0)$	$\eta > 0$	Punto silla
$p_5 = (x_1^*, 0, x_3^*)$	$\eta < 0.0469$	Punto silla
$p_6 = (41.8064, 53.9987, 0)$	$\eta > 0$	Atractor
$p_7 = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$	$\eta < 0.0181$	Punto silla

La dinámica ecológica del sistema varía según cómo η afecta la existencia y estabilidad de los puntos críticos.

Segmentación del espacio de parámetros y estabilidad

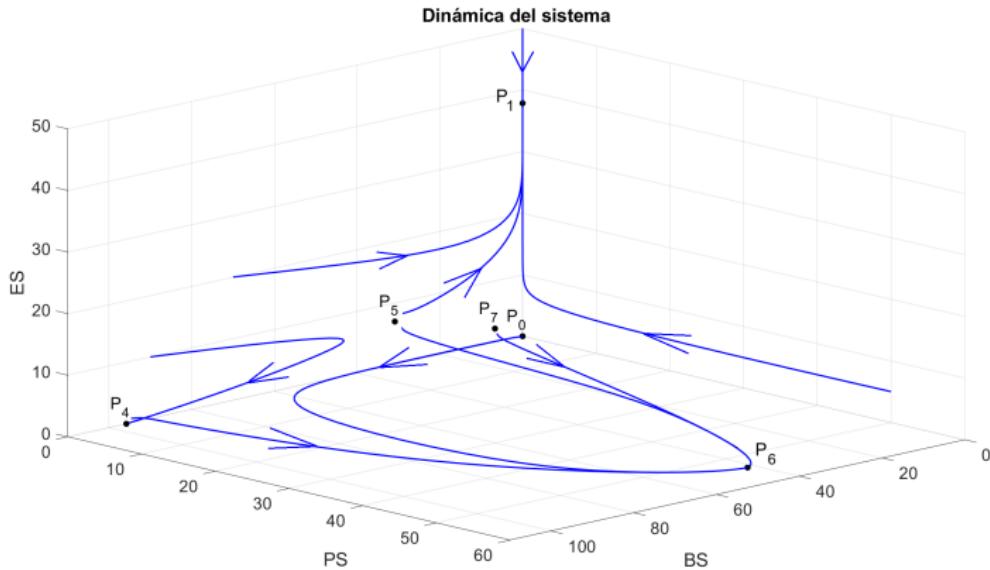


La dinámica del sistema cambia estructuralmente a medida que se modifica el parámetro η .

Región	Cantidad de Puntos de Equilibrio	Puntos de Equilibrios Estables
I	6	p_1, p_6
II	5	p_1, p_6
III	4	p_6
IV	3	p_6

- En algunas regiones, el sistema presenta **biestabilidad**: dos equilibrios estables coexisten.
- Para una misma condición inicial, pequeñas variaciones en η pueden producir resultados ecológicos distintos.

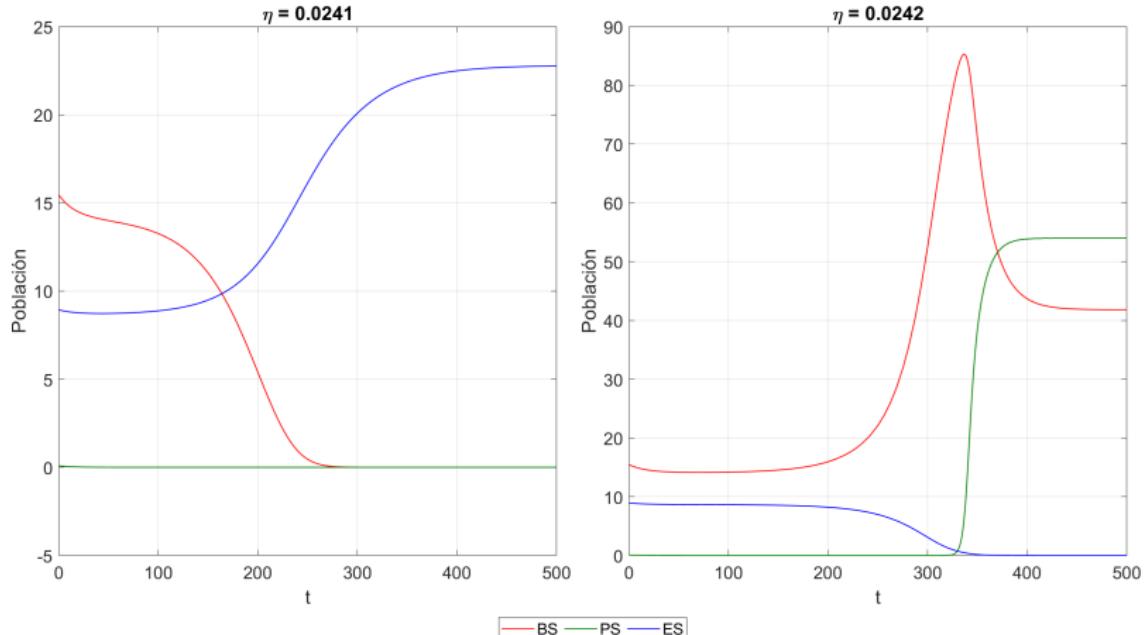
Ejemplo: Región I ($0 < \eta < 0.0181$)



