

Алгебра.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n};$$

$$a^m : a^n = a^{m-n};$$

$$(a^m)^n = a^{mn}; \quad (ab)^n = a^n b^n;$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

$$ax^2 + bx + c = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \text{де } D = b^2 - 4ac$$

x_1, x_2 — корені рівняння.

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a};$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

$$x^2 + px + q = 0;$$

$$x_1 + x_2 = -p,$$

$$x_1 \cdot x_2 = q$$

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a, \text{ якщо } a \geq 0, \\ -a, \text{ якщо } a < 0; \end{cases}$$

$$(\sqrt{a})^2 = a, (a \geq 0);$$

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}, (a \geq 0, b \geq 0);$$

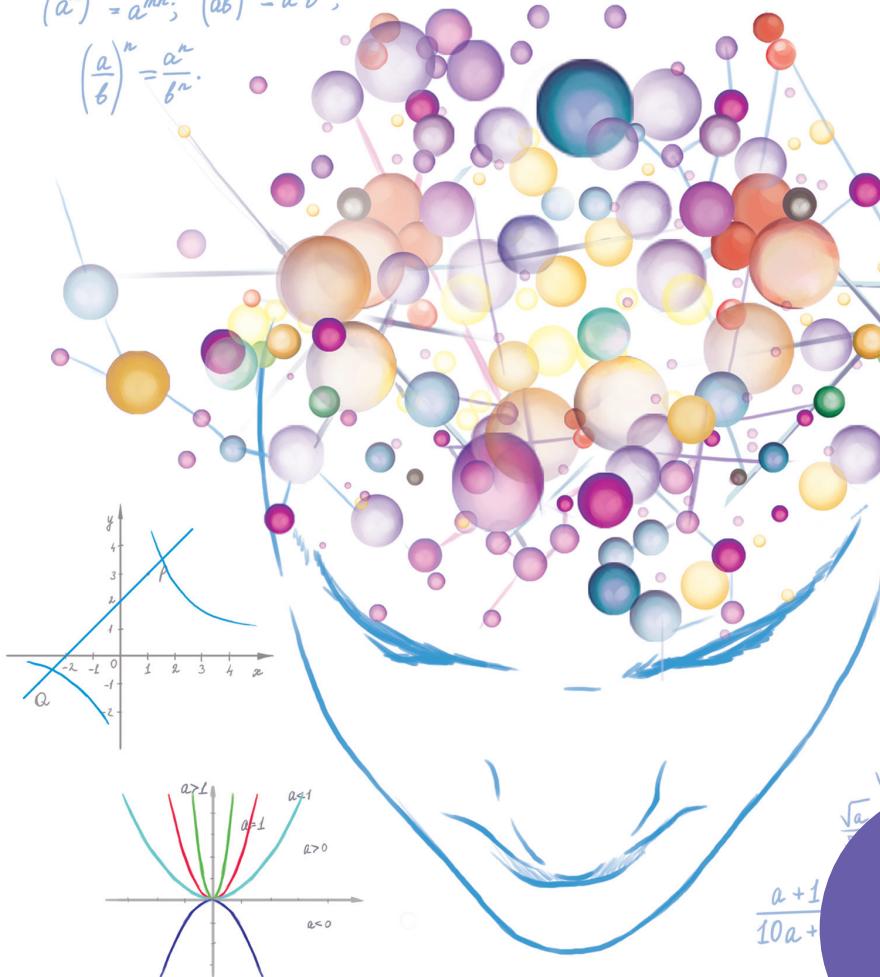
$$\sqrt{a} \sqrt{b} = \sqrt{ab} (a \geq 0, b \geq 0);$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, (a \geq 0, b > 0);$$

$$\frac{a+1}{10a+}$$

$$\sqrt{\frac{16}{81}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{81}} = \frac{4}{9}$$

8
клас



Григорій Бевз, Валентина Бевз

Алгебра

Підручник для 8 класу
закладів загальної середньої освіти

Видання друге, перероблене

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a, (a \geq 0);$$
$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}, (a \geq 0, b \geq 0);$$
$$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}, (a \geq 0, b \geq 0);$$
$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, (a \geq 0, b > 0);$$
$$a^m \cdot a^n = a^{m+n};$$
$$a^m : a^n = a^{m-n};$$
$$(a^m)^n = a^{mn}; (ab)^n = a^n b^n;$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$
$$\sqrt[n]{a^k} = |a| = \begin{cases} a, \text{ якщо } a \geq 0, \\ -a, \text{ якщо } a < 0; \end{cases}$$
$$x^2 + px + q = 0;$$
$$x_1 + x_2 = -p,$$
$$x_1 \cdot x_2 = q$$
$$ax^2 + bx + c = 0;$$
$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a};$$
$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$
$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \text{ де } D = b^2 - 4ac$$

x_1, x_2 — корені рівняння.

КИЇВ
Видавничий дім «Освіта»
2021

УМОВНІ ПОЗНАЧКИ

-  «Екологічна безпека і сталий розвиток»
-  «Здоров'я і безпека»
-  «Громадянська відповідальність»
-  «Підприємливість та фінансова грамотність»
- Задачі, що були запропоновані під час ЗНО

ШАНОВНІ ВОСЬМИКЛАСНИКИ Й ВОСЬМИКЛАСНИЦІ!

У цьому році ви продовжуєте вивчати алгебру — одну з важливих і цікавих галузей математики. Довгий час алгеброю називали науку про розв'язування рівнянь. Згодом, коли рівняння почали записувати за допомогою символів, алгебра все більше ставала спеціальною мовою. Роль цієї мови із часом зростала, вона ставала набагато важливішою від розв'язування рівнянь. Тоді почали говорити, що алгебра — це спеціальна символічна мова. Із цього приводу відомий математик **Д. Пойя** писав: «*Алгебра — це мова, що користується не словами, а лише математичними символами. Якщо ця мова символів нам знайома, то на ній можна перекласти цікаві для нас вирази повсякденної мови.*

Рівняння потрібні, щоб розв'язувати задачі, зокрема практичного характеру, а перетворювати вирази необхідно для того, щоб розв'язувати складніші рівняння. Розширяються ваші знання про числові та буквенні вирази — розширяються і види рівнянь, і методи їх розв'язування, а за цим — і задачі, які ви можете розв'язати.

Відомий математик, академік НАН України **Б. В. Гнєденко** зазначав: «*I академіки свого часу сиділи за партами і теж обчислювали об'єми і знаходили, чому дорівнює “a” плюс “b” у квадраті.*» Без знання математичної мови сьогодні не можна працювати ні в математиці, ні в будь-якій іншій галузі.

Найважливішим завданням математики є допомога іншим наукам, а також сприяння розвиткові людства. На сторінках цього підручника ви знайдете цікавий матеріал про відомих математиків, про міжнародні та національні математичні премії та вчених, які були їх удостоєні.

Зараз важко назвати сферу діяльності людини, у якій не використовують математику. Мовою алгебри у вигляді математичних моделей описують реальні процеси. Математичними методами користуються фахівці з інформаційних технологій і соціологи, інженери і юристи, біологи і архітектори, музиканти і фінансисти. Щоб стати гарним фахівцем у майбутньому, щоб здобути добру освіту, слід докласти багато зусиль. Вивчення алгебри — це одна зі сходинок до успіху на вашому шляху.

Сподіваємося, що наш підручник стане вам добрым помічником в опануванні алгебри, у набутті нових знань, умінь і досвіду, у гармонійному розвитку вашої особистості.

Автори

ЯК ПРАЦЮВАТИ З ПІДРУЧНИКОМ

Дорогі восьмикласники, восьмикласниці й колеги!

Ви тримаєте в руках новий підручник алгебри. Автори сподіваються, що ця книжка стане для вас надійним помічником і порадником.

Вагомим мотивом і гарним стимулом для навчання мають стати відомості про видатних математиків і математичні премії, засновані на їх честь. Висловлювання математиків можуть стати для вас дороговказом не лише у навчанні, а й на життєвому шляху.

На початку кожного розділу подано короткий огляд його змісту українською та англійською мовами.

Кожен параграф починається рубрикою **«Використовуємо набуті компетентності»**. Матеріал цієї рубрики зверне вашу увагу на ключові знання — означення, властивості, твердження, які ви маєте пригадати для ефективного сприймання і засвоєння нового матеріалу.

10 Розділ 1. Раціональні вирази

Використовуємо набуті компетентності

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо означення степеня, одночленна та многочлена с. 246–248.

Ви вже знаєте, що, наприклад:

$$2x^5 + 3x^3 - x^2, x; 7 \text{ — одночлен}, \text{ кожен його член}$$

$$2x^5, 3x^3, -x^2, x; 7 \text{ — одночлени, а } x^5, x^3, x^2, x \text{ — це степені.}$$

Одночлен

 $5x^7$
Коефіцієнт
Степінь

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ разів}}$$

Властивості степенів з натуральними показниками

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; a^m : a^n = a^{m-n}; (a^m)^n = a^{mn}; (ab)^n = a^n b^n; \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

ХОЧЕТЕ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Як співвідносяться між собою різні види дробів, можна ілюструвати такою діаграмою (мал. 3). Тут кожне вуже поняття є складовою ширшого. Звичайні дроби є складовою частиною числових дробів, які, у свою чергу, є складовою раціональних дробів, і т. д.

Мал. 3

Приклади дробів:

звичайних: $\frac{3}{7}, \frac{11}{35}, \frac{1}{149}.$	числових: $0,5, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{2}, \frac{1}{2^2+1}.$
раціональних: $\frac{a}{5}, \frac{1}{n}, \frac{x^2-2}{2x}, \frac{a^2-3ac+5c^2}{2ac}.$	

2 **Поділіть вираз A на вираз B — означає знати такий вираз X, що $X \cdot B = A$.**

Приклади. $a^7 : a^4 = a^3$, оскільки $a^7 \cdot a^4 = a^7$,
 $x^10 : x^1 = x$, оскільки $x \cdot x^1 = x^{12}$.

Важагл, якщо a — відмінне від нуля число, а m та n — натуральні числа, причому $m > n$, то

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Адже за правилом множення степенів, $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, $a^n = a^{m-n} = a^m$. З потогоджено $a^m : a^n = a^{m-n}$ випливає правило:

3 **при діленні степенів з однаковими основами основу залишають без зміни, а від показника степеня діленого віднімають показник степеня дільника.**

Виконамо разом

1 Знайдіть добуток дробів: $\frac{x^2-c^2}{2xc} \cdot \frac{1}{(x-c)^2}$.

• Розв'язання. $\frac{x^2-c^2}{2xc} \cdot \frac{1}{(x-c)^2} = \frac{(x-c)(x+c)}{2xc(x-c)^2} \cdot \frac{16}{(x-c)^2} = \frac{8(x+c)}{xc(x-c)}$.

Відповідь. $\frac{8(x+c)}{xc(x-c)}$.

2 **Скарбничка досягнень**

- ✓ Знаю, що таке раціональний дріб:

$A = \frac{\text{многочлен}}{B = \text{многочлен}}$

$A = \text{чисельник}$

$B = \text{знаменник}$

- ✓ Знаю, які значення змінних є допустимими для дробу:

$\frac{A}{B}$ існує, якщо $B \neq 0$

- ✓ Вмію наводити приклади різних дробів.
- ✓ Вмію визначати допустимі значення дробів:

$\frac{2x}{x+5}, x \neq -5$

$\frac{a+1}{2a-a^2}, a \neq 2$

Вивчаючи теоретичний матеріал, звертайте увагу на слова, надруковані **жирним курсивом**, — це нові алгебраїчні терміни. Ви повинні усвідомити, що вони означають, і запам'ятати їх.

2 **Виділені **жирним** шрифтом речення, позначені стрілочкою, є основними означеннями.**

Жирний текст в квадратних дужках — це властивості, правила та інші важливі твердження. Слід навчитися їх формулювати (можна — своїми словами) та застосовувати до розв'язування пропонованих вправ і задач.

У кожному параграфі підручника є рубрика **«Хочете знати ще більше?»**. Вона містить додатковий матеріал, адресований зацікавленим учням.

Підручник містить вправи різних рівнів складності: для усного розв'язування та рівнів А і Б. Розв'язування **«Відкритих задач»** сприятиме розвитку логічного мислення, дослідницьких умінь і творчості.

У рубриці **«Виконаємо разом»** наведено зразки розв'язань важливих видів задач. Корисно ознайомитися з ними перед виконанням домашніх завдань, номери яких виділено блакитним кольором.

Використовуючи рубрику **«Скарбничка досягнень»**, що міститься наприкінці кожного параграфа, можна проаналізувати, усвідомити, повторити та покращити набуті знання та вміння.

Готуємося до тематичного оцінювання

Тестові завдання №2

- 1 Дріб $\frac{1}{16}$ можна записати у вигляді:
а) 2^4 ; б) 2^6 ; в) 2^{-4} ; г) 2^{-6} .
- 2 Значення виразу $(3,75 - 5,75)^{-2}$ дорівнює:
а) 4; б) -4; в) 0,5; г) 0,25.

Типові завдання до контрольної роботи №1

- 1 Виконайте ділення:
а*) $\frac{6x^5}{y^4} : \frac{12x^3}{y^2}$; б*) $\frac{4a^2 - 1}{a^2 - 9} : \frac{6a + 3}{a + 3}$.
- 2 Обчисліть:
а*) $\frac{3^2 \cdot 3^{-3}}{5^2}$; б*) $\frac{4^{-6} \cdot 16^{-5}}{8^{-10}}$; в*) $2,8 \cdot 10^{-12} \cdot 4,5 \cdot 10^7$.
- 3 Запишіть число в стандартному вигляді:
а*) 257 000 000; б*) 0,000 000 002 2.

Історичні відомості

Звичайні дроби в Стародавніх Вавилоні та Єгипті були відомі ще 4 тис. років тому. Грецькі математики вміли виконувати над звичайними дробами всі арифметичні дії. В «Арифметиці» Диофанта (III ст.) є також багато дробів зі змінними. Наприклад, у нього показано, що

$$\frac{96}{x^2 + 36 - 12x^2} = \frac{12}{6 - x^2} = \frac{12x^2 + 24}{x^2 + 36 - 12x^2}.$$

Записували тоді дробові вирази зовсім не так, як тепер.

Дробову риску вперше застосував італійський математик Л. Фібоначі (1180—1240).

Дроби зі змінними стали широко використовувати після появи «Загальні арифметики» відомого англійського вченого І. Ньютона (1643—1727). У цій книжці, зокрема, пояснювалось:

ГОЛОВНЕ В РОЗДІЛІ

Частку від ділення виразу A на вираз B можна записати у вигляді дробу $\frac{A}{B}$. Дріб має сміс тільки тоді, коли його знаменник не дорівнює нулю. **Рациональним дробом** називають дріб, чисельник і знаменник якого — міноголіни. Вираз, складений зі змінних і чисел зі звичайної дій додавання, віднімання, множення, ділення або піднесення до степеня з цілым показником, називається **раціональним**. При будь-яких значеннях A , B і C $\neq 0$ $\frac{A}{B} = \frac{AC}{BC}$ (основна властивість дробу). На основі цієї властивості дроби можна скорочувати або зводити до спільного знаменника.

Ці над будь-якими дробами можна виконувати так само, як над звичайними дробами. Якщо знаменники не порівнюють 0, то завжди

$$\frac{A}{B} + \frac{B}{C} = \frac{A+B}{C}, \quad \frac{A}{C} - \frac{B}{C} = \frac{A-B}{C}, \quad \frac{A}{C} \cdot \frac{B}{D} = \frac{AB}{CD}, \quad \frac{A}{C} : \frac{B}{D} = \frac{AD}{BC}.$$

ДОДАТКИ НАВЧАЛЬНІ ПРОЕКТИ

- Стандартний вигляд числа у різних галузях знань
- Історія розвитку числа
- Рівняння у шерензі віків та способи їх розв'язання

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

- Рациональні вирази
Квадратні корені та дійсні числа
Квадратні рівняння

ЗАДАЧІ ТА ВПРАВИ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ

ВІДОМОСТІ З КУРСУ АЛГЕБРИ 7 КЛАСУ

ВІДПОВІДІ ТА ВКЛАЗВКИ ДО ЗАДАЧІ І ВПРАВ

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Рубрику **«Готуємося до тематичного оцінювання»** побудовано так, щоб ви мали змогу якнайкраще підготуватися до зовнішнього незалежного оцінювання.

У книжці є також рубрики **«Історичні відомості»** та **«Головне в розділі»**.

Зверніть увагу на **«Додатки»** та їх наповнення. Сподіваємося, що ви отримаєте задоволення від розв'язування задач і роботи над навчальними проектами.

Бажаємо успіхів у вивченні алгебри!

Розділ 1



ОСТРОГРАДСЬКИЙ

Михайло Васильович

(1801–1862)

Всесвітньо відомий український математик і механік.

Видатний учений, організатор наукової школи прикладної математики і механіки, популяризатор математики, прогресивний реформатор математичної освіти, великий лектор і талановитий педагог-новатор.

**«Мало знати, треба ще і запам'ятати.
Саме у цьому полягає найскладніший момент у навченні».**

**«Добре буде, коли учень і сам навчиться твердо
і справедливо судити самого себе».**

**«Освіта закінчується разом із життям. Тільки дурень може вірити,
що настане період його життя, коли йому вже нічого вивчати».**

«Розв'язування задач змінює людину».

M. В. Остроградський

ПРЕМІЯ імені **М. В. ОСТРОГРАДСЬКОГО**

Присуджується по Відділенню математики НАН України за видатні наукові роботи в галузі математики та математичних проблем механіки.

Засновано Національною академією наук України у 1997 році.

ЛАУРЕАТИ ПРЕМІЇ

Корнейчук М. П.

Степанець О. І.

Нікольський С. М.

Королюк В. С.

Портенко М. І.

Ліньков Ю. М.

Самойленко А. М.

Шкіль М. І.

Яковець В. П.

та інші

Раціональні вирази

Досі вам були відомі тільки цілі вирази. А вони дають можливість розв'язувати лише прості задачі. Набагато зручнішою і потужнішою є алгебра, у якій використовують не тільки цілі вирази, а й дробові. Такі вирази разом називають **раціональними**. У цьому розділі розглянемо такі теми:

§ 1	Ділення степенів і одночленів Powers and Monomials Division	§ 7	Ділення дробів Fractions Division
§ 2	Ділення і дроби Division and Fractions	§ 8	Перетворення раціональних виразів Rational Expressions Transformation
§ 3	Основна властивість дробу Fractions Main Property	§ 9	Раціональні рівняння Rational Equations
§ 4	Раціональні вирази Rational Expressions	§ 10	Степені з цілими показниками Degrees with Integral Indicators
§ 5	Додавання і віднімання дробів Fractions Addition and Subtraction	§ 11	Стандартний вигляд числа Standard Form Number
§ 6	Множення дробів Fractions Multiplication	§ 12	Функція $y = \frac{k}{x}$ Function $y = \frac{k}{x}$

Навчальний проект № 1
**«СТАНДАРТНИЙ ВИГЛЯД ЧИСЛА
У РІЗНИХ ГАЛУЗЯХ ЗНАНЬ»**

ВИКОРИСТОВУЄМО НАБУТИ КОМПЕТЕНТНОСТІ

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо означення степеня, одночлена та многочлена (с. 241–243).

Ви вже знаєте, що, наприклад:

$2x^5 + 3x^3 - x^2 + x + 7$ — многочлен. Кожен його член

$2x^5; 3x^3; -x^2; x; 7$ — одночлени, а $x^5; x^3; x^2; x = x^1$ — це степені.

Одночлен

Коефіцієнт

$$5x^7$$

Степінь

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_{n \text{ разів}}$$

Властивості степенів з натуральним показником

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; a^m : a^n = a^{m-n};$$

$$(a^n)^m = a^{nm};$$

$$(ab)^n = a^n b^n; \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

§ 1 | Ділення степенів і одночленів

У курсі алгебри 7 класу ми ознайомилися з цілими виразами, навчилися додавати і віднімати їх, множити і підносити до степеня. Тепер розглянемо, як можна ділити вирази.

► **Поділити вираз A на вираз B — означає знайти такий вираз X , що $X \cdot B = A$.**

Приклади. $a^7 : a^4 = a^3$, оскільки $a^3 \cdot a^4 = a^7$,
 $x^{12} : x^{11} = x$, оскільки $x \cdot x^{11} = x^{12}$.

У загалі, якщо a — відмінне від нуля число, а m і n — натуральні числа, причому $m > n$, то

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Адже за правилом множення степенів, $a^{m-n} \cdot a^n = a^{m-n+n} = a^m$.

З тотожності $a^m : a^n = a^{m-n}$ випливає правило:

при діленні степенів з одинаковими основами основу залишають без зміни, а від показника степеня діленого віднімають показник степеня дільника.

Користуючись цим правилом, можна писати так:

$$6^9 : 6^7 = 6^2, a^8 : a^3 = a^5, (-x)^{15} : (-x)^8 = (-x)^7.$$

Якщо $a \neq 0$, то завжди $a^m : a^m = 1$. Щоб тотожність $a^m : a^n = a^{m-n}$ поширили і на цей випадок, у математиці домовились вважати, що при кожному значенні a , відмінному від нуля, $a^0 = 1$. Запис 0^0 не має змісту.

Приклади. $7^0 = 1; 3,5^0 = 1; (-8)^0 = 1$.

Розглянемо, як іще можна ділити одночлени.

$$\begin{aligned} 12a^3 : 6a &= 2a^2, \text{ бо } 2a^2 \cdot 6a = 12a^3; \\ 15x^2y : 5xy &= 3x, \text{ бо } 3x \cdot 5xy = 15x^2y; \\ -a^2z^3 : 2az^3 &= -\frac{1}{2}a, \text{ бо } -\frac{1}{2}a \cdot 2az^3 = -a^2z^3. \end{aligned}$$

Щоб поділити одночлен на одночлен, треба:

- 1) поділити коефіцієнт діленого на коефіцієнт дільника;
- 2) до знайденої частки приписати множниками кожну змінну діленого з показником, що дорівнює різниці показників цієї змінної в діленому і дільнику.

Приклад. Нехай треба поділити одночлен $8a^5m^2x^4$ на $4am^2x^2$.

Ділимо 8 на 4, a^5 — на a , m^2 — на m^2 і x^4 — на x^2 . Маємо, відповідно, 2, a^4 , 1 і x^2 . Отже,

$$8a^5m^2x^4 : 4am^2x^2 = 2a^4x^2.$$

Але, наприклад, одночлен a^2c на pc таким способом поділити не можна. Їх частка не дорівнює тотожно деякому одночлену. Говорять, що у множині одночленів ділення не завжди можливе. Якщо виникає потреба поділити і такі одночлени, частка яких не є одночленом, її записують у вигляді дробу. Про це йтиметься в наступному параграфі.

ХОЧЕТЕ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Розглянемо, як можна ділити не лише одночлени, а й вирази, що містять степені многочленів.

Наприклад,

$$(8-x)^5 : (8-x)^2 = (8-x)^3,$$

$$12a^4(a+c)^4 : 4a^3(a+c)^3 = 3a(a+c).$$

Інколи перед діленням треба перетворити многочлени. Поділимо, наприклад, $x^2 - 2ax + a^2$ на $x - a$:

$$(x^2 - 2ax + a^2) : (x - a) = (x - a)^2 : (x - a) = x - a.$$

Відомі й інші способи ділення многочленів. Зокрема, многочлени можна ділити «кутом», подібно до того, як ділять числа. Порівняйте, для прикладу, ділення чисел 7488 і 234 та ділення многочленів $x^3 - 3x^2 + 5x - 3$ і $x^2 - 2x + 3$:





$$\begin{array}{r} 7488 \Big| 234 \\ -702 \quad\quad | 32 \\ \hline 468 \\ -468 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 3x^2 + 5x - 3 \Big| x^2 - 2x + 3 \\ -x^3 + 2x^2 - 3x \\ \hline -x^2 + 2x - 3 \\ -x^2 + 2x - 3 \\ \hline 0 \end{array}$$

Частка від ділення многочленів не завжди є многочленом. Як і частка від ділення двох цілих чисел не завжди число ціле. Тобто у множині многочленів ділення не завжди можливе.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

- Що означає поділити вираз A на вираз B ?
- Сформулюйте правило ділення одночленів.
- Як можна перевірити, чи правильно виконано ділення одного виразу на інший?
- Чому дорівнює нульовий степінь числа, відмінного від нуля?
- Чи позначає запис 0^0 яке-небудь число?
- Чи завжди частка від ділення одночленів є одночленом?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ

- 1** Поділіть: а) $6a^2x^5$ на $2ax$; б) a^5c^3 на $-2ac^3$.

- Розв'язання.** а) $6a^2x^5 : 2ax = 3ax^4$;
- б) $a^5c^3 : (-2ac^3) = -\frac{1}{2}a^4 = -0,5a^4$.

Відповідь. а) $3ax^4$; б) $-0,5a^4$.

- 2** Перевірте, чи правильно виконано ділення:

$$-18x^5y^3 : (-6xy^2) = 3x^4y.$$

- Розв'язання.** $3x^4y \cdot (-6xy^2) = -18x^5y^3$.

Добуток частки і дільника тотожно дорівнює діленому, тому ділення виконано правильно.

Відповідь. Правильно.

- 3** Спростіть вираз: $(a - 2)^8 : (a - 2)^6 + 4(a - 1)$.

- Розв'язання.**

$$(a - 2)^8 : (a - 2)^6 + 4(a - 1) = (a - 2)^{8-6} + 4a - 4 = (a - 2)^2 + 4a - 4 = a^2 - 4a + 4 + 4a - 4 = a^2.$$

Відповідь. a^2 .

«Розумова праця на уроках математики — це пробний камінь мислення».

В. О. Сухомлинський

ВИКОНАЙТЕ УСНО

1. Обчисліть:

а) $325 : 10$; б) $327 : 3,27$; в) $\frac{3}{5} : \frac{5}{3}$.

2. Знаючи, що $a \cdot b = 12$, обчисліть:

а) $a : 12$; б) $b : 12$; в) $12 : ab$.

Знайдіть частку (3–4).

- | | | | | | | |
|----|---------------------|------------------------|--------------------------|------------------------|------------------------|---------------------|
| 3. | а) $3^{12} : 3^7$; | б) $(-8)^6 : (-8)^5$; | в) $10^{10} : 10^{10}$; | г) $(-3)^5 : (-3)^3$; | і) $7^5 : 7^0$; | д) $50^3 : 50$; |
| 4. | а) $a^{18} : a^7$; | б) $x^6 : x$; | в) $m^9 : m^9$; | г) $n^{11} : n^{10}$; | і) $p^{30} : p^{10}$; | д) $c^{14} : c^7$. |

5. Укажіть, яку частку слід вписати в кожну порожню клітинку таблиці.

Ділене	Дільник				
	3	$3a$	$-2a$	$2a^2$	$-6a^4$
$6a^5$					
$-9a^4$					

6. Виконайте ділення:

а) $(x - 5)^3 : (x - 5)$; в) $(m + n)^5 : (m + n)^2$;
 б) $(2x + y)^4 : (2x + y)$; г) $(1 - 3x)^4 : (1 - 3x)^4$.

РІВЕНЬ А

Обчисліть (7–8).

- | | | | |
|----|--|--|--|
| 7. | а) $2^8 : 2^4$; | б) $3,75^8 : 3,75^7$; | і) $3^{10} : 9$; |
| | г) $\left(1\frac{1}{2}\right)^5 : \left(1\frac{1}{2}\right)^4$; | д) $\left(-\frac{2}{3}\right)^6 : \left(-\frac{2}{3}\right)^4$; | ж) $\left(\frac{3}{5}\right)^7 : \frac{81}{625}$. |
| 8. | а) $0,6^9 : 0,6^6$; | б) $3,3^{11} : 3,3^9$; | і) $(-875)^7 : (-875)^6$; |
| | г) $(-0,2)^{10} : (-0,2)^7$; | д) $\left(1\frac{1}{3}\right)^5 : \left(1\frac{1}{3}\right)^4$; | з) $\left(-\frac{2}{5}\right)^8 : \left(-\frac{2}{5}\right)^5$. |

9. Знайдіть значення виразу:

а) $5^4 : 5^2 - 2^5$;

б) $(-2)^5 : (-2)^2 + 2^3$;

в) $1 + 3^7 : 3^5$;

г) $100 + 19^3 : 19^3$;

і) $2^3 \cdot 2 - 3^2 : 3$;

д) $0^4 : 4^0 - 44^0$.

