

UNIVERSIDAD TÉCNICA
FEDERICO SANTA MARÍA

Departamento de Matemática
Valparaíso - Chile

Conservación e interacción dinámica de especies nativas y exóticas en una reserva ecológica

Tesis presentada por:
Benjamín Acuña Azocar

*Como requisito para optar al título profesional de Ingeniería
Civil Matemática*

Director de Tesis:
Dr. Pablo Aguirre Olea

Mayo, 2025

Agradecimientos

Llegar hasta aquí ha sido un camino desafiante, lleno de aprendizajes, momentos de duda y también de profundas satisfacciones. Esta memoria no habría sido posible sin el apoyo constante de personas fundamentales en mi vida.

A mi profesor guía, Pablo Aguirre Olea, gracias por su paciencia, claridad y compromiso. Su guía ha sido clave para avanzar con confianza en este proceso.

A mi familia, que siempre ha estado ahí para mí, en cada paso del camino. A mi madre Cecilia y a mi padre Jaime, por su amor infinito, por creer en mí incluso cuando yo dudaba. A mis hermanos Sebastián, Joaquín y Vicente, por ser mi inspiración diaria, por sus palabras de aliento y por todo el cariño compartido.

A mis amigas y amigos del alma: Carolina, Ignacio, Diego, Eduardo y Lucas. Gracias por estar en las buenas y, sobre todo, en las malas. Por animarme cuando flaqueaba, por hacerme reír cuando más lo necesitaba, y por recordarme siempre que no estaba solo en este camino. Ustedes han sido parte esencial de esta travesía.

Y a todas las personas que, de una u otra forma, me acompañaron y dejaron una huella en este proceso, también les agradezco con el corazón.

Benjamín Acuña Azocar

Resumen

Esta memoria estudia la dinámica de interacción entre especies nativas y exóticas en una reserva ecológica, a partir de una familia de modelos derivados por Acosta-Arreola et al. [1]. Dichos modelos consisten en sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales que describen la evolución temporal de tres especies vegetales: dos nativas (*Buddleja cordata* y *Pittocaulon praecox*) y una exótica (*Eucalyptus camaldulensis*). El objetivo principal es identificar condiciones que permitan la persistencia a largo plazo de ambas especies nativas, a pesar de la presencia de la especie invasora.

Para abordar este objetivo, se desarrollan seis variantes del modelo original, cada una incorporando diferentes estrategias de manejo ecológico. La primera estrategia introduce un parámetro que representa una tasa constante de tala sobre el eucalipto. La segunda y tercera estrategia incorporan, respectivamente, una tasa constante de replantación sobre una sola especie nativa (*B. cordata* o *P. praecox*). La cuarta estrategia considera la replantación simultánea de ambas especies nativas, añadiendo así dos parámetros. Finalmente, la quinta y sexta estrategia combinan replantaciones y tala: la quinta estrategia considera replantación constante junto con tala constante, y la sexta estrategia reemplaza esta última por una tala periódica. En total, estas estrategias introducen hasta tres parámetros de manejo ecológico, permitiendo una exploración más rica del espacio de estrategias.

En las primeras cuatro estrategias se realiza un análisis completo que incluye la determinación de puntos de equilibrio y el estudio de su estabilidad en función de los parámetros. Para las dos estrategias más complejas, se recurre a herramientas gráficas y simulaciones numéricas desde una condición inicial históricamente documentada, explorando el espacio paramétrico para identificar regiones donde el sistema evoluciona hacia estados deseables, entendidos como aquellos en los que coexisten las dos especies nativas y se erradica la especie exótica.

Palabras clave: dinámica de poblaciones, especies invasoras, conservación ecológica, estabilidad, sistemas dinámicos no lineales.

Abstract

This thesis studies the dynamics of interactions between native and exotic species in an ecological reserve, based on a family of models derived by Acosta-Arreola et al. [1]. These models consist of systems of nonlinear differential equations that describe the temporal evolution of three plant species: two natives (*Buddleja cordata* and *Pittocaulon praecox*) and one exotic (*Eucalyptus camaldulensis*). The main objective is to identify conditions that allow the long-term persistence of both native species despite the presence of the invasive species.

To address this objective, six variants of the original model are developed, each incorporating different ecological management strategies. The first strategy introduces a parameter representing a constant logging rate applied to the eucalyptus. The second and third strategies include a constant replanting rate for only one of the native species (*B. cordata* or *P. praecox*, respectively). The fourth strategy considers the simultaneous replanting of both native species, thus introducing two parameters. Finally, the fifth and sixth strategies combine replanting and logging: the fifth strategy involves constant replanting together with constant logging, and the sixth strategy replaces the latter with periodic logging. Altogether, these strategies introduce up to three ecological management parameters, allowing a richer exploration of the strategy space.

For the first four strategies, a complete analysis is performed, including the determination of equilibrium points and the study of their stability as a function of the parameters. For the two more complex strategies, graphical tools and numerical simulations are employed starting from a historically documented initial condition, exploring the parameter space to identify regions where the system evolves towards desirable states—understood as those in which both native species coexist and the exotic species is eradicated.

Keywords: population dynamics, invasive species, ecological conservation, stability, nonlinear dynamical systems.

Índice general

1. Introducción	9
2. Marco teórico matemático	13
2.1. Ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos	13
2.2. Retratos de fase y órbitas	14
2.3. Puntos de equilibrio y estabilidad	14
2.4. Bifurcaciones	17
3. Metodología	18
3.1. Estrategias de manejo y formulación de modelos	18
3.2. Metodología de análisis	19
3.3. Simplificación de notación	19
3.4. Valores de parámetros	20
4. Estrategia de tala de eucaliptus a tasa proporcional	21
4.1. Puntos de equilibrio	21
4.2. Existencia y estabilidad de los equilibrios	27
4.3. Estabilidad del sistema y evolución temporal de las tres especies	34
4.3.1. Evolución temporal a partir del estado inicial p_{90}	37
5. Estrategia de replantación de Tepozán a tasa proporcional	40
5.1. Puntos de equilibrio	41
5.2. Existencia y estabilidad de los equilibrios	42
5.3. Estabilidad del sistema y evolución temporal de las tres especies	43
5.3.1. Evolución temporal a partir del estado inicial p_{90}	46
6. Estrategia de replantación del Palo Loco a tasa proporcional	48
6.1. Puntos de equilibrio	48
6.2. Existencia y estabilidad de los equilibrios	50
6.3. Estabilidad del sistema y evolución temporal de las tres especies	51
6.3.1. Evolución temporal a partir del estado inicial p_{90}	54

ÍNDICE GENERAL

7. Estrategia de replantación simultanea de las especies nativas a tasa proporcional	57
7.1. Puntos de equilibrio	58
7.2. Existencia y estabilidad en el espacio de parámetros	59
7.2.1. Evolución temporal a partir del estado inicial p_{90} bajo replantación conjunta	62
8. Impacto combinado de la replantación nativa y la tala dirigida sobre el eucalipto	64
8.1. Modelos dinámicos con control sobre tres parámetros	64
8.2. Resultados numéricos	65
9. Conclusiones	69
A. Estrategia de replantación proporcional de BS: puntos de equilibrio y estabilidad	72
A.1. Puntos de equilibrio	72
A.2. Existencia y estabilidad de los equilibrios	76
B. Estrategia de replantación proporcional de PS: puntos de equilibrio y estabilidad	82
B.1. Puntos de equilibrio	82
B.2. Existencia y estabilidad de los equilibrios	86
C. Estrategia de replantación proporcional simultanea de las especies nativas: puntos de equilibrio y estabilidad	92
C.1. Puntos de equilibrio	92
C.2. Existencia y estabilidad de los equilibrios	97
C.3. Curvas críticas en el plano de parámetros	105
Bibliografía	107

Índice de cuadros

3.1.	Simplificación de notación utilizada en las diferentes estrategias.	19
3.2.	Parámetros utilizados en el modelo base.	20
4.1.	Resumen de estabilidad de los puntos de equilibrio biológicamente viables. .	34
4.2.	Cantidad de puntos de equilibrio en cada región, indicando cuáles son estables.	35
5.1.	Resumen de estabilidad de los puntos de equilibrio biológicamente viables. .	42
5.2.	Cantidad de puntos de equilibrio en cada región, indicando cuáles son estables.	43
6.1.	Resumen de estabilidad de los puntos de equilibrio viables en función del parámetro θ_2	50
6.2.	Cantidad de puntos de equilibrio en cada región, indicando cuáles son estables.	51
7.1.	Cantidad de puntos críticos en cada región, indicando cuáles son estables. .	61

Índice de figuras

2.1. Trayectoria del sistema $\dot{x} = f(x; \mu)$ definida por $x = x(t)$.	14
2.2. Ejemplo esquemático de equivalencia topológica.	16
4.1. Valores propios de p_5 vs η .	31
4.2. Valores propios de p_7 vs η	33
4.3. Intervalos de η críticos.	34
4.4. Trayectorias del sistema, con valores de η en la Región I.	36
4.5. Trayectorias del sistema, con valores de η en la Región II.	36
4.6. Trayectorias del sistema, con valores de η en la Región III.	37
4.7. Trayectorias del sistema, con valores de η en la Región IV.	38
4.8. Evolución temporal de BS, PS y ES, para distintos valores de η a partir del punto p_{90} .	39
5.1. Intervalos de θ_1 críticos.	43
5.2. Trayectorias del sistema, con valores de θ_1 en la Región I.	44
5.3. Trayectorias del sistema, con valores de θ_1 en la Región II.	45
5.4. Trayectorias del sistema, con valores de θ_1 en la Región III.	45
5.5. Trayectorias del sistema, con valores de θ_1 en la Región IV.	46
5.6. Evolución temporal de BS, PS y ES, para distintos valores de θ_1 a partir del punto p_{90} .	47
6.1. Valores críticos del parámetro θ_2 que definen las regiones dinámicas del sistema.	51
6.2. Trayectorias del sistema, con valores de θ_2 en la Región I.	52
6.3. Trayectorias del sistema, con valores de θ_2 en la Región II.	53
6.4. Trayectorias del sistema, con valores de θ_2 en la Región III.	53
6.5. Trayectorias del sistema, con valores de θ_2 en la Región IV.	54
6.6. Trayectorias del sistema, con valores de θ_2 en la Región V.	55
6.7. Evolución temporal de BS, PS y ES, para distintos valores de θ_2 a partir del punto p_{90} .	56
7.1. División del plano de parámetros en 22 regiones, señalando los puntos de equilibrio estables existentes.	60

ÍNDICE DE FIGURAS

7.2. Clasificación de los puntos (θ_1, θ_2) según la convergencia en el tiempo ($t = 1000$ años) de la trayectoria del punto p_{90}	63
8.1. Resultado del barrido de parámetros desde p_{90} para distintos valores de η	66
8.2. Confirmación de fronteras estabilizadas para η más grandes.	67
8.3. Resultado del barrido de parámetros desde p_{90} para distintos valores de η , considerando $T = 2$	67
8.4. Confirmación de fronteras estabilizadas para η más grandes, considerando $T = 2$	68
A.1. Valores propios de p_4 en función de θ_1	79
A.2. Valores propios de p_5 en función de θ_1	80
A.3. Valores propios de p_7 en función de θ_1	81
A.4. Valores propios de p_8 en función de θ_1	81
B.1. Valores propios de p_2 en función de θ_2	88
B.2. Valores propios de p_3 en función de θ_2	89
B.3. Valores propios de p_7 en función de θ_2	91
B.4. Valores propios de p_8 en función de θ_2	91
C.1. Mapa de estabilidad para p_2 en el plano (θ_1, θ_2)	99
C.2. Mapa de estabilidad para p_3 en el plano (θ_1, θ_2)	100
C.3. Mapa de estabilidad para p_5 en el plano (θ_1, θ_2)	101
C.4. Mapa de estabilidad para p_6 en el plano (θ_1, θ_2)	102
C.5. Mapa de estabilidad para p_8 en el plano (θ_1, θ_2)	104
C.6. Mapa de estabilidad para p_9 en el plano (θ_1, θ_2)	105

Capítulo 1

Introducción

La conservación de áreas naturales protegidas enfrenta desafíos cada vez mayores debido al avance de la urbanización, la introducción de especies invasoras y el cambio climático. Un caso emblemático de esta problemática es la Reserva Ecológica del Pedregal de San Ángel (REPSA), ubicada en el campus principal de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM). Esta reserva, conformada por un ecosistema de matorral xerófilo en suelos poco desarrollados, alberga una gran diversidad de especies, muchas de ellas endémicas o de importancia ecológica significativa. Sin embargo, a pesar de su estatus de protección, la integridad ecológica de REPSA se ha visto comprometida por la invasión de especies exóticas, particularmente el *Eucalyptus camaldulensis*, que amenaza con alterar de manera irreversible la estructura y el funcionamiento de esta comunidad.

Ante esta situación, resulta crucial contar con herramientas predictivas que permitan evaluar escenarios futuros y diseñar estrategias de manejo efectivas. En este contexto, el trabajo realizado por Acosta-Arreola et al. [1] se presenta como un aporte fundamental. Estos investigadores propusieron una familia de modelos dinámicos basados en ecuaciones diferenciales ordinarias para describir las interacciones ecológicas entre tres especies clave de la REPSA: dos nativas, Palo Loco (*Pittocaulon praecox*) y Tepozán (*Buddleja cordata*), y la especie invasora Eucalipto Rojo (*Eucalyptus camaldulensis*).

Entre los modelos desarrollados, el denominado modelo II-B ha sido destacado por su capacidad para capturar los principales mecanismos ecológicos observados en el sistema, incorporando tanto interacciones competitivas como relaciones de facilitación entre las especies nativas. Este modelo considera el crecimiento, mortalidad e interacciones interespecíficas bajo un marco determinista de espacio limitado, donde las variables dinámicas representan el área ocupada por cada especie.

El sistema de ecuaciones que describe el modelo II-B es el siguiente:

$$\frac{dBS}{dt} = \frac{\alpha_{BS} \cdot BS \cdot FS}{1 + ES \cdot \gamma_{EB}} - BS \cdot (\beta_{BS} + \mu_{EB} \cdot ES) \quad (1.1)$$

$$\frac{dPS}{dt} = \frac{\alpha_{PS} \cdot PS \cdot FS \cdot (1 + \gamma_{BP} \cdot BS)}{1 + ES \cdot \gamma_{EP}} - PS \cdot (\beta_{PS} + \mu_{EP} \cdot ES) \quad (1.2)$$

$$\frac{dES}{dt} = \alpha_{ES} \cdot ES \cdot FS - \beta_{ES} \cdot ES, \quad (1.3)$$

donde:

- BS : espacio ocupado por *Buddleja cordata* (Tepozán),
- PS : espacio ocupado por *Pittocaulon praecox* (Palo Loco),
- ES : espacio ocupado por *Eucalyptus camaldulensis* (Eucalipto Rojo),
- TS : espacio total de la reserva, la cual se considera constante,
- FS : espacio libre disponible, donde

$$TS = FS + (BS + PS + ES).$$

El modelo está compuesto por tres ecuaciones diferenciales que describen el cambio en el tiempo del área ocupada por cada una de las tres especies.

La primera ecuación corresponde a la dinámica de *Buddleja cordata* (BS). Su crecimiento depende del espacio libre disponible (FS), como se muestra en el término $\alpha_{BS} \cdot BS \cdot FS$, pero es inhibido por la presencia del eucalipto (ES) mediante el factor $\frac{1}{1+ES\cdot\gamma_{EB}}$. Además, la mortalidad de BS se incrementa por efecto del eucalipto a través del término $\mu_{EB} \cdot ES$, incluido en la expresión $BS \cdot (\beta_{BS} + \mu_{EB} \cdot ES)$.

La segunda ecuación modela a *Pittocaulon praecox* (PS). Al igual que BS, su crecimiento depende del espacio libre (FS), el cual se muestra con el término $\alpha_{PS} \cdot PS \cdot FS$, pero también se ve facilitado por la presencia de BS, lo cual se refleja en el factor $(1 + \gamma_{BP} \cdot BS)$ en el numerador. Esta tasa de crecimiento es inhibida por el eucalipto mediante el término $\frac{1}{1+ES\cdot\gamma_{EP}}$, y sufre mortalidad inducida por ES a través del término $\mu_{EP} \cdot ES$, dentro de la expresión $PS \cdot (\beta_{PS} + \mu_{EP} \cdot ES)$.

Finalmente, la tercera ecuación describe la evolución del eucalipto (ES). Su crecimiento es proporcional al espacio libre disponible, como se indica en el término $\alpha_{ES} \cdot ES \cdot FS$, y su disminución se debe exclusivamente a la mortalidad natural, modelada por $\beta_{ES} \cdot ES$.

Estas interacciones reflejan relaciones de competencia por espacio, inhibición y facilitación entre las especies, y capturan aspectos ecológicos esenciales para el análisis de la dinámica en la reserva.

A continuación se describen los parámetros que intervienen en el sistema:

- $\alpha_{PS}, \alpha_{BS}, \alpha_{ES}$: tasas de crecimiento en función del espacio libre,

-
- $\beta_{PS}, \beta_{BS}, \beta_{ES}$: tasas de mortalidad natural,
 - γ_{EP}, γ_{EB} : tasas de inhibición del crecimiento de las especies nativas por ES ,
 - μ_{EP}, μ_{EB} : tasas de mortalidad inducida en especies nativas por ES ,
 - τ_{BS} : efecto facilitador de *Buddleja cordata* sobre *Pittocaulon praecox*.

Este modelo permitió a los autores identificar dinámicas de biestabilidad, donde el sistema puede converger hacia dos posibles estados alternativos dependiendo de las condiciones iniciales:

1. Un estado dominado exclusivamente por *Eucalyptus camaldulensis*, con la extinción local de las especies nativas.
2. Un estado de coexistencia estable entre *Pittocaulon praecox* y *Buddleja cordata*, con erradicación de la especie invasora.

Un resultado particularmente relevante del modelo II-B es que el estado del sistema observado en 1990, denominado p_{90} , se encuentra dentro de la cuenca de atracción del estado en el que las dos especies nativas se extinguen localmente y la especie invasora *Eucalyptus camaldulensis* domina el sistema. Este hallazgo implica que, de mantenerse las condiciones actuales sin intervenciones, la dinámica natural conduciría irremediablemente hacia un escenario ecológicamente indeseable.

Frente a este contexto, el presente trabajo tiene como objetivo general evaluar estrategias de manejo que favorezcan la conservación de las especies nativas frente a la presencia de *Eucalyptus camaldulensis*. Para ello, se toma como punto de partida el modelo (1.1)–(1.3) y se proponen seis nuevas variantes que incorporan diversas formas de intervención: desde la tala proporcional constante o periódica de la especie invasora, hasta la replantación de las especies nativas por separado o de forma conjunta. En las primeras cuatro estrategias se realiza un análisis detallado de los puntos de equilibrio y su estabilidad en función de los parámetros de manejo. En las dos estrategias más complejas, se adoptan enfoques gráficos y numéricos con el fin de caracterizar las regiones del espacio de parámetros que favorecen la recuperación del ecosistema.

La relevancia de este estudio radica en su capacidad para proporcionar criterios cuantitativos, fundamentados en herramientas de la teoría de sistemas dinámicos, que apoyen la toma de decisiones en contextos de conservación ecológica. La posibilidad de redirigir la trayectoria del sistema hacia estados deseables mediante intervenciones adecuadas demuestra que aún es viable preservar la biodiversidad de la REPSA si se actúa con decisión y conocimiento.

Este documento se organiza de la siguiente manera. En el Capítulo 2 se presenta el marco teórico donde se introducen los fundamentos matemáticos necesarios. Se inicia con una revisión de los conceptos esenciales en la teoría de ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos ([2], [3], [4]), incluyendo conceptos de la teoría de bifurcaciones ([5], [6]), que

permite analizar cómo cambios en los parámetros del sistema pueden llevar a transiciones importantes en la dinámica del sistema. En el Capítulo 3 se presenta la metodología general utilizada. Los Capítulos 4 al 8 abordan los seis estrategias propuestas, con sus respectivos análisis de equilibrio, estabilidad y simulaciones dinámicas. En el Capítulo 9 se discuten las conclusiones generales y se plantean posibles líneas de investigación futura. Finalmente, se añadieron tres apéndices en los que se detallan con mayor profundidad los cálculos realizados para la obtención de los puntos de equilibrio, así como las condiciones de existencia y estabilidad. Estos apéndices corresponden a los Capítulos 5, 6 y 7, respectivamente.

Capítulo 2

Marco teórico matemático

En este capítulo se presentan los fundamentos teóricos necesarios para el estudio de los modelos que se desarrollan en esta memoria. Se abordan conceptos clave de ecuaciones diferenciales, sistemas dinámicos, estabilidad de puntos críticos, bifurcaciones locales y herramientas numéricas utilizadas en el análisis de sistemas ecológicos. Cada uno de estos elementos constituye una base matemática esencial para comprender la dinámica de interacciones entre especies, interpretar resultados cualitativos y cuantitativos, y diseñar estrategias de manejo fundamentadas.

2.1. Ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos

Definición 2.1.1. Una *ecuación diferencial ordinaria (EDO)* es una relación que involucra una función desconocida $x(t)$ y sus derivadas respecto a una variable independiente, usualmente el tiempo. Las EDO permiten modelar procesos que evolucionan en el tiempo, tales como la propagación de enfermedades, el crecimiento poblacional o la interacción entre especies. Una EDO de primer orden se escribe como:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t),$$

donde f es una función dada que describe la tasa de cambio de x .

Definición 2.1.2. Un *sistema dinámico continuo en el tiempo* es un conjunto de EDOs que describe la evolución simultánea de varias variables dependientes del tiempo. Formalmente, se escribe como:

$$\frac{dx}{dt} = f(x; \mu), \quad (2.1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es un vector de estado dependiente del tiempo, $\mu \in \mathbb{R}^m$ es un vector de parámetros, y $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función suficientemente suave definida en un subconjunto $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, que describe el campo vectorial del sistema.

Las soluciones de la ecuación (2.1) determinan trayectorias en el espacio de fases que reflejan la evolución temporal del sistema bajo estudio (Figura 2.1).

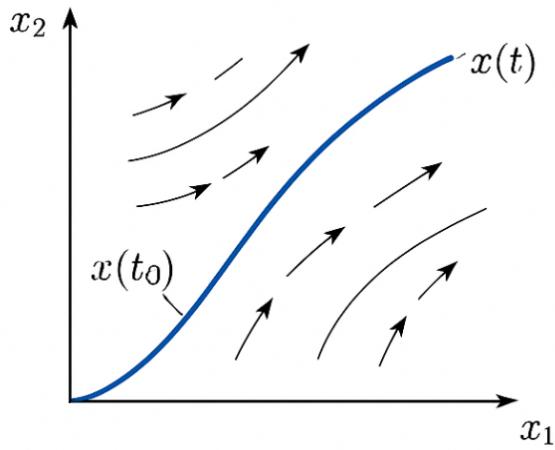


Figura 2.1: Trayectoria del sistema $\dot{x} = f(x; \mu)$ definida por $x = x(t)$.

2.2. Retratos de fase y órbitas

Todos los estados posibles del sistema definido en la ecuación (2.1), bajo una combinación válida de parámetros, se representan mediante puntos x pertenecientes a un conjunto X . A este conjunto se le denomina **espacio de estados** del sistema, y en él se encuentran las trayectorias que describen la evolución del sistema a partir de distintas condiciones iniciales.

Definición 2.2.1. *Sea $x(t) \in \mathbb{R}^n$ una solución del sistema dinámico (2.1), definida para $t \in T \subset \mathbb{R}$, con condición inicial $x(0) = x_0$. La **órbita** asociada a x_0 es el conjunto de todos los estados recorridos por la solución a lo largo del tiempo:*

$$\mathcal{O} := \{x(t) \in \mathbb{R}^n \mid t \in T\}.$$

Este conjunto representa la trayectoria del sistema en el espacio de fases a partir de la condición inicial x_0 .

Una órbita representa la evolución del sistema a partir del estado inicial x_0 . El conjunto de órbitas define la estructura cualitativa del sistema, permitiendo visualizar su comportamiento en el tiempo.

Definición 2.2.2. *El **retrato de fase** es una representación geométrica del conjunto de órbitas de un sistema dinámico. Permite visualizar la estructura cualitativa del sistema y sus comportamientos posibles: atracción, repulsión, ciclos límite, etc.*

2.3. Puntos de equilibrio y estabilidad

El estudio de los puntos de equilibrio y su estabilidad constituye una de las herramientas fundamentales en el análisis cualitativo de sistemas dinámicos. Los puntos de equilibrio

representan estados en los que el sistema permanece constante en el tiempo, y su análisis permite predecir el comportamiento del sistema ante pequeñas perturbaciones. Determinar si un equilibrio es estable, inestable o puntos tipo silla, es esencial para comprender la dinámica a largo plazo y anticipar escenarios críticos en sistemas reales, como aquellos que modelan interacciones ecológicas. En esta sección se definen formalmente estos conceptos.

Definición 2.3.1. *Un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ es un **punto crítico** del sistema (2.1) si $f(x_0) = 0$. En ese punto, el sistema permanece estacionario: si el sistema parte en x_0 , se mantiene en x_0 para todo tiempo. Los puntos críticos son fundamentales porque determinan posibles estados de equilibrio del sistema.*

Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un punto de equilibrio del sistema (2.1). La **matriz Jacobiana** de f evaluada en x_0 , denotada por $Df(x_0; \mu)$, se define como la matriz $n \times n$ cuyas entradas corresponden a las derivadas parciales de los componentes de f respecto a las variables del sistema:

$$Df(x_0; \mu) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0; \mu) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0; \mu) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_0; \mu) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_0; \mu) \end{pmatrix}.$$

Definimos a continuación los elementos que permiten analizar y clasificar la estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema:

- n_0 = Número de valores propios de $Df(x_0)$ con parte real nula;
- n_+ = Número de valores propios de $Df(x_0)$ con parte real positiva;
- n_- = Número de valores propios de $Df(x_0)$ con parte real negativa.

Definición 2.3.2. *Se dice que un equilibrio x_0 del sistema (2.1) es **hiperbólico** si ninguno de los valores propios de la matriz Jacobiana $Df(x_0; \mu)$ tiene parte real igual a cero; es decir, si todos poseen parte real estrictamente positiva o negativa, lo que equivale a que $n_0 = 0$.*

El estudio de equilibrios hiperbólicos resulta fundamental, ya que cerca de ellos es posible aproximar el comportamiento del sistema no lineal mediante su versión linealizada. Esto motiva la noción de equivalencia topológica, que permite comparar sistemas dinámicos a través de su estructura cualitativa, más allá de su expresión analítica exacta.

Definición 2.3.3. *Se dice que dos sistemas dinámicos son **topológicamente equivalentes** si existe una transformación continua, biyectiva y con inversa continua (llamada homeomorfismo) que transforma las trayectorias de un sistema en las del otro, preservando el sentido del tiempo. Si, además, la transformación mantiene la dependencia de las trayectorias con respecto al tiempo, entonces se dice que los sistemas son **conjugados**.*

Esto significa que, aunque los sistemas pueden diferir en sus expresiones analíticas o en la rapidez con la que recorren sus trayectorias, comparten la misma estructura cualitativa de comportamiento: los mismos tipos de puntos críticos, las mismas conexiones entre órbitas, y el mismo tipo de evolución global. Un ejemplo visual de este concepto se muestra en la Figura 2.2, donde se ilustran dos sistemas distintos que son topológicamente equivalentes.

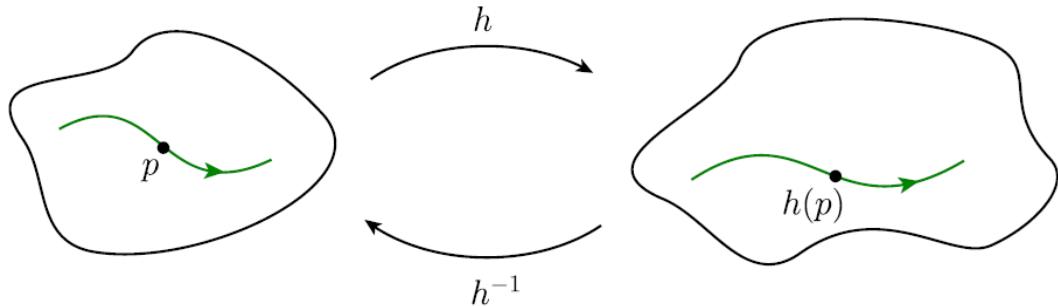


Figura 2.2: Ejemplo esquemático de equivalencia topológica.

Las propiedades de estabilidad de un equilibrio hiperbólico x_0 en un sistema dinámico no lineal pueden determinarse a partir de la linealización del campo vectorial f en una vecindad de x_0 . Este resultado se formaliza en el **teorema de Hartman-Grobman**, el cual se enuncia a continuación. Para más detalles revisar [4].

Hartman & Grobman

Teorema 2.3.1. *Si el campo de vectores,*

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (2.2)$$

tiene un equilibrio hiperbólico x_0 , entonces existe una vecindad \mathcal{U} de x_0 tal que (2.2) en \mathcal{U} es localmente topológicamente conjugado al sistema linealizado

$$\dot{x} = Df(x_0)x,$$

en una vecindad \mathcal{V} del origen.

El teorema de Hartman–Grobman establece que la dinámica de un sistema no lineal continuo es, en una vecindad de un punto de equilibrio hiperbólico, topológicamente equivalente a la de su sistema linealizado. En otras palabras, el comportamiento cualitativo del sistema no lineal cerca de un equilibrio hiperbólico puede estudiarse a partir de su aproximación lineal. Esta equivalencia permite determinar condiciones para la estabilidad local del equilibrio mediante el análisis de los valores propios de la matriz Jacobiana. En particular:

- Un equilibrio x_0 es un **atractor** si $n_- = n$, es decir, si todos los valores propios de

$Df(x_0)$ tienen parte real negativa.

- Un equilibrio x_0 es un **repulsor** si $n_+ = n$, es decir, si todos los valores propios de $Df(x_0)$ tienen parte real positiva.
- Un equilibrio x_0 es un **punto silla** si el producto $n_+ \cdot n_- \neq 0$, es decir, si hay valores propios con parte real positiva y negativa

2.4. Bifurcaciones

En muchos sistemas dinámicos, la dinámica cualitativa puede cambiar drásticamente cuando uno o más parámetros del sistema se modifican. Estos cambios estructurales pueden afectar la existencia, cantidad o estabilidad de los puntos de equilibrio, y se conocen como bifurcaciones. El estudio de bifurcaciones permite identificar umbrales críticos a partir de los cuales la dinámica del sistema se transforma, lo que resulta particularmente útil en contextos aplicados como la ecología, donde pequeñas variaciones en las condiciones pueden provocar transiciones abruptas entre regímenes ecológicos. A continuación, se presentan las definiciones formales que permiten describir este fenómeno.

Definición 2.4.1. *Se dice que ocurre una **bifurcación** cuando la variación de uno o más parámetros del sistema provoca un cambio cualitativo en su retrato de fase, es decir, cuando se pasa a una dinámica topológicamente no equivalente. Dicho de otro modo, la estructura global del sistema cambia de forma cualitativa ante la modificación de sus parámetros.*

La definición anterior introduce el concepto general de bifurcación como un cambio cualitativo en la dinámica del sistema. Para estudiar estos cambios de manera sistemática, resulta útil representar gráficamente cómo varía el comportamiento del sistema a medida que se modifican los parámetros. Esto da lugar a los llamados diagramas de bifurcación, cuya definición formal se presenta a continuación.

Definición 2.4.2. *Un **diagrama de bifurcación** de un sistema dinámico es una estratificación del espacio de parámetros inducida por la equivalencia topológica, acompañada de retratos de fase representativos para cada estrato. Estos diagramas permiten visualizar las regiones del espacio de parámetros donde la dinámica permanece cualitativamente constante, y cómo se conecta con otras regiones donde ocurre una bifurcación.*

Capítulo 3

Metodología

3.1. Estrategias de manejo y formulación de modelos

El objetivo metodológico de esta tesis es evaluar el impacto de distintas estrategias de manejo ecológico sobre la dinámica poblacional de tres especies vegetales en la REPSA: las nativas Tepozán (BS), Palo Loco (PS), y la invasora Eucalipto Rojo (ES). Para ello, se parte del modelo II-B propuesto por Acosta-Arreola et al. [1], y se desarrollan seis estrategias propuestas, cada uno incorporando un subconjunto distinto de intervenciones ecológicas: tala o replantación.

En la primera estrategia se introduce una tala constante sobre la especie invasora. Esta intervención se implementa agregando un término $-\eta \cdot ES$ a la ecuación de evolución de la especie exótica, transformándola en:

$$\frac{dES}{dt} = \alpha_{ES} \cdot ES \cdot FS - \beta_{ES} \cdot ES - \eta \cdot ES.$$

La segunda y tercera estrategia exploran la replantación individual de las especies nativas BS y PS, respectivamente. En ambos casos, se agrega un término proporcional a la población replantada: $+\theta_1 \cdot BS$ o $+\theta_2 \cdot PS$, según corresponda. Por ejemplo, la segunda estrategia considera:

$$\frac{dBS}{dt} = [\text{términos originales}] + \theta_1 \cdot BS.$$

La cuarta estrategia propone una replantación combinada de ambas especies nativas, incorporando simultáneamente los dos términos anteriores.

La quinta y sexta estrategia combinan tala y replantación simultánea, incluyendo los tres parámetros θ_1 , θ_2 y η . En la quinta estrategia la tala es constante, mientras que en la sexta estrategia se modela como periódica, con la forma:

$$\eta(t) = \eta \cdot \left(\frac{1 + \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)}{2} \right).$$

3.2. METODOLOGÍA DE ANÁLISIS

Cada una de estas estrategias representa una estrategia de manejo distinta, y el objetivo específico es determinar si existen combinaciones de parámetros que permitan redirigir la trayectoria del sistema hacia un estado deseable, definido como la coexistencia estable de las especies nativas junto con la erradicación o control de la especie invasora.

3.2. Metodología de análisis

Para las primeras cuatro estrategias, debido a su menor complejidad estructural, se aplica un análisis completo. Esto incluye:

- Resolución del sistema en estado estacionario para hallar puntos de equilibrio.
- Análisis de estabilidad local mediante la matriz Jacobiana evaluada en los puntos críticos.
- Identificación de valores de parámetros críticos.
- Construcción de regiones dinámicas en el espacio paramétrico.

En cambio, la quinta y sexta estrategia requieren un enfoque numérico y gráfico debido al aumento en la dimensión paramétrica y la complejidad algebraica. En estos casos se realiza:

- Barrido de parámetros en un plano (θ_1, θ_2) para cada valor fijo del parámetro η .
- Simulación de trayectorias desde una condición inicial ecológicamente significativa: el punto p_{90} , que representa el estado estimado del sistema en 1990.
- Clasificación de los atractores observados y construcción de mapas de comportamiento cualitativo.

3.3. Simplificación de notación

Con el fin de aligerar la expresión de los sistemas dinámicos en los capítulos siguientes, se introduce la siguiente notación compacta, que se mantendrá constante en el resto del documento:

$$\begin{aligned} BS(t) &= x_1(t), & \alpha_{BS} = \alpha_1, & \beta_{BS} = \beta_1, & \gamma_{EB} = \gamma_1, & \mu_{EB} = \mu_1, & \tau_{BP} = \tau, \\ PS(t) &= x_2(t), & \alpha_{PS} = \alpha_2, & \beta_{PS} = \beta_2, & \gamma_{EP} = \gamma_2, & \mu_{EP} = \mu_2, \\ ES(t) &= x_3(t), & \alpha_{ES} = \alpha_3, & \beta_{ES} = \beta_3, \\ FS(t) &= x_4(t), \\ TS(t) &= C. \end{aligned}$$

Cuadro 3.1: Simplificación de notación utilizada en las diferentes estrategias.