Se observan dos atractores:

- p_1 (especie invasora),
- p_6 (coexistencia nativa).

Evolución temporal de BS, PS y ES



Evolución temporal de BS, PS y ES, para distintos valores de η a partir del punto p_{90} .

Estrategia 2: Replantación proporcional de Tepozán



Estrategia 2: Replantación proporcional de Tepozán

- Se introduce un término adicional en la ecuación de x_1 que representa la **replantación proporcional del Tepozán**.
- Este control busca aumentar la población de esta especie nativa mediante una incorporación continua con tasa θ_1 .

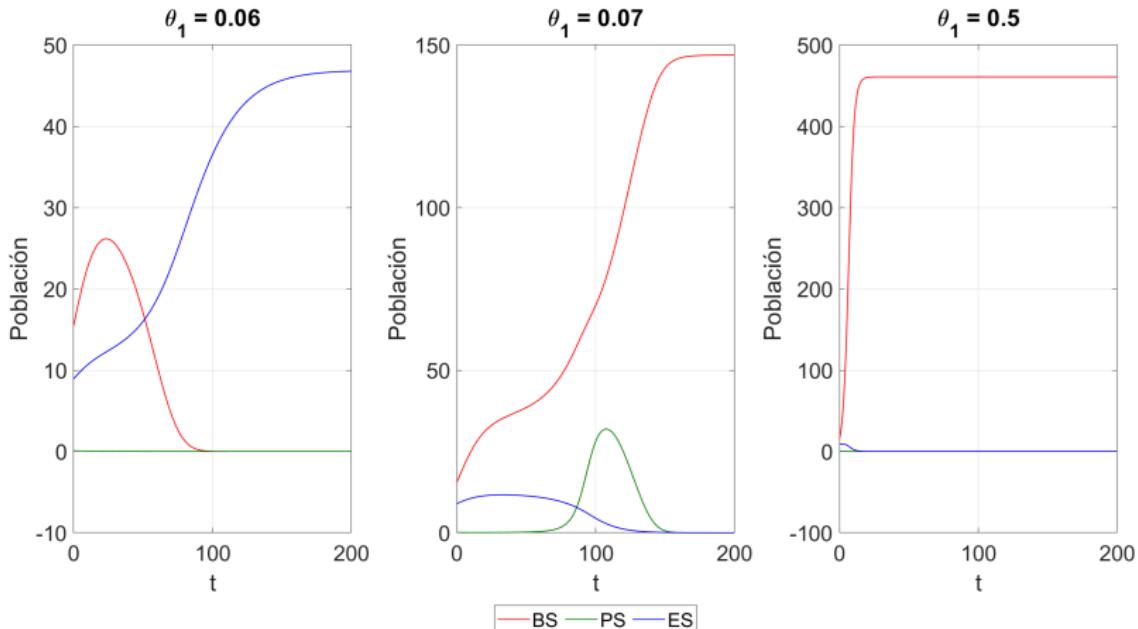
$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \frac{\alpha_1 \cdot x_1 \cdot x_4}{1 + x_3 \cdot \gamma_1} - x_1 \cdot (\beta_1 + \mu_1 \cdot x_3) + \theta_1 \cdot x_1, \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{\alpha_2 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot (1 + \tau \cdot x_1)}{1 + x_3 \cdot \gamma_2} - x_2 \cdot (\beta_2 + \mu_2 \cdot x_3), \\ \frac{dx_3}{dt} = \alpha_3 \cdot x_3 \cdot x_4 - \beta_3 \cdot x_3. \end{cases}$$