Знайдіть частку (10–12).

- | | | | | | | |
|-----|------------------|---------------------|----------------|-------------------|---------------------|------------------|
| 10. | а) $x^8 : x^3$; | б) $m^{10} : m^4$; | в) $n^5 : n$; | г) $p^{12} : p$; | і) $x^{10} : x^9$; | д) $c^5 : c^5$. |
|-----|------------------|---------------------|----------------|-------------------|---------------------|------------------|

11. а) $(3x)^{20} : (3x)^{16}$;
б) $(2y)^{34} : (2y)^{29}$;

12. а) $(x + 4)^8 : (x + 4)^6$;
б) $(6 - 2a)^9 : (6 - 2a)^8$.

Поділіть (13–14).

13. а) $18a^4x$ на $9a$;
б) $-9a^2cx^4$ на $-3ax^2$.

14. а) $12x^4y^3$ на $3xy^2$;
б) $16x^2y^2$ на $8x^2y$.

15. Виконайте ділення:

а) $3a^5 : a^2$;	в) $2a^{10} : 2a$;	г) $0,8x^2yz : 0,2xy$;
б) $6m^8 : 3m^3$;	г) $\frac{2}{3}a^2z^3 : \frac{1}{3}az^3$;	д) $-2\frac{1}{5}abcx : 2,2ax$.

Обчисліть значення виразу (16–17).

16. а) $(3^5 - 7)^0$;
в) $(8^0 - 2) \cdot (2,5^7 - 3)^0$;
г) $6^4 : 6^3 - (5 : 125)^0$;
б) $17^0 + 15$;
д) $9^{10} : 9^8 \cdot (3^2 - 10)^0$;
е) $(143 + 341)^0 - 1^{43}$.

17. а) $16^0 + 4$;
в) $(7^0 - 12) \cdot (3 + 14^0)$;
б) $(128 - 8^2)^0$;
г) $(2^6 - 14)^0 + (5^3 - 13 \cdot 2)^3$.

18. Знайдіть відношення чисел 27^6 і $2,7^6$.

19. Розгадайте ребус (мал. 1).

Знайдіть значення виразу (20–21).

20. а) $-36a^8 : 9a^5$, якщо $a = 7$;

б) $x^9 : 0,5x^3$, якщо $x = \frac{1}{2}$;

в) $0,03x^{16}y^8 : 10x^{10}y^5$, якщо $x = 2$, $y = 10$.

21. а) $12m^5 : 6m^3$, якщо $m = -5$;

б) $x^4 : 2x^3$, якщо $x = 0,8$;

в) $0,01a^3b^7 : 4a^2b^4$, якщо $a = 1000$, $b = 3$.



Мал. 1

РІВЕНЬ Б

22. Виконайте дії:

а) $4^5 : 16 + (7,6 - 11,6)^3$;

г) $\left(\frac{7}{8}\right)^{12} : \left(2\frac{1}{8} - 1\frac{1}{4}\right)^{10}$;

б) $6^8 : 36 - 6^7 : 6^4$;

г) $\left(\frac{1}{2}\right)^6 : 0,5^4 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2$;

в) $\left(4 - 3\frac{1}{4}\right)^5 : \left(\frac{3}{4}\right)^2$;

д) $0,25^3 : \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 15 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4$.

- 23.** На який одночлен треба помножити одночлен $3ax^3$, щоб дістати:
- $6a^2x^5$;
 - $12a^5x^7$;
 - $-a^6x^3$?

Виконайте ділення одночленів (24–25).

- 24.** а) $a^3x^5 : a^2x^4$; г) $ab^2c^3 : abc$; е) $24c^5x^5 : 8c^4x$;
 б) $n^7x^3 : n^5x^2$; і) $6ac^3 : 2ac^2$; є) $20m^2x^7 : 4mx^5$.
 в) $x^6m : x^5m$; д) $10ax^7 : 5ax^5$;

- 25.** а) $-2,5a^2x^3 : 0,5ax$; г) $16n^5xy^4 : (-4nx)$; е) $-\frac{6}{7}an^2x^3 : \frac{2}{7}n^2x^2$;
 б) $-3,2c^5x^4 : 0,4cx^4$; і) $\frac{3}{5}abx^5 : \frac{1}{5}ax^4$; є) $-\frac{4}{5}a^7x^6 : \left(-\frac{2}{15}a^6x\right)$.
 в) $6a^3xz^2 : (-3az)$; д) $\frac{3}{7}a^2x^3y^4 : \frac{1}{14}ax^3y$;

26. Виконайте ділення:

- $7(x - 7)^5 : (x - 7)^4$;
- $(3 + 2,5x)^{10} : (3 + 2,5x)^9$;
- $ac(a - 2c)^7 : (a - 2c)^5$;
- $(1 + 2ax^2)^{15} : (2ax^2 + 1)^{13}$;
- $2,5a^2(x + 2)^4 : (x + 2)^3$;
- $2a^8(2a + 3)^8 : (2a + 3)^6$.

27. Спростіть вираз:

- $(4 - x)^5 : (4 - x)^3 + 8(x - 2)$;
- $4a(a + 3) - (2a + 3)^{10} : (2a + 3)^8$;
- $(x + 1)^7 : (x + 1)^4 - 3x(x + 1)$;
- $6a(2 - a) - (a - 2)^{11} : (a - 2)^8$.

28. Розв'яжіть рівняння:

- $x^8 : x^5 = -1$;
- $4x^5 : 2x^4 = 6$;
- $(z - 3)^7 : (z - 3)^6 = 5$;
- $(x - 2)^5 : (x - 2)^2 = -1$.

29. Замініть зірочку «*» одночленом так, щоб утворилася правильна рівність:

- $* : (-5x^8) = 4x^2$;
- $0,6a^4 : * = 0,2$;
- $* : \frac{1}{2}m^2n^6 = -8n$;
- $* : 3n^5 = 12n^5$;
- $-x^{11} : * = 5x^3$;
- $\frac{3}{4}x^{12}y^3 : * = \frac{1}{2}xy^2$.

30. Знайдіть значення виразу:

- $\frac{1}{3}m^3n^2p^2 : \left(-\frac{2}{3}m^2n^2p^2\right)$, якщо $m = 4$, $n = 14$, $p = 114$;
- $\left(-1\frac{1}{2}a^4b^3c^2\right) : \left(-\frac{2}{3}a^3bc^2\right)$, якщо $a = \frac{1}{10}$, $b = 10$, $c = 7$;
- $(-4,5x^5y^5z^5) : (-1,5x^5y^4z)$, якщо $y = 0,5$, $z = 2$; $x = 9$;
- $(-1,7p^2q^2r^3) : 28,9p^2qr$, якщо $p = 28,9$, $q = 1,7$, $r = -1$.

31. Подайте у вигляді степеня частку від ділення:

- $a^{m+3} : a^m$;
- $x^{2m+5} : x^{2m}$;
- $m^{5k} : m^{3k+1}$;
- $b^{n+2} : b^{n-2}$;
- $y^{3n+1} : y^{n+1}$;
- $n^{6k-2} : n^{2(k+1)}$.

32. Виконайте ділення:

а) $16x^{n+2}y^{n+3} : 8x^{n+1}y^{3-n}$;

б) $36x^{1-n}y^{2n} : 3x^{1-2n}y^n$;

в) $-2ab^{m+1}c^m : (-5a^{1-m}b)$;

г) $2,7a^mb^{m-1}c^{m-2} : 0,3b^{m-2}c^{m-3}$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

33. Виконайте дії:

а) $7x^2 - 2x + (5 + 11x - 6x^2)$;

г) $(x - 1)(x^2 - 2x + 2)$;

б) $8ab + 7b - (4ab + 7b - 3)$;

і) $(x - 2)(x + 2)$;

в) $2a^3(4a^2 + 3a)$;

д) $(3a - b)(3a + b)(9a^2 + b^2)$.

34. Подайте у вигляді многочлена вираз.

а) $(x - y)(x + y) - x(x - 3)$;

в) $y(y + 2x) - (x + y)^2$;

б) $(b + 1)^2 + 3b(2b - 1)$;

г) $(b + 4)^2 - (b - 3)(b + 3)$.

35. (ЗНО 2017). Для приготування чайної суміші змішали індійський та цейлонський чай у відношенні $10 : 13$, причому індійського чаю взяли 180 г.

1. Скільки грамів чайної суміші отримали?

2. На скільки відсотків у суміші цейлонського чаю більше, ніж індійського?

36. Розкладіть на множники вираз:

а) $x^2 - 16$;

в) $x^2 - 6x + 9$;

г) $3a^2 - 6ab + 3b^2$;

б) $x^2 - 9y^4$;

г) $a^3 - 4a$;

д) $2x + 2y - ax - ay$.

Розв'яжіть рівняння (37–39).

37. а) $3,5 - 3x = x - 4,5$;

в) $5 - 3(x + 1,5) = 2(x + 3)$;

б) $3x - (x + 2) = 5$;

г) $9x - 3(x + 1,5) = 4x + 0,5$.

38. а) $x + \frac{2}{3}x = -\frac{1}{3}$;

в) $\frac{2}{5}x - \frac{3}{8}x = \frac{7}{20}$;

б) $x : \frac{1}{2} = \frac{4}{5}$;

г) $5 : x = \frac{10}{11}$.

39. а) $3x - 1\frac{7}{16}x = \frac{5}{8}$;

в) $\frac{4}{9}x + \frac{5}{12}x = 1\frac{7}{18}$;

б) $x : \frac{2}{3} = \frac{1}{3} : \frac{18}{19}$;

г) $\frac{2}{7} : x = \frac{5}{14}$.

«Математику
не можна вчити,
спостерігаючи,
як це робить сусід!»

А. Нівен

Розв'яжіть систему рівнянь (40–41).

40. а) $\begin{cases} x + y = 6, \\ x - y = 2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + y = 7, \\ x - y = 3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x - y = 0, \\ 3x - y = 4. \end{cases}$

41. а) $\begin{cases} u - 2v = 1, \\ u + 2v = 5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2s + t = 7, \\ s - 2t = 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} m = n, \\ 4m = n + 6. \end{cases}$

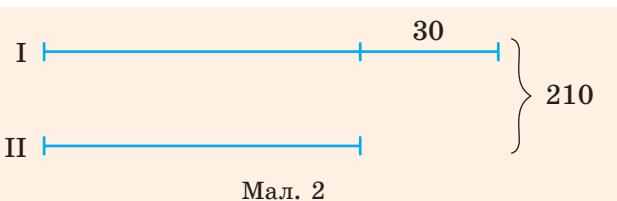
-  42. За переписом 2001 року в Україні на кожні 1000 осіб повну вищу освіту мали на 96 осіб більше, ніж у 1970 році. Знайдіть кількість населення з вищою освітою (на 1000 осіб) для кожного із цих років, якщо разом вони становили 176 осіб.

Відкриті задачі (43–45)

43. Складіть задачу, математична модель якої наведена на малюнку 2.

Розв'яжіть її:

- за допомогою системи двох рівнянь;
- за допомогою одного рівняння;
- арифметичним способом.



-  44. (ЗНО 2020). У кінотеатрі квиток на вечірній сеанс коштує на 15 грн дорожче, ніж на ранковий сеанс. Вартість чотирьох квитків на ранковий сеанс на 220 грн менша від вартості шести квитків на вечірній сеанс. Скільки гривень коштує один квиток на ранковий сеанс? (На кожному із сеансів квитки на всі місця коштують однаково.)

-  45. Добова норма споживання солі не повинна перевищувати 5–6 г (чайна ложка). Цього цілком достатньо для збалансованого харчування. Скільки грамів оселедця можна вжити за один день, якщо вміст солі в ньому складає 10 %. Урахуйте, що інші готові продукти харчування також містять сіль. Запам'ятайте це!

46. Установіть відповідність між абсцисами точок перетину графіків функцій (1–4) з віссю абсцис і значеннями числових виразів (А–Д).

1 $y = 2x - 1$

А $12^2 - 2^{12} \cdot 0^{10}$

2 $y = 5 - x$

Б $15 - 12 : 3$

3 $y = \frac{1}{3} \cdot x - 3 \frac{2}{3}$

В $48 : 0,6 - 0,2 \cdot 400$

4 $y = 9,5x$

Г $((-1)^4 + 1^4) : 4$

Д $(1,5 + 0,5)^3 - 3(1,5 \cdot 0,5)^0$

СКАРБНИЧКА ДОСЯГНЕНЬ

- ✓ Знаю, що $a^0 = 1$, якщо $a \neq 0$.
- ✓ Умію ділити степені з однаковими основами $a^m : a^n = a^{m-n}$
- ✓ Умію ділити деякі одночлени.
- ✓ Спробую навчитися ділити многочлени.
- ✓ Хочу дізнатися, як записати у вигляді дробу частку від ділення двох одночленів.

ВИКОРИСТОВУЄМО НАБУТИ КОМПЕТЕНТНОСТІ

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:

Що таке звичайний дріб

$$\frac{a}{b}$$

чисельник
 знаменник

Кожний звичайний дріб — це частка від ділення його чисельника на знаменник

$$\frac{2}{3} = 2:3$$

Властивість дії ділення:
на нуль ділити не можна

$$\cancel{\frac{a}{0}}$$

§ 2 | Ділення і дроби

Ділення двох цілих виразів не завжди можна виконати без остачі.

Наприклад, частки $a^3 : a^5$, $4xy^2 : 2yz$ не можна записати у вигляді цілих виразів. Ділення одночленів не можна виконати без остачі, якщо дільник містить змінну, якої немає в діленому, або якщо показник степеня будь-якої змінної в дільнику більший від показника степеня тієї самої змінної в діленому.

Якщо частка від ділення одного виразу на інший не є цілим виразом, то її записують у вигляді дробу. Наприклад:

$$2:3 = \frac{2}{3}, a^3 : a^5 = \frac{a^3}{a^5}, 2ax : 3bx^2 = \frac{2ax}{3bx^2}, ax : (a+x) = \frac{ax}{a+x}$$

→ **Дробом називають частку від ділення двох виразів, записану за допомогою дробової риски.**

Які б не були вирази A і B , їх частка $\frac{A}{B}$ — дріб. Вирази A і B — члени цього дробу, A — **чисельник**, B — **знаменник**.

Як і інші вирази, дроби бувають числові й зі змінними.

Наприклад, дроби $\frac{5}{7}$, $\frac{-3}{0,4}$, $\frac{2^2+3^2}{4^2+5^2}$ — числові вирази,

а $\frac{ab}{x}$, $\frac{4m}{m+1}$, $\frac{a-2b}{a+b}$ — вирази зі змінними.

Звичайний дріб — окремий вид дробу. Це дріб, члени якого — натуральні числа. Якщо члени дробу — многочлени, його називають **раціональним дробом**.

Дроби зі змінними мають значення (зміст) не при всіх значеннях змінних. Наприклад, якщо $a = 5$, то

$$\frac{2a+3}{a-5} = \frac{2 \cdot 5 + 3}{5 - 5} = \frac{13}{0}.$$

Запис $\frac{13}{0}$ — не число, бо на 0 ділити не можна. Отже, дріб $\frac{2a+3}{a-5}$ при $a = 5$ не має змісту. При всіх інших значеннях a він має зміст. Говорять, що для даного дробу **допустимими** є всі значення змінної a , крім $a = 5$.

Для змінних, що входять у знаменник дробу, допустимими є тільки ті значення, які не перетворюють цей знаменник на нуль.

Розглянемо два дроби:

$$\frac{6}{a} \text{ і } \frac{6(a-3)}{a(a-3)}.$$

Складемо таблицю їх значень для таких a :

$$-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.$$

a	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
$\frac{6}{a}$	-1,5	-2	-3	-6		6	3	2	1,5	1,2	1	$\frac{6}{7}$
$\frac{6(a-3)}{a(a-3)}$	-1,5	-2	-3	-6		6	3		1,5	1,2	1	$\frac{6}{7}$

Як видно з таблиці, при значеннях a , що дорівнюють $-4, -3, -2, -1, 1, 2, 4, 5, 6, 7$, обидва дроби мають рівні значення. Рівні вони і при інших значеннях змінної a , за винятком 0 і 3. Значення $a = 0$ недопустиме для обох розглядуваних дробів, значення $a = 3$ недопустиме для другого дробу. При всіх допустимих значеннях змінної a всі відповідні значення цих дробів рівні.

► **Два вирази, відповідні значення яких рівні при всіх допустимих значеннях змінних, називаються **тотожно рівними**, або **тотожними**.**

Це означення від подібного означення для цілих виразів відрізняється тільки словом «допустимих». Коли ми говорили тільки про цілі вирази, це слово ми вилучали, оскільки для них усі значення змінних допустими.

→ Два тотожних вирази, сполучені знаком рівності, утворюють **тотожність. Заміна одного виразу іншим, тотожним йому, називається **тотожним перетворенням** даного виразу.**

ХОЧЕТЕ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Як співвідносяться між собою різні види дробів, можна ілюструвати такою діаграмою (мал. 3). Тут кожне вужче поняття є складовою ширшого. Звичайні дроби є складовою частиною числових дробів, які, у свою чергу, є складовою раціональних дробів, і т. д.

Приклади дробів:

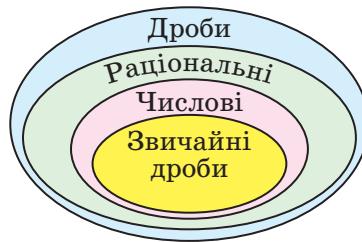
звичайні: $\frac{3}{7}, \frac{11}{35}, \frac{1}{149};$

числові: $0,5, \frac{-3}{4}, \frac{3,7 - \frac{1}{2}}{2,3, 0,25, \frac{2^2 + 7}{2^2 + 7}},$

раціональні: $\frac{a}{5}, \frac{1}{n}, \frac{x^2 - 2}{2x}, \frac{a^2 - 3ac + 5c^2}{2ac}.$

Загальне поняття дробу досить широке. Крім раціональних, дроби бувають і нераціональні, поки що вам не відомі, наприклад,

$$\frac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{x}}, \frac{\cos x}{\sin x}, \frac{\sqrt{1-x^2}}{3x^2}, \frac{1+\ln x}{2\ln x}$$



Мал. 3

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

- Що таке дріб?
- Як називають члени дробу?
- Які види дробів ви знаєте?
- Які дроби називають раціональними? Наведіть приклади.
- Що таке допустимі значення змінних? Наведіть приклади.
- Які вирази називають тотожними?
- Що таке тотожність?

Виконаємо разом

1 Які значення змінних допустимі для дробу:

а) $\frac{1}{x+7}$; б) $\frac{x-a}{x^2-a^2}$?

● **Розв'язання.** а) $x + 7 = 0$, якщо $x = -7$. Це значення x недопустиме для даного дробу. Всі інші значення допустимі;

б) $x^2 - a^2 = 0$, якщо $(x - a)(x + a) = 0$, звідси або $x = a$, або $x = -a$.

Відповідь. а) Для даного дробу допустимі всі значення, крім $x = -7$; б) допустимі всі значення, крім $x = a$ і $x = -a$.

2 Доведіть, що дріб $\frac{m}{m^2+1}$ має зміст при всіх значеннях m .

● **Доведення.** При кожному раціональному значенні m число m^2 невід'ємне, а $(m^2 + 1)$ — додатне. Знаменник даного дробу при кожному значенні m не дорівнює 0.

Отже, при кожному значенні m даний дріб має зміст. А це й треба було довести.

3 Чи тотожні вирази:

а) $\frac{14a^3b^2}{7ab}$ і $2a^2b$; б) $\frac{(-a)^7}{a^6}$ і $\frac{(-a)^6}{a^5}$?

● **Розв'язання.** а) Подамо дріб $\frac{14a^3b^2}{7ab}$ у вигляді частки двох одночленів і виконаємо ділення:

$$\frac{14a^3b^2}{7ab} = 14a^3b^2 : 7ab = 2a^2b.$$

При всіх допустимих значеннях змінних ($a \neq 0, b \neq 0$) перший вираз дорівнює другому, а тому їх відповідні значення рівні. Отже,

вирази $\frac{14a^3b^2}{7ab}$ і $2a^2b$ тотожні.

б) Виконаємо дії в кожному виразі, використовуючи властивості степенів:

$$\frac{(-a)^7}{a^6} = \frac{-a^7}{a^6} = -a; \quad \frac{(-a)^6}{a^5} = \frac{a^6}{a^5} = a.$$

Як бачимо, при всіх допустимих значеннях змінної ($a \neq 0$) вирази набувають протилежних значень. Отже, вони нетотожні.

Відповідь. а) Вирази тотожні; б) вирази нетотожні.

ВИКОНАЙТЕ УСНО

47. Які з наведених нижче виразів — дроби:

$$\text{а)} \ x - \frac{1}{x}; \quad \text{б)} \ \frac{1}{2} - \frac{3}{x}; \quad \text{в)} \ \frac{-\frac{3}{2}}{0,5}; \quad \text{г)} \ \frac{1-a^2}{2a}?$$

48. Обчисліть:

$$\text{а)} \ \frac{0,8}{2}; \quad \text{б)} \ \frac{2}{0,5}; \quad \text{в)} \ \frac{0,6}{-0,2}; \quad \text{г)} \ \frac{2^5}{2^6}.$$

49. Які значення змінних допустимі для дробів:

$$\text{а)} \ \frac{2x}{x+3}; \quad \text{б)} \ \frac{1}{x(x-y)}; \quad \text{в)} \ \frac{c-x}{1+c^2x^2}; \quad \text{г)} \ \frac{a}{a^2-1}?$$

50. Чи тотожні вирази:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \ \frac{4x^4}{4x^2} \text{ і } x^2; & \text{в)} \ \frac{7x^2}{7x^4} \text{ і } x^2; & \text{г)} \ \frac{ab}{a+b} \text{ і } \frac{ba}{a+b}; \\ \text{б)} \ \frac{8m^5}{5m^4} \text{ і } 3m; & \text{г)} \ \frac{a-b}{ab} \text{ і } \frac{a+b}{ab}; & \text{д)} \ 1 + \frac{a^2}{b} \text{ і } \frac{a+b}{b}? \end{array}$$

РІВЕНЬ А

51. Запишіть у вигляді дробу частку від ділення:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \ 2 \text{ на } 7; & \text{в)} \ 3m \text{ на } c; & \text{г)} \ x^2 \text{ на } (1+x); \\ \text{б)} \ x \text{ на } y; & \text{г)} \ 2x \text{ на } 3y; & \text{д)} \ 4ab \text{ на } (a+b)^2. \end{array}$$

52. Запишіть дріб, у якого:

- а) чисельник $2c$, знаменник $3p$;
- б) чисельник 1, знаменник $(x-y)$;
- в) чисельник z^2 , знаменник $(2+z^2)$.

53. Складіть дріб, у якого чисельник дорівнює $6m$, а знаменник: а) на 5 менший від чисельника; б) дорівнює чисельнику; в) удвічі менший за чисельник; г) дорівнює квадрату чисельника без одиниці.

54. Обчисліть:

$$\text{а)} \ \frac{5^8}{5^5}; \quad \text{б)} \ \frac{0,3^{10}}{0,3^{11}}; \quad \text{в)} \ \frac{(-3)^{12}}{5 \cdot (-3)^9}; \quad \text{г)} \ \frac{-0,5^8}{(-0,5)^9}; \quad \text{г)} \ \frac{3,4^0}{2^5 - 5^2}.$$

55. Знайдіть значення виразу:

$$\text{а)} \ \frac{8^9}{8^6 \cdot 8^4}; \quad \text{б)} \ \frac{7^2 \cdot (-7)^5}{(-7)^6}; \quad \text{в)} \ \frac{0,2^7}{0,2^8 \cdot 10}; \quad \text{г)} \ \frac{2,4^4}{8^4 \cdot 0,3^4}.$$

Визначте, при яких значеннях змінних не має змісту дріб (56–58).

56. а) $\frac{m}{n}$; б) $\frac{2}{a-3}$; в) $\frac{x+p}{x+4}$; г) $\frac{3c-8}{3c+8}$.

57. а) $\frac{3}{x-5}$; б) $\frac{a-6}{a+9}$; в) $\frac{3m}{2-m}$; г) $\frac{12z}{3z-15}$.

58. а) $\frac{3a}{a^2-16}$; б) $\frac{1}{x(x^2-9)}$; в) $\frac{m}{(m^2-1)(m^2-4)}$; г) $\frac{a^0}{a^2+1}$.

59. Наведіть приклади дробів, знаменники яких дорівнюють нулю, якщо: а) $x = 5$; б) $z = -1$; в) $t = 0$; г) $x = 0$ або $x = -3$.

60. Укажіть значення x , допустимі для дробу:

а) $\frac{1}{x-5}$; б) $\frac{2}{5-x}$; в) $\frac{3x}{x^2-4}$; г) $\frac{x-3}{x^2+3}$.

61. Які значення x допустимі для дробу:

а) $\frac{3}{x+5}$;	б) $\frac{x}{x-1}$;	в) $\frac{3x}{3+x}$;
г) $\frac{-5}{x}$;	і) $\frac{2}{x^2+4}$;	д) $\frac{1}{2x-5}$?

62. Знайдіть значення дробу:

а) $\frac{36}{3x-x^2}$, якщо $x = -3$;	в) $\frac{1}{c^2+9}$, якщо $c = -3$;
б) $\frac{a+4}{6a}$, якщо $a = \frac{1}{2}$;	г) $\frac{m}{ m }$, якщо $m = -5$.

63. Заповніть таблицю.

a	-2	-1	0	1	2	3	4	10
$\frac{2}{a-3}$								
$\frac{2a}{a^2-3a}$								

Які значення a недопустимі для дробу $\frac{2}{a-3}$? А для дробу $\frac{2a}{a^2-3a}$?

Чи рівні значення цих дробів, коли $a = 100$?

64. Чи є тотожністю рівність:

а) $\frac{a^5}{a^4} = a$; б) $\frac{m^5}{m^4} = m^3$; в) $\frac{6x^3}{3x} = m^3$?

65. Чи можна вважати тотожними дроби:

а) $\frac{12}{x} \text{ i } \frac{12x^3}{x^2}$; б) $\frac{2a}{b} \text{ i } \frac{2a^2}{b^2}$; в) $\frac{3x^2}{6x} \text{ i } \frac{6x^2}{12x}$; г) $\frac{m}{n} \text{ i } \frac{n}{m}$?

Доведіть тотожність (66–67).

66. а) $\frac{2a \cdot 3b}{a+b} = \frac{6ab}{a+b};$

б) $\frac{15a^3b^2}{5a^2b} = 3ab;$

67. а) $\frac{a^6}{a^3} = a^2 \cdot a;$

б) $\frac{(m-1)^7}{(m-1)^5} = \frac{(m-1)^5}{(m-1)^3};$

в) $\frac{2a+5a}{3a+4a} = \frac{3a+4a}{2a+5a};$

г) $\left(\frac{2ab^2}{6a}\right)^3 = 3 \cdot \left(\frac{b^3}{9}\right)^2.$

в) $\frac{3a^5+2a^5}{a^5} = \frac{15a^5}{2a^5+a^5};$

г) $x+y = \frac{(x+y)^2}{x+y}.$

РІВЕНЬ Б

Запишіть у вигляді одночлена або дробу частку (68–69).

68. а) $-8x^4 : 2a;$

б) $-6x^4 : 3x^5;$

в) $-9x^7 : 9x^7;$

г) $32ac^2 : 8a^3c;$

і) $2,5x^7 : 0,5x^3;$

д) $1,2 : (-0,3xy^3).$

69. а) $6ac : (-3a);$

б) $6xy : (-3xz);$

в) $4a^2 : (-2a^3);$

г) $-3 : 21x;$

і) $3,3a^5c^3 : 11a^3;$

д) $1,8p^2 : 6q^2.$

70. Знайдіть значення дробу:

а) $\frac{x^2}{a^2-10}$, якщо $a = 3$ і $x = 2,5$; в) $\frac{2(a+b)}{a-b}$, якщо $a = 9$ і $b = -7$;

б) $\frac{2x}{x^2-y^2}$, якщо $x = -12$ і $y = 13$; г) $\frac{x}{y(x-2)}$, якщо $x = 6$ і $y = \frac{1}{3}$.