3.4. VALORES DE PARÁMETROS

Esta notación será utilizada para expresar de manera más compacta los sistemas de ecuaciones y facilitar su manipulación tanto simbólica como numérica.

3.4. Valores de parámetros

En todas las estrategias propuestas se utilizan los siguientes valores de parámetros, tomados de Acosta-Arreola et al. [1], salvo el o los parámetros nuevos introducidos en cada caso:

Parámetro	Valor
α_1	0.00137
β_1	0.07
γ_1	0.01
μ_1	0.01
α_2	0.0011
β_2	0.29
γ_2	0.01
μ_2	0.01
α_3	0.001
β_3	0.1
τ	0.0995
C	146.9

Cuadro 3.2: Parámetros utilizados en el modelo base.

Capítulo 4

Estrategia de tala de eucaliptus a tasa proporcional

En este capítulo se analiza una primera estrategia de manejo enfocada en la reducción directa de la especie invasora *Eucalyptus camaldulensis*, mediante la implementación de una tasa de tala proporcional. Para ello, se modifica el modelo II-B propuesto por Acosta-Arreola et al. [1], incorporando un nuevo parámetro $\eta > 0$ que representa el coeficiente de tala aplicado sobre la población de eucaliptos.

El sistema resultante está dado por las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\alpha_1 \cdot x_1 \cdot x_4}{1 + x_3 \cdot \gamma_1} - x_1 \cdot (\beta_1 + \mu_1 \cdot x_3), \quad (4.1)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{\alpha_2 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot (1 + \tau \cdot x_1)}{1 + x_3 \cdot \gamma_2} - x_2 \cdot (\beta_2 + \mu_2 \cdot x_3), \quad (4.2)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = \alpha_3 \cdot x_3 \cdot x_4 - \beta_3 \cdot x_3 - \eta \cdot x_3. \quad (4.3)$$

La ecuación (4.3) incluye el nuevo término $-\eta \cdot x_3$, que modela la disminución de la biomasa de eucalipto debido a la intervención humana. Todas las variables y parámetros considerados en el sistema son positivos, y se mantiene la restricción de espacio total disponible en la reserva:

$$x_4 = C - (x_1 + x_2 + x_3),$$

donde C es constante y representa el área total de la reserva ecológica.

4.1. Puntos de equilibrio

Decimos que un punto (x_1, x_2, x_3) es un punto de equilibrio del sistema (4.1)–(4.3) si, al evaluarlo en las ecuaciones, todas las derivadas se anulan. Esto equivale a resolver el

siguiente sistema de ecuaciones:

$$[\alpha_1(C - (x_1 + x_2 + x_3)) - (1 + \gamma_1 x_3)(\beta_1 + \mu_1 x_3)] x_1 = 0, \quad (4.4)$$

$$[\alpha_2(C - (x_1 + x_2 + x_3))(1 + \tau x_1) - (1 + \gamma_2 x_3)(\beta_2 + \mu_2 x_3)] x_2 = 0, \quad (4.5)$$

$$[\alpha_3(C - (x_1 + x_2 + x_3)) - (\beta_3 + \eta)] x_3 = 0. \quad (4.6)$$

Estudiaremos los puntos de equilibrio por casos:

1. Si $x_1 = 0$, entonces $(0, x_2, x_3)$ es un punto de equilibrio si satisface el sistema de ecuaciones

$$[\alpha_2(C - (x_2 + x_3)) - (1 + \gamma_2 x_3)(\beta_2 + \mu_2 x_3)] x_2 = 0, \quad (4.7)$$

$$[\alpha_3(C - (x_2 + x_3)) - (\beta_3 + \eta)] x_3 = 0. \quad (4.8)$$

- 1.1. Si $x_2 = 0$, entonces identificamos dos casos:

- 1.1.1. Si $x_3 = 0$, entonces el punto de equilibrio es

$$(0, 0, 0).$$

- 1.1.2. Ahora, si $x_3 > 0$, entonces de la ecuación (4.8) obtenemos que

$$x_3 = C - \frac{\beta_3 + \eta}{\alpha_3},$$

y por lo tanto, el punto de equilibrio es de la forma

$$\left(0, 0, C - \frac{\beta_3 + \eta}{\alpha_3}\right),$$

siempre que

$$C > \frac{\beta_3 + \eta}{\alpha_3}.$$

- 1.2. Si $x_2 > 0$, entonces identificamos dos nuevos casos:

- 1.2.1. Si $x_3 = 0$, entonces de la ecuación (4.7) obtenemos que

$$x_2 = C - \frac{\beta_2}{\alpha_2},$$

y por lo tanto, el punto de equilibrio es de la forma

$$\left(0, C - \frac{\beta_2}{\alpha_2}, 0\right),$$

siempre que

$$C > \frac{\beta_2}{\alpha_2}.$$

1.2.2. Si $x_3 > 0$, entonces de la ecuación (4.8) obtenemos que

$$x_2 = C - x_3 - \frac{\beta_3 + \eta}{\alpha_3}.$$

Luego, utilizando esta expresión y el hecho de que x_3 resuelve (4.7), obtenemos las soluciones

$$x_3^\pm = \frac{1}{2\gamma_2\mu_2} \left[-(\beta_2\gamma_2 + \mu_2) \pm \sqrt{(\mu_2 - \beta_2\gamma_2)^2 + \frac{4\alpha_2\gamma_2\mu_2(\beta_3 + \eta)}{\alpha_3}} \right].$$

Notemos que la solución x_3^\pm siempre es real. Sin embargo, x_3^- siempre es negativo, por lo que este caso lo descartamos y consideramos $x_3 = x_3^+$. Por otro lado, dado que todos los parámetros son positivos, después de realizar algunos cálculos algebraicos obtenemos que $x_3^+ > 0$ si y solo si $\beta_2\alpha_3 < \alpha_2(\beta_3 + \eta)$.

Así, el punto de equilibrio obtenido es de la forma

$$\left(0, C - \sigma_1 - \frac{\beta_3 + \eta}{\alpha_3}, \sigma_1\right),$$

siempre que

$$C > \sigma_1 + \frac{\beta_3 + \eta}{\alpha_3},$$

donde

$$\sigma_1 := \frac{1}{2\gamma_2\mu_2} \left[-(\beta_2\gamma_2 + \mu_2) + \sqrt{(\mu_2 - \beta_2\gamma_2)^2 + \frac{4\alpha_2\gamma_2\mu_2(\beta_3 + \eta)}{\alpha_3}} \right]. \quad (4.9)$$

2. Si $x_1 > 0$, entonces resolver el sistema (4.4)–(4.6) es equivalente a resolver:

$$\alpha_1(C - (x_1 + x_2 + x_3)) - (1 + \gamma_1 x_3)(\beta_1 + \mu_1 x_3) = 0, \quad (4.10)$$

$$[\alpha_2(C - (x_1 + x_2 + x_3))(1 + \tau x_1) - (1 + \gamma_2 x_3)(\beta_2 + \mu_2 x_3)] x_2 = 0, \quad (4.11)$$

$$[\alpha_3(C - (x_1 + x_2 + x_3)) - (\beta_3 + \eta)] x_3 = 0. \quad (4.12)$$

2.1. Si además $x_2 = 0$, entonces el sistema anterior se reduce a:

$$\alpha_1(C - (x_1 + x_3)) - (1 + \gamma_1 x_3)(\beta_1 + \mu_1 x_3) = 0, \quad (4.13)$$

$$[\alpha_3(C - (x_1 + x_3)) - (\beta_3 + \eta)] x_3 = 0. \quad (4.14)$$

2.1.1. Si $x_3 = 0$, entonces los puntos de equilibrio son de la forma

$$\left(C - \frac{\beta_1}{\alpha_1}, 0, 0\right),$$

siempre que

$$C > \frac{\beta_1}{\alpha_1}.$$

2.1.2. Si $x_3 > 0$, entonces de la ecuación (4.14) obtenemos que

$$x_1 = C - x_3 - \frac{\beta_3 + \eta}{\alpha_3}.$$

Luego, utilizando esta expresión y el hecho de que x_3 resuelve (4.13), obtenemos las soluciones

$$x_3^\pm = \frac{1}{2\gamma_1\mu_1} \left[-(\beta_1\gamma_1 + \mu_1) \pm \sqrt{(\beta_1\gamma_1 - \mu_1)^2 + \frac{4\gamma_1\mu_1\alpha_1(\beta_3 + \eta)}{\alpha_3}} \right].$$

La expresión x_3^\pm siempre entrega dos soluciones reales, ya que el valor dentro de la raíz cuadrada es positivo para cualquier valor de los parámetros. Sin embargo, x_3^- resulta negativo en todos los casos, por lo que no es válido en nuestro contexto y se descarta. En adelante consideramos solamente la solución positiva $x_3 = x_3^+$. Por otro lado, como todos los parámetros son positivos, y después de simplificar un poco, se puede ver que $x_3^+ > 0$ siempre que se cumpla $\beta_1\alpha_3 < \alpha_1(\beta_3 + \eta)$.

Así, el punto de equilibrio obtenido es de la forma

$$\left(C - \sigma_2 - \frac{\beta_3 + \eta}{\alpha_3}, 0, \sigma_2 \right),$$

siempre que

$$C > \sigma_2 + \frac{\beta_3 + \eta}{\alpha_3},$$

donde

$$\sigma_2 = \frac{1}{2\gamma_1\mu_1} \left[-(\beta_1\gamma_1 + \mu_1) + \sqrt{(\beta_1\gamma_1 - \mu_1)^2 + \frac{4\gamma_1\mu_1\alpha_1(\beta_3 + \eta)}{\alpha_3}} \right]. \quad (4.15)$$

2.2. Si $x_2 > 0$, entonces resolver (4.10)–(4.12) a su vez equivale resolver

$$\alpha_1(C - (x_1 + x_2 + x_3)) - (1 + \gamma_1 x_3)(\beta_1 + \mu_1 x_3) = 0, \quad (4.16)$$

$$\alpha_2(C - (x_1 + x_2 + x_3))(1 + \tau x_1) - (1 + \gamma_2 x_3)(\beta_2 + \mu_2 x_3) = 0, \quad (4.17)$$

$$[\alpha_3(C - (x_1 + x_2 + x_3)) - (\beta_3 + \eta)] x_3 = 0. \quad (4.18)$$

2.2.1. Sea $x_3 = 0$, entonces de la ecuación (4.16) obtenemos que

$$x_2 = C - x_1 - \frac{\beta_1}{\alpha_1}.$$

Luego, utilizando esta expresión y el hecho de que x_1 resuelve (4.17) obtenemos la solución

$$x_1 = \frac{\beta_2\alpha_1 - \alpha_2\beta_1}{\alpha_2\beta_1\tau},$$

donde además obtenemos que $x_1 > 0$ si y solo si $\beta_2\alpha_1 > \alpha_2\beta_1$. Por lo tanto, el punto de equilibrio obtenido es de la forma

$$\left(\frac{\beta_2\alpha_1 - \alpha_2\beta_1}{\alpha_2\beta_1\tau}, C - \frac{\beta_2\alpha_1 - \alpha_2\beta_1}{\alpha_2\beta_1\tau} - \frac{\beta_1}{\alpha_1}, 0 \right),$$

siempre que

$$C > \frac{\beta_2\alpha_1 - \alpha_2\beta_1}{\alpha_2\beta_1\tau} + \frac{\beta_1}{\alpha_1} \quad \text{y} \quad \beta_2\alpha_1 > \alpha_2\beta_1.$$

2.2.2. Si $x_3 > 0$, entonces resolver (4.16)–(4.18) a su vez equivale resolver

$$\alpha_1(C - (x_1 + x_2 + x_3)) - (1 + \gamma_1 x_3)(\beta_1 + \mu_1 x_3) = 0, \quad (4.19)$$

$$\alpha_2(C - (x_1 + x_2 + x_3))(1 + \tau x_1) - (1 + \gamma_2 x_3)(\beta_2 + \mu_2 x_3) = 0, \quad (4.20)$$

$$\alpha_3(C - (x_1 + x_2 + x_3)) - (\beta_3 + \eta) = 0. \quad (4.21)$$

Ahora, resolviendo la ecuación (4.21) para x_2 obtenemos:

$$x_2 = C - x_1 - x_3 - \frac{\beta_3 + \eta}{\alpha_3}. \quad (4.22)$$

Reemplazando ahora (4.22) en la ecuación (4.19) y resolviendo para x_3 se obtiene:

$$x_3^\pm = \frac{1}{2\gamma_1\mu_1} \left[-(\mu_1 + \gamma_1\beta_1) \pm \sqrt{(\mu_1 - \gamma_1\beta_1)^2 + \frac{4\gamma_1\mu_1\alpha_1(\beta_3 + \eta)}{\alpha_3}} \right]. \quad (4.23)$$

La expresión x_3^\pm da soluciones reales, pero x_3^- siempre es negativa, así que se descarta. Nos quedamos con $x_3 = x_3^+$, que será positiva siempre que se cumpla $\beta_1\alpha_3 < \alpha_1(\beta_3 + \eta)$.

Ahora, sustituyendo (4.22) y (4.23) en (4.20), obtenemos

$$x_1 = \frac{\alpha_3 \left[(\beta_2 + \mu_2\sigma_2)(\gamma_2\sigma_2 + 1) - \frac{\alpha_2(\beta_3 + \eta)}{\alpha_3} \right]}{\alpha_2\tau(\beta_3 + \eta)},$$

donde σ^2 se definió en la ecuación (4.15). Luego, definiendo

$$M := \beta_2 + \mu_2\sigma_2, \quad N := \gamma_2\sigma_2 + 1, \quad P := \alpha_2 \frac{\beta_3 + \eta}{\alpha_3}, \quad (4.24)$$

podemos reescribir la coordenada x_1 como

$$x_1 = \frac{\alpha_3(MN - P)}{\alpha_2\tau(\beta_3 + \eta)}.$$

Notemos que M, N y P son expresiones siempre positivas. Por lo tanto, $x_1 > 0$, si y solo si $MN > P$. Luego, el punto de equilibrio toma la forma

$$\left(\frac{\alpha_3(MN - P)}{\alpha_2\tau(\beta_3 + \eta)}, C - \frac{\alpha_3(MN - P)}{\alpha_2\tau(\beta_3 + \eta)} - \sigma_2 - \frac{\beta_3 + \eta}{\alpha_3}, \sigma_2 \right),$$

siempre que

$$C > \frac{\alpha_3(MN - P)}{\alpha_2\tau(\beta_3 + \eta)} + \sigma_2 + \frac{\beta_3 + \eta}{\alpha_3}, \quad (4.25)$$

y

$$MN > P. \quad (4.26)$$

Una vez analizadas todas las posibles combinaciones de existencia para las variables x_1, x_2, x_3 , se identifican ocho formas distintas de puntos de equilibrio viables para el sistema. A continuación, se enumeran dichos puntos, junto con las condiciones necesarias para su existencia:

1. El origen, estado de extinción total

$$p_0 = (0, 0, 0).$$

2. Supervivencia únicamente del Eucalipto (ES)

$$p_1 = \left(0, 0, C - \frac{\beta_3 + \eta}{\alpha_3} \right),$$

siempre que

$$C > \frac{\beta_3 + \eta}{\alpha_3}.$$

3. Supervivencia únicamente del Palo Loco (PS)

$$p_2 = \left(0, C - \frac{\beta_2}{\alpha_2}, 0 \right),$$

siempre que

$$C > \frac{\beta_2}{\alpha_2}.$$

4. Coexistencia del Palo Loco (PS) en conjunto del Eucalipto (ES)

$$p_3 = \left(0, C - \sigma_1 - \frac{\beta_3 + \eta}{\alpha_3}, \sigma_1 \right),$$

siempre que $\alpha_3\beta_2 < \alpha_2(\beta_3 + \eta)$ y

$$C > \sigma_1 + \frac{\beta_3 + \eta}{\alpha_3},$$

donde σ_1 se definió en la ecuación (4.9).

5. Supervivencia únicamente del Tepozán (BS)

$$p_4 = \left(C - \frac{\beta_1}{\alpha_1}, 0, 0 \right),$$

siempre que

$$C > \frac{\beta_1}{\alpha_1}.$$

6. Coexistencia del Tepozán (BS) en conjunto del Eucalipto (ES)

$$p_5 = \left(C - \sigma_2 - \frac{\beta_3 + \eta}{\alpha_3}, 0, \sigma_2 \right)$$

siempre que $\beta_1\alpha_3 < \alpha_1(\beta_3 + \eta)$ y

$$C > \sigma_2 + \frac{\beta_3 + \eta}{\alpha_3},$$

donde σ_2 se definió en la ecuación (4.15).

7. Coexistencia de las dos especies nativas

$$p_6 = \left(\frac{\beta_2\alpha_1 - \alpha_2\beta_1}{\alpha_2\beta_1\tau}, C - \frac{\beta_2\alpha_1 - \alpha_2\beta_1}{\alpha_2\beta_1\tau} - \frac{\beta_1}{\alpha_1}, 0 \right),$$

siempre que $\alpha_1\beta_2 > \alpha_2\beta_1$ y

$$C > \frac{\beta_2\alpha_1 - \alpha_2\beta_1}{\alpha_2\beta_1\tau} + \frac{\beta_1}{\alpha_1}.$$

8. Coexistencia de las tres especies

$$p_7 = \left(\frac{\alpha_3(MN - P)}{\alpha_2\tau(\beta_3 + \eta)}, C - \frac{\alpha_3(MN - P)}{\alpha_2\tau(\beta_3 + \eta)} - \sigma_2 - \frac{\beta_3 + \eta}{\alpha_3}, \sigma_2 \right),$$

siempre que $\alpha_3\beta_1 < \alpha_1(\beta_3 + \eta)$ y que además se cumplan las condiciones (4.25) y (4.26), donde M, N y P se definieron en (4.24).

Estos ocho puntos resumen las posibles configuraciones estacionarias del sistema bajo las distintas combinaciones de existencia de las especies, y serán analizados en términos de su estabilidad en la sección siguiente.

4.2. Existencia y estabilidad de los equilibrios

A continuación se procederá a analizar la estabilidad de los puntos críticos obtenidos anteriormente dado que tenemos los valores de los parámetros. Para el sistema (4.1)–(1.3) tenemos la matriz Jacobiana

$$J = \begin{pmatrix} -\rho_1 - \frac{\alpha_1(x_1-C+x_2+x_3)}{\gamma_1x_3+1} - \phi_1 & -\phi_1 & \psi_1 - \phi_1 - \mu_1x_1 \\ -\phi_2 - \frac{\alpha_2(\tau x_2(x_1-C+x_2+x_3))}{\gamma_2x_3+1} & -\rho_2 - \frac{\alpha_2(\tau x_1+1)(x_1-C+x_2+x_3)}{\gamma_2x_3+1} - \phi_2 & \psi_2 - \phi_2 - \mu_2x_2 \\ -\alpha_3x_3 & -\alpha_3x_3 & -\beta_3 - \eta - \alpha_3(x_1 - C + x_2 + x_3) - \alpha_3x_3 \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \beta_1 - \mu_1x_3 \quad y \quad \rho_2 = \beta_2 + \mu_2x_3, \\ \phi_1 &= \frac{\alpha_1x_1}{\gamma_1x_3+1} \quad y \quad \phi_2 = \frac{\alpha_2x_2(\tau x_1+1)}{\gamma_2x_3+1}, \\ \psi_1 &= \frac{\alpha_1\gamma_1x_1(x_1-C+x_2+x_3)}{(\gamma_1x_3+1)^2} \quad y \quad \psi_2 = \frac{\alpha_2\gamma_2x_2(\tau x_1+1)(x_1-C+x_2+x_3)}{(\gamma_2x_3+1)^2}. \end{aligned}$$

Para determinar cuáles de los puntos de equilibrio tienen sentido desde el punto de vista ecológico y analizar su estabilidad local en función del parámetro η , se utilizan los valores de parámetros presentados en el Cuadro 3.2, que serán empleados de forma consistente a lo largo del estudio.

Equilibrio p_0

Para el primer punto de equilibrio tenemos

$$J(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} \frac{131253}{1000000} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12841}{100000} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{469}{10000} - \eta \end{pmatrix},$$

con lo que la matriz Jacobiana tiene valores propios

- $\lambda_1 = \frac{131253}{1000000} \approx 0.131$,
- $\lambda_2 = -\frac{12841}{100000} \approx -0.12841$,
- $\lambda_3 = \frac{469}{10000} - \eta \approx 0.0469 - \eta$.

El comportamiento del punto de equilibrio p_0 dependerá de η :

- Para $0 < \eta < 0.0469$, los valores propios λ_1 y λ_3 son positivos, mientras que λ_2 es negativo. Esto sugiere que el punto p_0 es un punto de silla.
- Para $\infty > \eta > 0.0469$, λ_1 permanece positivo, pero λ_2, λ_3 son negativos. En este caso, p_0 es parcialmente repulsor en la dirección del vector propio asociado a λ_1 y parcialmente atractivo en las otras dos direcciones. El sistema se sigue comportando como un punto silla.

En conclusión, para $\eta > 0$ tendremos que p_0 es un punto silla.

Equilibrio p_1

Para el segundo punto de equilibrio tenemos

$$J\left(0, 0, \frac{469}{10} - 1000\eta\right) = \begin{pmatrix} 10\eta - \frac{137(1000\eta+100)}{10000(10\eta-\frac{1469}{1000})} - \frac{539}{1000} & 0 & 0 \\ 0 & 10\eta - \frac{11(1000\eta+100)}{10000(10\eta-\frac{1469}{1000})} - \frac{759}{1000} & 0 \\ \eta - \frac{469}{1000} & \eta - \frac{469}{1000} & \eta - \frac{469}{1000} \end{pmatrix},$$

donde los valores propios son

$$\lambda_1 = \eta - \frac{469}{10000}, \quad \lambda_2 = \frac{10^8\eta^2 - 2338 \cdot 10^4\eta + 1004971}{10^3(10^4\eta - 1469)}, \quad y \quad \lambda_3 = \frac{10^8\eta^2 - 2145 \cdot 10^4\eta + 654791}{10^3(10^4\eta - 1469)}.$$

Al igualar estos valores propios a cero y despejar η , identificamos puntos críticos en los que los valores propios pueden cambiar de signo. Estos cambios de signo son cruciales para determinar la naturaleza del punto crítico. De aquí podemos obtener que este punto puede ser un punto silla, un atractor o un repulsor. Los resultados obtenidos son los siguientes:

- Para $0 < \eta < 0.036861$ el punto es estable (atractor).
- Para $0.036861 < \eta < 0.056768$ el punto es punto silla.
- Para $0.056768 < \eta < 0.177032$ el punto es inestable (repulsor).
- Para $0.177032 < \eta < \infty$ el punto es punto silla.

Es importante recordar que, debido a la naturaleza de nuestro problema, debemos garantizar que $x_3 > 0$, lo que implica que:

$$\eta < \frac{469}{10000}.$$

Por lo tanto, los posibles resultados obtenidos considerando las condiciones naturales del problema son

- Para $0 < \eta < 0.036861$ el punto es estable (atractor).
- Para $0.036861 < \eta < 0.0469$ el punto es punto silla.
- Si $\eta > 0.0469$, p_1 abandona el primer octante.

Equilibrio p_2

El tercer punto de equilibrio tiene la forma

$$p_2 = \left(0, C - \frac{\beta_2}{\alpha_2}, 0\right),$$

pero notemos que

$$x_2 = C - \frac{\beta_2}{\alpha_2} = -116.7364.$$

Por lo tanto, p_2 se descarta al no ser biológicamente realista.

Equilibrio p_3

El cuarto punto de equilibrio tiene la forma

$$p_3 = \left(0, C - \sigma_1 - \frac{\beta_3 + \eta}{\alpha_3}, \sigma_1 \right).$$

Recordemos que por la naturaleza del problema, debemos garantizar que $x_2, x_3 > 0$. Esto implica que

$$\alpha_3 \beta_2 < \alpha_2 (\beta_3 + \eta), \quad (4.27)$$

y que además

$$C - \sigma_1 - \frac{\beta_3 + \eta}{\alpha_3} > 0. \quad (4.28)$$

Por lo tanto, de (4.27) y (4.28) obtenemos la siguiente relación

$$C > \sigma_1 + \frac{\beta_3 + \eta}{\alpha_3} > \frac{\beta_3 + \eta}{\alpha_3} > \frac{\beta_2}{\alpha_2}.$$

Ahora, reemplazando los valores de los parámetros obtenemos

$$146.9 > 263.6364,$$

lo cual no es cierto. Por lo que concluimos que para esta combinación particular de parámetros, no podemos tener un punto crítico de la forma p_3 .

Equilibrio p_4

Para el quinto punto de equilibrio tenemos

$$p_4 = \left(C - \frac{\beta_1}{\alpha_1}, 0, 0 \right).$$

Por lo tanto, la matriz Jacobiana viene dada por

$$J(95.8051, 0, 0) = \begin{pmatrix} -0.1313 & -0.1313 & -1.1564 \\ 0 & 0.3020 & 0 \\ 0 & 0 & -\eta - \frac{67}{1370} \end{pmatrix},$$

donde los valores propios son

- $\lambda_1 = -0.1313$,
- $\lambda_2 = 0.3020$,
- $\lambda_3 = -\eta - \frac{67}{1370}$.

El comportamiento del punto de equilibrio p_4 dependerá del signo de λ_3 :

- Si $\eta < -0.0489$, tenemos una contradicción con la hipótesis $\eta > 0$, por lo tanto descartamos esta opción.
- Si $-0.0489 < \eta$, entonces λ_3 es negativo. Luego, λ_2 permanece positivo, pero λ_1 y λ_3 son negativos. En este caso, p_1 es parcialmente atractador en la dirección de λ_2 y parcialmente atractador en las otras dos direcciones.

Así, para $\eta > 0$ tenemos que el punto p_4 es punto silla.

Equilibrio p_5

Para este caso, la matriz Jacobiana resulta en una estructura algebraicamente compleja, con expresiones no lineales en función del parámetro η . Dado que los valores propios también se expresan como raíces de polinomios de alto grado, es difícil obtener resultados analíticos que nos permitan identificar la estabilidad del punto de equilibrio.

Una técnica alternativa para analizar la estabilidad de este tipo de puntos de equilibrio consiste en evaluar numéricamente los valores propios para una amplia gama de valores del parámetro η y observar cómo varían. Al graficar estos valores en función de η , se pueden identificar los intervalos donde los valores propios cambian de signo. Este cambio de signo nos proporciona información sobre transiciones en la estabilidad del punto de equilibrio, como bifurcaciones.

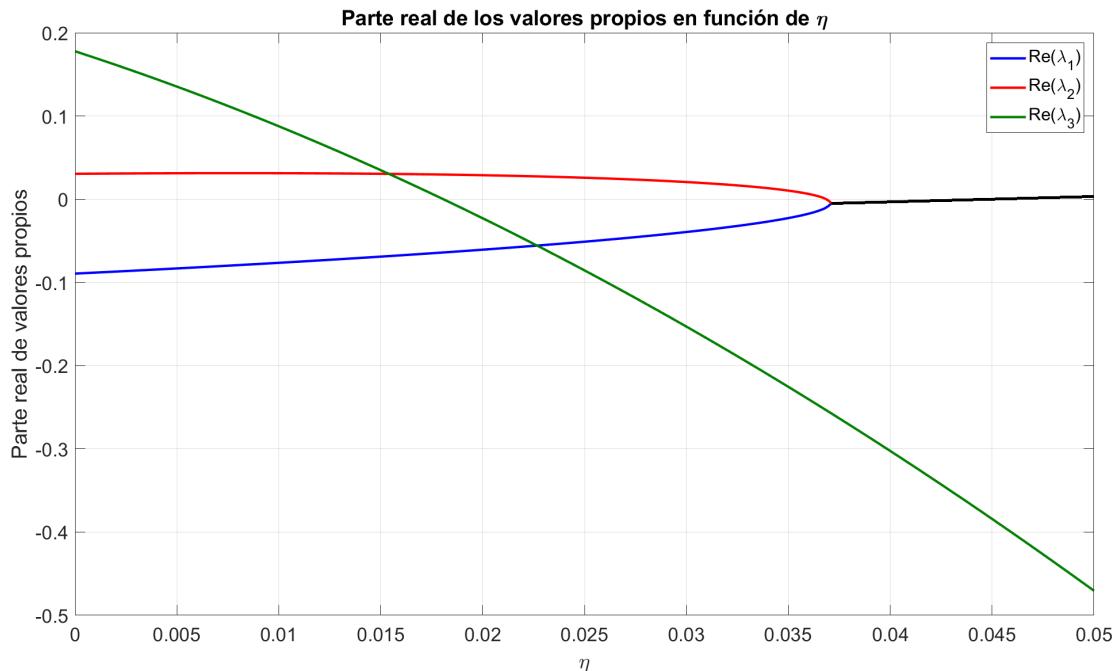


Figura 4.1: Valores propios de p_5 vs η .

Por lo tanto, optaremos por este enfoque para visualizar cómo se comportan los valores

propios del sistema a medida que variamos η , de manera que podamos identificar de forma cualitativa las regiones donde el punto p_5 es estable, inestable, o punto silla.

En la Figura 4.1 se muestra cómo varían los valores propios del Jacobiano evaluado en el punto de equilibrio correspondiente, en función del parámetro η . El valor propio λ_3 cambia de signo en $\eta \approx 0.0181$, pasando de positivo a negativo conforme η aumenta. Más adelante, en $\eta \approx 0.0369$, se observa otro cambio de signo: esta vez es λ_2 quien transita de una parte real positiva a negativa. Poco después, alrededor de $\eta \approx 0.0373$, los valores propios λ_1 y λ_2 se convierten en un par complejo conjugado con una misma parte real (segmento negro). Finalmente, en $\eta \approx 0.0469$, esta parte real común se vuelve positiva nuevamente.

Así, tendremos que $\operatorname{Re}(\lambda_1) = \operatorname{Re}(\lambda_2) > 0$ para $\eta > 0.0469$. Sin embargo, el sistema nunca alcanza una estabilidad total en el punto de equilibrio analizado: para todo valor de η , al menos uno de los valores propios presenta parte real positiva, lo que implica la presencia de direcciones inestables. En particular, se mantiene siempre la presencia de una estructura de punto silla, como puede apreciarse en la figura.

Equilibrio p_6

Para el séptimo punto de equilibrio tenemos

$$J(41.8064, 53.9987, 0) = \begin{pmatrix} -0.0573 & -0.0573 & -0.5046 \\ -0.0045 & -0.3065 & -1.0031 \\ 0 & 0 & -\eta - \frac{67}{1370} \end{pmatrix},$$

donde los valores propios son

$$\lambda_1 = -0.3075, \quad \lambda_2 = -0.0562, \quad y \quad \lambda_3 = -\eta - 0.0489.$$

Notemos que λ_1 y λ_2 son siempre negativos, por lo tanto, debemos de analizar el signo de λ_3 para identificar si tendremos un punto silla o atractor.

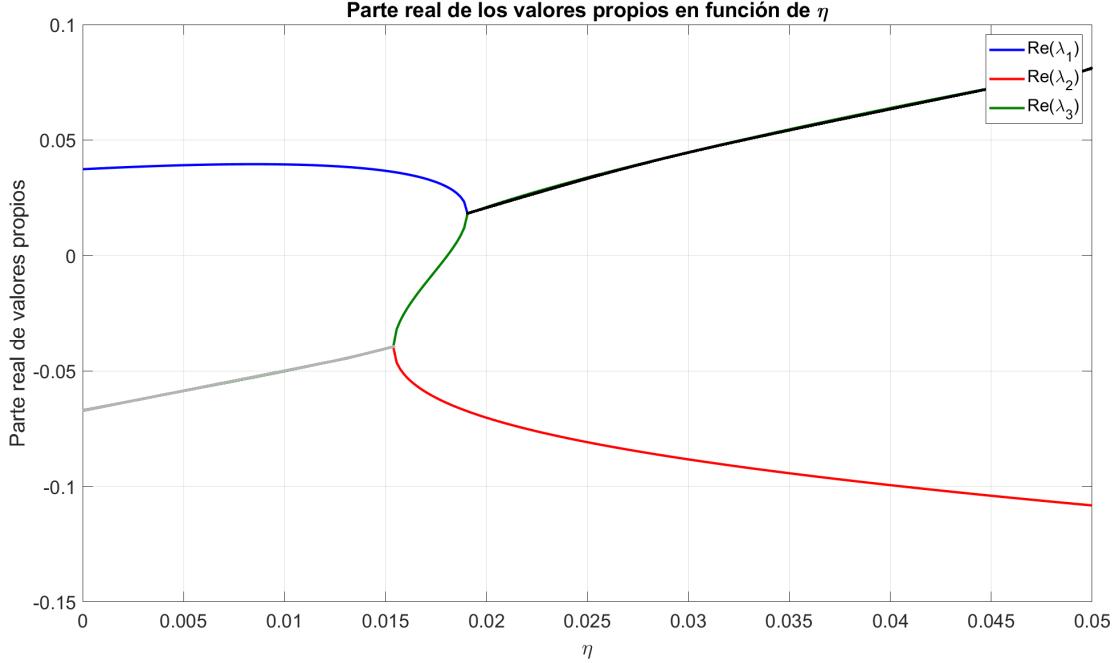
- Si $\eta < -0.0489$, tenemos una contradicción con la hipótesis $\eta > 0$, por lo tanto ese caso se descarta.
- Si $-0.0489 < \eta$, obtenemos que λ_3 es también negativo.

Así, para $\eta > 0$ tenemos que el punto p_6 es estable (atractor).

Equilibrio p_7

El análisis de estabilidad del punto de equilibrio p_7 presenta dificultades similares a las encontradas en el equilibrio p_5 , ya que la matriz Jacobiana depende de forma no lineal del parámetro η , lo cual impide obtener conclusiones analíticas claras.

En este caso, bastará con observar numéricamente el comportamiento de los valores propios al variar η , lo cual nos permitirá identificar de manera directa las regiones donde el punto actúa como atractor o como punto silla.


 Figura 4.2: Valores propios de p_7 vs η

En la Figura 4.2 se observa el comportamiento de los valores propios del sistema respecto al parámetro η . Inicialmente, λ_1 es real positivo, mientras que λ_2 y λ_3 forman un par de valores propios complejos conjugados con parte real negativa (segmento en gris). Alrededor de $\eta \approx 0.0151$, λ_2 y λ_3 dejan de ser complejos y se vuelven valores propios reales distintos. Luego, en $\eta \approx 0.0181$, λ_3 cambia de signo, pasando de negativo a positivo. Más adelante, en $\eta \approx 0.0191$, λ_1 y λ_3 se convierten en un par de valores propios complejos conjugados (segmento en negro), compartiendo la misma parte real. Por otro lado, λ_2 permanece con parte real negativa en todo el intervalo de análisis.

A pesar de estas transiciones, el sistema nunca alcanza un estado completamente estable. Para todo valor de η , al menos uno de los valores propios posee parte real positiva, lo que garantiza la existencia de una dirección inestable. Por lo tanto, el punto de equilibrio en estudio se comporta siempre como un punto silla, como se puede apreciar en la figura.

Resumen de estabilidad

A continuación, se presentan únicamente los puntos de equilibrio ecológicamente viables (con coordenadas no negativas) junto con sus condiciones de existencia y estabilidad, en función del parámetro η . Esta síntesis permite identificar bajo qué condiciones el sistema admite comportamientos deseables como la coexistencia de especies nativas.