Resumen de estabilidad

Punto	Rango de existencia	Estabilidad
$p_0 = (0, 0, 0)$	$\theta_1 > 0$	Punto silla
$p_1 = (0, 0, 46.9)$	$\theta_1 > 0$	Atractor si $\theta_1 < 0.4457$ Punto silla si $\theta_1 > 0.4457$
$p_4 = (729.927 \cdot \theta_1 + 95.8051, 0, 0)$	$\theta_1 > 0$	Punto silla si $\theta_1 < 0.0435$ Atractor si $\theta_1 > 0.0435$
$p_5 = (x_1^*, 0, x_3^*)$	$\theta_1 < 0.4457$	Punto silla
$p_7 = (x_1^*, x_2^*, 0)$	$\theta_1 < 0.0435$	Atractor
$p_8 = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$	$\theta_1 < 0.0815$	Punto silla

La dinámica ecológica del sistema varía según cómo θ_1 afecta la existencia y estabilidad de los puntos críticos.

Evolución temporal de BS, PS y ES



Evolución temporal de BS, PS y ES, para distintos valores de θ_1 a partir del punto p_{90} .

Estrategia 3: Replantación proporcional de Palo Loco



Estrategia 3: Replantación proporcional de Palo Loco

- Se introduce un término adicional en la ecuación de x_2 que representa la **replantación proporcional de Palo Loco**.
- Este control busca aumentar la población de esta especie nativa mediante una incorporación continua con tasa θ_2 .

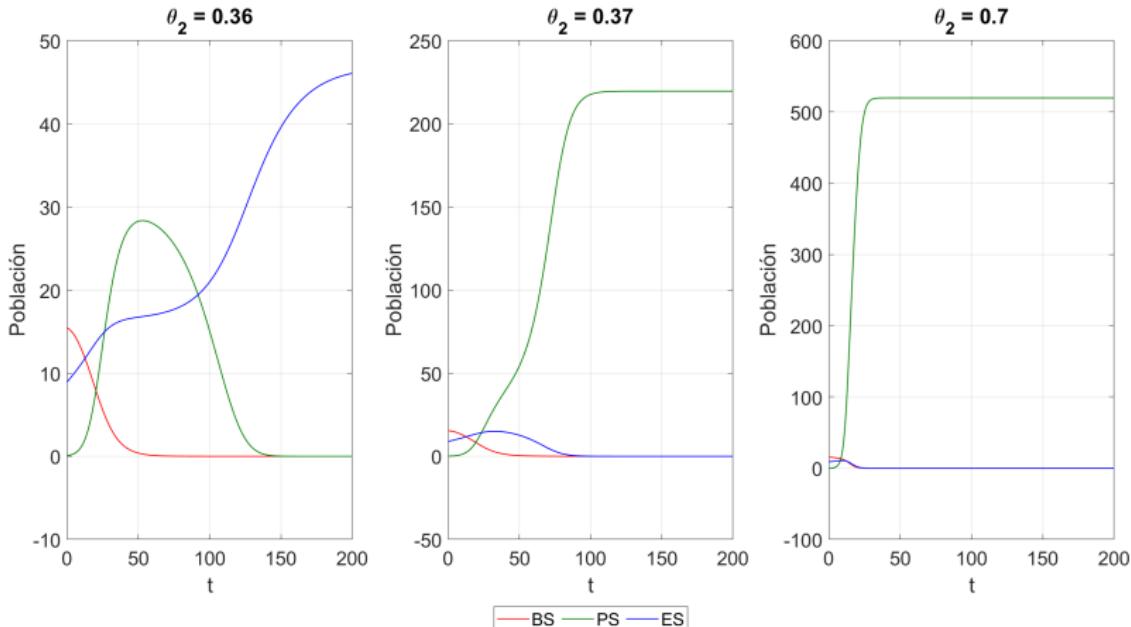
$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \frac{\alpha_1 \cdot x_1 \cdot x_4}{1 + x_3 \cdot \gamma_1} - x_1 \cdot (\beta_1 + \mu_1 \cdot x_3), \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{\alpha_2 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot (1 + \tau \cdot x_1)}{1 + x_3 \cdot \gamma_2} - x_2 \cdot (\beta_2 + \mu_2 \cdot x_3) + \theta_2 \cdot x_2, \\ \frac{dx_3}{dt} = \alpha_3 \cdot x_3 \cdot x_4 - \beta_3 \cdot x_3. \end{cases}$$