71. Користуючись калькулятором, знайдіть значення дробу $\frac{2x^2+3}{3x}$,

якщо: а) $x = 2,75$; б) $x = 21,8$.

72. Складіть і заповніть таблицю значень дробів $\frac{2a}{2+a}$, $\frac{a}{1+0,5a}$ і $\frac{2a^2}{2a+a^2}$ для цілих значень a , $|a| \leq 5$. Який висновок можна зробити?

73. Чи при будь-якому значенні змінної x значення дробу:

а) $\frac{9}{x^2+1}$ — додатне; в) $\frac{-x^2}{x^2+15}$ — від'ємне;

б) $\frac{3x^2}{4x^2-4x+1}$ — додатне; г) $\frac{x^2+6}{2x-x^2-1}$ — від'ємне?

74. Доведіть, що при будь-якому значенні змінної x значення дробу

$\frac{5}{x^2+3}$ — додатне, а значення дробу $\frac{(-3)^2}{-3-x^2}$ — від'ємне.

75. Доведіть, що для даного дробу допустимими є будь-які значення змінних:

а) $\frac{3x}{x^2+1}$; б) $\frac{5}{(x-1)^2+3}$; в) $\frac{2}{4x^2-4x+3}$.

76. При яких значеннях змінної x не має змісту дріб:

а) $\frac{2}{x(1+x)}$; в) $\frac{x^3}{4x^2-100}$; г) $\frac{-1}{x^3-x^2}$;
 б) $\frac{1+x^2}{1-x^2}$; г) $\frac{1-x^2}{1+x^2}$; д) $\frac{3}{9x-x^3}$?

77. Які значення x допустимі для дробу:

а) $\frac{1}{x(x-1)(x+2)}$; в) $\frac{(x-3)^2}{(2x+1)^2(x-7)^2}$; г) $\frac{x^2-5x+100}{(x^2-4)(x^4-1)}$;
 б) $\frac{3-x}{(2x-1)(x^2-16)}$; г) $\frac{x+13}{(x^2+1)(2x^2+3)}$; д) $\frac{1}{x^2-4x+4}$?

78. Укажіть допустимі значення змінної для дробу:

а) $\frac{2x}{x+7}$; в) $\frac{5a}{a^2+3}$; г) $\frac{3}{(y-1)(y+6)}$; е) $\frac{(c-2)^2}{24}$;
 б) $\frac{4}{1-2x}$; г) $\frac{m+12}{m^2-16}$; д) $\frac{8-x}{x(x^2+1)}$; е) $\frac{7a-2}{a^2-5a}$.

79. Запишіть дроби, які не мають змісту, якщо:

а) $x = 3$; г) $a = 0$ і $a = 0,5$;
 б) $y = -1$; г) $m = 1$ і $m = -5$;
 в) $y = -4$ і $y = 0$; д) $x = 0$ і $x = -2$, або $x = 2$.

80. Розв'яжіть рівняння відносно змінної x і вкажіть, при яких значеннях a рівняння має корені:

а) $ax - 2 = 2x + 3$; в) $4(a^2x - 3) = a + x$;
 б) $ax - a = 7x - 4$; г) $9x - 5 = a(ax - 2)$.

81. При яких значеннях c значення дробу $\frac{c+2}{5}$ дорівнює:

а) 1; б) 0; в) -1 ; г) 2; р) -100 ?

82. При яких значеннях x значення дробу $\frac{3x-12}{4}$ дорівнює:

а) -3 ; б) 0; в) 1; г) 3?

Розв'яжіть рівняння (83–85):

83. а) $\frac{4x+1}{3} = 3$; б) $\frac{2x-3}{7} = 9$; в) $\frac{2x+3}{5} = 7$.

84. а) $\frac{x+4}{3} = \frac{2x-1}{5}$; в) $\frac{x-3}{4} = \frac{2-3x}{5}$; г) $\frac{4x^2-x+9}{6} = \frac{2x^2+1}{3}$.

б) $\frac{x+1}{3} = \frac{2x+1}{9}$; г) $\frac{7+3x^2}{3} = \frac{2x^2+5x-2}{2}$;

85. а) $\frac{2x}{3} - \frac{3x}{5} = 6$; в) $\frac{x}{2} + \frac{2x}{3} = 14$; г) $\frac{5x}{3} = \frac{x}{5} - 2$.

б) $\frac{x+2}{3} = \frac{x-2}{5}$; г) $\frac{2x-1}{5} = \frac{5-x}{3}$; д) $\frac{3x+1}{5} - \frac{2x}{3} = 6$.

86. Чи можна вважати тотожними дроби:

а) $\frac{a}{a-2} \text{ і } \frac{a^2}{a^2-4}$; б) $\frac{a}{a-2} \text{ і } \frac{a^2}{(a-2)^2}$?

87. Чи тотожні вирази:

а) $\frac{a}{a^2-b^2} \text{ і } \frac{b}{a^2-b^2}$; в) $\frac{a^2+2ab^2+b^2}{(a+b)^2} \text{ і } \frac{(a-b)^2}{a^2-2ab+b^2}$;

б) $\frac{x}{x^2-y^2} \text{ і } \frac{x}{(x-y)(x+y)}$; г) $\frac{x+1}{x-1} \text{ і } \frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-2xy-y^2}$?

88. Задача Луї Бенжамена Франкера (1773–1849). Розбити на два дроби дріб $\frac{n}{d}$, знаменник якого d є добутком двох чисел a і b , які не мають спільного дільника $\left(\frac{n}{d} = \frac{58}{77}\right)$.

89*. Доведіть тотожність, поділивши чисельник на знаменник:

а) $\frac{x^3-6x^2+11x-6}{x-1} = x^2-5x+6$;

б) $\frac{x^3-6x^2+11x-6}{x-2} = x^2-4x+3$;

в) $\frac{x^3-6x^2+11x-6}{x-3} = x^2-3x+2$.

90*. Доведіть тотожність:

а) $\frac{x^4+2x^3-13x^2-14x+24}{(x-3)(x+4)} = x^2+x-2$;

б) $\frac{x^4+2x^3-13x^2-14x+24}{(x-1)(x+2)} = x^2+x-12$.

«Недостатньо лише зрозуміти задачу, необхідно мати бажання розв'язати її.

Без сильного бажання розв'язати складну задачу не можна, але за його наявності таке можливо. Де є бажання, знайдеться шлях!»

Д. Пойя

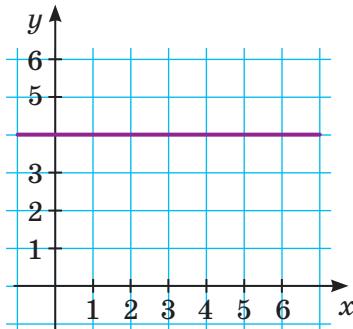
ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

91. Скоротіть дріб: а) $\frac{35}{56}$; б) $\frac{144}{441}$; в) $\frac{5120}{2520}$; г) $\frac{693}{825}$; г) $\frac{3366}{4488}$.

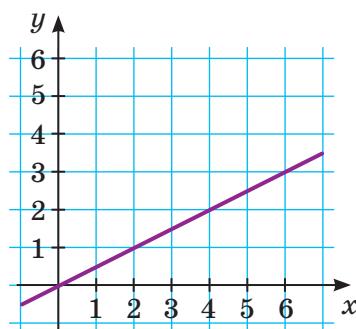
92. Заповніть порожні клітинки таблиці.

Ділене	Дільник				
	a^2	ac	$2a^3c$	$-2ac^3$	$-12c^2$
$6a^5c^4$					
$12a^3c^5$					
$-6a^4c^3x$					
$0,5a^3c^2$					

93. Задайте формулами функції, графіки яких зображені на малюнках 4 і 5.



Мал. 4



Мал. 5

СКАРБНИЧКА ДОСЯГНЕНЬ

✓ Знаю, що таке раціональний дріб:

$$\frac{A}{B} = \frac{\text{многочлен}}{\text{многочлен}}$$

A — чисельник
 B — знаменник

✓ Знаю, які значення змінних є допустимими для дробу:

$$\frac{A}{B} \text{ існує, якщо } B \neq 0$$

✓ Умію наводити приклади різних дробів.

✓ Умію визначати допустимі значення дробів:

$$\frac{2x}{x+5}, \quad x \neq -5$$

$$\frac{a+1}{2a-a^2}, \quad a \neq 0, 2$$

ВИКОРИСТОВУЄМО НАБУТИ КОМПЕТЕНТНОСТІ

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо.

— Основну властивість і правила скорочення звичайних дробів

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}, \quad c \neq 0.$$

$$\frac{1}{5} = \frac{1 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{2}{10}$$

$$\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b}, \quad c \neq 0.$$

$$\frac{24}{40} = \frac{8 \cdot 3}{8 \cdot 5} = \frac{3}{5}$$

— Формули скороченого множення (форзац 1 і с. 243).

— Розклад многочленів на множники (с. 243), а саме:

- винесення спільного множника за дужку $2a^5 - 6a^3 = 2a^3(a^2 - 3)$;
- групування $ax - 2a + cx - 2c = a(x - 2) + c(x - 2) = (a + c)(x - 2)$;
- використання формул скороченого множення

$$4x^2 - 9 = (2x - 3)(2x + 3)$$

§ 3 | Основна властивість дробу

Згадаймо основну властивість звичайного дробу. Якщо чисельник і знаменник звичайного дробу помножити на одне й те саме натуральне число, то дістанемо дріб, який йому дорівнює. Іншими словами, при будь-яких натуральних a, b і m :

$$\frac{am}{bm} = \frac{a}{b}.$$

Ця рівність — тотожність. Доведемо її для будь-яких раціональних a, b і m , таких, що $b \neq 0$ і $m \neq 0$.

Нехай $\frac{a}{b} = r$, де r — деяке раціональне число. За означенням дії ділення $a = br$. Помноживши обидві частини цієї рівності на відмінне від нуля число m , одержимо рівність $am = bm \cdot r$, звідси $\frac{am}{bm} = r$.

Отже, якщо $b \neq 0$ і $m \neq 0$, то $\frac{am}{bm} = \frac{a}{b}$.

Доведена тотожність справедлива для будь-яких дробів. Її називають **основною властивістю дробу**.

Якщо чисельник і знаменник дробу помножити або поділити на один і той самий вираз, то дістанемо дріб, який тотожно дорівнює даному.

$$\frac{A}{B} = \frac{A \cdot M}{B \cdot M} \quad \frac{A \cdot M}{B \cdot M} = \frac{A}{B}$$

Тут під «виразом» розуміють вираз зі змінними, який тотожно не дорівнює нулю, або число, відмінне від нуля.

Основна властивість дробу дає можливість замінити дріб виду $\frac{A \cdot M}{B \cdot M}$ тотожно рівним їйому дробом $\frac{A}{B}$. Таке перетворення називають **скороченням дробу**. Наприклад,

$$\frac{cx^3}{ax^3} = \frac{c}{a}, \quad \frac{5a^2m^3x}{10m^4} = \frac{a^2x}{2m}$$

Перший із цих дробів скорочено на x^3 , другий — на $5m^3$.

З основної властивості дробу випливають такі **наслідки**.

1. **Значення дробу не зміниться, якщо знаки чисельника і знаменника змінити на протилежні.**
2. **Значення дробу не зміниться, якщо змінити знак в одного із членів дробу і перед самим дробом.**

$$\frac{-A}{B} = \frac{A}{-B} = -\frac{A}{B}; \quad \frac{A}{B} = \frac{-A}{-B}; \quad \frac{A}{B} = -\frac{-A}{B} = -\frac{A}{-B}.$$

Якщо члени дробу — многочлени, то перед скороченням дробу їх часто доводиться розкладати на множники. Іноді перед скороченням дробу змінюють знак чисельника або знаменника, змінивши відповідно і знак перед дробом.

Приклади.

$$\frac{2ax-4a}{x^2-4} = \frac{2a(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{2a}{x+2};$$

$$\frac{m^2-1}{1-m} = -\frac{(m-1)(m+1)}{m-1} = -\frac{m+1}{1} = -m-1.$$

Зауваження. Останнє перетворення і рівність $\frac{m^2-1}{1-m} = -m-1$ є правильними тільки для $m \neq 1$. Щоб не ускладнювати розв'язування вправ, подібні умови можна не вказувати. Домовимось кожний дріб розглядати тільки при допустимих значеннях його змінних.

ХОЧЕТЕ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Скоротити дріб можна діленням чисельника й знаменника на їх спільний дільник, виражений не тільки цілим виразом, а й дробовим. Наприклад, можна писати

$$\frac{\left(\frac{m}{a}-5\right)x}{\left(\frac{m}{a}-5\right)a} = \frac{x}{a}.$$

Ця рівність — тотожність, правильна за умови, що $a \neq 0$ і $m \neq 5a$.

Іноді доводиться мати справу з дробами, члени яких містять вирази з модулями, наприклад:

$$\frac{|a| \cdot c^2}{c}, \frac{a^2}{|a|}.$$

Такі дроби не відносять до раціональних дробів. Докладніше з ними ви ознайомитеся в старших класах. А тепер розглянемо тільки найпростіші випадки. Перший дріб можна скоротити на c . Рівність

$$\frac{|a| \cdot c^2}{c} = |a| \cdot c$$

правильна при будь-яких значеннях a і $c \neq 0$.

Рівність $\frac{a^2}{|a|} = a$ правильна, якщо $a > 0$. Якщо $a < 0$, то $\frac{a^2}{|a|} = -a$.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

- Сформулюйте основну властивість дробу.
- Що означає «скоротити дріб»?
- При яких a, b, m значення дробу $\frac{am}{bm}$ існує? А значення дробу $\frac{a}{b}$?
- Чи можна множити чисельник і знаменник дробу на 0?
- Сформулюйте наслідки з основної властивості дробу.

ВИКОНАЄМО РАЗОМ

- 1 Скоротіть дріб $\frac{a^2 - 4}{a^2 + 2a}$.

- Розв'язання. $\frac{a^2 - 4}{a^2 + 2a} = \frac{(a-2)(a+2)}{a(a+2)} = \frac{a-2}{a}$.

Відповідь. $\frac{a-2}{a}$.

2 Подайте дріб $\frac{3}{2x}$ зі знаменником: а) $4x^3$; б) $6x(x - 1)$.

● **Розв'язання.** а) Щоб одержати знаменник $4x^3$, треба $2x$ помножити на $2x^2$. Отже, $\frac{3}{2x} = \frac{3 \cdot 2x^2}{2x \cdot 2x^2} = \frac{6x^2}{4x^3}$;

б) щоб одержати знаменник $6x(x - 1)$, треба $2x$ помножити на $3(x - 1)$.

$$\text{Отже, } \frac{3}{2x} = \frac{3 \cdot 3(x - 1)}{2x \cdot 3(x - 1)} = \frac{9(x - 1)}{6x(x - 1)}.$$

$$\text{Відповідь. а) } \frac{6x^2}{4x^3}; \quad \text{б) } \frac{9(x - 1)}{6x(x - 1)}.$$

3 Зведіть до спільного знаменника drobi $\frac{3}{ax^2}$ i $\frac{2a}{cx^3}$.

● **Розв'язання.** Спільний знаменник acx^3 .

$$\frac{3}{ax^2} = \frac{3 \cdot cx}{ax^2 \cdot cx} = \frac{3cx}{acx^3}, \quad \frac{2a}{cx^3} = \frac{2a \cdot a}{cx^3 \cdot a} = \frac{2a^2}{acx^3}.$$

$$\text{Відповідь. } \frac{3cx}{acx^3}; \quad \frac{2a^2}{acx^3}.$$

Виконайте усно

94. Скоротіть дріб:

а) $\frac{8}{12}$;	в) $\frac{160}{20}$;	г) $\frac{-6}{54}$;	е) $\frac{-40}{-48}$;
б) $\frac{21}{105}$;	г) $\frac{-21}{21}$;	д) $\frac{14}{-56}$;	е) $\frac{0,9}{0,15}$.

95. Скоротіть дріб: а) $\frac{a^3}{a^5}$ на a, a^2, a^3 ; б) $\frac{8x^5}{12x^4}$ на $x, x^2, x^3, x^4, 4x, 2x^2, 4x^4$.

96. Оцініть роботу учнів 7 класу (мал. 6).

Варіант I
Скоротіть дроби:

а) $\frac{2c^2}{4c} = 2c$;

б) $\frac{x^2 - x}{x^2} = -x$.

Варіант II
Скоротіть дроби:

а) $\frac{3m^3}{9m^2} = \frac{m}{3}$;

б) $\frac{y^2 - y}{y^2} = \frac{y - 1}{y}$.

97. На які вирази можна скротити дріб $\frac{a^2c^4}{a^4c^2}$?

98. Зведіть до спільного знаменника вирази:

$$\text{а)} \frac{1}{a} \text{ і } \frac{2}{c}; \quad \text{б)} \frac{1}{x^2} \text{ і } \frac{3}{2x}; \quad \text{в)} \frac{a}{xy} \text{ і } \frac{b}{yz}.$$

РІВЕНЬ А

Скоротіть дріб (99–106).

99. а) $\frac{4}{18}$; б) $\frac{120}{40}$; в) $\frac{15}{15}$; г) $\frac{3,6}{12}$.

100. а) $\frac{2a}{4b}$; б) $\frac{a^5}{a^7}$; в) $\frac{x}{x^4}$; г) $\frac{4a}{a}$.

101. а) $\frac{6a^2}{12a^3}$; б) $\frac{3c}{15c^4}$; в) $\frac{7b^3}{14b^3}$; г) $\frac{18}{9a^2x}$.

102. а) $\frac{-6}{12}$; б) $\frac{130}{-70}$; в) $\frac{-25}{-30}$; г) $\frac{0,5}{0,2}$.

103. а) $\frac{a^3}{-a^5}$; б) $\frac{-c^3}{c5}$; в) $\frac{-x}{-xa}$; г) $\frac{-2a^2}{-a}$.

104. а) $\frac{12^{10}}{12^{12}}$; б) $\frac{35^5}{-35^4}$; в) $\frac{0,3^8}{0,3^{11}}$; г) $\frac{(-0,4)^4}{-0,4^4}$.

105. а) $\frac{x(a-2)}{x(b+2)}$; б) $\frac{mp(m-p)}{m^2p(m+p)}$; в) $\frac{27x^2(x+1)}{9x(x+1)}$.

106. а) $\frac{x(a+b)^2}{y(a+b)}$; б) $\frac{(a-x)^2c}{(a-x)^2m}$; в) $\frac{4x(x-y)}{7y(x-y)^2}$.

107. (ЗНО 2017, 2019). Спростіть вираз. а) $\frac{10ab^3}{5a^2b}$; б) $\frac{a^2-b^2}{a^2-ab}$; в) $\frac{9-x^2}{x^2+6x+9}$.

Скоротіть дріб, розкладавши, якщо потрібно, чисельник і знаменник дробу на множники (108–111).

108. а) $\frac{a(b-x)}{xb-x^2}$; в) $\frac{x^2(5x-1)}{5xy^2-y^2}$; г) $\frac{ax^2-x^3}{ax-x^2}$;

б) $\frac{a(4a-3)}{4a^2-3a}$; г) $\frac{xc-mc}{ax-am}$; д) $\frac{2x-x^4}{2y-x^3y}$.

- 109.** а) $\frac{8a-8b}{16b}$; в) $\frac{m-n}{3m-3n}$; г) $\frac{ax-ay}{bx-by}$;
 б) $\frac{xy}{x+xy}$; д) $\frac{a+1}{a^2+a}$; д) $\frac{6a-3b}{6b-12a}$.
- 110.** а) $\frac{5-x}{(x-5)^2}$; б) $\frac{7a^3+a^4}{a^3+7a^2}$; в) $\frac{a^5-ma^2}{a^3b^2-mb^2}$.
- 111.** а) $\frac{2c^2-4c}{2a-ac}$; б) $\frac{b-a}{(a-b)^2}$; в) $\frac{m^4-m}{1-m^3}$.

112. Виконайте ділення:

а) $24p^2x : 48px^2$; в) $(a^2c + bc) : (xa^2 + xb)$;
 б) $-3ax : 12a^2x^3$; г) $(c^2 - n^2) : (n - c)$.

113. Подайте дріб $\frac{2}{a}$ зі знаменником: а) $3a^4$; б) $5a^2(a-3)$.

114. Зведіть до спільного знаменника дроби:

а) $\frac{2}{x} \text{ i } \frac{1}{a}$; в) $\frac{2}{c} \text{ i } \frac{1}{a-b}$; г) $\frac{1}{x-a} \text{ i } \frac{1}{x+a}$;
 б) $\frac{a}{2m} \text{ i } \frac{b}{3m^2}$; г) $\frac{8}{x} \text{ i } \frac{7}{x(x-a)}$; д) $\frac{1}{(a+b)^2} \text{ i } \frac{2a}{a-b}$.

Доведіть тотожність (115–118).

115. а) $\frac{5x^2y}{xy} = \frac{10xy}{2y}$; в) $\frac{4b(a+b)}{12b} = \frac{5a(a+b)}{15a}$;
 б) $\frac{6ab}{2b^2c} = \frac{3ac}{bc^2}$; г) $\frac{2(x-y)}{xy-y^2} = \frac{4(x-y)}{2y(x-y)}$.

116. а) $\frac{a^2-1}{a-1} = a+1$;
 б) $\frac{a^2-1}{a+1} = a-1$;

в) $\frac{4a^2-x^2}{2a+x} = 2a-x$;
 г) $\frac{4a^2-x^2}{2a-x} = 2a+x$.

117. а) $\frac{(a+c)^2}{a+c} = a+c$;
 б) $\frac{(a+c)^3}{a+c} = (a+c)^2$;

в) $\frac{x^2+2x+1}{x+1} = x+1$;
 г) $\frac{x^2-2x+1}{x-1} = x-1$.

118. а) $\frac{x^3-c^3}{x^2+xc+c^2} = x-c$;
 б) $\frac{x^3+c^3}{x+c} = x^2-xc+c^2$.

119. Замініть «зірочку» одночленом так, щоб рівність стала тотожністю:

$$\text{а)} \frac{5x^3}{*} = \frac{x}{2};$$

$$\text{в)} \frac{3}{7y^2} = \frac{3xy}{*};$$

$$\text{г)} \frac{*}{16m^7} = \frac{3n}{4m};$$

$$\text{б)} \frac{3}{xy} = \frac{*}{2x^2y};$$

$$\text{г)} \frac{*}{10a^4x} = \frac{4x^3}{5a^3};$$

$$\text{д)} \frac{4x^3}{5a^3} = \frac{8ax^4}{*}.$$

120. Скоротивши дріб, учень витер на класній дощці частину записів (мал. 7). Відновіть ці записи.

121. Знайдіть значення droбу:

$$\text{а)} \frac{6a^3c^2}{3a^2c^3}, \text{ якщо } a = 8, c = 16;$$

$$\text{б)} \frac{x^2 - 9}{x + 3}, \text{ якщо } x = 3,25.$$

$$\text{а)} \frac{120(a-b)x}{4(a-b)} = \frac{30}{-b}x$$

$$\text{б)} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 2x} = \frac{x+3}{x}$$

Мал. 7

РІВЕНЬ Б

Скоротіть дріб (122–125).

$$\text{122. а)} \frac{7a^2b}{21ab^3}; \quad \text{б)} \frac{35xz^5}{7xz^5}; \quad \text{в)} \frac{25ax^2}{75a^8x}; \quad \text{г)} \frac{5^3cm}{5^0c^2m}.$$

$$\text{123. а)} \frac{x^2 - a^2}{3x^3 - 3a^2x}; \quad \text{б)} \frac{5x^2 - 5xy}{5(x-y)^2}; \quad \text{в)} \frac{3x^2c - 6xc^2}{x^2c - 2xc^2}.$$

$$\text{124. а)} \frac{a^2 - 2ac + c^2}{(a-c)^3}; \quad \text{б)} \frac{(x+z)^4}{x^2 + 2xz + z^2}; \quad \text{в)} \frac{a^2 - n^2}{a^2 - 2an + n^2}.$$

$$\text{125. а)} \frac{ax + ay - az}{cx + cy - cz}; \quad \text{б)} \frac{a^3 - 1}{a^2 + a + 1}; \quad \text{в)} \frac{x^2 - xz + z^2}{x^3 + z^3}.$$

126. Виконайте ділення:

$$\text{а)} 8a^2c^3 : 4a^3c^2;$$

$$\text{б)} 5a^3x^5 : (-25a^2x^4);$$

$$\text{в)} (nx^2 + mx^2) : (m + n);$$

$$\text{г)} (a^2 - 36) : (36 - a^2);$$

$$\text{г)} (xa^3 - x) : (a - 1);$$

$$\text{д)} (nx^3 + n^4) : (nx + n^2).$$

Доведіть тотожність (127–128).

$$\text{127. а)} \frac{4ab}{(a+b)^2 - (a-b)^2} = 1;$$

$$\text{б)} \frac{x+y}{x^2 - y^2} = \frac{x-y}{x^2 - 2xy + y^2};$$

$$\text{б)} \frac{a^2 + b^2}{(a+b)^2 + (a-b)^2} = \frac{1}{2};$$

$$\text{г)} \frac{a^2 + ab}{a+b} = \frac{a^3 - a}{(a-1)(a+1)}.$$

128. а) $\frac{3a^2+2a}{6+9a} = \frac{2(a^3+a)}{6+6a^2};$
 б) $\frac{x^3-1}{(x+1)^2-x} = \frac{x-2x^2+x^3}{x^2-x};$

в) $\frac{a^4-2a^2+1}{a^3-a^2-a+1} = a+1;$
 г) $\frac{a^6-2a^3+1}{(a^2+a+1)^2} = (a-1)^2.$

Спростіть вираз (129–131).

129. а) $\frac{3x+2+3xy+2y}{2y-2+3xy-3x};$ в) $\frac{6a^2+15ab-8ac-20bc}{12a^2-9ab-16ac+12bc}.$

130. а) $\frac{(x+2)(x-1)}{x^2+3x+2};$ б) $\frac{2a^2-18}{a^2+2a-15};$ в) $\frac{x^2-4x+3}{x^2-2x-3}.$

131. а) $\frac{x(y+1)^2-y(x+1)^2}{x(y+1)-y(x+1)};$ в) $\frac{3p^3-81q^3}{2p^2q+6q^2p+18q^3}.$

132. Чи зміниться значення дробу, якщо x і y одночасно помножити на 10:

а) $\frac{x}{y};$	в) $\frac{x-y}{3x};$	г) $\frac{x+y}{y^2};$	е) $\frac{x-5}{y+5};$
б) $\frac{5x}{y};$	г) $\frac{x-y}{x+y};$	д) $\frac{10x}{x^2+y^2};$	е) $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}?$

133. Який із дробів: а) найменший; б) найбільший, якщо кожне із чисел a і c більше за 1:

$$\frac{a}{c-1}; \quad \frac{a}{c+1}; \quad \frac{2a}{2c+1}; \quad \frac{2a}{2c-1}; \quad \frac{3a}{3c+1}; \quad \frac{3a}{3c-1}?$$

134. Відновіть втрачені у знаменниках записи:

а) $\frac{15(x-y)^2 x^2}{21(x-\dots \dots -y)} = \frac{5x}{\dots}$; в) $\frac{4(x^2-y^2)}{24\dots \dots x} = \frac{x+y}{\dots}$.

135. Подайте дріб, тотожний дробу $\frac{x+y}{3x}$, за умови, що його знаменник дорівнює: а) $9x^2y$; б) $12xy^2$; в) $3x(x-y)$; г) $6x^2-6xy$.

Зведіть до спільногого знаменника дроби (136–137).

136. а) $\frac{3}{a-2}$ і $\frac{2}{(2-a)^2};$ б) $\frac{5}{3x-4}$ і $\frac{7}{4-3x};$ в) $\frac{4z}{3-z}$ і $\frac{1}{(z-3)^3}.$

137. а) $\frac{x+3}{x(x-5)}$ і $\frac{x}{x^2-25};$ б) $\frac{a+b}{a-b}$ і $\frac{a+2}{a^2-b^2};$ в) $\frac{a+2}{a^3-8}$ і $\frac{1}{a^2-2a}.$

138. Відкрита задача. Скоротіть дріб: а) $\frac{m^2-2m}{m^3-\boxed{?}};$ б) $\frac{8y-x^3y}{x^2y^2+\boxed{?}}.$

Спростіть вираз (139–141).