Punto	Rango de existencia	Estabilidad
$p_0 = (0, 0, 0)$	$\eta > 0$	Punto silla
$p_1 = \left(0, 0, C - \frac{\beta_3 + \eta}{\alpha_3}\right)$	$0 < \eta < 0.0469$	Atractor si $\eta < 0.0369$ Punto silla si $\eta > 0.0369$
$p_4 = (95.8051, 0, 0)$	$\eta > 0$	Punto silla
p_5	$\eta > 0$	Punto silla
$p_6 = (41.8064, 53.9987, 0)$	$\eta > 0$	Atractor
p_7	$\eta > 0$	Punto silla

Cuadro 4.1: Resumen de estabilidad de los puntos de equilibrio biológicamente viables.

Como se observa en el Cuadro 4.2, existe un rango de valores del parámetro η donde coexisten dos puntos de equilibrio estables: p_1 (donde domina la especie invasora) y p_6 (donde prevalecen las especies nativas). Esta situación de biestabilidad, presente para $0 < \eta < 0.0369$, indica que el destino ecológico del sistema depende fuertemente de la condición inicial, lo que resalta la importancia de implementar estrategias de manejo que redirijan el sistema hacia el atractor deseable. Para explorar más a fondo estas trayectorias y su sensibilidad frente a los valores de η , en la siguiente sección se analiza la evolución temporal del sistema a partir de distintas condiciones iniciales.

4.3. Estabilidad del sistema y evolución temporal de las tres especies

Con base en el análisis espectral realizado previamente, se identificaron tres valores críticos del parámetro η : 0.0181, 0.0369 y 0.0469. Estos valores dividen el eje de η en cuatro intervalos, cada uno de los cuales define una región dinámica con un conjunto distinto de puntos de equilibrio biológicamente viables y estables. La Figura 4.3 muestra estos intervalos, rotulados como Región I” a Región IV”.



Figura 4.3: Intervalos de η críticos.

Para cada una de estas regiones, se estudia el comportamiento local del sistema a través de simulaciones cercanas a los puntos de equilibrio correspondientes. Antes de presentar

4.3. ESTABILIDAD DEL SISTEMA Y EVOLUCIÓN TEMPORAL DE LAS TRES ESPECIES

los gráficos específicos por región, el Cuadro 4.2 resume cuántos puntos críticos existen en cada intervalo y cuáles de ellos son estables.

Región	Cantidad de Puntos de Equilibrio	Puntos de Equilibrios Estables
I	6	p_1, p_6
II	5	p_1, p_6
III	4	p_6
IV	3	p_6

Cuadro 4.2: Cantidad de puntos de equilibrio en cada región, indicando cuáles son estables.

Es importante destacar que los puntos estables identificados presentan distintas implicancias ecológicas: $p_1 = (0, 0, x_3)$ representa la supervivencia exclusiva de la especie invasora, mientras que $p_6 = (x_1, x_2, 0)$ indica la erradicación del eucalipto y la coexistencia de las especies nativas. A partir de esto, se analizan las trayectorias generadas por condiciones iniciales cercanas a estos puntos, lo que permite entender la estructura de atracción y los posibles desenlaces del sistema bajo distintos valores de η .

Región I

Para valores de η entre 0 y 0.0181, tendremos 6 puntos de equilibrio. En la Figura 4.4 se observa que las trayectorias convergen mayormente hacia dos puntos de equilibrio estables: p_1 , donde domina la especie invasora, y p_6 , donde sobreviven ambas especies nativas. El resto de los puntos actúan como puntos de silla que delimitan las cuencas de atracción de estos atractores, separando las trayectorias según su condición inicial.

Región II

Para valores de η entre 0.0181 y 0.0369, el sistema presenta cinco puntos de equilibrio. En la Figura 4.5 se ilustra la evolución de las trayectorias cercanas a cada uno de ellos. La mayoría de las soluciones convergen hacia dos atractores: el punto p_1 , dominado por la especie exótica, y el punto p_6 , donde coexisten las especies nativas. Los puntos p_0, p_4 y p_5 son puntos silla que separan las cuencas de atracción de los estados estables y condicionan la dinámica del sistema según las condiciones iniciales. Cabe señalar que el punto p_7 , presente en la región anterior, ya no aparece debido a que una de sus coordenadas se vuelve negativa, lo que lo hace biológicamente inviable.

Región III

Para valores de η entre 0.0369 y 0.0469, el sistema presenta únicamente cuatro puntos de equilibrio. En la Figura 4.6 se muestra la evolución de las trayectorias bajo esta configuración. El punto p_1 , que en la región anterior actuaba como atractor, cambia su estabilidad

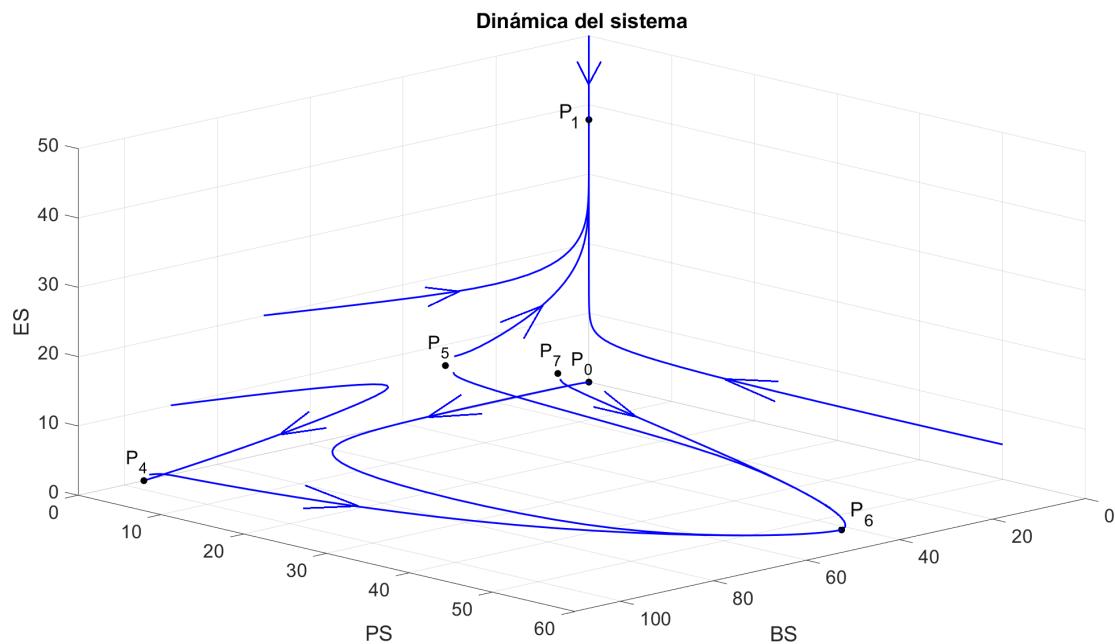


Figura 4.4: Trayectorias del sistema, con valores de η en la Región I.

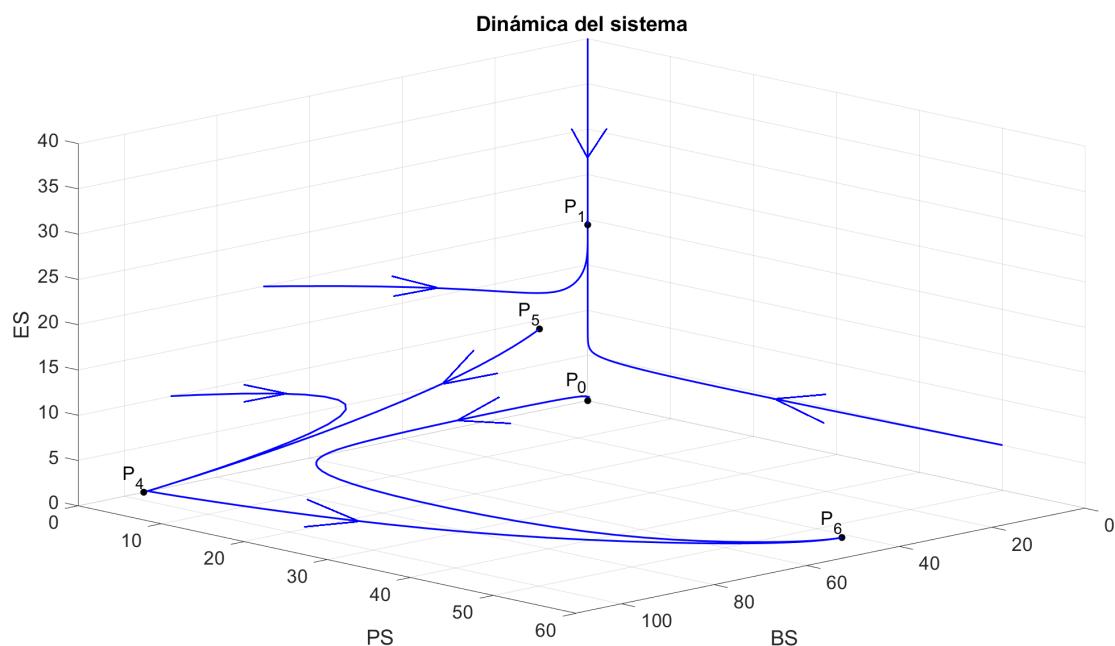


Figura 4.5: Trayectorias del sistema, con valores de η en la Región II.

y se transforma en un punto silla. Asimismo, el punto p_5 deja de ser biológicamente viable al adquirir una coordenada negativa. En esta región, el único atractor es el punto p_6 , que representa un escenario de coexistencia de las especies nativas. Los puntos p_0, p_1 y p_4 cumplen un rol estructural clave al actuar como puntos silla que separan las distintas cuencas de atracción, determinando la evolución del sistema según las condiciones iniciales.

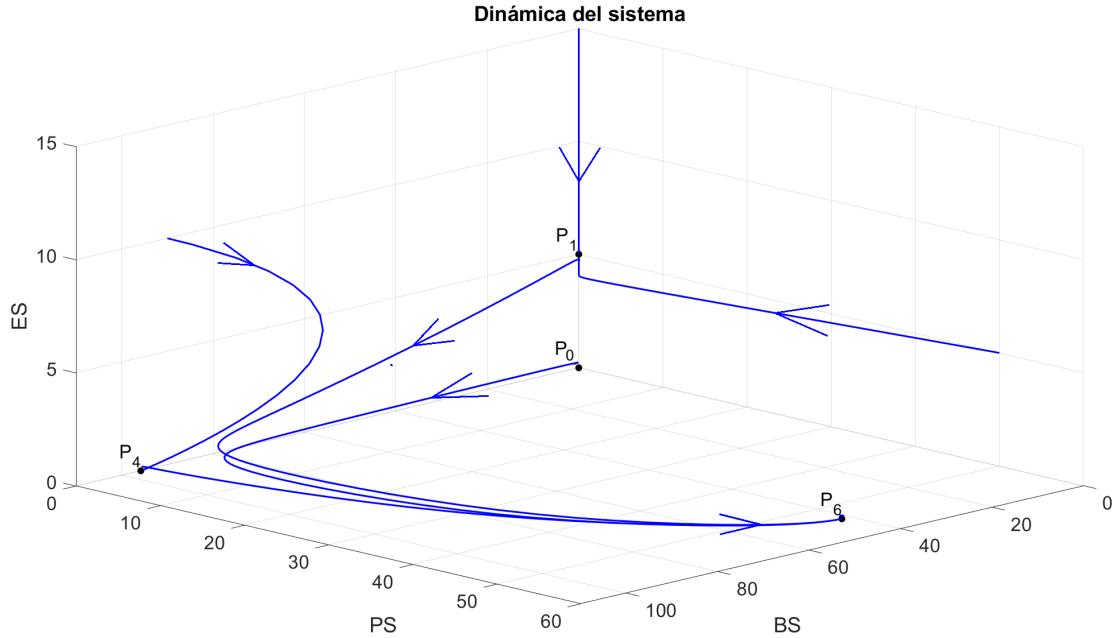


Figura 4.6: Trayectorias del sistema, con valores de η en la Región III.

Región IV

En esta última región, correspondiente a valores de $\eta > 0.0469$, el sistema presenta solo tres puntos de equilibrio biológicamente viables: p_0, p_4 y p_6 . Como puede apreciarse en la Figura 4.7, la dinámica se organiza en torno a un único atractor, el punto p_6 , hacia el cual convergen la mayoría de las trayectorias. Los otros dos puntos, p_0 y p_4 , funcionan como puntos silla, generando fronteras que delimitan las trayectorias pero no actúan como destinos estables. Por otro lado, el punto p_1 deja de ser biológicamente válido en esta región, ya que su coordenada correspondiente a la especie invasora se vuelve negativa, saliendo así del primer octante.

4.3.1. Evolución temporal a partir del estado inicial p_{90}

Como se ha observado previamente, existen regiones del espacio de parámetros donde coexisten múltiples puntos de equilibrio estables. Esta *biestabilidad* implica que, para un mismo valor de η , pequeñas variaciones en las condiciones iniciales pueden determinar hacia

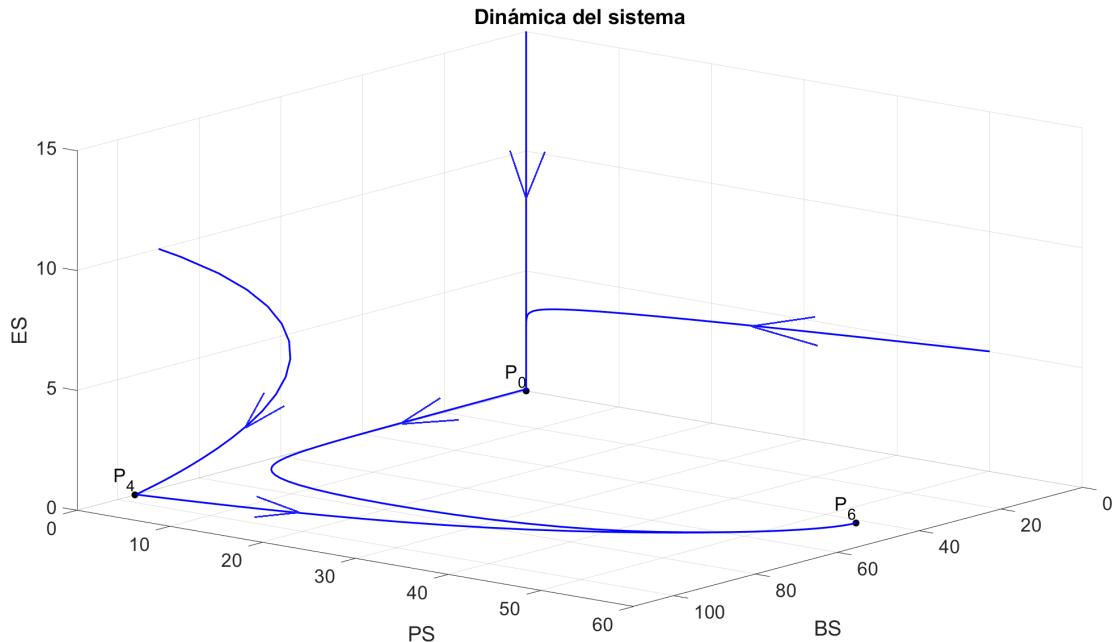


Figura 4.7: Trayectorias del sistema, con valores de η en la Región IV.

qué estado evoluciona el sistema. Del mismo modo, para una misma condición inicial (en este caso p_{90}) pequeñas variaciones en η también pueden producir resultados ecológicos radicalmente distintos.

En la Figura 4.8 se muestra la evolución temporal de las tres especies: BS, PS y ES, para distintos valores del parámetro η . Las trayectorias parten del estado inicial

$$p_{90} = (15.4667, 0.0790, 8.9326),$$

el cual representa la configuración estimada del sistema en el año 1990¹, y permiten visualizar cómo varía el destino ecológico según la intensidad de tala aplicada.

- En azul: evolución temporal de **ES** (Eucalipto Rojo).
- En rojo: evolución temporal de **BS** (Tepozán).
- En verde: evolución temporal de **PS** (Palo Loco).

Los resultados indican que, para valores de η menores a aproximadamente 0.0242, el sistema converge hacia un estado dominado exclusivamente por la especie invasora. En cambio, cuando $\eta > 0.0242$, se logra revertir esta dinámica, promoviendo la extinción del *Eucalyptus camaldulensis* y permitiendo la recuperación simultánea de las especies nativas.

Desde el punto de vista del manejo ecológico, este análisis sugiere que la estrategia de tala constante será efectiva únicamente si se implementa con una intensidad superior a cierto

¹Este año es el más reciente para el cual se cuenta con datos simultáneos de las tres especies de árboles.

4.3. ESTABILIDAD DEL SISTEMA Y EVOLUCIÓN TEMPORAL DE LAS TRES ESPECIES

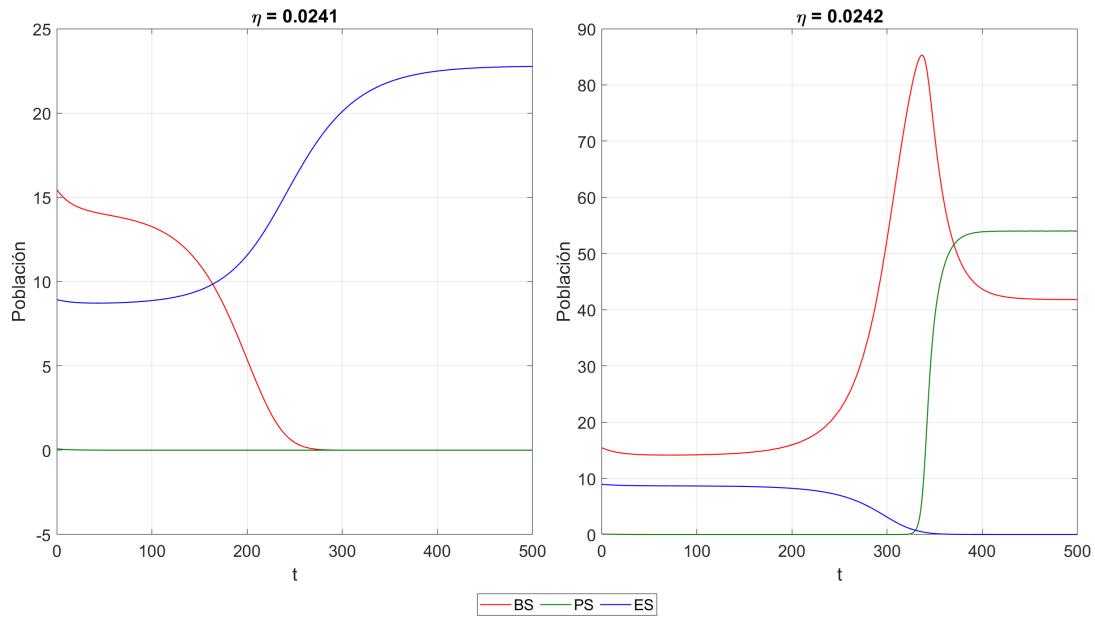


Figura 4.8: Evolución temporal de BS, PS y ES, para distintos valores de η a partir del punto p_{90} .

umbral crítico. Específicamente, para lograr un cambio de régimen hacia la coexistencia de especies nativas, la tasa de tala debe superar el valor de $\eta \approx 0.0242$. Por debajo de este umbral, los esfuerzos de control resultan insuficientes y el sistema persiste en un estado ecológicamente indeseable.

Capítulo 5

Estrategia de replantación de Tepozán a tasa proporcional

En este capítulo se analiza una segunda estrategia de manejo, centrada en la promoción de la especie nativa *Buddleja cordata* (Tepozán) mediante una tasa de replantación proporcional. Esta intervención busca contrarrestar el efecto competitivo de la especie invasora *Eucalyptus camaldulensis* y favorecer el restablecimiento de las especies nativas. Para ello, se modifica nuevamente el modelo II-B propuesto por Acosta-Arreola et al. [1], incorporando un nuevo parámetro $\theta_1 > 0$, el cual representa el coeficiente de replantación aplicado sobre la población de Tepozán.

El sistema resultante está dado por las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\alpha_1 \cdot x_1 \cdot x_4}{1 + x_3 \cdot \gamma_1} - x_1 \cdot (\beta_1 + \mu_1 \cdot x_3) + \theta_1 \cdot x_1, \quad (5.1)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{\alpha_2 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot (1 + \tau \cdot x_1)}{1 + x_3 \cdot \gamma_2} - x_2 \cdot (\beta_2 + \mu_2 \cdot x_3), \quad (5.2)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = \alpha_3 \cdot x_3 \cdot x_4 - \beta_3 \cdot x_3. \quad (5.3)$$

La ecuación (5.1) incorpora el nuevo término $\theta_1 \cdot x_1$, que representa el crecimiento adicional inducido por la replantación continua de Tepozán. Al igual que en el modelo anterior, todas las variables y parámetros son positivos, y se asume que la reserva ecológica tiene un área total fija. Por lo tanto, se conserva la relación:

$$x_4 = C - (x_1 + x_2 + x_3), \quad (5.4)$$

donde C es constante y representa el área total de la reserva.

5.1. Puntos de equilibrio

En este modelo, se sigue el mismo enfoque presentado en el Capítulo 4. El desarrollo algebraico completo de este análisis se presenta en el Apéndice A.1.

Como resultado, se identifican diez configuraciones distintas de puntos de equilibrio. La viabilidad de cada uno depende de las condiciones impuestas por los parámetros del modelo, en particular del valor del nuevo parámetro θ_1 , que representa la tasa de replantación de la especie nativa Tepozán (BS). A continuación, se enumeran los posibles puntos de equilibrio:

1. Extinción total de las tres especies:

$$p_0 = (0, 0, 0).$$

2. Supervivencia exclusiva del Eucalipto (ES):

$$p_1 = \left(0, 0, C - \frac{\beta_3}{\alpha_3}\right).$$

3. Supervivencia exclusiva del Palo Loco (PS):

$$p_2 = \left(0, C - \frac{\beta_2}{\alpha_2}, 0\right).$$

4. Coexistencia de Palo Loco (PS) y Eucalipto (ES):

$$p_3 = \left(0, C - \sigma_1 - \frac{\beta_3}{\alpha_3}, \sigma_1\right).$$

5. Supervivencia exclusiva del Tepozán (BS):

$$p_4 = \left(C - \frac{\beta_1 - \theta_1}{\alpha_1}, 0, 0\right).$$

6. Coexistencia de Tepozán (BS) y Eucalipto (ES):

$$p_5 = \left(C - \sigma_2^+ - \frac{\beta_3}{\alpha_3}, 0, \sigma_2^+\right).$$

7. Coexistencia de Tepozán (BS) y Eucalipto (ES):

$$p_6 = \left(C - \sigma_2^- - \frac{\beta_3}{\alpha_3}, 0, \sigma_2^-\right).$$

8. Coexistencia de Tepozán (BS) y Palo Loco (PS):

$$p_7 = \left(\frac{\beta_2 \alpha_1 - \alpha_2 (\beta_1 - \theta_1)}{\alpha_2 (\beta_1 - \theta_1) \tau}, C - \frac{\beta_2 \alpha_1 - \alpha_2 (\beta_1 - \theta_1)}{\alpha_2 (\beta_1 - \theta_1) \tau} - \frac{\beta_1 - \theta_1}{\alpha_1}, 0\right).$$

9. Coexistencia de las tres especies:

$$p_8 = \left(\frac{\alpha_3(M^+N^+ - P)}{\alpha_2\beta_3\tau}, C - \frac{\alpha_3(M^+N^+ - P)}{\alpha_2\beta_3\tau} - \sigma_2^+ - \frac{\beta_3}{\alpha_3}, \sigma_2^+ \right).$$

10. Coexistencia de las tres especies:

$$p_9 = \left(\frac{\alpha_3(M^-N^- - P)}{\alpha_2\beta_3\tau}, C - \frac{\alpha_3(M^-N^- - P)}{\alpha_2\beta_3\tau} - \sigma_2^- - \frac{\beta_3}{\alpha_3}, \sigma_2^- \right).$$

Las expresiones de σ_1 , σ_2^\pm , y sus respectivas condiciones de existencia, se encuentran en el Apéndice A.1. Solo se consideran biológicamente viables aquellos puntos cuyas coordenadas son no negativas.

5.2. Existencia y estabilidad de los equilibrios

Una vez identificados los posibles equilibrios, se analizó su estabilidad lineal mediante el cálculo de los valores propios de la matriz Jacobiana. El procedimiento es análogo al del capítulo anterior, por lo que aquí solo se sintetizan los resultados clave. Dependiendo del valor del parámetro θ_1 , se delimitan intervalos donde ciertos equilibrios son atractores y otros se comportan como puntos silla.

A continuación, en el Cuadro 5.1 se presentan únicamente los puntos de equilibrio ecológicamente viables, junto con sus rangos de existencia y tipo de estabilidad según el parámetro θ_1 . Esta síntesis permite identificar las condiciones necesarias para lograr la permanencia de las especies nativas y anticipar posibles transiciones hacia estados no deseables. El análisis detallado de estabilidad puede consultarse en el Apéndice A.2.

Punto	Rango de existencia	Estabilidad
$p_0 = (0, 0, 0)$	$\theta_1 > 0$	Punto silla
$p_1 = (0, 0, \frac{469}{10})$	$\theta_1 > 0$	Atractor si $\theta_1 < 0.4457$ Punto silla si $\theta_1 > 0.4457$
$p_4 = (C - \frac{\beta_1 - \theta_1}{\alpha_1}, 0, 0)$	$\theta_1 > 0$	Punto silla si $\theta_1 < 0.0435$ Atractor si $\theta_1 > 0.0435$
p_5	$\theta_1 < 0.4457$	Punto silla
p_7	$\theta_1 < 0.0435$	Atractor
p_8	$\theta_1 < 0.0815$	Punto silla

Cuadro 5.1: Resumen de estabilidad de los puntos de equilibrio biológicamente viables.

Como se observa en el Cuadro 5.1, existe un rango del parámetro θ_1 en el que coexisten dos puntos de equilibrio estables: p_1 , donde sobrevive exclusivamente el Eucalipto, y p_7 ,

donde conviven las especies nativas BS y PS . Esta situación de biestabilidad, que ocurre para $0 < \theta_1 < 0.0435$, indica que el destino del sistema puede depender fuertemente de las condiciones iniciales. En particular, variaciones en la intensidad de replantación pueden redirigir el sistema hacia un equilibrio deseable. En la siguiente sección, se analiza la evolución temporal del sistema bajo distintos valores de θ_1 con el fin de ilustrar este fenómeno dinámico.

5.3. Estabilidad del sistema y evolución temporal de las tres especies

Con base en el análisis de estabilidad realizado en las secciones anteriores, se identificaron cuatro valores críticos del parámetro θ_1 : 0, 0.0435, 0.0815 y 0.4457. Estos dividen el eje de θ_1 en cuatro intervalos, cada uno asociado a una región dinámica distinta, caracterizada por un conjunto particular de puntos de equilibrio viables y su respectiva estabilidad. La Figura 5.1 ilustra estos cortes, agrupados bajo las denominaciones Región I a Región IV.

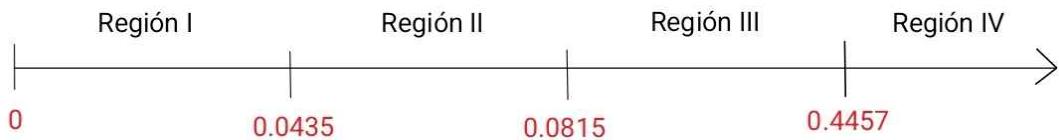


Figura 5.1: Intervalos de θ_1 críticos.

Antes de presentar los diagramas de trayectoria por región, el Cuadro 5.2 resume cuántos puntos críticos existen en cada intervalo de θ_1 , e indica cuáles de ellos se comportan como atractores.

Región	Cantidad de Puntos de Equilibrio	Puntos de Equilibrio Estables
I	6	p_1, p_7
II	5	p_1, p_4
III	4	p_1, p_4
IV	3	p_4

Cuadro 5.2: Cantidad de puntos de equilibrio en cada región, indicando cuáles son estables.

Es importante destacar que los puntos de equilibrio estables identificados reflejan distintos escenarios ecológicos. El punto p_1 representa la permanencia exclusiva del Eucalipto Rojo, mientras que p_4 describe la supervivencia únicamente de Tepozán. Por su parte, p_7 corresponde a un equilibrio de coexistencia entre las especies nativas (Tepozán y Palo Loco) en ausencia del eucalipto invasor. Estas configuraciones serán fundamentales al interpretar

las trayectorias presentadas a continuación, las cuales ilustran la evolución del sistema bajo distintos niveles de esfuerzo de replantación.

Región I

En este intervalo, el sistema presenta seis puntos de equilibrio, de los cuales dos son atractores: p_1 y p_7 . Como se aprecia en la Figura 5.2, la dinámica es de tipo biestable: dependiendo de las condiciones iniciales, las trayectorias convergen hacia uno u otro estado ecológico. Los puntos de equilibrio tipo silla presentes en esta región tienen asociadas variedades estable 2-dimensionales (no mostradas en la figura), las que actúan como fronteras entre cuencas de atracción.

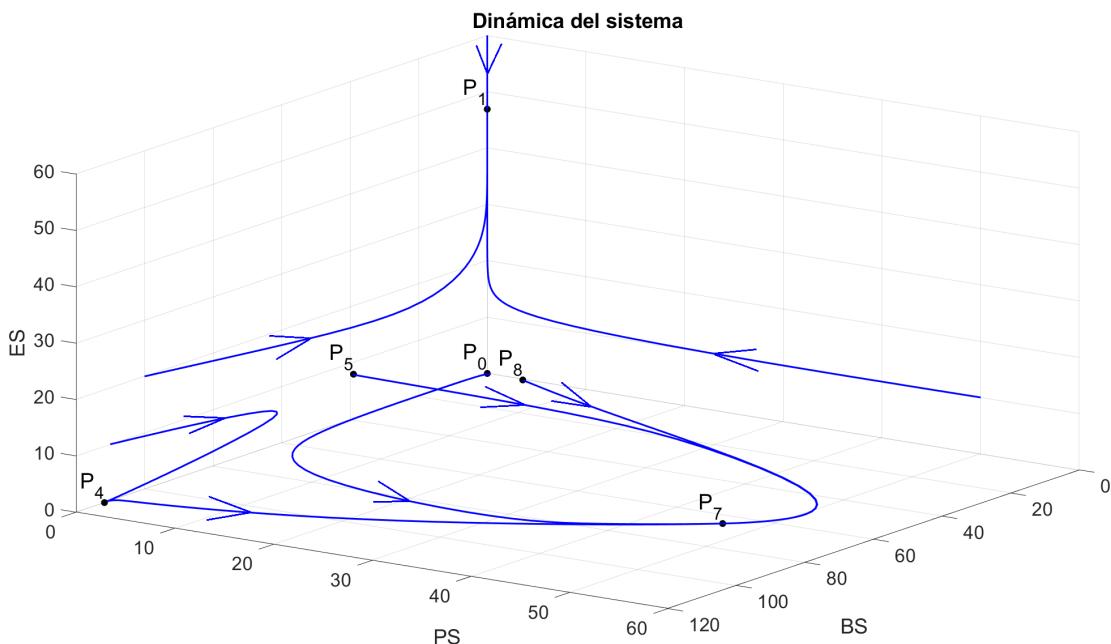


Figura 5.2: Trayectorias del sistema, con valores de θ_1 en la Región I.

Región II

Al aumentar ligeramente θ_1 , el punto p_7 deja de ser viable debido a una coordenada negativa. Ahora el sistema cuenta con cinco puntos de equilibrio, siendo estables p_1 y p_4 . La Figura 5.3 muestra cómo las trayectorias tienden a uno de estos dos destinos, manteniéndose el carácter biestable del sistema, pero con un nuevo equilibrio deseable vinculado a la especie BS .

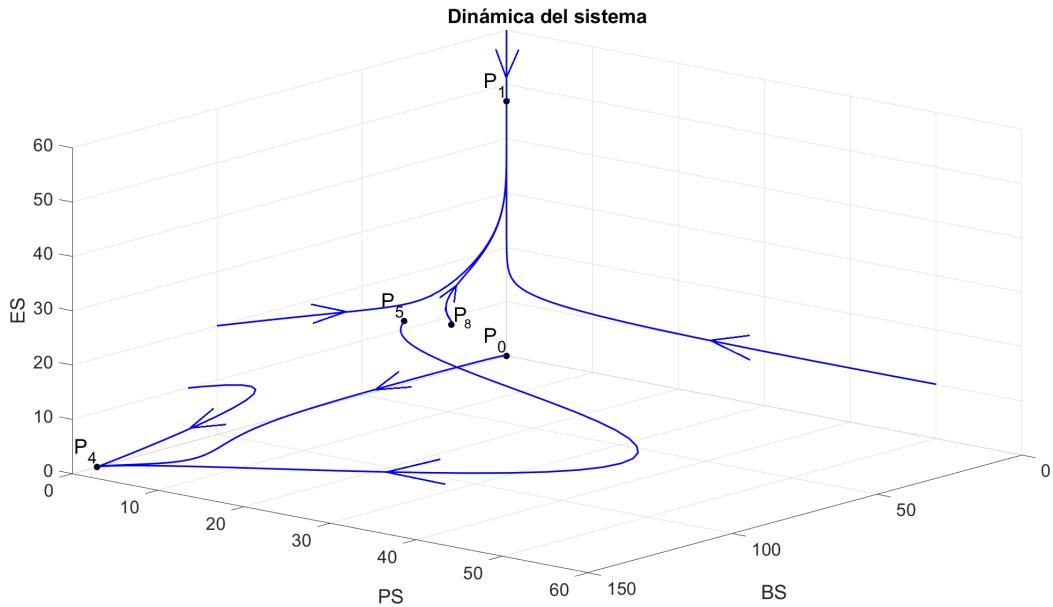


Figura 5.3: Trayectorias del sistema, con valores de θ_1 en la Región II.

Región III

En esta región, los únicos atractores viables son los puntos p_1 y p_4 . Las trayectorias del sistema convergen hacia uno u otro de estos estados según la condición inicial. La especie PS ya no sobrevive en esta región, ya que los puntos de equilibrio que la incluían dejan de ser biológicamente viables.

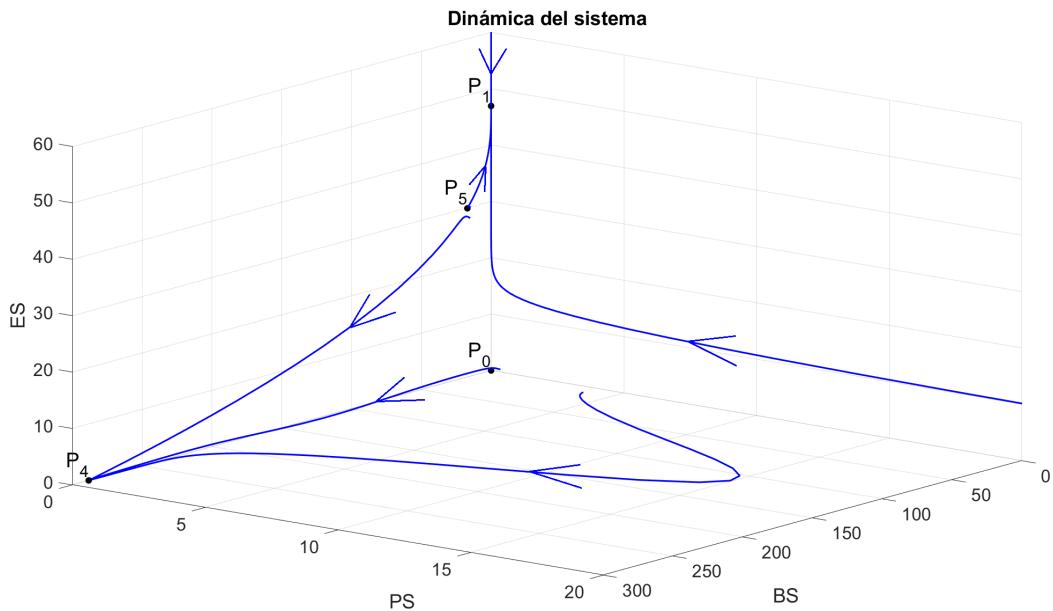


Figura 5.4: Trayectorias del sistema, con valores de θ_1 en la Región III.