Resumen de estabilidad

Punto	Rango de existencia	Estabilidad
$p_0 = (0, 0, 0)$	$\theta_2 > 0$	Punto silla si $\theta_2 < 0.1284$ Repulsor si $\theta_2 > 0.1284$
$p_1 = \left(0, 0, \frac{469}{10}\right)$	$\theta_2 > 0$	Atractor si $\theta_2 < 0.6841$ Punto silla si $\theta_2 > 0.6841$
$p_2 = (0, 909.091 \cdot \theta_2 - 116.736, 0)$	$\theta_2 > 0.1284$	Punto silla si $\theta_2 < 0.2338$ Atractor si $\theta_2 > 0.2338$
$p_3 = (0, x_2^*, x_3^*)$	$0.18 < \theta_2 < 0.6841$	Punto silla
$p_5 = (95.8051, 0, 0)$	$\theta_2 > 0$	Punto silla
$p_6 = (x_1^*, 0, x_3^*)$	$\theta_2 > 0$	Punto silla
$p_7 = (x_1^*, x_2^*, 0)$	$\theta_2 < 0.2338$	Atractor
$p_8 = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$	$\theta_2 < 0.2338$	Punto silla

La dinámica ecológica del sistema varía según cómo θ_2 afecta la existencia y estabilidad de los puntos críticos.

Evolución temporal de BS, PS y ES



Evolución temporal de BS, PS y ES, para distintos valores de θ_2 a partir del punto p_{90} .

Estrategia 4: Replantación conjunta de ambas especies nativas



Estrategia 4: Replantación conjunta de ambas especies nativas

- Se introducen términos adicionales en las ecuaciones de x_1 y x_2 , representando la **replantación proporcional conjunta de ambas especies nativas**.
- Cada población aumenta mediante una incorporación continua, proporcional a su abundancia actual, con tasas θ_1 (Tepozán) y θ_2 (Palo Loco).

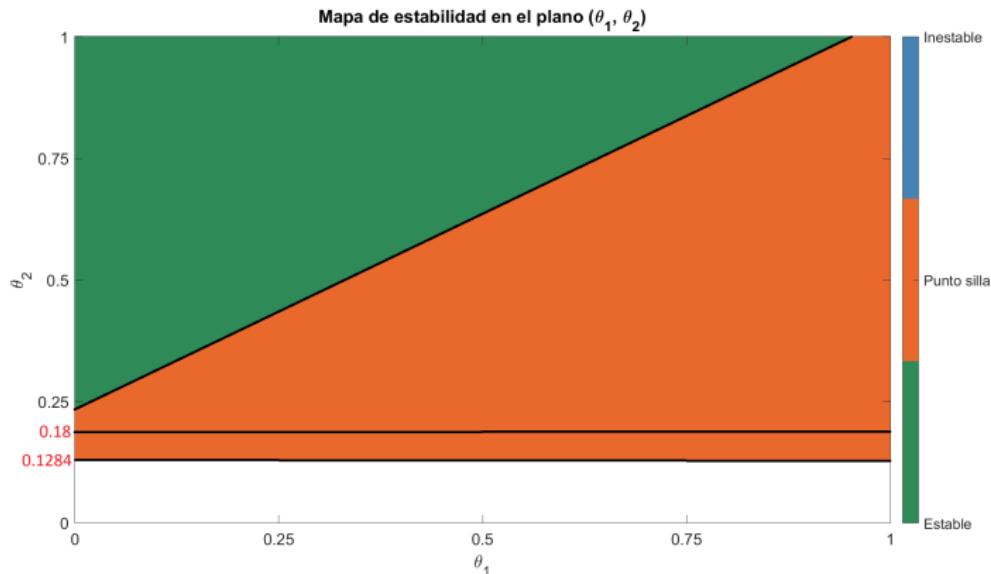
$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \frac{\alpha_1 \cdot x_1 \cdot x_4}{1 + x_3 \cdot \gamma_1} - x_1 \cdot (\beta_1 + \mu_1 \cdot x_3) + \theta_1 \cdot x_1, \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{\alpha_2 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot (1 + \tau \cdot x_1)}{1 + x_3 \cdot \gamma_2} - x_2 \cdot (\beta_2 + \mu_2 \cdot x_3) + \theta_2 \cdot x_2, \\ \frac{dx_3}{dt} = \alpha_3 \cdot x_3 \cdot x_4 - \beta_3 \cdot x_3. \end{cases}$$