139. а) $\frac{ac+bx+ax+bc}{ay+2bx+2ax+by};$

б) $\frac{x-xy+z-zy}{1-3y+3y^2-y^3}.$

140. а) $\frac{x^2-(a-b)x-ab}{x^3+bx^2+ax+ab};$

б) $\frac{(x+a)^2-(z+c)^2}{(x+z)^2-(a+c)^2}.$

141. а) $\frac{x^4+(2c^2-a^2)x^2+c^4}{x^4+2ax^3+a^2x^2-c^4};$

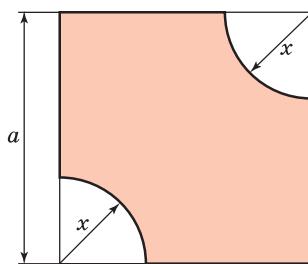
б) $\frac{a^3c-2a^2c^2+ac^3-ab^2c}{(a^2+c^2-b^2)^2-4a^2c^2}.$

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

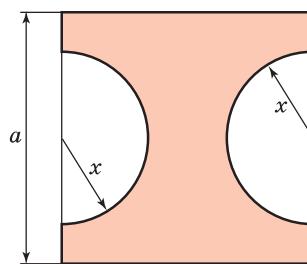
142. Абонемент до тренажерного залу коштує на 15 % дешевше, ніж абонемент на відвідування басейну. Яка вартість кожного абонемента, ящо разом вони коштують 1147 грн?

143. Розв'яжіть рівняння: $5-2x(3x-2)=x(x+4)-7x(x-5).$

144. Складіть вираз для обчислення площин фігури, зображеній на малюнку 8 (а, б).



а



б

Мал. 8

145. Побудуйте графік функції: а) $y = 2x + 3;$ б) $y = 2x - 1.$

СКАРБНИЧКА ДОСЯГНЕНЬ

✓ Знаю основну властивість дробу і вмію її сформулювати

$$\frac{A}{B} = \frac{A \cdot M}{B \cdot M}; \quad \frac{A \cdot M}{B \cdot M} = \frac{A}{B}$$

✓ Умію скорочувати дроби і можу пояснити, як це робити

$$\frac{(y-3)^2}{(y-3)(y+3)} = \frac{y-3}{y+3}$$

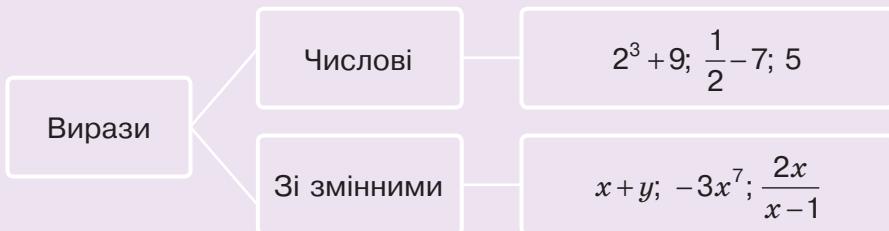
✓ Знаю і вмію використовувати тотожності

$$\frac{-A}{B} = \frac{A}{-B} = -\frac{A}{B}; \quad \frac{A}{B} = \frac{-A}{-B}; \quad \frac{A}{B} = -\frac{-A}{B} = -\frac{A}{-B}$$

Використовуємо набуті компетентності

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:

- Що таке вираз, цілий вираз, раціональний вираз (с. 242).
- Які бувають вирази



- Види цілих виразів (див. схему на с. 242).
- Що таке рівняння, корінь рівняння, рівносильні рівняння (с. 241).

§ 4 Раціональні вирази

Досі вам були відомі тільки цілі вирази. Ви розглядали різні їх види та способи перетворення. В алгебрі використовують не тільки цілі вирази, а й дробові. Такі вирази разом називають раціональними.

Вираз, складений із чисел і змінних за допомогою дій додавання, віднімання, множення, ділення або піднесення до степеня, називається раціональним.

Приклади раціональних виразів:

$$3, x, a - x^2, m + \frac{x-1}{x^2+1}, \left(\frac{a}{x} + 1\right) : \left(\frac{a+x}{2x} - 1\right)^2$$

Цілі вирази — це раціональні вирази, які не містять ділення на змінну. Дробові вирази — це раціональні вирази, які містять ділення на змінну.

Цілі вирази і дроби — найпростіші види раціональних виразів. Інші види цих виразів пов’язані між собою, як показано на схемі (мал. 9).



Мал. 9

Словом «інші» тут позначено дробові раціональні вирази, які не є дробами, наприклад:

$$a - \frac{a}{1 + \frac{1}{a}}, \quad \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{x + y} - \frac{1}{xy}$$

- ➡ Рівняння називається **раціональним**, якщо його ліва і права частини — раціональні вирази.
- ➡ Раціональне рівняння називається **дробовим**, якщо його права або ліва, або обидві частини — вирази дробові.

Приклади дробових рівнянь:

$$\frac{2x(x-2)}{x} = 0; \quad \frac{1}{5+x} - \frac{2}{x} = 3; \quad \frac{x}{2} + \frac{2}{x} = 2x; \quad \frac{x+1}{x} = \frac{x+1}{x+2}.$$

Щоб розв'язувати такі рівняння, потрібно перш за все знати, як виконують дії з дробовими виразами. Тому в наступних параграфах будемо розглядати додавання, віднімання, множення, ділення і піднесення дробів до степеня.

Найпростіші дробові рівняння, а саме рівняння, у яких ліва частина — це дріб, а права — нуль, розв'язують за умови рівності дробу нулю.

Дріб дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли чисельник дорівнює нулю, а знаменник відмінний від нуля.

Наприклад, щоб розв'язати рівняння $\frac{5x-3}{10x} = 0$, потрібно прирівняти до нуля чисельник і розв'язати утворене рівняння:

$$5x - 3 = 0, \quad 5x = 3, \quad x = \frac{3}{5} = 0,6.$$

Крім того, слід перевірити, чи не дорівнює нулю при такому значенні x знаменник: $10 \cdot 0,6 = 6 \neq 0$. Отже, $x = 0,6$ — корінь даного рівняння.

Зверніть увагу! Умова рівності дробу нулю складається з двох частин:

- 1) чисельник дорівнює нулю;
- 2) знаменник відмінний від нуля.

Кожна із цих частин умови однаково важлива.

ХОЧЕТЕ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

У наведеній вище схемі словом «дроби» названо тільки *раціональні дроби* (частину раціональних виразів). А бувають дроби не лише раціональні, наприклад,

$$\frac{2-x}{2-|x|}, \frac{\sin x}{\cos x}, \frac{\sqrt{3}}{5+\sqrt{3}}.$$

Це також дроби, але нераціональні. Тому, забігаючи трохи наперед, співвідношення між різними видами виразів можна зобразити такою діаграмою (мал. 10).



Мал. 10

Якщо вираз містить змінні під знаком модуля, його не вважають раціональним. Хоч багато таких виразів можна замінити двома, трьома чи більшою кількістю раціональних виразів. Наприклад, розглянемо дріб $\frac{x-|x|}{2x^2}$.

Якщо $x \geq 0$, то $|x| = x$; якщо $x < 0$, то $|x| = -x$. Тому

$$\frac{x-|x|}{2x^2} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x > 0, \\ \frac{1}{x}, & \text{якщо } x < 0, \\ \text{не існує,} & \text{якщо } x = 0. \end{cases}$$

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Які вирази називають раціональними?
2. Які вирази називають цілими?
3. Які вирази називають дробовими?
4. Чим відрізняються поняття «дріб» і «дробовий вираз»?
5. Які рівняння називають раціональними?
6. Які рівняння називають дробовими?
7. Сформулуйте умови рівності дробу нулю.

ВИКОНАЄМО РАЗОМ

1 При яких значеннях змінної x значення дробу $\frac{5x-1}{4-3x}$ дорівнює нулю?

- Розв'язання.** Значення дробу дорівнює нулю тільки тоді, коли чисельник дорівнює нулю, а знаменник відмінний від нуля. Прирівнямо чисельник до нуля: $5x - 1 = 0$, $5x = 1$, $x = 0,2$.

Якщо $x = 0,2$, знаменник $4 - 3x$ не дорівнює нулю. Отже, якщо $x = 0,2$, то дріб $\frac{5x-1}{4-3x}$ дорівнює нулю.

Відповідь. $x = 0,2$.

2 Чи має корені рівняння $\frac{x-3}{x^2-9} = 0$?

- Розв'язання.** Значення дробу дорівнює нулю тільки тоді, коли нуль дорівнює його чисельник. Чисельник дробу в даному рівнянні дорівнює 0 тільки тоді, коли $x = 3$. Але при такому значенні x знаменник дорівнює нулю. А на нуль ділити не можна. Символ $\frac{0}{0}$ —

не число.

Відповідь. Рівняння коренів не має.

ВИКОНАЙТЕ УСНО

146. Який із виразів: 1) цілий; 2) дробовий; 3) раціональний:

a) $\frac{1}{2}x + \frac{3}{5}$;	b) $x^4 : y^4$;	c) $\frac{2+3x}{3x+2}$;	d) $\frac{1-x^2}{x+1}$;
e) $\frac{x-2}{2}$;	f) $\frac{(x+y)^2}{2}$;	g) $5+5:x$;	h) $a^3 \cdot b^3$?

147. Знайдіть значення виразу $\frac{12}{m}$, якщо:

a) $m = 1$;	b) $m = 3$;	c) $m = 5$;	d) $m = 7$;
e) $m = 2$;	f) $m = 4$;	g) $m = 6$;	h) $m = 8$.

148. При яких значеннях змінної не має змісту вираз:

a) $\frac{x+1}{4} + \frac{4}{x+1}$;	b) $x + \frac{1}{x+1}$;	c) $\frac{1}{x(x+1)}$?
--------------------------------------	--------------------------	-------------------------

149. При яких значеннях змінної дріб дорівнює нулю:

a) $\frac{x+5}{x-5}$;	b) $\frac{5}{x-5}$;	c) $\frac{x-5}{5}$;	d) $\frac{x^2-5}{x-5}$?
------------------------	----------------------	----------------------	--------------------------

РІВЕНЬ А

150. Які з виразів цілі, а які — дробові:

а) $\frac{7x+3}{x}$; б) $\frac{3x-7}{3}$; в) $\frac{1}{3}x+7$; г) $\frac{1}{3}:(x-7)$?

151. Знайдіть значення виразу:

а) $7,5 - 2,5^2$; б) $1\frac{1}{2} - 2,5$; в) $\frac{3,5}{2,3 + 4,7}$; г) $(1 + 51)^0$.

152. Знайдіть значення виразу $\frac{10}{x} + \frac{x}{10}$, якщо:

а) $x = 1$; б) $x = 2$; в) $x = 5$; г) $x = 10$.

Укажіть, при яких значеннях x не має змісту вираз **(153–154)**.

153. а) $\frac{9}{x}$; б) $\frac{3}{x^2}$; в) $-\frac{5}{x^3}$; г) $\frac{8}{-x}$.

154. а) $\frac{5}{x+3}$; б) $\frac{7}{x-2}$; в) $\frac{x}{x+1}$; г) $\frac{x+1}{x-3}$.

155. При яких значеннях x дорівнює нулю значення дробу:

а) $\frac{x-3}{8}$; б) $\frac{x+5}{14}$; в) $\frac{2x+3}{3x}$; г) $\frac{x(x-3)}{x^2+2x}$?

156. Наведіть приклади дробів, які дорівнюють нулю, якщо:

а) $x = 3$; б) $y = -1$; в) $x = 0,5$; г) $y = -1,5$.

157. Чи може дорівнювати нулю значення дробу:

а) $\frac{5}{x+3}$; б) $\frac{(-1)^2}{(x-1)^2}$; в) $\frac{x-1}{x}$; г) $\frac{x+1}{x^2-1}$?

158. Чи є значення $x = 15$ коренем рівняння:

а) $\frac{30}{x} = 2$; б) $\frac{1}{x-8} = \frac{1}{7}$; в) $\frac{x+15}{x-15} = 0$?

159. Яке із чисел -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 є коренем рівняння $\frac{2x-x^2}{4-x^2} = 0$?

Розв'яжіть рівняння **(160–161)**.

160. а) $\frac{x+3}{3-x} = 0$; б) $\frac{2x-10}{x+5} = 0$; в) $\frac{x^2}{x+2} = 0$; г) $\frac{x-1}{x^2+1} = 0$.

161. а) $\frac{x(x+1)}{x^2-1} = 0$; б) $\frac{x^2-4}{x^2+4} = 0$; в) $\frac{x^2-25}{(x+5)^2} = 0$; г) $\frac{2x^2-10x}{x(x+5)} = 0$.

РІВЕНЬ Б

162. Розмістіть вирази у відповідних колонках таблиці:

$$\begin{array}{cccc} 4a^2b; & \frac{a^2}{4b}; & 4+a^2b; & 4:a^2b; \\ & & 4a^2+|b|; & \\ (4+a^2)b; & (4+a)^2:b; & \frac{|b|}{4a}; & \frac{a^2b}{4}; \end{array}$$

$$\frac{4+a^2}{b}; \quad \left(\frac{a}{4}\right)^2+b.$$

Раціональні вирази	
цілі	дробові

163. Чи є дробом вираз:

а) $\frac{1}{2}x$; б) $\frac{x+5}{5}$; в) $5(x+5)$; г) $\frac{x+y}{0,1}+10$; г) $5\frac{2}{3}$?

Який із цих виразів є дробовим?

164. Знайдіть значення виразу $|x|+|y|$, якщо

а) $x = 0,75$, $y = -7,25$; б) $x = 1,331$, $y = -1,331$.

Чи є цей вираз раціональним?

165. Знайдіть значення числового виразу:

а) $\frac{1,5}{4,5-1\frac{1}{2}}$; б) $\frac{15^2-5^2}{20}$; в) $\frac{144}{12^2}+\left(\frac{144}{12}\right)^2$.

166. Знайдіть значення виразу:

а) $x^2+2x+1-\frac{1}{x^2+2x+1}$, якщо: 1) $x = 0$; 2) $x = 1$; 3) $x = 9$;

б) $4a^2-4a+1+\frac{1}{4a^2-4a+1}$, якщо: 1) $a = -\frac{1}{2}$; 2) $5\frac{1}{2}$.

167. Знайдіть значення виразу, розглянувши всі можливі випадки:

а) $1+\frac{|a|}{a}$; в) $\frac{a|b|}{ab}$;

б) $\frac{a}{|a|}+\frac{|b|}{b}$; г) $\frac{ab}{|ab|}$.

168. Швидкість човна становить v км/год, а швидкість течії річки — 2 км/год. За який час човен пройшов 100 км: а) за течією; б) проти течії?

169. Швидкість катера — 50 км/год, а швидкість течії річки — v км/год. За який час човен пройшов 50 км: а) за течією річки; б) проти течії річки?

170. Катруся виліпила 96 вареників за n хв, а її мама — 105 вареників за m хв. Скільки вареників виготовили мама з доночкою за 1 год?

171. Змішали m г 10 % -го та n г 15 % -го розчину солі. Якою буде концентрація утвореного розчину?

172. Чи може значення даного дробу бути від'ємним? А дорівнювати нулю?

$$\text{а)} \frac{8}{2+c^2}; \quad \text{б)} \frac{n^2+2}{(n-1)^2+2}; \quad \text{в)} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^4+2}.$$



Визначте, при яких x дорівнює нулю значення дробу (173–174).

173. а) $\frac{2x+3}{x^2+5}$; б) $\frac{x^2-4x}{x+3}$; в) $\frac{x^2-9}{x-3}$; г) $\frac{x}{x^2-3x}$.

174. а) $\frac{x+3}{6-2x}$; б) $\frac{2y-1}{y^2-1}$; в) $\frac{x(x-4)}{12+x}$; г) $\frac{12m}{m+m^2}$.

175. Наведіть приклади дробів, які дорівнюють нулю, якщо:

а) $x = 0$;	в) $y = 0$ і $y = -2$;	г) $z = 3$ і $z = -4$;
б) $m = -4$ і $m = 4$;	г) $x = 5$;	д) $a = -\frac{1}{3}$ і $a = \frac{2}{3}$.

176. Чи є значення $x = 12$ коренем рівняння:

а) $\frac{x}{4} = 3$;	в) $\frac{x+12}{x-12} = 0$;	г) $\frac{x-4}{4} = \frac{x}{6}$;
б) $\frac{3x-1}{5} = 7$;	г) $\frac{x-2}{2-x} = 1$;	д) $\frac{x(x-9)}{4} = x-3$?

177. Покажіть, що дане рівняння не має розв'язків:

а) $\frac{5}{x-3} = 0$;	б) $\frac{z^2+10}{z-5} = 0$;	в) $\frac{x-7}{x^2-7x} = 0$.
--------------------------	-------------------------------	-------------------------------

Розв'яжіть рівняння (178–180).

178. а) $\frac{2x-3}{5x} = 0$;

б) $\frac{15-3x}{x+4} = 0$;

в) $\frac{0,5+2x}{x^2-1} = 0$.

179. а) $\frac{3x}{x^2-1} = 0$;

б) $\frac{x^2-2x+1}{1-x^3} = 0$;

в) $\frac{x^2-1}{x^2+4} = 0$.

180. а) $\frac{x^2+4}{x^2-1} = 0$;

б) $\frac{x^2-3x}{x^2-6x+9} = 0$;

в) $\frac{4-4x+x^2}{4-x^2} = 0$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

181. Виконайте дії:

$$\text{а)} \frac{2}{3} + \frac{5}{3}; \quad \text{б)} \frac{2}{3} + \frac{5}{6}; \quad \text{в)} 7 - \frac{9}{11}; \quad \text{г)} \frac{5}{21} - 1\frac{1}{35}.$$

Зведіть до спільного знаменника дроби (182–183).

$$\text{182. а)} \frac{a}{4(a-b)} \text{ і } \frac{b}{20(a-b)}; \quad \text{б)} \frac{x+y}{xyz} \text{ і } \frac{6y}{xz^2}; \quad \text{в)} \frac{3}{x^2-a^2} \text{ і } \frac{x+1}{(x+a)^2}.$$

$$\text{183. а)} \frac{x}{2(x-1)} \text{ і } \frac{2}{x(x-1)}; \quad \text{б)} \frac{1}{x^2+x} \text{ і } \frac{1}{x^2+2x+1}; \quad \text{в)} \frac{2a}{a^2-b^2} \text{ і } \frac{b}{18a}.$$

 **184.** У магазині діє акція: купуючи спортивну сумку за 824 грн і футбольку за 126 грн у комплекті, ви отримаєте знижку 15 %. Скільки грошей можна зекономити?

185. Установіть відповідність між значеннями змінних, при яких дроби (1–4) не мають змісту, і значеннями виразів (А–Д), якщо $x = 1$.

1	2	3	4	
$\frac{x^2-2x+3}{2x(x^2+1)}$	$\frac{x}{3x-6}$	$\frac{x+5}{2x-5}$	$\frac{1-x}{1+x}$	
A	B	V	G	D
$\frac{2x+3}{x^2+1}$	$\frac{x^2-1}{2x+3}$	$\frac{2(x+3)}{(x+1)^2}$	$\frac{x^2+x-1}{3-2x}$	$\frac{x^2+x-1}{2x-3}$

СКАРБНИЧКА ДОСЯГНЕНЬ

- ✓ Можу навести приклади раціонального виразу і раціонального дробу.
- ✓ Розрізняю вирази зі змінними:
 - цілі раціональні $2x + 3xy^5; 1 - 0,5a; 2c - 1,1c^2; -x; \dots$
 - дробові раціональні $\frac{2x}{x+5}; \frac{2c-cx}{7c}; \frac{1}{5x-y}; \frac{2x-y}{3xy}.$
- ✓ Формулюю і використовую для розв'язування задач умову рівності дробу нулю. Якщо $\frac{A}{B} = 0$, то $\begin{cases} A = 0, \\ B \neq 0 \end{cases}$
- ✓ Можу складати дроби і дробові вирази за вказаними умовами.
- ✓ Хочу навчитися виконувати дії з раціональними дробами.

Використовуємо набуті компетентності

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:

- Кожне ціле число можна записати у вигляді дробу зі знаменником 1 або іншим знаменником

$$5 = \frac{5}{1}$$

$$8 = \frac{24}{3} = \frac{40}{5}$$

- Як виконувати дії додавання і віднімання зі звичайними дробами

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$$

$$\frac{2}{13} + \frac{5}{13} = \frac{7}{13}$$

$$\frac{d/a}{b} \pm \frac{b/c}{d} = \frac{a \cdot d \pm c \cdot b}{b \cdot d}$$

$$\frac{3/5}{7} - \frac{7/2}{3} = \frac{5 \cdot 3 - 2 \cdot 7}{7 \cdot 3} = \frac{15 - 14}{21} = \frac{1}{21}$$

§ 5 Додавання і віднімання дробів

Для натуральних чисел a, b, c справджується рівність

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

Справджується вона і для довільних раціональних значень a, b, c , крім $c = 0$. Доведемо це.

Нехай a, b і $c \neq 0$ — довільні раціональні числа. Тоді $\frac{a}{c}$ і $\frac{b}{c}$ — також

раціональні числа. Якщо $\frac{a}{c} = r$ і $\frac{b}{c} = p$, то, за означенням дії ділення, $a = cr$ і $b = cp$. Додавши ліві й праві частини цих рівностей, одержимо $a + b = c(r + p)$. Звідси, за означенням дії ділення, випливає, що

$$r + p = \frac{a+b}{c}, \text{ тобто } \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}.$$

Подібним способом можна довести і тотожність

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$

Із цих двох тотожностей випливають правила додавання і віднімання дробів з однаковими знаменниками.

Щоб додати дроби з однаковими знаменниками, треба додати їх чисельники, а знаменник залишити той самий.

Щоб знайти різницю дробів з однаковими знаменниками, треба від чисельника зменшуваного відняти чисельник від'ємника, а знаменник залишити той самий.

На основі цих правил виконують додавання і віднімання будь-яких дробів з однаковими знаменниками:

$$\frac{A}{C} \pm \frac{B}{C} = \frac{A \pm B}{C}$$

Приклади.

$$\frac{5ax}{3m} + \frac{2c}{3m} = \frac{5ax + 2c}{3m}; \quad \frac{a}{m+x} - \frac{m}{m+x} = \frac{a-m}{m+x}.$$

Якщо треба знайти суму або різницю дробів з різними знаменниками, то спочатку їх зводять до спільного знаменника, як це роблять при додаванні та відніманні звичайних дробів.

Щоб звести дроби до спільного знаменника, спочатку знаменник кожного дробу розкладають на множники. Якщо знаменники дробів не мають спільних множників, то додавання і віднімання дробів виконують за формулою:

$$\frac{A}{B} \pm \frac{C}{D} = \frac{A \cdot D}{B \cdot D} \pm \frac{C \cdot B}{D \cdot B} = \frac{A \cdot D \pm C \cdot B}{B \cdot D}$$

Приклади.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2a} + \frac{3a}{5x} &= \frac{5x}{10ax} + \frac{6a^2}{10ax} = \frac{5x+6a^2}{10ax}; \\ \frac{x}{x^2-4} - \frac{2}{3x+6} &= \frac{x}{(x-2)(x+2)} - \frac{2}{3(x+2)} = \\ &= \frac{3x}{(x-2)(x+2)3} - \frac{2(x-2)}{3(x+2)(x-2)} = \frac{3x-2x+4}{3(x-2)(x+2)} = \frac{x+4}{3(x^2-4)}. \end{aligned}$$

Іноді виникає потреба знайти суму або різницю дробу і цілого виразу. Їх можна додавати або віднімати як дроби, записавши цілий вираз у вигляді дробу зі знаменником 1.

Приклад.

$$\frac{2xy}{3c} + 5c = \frac{2xy}{3c} + \frac{5c}{1} = \frac{2xy + 15c^2}{3c}.$$

Подібним способом спрощують вирази, які складаються з трьох або більше дробів, сполучених знаками «плюс» або «мінус». Наприклад,

$$\frac{2c}{3x} + \frac{1}{a} - \frac{3a}{2x} = \frac{4ac}{6ax} + \frac{6x}{6ax} - \frac{9a^2}{6ax} = \frac{4ac + 6x - 9a^2}{6ax}.$$

ХОЧЕТЕ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Домовившись розглядати кожну тотожність тільки при її допустимих значеннях змінних, тобто за умови, коли її ліва і права частини мають зміст, ми свідомо спрощуємо задачу. Довівши тотожність, стверджуємо тільки, що вона правильна на всій області допустимих значень, не зазначаючи, яка це область.

Щоб дати вичерпне розв'язання такої вправи, варто не лише переконатися, що тотожність правильна на всій області допустимих значень, а й указати, якою є ця область. Або чітко зазначити, які з дійсних чисел не належать цій області. Наприклад, показавши, що

$$\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x} = \frac{y}{(x-y)x},$$

бажано вказати, що доведена рівність правильна, якщо $x \neq y$ і $x \neq 0$.

У відповідальних випадках, наприклад в екзаменаційних роботах, такі уточнення доцільні.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

- Сформулюйте правило додавання і віднімання дробів з однаковими знаменниками.
- Як додавати дроби з різними знаменниками?
- Як знайти різницю дробів з різними знаменниками?
- Як знайти суму чи різницю дробу і цілого виразу?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ

- 1 Знайдіть різницю дробів $\frac{3-a^2}{a^2}$ і $\frac{3}{a^2}$.

• **Розв'язання.** $\frac{3-a^2}{a^2} - \frac{3}{a^2} = \frac{3-a^2-3}{a^2} = \frac{-a^2}{a^2} = -1.$

Відповідь. -1 .

- 2** Знайдіть суму дробів $\frac{6}{a}$ і $\frac{3a}{a^2 - c}$.

● **Розв'язання.** Спільний знаменник даних дробів $a(a^2 - c)$. Щоб звести дані дроби до спільного знаменника, треба домножити перший дріб на $a^2 - c$, а другий — на a .

$$\frac{6}{a} + \frac{3a}{a^2 - c} = \frac{6a^2 - 6c + 3a^2}{a(a^2 - c)} = \frac{9a^2 - 6c}{a(a^2 - c)} = \frac{3(3a^2 - 2c)}{a(a^2 - c)}.$$

Відповідь. $\frac{3(3a^2 - 2c)}{a(a^2 - c)}$.

- 3** Виконайте дії: $\frac{3a^2}{2a-b} - \frac{a^2-b^2}{b-2a}$.

● **Розв'язання.** Використаємо формулу $-\frac{A}{B} = \frac{A}{-B}$.

$$\begin{aligned} \frac{3a^2}{2a-b} - \frac{a^2-b^2}{b-2a} &= \frac{3a^2}{2a-b} + \frac{a^2-b^2}{2a-b} = \frac{3a^2+a^2-b^2}{2a-b} = \\ &= \frac{4a^2-b^2}{2a-b} = \frac{(2a-b)(2a+b)}{2a-b} = 2a+b. \end{aligned}$$

Відповідь. $2a + b$.

ВИКОНАЙТЕ УСНО

- 186.** Додайте дроби:

a) $\frac{2}{5}$ і $\frac{4}{5}$;	в) $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}$ і $\frac{5}{4}$;	г) $\frac{2c^2}{3ab}$ і $\frac{1-c^2}{3ab}$;
б) $\frac{7}{13}$ і $\frac{6}{13}$;	г) $\frac{a}{2x}$ і $\frac{3}{2x}$;	д) $\frac{2x}{x+2}$, $\frac{6}{x+2}$ і $\frac{x}{x+2}$.

- 187.** Знайдіть різницю дробів:

а) $\frac{2c}{3ax}$ і $\frac{c}{3ax}$;	в) $\frac{2a}{a-3}$ і $\frac{6}{a-3}$;	г) $\frac{a^2}{a-c}$ і $\frac{c^2}{a-c}$;
б) $\frac{7x}{6ab}$ і $\frac{x}{6ab}$;	г) $\frac{4x+1}{3x-2}$ і $\frac{x-3}{3x-2}$;	д) $\frac{x^2+1}{(x-1)^2}$ і $\frac{2x}{(x-1)^2}$.

Подайте у вигляді дробу вираз (188–189).