Región IV

Finalmente, en la Región IV solo tres puntos de equilibrio permanecen viables, y el único atractor es nuevamente p_4 . La Figura 5.5 muestra cómo todas las trayectorias terminan convergiendo hacia este punto, confirmando que una estrategia de replantación suficientemente intensiva logra erradicar por completo al Eucalipto Rojo y a la otra especie nativa, favoreciendo exclusivamente al Tepozán.

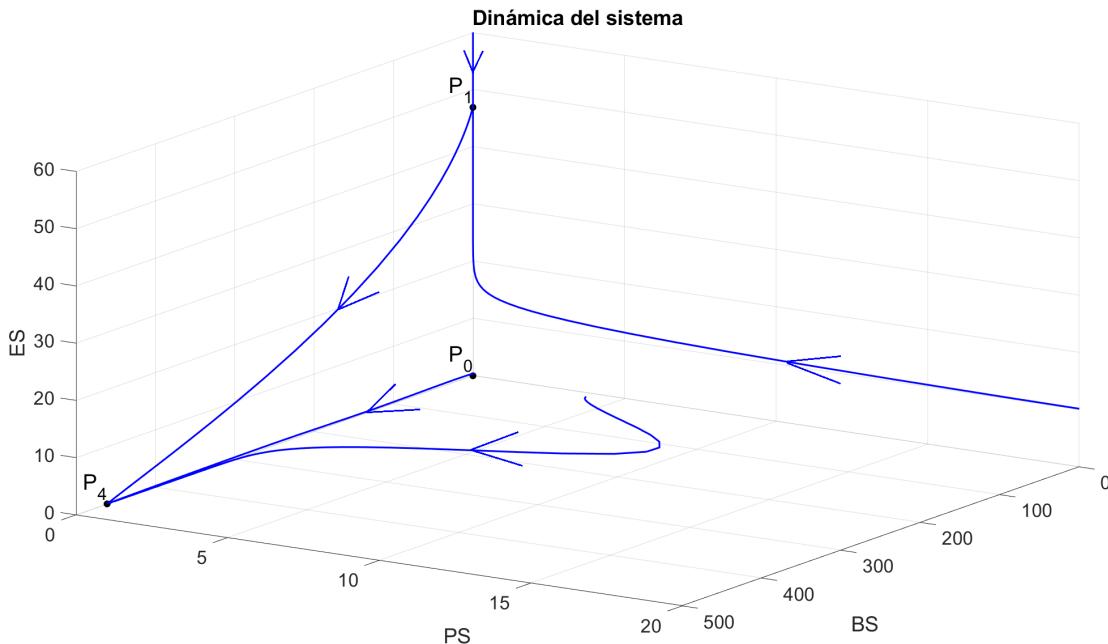


Figura 5.5: Trayectorias del sistema, con valores de θ_1 en la Región IV.

5.3.1. Evolución temporal a partir del estado inicial p_{90}

Tal como se evidenció en secciones anteriores, el sistema presenta regiones del parámetro θ_1 donde coexisten múltiples puntos de equilibrio estables. Esta situación de biestabilidad implica que pequeñas variaciones en el valor de θ_1 pueden redirigir el destino ecológico del sistema, incluso cuando se parte desde una misma condición inicial.

En la Figura 5.6 se muestra la evolución temporal de las tres especies: BS, PS y ES, para distintos valores del parámetro θ_1 . Las trayectorias se iniciaron desde el punto p_{90} y permiten visualizar el efecto de distintos niveles de replantación del Tepozán sobre la dinámica poblacional del sistema.

- Azul: evolución temporal del **Eucalipto Rojo** (ES).
- Rojo: evolución temporal del **Tepozán** (BS).
- Verde: evolución temporal del **Palo Loco** (PS).

5.3. ESTABILIDAD DEL SISTEMA Y EVOLUCIÓN TEMPORAL DE LAS TRES ESPECIES

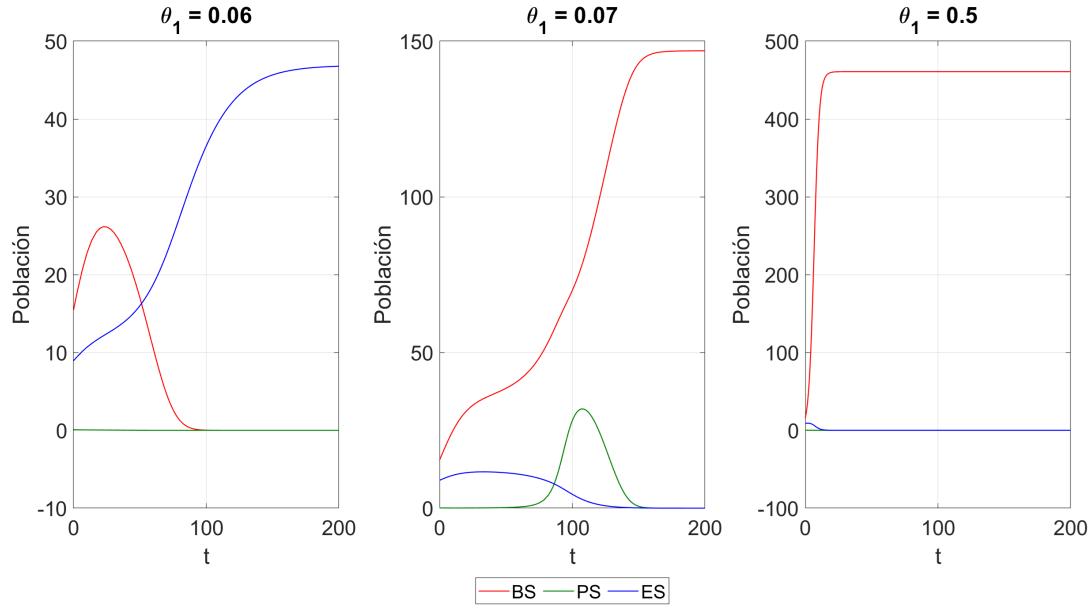


Figura 5.6: Evolución temporal de BS, PS y ES, para distintos valores de θ_1 a partir del punto p_{90} .

Los resultados muestran que la estrategia de replantación del Tepozán puede ser eficaz para revertir la dominancia del Eucalipto Rojo, siempre que la tasa de replantación supere un umbral crítico de aproximadamente $\theta_1 \approx 0.07$. Por debajo de este valor, el sistema tiende a un estado ecológicamente indeseable, caracterizado por la extinción de las especies nativas. En cambio, cuando θ_1 es suficientemente alto, se logra erradicar al eucalipto y garantizar la supervivencia del Tepozán. No obstante, esta estrategia no alcanza el objetivo completo de restauración ecológica, ya que no permite la coexistencia con el Palo Loco, limitándose a una recuperación parcial de la vegetación nativa.

Capítulo 6

Estrategia de replantación del Palo Loco a tasa proporcional

Este capítulo aborda una tercera estrategia de manejo basada en la replantación continua de la especie nativa *Pittocaulon praecox* (Palo Loco), con el propósito de mitigar el impacto competitivo del *Eucalyptus camaldulensis* (Eucalipto Rojo) y promover la restauración ecológica del sistema. Para ello, se introduce una modificación al modelo II-B de Acosta-Arreola et al. [1], incorporando un nuevo parámetro $\theta_2 > 0$ que representa la tasa de replantación proporcional del Palo Loco.

La estrategia resultante se expresa mediante el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\alpha_1 \cdot x_1 \cdot x_4}{1 + x_3 \cdot \gamma_1} - x_1 \cdot (\beta_1 + \mu_1 \cdot x_3), \quad (6.1)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{\alpha_2 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot (1 + \tau \cdot x_1)}{1 + x_3 \cdot \gamma_2} - x_2 \cdot (\beta_2 + \mu_2 \cdot x_3) + \theta_2 \cdot \textcolor{red}{x}_2, \quad (6.2)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = \alpha_3 \cdot x_3 \cdot x_4 - \beta_3 \cdot x_3, \quad (6.3)$$

donde x_4 representa el espacio disponible en la reserva y se define, como en los modelos anteriores, mediante la ecuación:

$$x_4 = C - (x_1 + x_2 + x_3), \quad (6.4)$$

suponiendo que el área total de la reserva, denotada por C , permanece constante a lo largo del tiempo.

6.1. Puntos de equilibrio

El análisis de los puntos de equilibrio para este modelo sigue el mismo procedimiento descrito en capítulos anteriores. El desarrollo detallado se presenta en el Apéndice B.1.

6.1. PUNTOS DE EQUILIBRIO

Como resultado del análisis, se obtienen nueve configuraciones distintas de equilibrio, cuya viabilidad está determinada por las restricciones impuestas sobre los parámetros del sistema. En particular, el parámetro θ_2 , que representa la tasa de replantación proporcional de la especie nativa *Pittocaulon praecox* (Palo Loco), juega un papel clave en la existencia de varios de estos puntos. A continuación, se presentan las expresiones correspondientes a cada caso.

1. Extinción total:

$$p_0 = (0, 0, 0).$$

2. Supervivencia exclusiva del Eucalipto:

$$p_1 = \left(0, 0, C - \frac{\beta_3}{\alpha_3} \right).$$

3. Supervivencia exclusiva del Palo Loco:

$$p_2 = \left(0, C - \frac{\beta_2 - \theta_2}{\alpha_2}, 0 \right).$$

4. Coexistencia de Palo Loco y Eucalipto:

$$p_3 = \left(0, C - \sigma_1^+ - \frac{\beta_3}{\alpha_3}, \sigma_1^+ \right).$$

5. Coexistencia de Palo Loco y Eucalipto:

$$p_4 = \left(0, C - \sigma_1^- - \frac{\beta_3}{\alpha_3}, \sigma_1^- \right).$$

6. Supervivencia exclusiva del Tepozán:

$$p_5 = \left(C - \frac{\beta_1}{\alpha_1}, 0, 0 \right).$$

7. Coexistencia de Tepozán y Eucalipto:

$$p_6 = \left(C - \sigma_2 - \frac{\beta_3}{\alpha_3}, 0, \sigma_2 \right).$$

8. Coexistencia de Tepozán y Palo Loco:

$$p_7 = \left(\frac{\alpha_1(\beta_2 - \theta_2) - \alpha_2\beta_1}{\alpha_2\beta_1\tau}, C - \frac{\alpha_1(\beta_2 - \theta_2) - \alpha_2\beta_1}{\alpha_2\beta_1\tau} - \frac{\beta_1}{\alpha_1}, 0 \right).$$

9. Coexistencia de las tres especies:

$$p_8 = \left(\frac{\alpha_3(MN - P)}{\alpha_2\beta_3\tau}, C - \frac{\alpha_3(MN - P)}{\alpha_2\beta_3\tau} - \sigma_2 - \frac{\beta_3}{\alpha_3}, \sigma_2 \right).$$

Las expresiones correspondientes a σ_1^\pm , σ_2 y las condiciones requeridas para que los puntos de equilibrio sean biológicamente viables se detallan en el Apéndice B.1. Solo se consideran aquellos puntos cuyas coordenadas son no negativas y que, por tanto, corresponden a escenarios ecológicamente factibles.

En el siguiente capítulo se resume el análisis de estabilidad de los puntos de equilibrio obtenidos, con base en el comportamiento de los valores propios de la matriz Jacobiana en función del parámetro θ_2 .

6.2. Existencia y estabilidad de los equilibrios

El Cuadro 6.1 resume los puntos de equilibrio viables de esta estrategia de replantación, sus rangos de existencia y tipo de estabilidad según el parámetro θ_2 . El análisis detallado se presenta en el Apéndice B.2.

Punto	Rango de existencia	Estabilidad
$p_0 = (0, 0, 0)$	$\theta_2 > 0$	Punto silla si $\theta_2 < 0.1284$ Repulsor si $\theta_2 > 0.1284$
$p_1 = (0, 0, \frac{469}{10})$	$\theta_2 > 0$	Atractor si $\theta_2 < 0.6841$ Punto silla si $\theta_2 > 0.6841$
p_2	$\theta_2 > 0.1284$	Punto silla si $\theta_2 < 0.2338$ Atractor si $\theta_2 > 0.2338$
p_3	$0.18 < \theta_2 < 0.6841$	Punto silla
p_5	$\theta_2 > 0$	Punto silla
p_6	$\theta_2 > 0$	Punto silla
p_7	$\theta_2 < 0.2338$	Atractor
p_8	$\theta_2 < 0.2338$	Punto silla

Cuadro 6.1: Resumen de estabilidad de los puntos de equilibrio viables en función del parámetro θ_2 .

Como se observa en el Cuadro 6.1, existen intervalos del parámetro θ_2 donde coexisten dos atractores, lo que genera situaciones de biestabilidad. En estos casos, el destino ecológico del sistema depende de la intensidad de replantación y de las condiciones iniciales. En la siguiente sección, se analiza la evolución temporal bajo distintos valores de θ_2 , ilustrando cómo estos factores determinan el equilibrio alcanzado.

6.3. Estabilidad del sistema y evolución temporal de las tres especies

A partir del análisis realizado, se identificaron cinco valores críticos del parámetro θ_2 : 0, 0.1284, 0.18, 0.2338 y 0.6841. Estos delimitan cinco intervalos sobre el eje de θ_2 , que agrupamos en cinco regiones dinámicas denominadas Región I a Región V. Cada una de estas regiones presenta un conjunto distinto de puntos de equilibrio ecológicamente viables, con características de estabilidad que dependen del valor específico de θ_2 .

La Figura 6.1 muestra la partición de este parámetro en función de los valores críticos identificados:



Figura 6.1: Valores críticos del parámetro θ_2 que definen las regiones dinámicas del sistema.

Antes de analizar la evolución temporal del sistema en cada intervalo, el Cuadro 6.2 resume la cantidad de puntos de equilibrio válidos en cada región y señala cuáles de ellos se comportan como atractores.

Región	Cantidad de Puntos de Equilibrio	Puntos de Equilibrio Estables
I	6	p_1, p_7
II	7	p_1, p_7
III	8	p_1, p_7
IV	6	p_1, p_2
V	5	p_2

Cuadro 6.2: Cantidad de puntos de equilibrio en cada región, indicando cuáles son estables.

Los atractores encontrados reflejan distintos escenarios ecológicos relevantes. El punto p_1 representa la permanencia exclusiva del Eucalipto Rojo, especie invasora; el punto p_2 describe la supervivencia únicamente del Palo Loco (*Pittocaulon praecox*); mientras que el punto p_7 corresponde a un equilibrio de coexistencia entre las dos especies nativas, en ausencia del eucalipto. Estos resultados permiten explorar cómo varía la dinámica del sistema ante distintos niveles de replantación de la especie *PS*, lo cual se visualiza a través de los diagramas de trayectoria presentados a continuación.

Región I

Para valores de θ_2 en el intervalo $0 < \theta_2 < 0.1284$, el sistema presenta seis puntos de equilibrio, de los cuales dos son estables. Las trayectorias iniciales genéricas convergen hacia uno de estos atractores, dependiendo de su posición relativa a los puntos tipo silla que delimitan las cuencas de atracción. En la Figura 6.2 se observa una dinámica biestable, en la que el comportamiento a largo plazo está determinado por la condición inicial del sistema.

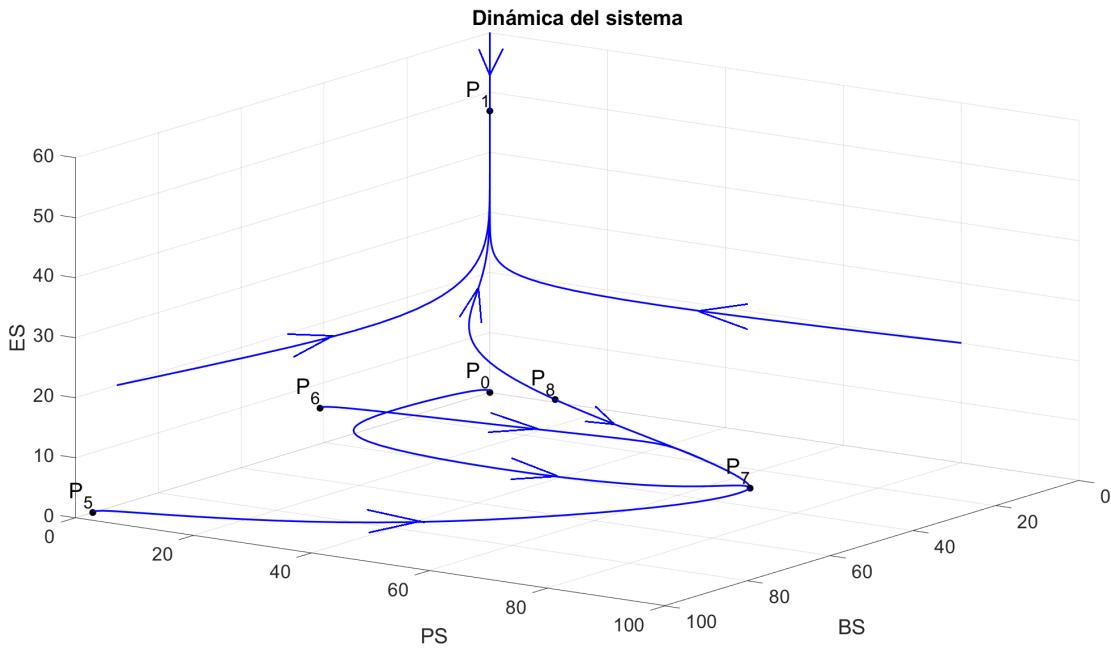


Figura 6.2: Trayectorias del sistema, con valores de θ_2 en la Región I.

Región II

Como podemos observar en la Figura 6.3, el sistema presenta siete puntos de equilibrio, pues el punto p_2 comienza a ser ecológicamente viable al adquirir su segunda coordenada positiva. Los atractores siguen siendo p_1 y p_7 , por lo que la dinámica continúa siendo biestable: las trayectorias convergen hacia uno u otro equilibrio, dependiendo de las condiciones iniciales.

Región III

En este intervalo, el número de puntos críticos aumenta a ocho debido a que el punto p_3 se vuelve ecológicamente viable. La dinámica sigue siendo biestable, con p_1 y p_7 como atractores. Como se observa en la Figura 6.4, las trayectorias convergen generalmente hacia alguno de estos equilibrios estables.

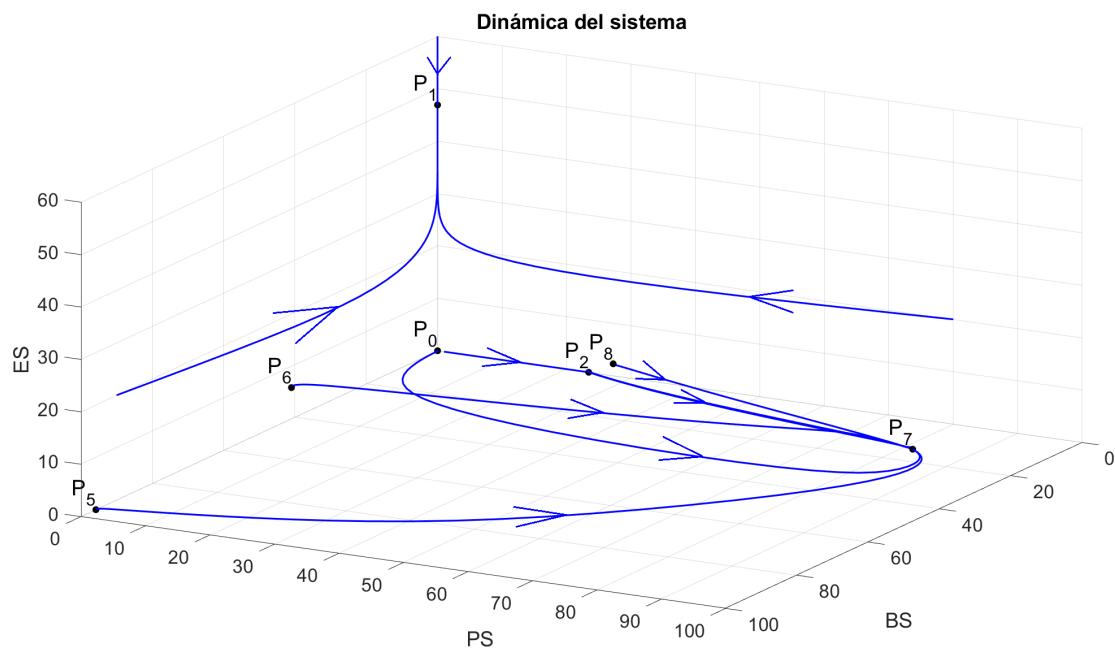


Figura 6.3: Trayectorias del sistema, con valores de θ_2 en la Región II.

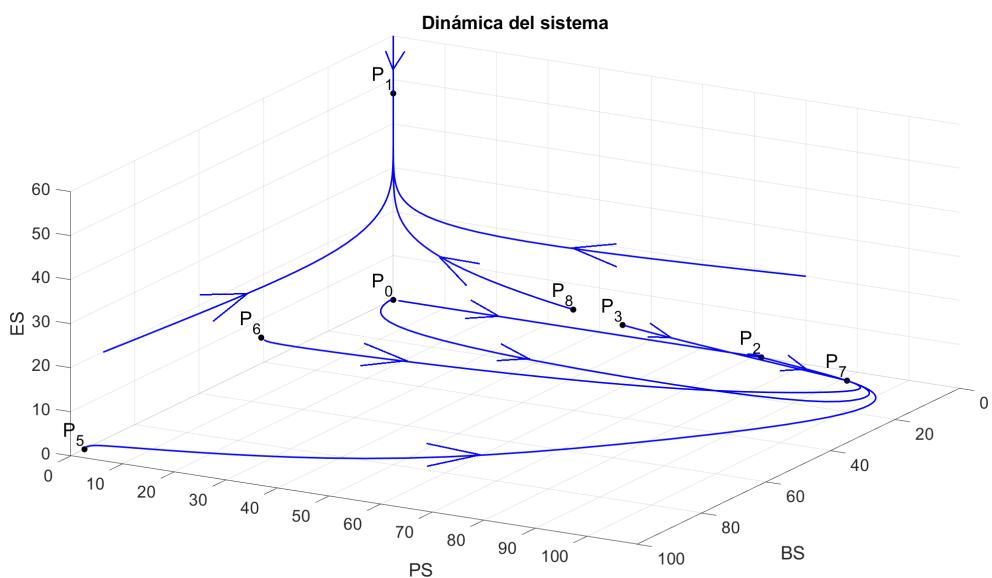


Figura 6.4: Trayectorias del sistema, con valores de θ_2 en la Región III.

Región IV

En esta región, la dinámica del sistema cambia: los puntos p_7 y p_8 dejan de ser viables al perder positividad en alguna de sus coordenadas, mientras que el punto p_2 se convierte en un nuevo atractor. Así, como podemos observar en la Figura 6.5, las trayectorias tienden a converger hacia p_1 o p_2 , dependiendo del estado inicial del sistema.

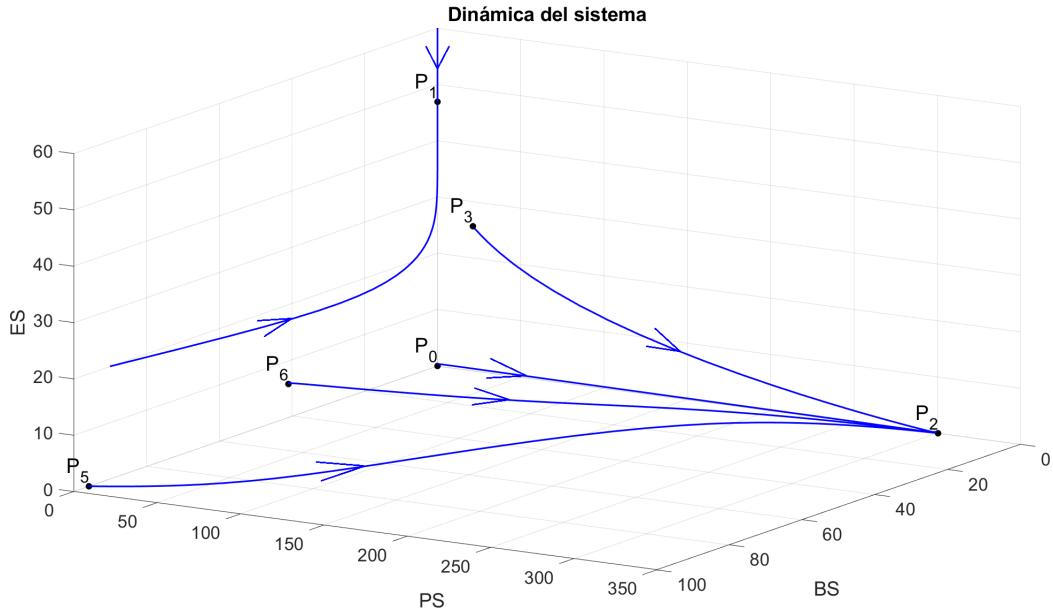


Figura 6.5: Trayectorias del sistema, con valores de θ_2 en la Región IV.

Región V

En esta región final, el sistema cuenta con cinco puntos críticos, siendo p_2 el único atractor. El punto p_1 pierde su estabilidad y se convierte en punto silla, mientras que p_3 deja de ser viable al abandonar el primer cuadrante. En la Figura 6.6, podemos ver como las trayectorias convergen hacia un único equilibrio estable.

6.3.1. Evolución temporal a partir del estado inicial p_{90}

Como se observó en las secciones anteriores, el sistema presenta regiones del parámetro θ_2 con múltiples equilibrios estables, lo que genera escenarios de biestabilidad. En estos casos, trayectorias que parten desde una misma condición inicial pueden converger hacia distintos estados ecológicos dependiendo del valor de θ_2 .

En la Figura 6.7 se muestra la evolución temporal de las tres especies: BS, PS y ES, considerando distintas intensidades de replantación del Palo Loco (θ_2). Las trayectorias se iniciaron desde el punto

$$p_{90} = (15.4667, 0.0790, 8.9326),$$

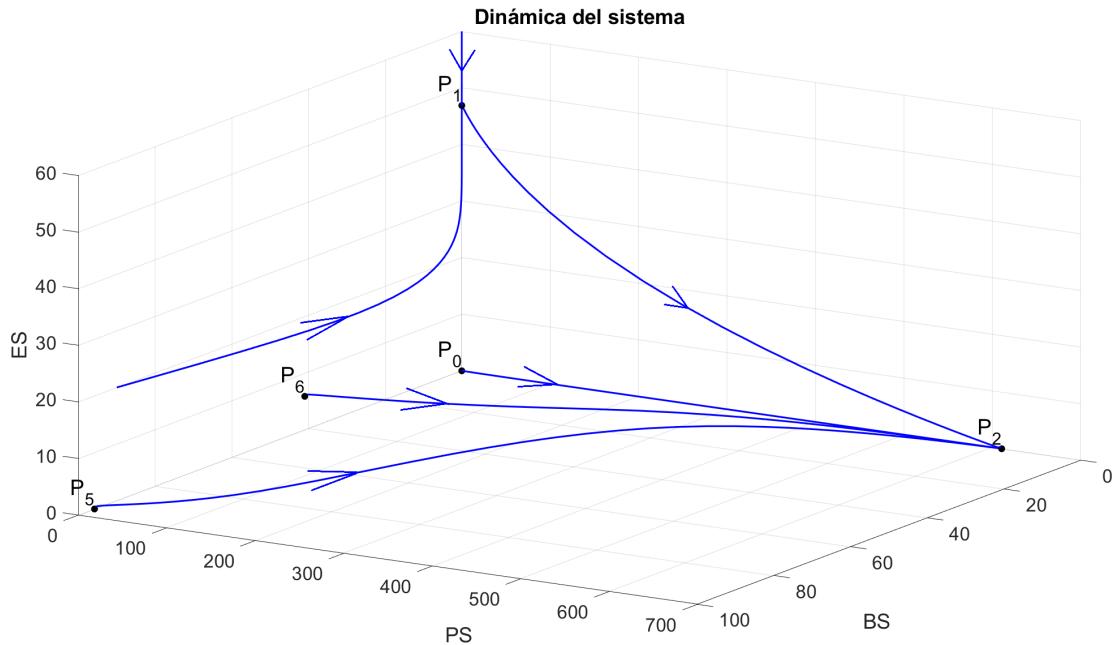


Figura 6.6: Trayectorias del sistema, con valores de θ_2 en la Región V.

que representa la estimación del sistema en el año 1990.

- Azul: evolución temporal del **Eucalipto Rojo** (ES).
- Rojo: evolución temporal del **Tepozán** (BS).
- Verde: evolución temporal del **Palo Loco** (PS).

Los resultados muestran que la estrategia de replantación del Palo Loco requiere superar un umbral mínimo de esfuerzo para ser efectiva. Para valores bajos de θ_2 , el sistema evoluciona hacia un estado dominado por el Eucalipto Rojo, mientras que, al aumentar la tasa de replantación por encima de $\theta_2 \approx 0.37$, el sistema converge a una configuración donde únicamente sobrevive el Palo Loco. Esto indica que, si bien es posible erradicar al eucalipto, dicha estrategia conduce a la exclusión del Tepozán, logrando solo una restauración parcial de la vegetación nativa.

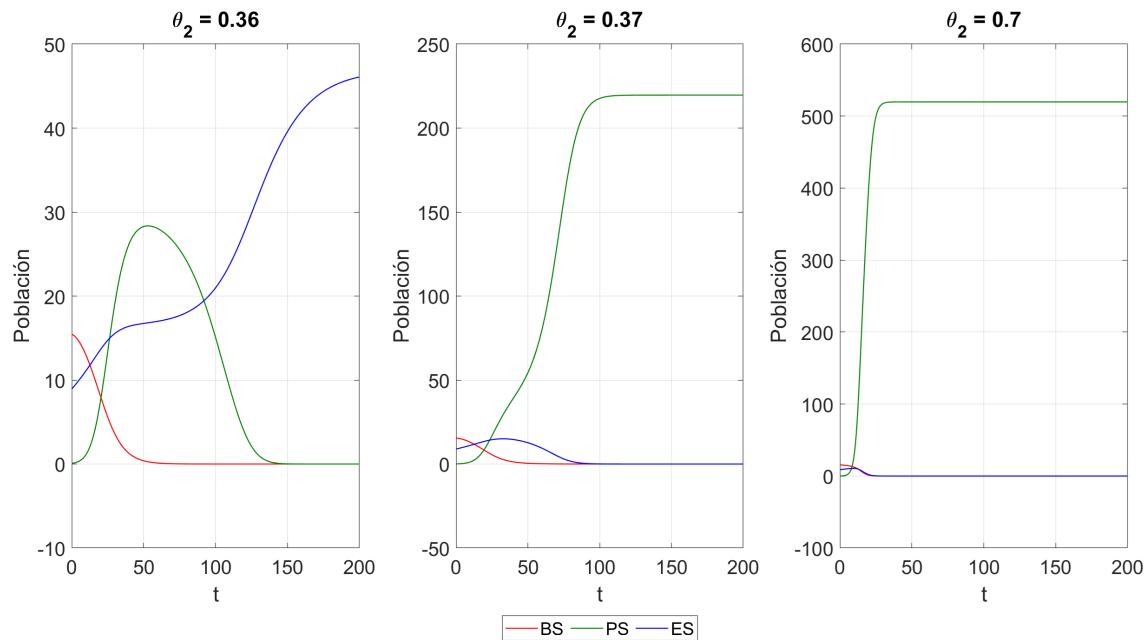


Figura 6.7: Evolución temporal de BS, PS y ES, para distintos valores de θ_2 a partir del punto p_{90} .

Capítulo 7

Estrategia de replantación simultánea de las especies nativas a tasa proporcional

Este capítulo examina una cuarta estrategia de manejo ecológico, basada en la replantación proporcional y simultánea de las dos especies nativas: *Buddleja cordata* (Tepozán) y *Pittocaulon praecox* (Palo Loco). El objetivo es fortalecer la presencia de ambas especies en la reserva, de manera que puedan contrarrestar colectivamente la presión competitiva ejercida por el *Eucalyptus camaldulensis* (Eucalipto Rojo), especie invasora dominante.

Para ello, se modifica el modelo II-B de Acosta-Arreola et al. [1], incorporando dos parámetros positivos: θ_1 y θ_2 , que representan las tasas proporcionales de replantación del Tepozán y del Palo Loco, respectivamente. A diferencia de las estrategias previas, donde solo una de las dos especies era replantada, aquí se estudia el impacto de su reintroducción conjunta y continua.

El sistema dinámico que modela esta estrategia se expresa mediante el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\alpha_1 \cdot x_1 \cdot x_4}{1 + x_3 \cdot \gamma_1} - x_1 \cdot (\beta_1 + \mu_1 \cdot x_3) + \theta_1 \cdot \textcolor{red}{x_1}, \quad (7.1)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{\alpha_2 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot (1 + \tau \cdot x_1)}{1 + x_3 \cdot \gamma_2} - x_2 \cdot (\beta_2 + \mu_2 \cdot x_3) + \theta_2 \cdot \textcolor{red}{x_2}, \quad (7.2)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = \alpha_3 \cdot x_3 \cdot x_4 - \beta_3 \cdot x_3, \quad (7.3)$$

donde $x_4 = C - (x_1 + x_2 + x_3)$ es el espacio libre disponible.

7.1. Puntos de equilibrio

El análisis de los puntos de equilibrio de este modelo se lleva a cabo siguiendo el mismo enfoque empleado en los capítulos anteriores. El desarrollo algebraico completo y las condiciones de existencia correspondientes a cada configuración se detallan en el Apéndice C.1.

Como resultado, se identifican once configuraciones de equilibrio posibles, cuya viabilidad depende de los valores de los parámetros del sistema. En particular, los parámetros θ_1 y θ_2 , relacionados con la replantación proporcional del Tepozán y del Palo Loco, respectivamente, desempeñan un papel clave en la existencia y localización de varios de estos puntos. A continuación, se presentan las expresiones correspondientes a cada punto de equilibrio:

1. Extinción total:

$$p_0 = (0, 0, 0).$$

2. Supervivencia exclusiva del Eucalipto:

$$p_1 = \left(0, 0, C - \frac{\beta_3}{\alpha_3}\right).$$

3. Supervivencia exclusiva del Palo Loco:

$$p_2 = \left(0, C - \frac{\beta_2 - \theta_2}{\alpha_2}, 0\right).$$

4. Coexistencia de Palo Loco y Eucalipto:

$$p_3 = \left(0, C - \sigma_1^+ - \frac{\beta_3}{\alpha_3}, \sigma_1^+\right).$$

5. Coexistencia de Palo Loco y Eucalipto:

$$p_4 = \left(0, C - \sigma_1^- - \frac{\beta_3}{\alpha_3}, \sigma_1^-\right).$$

6. Supervivencia exclusiva del Tepozán:

$$p_5 = \left(C - \frac{\beta_1 - \theta_1}{\alpha_1}, 0, 0\right).$$

7. Coexistencia de Tepozán y Eucalipto:

$$p_6 = \left(C - \sigma_2^+ - \frac{\beta_3}{\alpha_3}, 0, \sigma_2^+\right).$$

8. Coexistencia de Tepozán y Eucalipto:

$$p_7 = \left(C - \sigma_2^- - \frac{\beta_3}{\alpha_3}, 0, \sigma_2^-\right).$$

9. Coexistencia de Tepozán y Palo Loco:

$$p_8 = \left(\frac{(\beta_2 - \theta_2)\alpha_1 - \alpha_2(\beta_1 - \theta_1)}{\alpha_2(\beta_1 - \theta_1)\tau}, C - \frac{(\beta_2 - \theta_2)\alpha_1 - \alpha_2(\beta_1 - \theta_1)}{\alpha_2(\beta_1 - \theta_1)\tau} - \frac{\beta_1 - \theta_1}{\alpha_1}, 0 \right).$$

10. Coexistencia de las tres especies:

$$p_9 = \left(\frac{\alpha_3(M^+N^+ - P)}{\alpha_2\beta_3\tau}, C - \frac{\alpha_3(M^+N^+ - P)}{\alpha_2\beta_3\tau} - \sigma_2^+ - \frac{\beta_3}{\alpha_3}, \sigma_2^+ \right).$$

11. Coexistencia de las tres especies:

$$p_{10} = \left(\frac{\alpha_3(M^-N^- - P)}{\alpha_2\beta_3\tau}, C - \frac{\alpha_3(M^-N^- - P)}{\alpha_2\beta_3\tau} - \sigma_2^- - \frac{\beta_3}{\alpha_3}, \sigma_2^- \right).$$

Las expresiones de $\sigma_1^\pm, \sigma_2^\pm, M^\pm, N^\pm, P$, así como las condiciones algebraicas que garantizan la viabilidad ecológica de cada punto (es decir, que todas las coordenadas sean no negativas), se encuentran detalladas en el Apéndice C.1.