- Para esta estrategia, se obtuvieron **11 puntos de equilibrio posibles**.
- Se analizaron los **valores propios en función de θ_1 y θ_2** .
- Algunos puntos permitieron obtener **restricciones algebraicas** sencillas sobre θ_1 y θ_2 . Por ejemplo para p_0 tenemos
 - $\lambda_1 \approx \theta_1 + 0.131$,
 - $\lambda_2 \approx \theta_2 - 0.1284$,
 - $\lambda_3 \approx 0.0469$.

Análisis de estabilidad (continuación)

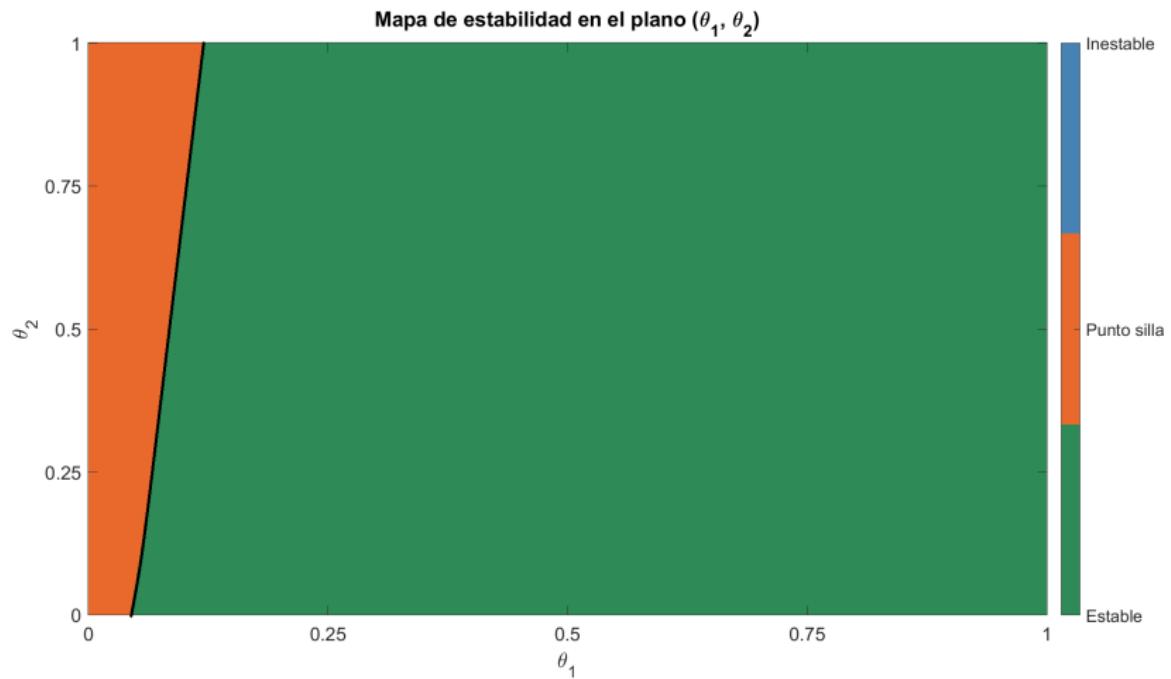
Para el punto de equilibrio p_2 , los valores propios vienen dados por

- $\lambda_1 = 0.1636 - 0.9090\theta_2$,
- $\lambda_2 = 0.1284 - \theta_2$,
- $\lambda_3 = \theta_1 - 1.2454\theta_2 + 0.2911$.