- 188.** а) $\frac{x}{3a} + \frac{y}{3a}$;
- в) $\frac{1}{4m} + \frac{3}{4m} + \frac{5}{4m}$;
- г) $\frac{x+m}{2m} - \frac{x}{2m}$;
- б) $\frac{1}{-5x} + \frac{a}{-5x}$;
- г) $\frac{1}{9a} - \frac{c}{9a}$;
- д) $\frac{x+3}{0,5c} - \frac{9}{0,5c}$.

189. а) $\frac{a}{a+x} + \frac{2x}{a+x} - \frac{x}{a+x};$

б) $\frac{2c}{c-x} - \frac{c}{c-x} - \frac{x}{c-x};$

в) $\frac{m+c}{2x} + \frac{m-c}{2x};$

г) $\frac{2x}{0,5a} - \frac{x-c}{0,5a} - \frac{c}{0,5a}.$

190. Спростіть вираз:

а) $\frac{1}{2x} + \frac{3}{2x} - \frac{2}{2x};$

б) $\frac{a}{7m} + \frac{2a}{7m} + \frac{4a}{7m};$

в) $\frac{3}{5ac} - \frac{2}{5ac} + \frac{4}{5ac};$

г) $\frac{5}{3am} - \frac{2,5}{3am} + \frac{0,5}{3am}.$

191. Який дріб слід записати у рамку на картці, щоб у сумі з написаним дробом одержати номер картки (мал. 11)?

① $\frac{3}{a} + \frac{a-3}{a}$

② $\frac{x}{y} + \underline{\quad}$

③ $\frac{1}{a-c} + \underline{\quad}$



Мал. 11

РІВЕНЬ А

Подайте у вигляді дробу або одночлена вираз (192–196).

192. а) $\frac{2a}{a-c} - \frac{a}{a-c} - \frac{c}{a-c};$

б) $\frac{3a}{a^2-1} - \frac{2a}{a^2-1} + \frac{1}{a^2-1};$

в) $\frac{3x+y}{x+y+z} + \frac{z-2x}{x+y+z};$

г) $\frac{2a-b}{a+b-c} - \frac{a-2b+c}{a+b-c}.$

193. а) $\frac{1-a}{1-c^2} + \frac{a-3}{1-c^2} - \frac{c-3}{1-c^2};$

б) $\frac{a^2-c^3}{a-c} + \frac{c^3-a^3}{a-c} + \frac{a^3-a^2}{a-c}.$

194. а) $\frac{a+b-c}{3abc} + \frac{a-b+c}{3abc} + \frac{b-a+c}{3abc};$

б) $\frac{x+y-z}{x+y+z} + \frac{x-y+z}{x+y+z} + \frac{-x+y+z}{x+y+z}.$

195. а) $\frac{2}{3a} + \frac{4}{3a} - \frac{6-a^2}{3a};$

в) $\frac{x^2}{x+1} + \frac{2x-1}{x+1} + \frac{1-x}{x+1};$

б) $\frac{2a+3}{5b} + \frac{2a-9}{5b} + \frac{a+1}{5b};$

г) $\frac{2(m+n)}{m-n} - \frac{m}{m-n} - \frac{m}{m-n}.$

196. а) $\frac{5x}{2y} - \frac{x+y}{2y} + \frac{2x+y}{2y};$

в) $\frac{2a-5}{2a-3} + \frac{a-2}{2a-3} - \frac{a-4}{2a-3};$

б) $\frac{2a^2}{a+b} + \frac{ab}{a+b} - \frac{a^2}{a+b};$

г) $\frac{x^3}{x^2-4} - \frac{x^3-x}{x^2-4} - \frac{2}{x^2-4}.$

197. Доведіть тотожність:

а) $\frac{a}{a+c} + \frac{c}{a+c} = 1;$

б) $\frac{a}{a-c} - \frac{c}{a-c} = 1;$

в) $\frac{x(1+y)}{x-y} - \frac{y(1+x)}{x-y} = 1;$

г) $\frac{a(b-1)}{a-b} - \frac{b(a-1)}{a-b} = -1.$

198. Спростіть вираз:

а) $\frac{a^2}{a+3} - \frac{9}{a+3};$

б) $\frac{2}{m^2-4} + \frac{m}{m^2-4};$

в) $\frac{5a-1}{a^2-b^2} - \frac{5b-1}{a^2-b^2};$

г) $\frac{a^2-30}{a-5} + \frac{5}{a-5}.$

199. Спростіть ліву частину рівняння і знайдіть його корені:

а) $\frac{x}{x+5} - \frac{3}{x+5} = 0;$

б) $\frac{2x+3}{5x} + \frac{3x+2}{5x} = 0;$

в) $\frac{2x}{x+3} + \frac{6}{x+3} = 0;$

г) $\frac{1}{x^2-x} - \frac{x+1}{x^2-x} = 0.$

200. Розв'яжіть рівняння:

а) $\frac{8}{3x} + \frac{2x}{3x} = 0;$

б) $\frac{x}{x-2} - \frac{2}{x-2} = 0;$

в) $\frac{x-5}{x^2-25} - \frac{x}{x^2-25} = 0;$

г) $\frac{5x-1}{2x+5} + \frac{2x+15}{2x+5} = 0.$

Зведіть до спільного знаменника вирази (201–202).

201. а) $\frac{3}{2x} \text{ i } \frac{1}{3x};$ в) $\frac{35}{9a^2} \text{ i } \frac{7}{12a};$ г) $\frac{1}{x^2y} \text{ i } \frac{1}{y^2z};$

б) $\frac{a}{4c} \text{ i } \frac{c}{4a};$ в) $\frac{4}{a^3} \text{ i } \frac{7}{a^2b};$ д) $\frac{2}{3ax^2} \text{ i } \frac{a}{6bx^2}.$

202. а) $\frac{1}{a^2-x^2} \text{ i } \frac{2}{a+x};$ в) $\frac{a}{45b} \text{ i } \frac{b}{18a};$ г) $\frac{x}{a(x+a)^2} \text{ i } \frac{a}{x(x+a)};$

б) $\frac{a}{a-c} \text{ i } \frac{c}{a^2-c^2};$ в) $\frac{2c}{c^3-cz^2} \text{ i } \frac{3z}{c^2+cz};$ д) $\frac{3x}{56a^3} \text{ i } \frac{x^2}{63a}.$

Використовуючи формули $\frac{M}{A-B} = \frac{-M}{B-A}$ або $(A-B)^2 = (B-A)^2$, зведіть до спільного знаменника дроби (203–204).

203. а) $\frac{1}{a-c} \text{ i } \frac{3}{c-a};$ б) $\frac{x}{x-y} \text{ i } \frac{1-y}{y-x};$ в) $\frac{-5}{a^2-4} \text{ i } \frac{a}{4-a^2}.$

204. а) $\frac{4ax}{a+x} \text{ i } \frac{5x}{x^2-a^2};$ б) $\frac{3x}{x-1} \text{ i } \frac{1}{(1-x)^2};$ в) $\frac{4}{35(x-2)} \text{ i } \frac{x}{14-7x}.$

205. Додайте дроби:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \frac{1}{x} + \frac{3}{2x}; & \text{в)} \frac{a+x}{2x} + \frac{x-a}{3x}; & \text{г)} \frac{a-c}{c} + \frac{-a^2}{c(a-c)}; \\ \text{б)} \frac{a}{c} + \frac{3-a}{4c}; & \text{г)} \frac{1}{a+b} + \frac{3}{x(a+b)}; & \text{д)} \frac{1}{2a^2bx^3} + \frac{5}{3ax^4}. \end{array}$$

206. Знайдіть різницю дробів:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \frac{4}{ax^2} - \frac{5}{ax}; & \text{в)} \frac{x^2-m}{m(x+m)} - \frac{x}{m}; & \text{г)} \frac{x^2}{(a+x)^2} - \frac{x}{a+x}; \\ \text{б)} \frac{1}{c} - \frac{1}{a-c}; & \text{г)} \frac{3}{a-b} - \frac{2}{a+b}; & \text{д)} \frac{x}{3a^2b^3c} - \frac{2}{5abc^3}. \end{array}$$

207. Знайдіть суму і різницю дробів:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \frac{1}{3cx} + \frac{c-x}{3c^2x}; & \text{б)} \frac{a^2}{(a-b)^2} + \frac{a}{a-b}; & \text{в)} \frac{3}{c(x-y)} + \frac{2}{x^2-xy}. \end{array}$$

208. (ЗНО 2016, 2017). Спростіть вираз:

$$\text{а)} \frac{a^2+16}{a-4} - \frac{8a}{a-4}; \quad \text{б)} \frac{a}{b(a-b)} - \frac{b}{a(a-b)}; \quad \text{в)} \frac{1}{x-5} - \frac{2x-5}{x(x-5)}.$$

Виконайте дії (209–211).

$$\text{209. а)} \frac{6}{4x-5y} - \frac{3}{2x}; \quad \text{б)} \frac{3}{4} - \frac{x+2}{4-3x}; \quad \text{в)} \frac{7+2x}{5-3x} + \frac{2}{3}.$$

$$\text{210. а)} \frac{a+b}{c} + 1; \quad \text{б)} m + \frac{3c-m^2}{m-c}; \quad \text{в)} 5 - \frac{3x^2}{a-x^2}.$$

$$\text{211. а)} a + \frac{1-a^2}{a}; \quad \text{б)} 2c - \frac{2c}{c-1}; \quad \text{в)} x^2 - \frac{x^3}{a+x}.$$

212. Доведіть, що значення виразу не залежить від значення змінної:

$$\text{а)} \frac{5x-3}{4x+4} - \frac{4x-2}{3x+3}; \quad \text{б)} \frac{3m-2}{8+4m} - \frac{2m-2}{6+3m}.$$

Розв'яжіть рівняння (213–214).

$$\begin{array}{ll} \text{213. а)} \frac{5}{2x+1} - \frac{5}{3x-2} = 0; & \text{в)} \frac{3x-7}{x-5} + \frac{x+3}{5-x} = 0; \\ \text{б)} \frac{3}{1+2x} + \frac{2}{1-x} = 0; & \text{г)} \frac{1}{1+x} - \frac{x}{1-x^2} = 0. \\ \text{214. а)} \frac{3a-1}{3a^2} - \frac{2+a}{2a} = 0; & \text{в)} \frac{m}{(m+3)^2} + \frac{2}{m+3} = 0; \\ \text{б)} \frac{a}{3a-3} - \frac{5}{2-2a} = 0; & \text{г)} \frac{1+m^2}{m-m^2} + \frac{m+5}{m-1} = 0. \end{array}$$

РІВЕНЬ Б

Подайте у вигляді дробу вираз (215–218).

215. а) $\frac{4x-5y+8}{18y} + \frac{7x+3y-5}{30y} + \frac{2x+5y+3}{45y}$;

б) $\frac{2a+3b}{4c} - \frac{a+2b}{6c} + \frac{4a-b}{8c} - \frac{3a-4b}{12c}$.

216. а) $\frac{x-4}{2x} - \frac{5x-7}{10x} - \frac{3x+9}{4x} + \frac{2x+5}{5x}$;

б) $\frac{2a-ab+3b}{9ab} - \frac{a-2ab}{ab} - \frac{4a+ab-5b}{6ab}$.

217. а) $\frac{x+1}{x-1} - 1$;

б) $\frac{a}{3bc^2} + \frac{2b}{5ac^2} - c$;

в) $1 - a + \frac{2a^2}{a+1}$.

218. а) $\frac{2}{3x+6} + \frac{x^2-x-2}{x^2-4} - 1$;

б) $1 + \frac{2m+1}{m^3-1} - \frac{m}{m-1}$.

Спростіть вираз (219–228).

219. а) $\frac{9x^2+4y^2}{12x^2y-8xy^2} + \frac{3x}{2xy-3x^2}$;

б) $\frac{2a+1}{6-3a} - \frac{a+3}{6a-12} + \frac{2a+1}{2a-4}$.

220. а) $\frac{6a-4b}{4ab-2b^2} + \frac{8a-3b}{8a^2-4ab}$;

б) $\frac{x-1}{2x+2} - \frac{3x-4}{3x+3} + \frac{2x-1}{6x+6}$.

221. а) $\frac{5}{a-1} - \frac{8}{1+a} + \frac{3a+7}{a^2-1}$;

б) $\frac{1}{x} + \frac{x+1}{x^2-x} - \frac{x-1}{x^2-x}$.

222. а) $\frac{2}{x+1} + \frac{5}{x-1} - \frac{5}{x+2}$;

б) $\frac{2}{(a+1)^3} + \frac{1}{(a+1)^2} - \frac{2}{1-a}$.

223. а) $\frac{2x-3}{3x-3} - \frac{3x-1}{4x+4} - \frac{x+2}{x^2-1}$;

б) $\frac{7}{a+b} + \frac{3a^2-2b^2}{a^2-b^2} - 3 - \frac{5}{a-b}$.

224. а) $\frac{2}{a} + \frac{3}{x-2a} - \frac{2a-3x}{4a^2-x^2}$;

б) $\frac{1}{a-2} + \frac{3}{a+2} + \frac{2a}{(a+2)^2}$.

225. $\frac{2}{x+4} - \frac{x-3}{x^2-4x+16} - \frac{x^2-9x}{x^3+64}$.

226. $\frac{1}{2a-3x} - \frac{2a+3x}{4a^2+6ax+9x^2} - \frac{6ax}{8a^3-27x^3}$.

227. $\frac{3}{(x-a)(x-c)} + \frac{2}{(x-a)(c-a)} - \frac{2}{(c-x)(a-c)}$.

«Алгебру можна розглядати як мову особливої властивості, який притаманні певні ідеї і умовні для їх зображення знаки».

М. В. Остроградський

228. $\frac{a+b}{(b-c)(c-a)} + \frac{b+c}{(c-a)(a-b)} + \frac{c+a}{(a-b)(b-c)}$.

229. Знайдіть значення виразу:

а) $\frac{2a}{1-a^2} + \frac{a+1}{2a-2} - \frac{a-1}{3a+3}$, якщо $a = 3$;

б) $\frac{x+2}{x} - \frac{x}{x-2} + \frac{x+2}{x^2-2x}$, якщо $x = \frac{1}{5}$;

в) $\frac{1}{x} + \frac{x+2y}{x^2-2xy} - \frac{4x}{x^2-4y^2}$, якщо $x = 2$, $y = 3$;

г) $\frac{x-3}{x^2+3x} - \frac{x+3}{x^2-3x} - \frac{4x}{x^2-9}$, якщо $x = 7$.

«Математика має ту чудову властивість, що, схопивши лише одне кільце, можна витягнути якщо не весь, то принаймні значну частину ланцюга знань».

М. І. Кованцов

230. Подайте дріб у вигляді суми дробів:

а) $\frac{2x+9}{12x^2}$; б) $\frac{4a^2+5b^2}{10ab}$; в) $\frac{6a^2+3b^2+ab}{ab(2a^2+b^2)}$.

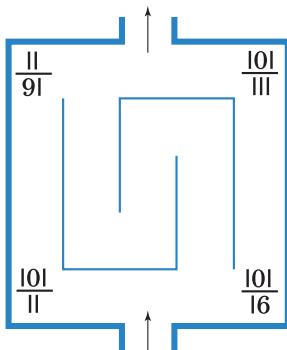
231. Подайте дріб у вигляді суми цілого і дробового виразів:

а) $\frac{10x^2-y^2}{5x^2}$; б) $\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$; в) $\frac{x^3-xy+y^3}{x^2-xy+y^2}$.

232. Доведіть тотожність:

а) $\frac{m}{m+n} + \frac{2mn}{m^2-n^2} - \frac{n}{m-n} = 1$; б) $\frac{x^3}{x^2-4} - \frac{x}{x-2} - \frac{2}{x+2} = x-1$.

233. Для кмітливих. Пройдіть через лабіринт так, щоб перетнути дроби, суми яких дорівнюють 2. Не можна проходити двічі один і той самий відрізок шляху або перетинати пройдену лінію (мал. 12).



Мал. 12

234. **Відкрита задача.** Доведіть, що значення виразу $\frac{7x^2+4}{3x^2+3} - \frac{5x^2+3}{2x^2+2}$ не залежить від x . Запишіть суму дробів із двома змінними, яка не залежить від значення цих змінних.

235. Доведіть, що значення виразу не може бути від'ємним числом:

а) $\frac{2b^2}{a^2+2} - \frac{4b}{a^2+2} + \frac{2}{a^2+2}$;

в) $\frac{1}{(1-m)^2} + \frac{3m}{(m-1)^2} + \frac{m}{m-1}$;

б) $\frac{4y^2}{x^2+1} + \frac{12y}{1+x^2} + \frac{9}{x^2+1}$;

г) $\frac{10x}{(x-2)^2} + \frac{6(x+4)}{(2-x)^2} + \frac{4x}{x-2}$.

236. Доведіть, що при кожному допустимому a значення виразу $\frac{a^3+3a}{a+2} - \frac{3a^2-14a+16}{a^2-4} + 2a$ є додатним числом.

237. Доведіть тотожність:

$$\text{а)} \frac{a^2-x^2}{a-x} = a+x;$$

$$\text{в)} \frac{a^4-x^4}{a-x} = a^3+a^2x+ax^2+x^3;$$

$$\text{б)} \frac{a^3-x^3}{a-x} = a^2+ax+x^2;$$

$$\text{г)} \frac{a^5-x^5}{a-x} = a^4+a^3x+a^2x^2+ax^3+x^4.$$

238. Виконайте дії:

$$\text{а)} \frac{1}{x^2+3xy} + \frac{2}{9y^2-x^2} + \frac{1}{2x-6y};$$

$$\text{в)} \frac{3-b}{b-2} - \frac{b+4}{2b^3-8b} + \frac{b+3}{b+2} - \frac{b}{b^2-4};$$

$$\text{б)} \frac{7-x^2}{x^3-1} + \frac{3x+5}{x^2+x+1} + \frac{2}{1-x};$$

$$\text{г)} \frac{3a+2}{9a^2-6a+4} - \frac{18a}{27a^3+8} - \frac{1}{3a+2}.$$

239. Доведіть тотожність:

$$\text{а)} \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} = \frac{8}{1-x^8};$$

$$\text{б)} \frac{1}{1-2x} + \frac{1}{1+2x} + \frac{2}{1+4x^2} + \frac{4}{1+16x^4} = \frac{8}{1-256x^8}.$$

Розв'яжіть рівняння (240–243).

$$\text{240. а)} \frac{x-25}{5x-25} - \frac{3x+5}{5x-x^2} = 0;$$

$$\text{в)} \frac{x^2-6x}{x^2-4} + \frac{x}{x-2} = 0;$$

$$\text{б)} \frac{6}{x^2-6x} + \frac{12+x}{6x-36} = 0;$$

$$\text{г)} \frac{x+3}{x^2-1} - \frac{x-1}{x^2+x} = 0.$$

$$\text{241. а)} \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{x+1}{1-x} = 0;$$

$$\text{в)} \frac{x^2}{(x-2)^2} - \frac{x+2}{2x-4} = 0;$$

$$\text{б)} \frac{1}{2x-1} + \frac{6x}{1-8x^3} = 0;$$

$$\text{г)} \frac{x^2-8}{x^3+8} - \frac{1}{x+2} = 0.$$

$$\text{242. а)} \frac{12x}{4x^2-9} + \frac{2x-3}{4x+6} + \frac{2x+3}{6x-9} = 0;$$

$$\text{б)} \frac{1}{x^2+3x} + \frac{3}{9-x^2} + \frac{1}{2x^2-6x} = 0.$$

$$\text{243. а)} \frac{1}{x-2} - \frac{x+2}{x^2+2x+4} - \frac{6x}{x^3-8} = 0;$$

$$\text{б)} \frac{3x^2+7x+3}{x^3-1} - \frac{2x-1}{x^2+x+1} - \frac{1}{x-1} = 0.$$

Доведіть тотожність (244–246).

$$\text{244. } \frac{x^2-(y-z)^2}{(x+z)^2-y^2} + \frac{y^2-(x-z)^2}{(x+y)^2-z^2} + \frac{z^2-(x-y)^2}{(y+z)^2-x^2} = 1.$$

245. $\frac{x^2 - yz}{(x-y)(x-z)} + \frac{y^2 + xz}{(y+z)(y-x)} + \frac{z^2 + xy}{(z-x)(z+y)} = 0.$

246. $\frac{(y-b)(z-b)}{b(b-c)} + \frac{(y-c)(z-c)}{c(c-b)} + \frac{yz}{bc} = 1.$



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

247. Задача Р. Декарта (1596–1650). Знайдіть y .
 $y^3 - 8y^2 - y + 8 = 0.$

Рене Декарт

248. Напишіть замість букв числа, назви яких починаються на вказані букви, і такі, щоб їх суми в кожному рядку і кожному стовпчику дорівнювали одна одній (мал. 13).

249. Обчисліть: а) $5^{30} \cdot 3^{30} - (15^{15} - 1)(15^{15} + 1)$;
 б) $7^{24} \cdot 8^{24} + (1 - 56^{12})(1 + 56^{12})$.

250. Виконайте дії.

а) $2 + \frac{8}{15} \cdot 1\frac{9}{16}$; в) $1\frac{5}{12} \cdot 2 + 4 \cdot 1\frac{1}{18} + 1\frac{1}{9} \cdot 1\frac{1}{4}$;
 б) $2\frac{2}{11} \cdot \frac{7}{8} - 6 \cdot \frac{1}{5}$; г) $2\frac{1}{10} \cdot 4\frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{3}{8} - \frac{9}{20} \cdot 6$.

В	В	Д
Ч	Д	Д
Ч	Ш	Ш

Мал. 13

СКАРБНИЧКА ДОСЯГНЕНЬ

- ✓ Можу пояснити, як звести дроби до спільного знаменника.
- ✓ Формулюю і використовую правило додавання і віднімання дробів, у яких знаменники:

однакові

різні

$$\frac{A}{C} + \frac{B}{C} = \frac{A+B}{C}$$

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AD+CB}{BD}$$

- ✓ Використовую для перетворення дробів і виконання дій з ними

формули $\frac{M}{A-B} = \frac{-M}{B-A}$ і $(A - B)^2 = (B - A)^2$

- ✓ Можу подати дріб у вигляді суми

$$\frac{A+B}{C} = \frac{A}{C} + \frac{B}{C}$$

$$\frac{MA+NB}{A} = \frac{MA}{A} + \frac{NB}{A} = M + \frac{NB}{A}$$

ВИКОРИСТОВУЄМО НАБУТИ КОМПЕТЕНТНОСТІ

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо, як зі звичайними дробами виконувати:

множення

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

$$\frac{2}{15} \cdot \frac{9}{10} = \frac{2 \cdot 9^3}{5^1 \cdot 10^5} = \frac{3}{25}$$

піднесення до степеня

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2^5}{3^5} = \frac{32}{243}$$

Згадайте, у якій послідовності виконують дії із числами

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{10} \right) + 7 : 5$$

$$1 - \frac{2}{3} \cdot 5 + 7 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right)$$

§ 6 | Множення дробів

Правило множення звичайних дробів вам уже відоме. Для будь-яких натуральних чисел a, b, c і d справджується рівність

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Доведемо, що ця рівність — тотожність, тобто що вона спрощується для всіх допустимих значень a, b, c, d ($b \neq 0$ і $d \neq 0$).

Нехай $\frac{a}{b} = r$ і $\frac{c}{d} = p$. За означенням дії ділення $a = br$ і $c = dp$, звідси $ac = br \cdot dp = bd \cdot rp$. Оскільки $bd \neq 0$, то з рівності $ac = bd \cdot rp$ за означенням дії ділення маємо:

$$rp = \frac{ac}{bd}, \text{ або } \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

З доведеної тотожності випливає правило множення дробів.

Щоб помножити дріб на дріб, треба перемножити їх чисельники й окремо знаменники і перший добуток записати чисельником, а другий — знаменником дробу.

На основі цього правила виконують множення будь-яких дробів:

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D}$$

Приклади.

$$\frac{2x}{3n} \cdot \frac{m}{5n} = \frac{2x \cdot m}{3n \cdot 5n} = \frac{2xm}{15n^2};$$

$$\frac{a}{a-b} \cdot \frac{2x}{a+b} = \frac{a \cdot 2x}{(a-b)(a+b)} = \frac{2ax}{a^2 - b^2}.$$

Оскільки цілий вираз можна вважати дробом із знаменником 1, то, за сформульованим правилом, можна перемножити дроби і цілі вирази.

Приклади.

$$\frac{2a}{mx} \cdot 3m^2 = \frac{2a}{mx} \cdot \frac{3m^2}{1} = \frac{2a \cdot 3m^2}{mx} = \frac{6am}{x};$$

$$(c^2 - 1) \cdot \frac{c}{(c+1)^2} = \frac{(c^2 - 1)c}{(c+1)^2} = \frac{(c-1)(c+1)c}{(c+1)^2} = \frac{(c-1)c}{c+1}.$$

Правило множення дробів поширюється на добуток трьох і більше множників, наприклад:

$$\frac{1}{a-b} \cdot \frac{a}{a+b} \cdot \frac{a^2 - b^2}{4a^2} = \frac{a(a-b)(a+b)}{(a-b)(a+b)4a^2} = \frac{1}{4a}.$$

Піднести дріб до n -го степеня — означає перемножити n таких дробів:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \dots \cdot \frac{a}{b} = \frac{aa \cdot \dots \cdot a}{bb \cdot \dots \cdot b} = \frac{a^n}{b^n}.$$

Щоб піднести дріб до степеня, треба піднести до цього степеня чисельник і знаменник і перший результат записати у чисельнику, а другий — у знаменнику дробу.

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n = \frac{A^n}{B^n}$$

Приклад. Піднесемо дріб $\frac{ax^2}{2c}$ до п'ятого степеня:

$$\left(\frac{ax^2}{2c}\right)^5 = \frac{(ax^2)^5}{(2c)^5} = \frac{a^5 x^{10}}{32c^5}.$$

ХОЧЕТЕ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Ви знаєте, що для множення многочленів існує обернене перетворення: розкладання многочленів на множники. Чи існує обернене до множення дробів перетворення? Кожний дріб можна подати у вигляді добутку двох, трьох чи довільної кількості інших дробів. Наприклад,

$$\frac{a}{m} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{m}, \quad \frac{a}{m} = \frac{a}{n} \cdot \frac{n}{c} \cdot \frac{c}{m}.$$

Перетворення, обернене до множення дробів, неоднозначне, невизначене. Простішою є така задача. *Подайте дріб $\frac{a}{n}$ у вигляді добутку двох дробів, один з яких дорівнює $\frac{n}{ca}$.* У даному випадку відповідь неважко підібрати:

$$\frac{a}{n} = \frac{n}{ca} \cdot \frac{ca^2}{n^2}.$$

Розв'язування таких задач у складніших випадках, як і операції, обернені до піднесення дробів до степеня, розглянемо згодом.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

- Сформулюйте правило множення двох дробів.
- Як помножити дріб на цілий вираз? А цілий вираз — на дріб?
- Чому дорівнює добуток кількох дробів?
- Як піднести дріб до степеня?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ

- 1** Знайдіть добуток дробів: $\frac{x^2 - c^2}{2xc}$ і $\frac{16}{(x - c)^2}$.

Розв'язання.
$$\frac{x^2 - c^2}{2xc} \cdot \frac{16}{(x - c)^2} = \frac{(x - c)(x + c) \cdot 16}{2xc(x - c)^2} = \frac{8(x + c)}{xc(x - c)}.$$

Відповідь. $\frac{8(x + c)}{xc(x - c)}$.

- 2** Знайдіть значення виразу $\left(\frac{x-5}{5-x}\right)^4$.

Розв'язання.
$$\left(\frac{x-5}{5-x}\right)^4 = \left(-\frac{x-5}{x-5}\right)^4 = (-1)^4 = 1.$$

Відповідь. При кожному значенні x , крім випадку, коли $x = 5$, значення даного виразу дорівнює 1.

3 Подайте у вигляді степеня дробу вираз $\frac{a^7x^{14}}{(a-x)^{21}}$.

● Розв'язання.

$$\frac{a^7x^{14}}{(a-x)^{21}} = \frac{a^7 \cdot (x^2)^7}{\left((a-x)^3\right)^7} = \left(\frac{ax^2}{(a-x)^3}\right)^7.$$

Відповідь. $\left(\frac{ax^2}{(a-x)^3}\right)^7$.