En el siguiente capítulo se analizará la estabilidad de estos puntos de equilibrio en función de los parámetros θ_1 y θ_2 , con el objetivo de identificar escenarios donde las especies nativas logren establecerse de manera sostenible.

7.2. Existencia y estabilidad en el espacio de parámetros

A diferencia de los capítulos anteriores, donde se analizaban las trayectorias en función de un solo parámetro, este modelo incorpora simultáneamente las tasas de replantación de ambas especies nativas, θ_1 y θ_2 , lo cual genera una dinámica considerablemente más rica.

Para estudiar la existencia y estabilidad de los puntos de equilibrio sin perder claridad ante la complejidad del sistema, se construyó una representación gráfica que resume las configuraciones estables en función del plano paramétrico.

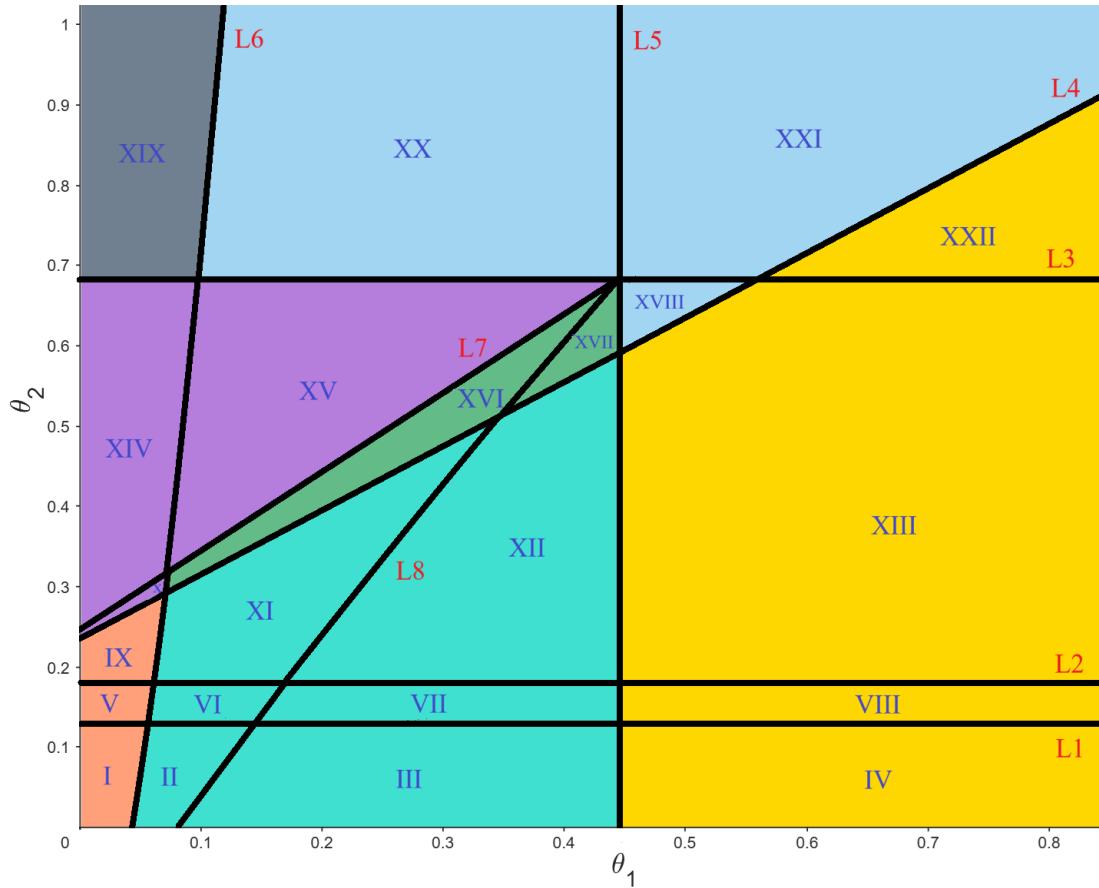


Figura 7.1: División del plano de parámetros en 22 regiones, señalando los puntos de equilibrio estables existentes.

La Figura 7.1 muestra cómo el plano (θ_1, θ_2) se divide en 22 regiones distintas, separadas por curvas algebraicas denominadas L_1 a L_8 . Estas curvas representan umbrales críticos donde ocurren cambios cualitativos en la estabilidad del sistema. Las expresiones exactas de estas curvas se presentan en el Apéndice C.3, junto con el análisis detallado de los puntos de equilibrio asociados.

Cada región está codificada por colores que indican qué configuraciones ecológicas son posibles: desde escenarios de dominancia del eucalipto hasta estados deseables de coexistencia entre especies nativas. El significado de los colores es el siguiente:

- **Coral claro**: los atractores son p_1 y p_8 .
- **Turquesa**: los atractores son p_1 y p_5 .
- **Mostaza**: el único atractor es p_5 .
- **Morado**: los atractores son p_1 y p_2 .

- **Menta clara:** los atractores son p_1 , p_2 y p_5 .
- **Gris:** el único atractor es p_2 .
- **Celeste:** los atractores son p_2 y p_5 .

Para complementar esta visualización, el Cuadro 7.1 resume cuántos puntos críticos existen en cada región y cuáles de ellos son estables. Aunque algunas regiones comparten la misma cantidad de puntos y atractores, se diferencian en la estabilidad de los puntos restantes, lo que justifica su distinción como zonas separadas.

Región	Cantidad de Puntos Críticos	Puntos Críticos Estables
I	6	p_1, p_8
II	5	p_1, p_5
III	4	p_1, p_5
IV	3	p_5
V	7	p_1, p_8
VI	6	p_1, p_5
VII	5	p_1, p_5
VIII	4	p_5
IX	8	p_1, p_8
X	7	p_1, p_2
XI	7	p_1, p_5
XII	6	p_1, p_5
XIII	5	p_5
XIV	6	p_1, p_2
XV	7	p_1, p_2
XVI	8	p_1, p_2, p_5
XVII	7	p_1, p_2, p_5
XVIII	6	p_2, p_5
XIX	5	p_2
XX	6	p_2, p_5
XXI	5	p_2, p_5
XXII	4	p_5

Cuadro 7.1: Cantidad de puntos críticos en cada región, indicando cuáles son estables.

Este enfoque gráfico permite una comprensión más clara de cómo la dinámica del sistema varía en función de los parámetros de manejo. En la siguiente sección, se explora cómo estas configuraciones influyen en la evolución temporal del sistema bajo una condición inicial fija.

7.2.1. Evolución temporal a partir del estado inicial p_{90} bajo replantación conjunta

Como puede apreciarse en las secciones anteriores, existen regiones del plano paramétrico (θ_1, θ_2) que presentan biestabilidad y triestabilidad. Esto implica que un mismo punto inicial puede ser atraído hacia diferentes estados de equilibrio, dependiendo del valor específico de los parámetros de replantación considerados. En particular, pequeñas variaciones en θ_1 y θ_2 dentro de una misma región pueden provocar cambios significativos en la dinámica del sistema.

Gracias a lo expuesto en la Figura 7.1, podemos concluir que las regiones de interés son las Regiones I, V y IX, ya que son las únicas que contienen al punto crítico p_8 , correspondiente a la coexistencia de las dos especies nativas, como punto atractor. Esto implica que, para ciertas combinaciones de los parámetros θ_1 y θ_2 dentro de estas regiones, la trayectoria del punto de interés

$$p_{90} = (15.4667, 0.0790, 8.9326)$$

podría converger hacia nuestro objetivo final: la supervivencia del Tepozán (BS) y el Palo Loco (PS).

Para ilustrar con mayor claridad este comportamiento, en la Figura 7.2 se muestra el estado final de la trayectoria del punto p_{90} luego de 1000 años, considerando un barrido de valores para los parámetros θ_1 y θ_2 . Dependiendo del color, el estado final indica la supervivencia de una o dos especies, según se detalla a continuación:

- **Azul:** supervivencia del **Eucalipto Rojo** (ES).
- **Rojo:** supervivencia del **Tepozán** (BS).
- **Verde:** supervivencia del **Palo Loco** (PS).
- **Turquesa:** supervivencia de **BS** y **PS**.

Además, en la Figura 7.2 se incorporaron dos curvas adicionales, correspondientes a las expresiones previamente definidas como L4 y L6. Estas curvas delimitan parcialmente la región de interés (representada en color turquesa). Es importante destacar que, si bien en dicha figura se observan puntos de coexistencia por encima de la curva L4, esto se debe a que las simulaciones se realizaron con un horizonte temporal finito de 1000 años, impuesto por las limitaciones computacionales del modelo. En particular, dicha figura se construyó a partir de la evaluación de 50 mil combinaciones de parámetros, lo que implicó un alto costo computacional.

Si el tiempo de integración se extendiera indefinidamente, esos puntos desaparecerían, ya que, como se muestra en la Figura 7.1, por encima de L4 el punto p_8 deja de ser estable y, por tanto, no es posible la convergencia hacia él.

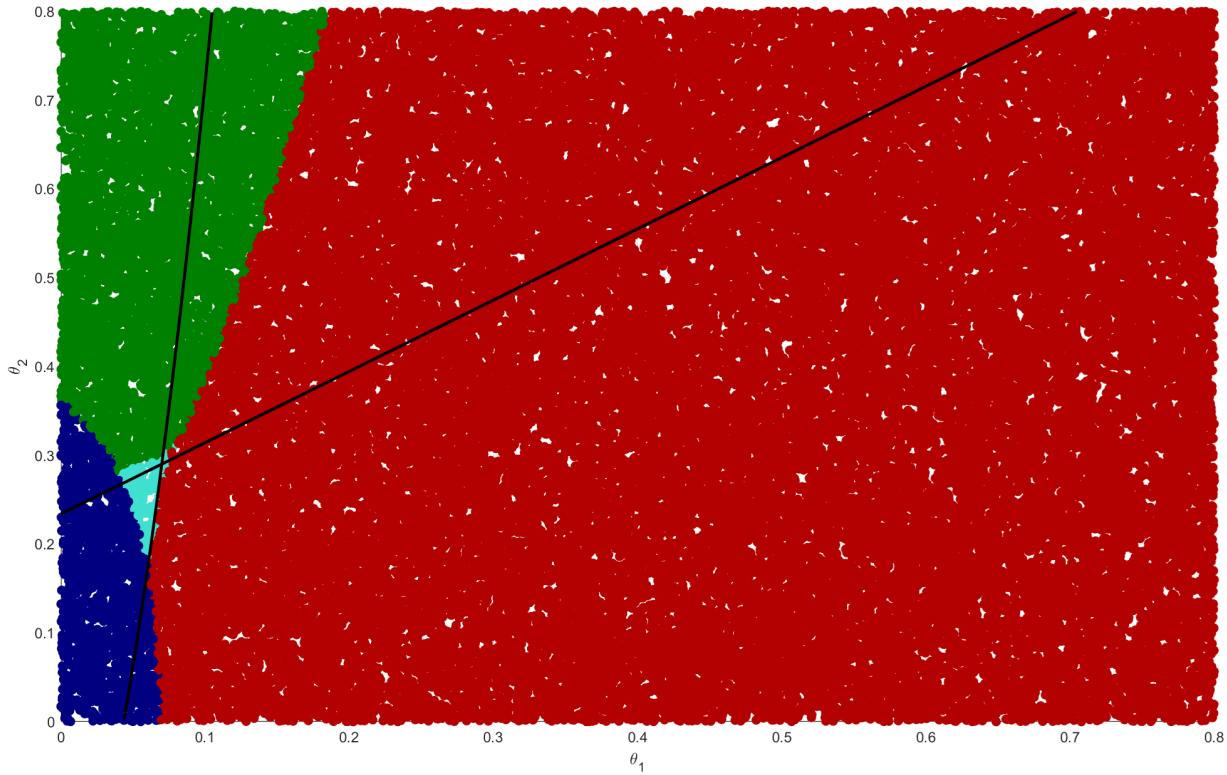


Figura 7.2: Clasificación de los puntos (θ_1, θ_2) según la convergencia en el tiempo ($t = 1000$ años) de la trayectoria del punto p_{90} .

Interpretación ecológica

Estos resultados permiten concluir que, para que la estrategia de replantación conjunta sea exitosa, no basta con actuar sobre una sola especie nativa. La restauración efectiva del ecosistema (entendida como la supervivencia simultánea del Tepozán (BS) y el Palo Loco (PS)) requiere implementar tasas suficientemente altas de replantación en ambas especies. En particular, se necesita que θ_1 y θ_2 se mantengan dentro de una estrecha franja del plano paramétrico, principalmente contenida entre las curvas L4 y L6.

Esto refleja que la coexistencia de las especies nativas no solo es frágil ante cambios en los parámetros de replantación, sino que también demanda un esfuerzo coordinado. En otras palabras, si el esfuerzo se concentra únicamente en una de las dos especies, el sistema puede evolucionar hacia estados no deseados, como la exclusión del Tepozán o la permanencia del Eucalipto Rojo. La estrategia más efectiva, por tanto, consiste en una replantación simultánea y sostenida de ambas especies nativas, con tasas cuidadosamente calibradas para superar los umbrales de estabilidad necesarios.

Capítulo 8

Impacto combinado de la replantación nativa y la tala dirigida sobre el eucalipto

Con el objetivo de evaluar estrategias que favorezcan la restauración de la vegetación nativa, en este capítulo se estudia el efecto combinado de dos acciones de manejo sobre la especie invasora *Eucalyptus camaldulensis* (ES): la replantación proporcional de especies nativas y la tala dirigida del eucalipto. Se consideran dos variantes para la tala: una de tipo constante y otra de tipo periódica. En ambos casos, las estrategias dependen de tres parámetros clave: θ_1 y θ_2 , que representan los esfuerzos de replantación de *Buddleja corodata* (BS) y *Pittocaulon praecox* (PS), respectivamente; y η , que regula la intensidad de extracción del eucalipto.

8.1. Modelos dinámicos con control sobre tres parámetros

A continuación se presentan las dos estrategias empleadas. Ambos incorporan los términos de replantación para las especies nativas, diferenciándose únicamente en la forma en que se modela la tala del eucalipto:

- Tala proporcional constante:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\alpha_1 \cdot x_1 \cdot x_4}{1 + x_3 \cdot \gamma_1} - x_1 \cdot (\beta_1 + \mu_1 \cdot x_3) + \theta_1 \cdot x_1,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{\alpha_2 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot (1 + \tau \cdot x_1)}{1 + x_3 \cdot \gamma_2} - x_2 \cdot (\beta_2 + \mu_2 \cdot x_3) + \theta_2 \cdot x_2,$$

$$\frac{dx_3}{dt} = \alpha_3 \cdot x_3 \cdot x_4 - \beta_3 \cdot x_3 - \eta \cdot x_3,$$

- Tala proporcional periódica:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\alpha_1 \cdot x_1 \cdot x_4}{1 + x_3 \cdot \gamma_1} - x_1 \cdot (\beta_1 + \mu_1 \cdot x_3) + \theta_1 \cdot x_1,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{\alpha_2 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot (1 + \tau \cdot x_1)}{1 + x_3 \cdot \gamma_2} - x_2 \cdot (\beta_2 + \mu_2 \cdot x_3) + \theta_2 \cdot x_2,$$

$$\frac{dx_3}{dt} = \alpha_3 \cdot x_3 \cdot x_4 - \beta_3 \cdot x_3 - \eta \cdot \frac{1 + \cos(\frac{2\pi \cdot t}{T})}{2} \cdot x_3.$$

En la segunda estrategia, el término de tala incorpora una periodicidad temporal con periodo $T = 2$, representando una intervención bianual sobre el eucalipto. Esta característica es la principal diferencia con respecto al modelo anterior y constituye la novedad central de esta estrategia.

8.2. Resultados numéricos

Se estudió la evolución del sistema desde la condición inicial:

$$p_{90} = (15.4667, 0.0790, 8.9326).$$

Para cada estrategia de tala (constante y periódica), se fijaron distintos valores del parámetro η y se exploraron 10.000 combinaciones de (θ_1, θ_2) en una grilla uniforme de 100×100 .

Cada simulación fue ejecutada durante 1000 años. El resultado se codificó en color según las especies que lograban persistir en el largo plazo:

- **Rojo:** sobrevive únicamente *Buddleja cordata* (BS),
- **Verde:** sobrevive únicamente *Pittocaulon praecox* (PS),
- **Azul:** sobrevive únicamente *Eucalyptus camaldulensis* (ES),
- **Turquesa:** sobreviven ambas especies nativas (BS y PS).

Tala proporcional constante

A medida que se incrementa la intensidad de tala representada por el parámetro η , se observa una transformación significativa en la configuración del espacio de parámetros (θ_1, θ_2) . En particular, la región del plano donde sobrevive exclusivamente el eucalipto comienza a reducirse progresivamente, cediendo terreno a zonas en las que una o ambas especies nativas logran establecerse en el largo plazo. Este patrón es especialmente visible en la Figura 8.1, donde la expansión de las áreas correspondientes a la supervivencia de las nativas resulta evidente conforme se aumenta el valor de η .

8.2. RESULTADOS NUMÉRICOS

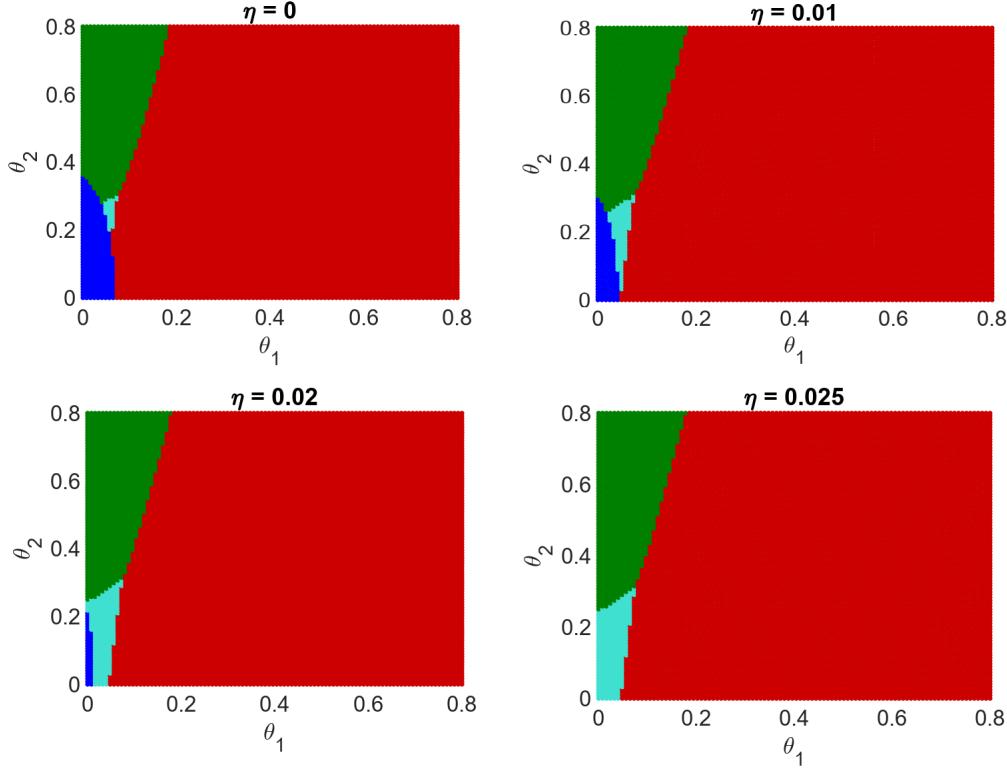


Figura 8.1: Resultado del barrido de parámetros desde p_{90} para distintos valores de η .

A partir de valores cercanos a $\eta = 0.025$, las fronteras entre las regiones del plano parecen alcanzar una forma estable, lo que sugiere la existencia de un umbral de intervención más allá del cual incrementos adicionales en la intensidad de tala ya no producen cambios cualitativos en la dinámica del sistema. Esta hipótesis se valida en la Figura 8.2, donde se muestran los resultados obtenidos para $\eta = 0.5$ y $\eta = 1$. En ambos casos, se aprecia que la forma y extensión de las regiones se mantienen prácticamente invariantes, lo que indica que el sistema ha alcanzado un régimen estable de respuesta frente a la presión de tala ejercida.

Tala proporcional periódica

Bajo la estrategia de tala periódica, el sistema muestra un comportamiento cualitativamente similar al del caso constante: al incrementar el parámetro η , disminuye la región dominada por el eucalipto y se amplían las zonas de supervivencia nativa. Esto se observa en la Figura 8.3, donde se muestran los resultados para distintos valores de η , considerando un periodo de oscilación $T = 2$ años.

8.2. RESULTADOS NUMÉRICOS

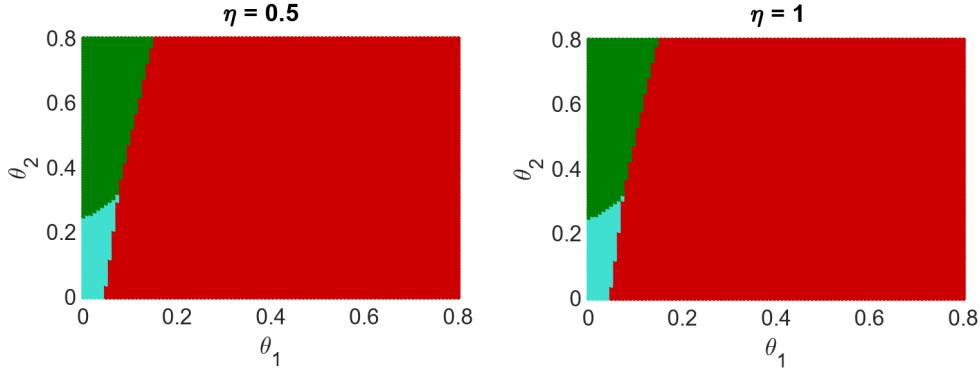


Figura 8.2: Confirmación de fronteras estabilizadas para η más grandes.

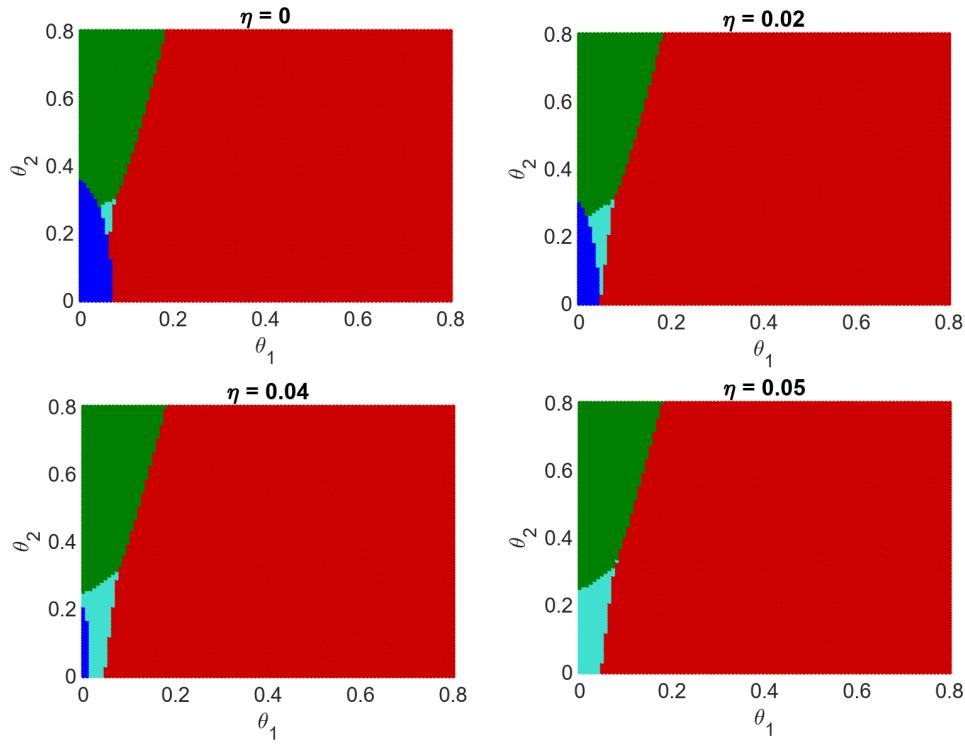


Figura 8.3: Resultado del barrido de parámetros desde p_{90} para distintos valores de η , considerando $T = 2$.

A partir de $\eta \approx 0.05$, la estructura espacial de las regiones se estabiliza, como se muestra en la Figura 8.4, lo que indica que el sistema deja de responder de forma significativa a incrementos adicionales en la intensidad de tala periódica.

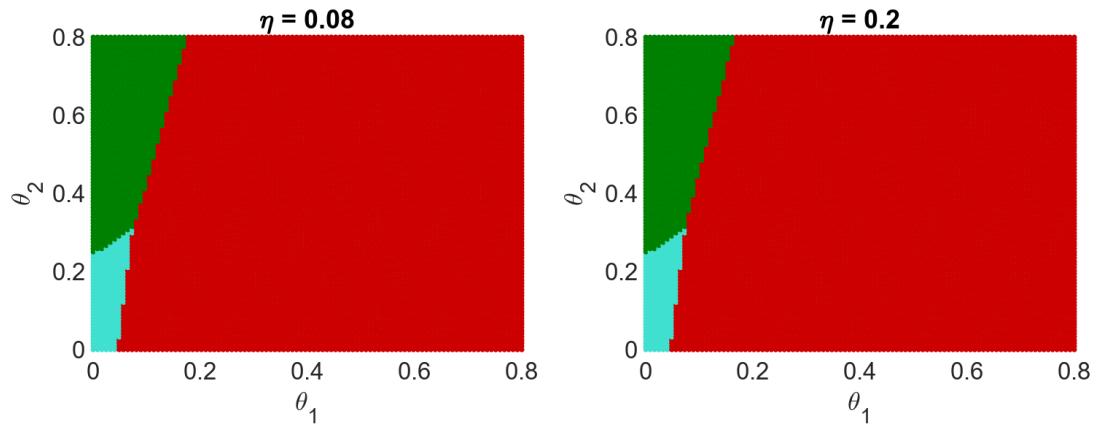


Figura 8.4: Confirmación de fronteras estabilizadas para η más grandes, considerando $T = 2$.

Capítulo 9

Conclusiones

Este trabajo se centró en el análisis de un sistema ecológico que modela la interacción entre tres especies vegetales presentes en la Reserva Ecológica del Pedregal de San Ángel (REPSA) de la UNAM: dos especies nativas, *Buddleja cordata* (BS) y *Pittocaulon praecox* (PS), y una especie invasora, el eucalipto (*Eucalyptus camaldulensis*, ES). A partir del modelo II-B propuesto por Acosta-Arreola et al. [1], se diseñaron y analizaron distintas estrategias de manejo orientadas a promover la conservación de la vegetación nativa y controlar el avance de la especie exótica.

Se desarrollaron seis estrategias de intervención, fundamentadas en mecanismos de replantación y tala. Cada una fue representada mediante un sistema dinámico no lineal que incorpora parámetros de control asociados a acciones de restauración (replantación de especies nativas) o manejo (tala de eucaliptos). El análisis incluyó el estudio de puntos de equilibrio, la evaluación de su estabilidad lineal y la realización de simulaciones numéricas desde condiciones ecológicamente relevantes. Este enfoque permitió explorar escenarios sostenibles y comprender las condiciones bajo las cuales el ecosistema puede recuperar un equilibrio favorable a las especies nativas.

En particular, se evaluó la evolución de cada modelo a partir de una condición inicial ecológicamente significativa, denotada por p_{90} , que representa la estimación de las coberturas de las tres especies en el año 1990. Las conclusiones sobre la supervivencia o erradicación de especies deben interpretarse dentro de este contexto: describen el destino del sistema bajo la evolución desde p_{90} , y no necesariamente reflejan el comportamiento global del modelo para cualquier otra condición inicial.

A continuación, se presentan los principales resultados obtenidos para cada estrategia:

- **Estrategia 1: Tala constante del eucalipto.** Esta intervención demostró ser eficaz en el control del eucalipto invasor. Se identificó un umbral crítico cercano a $\eta = 0.0242$, a partir del cual la especie exótica puede ser erradicada. Por encima de este valor, el sistema evoluciona hacia equilibrios donde predominan una o ambas especies nativas. Esta estrategia muestra que una intervención continua y moderada es suficiente para restablecer el equilibrio ecológico.

-
- **Estrategias 2 y 3: Replantación individual de BS o PS.** En ambos casos, se evaluó el impacto de replantar por separado al Tepozán (BS) o al Palo Loco (PS), mediante los parámetros θ_1 y θ_2 , respectivamente. Si bien fue posible lograr la supervivencia de la especie replantada al incrementar su respectivo parámetro, esto conllevó la erradicación tanto de la otra especie nativa como del eucalipto. Por tanto, estas estrategias no cumplieron con el objetivo de conservar simultáneamente a ambas especies nativas, lo que resalta la insuficiencia de enfoques de restauración unilaterales frente a dinámicas ecológicas complejas.
 - **Estrategia 4: Replantación conjunta de BS y PS.** Este modelo evidenció un avance significativo respecto a las estrategias anteriores, ya que permitió identificar una región factible del espacio de parámetros en la que el sistema evoluciona hacia estados de coexistencia, con erradicación del eucalipto. La incorporación simultánea de mecanismos de restauración para ambas especies nativas resultó fundamental para contrarrestar la competitividad de la especie invasora. Sin embargo, dicha región factible resultó ser bastante reducida, lo que implica que esta estrategia, aunque prometedora, requiere una implementación cuidadosa y bien calibrada para que sea efectiva. Pequeñas desviaciones en los parámetros pueden hacer que el sistema pierda las condiciones deseables.
 - **Estrategia 5: Replantación conjunta y tala constante del eucalipto.** Esta estrategia fue la más prometedora. Se amplió considerablemente la región del espacio de parámetros donde las especies nativas coexisten y el eucalipto es eliminado. A partir de $\eta \approx 0.025$, la estructura de las regiones de supervivencia se estabiliza, lo que indica que con una intensidad moderada de tala y replantación simultánea, el ecosistema puede sostenerse sin la presencia de la especie invasora.
 - **Estrategia 6: Replantación conjunta y tala periódica del eucalipto.** Esta estrategia incorpora una temporalidad más realista al considerar una tala cada dos años ($T = 2$), lo cual representa una diferencia clave respecto a la tala constante de la estrategia 5. Si bien logra resultados cualitativamente similares (erradicación del eucalipto y persistencia de las especies nativas), alcanzar estos objetivos requiere una mayor intensidad de tala (a partir de $\eta \approx 0.05$), ya que la intervención es menos frecuente. Esto se traduce en una dinámica más lenta hacia el equilibrio. No obstante, esta ralentización no necesariamente representa una desventaja: al reflejar mejor las restricciones operativas del manejo forestal en escenarios reales, esta podría ser la estrategia más viable desde el punto de vista logístico y ecológico.

En términos generales, las estrategias 1, 4, 5 y 6 cumplieron con el objetivo central de favorecer la conservación de especies nativas mediante intervenciones de manejo. Sin embargo, al considerar aspectos prácticos como viabilidad y costo, no todas ofrecen el mismo nivel de promesa. La estrategia 4, basada únicamente en la replantación simultánea de ambas especies nativas, mostró una región factible demasiado estrecha, lo que limita su

aplicabilidad. Por su parte, la estrategia 1, centrada exclusivamente en la tala del eucalipto, si bien efectiva, puede requerir una inversión considerable al tratarse de una acción constante y de gran escala. En contraste, las estrategias 5 y 6, que combinan control del eucalipto con replantación activa, ofrecen regiones factibles más amplias y un mejor equilibrio entre restauración y esfuerzo de manejo. Esta combinación sugiere que podrían ser más sostenibles y costo-efectivas en escenarios reales.

Desde una perspectiva práctica, los resultados refuerzan el valor de los modelos matemáticos como herramientas para apoyar la toma de decisiones ambientales. La identificación de regiones del espacio de parámetros que conducen a escenarios ecológicamente deseables permite diseñar intervenciones más eficaces, predecir el comportamiento del sistema bajo distintas estrategias y evitar acciones costosas con bajo impacto esperado. Además, la presencia de multiestabilidad resalta la importancia de las condiciones iniciales, con implicaciones directas para la selección de sitios prioritarios de restauración o monitoreo.

Comparativamente, las estrategias analizadas en esta tesis amplían el alcance del modelo II-B original al incorporar explícitamente intervenciones humanas sobre la dinámica del ecosistema. Este enfoque permitió explorar un amplio rango de escenarios mediante simulaciones estructuradas y análisis cualitativos.

Pese a estos avances, el estudio también deja abiertas varias preguntas. Por ejemplo:

- ¿Cómo cambiarían los resultados si las estrategias de replantación fueran periódicas en lugar de constantes?
- ¿Qué ocurre si se consideran más especies en competencia?
- ¿Cómo cambian los resultados si se introducen procesos estocásticos o perturbaciones externas?
- ¿Qué impacto tendría la inclusión de costos o restricciones socioeconómicas en las estrategias de manejo?
- ¿Cómo cambiarían los resultados si se considera una distribución espacial no homogénea de los árboles?

Como líneas de investigación futuras, se propone extender los modelos hacia formulaciones de control óptimo, introducir heterogeneidad espacial o temporal más compleja (como manejo estacional diferenciado), implementar el modelo en escenarios de otras especies en otras reservas ecológicas donde ocurren procesos similares.

En resumen, esta tesis aporta una base conceptual y metodológica sólida para el estudio de sistemas ecológicos intervenidos, y destaca el valor de la modelación matemática como herramienta no solo explicativa, sino también predictiva y aplicada, en el contexto de la conservación de la biodiversidad.

Apéndice A

Estrategia de replantación proporcional de BS: puntos de equilibrio y estabilidad

En este apéndice se detallan los pasos seguidos para obtener las coordenadas de los puntos de equilibrio del sistema dado por las ecuaciones (5.1)–(5.3), así como las condiciones necesarias para su existencia. Se siguen los mismos razonamientos estructurados por casos que en el Capítulo 4.