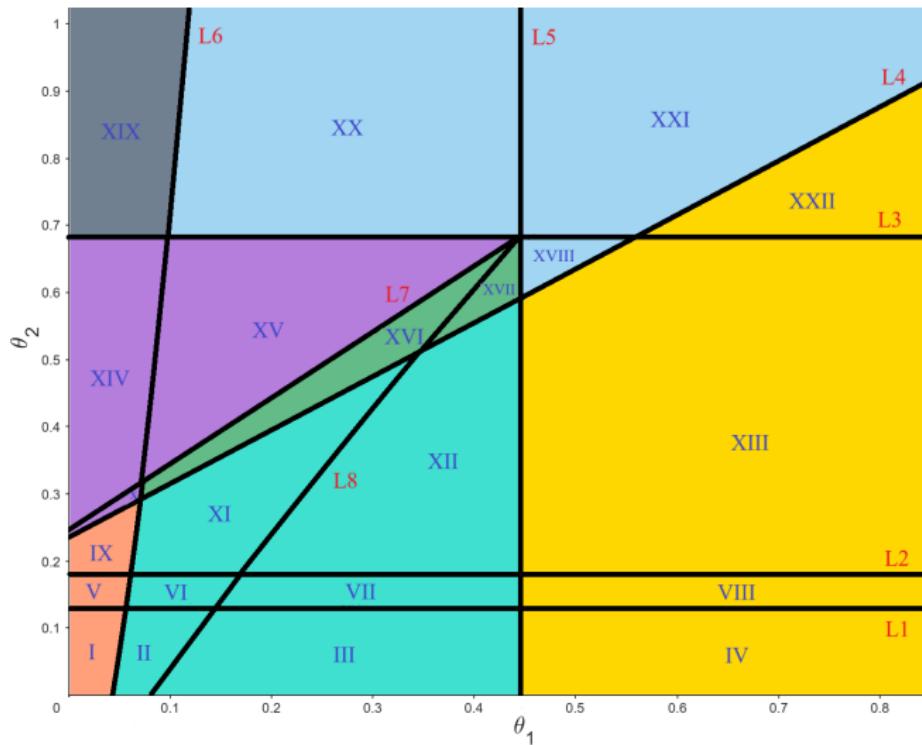
Análisis de estabilidad (continuación)

Para el punto de equilibrio $p_5 = (x_1^*, 0, 0)$ tenemos:

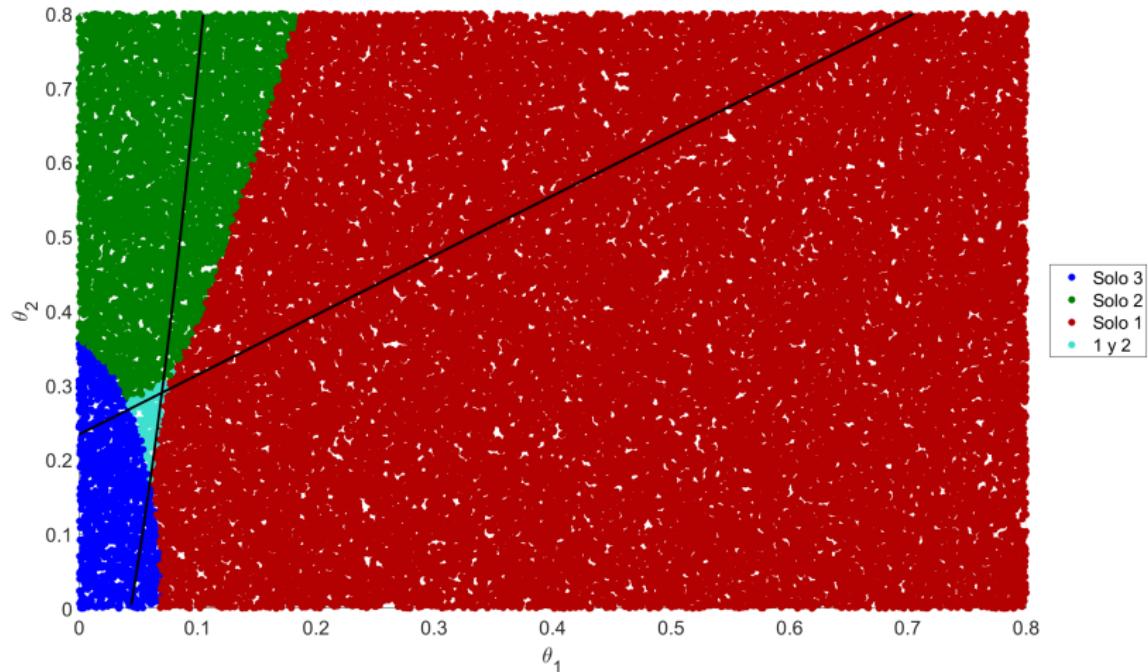


Regiones de estabilidad

Regiones con el mismo color comparten **estabilidad**, pero pueden diferir en **viabilidad biológica**.



Evolución temporal de BS, PS y ES



Evolución temporal (1000 años) de BS, PS y ES, para distintos valores de θ_1 y θ_2 a partir del punto p_{90} .

Estrategia 5: Replantación conjunta con tala constante



Estrategia 5: Replantación conjunta con tala constante

- Se agregan términos de **replantación proporcional** de las nativas y **tala constante** del eucalipto.
- La replantación actúa con tasas θ_1 y θ_2 , mientras que la tala reduce a x_3 con tasa η .

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \frac{\alpha_1 \cdot x_1 \cdot x_4}{1 + x_3 \cdot \gamma_1} - x_1 \cdot (\beta_1 + \mu_1 \cdot x_3) + \theta_1 \cdot x_1, \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{\alpha_2 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot (1 + \tau \cdot x_1)}{1 + x_3 \cdot \gamma_2} - x_2 \cdot (\beta_2 + \mu_2 \cdot x_3) + \theta_2 \cdot x_2, \\ \frac{dx_3}{dt} = \alpha_3 \cdot x_3 \cdot x_4 - \beta_3 \cdot x_3 - \eta \cdot x_3. \end{cases}$$

Evolución temporal de BS, PS y ES

Resultado del barrido de parámetros desde p_{90} para distintos valores de η .