Виконайте усно

251. Перемножте дроби:

a) $\frac{2}{3} \text{ i } \frac{5}{7};$	в) $\frac{3}{-5} \text{ i } \frac{-3}{4};$	г) $\frac{3}{ab} \text{ i } \frac{0,5}{ax^2};$
б) $\frac{2,5}{2} \text{ i } \frac{0,4}{5a};$	г) $\frac{x}{a} \text{ i } \frac{m}{2c};$	д) $\frac{-1}{ab} \text{ i } \frac{-1}{ac}.$

Виконайте множення (252–253).

252. а) $\frac{x}{y} \cdot \frac{z}{t};$	б) $\frac{2a}{b} \cdot \frac{m}{n};$	в) $\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{x};$	г) $\frac{4a}{c} \cdot \frac{x}{3a}.$
253. а) $\frac{3}{2b} \cdot \frac{6b}{c};$	б) $\frac{x^3}{3} \cdot \frac{9}{x^4};$	в) $\frac{m^2}{10} \cdot \frac{5}{m};$	г) $\frac{8a^2}{15} \cdot \frac{25}{12a}.$

254. Піднесіть до квадрата і куба дріб:

а) $\frac{2}{3};$	б) $\frac{x}{ac};$	в) $\frac{0,1}{x^2};$	г) $\frac{-2a}{x^3}.$
-------------------	--------------------	-----------------------	-----------------------

Рівень А

Виконайте множення (255–260).

255. а) $\frac{2,7}{2x^2} \cdot \frac{20}{9x^3};$	в) $\frac{2ab}{-5a^2} \cdot \frac{5c^2}{4a^2b^3};$	г) $\frac{-b}{12ac} \cdot 4ac^2;$
б) $\frac{1}{4a^3} \cdot \frac{-2a}{7c};$	г) $2m^2 \cdot \frac{n}{8m};$	д) $\frac{5a^2}{3bc^2} \cdot (-6ac^3).$

256. а) $\frac{15n^6}{-8m^2} \cdot \frac{4m^2}{5n};$	в) $\frac{1}{2cx} \cdot \frac{-4c^2}{3x^2};$	г) $-\frac{7a^2m}{8xn} \cdot 4x^2n;$
б) $\frac{3a^3}{-x^4} \cdot \frac{5x}{4a};$	г) $2ax^2 \cdot \frac{3a}{x^3};$	д) $\frac{-1}{2a^2c} \cdot (-3a^4).$

257. а) $\frac{a+b}{x} \cdot \frac{3x^2}{2(a+b)}$; в) $\frac{3}{x^2-y^2} \cdot \frac{(x+y)^2}{3}$; г) $\frac{3ax}{ax+ac} \cdot \frac{cx+c^2}{9x}$;

б) $\frac{1}{x^2-y^2} \cdot \frac{x-y}{4xy}$; г) $\frac{a^2-ab}{m^3} \cdot \frac{m^2}{a-b}$; д) $\frac{6m}{a^2-a} \cdot \frac{2a-2}{9m^2}$.

258. а) $\frac{a-b}{3} \cdot \frac{15}{a^2-b^2}$; в) $\frac{a^2-c^2}{2ac} \cdot \frac{8}{(a+c)^2}$; г) $\frac{3a+9}{(a+3)^2} \cdot \frac{2a-4}{a^2-4}$;

б) $\frac{a-x}{4m^2} \cdot \frac{16am}{(a-x)^2}$; г) $\frac{3a-3b}{4a+4c} \cdot \frac{(a+c)^2}{a^2-b^2}$; д) $\frac{x^2-y^2}{12} \cdot \frac{0,6}{(x-y)^2}$.

259. а) $\frac{(x-y)^2}{(x+y)y} \cdot \frac{y^2}{x^2-y^2}$; в) $\frac{a^2+ab}{a^2-b^2} \cdot \frac{a^3-b^3}{a(a+b)}$;

б) $\frac{(a+b)^2}{(a-b)b} \cdot \frac{b}{a^2-b^2}$; г) $\frac{x^2-xy}{y(x+y)} \cdot \frac{(x+y)^2}{x^2-y^2}$.

260. а) $\frac{x^2-c^2}{x^2-a^2} \cdot \frac{a+x}{c+x}$; в) $\frac{a^3-1}{a+1} \cdot \frac{a^3+1}{a-1}$;

б) $\frac{a^2-4}{a^2+4} \cdot \frac{a+2}{a-2}$; г) $\frac{x^2-1}{x^3-1} \cdot \frac{x^2+x+1}{x+1}$.

«Математику і
властивий їй стиль
мислення треба,
безумовно, розглядати
як істотний елемент
культури сучасної
людини».

Ю. О. Митропольський

261. Піднесіть до квадрата дріб:

а) $\frac{5a}{4x}$; б) $\frac{x}{a+x}$; в) $\frac{-m}{2ac^3}$; г) $\frac{3xz}{2a+z}$.

262. Піднесіть до квадрата, куба і четвертого степеня дріб $\frac{2a}{3cx^2}$.

Піднесіть до степеня (263–264).

263. а) $\left(\frac{m}{3n}\right)^2$; б) $\left(\frac{a}{2dx}\right)^3$; в) $\left(-\frac{3c}{1-a^2}\right)^2$; г) $\left(\frac{-2x}{3abc}\right)^4$.

264. а) $\left(\frac{a-x}{a+x}\right)^2$; б) $\left(\frac{2a}{c-3}\right)^0$; в) $\left(\frac{2ab}{3c}\right)^2$; г) $\left(\frac{x^2z}{2a^3}\right)^3$.

265. Спростіть вираз:

а) $\frac{x^2-9y^2}{a^2+8ab+16b^2} \cdot \frac{a^2-16b^2}{3y-x}$; в) $\frac{2x-6}{x^2+2xy+y^2} \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2-3x}$;

б) $\frac{x^2+6x+9}{2x-4} \cdot \frac{x^2-4}{3x+9}$; г) $\frac{x^2-10x+25}{6x+3y} \cdot \frac{2xy+y^2}{25-x^2}$.

266. Відновіть утрачені записи:

a) $\frac{(x+2)^2}{a^2 \dots} \cdot \frac{ax^2}{\dots} = \frac{x(x+2)}{\dots(x-2)};$

б) $\frac{x-y}{\dots} \cdot \frac{2x^2y^2}{\dots} = \frac{xy}{x+y}.$

РІВЕНЬ Б

267. Виконайте множення дробів:

а) $\frac{4a^2 - 9}{3+2a} \cdot \frac{6a}{3-2a};$

в) $\frac{a^3 + x^3}{a-x} \cdot \frac{a^2 - 2ax + x^2}{a^2 - ax + x^2};$

б) $\frac{1-9x^4}{3x^2-1} \cdot \frac{x-1}{3x^2+1};$

г) $\frac{a^6 - 1}{a^2 + 1} \cdot \frac{1+a^2}{a^4 + 1 + a^2}.$

Перемножте дроби (268–269).

268. а) $\frac{2x}{y^2} \cdot \frac{y^4}{6x^3} \cdot \frac{9x}{y} \left(-\frac{5y^3}{3x^2} \right);$

б) $\frac{3}{a} \cdot \frac{b^2}{4a} \cdot \frac{a^3}{9b^3} \cdot \frac{8a}{b}.$

269. а) $\frac{a+3}{10a^2} \cdot \frac{6-2a}{a} \cdot \frac{5a^3}{3-a};$

в) $\frac{-6x^4}{35y^6z^3} \cdot \frac{5y^4z^7}{42x^6} \left(-\frac{49x^3y^2}{z^4} \right);$

б) $\frac{0,2}{x} \cdot \frac{x^2-1}{2x} \cdot \frac{5x}{x+1};$

г) $\frac{a^3b^2}{-20c^4} \cdot \frac{-5a^4c}{24b^5} \cdot \frac{16b^3c^3}{-30a^6}.$

270. Заповніть таблицю.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\frac{x+1}{x} \cdot \frac{2x}{x^2-1}$							
$\frac{x^2-4}{x} \cdot \frac{x^2-2x}{x+1}$							

271. Знайдіть значення виразу:

а) $\frac{ax^2 - a}{x^2 + ax + a^2} \cdot \frac{a^3 - x^3}{4 + 4x},$ якщо $a = 4, x = 3;$

б) $\frac{y^2 - 16x^2}{4x^2 + 10x + 25} \cdot \frac{8x^3 - 125}{4x - y},$ якщо $x = \frac{1}{4}, y = 3;$

в) $\frac{x^2 - xy + 2y - 4}{xy + 2y} \cdot \frac{x^2 + 2x}{(x - y)^2 - 4},$ якщо $x = 3, y = 2;$

г) $\frac{ab - 2b}{(b-3)^2 - 4a^2} \cdot \frac{4a^2 + 2ab + 3b - 9}{a^2 - 2a},$ якщо $a = \frac{1}{2}, b = 3.$

272. Виконавши перетворення дробових виразів, учень витер частину класної дошки (мал. 14). Відновіть витерти записи.

Спростіть вираз (273–274).

$$273. \text{ а) } \frac{x+3}{24x^2} \cdot \frac{9+x^2}{9-x^2} \cdot (-4x(x-3));$$

$$\text{б) } \frac{4a^2b}{4a^2-b^2} \cdot \frac{6a^2-3ab}{12a^3b^3} \cdot \frac{2ab^2}{2a+b}.$$

$$274. \text{ а) } (-8a^2(a+b)) \cdot \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} \cdot \frac{b-a}{(8a)^2}; \quad \text{б) } \frac{x^2-x}{2x+2} \cdot \frac{x^2+2x+1}{x^2+4x} \cdot \frac{x^2-16}{3x-3}.$$

Піднесіть до степеня дріб (275–276).

$$275. \text{ а) } \left(-\frac{x^2z}{a^3n}\right)^2; \quad \text{б) } \left(\frac{-3m^2n}{2ac^3}\right)^3; \quad \text{в) } \left(\frac{xy^2z}{-2an^4}\right)^4.$$

$$276. \text{ а) } \left(\frac{0,2a^2}{3x^2y^3}\right)^3; \quad \text{б) } \left(\frac{a-c}{-2x^2z}\right)^3; \quad \text{в) } \left(\frac{0,3ax^5}{2x-1}\right)^0.$$

277. Подайте дріб у вигляді степеня:

$$\text{а) } \frac{a^{15} \cdot x^{30}}{(a+x)^{15}}; \quad \text{б) } \frac{(x-y)^{10} \cdot (x+y)^{20}}{(2x+y)^{20}}.$$

Спростіть вираз (278–280).

$$278. \text{ а) } \left(-\frac{3a^2}{2a^2b^3}\right)^2 \cdot 12a^4b^6; \quad \text{б) } (-8x^6y^3) \cdot \left(\frac{3z^4}{2x^2y}\right)^3;$$

$$\text{б) } \left(\frac{x^2}{-2y^3}\right)^2 \cdot \left(\frac{-2y^2}{x^3}\right)^3;$$

$$279. \text{ а) } \frac{ax^3}{5-5a} \cdot \frac{a^2-2a+1}{0,2ax^3}; \quad \text{б) } \frac{1}{x^2-4} \cdot \left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2;$$

$$\text{б) } \left(\frac{2a-1}{a-1}\right)^2 \cdot \frac{a^3-1}{4a^2-4a+1}; \quad \text{г) } \frac{1}{a+c} \cdot \left(\frac{a^2}{c} + \frac{c^2}{a}\right) + 1.$$

$$280. \text{ а) } \frac{25+10a}{a-1} \cdot \left(\frac{3a+4}{4a^2-25} - \frac{1}{2a-5}\right); \quad \text{б) } \frac{1-a^2}{(1+ax)^2 - (a+x)^2} \cdot \frac{x+x^2}{1-x};$$

$$\text{б) } \left(\frac{x+y}{x} - \frac{2x}{x-y}\right) \cdot \frac{y-x}{x^2+y^2}; \quad \text{г) } \left(\frac{a^2+3a}{9a^2-1} - \frac{1}{3a+1}\right) \cdot \frac{9a^2+3a}{a^2+1}.$$

$$\frac{(a-b)^2c^3}{(a^2-1)^2} = \frac{a-b}{(a+b)c}$$

$$\frac{2x+1}{2x-1} \cdot \frac{2x+1}{2x-1} = \frac{6x+9}{4x^2-1}$$

Мал. 14

281. Задача Дай Шу. Пропонувалася у 1908 році на випускному екзамені філологічного факультету педагогічного університету в Пекіні.

Спростіть: $\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} \right) \cdot \frac{ab}{a^2 - (b+c)^2}$.

282. Знайдіть значення виразу:

a) $\frac{2x+4}{(x-2)^2} \cdot \frac{x^2-4}{(x+2)^2}$, якщо $x = 3,2$;

б) $\left(\frac{m+1}{m} \right)^2 \cdot \frac{3m^2}{2m^2+4m+2}$, якщо $m = 4,357$.

«Саме математика дає найнадійніші правила:
тому хто їх дотримується — тому не небезпечний обман почуттів».

Л. Ейлер

283. Установіть відповідність між значеннями числових виразів (1–4) і значеннями виразів зі змінною (А–Д).

1 $2,5 \cdot \frac{3}{5}$ А $\left(\frac{4}{m} - \frac{m}{4} \right) \cdot \left(\frac{1}{4-m} - \frac{1}{4+m} \right)$, якщо $m = 7$;

2 $(-1)^2 : \frac{1}{12}$ Б $\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{2} \right) \left(1 - \frac{x}{2} \right)$, якщо $x = 4$;

3 $\left(-\frac{2}{3} \right)^3 \cdot \left(-\frac{3}{2} \right)^2$ В $\frac{x^2-4}{2} \cdot \frac{x}{x+2}$, якщо $x = -4$;

4 $7\frac{1}{2} \cdot \left(1\frac{7}{5} - \frac{7}{3} \right)$ Г $\frac{a-3}{2} \cdot \left(\frac{2}{a} - \frac{3}{2a} \right)$, якщо $a = 11$;

Д $\frac{2a}{a-2} \cdot \frac{a^2-4a+4}{3}$, якщо $a = 1$.

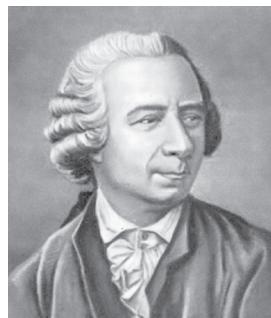
Доведіть тотожність (284–286).

284. Задача Л. Ейлера (1707–1783).

$$p^3 = \left(p^3 \cdot \frac{p^3 - 2q^3}{p^3 + q^3} \right) + \left(q^3 \cdot \frac{2p^3 - q^3}{p^3 + q^3} \right) + q^3.$$

285. а) $\frac{1-a^2}{1+b} \cdot \frac{1-b^2}{1+a} \cdot \left(1 + \frac{a}{1-a} \right) = 1-b$;

б) $\left(1 - \frac{3-a}{a+2} \right) \cdot \left(\frac{a^2+1}{2a-1} - \frac{a}{2} \right) = \frac{1}{2}$.



Леонард Ейлер

286. а) $\frac{1}{5x} - \frac{1}{x+y} \cdot \left(\frac{x+y}{5x} - x-y \right) = 1$;

б) $\frac{a^2-x^2}{a+1} \cdot \frac{a^2-1}{a+x} \cdot \left(a + \frac{ax}{a-x} \right) = a^3 - a^2$.

287. Доведіть, що квадрат суми двох взаємно обернених дробів на 2 більший від суми їх квадратів.

288. Доведіть, що при будь-якому натуральному n число $\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) \cdot (n^2 + n)$ — натуральне.

Розв'яжіть рівняння (289–290).

289. а) $\frac{2x^2}{x-3} \cdot \frac{x^2-9}{x} = 0;$

в) $\frac{3x+2}{2x-3} \cdot \frac{5x-7}{7x-5} = 0;$

б) $\frac{x^2-4x+4}{x^2-4} \cdot \frac{x+2}{x} = 0;$

г) $\frac{(x-1)^2}{x^4-16} \cdot \frac{x-2}{x^2+1} = 0.$

290. а) $\left(\frac{x^2}{2} + x + 0,5\right) \cdot \frac{x^2-9}{(x-1)(x+3)} = 0;$ в) $\left(\frac{x+10}{5x+25} - \frac{1}{x+5}\right) \cdot \frac{5}{x-5} - \frac{10}{x^2-25};$

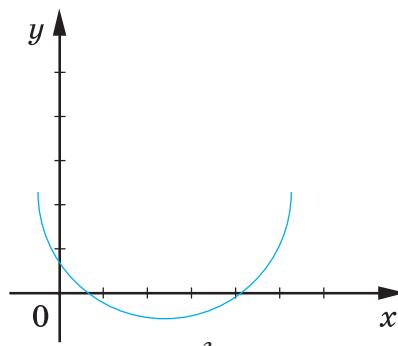
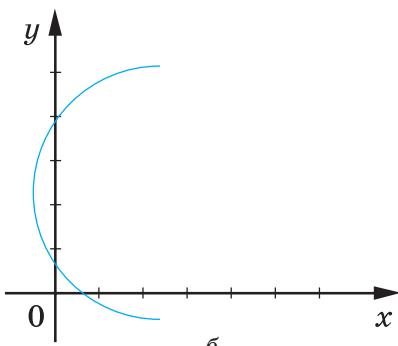
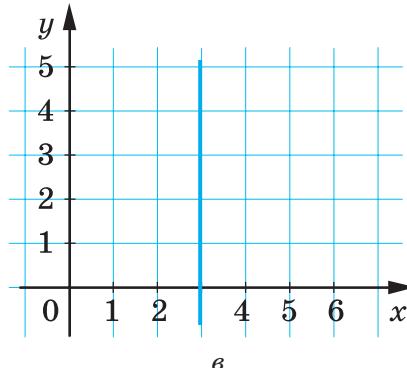
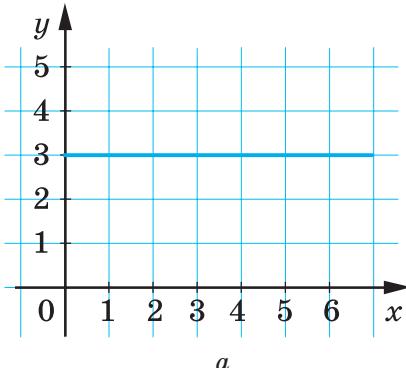
б) $\frac{3x^2-12}{x-3} \cdot \left(3-2x+\frac{x^2}{3}\right) = 0;$

г) $\frac{x^2-25}{4a+4} \cdot \frac{x+1}{x-5} - \frac{x-7}{6} = 0.$

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

291. Провідміняйте слова: *дріб, частка, знаменник*.

292. На якому малюнку зображеного графік деякої функції?



Мал. 15

293. Розкладіть на множники:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} 6x^2 - 6y^2; & \text{в)} ax^2 - a^3; & \text{г)} 20a^2 - 45b^2; \\ \text{б)} 5 - 5m^2; & \text{г)} 3x^4 - 12x^2; & \text{д)} 48x^2 - 75y^2. \end{array}$$

294. Виконайте дії:

$$\begin{array}{l} \text{а)} \left(1\frac{8}{13} : 3\frac{3}{13} + \frac{5}{7} : \frac{8}{21} \right) : \left(8\frac{1}{8} + 3\frac{1}{2} \right); \\ \text{б)} \left(28\frac{4}{5} : 13\frac{5}{7} + 6\frac{3}{5} : \frac{2}{3} \right) : \left(1\frac{11}{16} : 2\frac{1}{4} \right). \end{array}$$

 **295.** Знайдіть вказаний відсоток від числа 480. У першій таблиці задано числа, що вказують, який відсоток від числа 480 потрібно знайти. У другій таблиці знайдеми відсоткам відповідає певна буква.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
15	7	10	25	40	2	90	20	150	75	30	0,5	125

192	72	144	33,6	720	432	360	2,4	96	600	9,6	120	48
C	T	H	A	Ч	E	E	К	В	О	Ш	А	P

Установіть правильно відповідність між цифрами першої таблиці і буквами другої таблиці — і ви дізнаєтесь, хто записав у своєму щоденнику про зустріч з М. В. Остроградським такі слова:
 «*Великий математик прийняв мене з розкритими обіймами, як земляка і як сім'янина, який кудись надовго відлучився.*
Спасиби йому.».

СКАРБНИЧКА ДОСЯГНЕНЬ

✓ Формулюю і використовую правило множення і піднесення до степеня дробів

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D} \quad \left(\frac{A}{B} \right)^n = \frac{A^n}{B^n}$$

✓ Умію множити цілий вираз на дріб і дріб на цілий вираз

$$A \cdot \frac{B}{C} = \frac{A \cdot B}{C} \quad \frac{M}{N} \cdot P = \frac{M \cdot P}{N}$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

ВАРИАНТ I

1°. Обчисліть: $3^5 : 81 + (5,3 - 7,3)^3$.

2°. Скоротіть дріб: а) $\frac{8x^2c}{12axc^3}$; б) $\frac{15a^2 - 60}{20a + 40}$.

3°. Знайдіть суму, різницю та добуток дробів:

а) $\frac{ac^2}{12x}$ і $\frac{5ac^2}{12x}$; б) $\frac{x-1}{x(x-4)}$ і $\frac{1}{4-x}$.

ВАРИАНТ II

1°. Обчисліть: $2^5 : 8 + (3,5 - 5,5)^2$.

2°. Скоротіть дріб: а) $\frac{16ax^2}{24amx^3}$; б) $\frac{6n^2 - 24}{12n - 24}$.

3°. Знайдіть суму, різницю та добуток дробів:

а) $\frac{n^2x}{12c}$ і $\frac{7n^2x}{12c}$; б) $\frac{a-1}{a(a-5)}$ і $\frac{1}{5-a}$.

ВАРИАНТ III

1°. Обчисліть: $4^5 : 16 + (7,5 - 5,5)^3$.

2°. Скоротіть дріб: а) $\frac{20cx^3}{24cnx^2}$; б) $\frac{12x^2 - 48}{10x + 20}$.

3°. Знайдіть суму, різницю та добуток дробів:

а) $\frac{ax^2}{10m}$ і $\frac{3ax^2}{10m}$; б) $\frac{n+1}{n(n-5)}$ і $\frac{1}{5-n}$.

ВАРИАНТ IV

1°. Обчисліть: $32 : 2^4 + (5,7 - 7,7)^3$.

2°. Скоротіть дріб: а) $\frac{32az^2}{24acz^3}$; б) $\frac{8c^2 - 32}{15c - 30}$.

3°. Знайдіть суму, різницю та добуток дробів:

а) $\frac{cx^3}{14n}$ і $\frac{5cx^3}{14n}$; б) $\frac{c-2}{c(c-3)}$ і $\frac{1}{3-c}$.

Готуємося до тематичного оцінювання

Тестові завдання № 1

- 1** Подайте вираз $x^8 : x^4$ у вигляді степеня:
 а) x^2 ; б) x^{12} ; в) x^4 ; г) x^{32} .
- 2** Обчисліть: $(-3,27)^3 : 3,27^3$.
 а) 1; б) 3; в) 3,27; г) -1.
- 3** Знайдіть корінь рівняння $x^5 : x^2 = 1$:
 а) 5; б) 2; в) 1; г) 10.
- 4** При якому значенні x не має змісту дріб $\frac{5-x}{3x-6}$:
 а) $x = 0$; б) $x = 5$; в) $x = 2$; г) $x = 3$?
- 5** Укажіть спільний знаменник дробів $\frac{2}{3x^2}$ і $\frac{3}{2xy}$:
 а) $3x^2y$; б) $2xy$; в) $6x^2y$; г) $6xy$.
- 6** Укажіть пропущений член тотожності $\frac{5}{xy} = \frac{*}{3x^2y}$:
 а) $15x$; б) $15x^3$; в) $5x^2$; г) $5y^2$.
- 7** Сума дробів $\frac{2}{x}$ і $\frac{x}{2}$ є дріб:
 а) $\frac{2+x}{x+2}$; б) $\frac{2+x}{2x}$; в) $\frac{2x}{x+2}$; г) $\frac{4+x^2}{2x}$.
- 8** Добуток дробів $\frac{x}{x^2-4}$ і $\frac{x+2}{x}$ дорівнює:
 а) $\frac{x^2+2}{x^3-4}$; б) $\frac{1}{x-2}$; в) $\frac{2+x}{x-2}$; г) $\frac{1}{x+2}$.
- 9** Коренем якого рівняння є число 5:
 а) $\frac{x+5}{x-5} = 0$; б) $\frac{x}{5} = 0$; в) $\frac{2x+10}{x+5} = 0$; г) $\frac{2x-10}{x+5} = 0$?
- 10** Скільки коренів має рівняння $\frac{7}{x^2-1} = 0$:
 а) один; б) два; в) безліч; г) жодного?

Типові завдання до контрольної роботи № 1

1 Скоротіть дріб:

$$\text{а}^{\circ}) \frac{6a^2b^3}{8a^4b^2}; \quad \text{б}^{\bullet}) \frac{3a^2 - 75}{9a + 45}.$$

2 При яких значеннях змінних не має змісту дріб:

$$\text{а}^{\circ}) \frac{5}{a-2}; \quad \text{б}^{\bullet}) \frac{x^2+x}{x^2-x}?$$

3 Виконайте дії:

$$\text{а}^{\circ}) \frac{x}{x+y} + \frac{2y}{x+y}; \quad \text{б}^{\bullet}) \frac{a^2}{a^2-4} - \frac{a}{a+2}.$$

4 Перемножте дроби:

$$\text{а}^{\circ}) \frac{2a^2b}{3x^3} \cdot \frac{5ax^2}{4x^3}; \quad \text{б}^{\bullet}) \frac{9xy^3}{x^2-y^2} \cdot \frac{x+y}{6y^2}.$$

5 Розв'яжіть рівняння:

$$\text{а}^{\circ}) \frac{2x-5}{x+5} = 0; \quad \text{б}^{\bullet}) \frac{2x^2-18}{x^2+3x} = 0.$$

6 Спростіть вираз:

$$\text{а}^{\circ}) \left(\frac{3a}{a+1} + \frac{3}{a+1} \right)^2; \quad \text{б}^{\bullet}) \frac{2c-1}{4c+2} + \frac{2c+1}{6c-3} + \frac{4c}{4c^2-1}.$$

7 Обчисліть значення виразу:

$$\text{а}^{\circ}) a - \frac{a^2}{a-1}, \text{ якщо } a = 2;$$

$$\text{б}^{\bullet}) \frac{x^3+y^3}{x^2-xy+y^2} - \frac{x+y}{x^2-y^2}, \text{ якщо } x = 1,5, y = 0,5;$$

$$\text{в}^{\bullet\bullet}) \frac{4m^2+2mn-n^2}{8m^2+3n^2}, \text{ якщо } \frac{m}{n} = \frac{1}{2}.$$

8• Розв'яжіть рівняння $4(a^2x - 1) = 9(a + x)$ відносно змінної x і вкажіть, при яких значеннях a рівняння має корені.

Використовуємо набуті компетентності

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:

— Що таке взаємно обернені дроби

$$\frac{a}{b} \text{ і } \frac{b}{a} \quad \frac{5}{7} \text{ і } \frac{7}{5}$$

— Як зі звичайними дробами виконувати дію ділення

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

— Як ділять ціле число на дріб і дріб на ціле число

$$a : \frac{c}{d} = \frac{a}{1} : \frac{c}{d} = \frac{a}{1} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{c}$$

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} : \frac{c}{1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a \cdot 1}{b \cdot c}$$

§ 7 | Ділення дробів

Дія ділення дробів обернена до множення:

$$\frac{3}{5} : \frac{4}{7} = \frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 4}, \text{ оскільки } \frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 4} \cdot \frac{4}{7} = \frac{3}{5}.$$

Так само

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}, \text{ бо } \frac{ad}{bc} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b}.$$

Вираз $\frac{ad}{bc}$ — добуток дробів $\frac{a}{b}$ і $\frac{d}{c}$. Отже,

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Дріб $\frac{d}{c}$ називають **оберненим до $\frac{c}{d}$** . Тому ділити дроби можна за таким правилом.

Щоб поділити один дріб на інший, треба перший дріб помножити на дріб, обернений до другого.