A.1. Puntos de equilibrio

Para encontrar los puntos de equilibrio del sistema (5.1)–(5.3), buscamos aquellos valores (x_1, x_2, x_3) donde todas las derivadas se hacen cero. Eso nos lleva a resolver el siguiente sistema de ecuaciones no lineales:

$$[\alpha_1(C - (x_1 + x_2 + x_3)) - (1 + \gamma_1 x_3)(\beta_1 - \theta_1 + \mu_1 x_3)] x_1 = 0, \quad (\text{A.1})$$

$$[\alpha_2(C - (x_1 + x_2 + x_3))(1 + \tau x_1) - (1 + \gamma_2 x_3)(\beta_2 + \mu_2 x_3)] x_2 = 0, \quad (\text{A.2})$$

$$[\alpha_3(C - (x_1 + x_2 + x_3)) - \beta_3] x_3 = 0. \quad (\text{A.3})$$

Estudiaremos los puntos de equilibrio por casos:

Caso 1: $x_1 = 0$

Si $x_1 = 0$, entonces $(0, x_2, x_3)$ es un punto de equilibrio si satisface el sistema de ecuaciones

$$[\alpha_2(C - (x_2 + x_3)) - (1 + \gamma_2 x_3)(\beta_2 + \mu_2 x_3)] x_2 = 0, \quad (\text{A.4})$$

$$[\alpha_3(C - (x_2 + x_3)) - \beta_3] x_3 = 0. \quad (\text{A.5})$$

Subcaso 1.1: $x_2 = 0$

- Si $x_3 = 0$, entonces el punto de equilibrio es el origen:

$$p_0 = (0, 0, 0).$$

- Ahora, si $x_3 > 0$, entonces de la ecuación (A.5) obtenemos que

$$x_3 = C - \frac{\beta_3}{\alpha_3},$$

siempre que $C > \frac{\beta_3}{\alpha_3}$. El punto resultante es:

$$p_1 = \left(0, 0, C - \frac{\beta_3}{\alpha_3}\right).$$

Subcaso 1.2: $x_2 > 0$

- Si $x_3 = 0$, entonces de la ecuación (A.4) obtenemos que

$$x_2 = C - \frac{\beta_2}{\alpha_2},$$

siempre que $C > \frac{\beta_2}{\alpha_2}$. Por lo tanto:

$$p_2 = \left(0, C - \frac{\beta_2}{\alpha_2}, 0\right),$$

- Si $x_3 > 0$, entonces de la ecuación (A.5) obtenemos que

$$x_2 = C - x_3 - \frac{\beta_3}{\alpha_3}.$$

Luego, utilizando esta expresión y el hecho de que x_3 resuelve (A.4), obtenemos las soluciones

$$x_3^\pm = \frac{1}{2\gamma_2\mu_2} \left[-(\beta_2\gamma_2 + \mu_2) \pm \sqrt{(\mu_2 - \beta_2\gamma_2)^2 + \frac{4\alpha_2\gamma_2\mu_2\beta_3}{\alpha_3}} \right].$$

Observemos que la solución x_3^\pm es siempre real. No obstante, x_3^- resulta ser negativo en todos los casos, por lo que se descarta y se considera únicamente $x_3 = x_3^+$. Además, dado que todos los parámetros involucrados son positivos, tras algunos pasos algebraicos se concluye que $x_3^+ > 0$ si se cumple la desigualdad $\beta_2\alpha_3 < \alpha_2\beta_3$.

De este modo, el punto de equilibrio obtenido tiene la forma

$$p_4 = \left(0, C - \sigma_1 - \frac{\beta_3}{\alpha_3}, \sigma_1\right),$$

siempre que $C > \sigma_1 + \frac{\beta_3}{\alpha_3}$, donde se ha definido:

$$\sigma_1 := \frac{1}{2\gamma_2\mu_2} \left[-(\beta_2\gamma_2 + \mu_2) + \sqrt{(\beta_2\gamma_2 - \mu_2)^2 + \frac{4\alpha_2\gamma_2\mu_2\beta_3}{\alpha_3}} \right]. \quad (\text{A.6})$$

Caso 2: $x_1 > 0$

Si $x_1 > 0$, entonces resolver (A.1)–(A.3) equivale a resolver

$$\alpha_1(C - (x_1 + x_2 + x_3)) - (1 + \gamma_1 x_3)(\beta_1 - \theta_1 + \mu_1 x_3) = 0, \quad (\text{A.7})$$

$$[\alpha_2(C - (x_1 + x_2 + x_3))(1 + \tau x_1) - (1 + \gamma_2 x_3)(\beta_2 + \mu_2 x_3)] x_2 = 0, \quad (\text{A.8})$$

$$[\alpha_3(C - (x_1 + x_2 + x_3)) - \beta_3] x_3 = 0. \quad (\text{A.9})$$

Subcaso 2.1: $x_2 = 0$

- Si $x_3 = 0$, entonces de la ecuación (A.7)

$$x_1 = C - \frac{\beta_1 - \theta_1}{\alpha_1}, \quad \text{si } C > \frac{\beta_1 - \theta_1}{\alpha_1},$$

y el punto de equilibrio es:

$$p_5 = \left(C - \frac{\beta_1 - \theta_1}{\alpha_1}, 0, 0 \right).$$

- Si $x_3 > 0$, entonces de la ecuación (A.9) obtenemos que

$$x_1 = C - x_3 - \frac{\beta_3}{\alpha_3}.$$

Al sustituir esta expresión en la ecuación (A.7) y considerando que x_3 la satisface, se obtienen las soluciones

$$x_3^\pm = \frac{1}{2\gamma_1\mu_1} \left[-[(\beta_1 - \theta_1)\gamma_1 + \mu_1] \pm \sqrt{[(\beta_1 - \theta_1)\gamma_1 - \mu_1]^2 + \frac{4\gamma_1\mu_1\alpha_1\beta_3}{\alpha_3}} \right].$$

La solución x_3^\pm resulta ser siempre real. Como todos los parámetros son positivos, y tras realizar algunos pasos algebraicos, se encuentra que $x_3^+ > 0$ si se cumple $\alpha_1\beta_3 > (\beta_1 - \theta_1)\alpha_3$, mientras que $x_3^- > 0$ si $\alpha_1\beta_3 < (\beta_1 - \theta_1)\alpha_3$ y, además, $(\beta_1 - \theta_1)\gamma_1 + \mu_1 < 0$.

En consecuencia, se obtienen dos posibles puntos de equilibrio:

- Si $C > \sigma_2^+ + \frac{\beta_3}{\alpha_3}$, entonces

$$p_6 = \left(C - \sigma_2^+ - \frac{\beta_3}{\alpha_3}, 0, \sigma_2^+ \right).$$

- Si $C > \sigma_2^- + \frac{\beta_3}{\alpha_3}$, entonces

$$p_7 = \left(C - \sigma_2^- - \frac{\beta_3}{\alpha_3}, 0, \sigma_2^- \right),$$

donde

$$\sigma_2^\pm = \frac{1}{2\gamma_1\mu_1} \left[-[(\beta_1 - \theta_1)\gamma_1 + \mu_1] \pm \sqrt{[(\beta_1 - \theta_1)\gamma_1 - \mu_1]^2 + \frac{4\gamma_1\mu_1\alpha_1\beta_3}{\alpha_3}} \right]. \quad (\text{A.10})$$

Subcaso 2.2: $x_2 > 0$

- Sea $x_3 = 0$, entonces de la ecuación (A.7) obtenemos que

$$x_2 = C - x_1 - \frac{\beta_1 - \theta_1}{\alpha_1}, \quad (\text{A.11})$$

y reemplazando en (A.8), se deduce:

$$x_1 = \frac{\beta_2 \alpha_1 - \alpha_2 (\beta_1 - \theta_1)}{\alpha_2 (\beta_1 - \theta_1) \tau}.$$

Como $x_1 > 0$, entonces observamos que $\beta_2 \alpha_1 > \alpha_2 (\beta_1 - \theta_1)$ y $\beta_1 > \theta_1$, o bien, si $\beta_2 \alpha_1 < \alpha_2 (\beta_1 - \theta_1)$ y $\beta_1 < \theta_1$. Así, el punto resultante es:

$$p_8 = \left(\frac{\beta_2 \alpha_1 - \alpha_2 (\beta_1 - \theta_1)}{\alpha_2 (\beta_1 - \theta_1) \tau}, C - \frac{\beta_2 \alpha_1 - \alpha_2 (\beta_1 - \theta_1)}{\alpha_2 (\beta_1 - \theta_1) \tau} - \frac{\beta_1 - \theta_1}{\alpha_1}, 0 \right).$$

- Finalmente, si $x_3 > 0$, de (A.9) se tiene:

$$x_2 = C - x_1 - x_3 - \frac{\beta_3}{\alpha_3}. \quad (\text{A.12})$$

Reemplazando ahora (A.12) en la ecuación (A.7) y resolviendo para x_3 se obtiene:

$$x_3^\pm = \frac{1}{2\gamma_1\mu_1} \left[-[(\beta_1 - \theta_1)\gamma_1 + \mu_1] \pm \sqrt{[(\beta_1 - \theta_1)\gamma_1 - \mu_1]^2 + \frac{4\gamma_1\mu_1\alpha_1\beta_3}{\alpha_3}} \right]. \quad (\text{A.13})$$

La solución x_3^\pm es siempre real. Dado que todos los parámetros son positivos, algunos cálculos algebraicos permiten concluir que $x_3^+ > 0$ si se cumple $\alpha_1\beta_3 > (\beta_1 - \theta_1)\alpha_3$, mientras que $x_3^- > 0$ si $\alpha_1\beta_3 < (\beta_1 - \theta_1)\alpha_3$ y, además, $(\beta_1 - \theta_1)\gamma_1 + \mu_1 < 0$.

Al sustituir (A.12) y (A.13) en la ecuación (A.8), se obtiene

$$x_1^\pm = \frac{\alpha_3 [(\beta_2 + \mu_2\sigma_2^\pm)(\gamma_2\sigma_2^\pm + 1) - \frac{\alpha_2\beta_3}{\alpha_3}]}{\alpha_2\beta_3\tau},$$

donde σ_2 se definió en la ecuación (A.10). Ahora, definimos:

$$M^\pm := \beta_2 + \mu_2\sigma_2^\pm, \quad N^\pm := \gamma_2\sigma_2^\pm + 1, \quad P := \alpha_2 \frac{\beta_3}{\alpha_3}, \quad (\text{A.14})$$

y así reescribir la coordenada x_1^\pm como

$$x_1^\pm = \frac{\alpha_3(M^\pm N^\pm - P)}{\alpha_2\beta_3\tau}.$$

Luego, obtenemos dos puntos de equilibrios:

- Si $x_1 = x_1^+$:

$$p_9 = \left(\frac{\alpha_3(M^+N^+ - P)}{\alpha_2\beta_3\tau}, C - \frac{\alpha_3(M^+N^+ - P)}{\alpha_2\beta_3\tau} - \sigma_2^+ - \frac{\beta_3}{\alpha_3}, \sigma_2^+ \right),$$

valido si

$$C > \frac{\alpha_3(M^+N^+ - P)}{\alpha_2\beta_3\tau} + \sigma_2^+ + \frac{\beta_3}{\alpha_3} \quad \wedge \quad M^+N^+ > P.$$

- Si $x_1 = x_1^-$:

$$p_{10} = \left(\frac{\alpha_3(M^-N^- - P)}{\alpha_2\beta_3\tau}, C - \frac{\alpha_3(M^-N^- - P)}{\alpha_2\beta_3\tau} - \sigma_2^- - \frac{\beta_3}{\alpha_3}, \sigma_2^- \right),$$

valido si

$$C > \frac{\alpha_3(M^-N^- - P)}{\alpha_2\beta_3\tau} + \sigma_2^- + \frac{\beta_3}{\alpha_3} \quad \wedge \quad M^-N^- > P.$$

A.2. Existencia y estabilidad de los equilibrios

A continuación se procederá a analizar la estabilidad de los puntos críticos obtenidos anteriormente dado que tenemos los valores de los parámetros. Para el sistema (5.1)–(5.3) tenemos la matriz Jacobiana

$$J = \begin{pmatrix} \rho_1 - \frac{\alpha_1(x_1 - C + x_2 + x_3)}{\gamma_1 x_3 + 1} - \sigma_4 & -\phi_1 & \psi_1 - \phi_1 - \mu_1 x_1 \\ -\phi_2 - \frac{\alpha_2 \tau x_2 (x_1 - C + x_2 + x_3)}{\gamma_2 x_3 + 1} & -\rho_2 - \frac{\alpha_2 (\tau x_1 + 1)(x_1 - C + x_2 + x_3)}{\gamma_2 x_3 + 1} - \phi_2 & \psi_2 - \phi_2 - \mu_2 x_2 \\ -\alpha_3 x_3 & -\alpha_3 x_3 & -\beta_3 - \alpha_3 (x_1 - C + x_2 + x_3) - \alpha_3 x_3 \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \theta_1 - \beta_1 + \mu_1 x_3 \quad y \quad \rho_2 = \beta_2 + \mu_2 x_3, \\ \phi_1 &= \frac{\alpha_1 x_1}{\gamma_1 x_3 + 1} \quad y \quad \phi_2 = \frac{\alpha_2 x_2 (\tau x_1 + 1)}{\gamma_2 x_3 + 1}, \\ \psi_1 &= \frac{\alpha_1 \gamma_1 x_1 (x_1 - C + x_2 + x_3)}{(\gamma_1 x_3 + 1)^2} \quad y \quad \psi_2 = \frac{\alpha_2 \gamma_2 x_2 (\tau x_1 + 1) (x_1 - C + x_2 + x_3)}{(\gamma_2 x_3 + 1)^2}. \end{aligned}$$

Para saber cuáles de los puntos de equilibrio son ecológicamente viables y estudiar su estabilidad local según el valor del parámetro θ_1 , usaremos los mismos valores de parámetros que se presentan en el Cuadro 3.2. Estos valores se mantendrán constantes en todo el análisis.

Equilibrio p_0

Para el primer punto de equilibrio tenemos

$$J(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} \theta_1 + \frac{131253}{1000000} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12841}{100000} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{469}{10000} \end{pmatrix},$$

con lo que la matriz Jacobiana tiene valores propios

- $\lambda_1 = \theta_1 + \frac{131253}{1000000} \approx \theta_1 + 0.131$,
- $\lambda_2 = -\frac{12841}{100000} \approx -0.12841$,
- $\lambda_3 = \frac{469}{10000} \approx 0.0469$.

Ahora bien, dado que $\theta_1 > 0$, entonces tendremos que el primer valor propio es siempre positivo. Así, p_0 es siempre un punto silla.

Equilibrio p_1

Para el segundo punto de equilibrio tenemos

$$J\left(0, 0, \frac{469}{10}\right) = \begin{pmatrix} \theta_1 - \frac{654791}{1469000} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1004971}{1469000} & 0 \\ -\frac{469}{10000} & -\frac{469}{10000} & -\frac{469}{10000} \end{pmatrix},$$

donde los valores propios son

$$\lambda_1 = \theta_1 - \frac{654781}{1469000}, \quad \lambda_2 = -\frac{1004971}{1469000}, \quad \text{y} \quad \lambda_3 = -\frac{469}{10000}.$$

El comportamiento del punto de equilibrio p_1 dependerá del signo de λ_1 :

- Para $\theta_1 > 0.4457$, el valor propio λ_1 es positivo. Como los otros dos son negativos, esto hace que p_1 sea un punto silla.
- En cambio, si $0 < \theta_1 < 0.4457$, los tres valores propios son negativos, incluyendo λ_1 , así que el punto p_1 se comporta como un atractor.

Equilibrio p_2

El tercer punto de equilibrio tiene la forma

$$p_2 = \left(0, C - \frac{\beta_2}{\alpha_2}, 0\right),$$

pero notemos que

$$x_2 = C - \frac{\beta_2}{\alpha_2} = -116.7364.$$

Por lo tanto, p_2 se descarta al no ser biológicamente realista.

Equilibrio p_3

El cuarto punto de equilibrio tiene la forma

$$p_3 = \left(0, C - \sigma_1 - \frac{\beta_3}{\alpha_3}, \sigma_1 \right).$$

Recordemos que por la naturaleza del problema, debemos garantizar que $x_2, x_3 > 0$. Esto implica que

$$\alpha_3 \beta_2 < \alpha_2 \beta_3,$$

y que además

$$C - \sigma_1 - \frac{\beta_3}{\alpha_3} > 0.$$

Ahora, al sustituir los valores en la primera restricción, obtenemos

$$0.00029 < 0.00011,$$

lo cual claramente no se cumple. Por lo tanto, concluimos que con esta combinación de parámetros no es posible que exista un punto crítico de la forma p_3 , ya que implicaría una población negativa, lo cual carece de sentido biológico.

Equilibrio p_4

Al igual que en la estrategia anterior, se estudia la estabilidad del punto p_4 evaluando numéricamente los valores propios de la matriz Jacobiana en función del parámetro θ_1 . En la Figura A.1 se ilustra esta dependencia, lo que permite identificar los intervalos donde el punto cambia de estabilidad.

Se observa un cambio de signo en λ_1 en $\theta_1 = 0.0435$, lo que implica:

- Para $0 < \theta_1 < 0.0435$, el punto p_4 es un punto silla.
- Para $\theta_1 > 0.0435$, el punto p_4 es un atractor.

Equilibrio p_5

El análisis de estabilidad del punto p_5 se realiza nuevamente de forma numérica, dada la complejidad de sus valores propios. En la Figura A.2 se observa su evolución en función de θ_1 .

Para $\theta_1 \approx 0.0815$ se detecta un cambio de signo en λ_3 , mientras que en $\theta_1 \approx 0.4457$, λ_2 pasa de positivo a negativo. Además, cerca de $\theta_1 \approx 0.4581$, los valores propios λ_1 y λ_2 se vuelven complejos conjugados (segmento en negro). A lo largo de todo el rango, λ_1 permanece negativo.

No obstante, dado que $x_1 > 0$ es condición necesaria para que p_5 sea biológicamente viable, se restringe el análisis a $\theta_1 < 0.4457$. En ese intervalo, p_5 actúa como un punto silla.

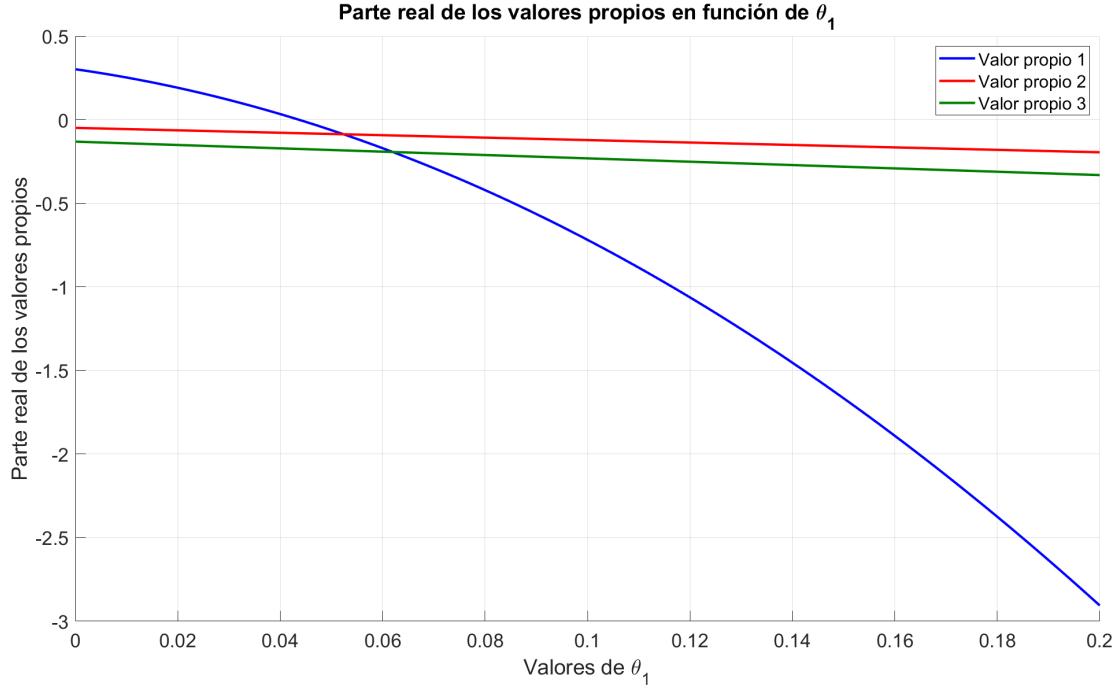


Figura A.1: Valores propios de p_4 en función de θ_1 .

Equilibrio p_6

El séptimo punto de equilibrio es de la forma

$$p_6 = \left(C - \sigma_2^- - \frac{\beta_3}{\alpha_3}, 0, \sigma_2^- \right),$$

y existe siempre que se cumpla la condición $(\beta_1 - \theta_1)\alpha_3 > \alpha_1\beta_3$. Sin embargo, al sustituir los valores numéricos, esta desigualdad implica que

$$\theta_1 < -0.067,$$

lo cual contradice la hipótesis de que $\theta_1 > 0$. Por lo tanto, bajo esta elección de parámetros, no es posible la existencia de un punto crítico de la forma p_6 .

Equilibrio p_7

El análisis de estabilidad del punto p_7 se aborda mediante evaluación numérica de los valores propios, dada la dependencia no lineal con el parámetro θ_1 . Para que este equilibrio sea biológicamente válido, se requiere que $x_1 > 0$ y $x_2 > 0$, lo que impone la condición:

$$0 < \theta_1 < 0.0435.$$

Tal como se muestra en la Figura A.3, en este intervalo p_7 se comporta como un atractor. Aunque se detecta un cambio de signo en uno de los valores propios al llegar a $\theta_1 = 0.0435$, no se analiza dicho punto ya que, fuera de ese rango, el equilibrio pierde validez ecológica.

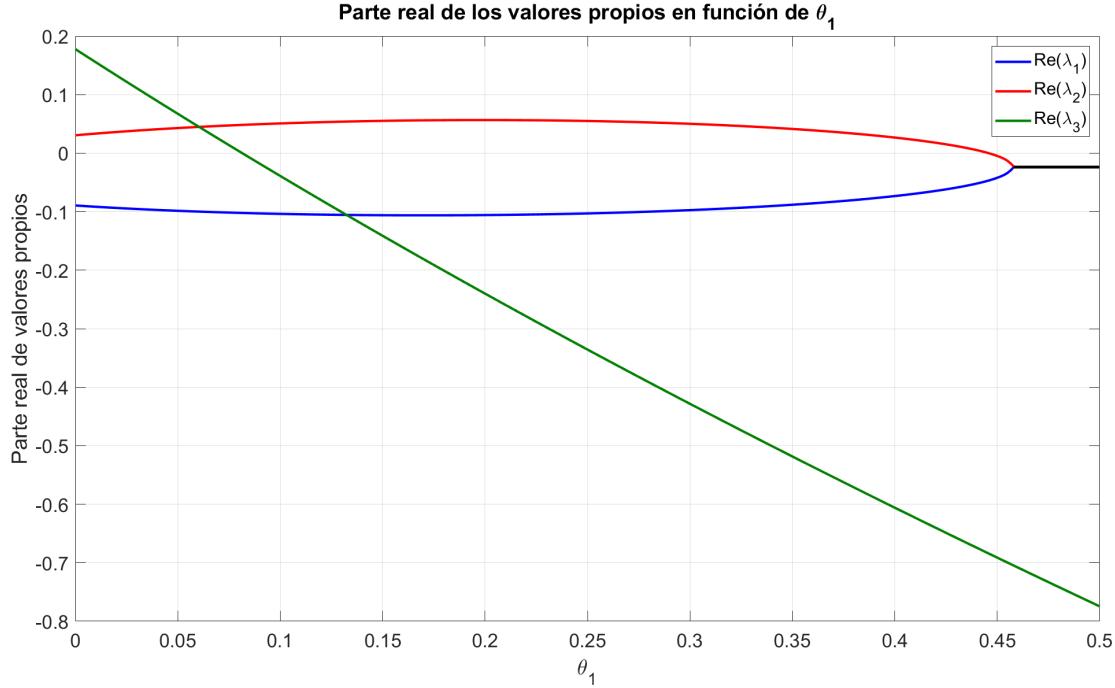


Figura A.2: Valores propios de p_5 en función de θ_1 .

Equilibrio p_8

La estabilidad del punto p_8 se analiza mediante un enfoque numérico, dada la complejidad de los valores propios en función de θ_1 .

Como se aprecia en la Figura A.4, para $\theta_1 = 0.0815$ se produce un cambio de signo en λ_3 , lo que marca la transición hacia un valor propio positivo. Además, en $\theta_1 \approx 0.0575$, los valores propios λ_2 y λ_3 dejan de ser complejos conjugados (segmento en gris), mientras que en $\theta_1 \approx 0.0909$, λ_1 y λ_2 pasan a formar un par complejo conjugado (segmento en negro).

No obstante, debido a la condición de existencia impuesta por (A.11), el punto p_8 solo es válido si $\theta_1 < 0.0815$. En ese rango, se observa que siempre hay al menos un valor propio positivo, por lo que p_8 se comporta como un punto silla en todo su dominio de existencia.

Equilibrio p_9

El décimo punto de equilibrio se expresa como:

$$p_9 = \left(\frac{\alpha_3(M^-N^- - P)}{\alpha_2\beta_3\tau}, C - \frac{\alpha_3(M^-N^- - P)}{\alpha_2\beta_3\tau} - \sigma_2^- - \frac{\beta_3}{\alpha_3}, \sigma_2^- \right),$$

y existe siempre que se cumpla la condición $(\beta_1 - \theta_1)\alpha_3 > \alpha_1\beta_3$.

Sin embargo, al evaluar esta desigualdad con los valores numéricos considerados, se obtiene:

$$\theta_1 < -0.067,$$

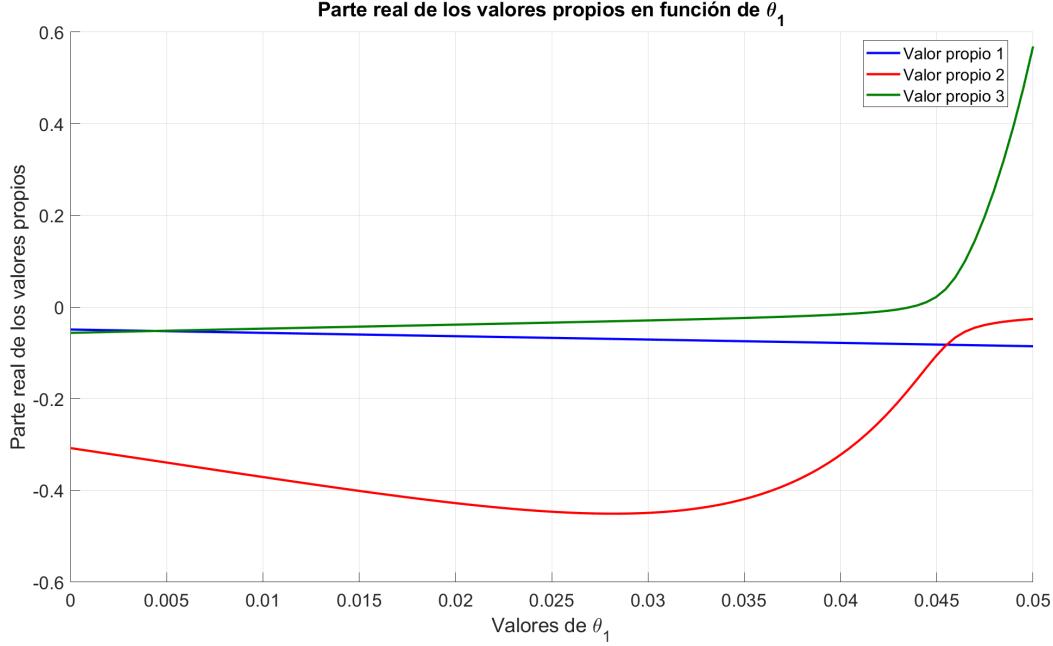


Figura A.3: Valores propios de p_7 en función de θ_1 .

lo cual contradice nuestra hipótesis de trabajo, que requiere $\theta_1 > 0$. Por tanto, concluimos que para esta combinación de parámetros, el punto p_9 no es biológicamente viable y no puede formar parte del análisis.

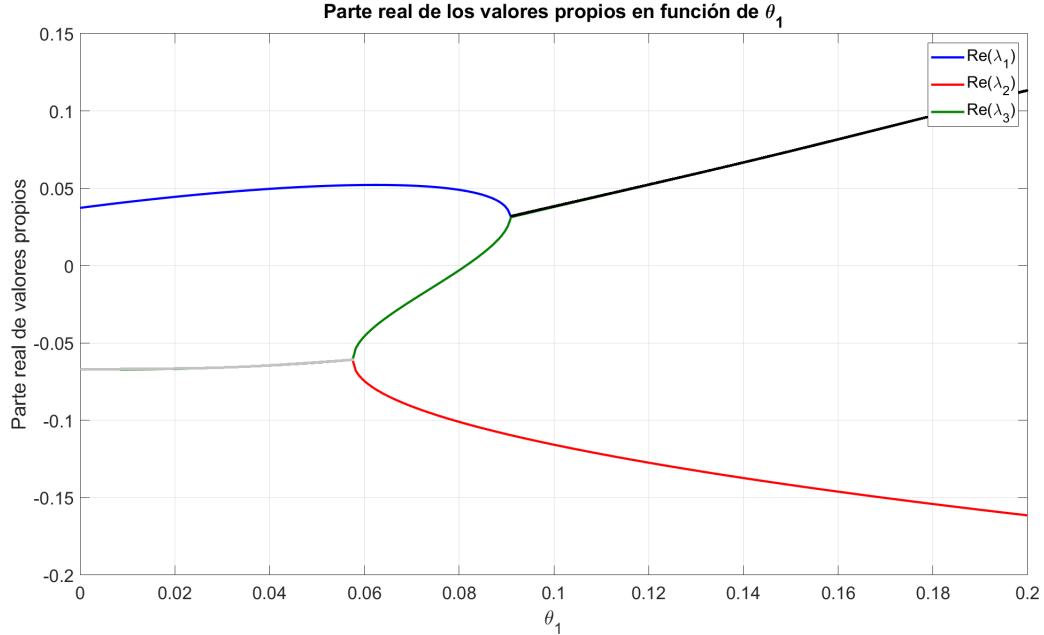


Figura A.4: Valores propios de p_8 en función de θ_1 .

Apéndice B

Estrategia de replantación proporcional de PS: puntos de equilibrio y estabilidad

En este apéndice se desarrolla el análisis algebraico necesario para determinar los puntos de equilibrio del sistema dado por las ecuaciones (6.1)–(6.3), considerando la estrategia de replantación proporcional de la especie nativa *Pittocaulon praecox* (Palo Loco). Este procedimiento sigue una metodología similar a la utilizada en los capítulos anteriores, descomponiendo el análisis en casos según la viabilidad de las variables x_1 , x_2 y x_3 .

B.1. Puntos de equilibrio

Buscamos los puntos $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ tales que las derivadas se anulen. Es decir, buscamos soluciones del sistema:

$$[\alpha_1(C - (x_1 + x_2 + x_3)) - (1 + \gamma_1 x_3)(\beta_1 + \mu_1 x_3)] x_1 = 0, \quad (\text{B.1})$$

$$[\alpha_2(C - (x_1 + x_2 + x_3))(1 + \tau x_1) - (1 + \gamma_2 x_3)(\beta_2 - \theta_2 + \mu_2 x_3)] x_2 = 0, \quad (\text{B.2})$$

$$[\alpha_3(C - (x_1 + x_2 + x_3)) - \beta_3] x_3 = 0. \quad (\text{B.3})$$

Se analizan los siguientes casos:

Caso 1: $x_1 = 0$

Si el Tepozán está ausente, el sistema se reduce a:

$$[\alpha_2(C - (x_2 + x_3)) - (1 + \gamma_2 x_3)(\beta_2 - \theta_2 + \mu_2 x_3)] x_2 = 0, \quad (\text{B.4})$$

$$[\alpha_3(C - (x_2 + x_3)) - \beta_3] x_3 = 0. \quad (\text{B.5})$$

Subcaso 1.1: $x_2 = 0$

- Si $x_3 = 0$, entonces el punto de equilibrio es el origen:

$$p_0 = (0, 0, 0).$$

- Si $x_3 > 0$, la ecuación (B.5) nos da:

$$x_3 = C - \frac{\beta_3}{\alpha_3},$$

siempre que $C > \frac{\beta_3}{\alpha_3}$. El punto resultante es:

$$p_1 = \left(0, 0, C - \frac{\beta_3}{\alpha_3}\right).$$

Subcaso 1.2: $x_2 > 0$

- Si $x_3 = 0$, de (B.4) se obtiene:

$$x_2 = C - \frac{\beta_2 - \theta_2}{\alpha_2},$$

siempre que $C > \frac{\beta_2 - \theta_2}{\alpha_2}$. Por lo tanto:

$$p_2 = \left(0, C - \frac{\beta_2 - \theta_2}{\alpha_2}, 0\right).$$

- Si $x_3 > 0$, entonces de (B.5) se obtiene:

$$x_2 = C - x_3 - \frac{\beta_3}{\alpha_3}.$$

Sustituyendo esta expresión en (B.4), se obtiene una ecuación cuadrática en x_3 , cuyas soluciones son:

$$x_3^\pm = \frac{1}{2\gamma_2\mu_2} \left[-((\beta_2 - \theta_2)\gamma_2 + \mu_2) \pm \sqrt{((\beta_2 - \theta_2)\gamma_2 - \mu_2)^2 + \frac{4\alpha_2\gamma_2\mu_2\beta_3}{\alpha_3}} \right].$$

Estas soluciones son siempre reales. Sin embargo, deben ser positivas para que representen puntos biológicamente viables. En particular: $x_3^+ > 0$ si $\alpha_2\beta_3 > (\beta_2 - \theta_2)\alpha_3$, y $x_3^- > 0$ si $\alpha_2\beta_3 < (\beta_2 - \theta_2)\alpha_3$ y $(\beta_2 - \theta_2)\gamma_2 + \mu_2 < 0$.