Estrategia 6: Replantación conjunta con tala periódica



Estrategia 6: Replantación conjunta con tala periódica

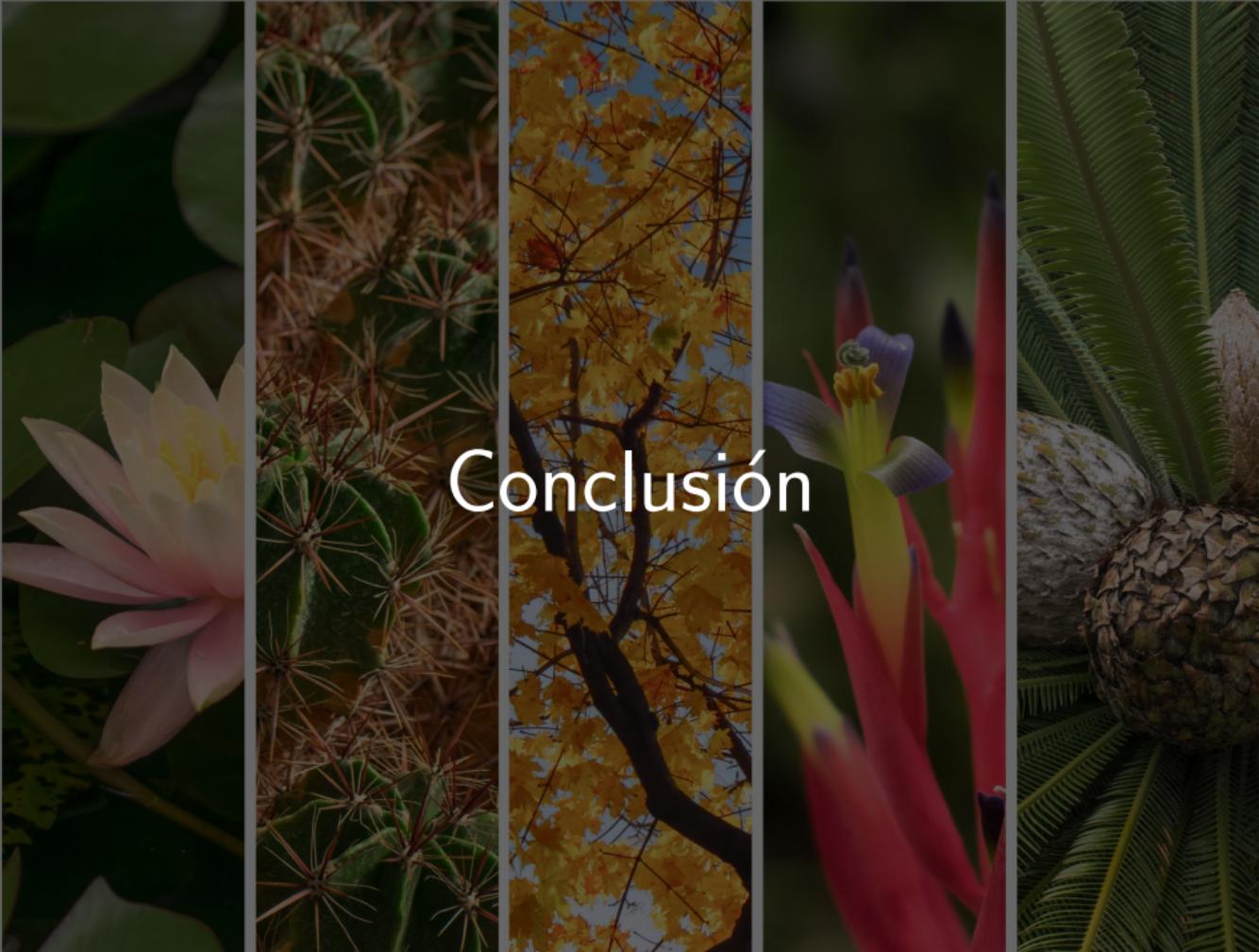
- Se agregan términos de **replantación proporcional** de las nativas y **tala periódica** del eucalipto.

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \frac{\alpha_1 \cdot x_1 \cdot x_4}{1 + x_3 \cdot \gamma_1} - x_1 \cdot (\beta_1 + \mu_1 \cdot x_3) + \theta_1 \cdot x_1, \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{\alpha_2 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot (1 + \tau \cdot x_1)}{1 + x_3 \cdot \gamma_2} - x_2 \cdot (\beta_2 + \mu_2 \cdot x_3) + \theta_2 \cdot x_2, \\ \frac{dx_3}{dt} = \alpha_3 \cdot x_3 \cdot x_4 - \beta_3 \cdot x_3 - \eta \cdot \frac{1 + \cos(\frac{2\pi t}{T})}{2} \cdot x_3. \end{cases}$$

Evolución temporal de BS, PS y ES

Resultado del barrido de parámetros desde p_{90} para distintos valores de η , considerando $T = 2$.

Conclusión



Conclusiones generales

- ☒ La estrategia 1 ofrece una **solución factible**, pero su viabilidad puede verse limitada por costos económicos y logísticos elevados.
- ✗ Las estrategias 2 y 3 **no** permiten alcanzar una solución de coexistencia; resultan ineffectivas por sí solas.
- ✗ La estrategia 4 permite alcanzar coexistencia, pero en una región **muy restringida** del espacio de parámetros; pequeñas desviaciones podrían llevar a escenarios indeseados.
- igsaw puzzle piece icon Las estrategias 5 y 6 mostraron los **mejores resultados**: amplias regiones de coexistencia estable y erradicación del eucalipto.

-  Jaime Acosta-Arreola, Elisa Domínguez-Hüttinger, Pablo Aguirre, Nicolás González, and Jorge A Meave.
Predicting dynamic trajectories of a protected plant community under contrasting conservation regimes: Insights from data-based modelling.
Ecological Modelling, 484, 2023.