На основі цього правила виконують дію ділення будь-яких дробів

$$\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} = \frac{A \cdot D}{B \cdot C}$$

Приклади.

$$\frac{4a^2b}{5x} : \frac{2ax}{3b^2} = \frac{4a^2b}{5x} \cdot \frac{3b^2}{2ax} = \frac{12a^2b^3}{10ax^2} = \frac{6ab^3}{5x^2};$$

$$\frac{1}{a+b} : \frac{a}{a^2-b^2} = \frac{1}{a+b} \cdot \frac{a^2-b^2}{a} = \frac{(a-b)(a+b)}{(a+b)a} = \frac{a-b}{a}.$$

Оскільки цілий вираз можна подати у вигляді дробу зі знаменником 1, то за сформульованим правилом можна ділити дріб на цілий вираз і цілий вираз — на дріб:

$$\frac{4ax^2}{5c} : 2a^2x = \frac{4ax^2}{5c} \cdot \frac{1}{2a^2x} = \frac{2x}{5ac};$$

$$(2a+3) : \frac{a}{2a-3} = \frac{2a+3}{1} \cdot \frac{2a-3}{a} = \frac{4a^2-9}{a};$$

$$1 : \frac{y}{x+y} = \frac{1}{1} \cdot \frac{x+y}{y} = \frac{x+y}{y}.$$

Зверніть увагу! $1 : \frac{A}{B} = \frac{B}{A}$

ХОЧЕТЕ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Проаналізуємо, при яких значеннях змінних a, b, c, d існує значення частки

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d}.$$

Знаменники дробів не можуть дорівнювати нулю, тому $b \neq 0$ і $d \neq 0$. Не може дорівнювати нулю і значення c , бо за цієї умови значення другого дробу дорівнює 0, а на 0 ділити не можна.

Отже, дана частка має значення тільки в тому випадку, коли виконуються всі три наступні умови: $b \neq 0, d \neq 0, c \neq 0$.

Розглянемо, при яких значеннях x має зміст вираз

$$\frac{6}{x-|x|} : \frac{x+|x|}{2}.$$

Якщо $x \geq 0$, то $x-|x|=0$; у цьому випадку знаменник першого дробу дорівнює 0, і частки не існує.

Якщо $x < 0$, то $x-|x|=0$; у цьому випадку значення другого дробу дорівнює 0, а на нуль ділити не можна.

Отже, даний вираз не має змісту при будь-якому значенні x .

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Що означає «поділити один вираз на інший»?
2. Який дріб називається оберненим до даного дробу?
3. Сформулюйте правило ділення дробів.
4. Як поділити дріб на цілий вираз?
5. Як поділити цілий вираз на дріб?
6. При яких значеннях змінних частка дробів $\frac{a}{m} : \frac{c}{n}$ має зміст?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ

- 1** Спростіть вираз $1 - \frac{a}{c} : \frac{a}{c^2}$.

● Розв'язання.

$$1 - \frac{a}{c} : \frac{a}{c^2} = 1 - \frac{a}{c} \cdot \frac{c^2}{a} = 1 - \frac{a \cdot c^2}{c \cdot a} = 1 - c.$$

Відповідь. $1 - c$.

- 2** Знайдіть частку від ділення дробу $\frac{ac^2}{a^2-1}$ на $\frac{2c}{a^3-a^2}$ і вкажіть, при яких значеннях змінних частка існує.

● Розв'язання.

$$\frac{ac^2}{a^2-1} : \frac{2c}{a^3-a^2} = \frac{ac^2}{(a-1)(a+1)} \cdot \frac{a^2(a-1)}{2c} = \frac{a^3c}{2(a+1)}.$$

Перший з даних дробів не має змісту, якщо $a^2 - 1 = 0$, тобто при $a = 1$, або $a = -1$.

Другий дріб не має змісту, якщо $a^2(a-1) = 0$, тобто при $a = 0$ або $a = 1$.

При $c = 0$ значення другого дробу дорівнює 0, а на 0 ділити не можна. Отже, частка даних дробів існує, якщо $a \neq 0$, $a \neq 1$, $a \neq -1$ і $c \neq 0$.

Відповідь. $\frac{a^3c}{2(a+1)}$; частка існує при $a \neq 0$, $a \neq 1$, $a \neq -1$, $c \neq 0$.

ВИКОНАЙТЕ УСНО

- 296.** Поділіть вираз c^3 на: c , c^2 , c^3 , c^4 , c^5 , c^6 .

- 297.** Поділіть дріб $\frac{2}{x}$ на: x^2 , x , $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$, $\frac{1}{x^4}$.

298. Обчисліть частку:

$$10 : \frac{1}{5}; \quad 20 : \frac{4}{5}; \quad \frac{2}{3} : 2; \quad \frac{3}{4} : 6; \quad \frac{2}{3} : \frac{2}{3}; \quad \frac{3}{5} : \frac{5}{3}; \quad 1\frac{1}{2} : \frac{1}{2}; \quad \frac{3}{2} : 1,5.$$

299. Заповніть порожні клітинки таблиці.

A	$\frac{c}{2x}$	$-\frac{c}{2x}$	$\frac{c}{4x}$	$\frac{c^2}{4x}$	$\frac{1}{ax}$	$\frac{c}{ax^2}$
$\frac{c}{2x} : A$						
$\frac{c}{ax} : A$						

РІВЕНЬ А

Виконайте ділення (300–308).

300. а) $\frac{4}{7} : \frac{2}{21}$; в) $\frac{3,5}{4} : \frac{-7}{16}$; г) $\frac{3a}{8b^2} : \frac{1}{4b^2}$;

б) $-15 : \frac{5}{7}$; г) $\frac{5x}{3y} : \frac{10x}{6y}$; д) $\frac{4m^2}{n^3} : \frac{12m^3}{n^4}$.

301. а) $\frac{1}{3ax^2} : \frac{1}{9a^2x}$; в) $\frac{14}{5x^3} : \frac{7x}{2y^2}$; г) $\frac{18c^2}{5xy} : \frac{9c^3}{15x^2}$;

б) $\frac{6x^2}{y} : \frac{1,5x^3}{y^2}$; г) $\frac{2a}{3x} : \frac{4a^2}{9x}$; д) $\frac{1,8z^3}{xy^2} : \frac{9z^3}{x^2y}$.

302. а) $\frac{34ab^2}{17b^2} : \frac{1}{ac^2}$; в) $3x^2 : \frac{1}{9x^3}$; г) $\frac{x}{5cz} : \left(-\frac{1}{15z^3}\right)$;

б) $\frac{3m^2n^3}{4ap} : 9mn^4$; г) $-\frac{2ab}{3xy} : \frac{8a^2b^2}{9x^2y^2}$; д) $1 : \frac{2xy}{x^0}$.

303. а) $\frac{1}{x+y} : \frac{1}{(x+y)^2}$; б) $\frac{(a+b)^2}{3c} : \frac{a+b}{6c}$; в) $\frac{x}{x+y} : \frac{x+y}{x}$.

304. а) $\frac{a^3 + a^2}{11c^2} : \frac{4a+4}{c^3}$; б) $\frac{8cx}{c^2 - 2c} : \frac{4cx}{3c-6}$; в) $\frac{mc^2}{m^2-1} : \frac{3c}{m^3-m^2}$.

305. а) $\frac{3a}{x-y} : \frac{6a^2(x^2-y^2)}{(x-y)^2 xy}$; в) $(a^2-b^2) : \frac{a+b}{a-b}$;

б) $\frac{x^2-2x+1}{3x^2} : \frac{(x-1)^2}{3x^3}$; г) $\frac{2x+1}{2x-1} : \frac{2x}{2x-1}$.

306. а) $\frac{4c^2 - x^2}{3cx} : \frac{2c + x}{6cx^2};$ в) $\frac{x^3 - 3x}{x^2 - 4} : \frac{x^2 - 3}{x^2 + 2x};$
 б) $2ac^2 : \frac{ac^2}{3a - c};$ г) $\frac{(a+c)^2}{a - c} : \frac{a^2 - c^2}{2a}.$

Не забувайте розкладати на множники чисельники і знаменники дробів.

307. а) $\frac{ab^3}{6 - 6a} : \frac{ab^2}{a^2 - 2a + 1};$ в) $(a^2 - 4c^2) : \frac{a - 2c}{3ac};$
 б) $\frac{5a^2 - 5}{3a^2} : \frac{(a+1)^2}{5a};$ г) $(x^6 - 1) : \frac{1}{x^6 + 1}.$

308. а) $(x^2 + x + 1) : (x^3 - 1);$ в) $(a - 4x^2) : (16x^4 - a^2);$
 б) $\frac{9 - 25x^2}{15x} : (5x + 3);$ г) $\frac{x^2 - y^2 z^2}{yz + x} : (yz - x).$

Спростіть вираз (309–310).

309. а) $\frac{3x}{8a} : \left(\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{4c} \right);$ в) $\left(\frac{2x}{m} \right)^2 : \frac{6x^3}{m^2}.$

310. а) $\frac{-5a^2}{4c^3} : \left(\frac{a^3}{2c^3} : \frac{m}{c^2} \right);$ в) $\frac{-9c^2}{5a} : \left(\frac{3c}{10a^2} \right)^3.$

311. Знайдіть значення виразу:

а) $\frac{(t-2)^2}{t-1} : (t^2 - 4),$ якщо $t = 0,5;$
 б) $(2a - 4b) : \frac{3(a^2 - 4b^2)}{a+2b},$ якщо $a = 2,65, b = 7,35.$

312. Які із чисел $-2, -1, 0, 1, 2$ задовольняють рівняння $\frac{x-1}{x} : \frac{x}{x+1} = \frac{x^4 - 1}{5x^2}?$

313. Розв'яжіть рівняння:

а) $x : \frac{2x}{x-2} = 3;$ б) $\frac{3x-2}{2x} : \frac{4}{x} = 2;$ в) $\frac{2x+6}{x} : \frac{2}{x} = 3;$ г) $6x : \frac{18x}{3x+2} = \frac{5}{3}.$

РІВЕНЬ Б

Виконайте ділення (314–318).

314. а) $\frac{x^2 - xy}{x^2 + xy} : \frac{xy}{x^2 y + xy^2};$ в) $\frac{4x^2 - 16x + 16}{x^2 - 9} : \frac{x-2}{x-3};$
 б) $\frac{a^2 b - 4b^3}{3ab^2} : \frac{a^2 - 2ab}{a^2 b};$ г) $\frac{a^2 + 6a + 9}{36 - a^2} : \frac{a+3}{a+6}.$

315. а) $\frac{16xy^2 - x^3}{x^2 - 2xy + y^2} : \frac{x^2y - 16y^3}{x^2 - y^2};$

б) $\frac{x^2 + 2xy + y^2}{y^2x - 9x^3} : \frac{x^2 - y^2}{9x^2y - y^3};$

316. а) $\frac{a^2 - 2a + 1}{a^2 + 2a + 1} : \frac{5a - 5}{3a^3 + 3};$

б) $\frac{1 - x^2y^2}{1 + xy} : \frac{xy - 1}{xy^2 + y};$

317. а) $\frac{a^2 - 3ab}{3b} : (4a - 12b);$

б) $(8x - 12y) : \frac{(2x - 3y)^2}{xy};$

318. а) $\frac{x^2 - 6x + 9}{4x^2 - 6x + 9} : \frac{6 - 2x}{27 + 8x^3};$

б) $\frac{a^2 + ax + x^2}{x - 1} : \frac{a^3 - x^3}{x^2 - 1};$

в) $\frac{x^2 + xy}{5x^2 - 5y^2} : \frac{x^2 - xy}{x^3 + y^3};$

г) $\frac{x^2 - 2xy}{x^2 + 4y^2} : \frac{(x - 2y)^2}{x^4 - 16y^4}.$

в) $(4a^2 - 1) : \frac{1 + 2a}{1 - 2a};$

г) $\frac{3 - x}{3 + x} : (x^2 - 9).$

в) $(4x^2 - y^2) : \frac{10x + 5y}{x - y};$

г) $\frac{9a^3 - ab^2}{2b} : (3a^2 + ab).$

в) $\frac{2a^3 + 16}{a^2 + 3a + 9} : \frac{a^2 - 2a + 4}{2a^3 - 54};$

г) $\frac{64a^3 - b^3}{16a^2 - 8ab + b^2} : \frac{16a^2 + 4ab + b^2}{b^2 - 16a^2}.$

Знайдіть значення виразу (319–320).

319. а) $\frac{ab + 4b - 5a - 20}{b^2 - 1} : \frac{2b - 10}{b + 1},$ якщо $a = 4,$ $b = \frac{3}{4};$

б) $\frac{9 - (a + x)^2}{6a + 6x} : \frac{a^2 + 3a - x^2 - 3x}{a^2 + ax},$ якщо $a = \frac{3}{2},$ $x = \frac{1}{2}.$

320. а) $\frac{xy + 2x + y + 2}{4y^2 - 16} : \frac{xy + 2x}{4 - 2y},$ якщо $x = \frac{1}{2},$ $y = 3;$

б) $\frac{(a - n)^2 - 16}{a^2 - an} : \frac{a^2 - n^2 + 4a + 4n}{5n - 5a},$ якщо $a = \frac{5}{8},$ $n = \frac{3}{8}.$

321. Заповніть таблицю.

x	-4	-3	-1	0	1	2	3
$\frac{x^2 - 2x + 1}{x + 1} : \frac{x - 1}{(x + 1)^2}$							
$\frac{3x^2 - 48}{x - 1} : \frac{12 + 3x}{1 - x}$							

322. Спростіть вираз:

a) $\frac{3y-9}{x^2-xy+x-y} : \frac{xy-3x+2y-6}{x^2-y^2};$ б) $\frac{a^2-2ab+a-2b}{ab^2+a^2b} : \frac{a^2-4b^2}{a^2+ab+a+b}.$

323. На який вираз треба помножити дріб $\frac{3a}{a-2}$, щоб одержати:

a) $\frac{a-2}{3a};$ б) $\frac{a+2}{a-2};$ в) $3a(a-2)?$

Спростіть вираз (324–332).

324. а) $\left(\frac{2a}{3b} \cdot \frac{6ab}{5c^2}\right) : \frac{4ab^2}{9c^2};$ б) $\frac{-3xy}{25ac^3} : \left(\frac{-2cx}{5a} \cdot \frac{3}{-2c^3}\right).$

325. а) $\left(\frac{2a}{m^2c}\right)^3 : \left(\frac{4a^2}{3mc^2}\right)^2;$ б) $\left(\frac{-a}{9c^2x}\right)^3 : \left(\frac{2a}{3cx^2}\right)^4.$

326. а) $\frac{8mn}{9ax^2} : \left(\frac{6m}{5x} : \frac{3x^2}{2n}\right);$ б) $\left(\frac{0,5ax}{2m} : \frac{x}{4m^2}\right) : \frac{m}{a}.$

327. а) $\left(\frac{a+x}{a} - \frac{x-y}{x}\right) : \frac{x^2+ay}{a^2};$ б) $\left(\frac{x}{x-y} - \frac{y}{x+y}\right) : \frac{x^2+y^2}{x^2+xy}.$

328. а) $\left(\frac{a}{a+1} + 1\right) : \left(1 - \frac{3a^2}{1-a^2}\right);$ б) $\left(\frac{2x-1}{2x+1} - \frac{2x+1}{2x-1}\right) : \frac{4x}{5-10x}.$

329. а) $\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b}{a}\right) : \left(\frac{a}{b^2} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right);$ б) $\left(1 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) : \frac{1}{x^2-1}.$

330. а) $(a+b) : \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) - ab \cdot \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2\right);$ б) $\left(1 - \frac{b}{a+b}\right) : \left(a+b - \frac{b^2}{a+b}\right).$

331. а) $\left(\frac{1}{a+b} + \frac{b^2}{a^3-ab^2}\right) : \left(\frac{a-b}{a^2+ab} - \frac{a}{ab+b^2}\right);$ б) $\left(\frac{1}{1-x} - 1\right) : \left(1+x - \frac{1-2x^2}{1-x}\right).$

332. а) $\left(\frac{c-x}{c^2+cx} - \frac{c}{cx+x^2}\right) : \left(\frac{x^2}{c^3-cx^2} + \frac{1}{c+x}\right);$ б) $\frac{a+b}{ab} : \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right) + \frac{1}{b-a}.$

333. Розв'яжіть рівняння:

а) $\frac{x^2-2x+1}{4x+8} : \frac{x-1}{x+2} = 6;$ б) $\frac{x^2-9}{x^2+4} : \frac{x+3}{x-2} = 0;$

б) $\frac{4x^2-1}{3-x} : \frac{2x+1}{6-2x} = 10;$ г) $\frac{16-x^2}{3x} : \frac{16+x^2}{6x^2} = 0.$

Поділіть многочлен на многочлен, записавши частку у вигляді дробу і скоротивши його (334–337).

334. а) $(a^5 - a):(a^2 - 1)$;

б) $(z^6 - z^2):(z^2 - 1)$;

335. а) $(c^6 - c^2):(c^3 - c)$;

б) $(c^4 + c):(c^2 + c)$;

336. а) $(ac + ax + bc + bx):(c + x)$;

б) $(a^3 - 2a^2 + 2a - 4):(a^2 + 2)$;

337. а) $(2a^3b^2 + 3abc^2x - 2a^2bcx - 3c^3x^2):(ab - cx)$;

б) $(32ac^2 + 15cx^2 - 48ax^2 - 10c^3):(2c^2 - 3x^2)$.

338. Задачі німецького математика М. Штіфеля.

а) Додати: $\frac{4x^2}{3x^3}$ і $\frac{3}{2}x$.

б) Відняти: $\frac{9x^4 + 8x^2}{6x^3} - \frac{3}{2}x$.

в) Перемножити: $\frac{9x^4 + 8x^2}{6x^3} \cdot \frac{3}{2}x$.

г) Розділити: $\frac{27x^5 + 24x^3}{12x^3}$ на $\frac{3}{2}x$.

Спростіть вираз (339–341).

339. а) $\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^2 : \frac{a^2 - 2a + 1}{a^2 + 2a + 1}$;

б) $\left(\frac{x+z}{2x}\right)^3 : \frac{x^2 + z^2 + 2xz}{8x^4}$;

340. а) $\left(1 - \frac{2c}{a+c}\right)^2 : \left(\frac{a-c}{a+c}\right)^3$;

б) $\frac{3a^4}{a^2 + x^2 - 2ax} : \left(1 + \frac{x}{a-x}\right)^2$;

341. а) $\left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) : \frac{a+b+c}{2abc} + a^2$; б) $\left(1 - \frac{b^2 - a^2 - c^2}{2ac}\right) : \left(\frac{a+c}{b} - 1\right) - \frac{b^2}{2ac}$.

*Міхаель ШТИФЕЛЬ
(1487–1567)*

У трактаті «Повна арифметика» дав правило ділення на дріб, обернений до дільника. У явному вигляді оперував від'ємними числами. Першим розглядав їх як числа, менші від нуля.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

342. Розв'яжіть систему рівнянь:

a) $\begin{cases} 8(2x - 3y - 3) = 6x(4y - 3) - 3y(8x - 5), \\ 3(10x + 3y) = 9y(4x + 7) - 6x(6y + 1); \end{cases}$

b) $\begin{cases} (x - 2)^2 - (x + 3)^2 = (y - 3)^2 - (y + 2)^2, \\ (x + 2)^2 + (x - 3)^2 = 2x(x - 4) + 13y. \end{cases}$



343. Знайдіть координати точок перетину з осями координат графіка рівняння:

а) $3x + 2y = 6;$

б) $x - 5y = 12.$

344. (ЗНО 2019). На діаграмі відображені розподіл кількості працівників фірми за віком. Скільки всього працівників працює на цій фірмі?

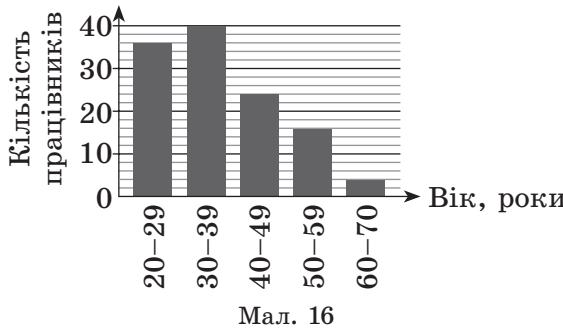
А 40

Б 96

В 120

Г 144

Д 110



Міхаель Штіфель

СКАРБНИЧКА ДОСЯГНЕНЬ

✓ Формулюю і використовую правило ділення дробів

$$\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} = \frac{A \cdot D}{B \cdot C}$$

✓ Умію ділити цілий вираз на дріб і дріб на цілий вираз

$$A : \frac{B}{C} = \frac{A \cdot C}{B} \quad \frac{M}{N} : P = \frac{M}{N \cdot P}$$

✓ Намагатимуся звертати увагу на те, при яких значеннях змінних вираз має зміст

$$\frac{ac^2}{a^2 - 1} : \frac{2c}{a^3 - a^2} = \frac{a^3 c}{2(a+1)}; \text{ частка існує при } a \neq 0, a \neq 1, a \neq -1, c \neq 0$$

ВИКОРИСТОВУЄМО НАБУТИ КОМПЕТЕНТНОСТІ

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:

- Правило розкриття дужок (с. 242).
- Що таке тотожність (с. 17).
- Як виконують тотожні перетворення цілих виразів (с. 242–243).
- Формули скороченого множення (форзац 1).
- Способи розкладання многочленів на множники (с. 243).

$$4x^5 - 20x^3 + 12x^2 = 4x^2(x^3 - 5x + 3)$$

$$9x^2 - 25 = (3x - 5)(3x + 5)$$

$$\begin{aligned} a^2 + 2x + 2a + ax &= a^2 + 2a + ax + 2x = \\ &= a(a + 2) + x(a + 2) = (a + 2)(x + 2) \end{aligned}$$

§ 8 | Перетворення раціональних виразів

Ви вже знаєте, що будь-який числовий вираз після виконання усіх наявних у ньому дій набуває конкретного значення, яке виражається деяким числом. Подібно до того, як знаходять значення числового виразу, виконують перетворення раціональних виразів. Заданий вираз замінюють іншим — тотожним йому. Такі перетворення називають *тотожними перетвореннями*.

Тотожні перетворення раціональних виразів виконують частинами або «ланцюжком» на основі відомих вам з попередніх параграфів правил дій над дробами і цілими виразами. Якщо вираз містить кілька дій різних ступенів, то їх виконують у такій самій послідовності, що й при перетворенні числових виразів:

- 1) дії в дужках;
- 2) дії третього ступеня (піднесення до степеня);
- 3) дії другого ступеня (множення, ділення);
- 4) дії першого ступеня (додавання, віднімання).

Кожний раціональний дробовий вираз можна подати у вигляді дробу, а деякі — навіть у вигляді цілого виразу. Розглянемо, наприклад, вирази:

$$a - \frac{a}{1 + \frac{1}{a}} \text{ i } \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{\frac{x+y}{xy}} - \frac{1}{xy}.$$

Перший з них можна перетворювати так:

$$1) 1 + \frac{1}{a} = \frac{a+1}{a}; \quad 2) a : \frac{a+1}{a} = \frac{a^2}{a+1}; \quad 3) a - \frac{a^2}{a+1} = \frac{a^2 + a - a^2}{a+1} = \frac{a}{a+1}.$$

$$\text{Отже, } a - \frac{a}{1 + \frac{1}{a}} = \frac{a}{a+1}.$$

Подібним способом (частинами) можна спростити і другий вираз. А можна перетворювати його і «ланцюжком»:

$$\frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{\frac{x+y}{xy}} - \frac{1}{xy} = \frac{y+x}{xy} : (x+y) - \frac{1}{xy} = \frac{1}{xy} - \frac{1}{xy} = 0.$$

ХОЧЕТЕ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

У математиці часто доводиться не лише спрощувати вирази, наприклад, суму кількох дробів записати одним виразом, а й робити зворотні операції.

Задача О. Коші (1789–1857). Розкладіть дріб $\frac{2}{x^2 - 1}$ на суму двох дробів зі знаменниками $x - 1$ і $x + 1$.

Розв'язання. Нехай $\frac{2}{x^2 - 1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$. (1)

Перетворимо праву частину рівності у дріб:

$$\begin{aligned} \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} &= \frac{A(x+1) + B(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \\ &= \frac{Ax + A + Bx - B}{(x-1)(x+1)} = \frac{x(A+B) + A - B}{(x-1)(x+1)}. \end{aligned}$$

Підставимо цей вираз у праву частину (1):

$$\frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{x(A+B) + A - B}{(x-1)(x+1)}, \text{ звідси } x(A+B) + A - B = 2.$$

Права частина останньої рівності не містить змінної x . Це можливо тільки за умови, коли $A + B = 0$, тобто коли $B = -A$. За такої умови $A - (-A) = 2$, звідси $2A = 2$, $A = 1$, $B = -1$.

$$\text{Отже, } \frac{2}{x^2 - 1} = \frac{1}{x-1} + \frac{-1}{x+1}.$$

$$\text{Відповідь. } \frac{2}{x^2 - 1} = \frac{1}{x-1} + \frac{-1}{x+1}.$$

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Які вирази називають раціональними?
2. Які вирази називають дробовими?
3. Які дії можна виконувати з раціональними виразами?
4. Який порядок виконання дій?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ

1 Спростіть вираз:

$$\text{а)} \frac{x+1}{x} - \frac{1}{x+2} \cdot \frac{x^2-4}{x}; \quad \text{б)} \left(\frac{x-y}{x+y} - \frac{y}{x-y} \right) : \frac{x^2-3xy}{x-y}.$$

● **Розв'язання.**

а) Перетворюватимемо даний вираз частинами:

$$1) \frac{1}{x+2} \cdot \frac{x^2-4}{x} = \frac{1}{x+2} \cdot \frac{(x-2)(x+2)}{x} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x+2) \cdot x} = \frac{x-2}{x};$$

$$2) \frac{x+1}{x} - \frac{x-2}{x} = \frac{x+1-x+2}{x} = \frac{3}{x}.$$

б) Перетворимо даний вираз «ланцюжком»:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{x-y}{x+y} - \frac{y}{x-y} \right) : \frac{x^2-3xy}{x-y} = \frac{(x-y)^2 - y(x+y)}{(x+y)(x-y)} : \frac{x(x-3y)}{x-y} = \\ & = \frac{x^2 - 2xy + y^2 - yx - y^2}{(x-y)(x+y)} \cdot \frac{x-y}{x(x-3y)} = \frac{x^2 - 3xy}{(x-y)(x+y)} \cdot \frac{x-y}{x(x-3y)} = \\ & = \frac{x(x-3y)(x-y)}{(x-y)(x+y)x(x-3y)} = \frac{1}{x+y}. \end{aligned}$$

Відповідь. а) $\frac{3}{x}$; б) $\frac{1}{x+y}$.

2 Подайте дріб $\frac{5x+19}{x+3}$ у вигляді $m + \frac{n}{x+3}$, де m і n — цілі числа.

● **Розв'язання.** $\frac{5x+19}{x+3} = \frac{5(x+3)+4}{x+3} = \frac{5(x+3)}{x+3} + \frac{4}{x+3} = 5 + \frac{4}{x+3}$.

ВИКОНАЙТЕ УСНО

Спростіть вираз (345–348).

345. а) $\left(a + \frac{x}{c} \right) : \left(a + \frac{x}{c} \right); \quad \text{б)} \left(1 + \frac{a}{n} \right) : \frac{n+a}{n}.$

346. а) $1 : \frac{a-c}{a+c};$

б) $1 : \frac{1+x}{x-1}.$

347. а) $\left(n + \frac{1}{n}\right) \left(n - \frac{1}{n}\right) : \left(n^2 - \frac{1}{n^2}\right);$

б) $\frac{a}{c} \cdot \frac{a-c}{a+c} \cdot \frac{a+c}{a}.$

348. а) $\frac{a^3 - 1}{a-1} : (a^2 + a + 1);$

б) $\frac{1+x^3}{1+x} : (1-x-x^2).$

Рівень А

Виконайте дії (349–352).