Así, obtenemos dos puntos de equilibrios:

- Si $x_3 = \sigma_1^+$:

$$p_3 = \left(0, C - \sigma_1^+ - \frac{\beta_3}{\alpha_3}, \sigma_1^+ \right),$$

válido si

$$C > \sigma_1^+ + \frac{\beta_3}{\alpha_3} \quad \wedge \quad \alpha_2\beta_3 > (\beta_2 - \theta_2)\alpha_3.$$

- Si $x_3 = \sigma_1^-$:

$$p_4 = \left(0, C - \sigma_1^- - \frac{\beta_3}{\alpha_3}, \sigma_1^- \right),$$

válido si

$$C > \sigma_1^- + \frac{\beta_3}{\alpha_3} \quad \wedge \quad \alpha_2\beta_3 < (\beta_2 - \theta_2)\alpha_3 \quad \wedge \quad (\beta_2 - \theta_2)\gamma_2 + \mu_2 < 0.$$

Donde se ha definido:

$$\sigma_1^\pm := \frac{1}{2\gamma_2\mu_2} \left[-((\beta_2 - \theta_2)\gamma_2 + \mu_2) \pm \sqrt{((\beta_2 - \theta_2)\gamma_2 - \mu_2)^2 + \frac{4\alpha_2\gamma_2\mu_2\beta_3}{\alpha_3}} \right]. \quad (\text{B.6})$$

Caso 2: $x_1 > 0$

Ahora, si el Tepozán está presente, resolver (B.1)–(B.3) a su vez equivale a resolver

$$\alpha_1(C - (x_1 + x_2 + x_3)) - (1 + \gamma_1 x_3)(\beta_1 + \mu_1 x_3) = 0, \quad (\text{B.7})$$

$$[\alpha_2(C - (x_1 + x_2 + x_3))(1 + \tau x_1) - (1 + \gamma_2 x_3)(\beta_2 - \theta_2 + \mu_2 x_3)] x_2 = 0, \quad (\text{B.8})$$

$$[\alpha_3(C - (x_1 + x_2 + x_3)) - \beta_3] x_3 = 0. \quad (\text{B.9})$$

Subcaso 2.1: $x_2 = 0$

- Si $x_3 = 0$, entonces la ecuación (B.7) nos da:

$$x_1 = C - \frac{\beta_1}{\alpha_1}, \quad \text{si } C > \frac{\beta_1}{\alpha_1},$$

y el punto de equilibrio es:

$$p_5 = \left(C - \frac{\beta_1}{\alpha_1}, 0, 0 \right).$$

- Si $x_3 > 0$, de (B.9) se obtiene:

$$x_1 = C - x_3 - \frac{\beta_3}{\alpha_3}.$$

Sustituyendo en (B.8), se obtiene una ecuación cuadrática en x_3

$$x_3^\pm = \frac{1}{2\gamma_1\mu_1} \left[-(\beta_1\gamma_1 + \mu_1) \pm \sqrt{(\beta_1\gamma_1 - \mu_1)^2 + \frac{4\alpha_1\gamma_1\mu_1\beta_3}{\alpha_3}} \right].$$

La expresión x_3^\pm siempre tiene soluciones reales. Sin embargo, al analizar los parámetros del sistema, se comprueba que x_3^- adopta valores negativos en todos los casos, por lo que se descarta por no tener interpretación biológica. En cambio, la raíz positiva $x_3 = x_3^+$ será admisible siempre que se cumpla la desigualdad $\beta_1\alpha_3 < \alpha_1\beta_3$. Bajo esta condición, se obtiene un punto de equilibrio ecológicamente válido, cuya forma es:

$$p_6 = \left(C - \sigma_2 - \frac{\beta_3}{\alpha_3}, 0, \sigma_2 \right),$$

donde

$$\sigma_2 = \frac{1}{2\gamma_1\mu_1} \left[-(\beta_1\gamma_1 + \mu_1) + \sqrt{(\beta_1\gamma_1 - \mu_1)^2 + \frac{4\alpha_1\gamma_1\mu_1\beta_3}{\alpha_3}} \right]. \quad (\text{B.10})$$

Subcaso 2.2: $x_2 > 0$

- Si $x_3 = 0$, entonces de (B.7) se obtiene:

$$x_2 = C - x_1 - \frac{\beta_1}{\alpha_1},$$

y reemplazando en (B.8), se deduce:

$$x_1 = \frac{\alpha_1(\beta_2 - \theta_2) - \alpha_2\beta_1}{\alpha_2\beta_1\tau},$$

siempre que $\alpha_1(\beta_2 - \theta_2) > \alpha_2\beta_1$. El punto resultante es:

$$p_7 = \left(\frac{\alpha_1(\beta_2 - \theta_2) - \alpha_2\beta_1}{\alpha_2\beta_1\tau}, C - \frac{\alpha_1(\beta_2 - \theta_2) - \alpha_2\beta_1}{\alpha_2\beta_1\tau} - \frac{\beta_1}{\alpha_1}, 0 \right).$$

- Finalmente, si $x_3 > 0$, de (B.9) se tiene:

$$x_2 = C - x_1 - x_3 - \frac{\beta_3}{\alpha_3}. \quad (\text{B.11})$$

Al reemplazar esta expresión en (B.8) se obtiene una ecuación en x_3 , que tiene solución:

$$x_3^\pm = \frac{1}{2\gamma_1\mu_1} \left[-(\beta_1\gamma_1 + \mu_1) \pm \sqrt{(\beta_1\gamma_1 - \mu_1)^2 + \frac{4\alpha_1\gamma_1\mu_1\beta_3}{\alpha_3}} \right]. \quad (\text{B.12})$$

La expresión x_3^\pm corresponde a dos soluciones reales, pero la raíz x_3^- resulta ser siempre negativa, por lo que se descarta por no ser compatible con el contexto biológico. En cambio, la solución x_3^+ puede ser positiva, y esto ocurre precisamente cuando se cumple la condición $\beta_1\alpha_3 < \alpha_1\beta_3$, la cual asegura su viabilidad ecológica.

Sustituyendo (B.11) y (B.12) en (B.8), se deduce:

$$x_1 = \frac{\alpha_3[(\beta_2 - \theta_2 + \mu_2\sigma_2)(\gamma_2\sigma_2 + 1) - \frac{\alpha_2\beta_3}{\alpha_3}]}{\alpha_2\beta_3\tau}.$$

Definimos:

$$M := \beta_2 - \theta_2 + \mu_2\sigma_2, \quad N := \gamma_2\sigma_2 + 1, \quad P := \frac{\alpha_2\beta_3}{\alpha_3}, \quad (\text{B.13})$$

y así el punto de equilibrio tiene la forma:

$$p_8 = \left(\frac{\alpha_3(MN - P)}{\alpha_2\beta_3\tau}, C - \frac{\alpha_3(MN - P)}{\alpha_2\beta_3\tau} - \sigma_2 - \frac{\beta_3}{\alpha_3}, \sigma_2 \right),$$

siempre que $MN > P$ y

$$C > \frac{\alpha_3(MN - P)}{\alpha_2\beta_3\tau} + \sigma_2 + \frac{\beta_3}{\alpha_3}.$$

B.2. Existencia y estabilidad de los equilibrios

Ahora se analizará la estabilidad de los puntos críticos determinados previamente. Para el sistema (6.1)–(6.3), la matriz Jacobiana correspondiente es:

$$J = \begin{pmatrix} -\rho_1 - \frac{\alpha_1(x_1 - C + x_2 + x_3)}{\gamma_1 x_3 + 1} - \phi_1 & -\phi_1 & \psi_1 - \phi_1 - \mu_1 x_1 \\ -\phi_2 - \frac{\alpha_2 \tau x_2 (x_1 - C + x_2 + x_3)}{\gamma_2 x_3 + 1} & \rho_2 - \frac{\alpha_2(\tau x_1 + 1)(x_1 - C + x_2 + x_3)}{\gamma_2 x_3 + 1} - \phi_2 & \psi_2 - \phi_2 - \mu_2 x_2 \\ -\alpha_3 x_3 & -\alpha_3 x_3 & -\beta_3 - \alpha_3(x_1 - C + x_2 + x_3) - \alpha_3 x_3 \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \beta_1 + \mu_1 x_3 \quad y \quad \rho_2 = \theta_2 - \beta_2 - \mu_2 x_3, \\ \phi_1 &= \frac{\alpha_1 x_1}{\gamma_1 x_3 + 1} \quad y \quad \phi_2 = \frac{\alpha_2 x_2 (\tau x_1 + 1)}{\gamma_2 x_3 + 1}, \\ \psi_1 &= \frac{\alpha_1 \gamma_1 x_1 (x_1 - C + x_2 + x_3)}{(\gamma_1 x_3 + 1)^2} \quad y \quad \psi_2 = \frac{\alpha_2 \gamma_2 x_2 (\tau x_1 + 1) (x_1 - C + x_2 + x_3)}{(\gamma_2 x_3 + 1)^2}. \end{aligned}$$

Para determinar cuáles de los puntos de equilibrio son ecológicamente viables y analizar su estabilidad local en función del parámetro θ_2 , se utilizarán los mismos valores de parámetros especificados en el Cuadro 3.2. Dichos valores permanecerán constantes a lo largo de todo el análisis.

Equilibrio p_0

Para el primer punto de equilibrio tenemos

$$J(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} \frac{131253}{1000000} & 0 & 0 \\ 0 & \theta_2 - \frac{12841}{100000} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{469}{10000} \end{pmatrix}$$

con lo que la matriz Jacobiana tiene valores propios

- $\lambda_1 = \frac{131253}{1000000} \approx 0.131$,
- $\lambda_2 = \theta_2 - \frac{12841}{100000} \approx \theta_2 - 0.12841$,
- $\lambda_3 = \frac{469}{10000} \approx 0.0469$.

El comportamiento del punto de equilibrio p_0 dependerá del signo de λ_2 :

- Si $0 < \theta_2 < 0.1284$, tenemos que λ_2 es negativo. Así, tenemos dos valores propios positivos y uno negativo, por lo tanto p_0 es un punto silla.
- Si $\theta_2 > 0.1284$, tenemos que λ_2 es positivo. Por lo tanto, tendremos que p_0 es repulsor, dado que los tres valores propios son positivos.

Equilibrio p_1

Para el segundo punto de equilibrio tenemos

$$J\left(0, 0, \frac{469}{10}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{654791}{1469000} & 0 & 0 \\ 0 & \theta_2 - \frac{1004971}{1469000} & 0 \\ -\frac{469}{10000} & -\frac{469}{10000} & -\frac{469}{10000} \end{pmatrix},$$

donde los valores propios son

$$\lambda_1 = -\frac{654781}{1469000}, \quad \lambda_2 = \theta_2 - \frac{1004971}{1469000}, \quad y \quad \lambda_3 = -\frac{469}{10000}.$$

El comportamiento del punto de equilibrio p_1 dependerá del signo de λ_2 :

- Si $\theta_2 > 0.6841$, tenemos λ_2 es positivo. Así, tenemos dos valores propios negativos, y uno positivo, por lo tanto, p_1 es un punto silla.
- Si $0 < \theta_2 < 0.6841$, tenemos que λ_2 es negativo. Por lo tanto, tendremos que p_1 es atractor, dado que los tres valores propios son negativos.

Equilibrio p_2

Al igual que como se hizo en los capítulos anteriores, se analiza la estabilidad del punto p_2 mediante la evaluación numérica de los valores propios de la matriz Jacobiana en función del parámetro θ_2 . En la Figura B.1 se muestra esta dependencia, lo que permite identificar los intervalos donde el punto cambia de estabilidad.

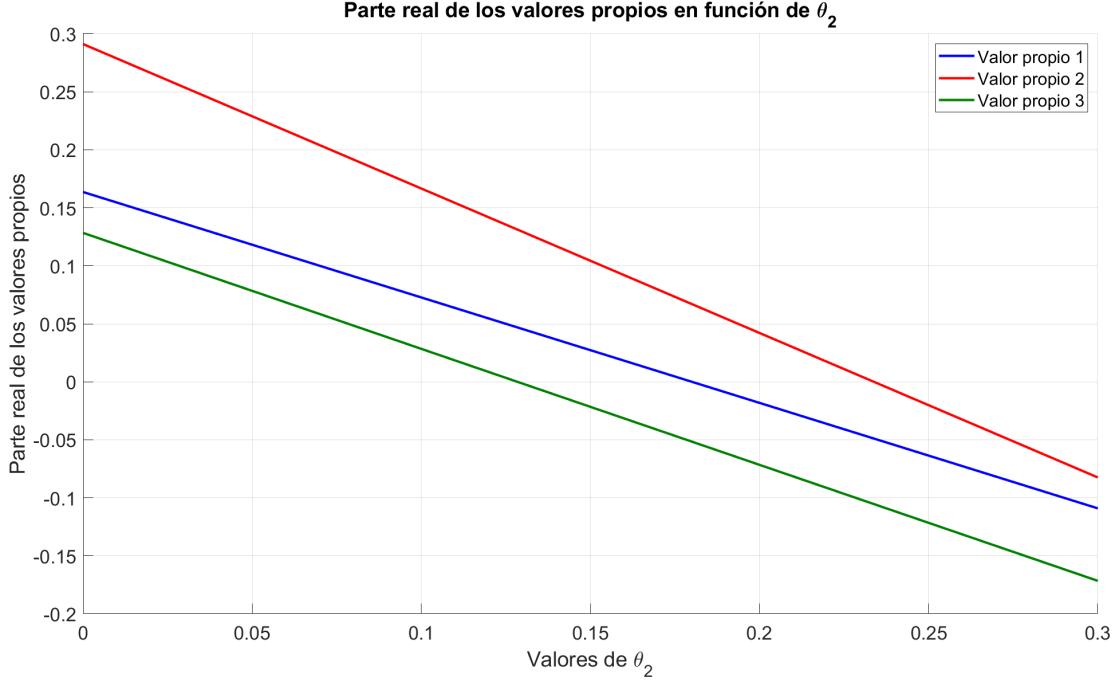


Figura B.1: Valores propios de p_2 en función de θ_2 .

Dado que el modelo requiere que $x_2 > 0$, esta condición impone la restricción $\theta_2 > 0.1284$. Bajo esta restricción, el comportamiento de p_2 se resume de la siguiente manera:

- Si $\theta_2 < 0.1284$, el punto p_2 es biológicamente inviable.
- Si $0.1284 < \theta_2 < 0.2338$, el punto p_2 es un punto silla.
- Si $\theta_2 > 0.2338$, el punto p_2 es un atractor.

Equilibrio p_3

El análisis de estabilidad del punto p_3 se realiza numéricamente debido a la complejidad de sus valores propios. En la Figura B.2 se muestra su evolución en función del parámetro θ_2 .

Inicialmente, λ_1 y λ_2 son complejos conjugados (segmento en negro), pero dejan de serlo en $\theta_2 \approx 0.1638$. Posteriormente, en $\theta_2 \approx 0.6976$, vuelven a adquirir parte imaginaria (nuevamente señalado en negro). Además, λ_2 cambia de signo en dos ocasiones: pasa de negativo a positivo en $\theta_2 \approx 0.18$ y luego de positivo a negativo en $\theta_2 \approx 0.6841$. Por su parte, λ_3 cambia de signo en $\theta_2 \approx 0.2454$.

Dado que se requiere que $x_2 > 0$ y $x_3 > 0$, se impone la condición

$$\theta_2 > 0.18 \quad \wedge \quad \theta_2 < 0.6841.$$

Por lo tanto, en dicho intervalo el punto p_3 se comporta como un punto silla.

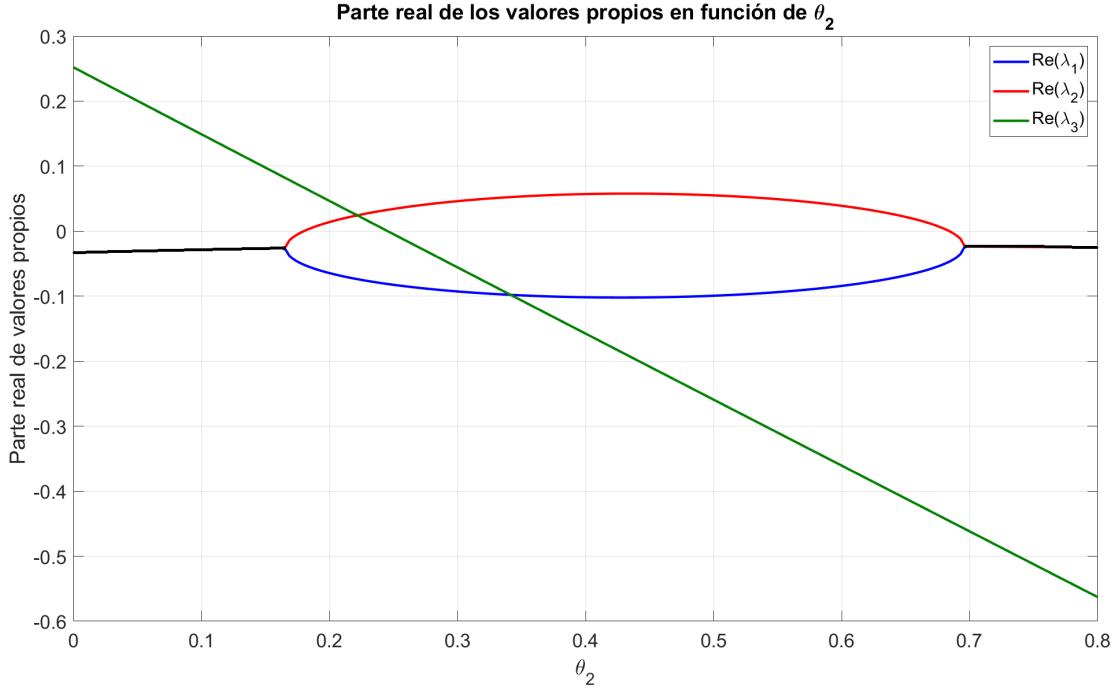


Figura B.2: Valores propios de p_3 en función de θ_2 .

Equilibrio p_4

El quinto punto de equilibrio tiene la forma

$$p_4 = \left(0, C - \sigma_1^- - \frac{\beta_3}{\alpha_3}, \sigma_1^- \right),$$

siempre que se cumplan las condiciones $(\beta_2 - \theta_2)\alpha_3 > \alpha_2\beta_3$ y $(\beta_2 - \theta_2)\gamma_2 + \mu_2 < 0$. Al sustituir los valores numéricos correspondientes, estas desigualdades se traducen en:

$$\theta_2 < 0.18 \quad \wedge \quad \theta_2 > 1.29.$$

Sin embargo, estas restricciones son incompatibles entre sí, por lo que concluimos que, con esta combinación específica de parámetros, no existe un punto de equilibrio de la forma p_4 .

Equilibrio p_5

El sexto punto de equilibrio se expresa como

$$p_5 = \left(C - \frac{\beta_1}{\alpha_1}, 0, 0 \right).$$

La matriz Jacobiana evaluada en este punto es

$$J(95.8051, 0, 0) = \begin{pmatrix} -0.1312 & -0.1312 & -1.1563 \\ 0 & \theta_2 + 0.3019 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0489 \end{pmatrix},$$

cuyos valores propios son:

- $\lambda_1 = -0.1312$,
- $\lambda_2 = \theta_2 + 0.3019$,
- $\lambda_3 = -0.0489$.

Dado que $\theta_2 > 0$, se tiene que $\lambda_2 > 0$, por lo que el punto p_5 se comporta siempre como un punto silla.

Equilibrio p_6

El séptimo punto de equilibrio se analiza a partir de la matriz Jacobiana evaluada en $(40.9673, 0, 5.9327)$, la cual está dada por:

$$J(40.9673, 0, 5.9327) = \begin{pmatrix} -0.0529 & -0.0529 & -0.5126 \\ 0 & \theta_2 + 0.1777 & 0 \\ -0.0059 & -0.0059 & -0.0059 \end{pmatrix},$$

cuyos valores propios son:

$$\lambda_1 = -0.0894, \quad \lambda_2 = \theta_2 + 0.1777, \quad \lambda_3 = 0.0305.$$

Como $\theta_2 > 0$, se concluye que el sistema tiene un valor propio negativo y dos positivos. Por lo tanto, el punto p_6 corresponde a un punto silla.

Equilibrio p_7

La estabilidad del punto p_7 se estudia numéricamente debido a la complejidad algebraica de la matriz Jacobiana. En la Figura B.3 se muestra la evolución de los valores propios en función del parámetro θ_2 .

Se observa que λ_1 y λ_2 son negativos para todo θ_2 , mientras que λ_3 cambia de signo en $\theta_2 \approx 0.2338$. Dado que la viabilidad biológica requiere $x_1 > 0$, se restringe el análisis a $\theta_2 < 0.2338$. En dicho intervalo, p_7 es un atractor.

Equilibrio p_8

Dado que el cálculo explícito de los valores propios de la matriz Jacobiana en p_8 es intratable analíticamente, se recurre a un análisis numérico. La Figura B.4 muestra su evolución en función de θ_2 .

Los valores propios exhiben distintos comportamientos: λ_2 y λ_3 son complejos conjugados hasta $\theta_2 \approx 0.2107$ (segmento en negro), mientras que a partir de $\theta_2 \approx 0.2628$, λ_1 y λ_3 comienzan a formar un par complejo conjugado (segmento en gris). Además, λ_3 cambia de signo en $\theta_2 = 0.2454$, y λ_2 permanece negativo en todo el rango.

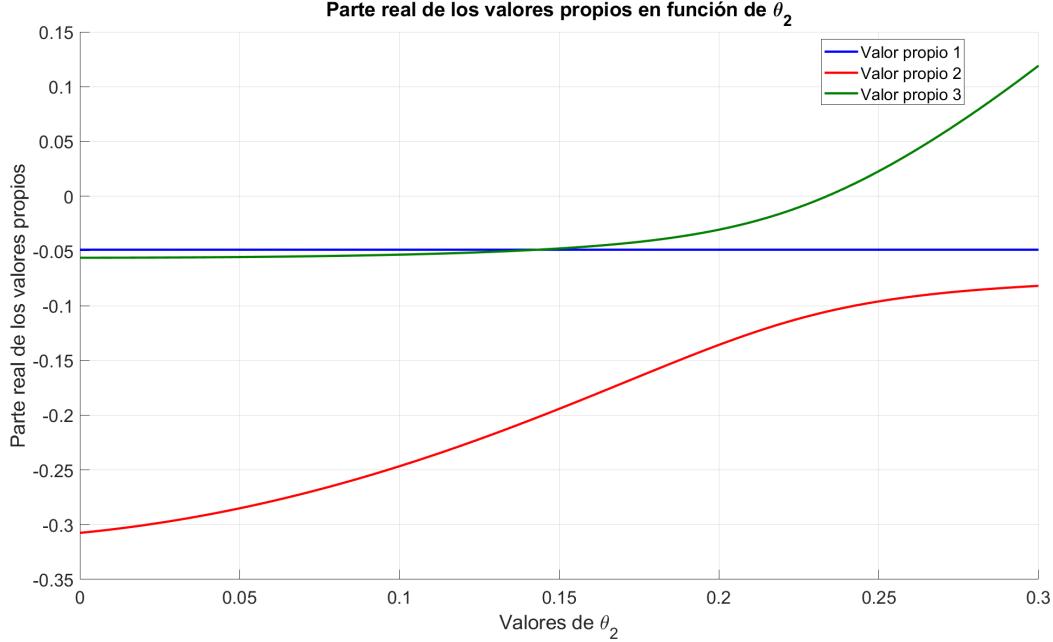


Figura B.3: Valores propios de p_7 en función de θ_2 .

La viabilidad del equilibrio exige que $\theta_2 < 0.2454$, ya que valores mayores harían que la primera coordenada sea no positiva. No obstante, incluso dentro del rango permitido, el sistema nunca alcanza estabilidad total: siempre existe al menos una dirección inestable, por lo que p_8 actúa como un punto silla.

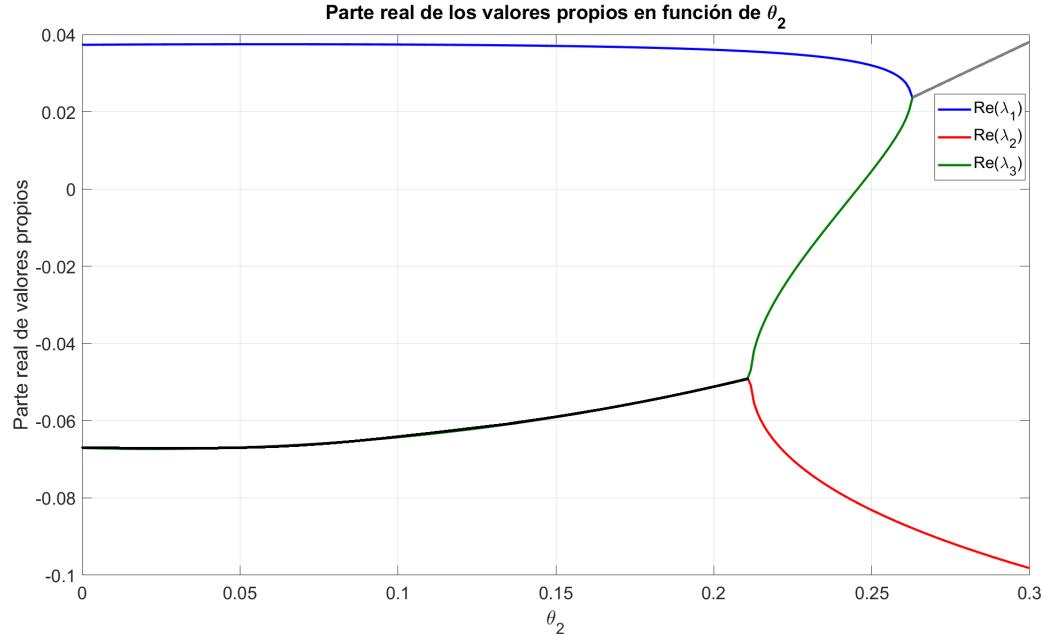


Figura B.4: Valores propios de p_8 en función de θ_2 .

Apéndice C

Estrategia de replantación proporcional simultánea de las especies nativas: puntos de equilibrio y estabilidad

Este apéndice presenta el desarrollo algebraico requerido para obtener los puntos de equilibrio del sistema descrito por las ecuaciones (7.1)–(7.3), en el contexto de la estrategia de replantación proporcional aplicada a ambas especies nativas. El enfoque adoptado retoma el esquema empleado en capítulos previos, donde se analiza por separado cada caso posible según la factibilidad de las variables x_1 , x_2 y x_3 , es decir, atendiendo a los escenarios en que una, dos o las tres especies pueden mantener poblaciones positivas en equilibrio.

C.1. Puntos de equilibrio

Se pretende determinar los puntos $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ en los que las derivadas temporales se anulan simultáneamente. En otras palabras, se busca resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$[\alpha_1(C - (x_1 + x_2 + x_3)) - (1 + \gamma_1 x_3)(\beta_1 - \theta_1 + \mu_1 x_3)] x_1 = 0, \quad (\text{C.1})$$

$$[\alpha_2(C - (x_1 + x_2 + x_3))(1 + \tau x_1) - (1 + \gamma_2 x_3)(\beta_2 - \theta_2 + \mu_2 x_3)] x_2 = 0, \quad (\text{C.2})$$

$$[\alpha_3(C - (x_1 + x_2 + x_3)) - \beta_3] x_3 = 0. \quad (\text{C.3})$$

El análisis de los puntos de equilibrio se realizará dividiendo en distintos casos, según las combinaciones posibles de nulidad de las variables:

Caso 1: $x_1 = 0$

Si el Tepozán está ausente, el sistema se reduce a:

$$[\alpha_2(C - (x_2 + x_3)) - (1 + \gamma_2 x_3)(\beta_2 - \theta_2 + \mu_2 x_3)] x_2 = 0 \quad (\text{C.4})$$

$$[\alpha_3(C - (x_2 + x_3)) - \beta_3] x_3 = 0 \quad (\text{C.5})$$

Subcaso 1.1: $x_2 = 0$

- Si $x_3 = 0$, entonces el punto de equilibrio es el origen:

$$p_0 = (0, 0, 0).$$

- Si $x_3 > 0$, la ecuación (C.5) nos da:

$$x_3 = C - \frac{\beta_3}{\alpha_3},$$

siempre que $C > \frac{\beta_3}{\alpha_3}$. El punto resultante es:

$$p_1 = \left(0, 0, C - \frac{\beta_3}{\alpha_3}\right).$$

Subcaso 1.2: $x_2 > 0$

- Si $x_3 = 0$, de (C.4) se obtiene:

$$x_2 = C - \frac{\beta_2 - \theta_2}{\alpha_2},$$

siempre que $C > \frac{\beta_2 - \theta_2}{\alpha_2}$. Por lo tanto:

$$p_2 = \left(0, C - \frac{\beta_2 - \theta_2}{\alpha_2}, 0\right).$$

- Si $x_3 > 0$, entonces de (C.5) se obtiene:

$$x_2 = C - x_3 - \frac{\beta_3}{\alpha_3}.$$

Sustituyendo esta expresión en (C.4), se obtiene una ecuación cuadrática en x_3 , cuyas soluciones son:

$$x_3^\pm = \frac{1}{2\gamma_2\mu_2} \left[-((\beta_2 - \theta_2)\gamma_2 + \mu_2) \pm \sqrt{((\beta_2 - \theta_2)\gamma_2 - \mu_2)^2 + \frac{4\alpha_2\gamma_2\mu_2\beta_3}{\alpha_3}} \right].$$

Estas soluciones son siempre reales. Sin embargo, deben ser positivas para que representen puntos biológicamente viables. En particular: $x_3^+ > 0$ si $\alpha_2\beta_3 > (\beta_2 - \theta_2)\alpha_3$, y $x_3^- > 0$ si $\alpha_2\beta_3 < (\beta_2 - \theta_2)\alpha_3$ y $(\beta_2 - \theta_2)\gamma_2 + \mu_2 < 0$.

Así, obtenemos dos puntos de equilibrios:

- Si $x_3 = \sigma_1^+$:

$$p_3 = \left(0, C - \sigma_1^+ - \frac{\beta_3}{\alpha_3}, \sigma_1^+ \right),$$

válido si

$$C > \sigma_1^+ + \frac{\beta_3}{\alpha_3} \quad \wedge \quad \alpha_2 \beta_3 > (\beta_2 - \theta_2) \alpha_3.$$

- Si $x_3 = \sigma_1^-$:

$$p_4 = \left(0, C - \sigma_1^- - \frac{\beta_3}{\alpha_3}, \sigma_1^- \right),$$

válido si

$$C > \sigma_1^- + \frac{\beta_3}{\alpha_3} \quad \wedge \quad \alpha_2 \beta_3 < (\beta_2 - \theta_2) \alpha_3 \quad \wedge \quad (\beta_2 - \theta_2) \gamma_2 + \mu_2 < 0.$$

Donde se ha definido:

$$\sigma_1^\pm := \frac{1}{2\gamma_2\mu_2} \left[-((\beta_2 - \theta_2)\gamma_2 + \mu_2) \pm \sqrt{((\beta_2 - \theta_2)\gamma_2 - \mu_2)^2 + \frac{4\alpha_2\gamma_2\mu_2\beta_3}{\alpha_3}} \right]. \quad (\text{C.6})$$

Caso 2: $x_1 > 0$

Ahora, si el Tepozán está presente, resolver (C.1)–(C.3) a su vez equivale a resolver

$$\alpha_1(C - (x_1 + x_2 + x_3)) - (1 + \gamma_1 x_3)(\beta_1 - \theta_1 + \mu_1 x_3) = 0, \quad (\text{C.7})$$

$$[\alpha_2(C - (x_1 + x_2 + x_3))(1 + \tau x_1) - (1 + \gamma_2 x_3)(\beta_2 - \theta_2 + \mu_2 x_3)] x_2 = 0, \quad (\text{C.8})$$

$$[\alpha_3(C - (x_1 + x_2 + x_3)) - \beta_3] x_3 = 0. \quad (\text{C.9})$$

Subcaso 2.1: $x_2 = 0$

- Si $x_3 = 0$, entonces la ecuación (C.7) nos da:

$$x_1 = C - \frac{\beta_1 - \theta_1}{\alpha_1}, \quad \text{si } C > \frac{\beta_1 - \theta_1}{\alpha_1}$$

y el punto de equilibrio es:

$$p_5 = \left(C - \frac{\beta_1 - \theta_1}{\alpha_1}, 0, 0 \right).$$

- Si $x_3 > 0$, de (C.9) se obtiene:

$$x_1 = C - x_3 - \frac{\beta_3}{\alpha_3}.$$

Sustituyendo en (C.8), se obtiene una ecuación cuadrática en x_3

$$x_3^\pm = \frac{1}{2\gamma_1\mu_1} \left[-[(\beta_1 - \theta_1)\gamma_1 + \mu_1] \pm \sqrt{[(\beta_1 - \theta_1)\gamma_1 - \mu_1]^2 + \frac{4\gamma_1\mu_1\alpha_1\beta_3}{\alpha_3}} \right]$$

Estas soluciones son siempre reales. Sin embargo, deben de ser positivas para que representen puntos biológicamente viables. En particular: $x_3^+ > 0$ si $\alpha_1\beta_3 > (\beta_1 - \theta_1)\alpha_3$, y $x_3^- > 0$ si $\alpha_1\beta_3 < (\beta_1 - \theta_1)\alpha_3$ y $(\beta_1 - \theta_1)\gamma_1 + \mu_1 < 0$.

Así, obtenemos dos puntos de equilibrios:

- Si $x_3 = \sigma_2^+$:

$$p_6 = \left(C - \sigma_2^+ - \frac{\beta_3}{\alpha_3}, 0, \sigma_2^+ \right),$$

válido si

$$C > \sigma_2^+ + \frac{\beta_3}{\alpha_3} \quad \wedge \quad \alpha_1\beta_3 > (\beta_1 - \theta_1)\alpha_3.$$

- Si $x_3 = \sigma_2^-$:

$$p_7 = \left(C - \sigma_2^- - \frac{\beta_3}{\alpha_3}, 0, \sigma_2^- \right),$$

válido si

$$C > \sigma_2^- + \frac{\beta_3}{\alpha_3} \quad \wedge \quad \alpha_1\beta_3 < (\beta_1 - \theta_1)\alpha_3 \quad \wedge \quad (\beta_1 - \theta_1)\gamma_1 + \mu_1 < 0.$$

Donde se ha definido:

$$\sigma_2^\pm = \frac{1}{2\gamma_1\mu_1} \left[-[(\beta_1 - \theta_1)\gamma_1 + \mu_1] \pm \sqrt{[(\beta_1 - \theta_1)\gamma_1 - \mu_1]^2 + \frac{4\gamma_1\mu_1\alpha_1\beta_3}{\alpha_3}} \right]. \quad (\text{C.10})$$

Subcaso 2.2: $x_2 > 0$

- Si $x_3 = 0$, entonces de (C.7) se obtiene:

$$x_2 = C - x_1 - \frac{\beta_1 - \theta_1}{\alpha_1},$$

y reemplazando en (C.8), se deduce:

$$x_1 = \frac{(\beta_2 - \theta_2)\alpha_1 - \alpha_2(\beta_1 - \theta_1)}{\alpha_2(\beta_1 - \theta_1)\tau}.$$

Como $x_1 > 0$, entonces observamos que $(\beta_2 - \theta_2)\alpha_1 > \alpha_2(\beta_1 - \theta_1)$ y $\beta_1 > \theta_1$, o bien, $(\beta_2 - \theta_2)\alpha_1 < \alpha_2(\beta_1 - \theta_1)$ y $\beta_1 < \theta_1$. Así, el punto resultante es:

$$p_8 = \left(\frac{(\beta_2 - \theta_2)\alpha_1 - \alpha_2(\beta_1 - \theta_1)}{\alpha_2(\beta_1 - \theta_1)\tau}, C - \frac{(\beta_2 - \theta_2)\alpha_1 - \alpha_2(\beta_1 - \theta_1)}{\alpha_2(\beta_1 - \theta_1)\tau} - \frac{\beta_1 - \theta_1}{\alpha_1}, 0 \right).$$

- Finalmente, si $x_3 > 0$, de (C.9) se tiene:

$$x_2 = C - x_1 - x_3 - \frac{\beta_3}{\alpha_3}. \quad (\text{C.11})$$

Al reemplazar esta expresión en (C.8) se obtiene una ecuación en x_3 , que tiene solución:

$$x_3^\pm = \frac{1}{2\gamma_1\mu_1} \left[-[(\beta_1 - \theta_1)\gamma_1 + \mu_1] \pm \sqrt{[(\beta_1 - \theta_1)\gamma_1 - \mu_1]^2 + \frac{4\gamma_1\mu_1\alpha_1\beta_3}{\alpha_3}} \right]. \quad (\text{C.12})$$

Notemos que la solución x_3^\pm siempre es real. Recordemos que todos los parámetros son positivos, por lo tanto, luego de realizar algunos cálculos algebraicos obtenemos que $x_3^+ > 0$ si $\alpha_1\beta_3 > (\beta_1 - \theta_1)\alpha_3$, mientras que $x_3^- > 0$ si $\alpha_1\beta_3 < (\beta_1 - \theta_1)\alpha_3$ y además si $(\beta_1 - \theta_1)\gamma_1 + \mu_1 < 0$.

Sustituyendo (C.11) y (C.12) en (C.8), se deduce:

$$x_1^\pm = \frac{\alpha_3 [(\beta_2 - \theta_2 + \mu_2\sigma_2^\pm)(\gamma_2\sigma_2^\pm + 1) - \frac{\alpha_2\beta_3}{\alpha_3}]}{\alpha_2\beta_3\tau}.$$

Ahora bien, definiendo

$$M^\pm := \beta_2 - \theta_2 + \mu_2\sigma_2^\pm, \quad N^\pm := \gamma_2\sigma_2^\pm + 1, \quad P := \alpha_2 \frac{\beta_3}{\alpha_3}, \quad (\text{C.13})$$

podemos reescribir la coordenada x_1^\pm como

$$x_1^\pm = \frac{\alpha_3(M^\pm N^\pm - P)}{\alpha_2\beta_3\tau}.$$

Así obtenemos dos puntos de equilibrios:

- Si $x_1 = x_1^+$:

$$p_9 = \left(\frac{\alpha_3(M^+N^+ - P)}{\alpha_2\beta_3\tau}, C - \frac{\alpha_3(M^+N^+ - P)}{\alpha_2\beta_3\tau} - \sigma_2^+ - \frac{\beta_3}{\alpha_3}, \sigma_2^+ \right),$$

valido si

$$C > \frac{\alpha_3(M^+N^+ - P)}{\alpha_2\beta_3\tau} + \sigma_2^+ + \frac{\beta_3}{\alpha_3} \quad \wedge \quad M^+N^+ > P.$$

- Si $x_1 = x_1^-$:

$$p_{10} = \left(\frac{\alpha_3(M^-N^- - P)}{\alpha_2\beta_3\tau}, C - \frac{\alpha_3(M^-N^- - P)}{\alpha_2\beta_3\tau} - \sigma_2^- - \frac{\beta_3}{\alpha_3}, \sigma_2^- \right),$$

valido si

$$C > \frac{\alpha_3(M^-N^- - P)}{\alpha_2\beta_3\tau} + \sigma_2^- + \frac{\beta_3}{\alpha_3} \quad \wedge \quad M^-N^- > P.$$

C.2. Existencia y estabilidad de los equilibrios

Ahora procederemos a examinar la estabilidad de los puntos críticos obtenidos. Para el sistema dado por las ecuaciones (C.1)–(C.3), la matriz Jacobiana asociada es:

$$J = \begin{pmatrix} \rho_1 - \frac{\alpha_1(x_1+x_2+x_3-C)}{\gamma_1x_3+1} - \phi_1 & -\phi_1 & \psi_1 - \phi_1 - \mu_1x_1 \\ -\phi_2 - \frac{\alpha_2(\tau x_2(x_1+x_2+x_3-C))}{\gamma_2x_3+1} & \rho_2 - \frac{\alpha_2(\tau x_1+1)(x_1+x_2+x_3-C)}{\gamma_2x_3+1} - \phi_2 & \psi_2 - \phi_2 - \mu_2x_2 \\ -\alpha_3x_3 & -\alpha_3x_3 & -\beta_3 - \alpha_3(x_1 + x_2 + x_3 - C) - \alpha_3x_3 \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \theta_1 - \beta_1 - \mu_1x_3 \quad y \quad \rho_2 = \theta_2 - \beta_2 - \mu_2x_3, \\ \phi_1 &= \frac{\alpha_1x_1}{\gamma_1x_3+1} \quad y \quad \phi_2 = \frac{\alpha_2x_2(\tau x_1+1)}{\gamma_2x_3+1}, \\ \psi_1 &= \frac{\phi_1\gamma_1(x_1+x_2+x_3-C)}{\gamma_1x_3+1} \quad y \quad \psi_2 = \frac{\phi_2\gamma_2(x_1+x_2+x_3-C)}{\gamma_2x_3+1}. \end{aligned}$$

Con el objetivo de identificar los puntos de equilibrio ecológicamente viables y estudiar su estabilidad local en función de los parámetros θ_1 y θ_2 , se emplearán los valores de parámetros presentados en el Cuadro 3.2, los cuales se mantendrán fijos durante todo el análisis.

Equilibrio p_0

Para el primer punto de equilibrio tenemos

$$J(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} \theta_1 + \frac{131253}{1000000} & 0 & 0 \\ 0 & \theta_2 - \frac{12841}{100000} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{469}{10000} \end{pmatrix},$$

con lo que la matriz Jacobiana tiene valores propios

- $\lambda_1 = \theta_1 + \frac{131253}{1000000} \approx \theta_1 + 0.131$,
- $\lambda_2 = \theta_2 - \frac{12841}{100000} \approx \theta_2 - 0.12841$,
- $\lambda_3 = \frac{469}{10000} \approx 0.0469$.

Como se asume que $\theta_1 > 0$, se tiene que λ_1 es siempre positivo. Por lo tanto, la estabilidad del punto de equilibrio p_0 estará determinada por el signo de λ_2 :

- Para $0 < \theta_2 < 0.1284$, el valor de λ_2 resulta negativo. En este caso, el punto p_0 presenta dos valores propios positivos y uno negativo, lo que implica que se trata de un punto silla.
- En cambio, si $\theta_2 > 0.1284$, se obtiene $\lambda_2 > 0$. Esto significa que los tres valores propios son positivos, y por lo tanto, el punto p_0 se comporta como un repulsor.

Equilibrio p_1

Para el segundo punto de equilibrio tenemos

$$J\left(0, 0, \frac{469}{10}\right) = \begin{pmatrix} \theta_1 - \frac{654791}{1469000} & 0 & 0 \\ 0 & \theta_2 - \frac{1004971}{1469000} & 0 \\ -\frac{469}{10000} & -\frac{469}{10000} & -\frac{469}{10000} \end{pmatrix},$$

donde los valores propios son

$$\lambda_1 = \theta_1 - \frac{654781}{1469000}, \quad \lambda_2 = \theta_2 - \frac{1004971}{1469000}, \quad y \quad \lambda_3 = -\frac{469}{10000}.$$

El comportamiento del punto de equilibrio p_1 estará determinado por los signos de λ_1 y λ_2 :

- Como λ_3 es siempre negativo, si se cumple que $0 < \theta_1 < 0.4457$ y $0 < \theta_2 < 0.6841$, entonces tanto λ_1 como λ_2 son negativos. En este caso, el punto p_1 actúa como un atractor.
- Por el contrario, si $\theta_1 > 0.4457$ o $\theta_2 > 0.6841$, al menos uno de los dos valores propios será positivo, lo que implica que el punto p_1 se comporta como un punto silla.

Equilibrio p_2

Para el tercer punto de equilibrio tenemos

$$J(0, x_2, 0) = \begin{pmatrix} \theta_1 - 1.2454\theta_2 + 0.2914 & 0 & 0 \\ 0.1284 - 0.0001AB - \theta_2 & 0.1284 - \theta_2 & 0.00001AB - 10.0909\theta_2 + 1.2957 \\ 0 & 0 & 0.1636 - 0.9090\theta_2 \end{pmatrix},$$

donde

$$A = 909.0909\theta_2 - 116.7363 \quad \wedge \quad B = 909.0909\theta_2 - 263.6363.$$

Aquí, los valores propios vienen dados por

- $\lambda_1 = 0.1636 - 0.9090\theta_2$,
- $\lambda_2 = 0.1284 - \theta_2$,
- $\lambda_3 = \theta_1 - 1.2454\theta_2 + 0.2911$.

Antes de analizar los valores propios, recordemos que para que el punto crítico p_2 sea ecológicamente viable, sus tres coordenadas deben ser positivas. Esto impone la condición $\theta_2 > 0.1284$, por lo que restringiremos el análisis a esa región del plano (θ_1, θ_2) .

El comportamiento de p_2 dependerá del signo de los valores propios λ_1, λ_2 y λ_3 . Para identificar los cambios en su estabilidad, igualamos cada uno a cero y derivamos condiciones sobre los parámetros:

- Para todo $\theta_1 > 0$, si $\theta_2 < 0.1284$, los tres valores propios son positivos. Sin embargo, esta región no se considera pues p_2 no está en el primer cuadrante.
- Si $0.1284 < \theta_2 < 0.18$, se tiene que λ_1 y λ_3 son positivos, mientras que λ_2 es negativo. En este caso, p_2 es un punto silla.
- Si $0.18 < \theta_2 < \frac{\theta_1 + 0.2911}{1.2454}$, los valores propios λ_1 y λ_2 son negativos, pero λ_3 es positivo, por lo que también corresponde a un punto silla.
- Finalmente, si $\theta_2 > \frac{\theta_1 + 0.2911}{1.2454}$, los tres valores propios son negativos y p_2 es un atractor local.

La Figura C.1 ilustra estas regiones: en verde se muestra la zona donde p_2 es estable, y en naranja aquella donde se comporta como punto silla. Cabe destacar que dentro del primer cuadrante no existen combinaciones de (θ_1, θ_2) que generen inestabilidad total para p_2 .

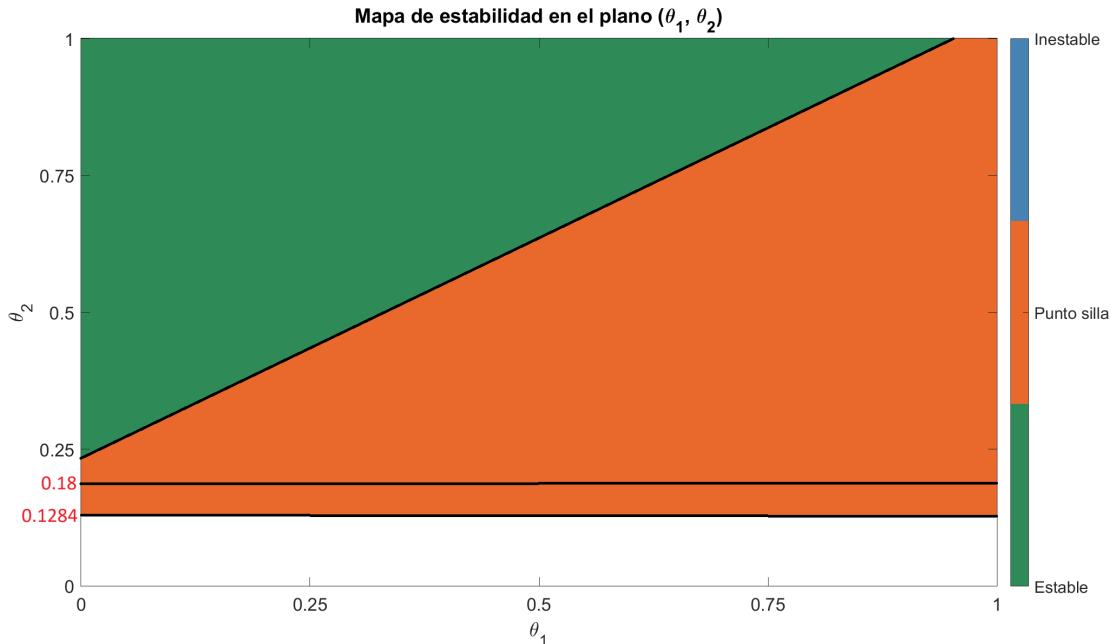


Figura C.1: Mapa de estabilidad para p_2 en el plano (θ_1, θ_2) .

Equilibrio p_3

Siguiendo el enfoque utilizado en los capítulos anteriores, se analiza la estabilidad del punto p_3 mediante la evaluación numérica de los valores propios de la matriz Jacobiana en función de los parámetros θ_1 y θ_2 . En la Figura C.2 se muestra cómo varía esta estabilidad

según la región del plano paramétrico, permitiendo identificar los intervalos donde el punto cambia de naturaleza.

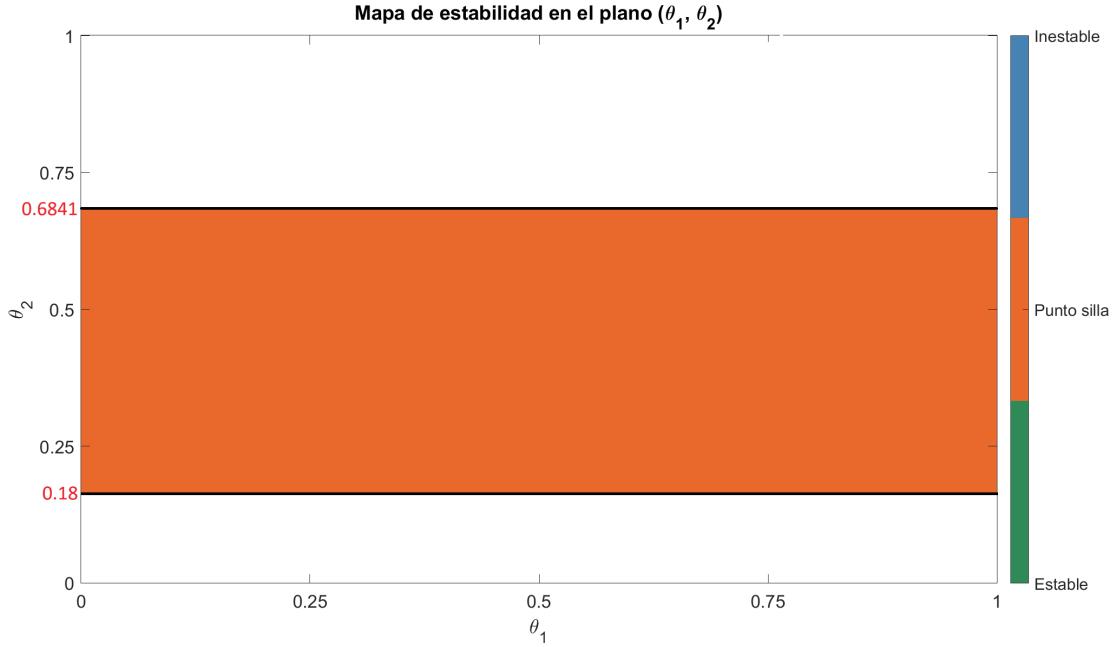


Figura C.2: Mapa de estabilidad para p_3 en el plano (θ_1, θ_2) .

Dado que el modelo requiere que $x_2 > 0$ y $x_3 > 0$, las condiciones de viabilidad imponen las restricciones $\theta_2 > 0.18$ y $\theta_2 < 0.6841$, respectivamente.

Como se aprecia en la Figura C.2, en toda la región definida por $\theta_1 > 0$ y $0.18 < \theta_2 < 0.6841$, el punto p_3 actúa como un punto silla (zona naranja). Fuera de ese intervalo, p_3 no se encuentra en el primer cuadrante y, por tanto, no se considera ecológicamente relevante.

Equilibrio p_4

El quinto punto de equilibrio tiene la forma

$$p_4 = \left(0, C - \sigma_1^- - \frac{\beta_3}{\alpha_3}, \sigma_1^- \right),$$

bajo las condiciones $(\beta_2 - \theta_2)\alpha_3 > \alpha_2\beta_3$ y $(\beta_2 - \theta_2)\gamma_2 + \mu_2 < 0$. Al sustituir los valores numéricos en estas expresiones, se obtienen las siguientes restricciones:

$$\theta_2 < 0.18 \quad \text{y} \quad \theta_2 > 1.29.$$

Dado que estas desigualdades son incompatibles, no existe un valor de θ_2 que satisfaga ambas simultáneamente. Por lo tanto, concluimos que, bajo esta elección de parámetros, no es posible que exista un punto de equilibrio con la estructura de p_4 .

Equilibrio p_5

Para el sexto punto de equilibrio tenemos

$$J\left(146.9 - \frac{0.07 - \theta_1}{0.00137}, 0, 0\right) =$$

$$\begin{pmatrix} -\theta_1 - 0.1312 & -\theta_1 - 0.1312 & B - 8.2992\theta_1 - 10.5326 \\ 0 & \theta_2 - 0.0011A(72.6277\theta_1 + 1.0403) - 0.29 & 0 \\ 0 & 0 & -0.7299 - 0.0489 \end{pmatrix},$$

donde

$$A = 729.927\theta_1 - 51.0948 \text{ y } B = 0.0000137A(729.927\theta_1 + 95.8051).$$

Los valores propios correspondientes son:

- $\lambda_1 = -0.7299\theta_1 - 0.0489$,
- $\lambda_2 = -\theta_1 - 0.1312$,
- $\lambda_3 = \theta_2 - 0.0011(729.927\theta_1 - 51.0948)(72.6277\theta_1 + 10.5326) - 0.29$.

Recordemos que, debido a la naturaleza del problema, es necesario que $x_1 > 0$, lo que impone la siguiente condición $\theta_1 > -0.1312$.

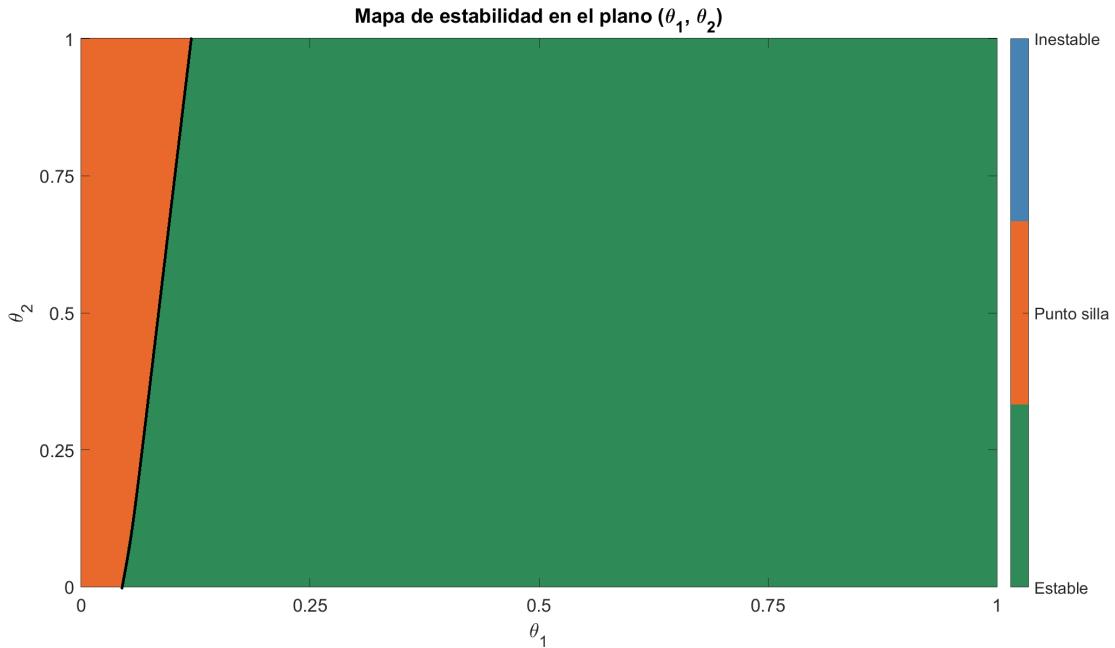


Figura C.3: Mapa de estabilidad para p_5 en el plano (θ_1, θ_2) .

Dado que $\theta_1 > 0$, se concluye que los valores propios λ_1 y λ_2 son siempre negativos. Por otro lado, al imponer la condición $\lambda_3 = 0$ y despejar θ_2 , se obtiene una ecuación cuadrática.

La gráfica de esta ecuación en el plano (θ_1, θ_2) resulta ser una parábola que divide dicho plano en dos regiones:

- Debajo de la parábola: el valor propio λ_3 es negativo, y por lo tanto p_5 es un punto de equilibrio estable.
- Encima de la parábola: λ_3 se vuelve positivo, y p_5 pasa a ser un punto silla.

Esto se observa en la Figura C.3, donde la región verde representa los valores de (θ_1, θ_2) que conducen a un punto de equilibrio estable, mientras que la región naranja corresponde a condiciones donde el equilibrio es inestable.

Equilibrio p_6

El séptimo punto de equilibrio tiene la forma

$$p_6 = \left(C - \sigma_2^+ - \frac{\beta_3}{\alpha_3}, 0, \sigma_2^+ \right).$$

Dado que el modelo requiere $\theta_1 > 0$, $x_1 > 0$ y $x_3 > 0$, se restringe el análisis a los valores de θ_1 que satisfacen $0 < \theta_1 < 0.4457$.

Siguiendo el enfoque utilizado en los casos anteriores, se evalúa la estabilidad de p_6 mediante el análisis numérico de los valores propios de la matriz Jacobiana en función de θ_1 y θ_2 . La Figura C.4 muestra que, en la región válida del plano paramétrico, p_6 se comporta como un punto silla (zona naranja). Para otra combinación de puntos (θ_1, θ_2) , el punto p_6 no estará definido en el primer cuadrante.

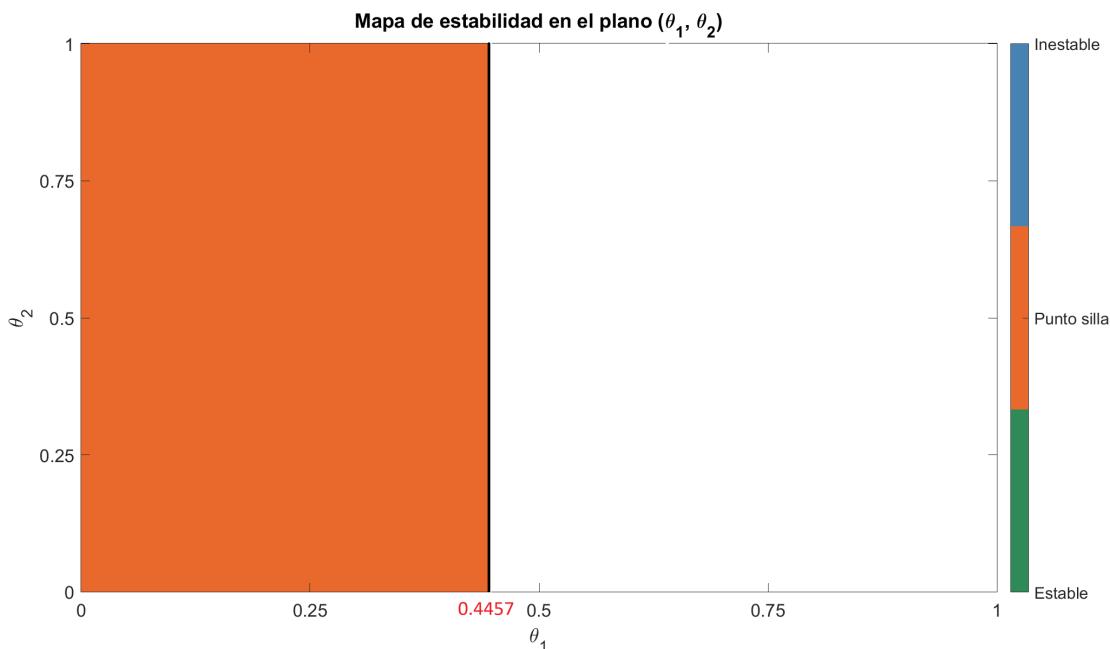


Figura C.4: Mapa de estabilidad para p_6 en el plano (θ_1, θ_2) .

Equilibrio p_7

El octavo punto de equilibrio tiene la forma

$$p_7 = \left(C - \sigma_2^- - \frac{\beta_3}{\alpha_3}, 0, \sigma_2^- \right),$$

siempre que $(\beta_1 - \theta_1)\alpha_3 > \alpha_1\beta_3$. Reemplazando los valores en esta ecuación obtenemos que

$$\theta_1 < -0.067,$$

pero por hipótesis sabemos que $\theta_1 > 0$. Por lo que concluimos que para esta combinación particular de parámetros, no podemos tener un punto de equilibrio de la forma p_7 .

Equilibrio p_8

El noveno punto de equilibrio tiene la forma

$$p_8 = \left(\frac{(\beta_2 - \theta_2)\alpha_1 - \alpha_2(\beta_1 - \theta_1)}{\alpha_2(\beta_1 - \theta_1)\tau}, C - \frac{(\beta_2 - \theta_2)\alpha_1 - \alpha_2(\beta_1 - \theta_1)}{\alpha_2(\beta_1 - \theta_1)\tau} - \frac{\beta_1 - \theta_1}{\alpha_1}, 0 \right).$$

Para que p_8 esté en el primer octante, deben cumplirse simultáneamente condiciones sobre θ_1 y θ_2 que definen dos regiones disjuntas:

Región 1:

- $\theta_1 < 0.07$,
- $\theta_2 < 0.8029\theta_1 + 0.233796$,
- $\theta_2 > 58.31424157\theta_1^2 + 4.374841947\theta_1 - 0.3019787199$.

Región 2:

- $\theta_1 > 0.07$,
- $\theta_2 > 0.8029\theta_1 + 0.233796$,
- $\theta_2 < 58.31424157\theta_1^2 + 4.374841947\theta_1 - 0.3019787199$.

Fuera de estas regiones, alguna coordenada de p_8 se vuelve negativa, por lo que no se considera.

Siguiendo el enfoque previo, se evalúa numéricamente la estabilidad de p_8 en función de θ_1 y θ_2 . Como se muestra en la Figura C.5, la Región 1 conduce a un punto estable, mientras que la Región 2 da lugar a un punto silla.

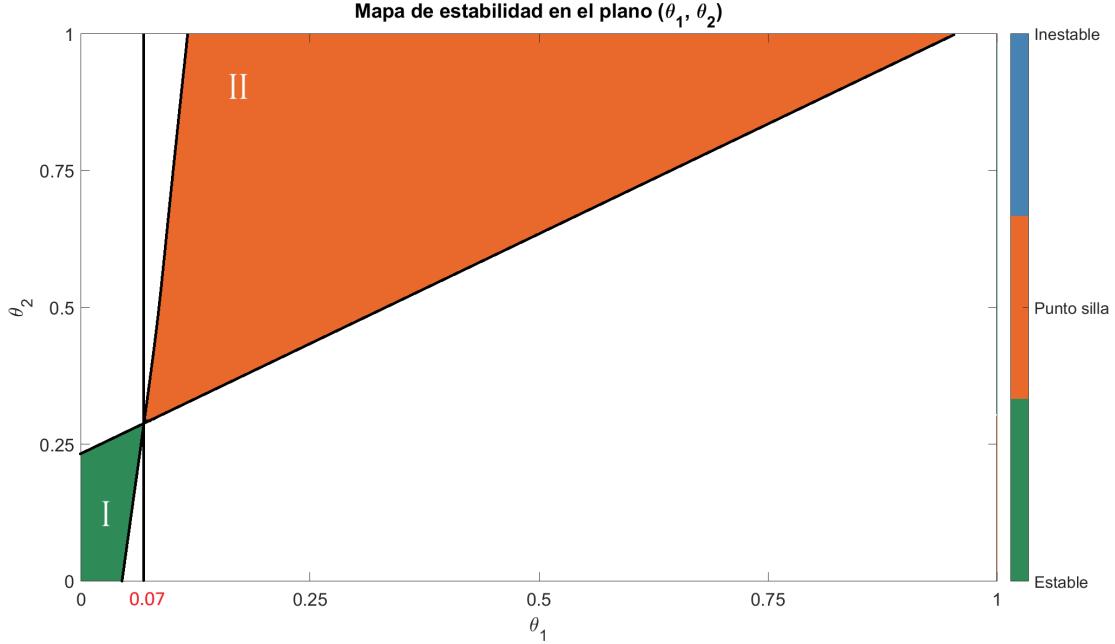


Figura C.5: Mapa de estabilidad para p_8 en el plano (θ_1, θ_2) .

Equilibrio p_9

El décimo punto de equilibrio tiene la forma

$$p_9 = \left(\frac{\alpha_3(M^+N^+ - P)}{\alpha_2\beta_3\tau}, C - \frac{\alpha_3(M^+N^+ - P)}{\alpha_2\beta_3\tau} - \sigma_2^+ - \frac{\beta_3}{\alpha_3}, \sigma_2^+ \right).$$

Para que p_9 pertenezca al primer cuadrante, se deben cumplir simultáneamente las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} \theta_1 &< 0.4457, \\ \theta_2 &< \frac{\theta_1}{2} - \frac{11}{100\left(\frac{\theta_1}{2} + 50A + \frac{93}{200}\right)} + 50A - \frac{49}{200}, \\ \frac{\theta_1}{2} + \frac{12618725867921943359375\theta_1 + 1261872586792194335937500A - 27874828852922325612825}{23058430092136939520000\left(\frac{\theta_1}{2} + 50A + \frac{93}{200}\right)} + 50A - \frac{49}{200} &< \theta_2, \end{aligned}$$

donde

$$A = \sqrt{\left(\frac{\theta_1}{100} + \frac{93}{10000}\right)^2 + \frac{8087052601914267}{147573952589676412928}}. \quad (\text{C.14})$$

Fuera de esta región, alguna coordenada de p_9 es negativa, por lo que no se analiza.

Siguiendo el enfoque anterior, se estudia numéricamente la estabilidad de p_9 en función de los parámetros θ_1 y θ_2 . La Figura C.6 muestra que, dentro del dominio válido, el punto es un punto silla.

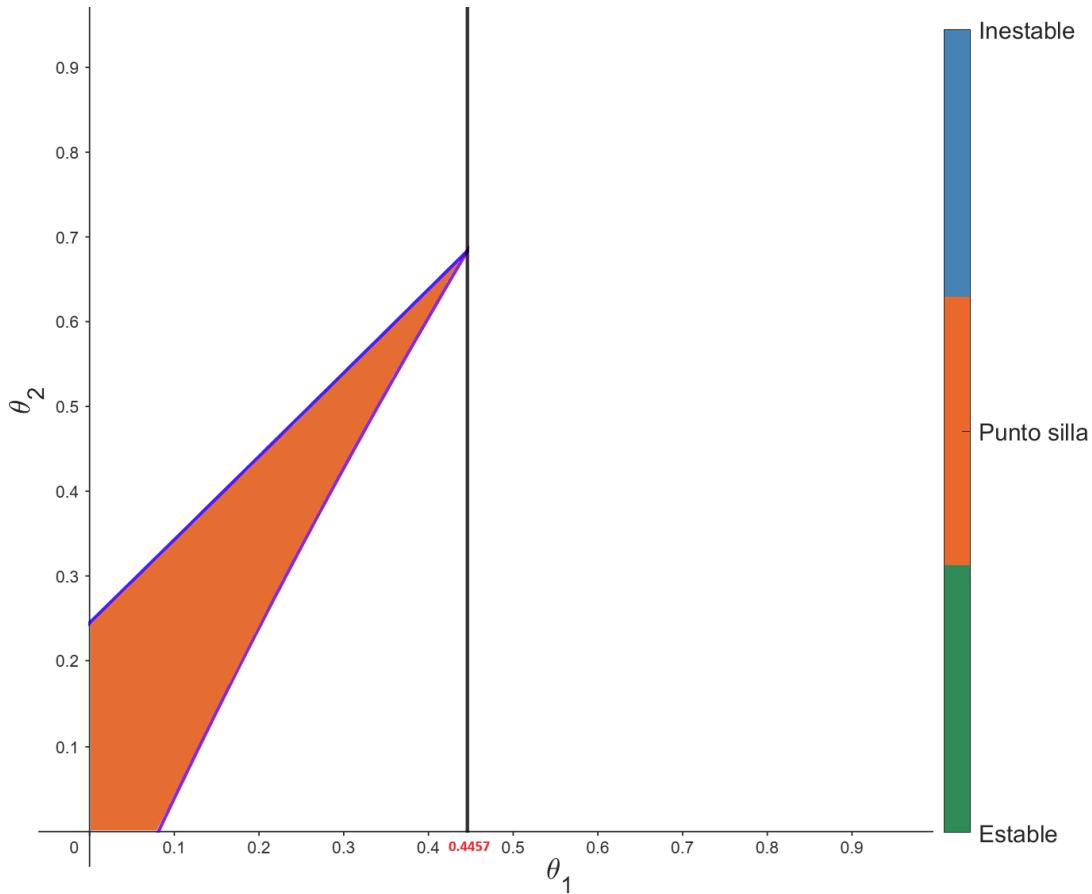


Figura C.6: Mapa de estabilidad para p_9 en el plano (θ_1, θ_2) .

Equilibrio p_{10}

El undécimo punto de equilibrio tiene la forma

$$p_{10} = \left(\frac{\alpha_3(M^-N^- - P)}{\alpha_2\beta_3\tau}, C - \frac{\alpha_3(M^-N^- - P)}{\alpha_2\beta_3\tau} - \sigma_2^- - \frac{\beta_3}{\alpha_3}, \sigma_2^- \right),$$

siempre que $(\beta_1 - \theta_1)\alpha_3 > \alpha_1\beta_3$. Reemplazando los valores en esta ecuación obtenemos que

$$\theta_1 < -0.067,$$

pero por hipótesis sabemos que $\theta_1 > 0$. Por lo que concluimos que para esta combinación particular de parámetros, no podemos tener un punto de equilibrio de la forma p_{10} .

C.3. Curvas críticas en el plano de parámetros

Las regiones identificadas en la Figura 7.1 del Capítulo 7 están delimitadas por ocho curvas que representan transiciones críticas en el espacio paramétrico (θ_1, θ_2) . A continuación se presentan sus expresiones analíticas:

- $L1$: Recta horizontal dada por

$$\theta_2 = 0.1284, \quad \text{definida para todo } \theta_1 \in \mathbb{R}^+.$$

- $L2$: Recta horizontal dada por

$$\theta_2 = 0.18, \quad \text{definida para todo } \theta_1 \in \mathbb{R}^+.$$

- $L3$: Recta horizontal dada por

$$\theta_2 = 0.6841, \quad \text{definida para todo } \theta_1 \in \mathbb{R}^+.$$

- $L4$: Recta definida por

$$\theta_2 = 0.8029 \cdot \theta_1 + 0.233796, \quad \theta_1 \in \mathbb{R}^+.$$

- $L5$: Recta vertical dada por

$$\theta_1 = 0.4457, \quad \text{definida para todo } \theta_2 \in \mathbb{R}^+.$$

- $L6$: Parábola definida por

$$\theta_2 = 58.31424157 \theta_1^2 + 4.374841947 \theta_1 - 0.3019787199, \quad \theta_1 \in \mathbb{R}^+.$$

- $L7$: Curva no lineal definida por

$$\theta_2 = \frac{\theta_1}{2} - \frac{11}{100 \left(\frac{\theta_1}{2} + 50A - \frac{49}{200} \right)},$$

donde A se define en la ecuación (C.14). Esta curva está definida solo para $\theta_1 \in (0, 0.4457)$.

- $L8$: Curva compleja definida por

$$\begin{aligned} \theta_2 = & \frac{\theta_1}{2} + \frac{12618725867921943359375 \theta_1 + 1261872586792194335937500 A}{23058430092136939520000 \left(\frac{\theta_1}{2} + 50A + \frac{93}{200} \right)} \\ & - \frac{27874828852922325612825}{23058430092136939520000 \left(\frac{\theta_1}{2} + 50A + \frac{93}{200} \right)} + 50A - \frac{49}{200}, \end{aligned}$$

donde A se define en la ecuación (C.14), con $\theta_1 \in (0, 0.4457)$.

Bibliografía

- [1] Jaime Acosta-Arreola et al. "Predicting dynamic trajectories of a protected plant community under contrasting conservation regimes: Insights from data-based modelling". En: *Ecological Modelling* 484 (2023).
- [2] V. I. Arnol'd. *Ordinary Differential Equations*. Berlin: Springer-Verlag, 1992.
- [3] J. D. Murray. *Mathematical Biology II: Spatial Models and Biomedical Applications*. 3rd. Vol. 18. Interdisciplinary Applied Mathematics. New York: Springer, 2003.
- [4] Lawrence Perko. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Third. Vol. 7. Texts in Applied Mathematics. New York: Springer, 2001.
- [5] J. E. Marsden y M. McCracken. *The Hopf Bifurcation and Its Applications*. Vol. 19. Applied Mathematical Sciences. New York: Springer, 1976.
- [6] Yuri A. Kuznetsov. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Vol. 112. Applied Mathematical Sciences. Springer, 2023.