349. а) $\frac{a}{a-1} \cdot (a-1)^2 + 1;$

б) $\frac{1}{x} - \frac{x-2}{x} : (x-2)^2;$

б) $(x+2) \cdot \frac{1}{x^2-4} + \frac{1}{x};$

г) $\frac{3}{a^2-16} \cdot (a+4) + \frac{a}{2}.$

350. а) $(x-3) \cdot \frac{5}{9-x^2} + \frac{4}{x};$

б) $\frac{2}{(x+3)} \cdot (x^2-9) + \frac{6}{x+3};$

б) $\frac{a+6}{a} : (a+6)^2 + \frac{1}{a};$

г) $\frac{5}{a^2-4} \cdot (a+2)^2 - \frac{10}{a-2}.$

351. а) $\frac{x+2}{x+3} : \frac{5x+10}{9-x^2} - \frac{2x-1}{15};$

б) $\frac{x^2-y^2}{(x-y)^2} \cdot \frac{x^2}{x+y} + \frac{1-x^2}{x-y};$

б) $\left(\frac{6y}{y-4} - 3y\right) : \frac{6-y}{y-4};$

г) $\frac{m-5}{m+5} \cdot \left(m + \frac{2m^2}{5-m}\right).$

352. а) $\frac{a^2-4}{9-a^2} : \frac{a-2}{3+a} - \frac{2}{3-a};$

б) $\frac{a^2-b^2}{4a+4} \cdot \frac{a+1}{a-b} + \frac{a+b}{4};$

б) $\left(x - \frac{5x}{x+3}\right) : \frac{x-2}{x+3};$

г) $\left(\frac{2a}{2a-1} + 1\right) \cdot \frac{6a-3}{4a^2-a}.$

Спростіть вираз (353–357).

353. а) $\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right) \cdot \frac{xy}{x+y};$

б) $\left(1 + \frac{a}{b}\right) : \left(1 - \frac{a}{b}\right);$

б) $\frac{a-b}{ab} : \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right);$

г) $\left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{y}\right) : \left(\frac{1}{xy} - \frac{1}{y}\right).$

354. а) $\left(\frac{x}{y^2} - \frac{1}{x}\right) : \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right);$

б) $\left(\frac{m}{m+1} + 1\right) : \left(1 - \frac{3m^2}{1-m^2}\right);$

б) $\left(\frac{a}{b} + \frac{a^2}{b^2}\right) : \left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{b}{a}\right);$

г) $\left(\frac{3a+1}{3a-1} - \frac{3a-1}{3a+1}\right) : \frac{12a}{15a-5}.$

355. а) $\frac{a-b}{a} \cdot \left(\frac{a}{a-b} + \frac{a}{b} \right);$

б) $\left(\frac{x}{y} - \frac{x}{x+y} \right) \cdot \frac{x+y}{x};$

356. а) $\frac{a^2 - 2a + 1}{a^2 - 1} \cdot \left(\frac{a+1}{a-1} \right)^2;$

357. а) $\frac{x^3 - a^3}{x^2 - a^2} \cdot \frac{x+a}{a^2 + ax + x^2};$

Доведіть тотожність (358–359).

358. а) $\frac{(2a+1)^2}{(2a-1)^2 + 8a} = 1;$

359. а) $\frac{8c}{(2c+1)^2 - (2c-1)^2} = 1;$

360. Доведіть, що значення виразу не залежить від значень змінних, які до нього входять:

а) $\left(\frac{4}{x} - \frac{x}{4} \right) \cdot \left(\frac{1}{4-x} - \frac{1}{4+x} \right);$

б) $\left(\frac{2}{3a} - \frac{3a}{2} \right) \cdot \left(\frac{1}{3a-2} + \frac{1}{3a+2} \right);$

в) $\left(\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} \right) : \frac{2}{x^2 - y^2};$

г) $\left(\frac{a-b}{a+b} - \frac{a+b}{a-b} \right) : \frac{4}{a^2 - b^2}.$

б) $\frac{1-4x^2}{4x^2+4x+1} \cdot \frac{3x}{2x-1}.$

б) $\left(\frac{2a}{a-x} \right)^3 \cdot \frac{a^2 - 2ax + x^2}{6a^2}.$

б) $\frac{(2a-1)^2}{(2a+1)^2 - 8a} = 1.$

б) $\frac{8a^2 + 2}{(2a+1)^2 + (2a-1)^2} = 1.$

Виконайте дії:

361. а) $\left(\frac{x+y}{y} - \frac{2y}{y-x} \right) \cdot \frac{y-x}{x^2 + y^2};$

б) $\left(\frac{2a}{a+x} + \frac{x-a}{a} \right) : \frac{x^2 + a^2}{x+a};$

в) $\left(\frac{2a}{b} - \frac{8b}{a} \right) \cdot \left(\frac{a}{a-2b} - \frac{a}{a+2b} \right);$

г) $\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} \right) \cdot \left(\frac{x^2y}{y-x} + \frac{x^2y}{y+x} \right).$

362. Знайдіть значення виразу:

а) $\frac{a}{a+1} \cdot \left(a - \frac{1}{a} \right), \text{ якщо } a = 2,37;$

б) $\left(\frac{x+1}{x} - \frac{2x}{x-1} \right) \cdot \frac{1-x}{x^2+1}, \text{ якщо } x = -0,25;$

в) $\left(\frac{a+x}{a} - \frac{x-1}{x} \right) \cdot \frac{a^2x}{x^4 - a^2}, \text{ якщо } a = 2,25, x = 3,5.$

363. Доведіть рівності, які Евклід (ІІІ ст. до н. е.) довів геометричним способом для додатних a і b .



Евклід

$$\text{а)} ab + \left(\frac{a+b}{2} - b \right)^2 = \left(\frac{a+b}{2} \right)^2; \quad \text{б)} a^2 + b^2 = 2 \left(\left(\frac{a+b}{2} \right)^2 + \left(\frac{a+b}{2} - b \right)^2 \right).$$

Рівень Б

Спростіть вираз (364–377).

$$\text{364. а)} \frac{\frac{a}{n} + \frac{c}{n}}{\frac{a}{n}};$$

$$\text{б)} \frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}{\frac{a}{b} - \frac{b}{a}};$$

$$\text{в)} \frac{m + \frac{mn}{m-n}}{m - \frac{mn}{m-n}}.$$

$$\text{365. а)} \frac{\frac{a}{b} - \frac{b^2}{a+b}}{b - \frac{a^2}{a+b}};$$

$$\text{б)} \frac{x - \frac{yz}{y-z}}{y - \frac{xz}{x-z}};$$

$$\text{в)} \frac{x+2 - \frac{1}{x+2}}{x+2 + \frac{x}{x+2}}.$$

$$\text{366. а)} \frac{\frac{a(a-x)-x(a+x)}{a}}{\frac{a}{a+x} - \frac{x}{a-x}}$$

$$\text{б)} \left(\frac{a^2}{4b^2} + \frac{9b^2}{a^2} + \frac{3}{2} \right) \cdot \left(\frac{a}{2b} - \frac{3b}{a} \right).$$

$$\text{367. а)} 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{x}}};$$

$$\text{б)} \frac{n}{n - \frac{1}{n - \frac{n}{1-n}}}.$$

$$\text{368. а)} \frac{\frac{n^2-1}{n^2+n}}{\left(1-\frac{1}{1-\frac{1}{n}}\right)^2};$$

$$\text{б)} \frac{a^4 + c^4}{(a-c)^2} - \frac{2}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right)^2}.$$

$$\text{369. а)} \left(\frac{2c}{3c+1} + \frac{3c}{1-2c} \right) \cdot \frac{9c^2+6c+1}{10c^2+10c};$$

$$\text{б)} \frac{1 - \frac{2x}{a} + \frac{x^2}{a^2}}{1 - \frac{x}{a}}.$$

$$\text{370. а)} \frac{\frac{1}{a+c} - \frac{1}{x}}{\frac{a+c-x}{a+c-x}} \cdot \left(\frac{a}{c} - \frac{c}{a} \right);$$

$$\text{б)} \left(n - \frac{1}{1-n} \right) \cdot \frac{n^2 - 2n + 1}{n^2 - n + 1};$$

$$\text{в)} \frac{\frac{1}{a+c} - \frac{2}{x}}{\frac{a+c-x}{a+c-\frac{x}{2}}} : 2;$$

$$\text{г)} \left(\frac{xy}{ab} + \frac{ax}{b^2} - \frac{by}{a^2} \right) : \left(\frac{xy}{ab} - \frac{ax}{b^2} + \frac{by}{a^2} \right).$$

371. а) $\left(1+x+\frac{1}{x}\right) \cdot \left(1+x-\frac{1}{x}\right)$; б) $\left(x+1-\frac{1}{1-x}\right) : \left(x-\frac{x^2}{x-1}\right)$.

372. а) $\left(a^2-1\right) \cdot \left(\frac{1}{a-1}-\frac{1}{a+1}-1\right)$; б) $\left(\frac{a^2}{c^2}+\frac{c}{a}\right) : \left(\frac{a}{c^2}-\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)$.

373. а) $\left(1-\frac{2x-3y}{2x+3y}\right) : \left(\frac{2xy}{4x^2-9y^2} + \frac{y}{3y-2x}\right)$; б) $1 - \frac{x^2-c^2}{x} : \frac{c-x}{x^2}$;

б) $\left(\frac{a^2+ab}{a^3+a^2b+ab^2+b^3} + \frac{b}{a^2+b^2}\right) : \left(\frac{1}{a-b} - \frac{2ab}{a^3-a^2b+ab^2-b^3}\right)$.

374. а) $\left(\frac{3}{a-1} - \frac{3a^2+6a+3}{a^2-1} : \frac{a^4+a}{a^3+1}\right) \cdot \frac{a+a^2}{-3}$;

б) $\left(\frac{4a}{a+2} - \frac{a^3-8}{a^3+8} : \frac{a^2-4}{4a^2-16a+16}\right) \cdot \frac{a+2}{16}$.

375. а) $\frac{4ab}{b^2-a^2} : \left(\frac{1}{b^2-a^2} + \frac{1}{a^2+2ab+b^2}\right)$; б) $\frac{3c-3}{c^2-4} \cdot \frac{c+2}{c^2-2c+1} - \frac{3(c+2)}{c^2-4}$.

376. а) $\left(\frac{x^2}{x+a} - \frac{x^3}{x^2+2xa+a^2}\right) : \left(\frac{x}{x+a} - \frac{x^2}{x^2-a^2}\right)$;

б) $\frac{4a^2+16+16a}{a-2} \cdot \left(\frac{a}{2a-4} - \frac{a^2+4}{2a^2-8} - \frac{2}{a^2+2a}\right)$.

377. а) $\left(\frac{2x-1}{x+1} - x\right) \cdot \left(\frac{3}{x^3+1} - \frac{1}{x+1} - \frac{3}{x^2-x+1}\right)$;

б) $\frac{3x^2}{a^2-x^2} - 3a \left(\frac{1}{a-x} - \frac{x}{a^3-x^3} \cdot \frac{a^2+ax+x^2}{a+x}\right)$;

б) $\frac{xy^2-x^3}{x^2+y^2} \cdot \left(\frac{x}{(x-y)^2} - \frac{y}{x^2-y^2}\right) + \frac{y}{x+y}$.

«Ніякі людські дослідження не можна назвати справжньою наукою, якщо вони не пройшли через математичні доведення».

Леонардо да Вінчі

Доведіть тотожність (378–380).

378. а) $\frac{2a-b}{ab} - \frac{1}{a+b} \cdot \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right) = \frac{1}{b}$; б) $\frac{1}{x+y} \left(\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}\right) + 1 = \frac{x^2+y^2}{xy}$.

379. а) $\left(\frac{4ab}{a-b} + a-b\right) : \left(1 + \frac{2b}{a-b}\right) = a+b$;

б) $\left(\frac{2a+2}{a-1} + a+1\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{a+1}\right) = a+1$.

380. а) $\frac{1}{xy} + \left(x^2 - xy - \frac{x-y}{xy+y^2} \right) : \frac{x^2-xy}{x+y} = x+y;$

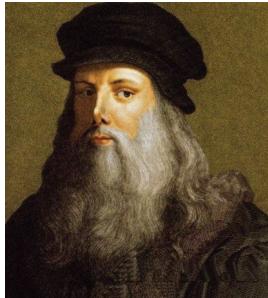
б) $\left(\frac{xy+y^2}{x^2-xy} + xy + y^2 \right) \cdot \frac{x}{x+y} - \frac{y}{x-y} = xy.$

381. Доведіть, що вирази A_1 і A_2 тотожно рівні:

а) $A_1 = \frac{2}{mn} : \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right)^2, \quad A_2 = \frac{m^2+n^2}{(m-n)^2} - 1;$

б) $A_1 = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right)^2 - \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x} \right)^2, \quad A_2 = \left(\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y} \right) : \frac{xy}{x^2-y^2};$

в) $A_1 = \left(a - \frac{a^2+b^2}{a+b} \right) \cdot \left(\frac{1}{b} + \frac{2}{a-b} \right), \quad A_2 = \left(1 + \frac{a^2-ab+b^2}{a^2-b^2} \right) \cdot \left(\frac{2a+b}{a} - \frac{3a}{2a-b} \right).$



Леонардо да Вінчі

382. Значення дробу $\frac{ax+15}{a}$ дорівнює 8, якщо $x = 3$. При якому значенні x цей дріб дорівнює 18?

383. Подайте дріб $\frac{7x+9}{x+1}$ у вигляді $a + \frac{b}{x+1}$, де a, b — цілі числа.

384. При яких цілих значеннях n число $\frac{2n+5}{n+1}$ є цілим?

385. Натуральні числа a, b, c, d, e такі, що $ab = 2, bc = 3, cd = 4, de = 5$.

Знайдіть значення дробу $\frac{e}{a}$.

386. При яких натуральних значеннях n число $\frac{4n^2-12n+21}{n-3}$ є натуральним?

387. Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n число $\frac{n^3}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{3}$ є натуральним.

388. Доведіть, що при будь-якому значенні $a > 1$ число

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1+a} + \frac{2}{1+a^2} + \frac{4}{1+a^4} + \frac{8}{1+a^8} \text{ є від'ємним.}$$

389. Доведіть, що при всіх допустимих значеннях x вираз

$$\frac{18x}{27x^3+8} + \frac{1}{3x+2} - \frac{3x+2}{9x^2-6x+4} \text{ дорівнює нулю.}$$

390. Доведіть, що при всіх допустимих значеннях x вираз

$$\left(\frac{1}{x+1} - \frac{3}{x^3+1} + \frac{3}{x^2-x+1} \right) \cdot \left(x - \frac{2x-1}{x+1} \right)$$

не залежить від значення змінної.

391. Спростіть вираз:

$$\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} - \frac{1}{bc} \right) \cdot \frac{a^2b^2}{a^2 - (b+c)^2} + \frac{ab}{c} : (a+b+c).$$

392. Знайдіть значення виразу:

- а) $\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2 \right) : \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right)$, якщо $x = 3,7$, $y = -1,3$;
- б) $\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b}{a} \right) : \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{a}{b^2} \right)$, якщо $a = 12$, $b = 8$;
- в) $\left(\frac{xy}{x^2 - y^2} + \frac{y}{2y - 2x} \right) \cdot \left(\frac{x^2}{2y} - \frac{y}{2} \right)$, якщо $x = 5,6$, $y = -2,4$;
- г) $\left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2} \right) \cdot \left(\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y} \right)$, якщо $x = \frac{1}{3}$, $y = 12$.

393. Доведіть твердження:

- а) якщо $x = \frac{a-b}{a+b}$, то $\left(\frac{a}{b} - x \right) \cdot \frac{b}{ax+b} = 1$;
- б) якщо $x = \frac{ab}{a+b}$, то $\frac{x^2 - a^2}{x^2 - b^2} \cdot \frac{b^3}{a^3} = \frac{a+2b}{b+2a}$;
- в) якщо $x = \frac{ab}{a^2 + b^2}$, то $\frac{0,5 - x}{0,5 + x} = \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}$.

«Вивчення математики передусім сприяє розвиткові логічного мислення, вмінню думати, аналізувати, абстрагувати, схематизувати, узагальнювати».
Ю. О. Митропольський

394. Виконайте підстановку і спростіть:

а) $\frac{x-a}{x-b}$, де $x = \frac{ab}{a+b}$; в) $\frac{ax}{a+x} - \frac{bx}{b-x}$, де $x = \frac{ab}{a+b}$;

б) $\frac{\frac{a}{b} - x}{\frac{a}{b} + x}$, де $x = \frac{a-b}{a+b}$; г) $\left(\frac{x+2b}{x-2b} + \frac{x+2a}{x-2a} \right) : \frac{x}{2}$, де $x = \frac{4ab}{a+b}$.

395*. Спростіть вираз:

а) $\frac{1}{(a-b)(b-c)} + \frac{1}{(c-a)(a-b)} + \frac{1}{(b-c)(c-a)}$;

б) $\frac{x^2}{(x-y)(x-z)} + \frac{y^2}{(y-x)(y-z)} + \frac{z^2}{(z-x)(z-y)}$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

396. Подайте вираз у вигляді добутку:

а) $0,36x^4 - (1 - 0,4x^2)^2$;

в) $(2x - 1)^2 - (4 - 5x)^2$;

б) $(3 + 0,1y^3)^2 - 0,81y^6$;

г) $(a - 2b)^2 - (3a + b)^2$.

397. Круг з буквами перекресліть двома прямими так, щоб із букв у кожній частині круга можна було б скласти алгебраїчний термін (мал. 17).

398. Обчисліть:

а) $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right) : (-2) - 16 \frac{1}{4} : (-4)$;

б) $\left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right) : (-3) + \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{6}\right) : (-2)$.

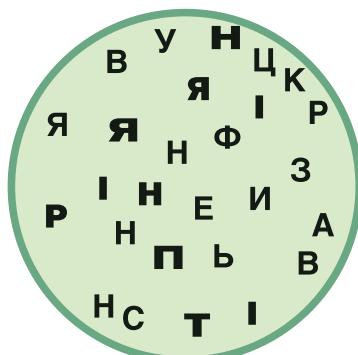
399. Розв'яжіть рівняння:

а) $\frac{x+1}{6} - \frac{2x}{9} = 5$;

б) $\frac{x-2}{3} - \frac{5x+1}{4} = \frac{11x}{12}$;

в) $\frac{3x}{4} + \frac{2(x-1)}{5} = \frac{111}{10}$;

г) $\frac{2x+3}{5} + \frac{15-3x}{3} = \frac{4}{5}$.



Мал. 17

СКАРБНИЧКА ДОСЯГНЕНЬ

✓ Умію виконувати арифметичні дії з раціональними дробами:

$$\frac{A}{C} \pm \frac{B}{C} = \frac{A \pm B}{C} \quad \frac{A}{B} \pm \frac{C}{D} = \frac{A \cdot D}{B \cdot D} \pm \frac{C \cdot B}{D \cdot B} = \frac{A \cdot D \pm C \cdot B}{B \cdot D}$$

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D} \quad \left(\frac{A}{B} \right)^n = \frac{A^n}{B^n} \quad \frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} = \frac{A \cdot D}{B \cdot C}$$

✓ Знаю порядок виконання дій.

✓ Умію розв'язувати вправи, що передбачають тотожні перетворення раціональних виразів.

ВИКОРИСТОВУЄМО НАБУТИ КОМПЕТЕНТНОСТІ

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:

- Означення рівняння і його властивості (с. 241).
- Які рівняння називають рівносильними (с. 241).
- Що таке раціональне і дробово-раціональне рівняння (с. 36).
- Умову рівності дробу нулю (с. 36).

$$\text{Якщо } \frac{A}{B} = 0, \text{ то } \begin{cases} A = 0, \\ B \neq 0 \end{cases}$$

- Основну властивість пропорції.

$$\text{Якщо } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ то } a \cdot d = b \cdot c$$

§ 9 Раціональні рівняння

Уміти перетворювати дробові вирази потрібно, зокрема, для того, щоб розв'язувати дробові рівняння. Саме такі рівняння є математичними моделями багатьох життєвих ситуацій і виробничих процесів.

Ви вже знаєте, що рівняння називається *раціональним*, якщо його ліва і права частини — раціональні вирази. Раціональне рівняння називають *дробовим*, якщо його права, ліва або права і ліва частини — дробові вирази. Приклади дробових рівнянь:

$$\frac{1}{x+5} = 3, \quad x - \frac{1-2x}{x} = 2, \quad \frac{x+1}{x-2} = \frac{x-3}{x+2}.$$

Розв'язуючи ціле рівняння, його найчастіше намагаються замінити рівносильним. З дробовими рівняннями це можна зробити тільки в окремих випадках. Здебільшого їх замінюють рівняннями-наслідками.

Рівняння називають наслідком даного, якщо всі розв'язки даного рівняння задовольняють утворене рівняння.

Рівняння-наслідок задовольняють усі корені даного рівняння, але, крім них, воно може мати і сторонні корені.

Розв'язувати дробові раціональні рівняння можна різними способами. Зокрема:

1) замінити дане рівняння рівносильним йому рівнянням, ліва частина якого є дробом, а права — нулем;

2) замінити дане рівняння цілим, яке є наслідком даного.

Розглянемо на конкретних прикладах кожен із цих способів.

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння:

$$\frac{2}{x-2} - \frac{x+2}{x+3} = \frac{10}{(x+3)(x-2)}.$$

Розв'язання. Замінимо дане рівняння рівносильним йому, в якому права частина — нуль, а ліва — дріб. Для цього перенесемо дріб з правої частини в ліву, змінивши знак перед ним на протилежний, і спростимо одержаний дробовий вираз:

$$\begin{aligned} \frac{2}{x-2} - \frac{x+2}{x+3} - \frac{10}{(x+3)(x-2)} &= 0, \\ \frac{2(x+3) - (x+2)(x-2) - 10}{(x+3)(x-2)} &= 0, \quad \frac{x(x-2)}{(x+3)(x-2)} = 0. \end{aligned}$$

Одержане рівняння рівносильне даному. А розв'язати його неважко, врахувавши, що дріб дорівнює нулю тільки тоді, коли чисельник дорівнює нулю, а знаменник відмінний від нуля.

Прирівняємо чисельник до нуля:

$$x(x-2) = 0, \text{ якщо } x = 0 \text{ або } x = 2.$$

Якщо $x = 0$, то знаменник $(x + 3)(x - 2)$ не дорівнює 0. Отже, $x = 0$ — корінь даного рівняння.

Якщо $x = 2$, то $(x + 3)(x - 2) = 0$.

Отже, $x = 2$ не задовольняє дане рівняння.

Відповідь. $x = 0$.

Щоб розв'язати дробове рівняння з використанням рівняння-наслідку, потрібно помножити його обидві частини на спільний знаменник — цілий вираз. Одержано ціле рівняння. Треба знайти його корені й випробувати, які з них не задовольняють дане рівняння. Таким чином, перевірка коренів є невід'ємною складовою розв'язання.

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння:

$$\frac{a+3}{a-1} + \frac{1}{a} = 1.$$

Розв'язання. Помножимо обидві частини рівняння на $a(a - 1)$ — спільний знаменник дробів. Маємо:

$$\frac{(a+3) \cdot a(a-1)}{a-1} + \frac{a(a-1)}{a} = a(a-1); \quad a^2 + 3a + a - 1 = a^2 - a, \quad 5a = 1, \quad a = 0,2.$$

Перевірка. $\frac{0,2+3}{0,2-1} + \frac{1}{0,2} = \frac{3,2}{-0,8} + 5 = -4 + 5 = 1.$

Відповідь. $x = 0,2.$

Якщо дробове рівняння має вигляд пропорції або є таким, що його легко подати у вигляді пропорції, то можна скористатися основною властивістю пропорції. У цьому випадку також одержують рівняння-наслідок.

ХОЧЕТЕ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Відомі вам лінійні рівняння — це окремий вид раціональних рівнянь. Як пов'язані між собою раціональні рівняння, ілюструє малюнок 18. Ті раціональні рівняння, які не є цілими, називають **дробово-раціональними**. Тільки деякі з них зводяться до лінійних. Переважна більшість дробово-раціональних рівнянь зводиться до таких, які ви розв'язувати ще не вмієте. Розв'язування деяких з них розглянемо згодом.



Мал. 18

Дробово-раціональними бувають не тільки рівняння з однією змінною, а й з двома, трьома і більшою кількістю змінних та системи таких рівнянь. Для прикладу розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{2}{x-1} + \frac{4}{y+1} = 2, \\ \frac{6}{x-1} - \frac{4}{y+1} = 2. \end{cases}$$

Додавши ліві й праві частини цих рівнянь, одержимо: $\frac{8}{x-1} = 4$, або $4x - 4 = 8$, звідси $x = 3$.

Підставивши це значення x у перше рівняння, матимемо: $\frac{4}{y+1} = 1$, звідси $y = 3$.

Відповідь. $x = 3, y = 3.$

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

- Що таке рівняння?
- Які рівняння називають раціональними?
- За якої умови дріб дорівнює нулю?
- Як розв'язують рівняння з використанням основної властивості пропорції? Сформулюйте цю властивість.

ВИКОНАЄМО РАЗОМ

1 Розв'яжіть рівняння $\frac{x+3}{6(x-3)} = \frac{1}{x-3}$.

- Розв'язання.** За основною властивістю пропорції: $x^2 - 9 = 6x - 18$; $x^2 - 6x + 9 = 0$; $(x - 3)^2 = 0$, звідси $x = 3$. При такому значенні x знаменники дробів, що входять до даного рівняння, дорівнюють 0. Тому це значення x не є коренем рівняння.

Відповідь. Рівняння розв'язків не має.

2 Яке число слід додати до членів дробу $\frac{3}{5}$, аби одержати дріб, що дорівнює $\frac{5}{6}$?

- Розв'язання.** Позначимо шукане число буквою x . Тоді за умовою задачі:

$$\frac{3+x}{5+x} = \frac{5}{6}, \quad 18+6x = 25+5x, \quad \text{звідси } x = 7.$$

Перевірка. $\frac{3+7}{5+7} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$.

Відповідь. Шукане число дорівнює 7.

ВИКОНАЙТЕ УСНО

400. Укажіть, при яких значеннях змінної чисельник дробу дорівнює нулю, при яких — нулью дорівнює знаменник:

a) $\frac{2x-8}{3x+15}$; b) $\frac{6x-18}{x(x+5)}$; г) $\frac{y^2-25}{4y-3}$; е) $\frac{a^2-2a+1}{2a-1}$;

б) $\frac{16+4y}{3-6y}$; г) $\frac{1+3a}{a(2-a)}$; д) $\frac{5x+2}{16-x^2}$; е) $\frac{3y-2}{4+4y+y^2}$.

401. Чи має розв'язки рівняння:

a) $\frac{x^2+1}{(x+1)^2} = 0$; б) $\frac{(x+1)^2}{x^2+1} = 0$; в) $\frac{x-1}{1-x} = 0$?

402. Поясніть, чому не має розв'язків рівняння:

a) $\left(\frac{x-1}{x}\right)^2 + 1 = 0$; б) $x^2 + \frac{1}{x^2} = 0$; в) $\frac{3x+6}{4-x^2} = 0$.

403. Розв'яжіть рівняння:

a) $\frac{x-2}{x} = 0$; б) $\frac{3+x}{x} = 0$; в) $\frac{x}{x+7} = 0$; г) $\frac{x}{x+2} = 0$; г) $\frac{x^2}{x-1} = 0$.

РІВЕНЬ А

Розв'яжіть рівняння (404–408).

404. а) $\frac{x+3}{x} - 2 = 0$; в) $\frac{x}{x+2} - 2 = 0$; г) $\frac{5-x}{x} = 6$;

б) $\frac{2x-1}{3x} = 0$; г) $\frac{x-8}{x} = 3$; д) $\frac{x}{x-2} = 2$.

405. а) $\frac{x-5}{x} - 2 = 0$; в) $\frac{3x-7}{x} + 4 = 0$; г) $\frac{5-2x}{x} = 3$;

б) $\frac{x}{x+6} + 2 = 0$; г) $\frac{3x-4}{x} = 2$; д) $\frac{2x}{x+3} = 1$.

406. а) $\frac{5x^2+1}{3x} = 2x$; в) $\frac{x^2-1}{x} = 2x$; г) $\frac{4x-2}{x+3} + 6 = 0$;

б) $\frac{3x^2-4}{x} = 2x$; г) $\frac{2x+3}{x-1} - 3 = 0$; д) $\frac{4-3x}{1-2x} - 5 = 0$.

407. а) $\frac{3x}{x+2} = -5$; в) $\frac{x-6}{3x-1} = 5$; г) $\frac{7-2x}{x+1} = \frac{2}{3}$;

б) $\frac{2x+5}{x+2} = 3$; г) $\frac{4+x}{3x} = \frac{1}{3}$; д) $\frac{x+5}{x-3} = \frac{3}{4}$.

408. а) $\frac{7x^2+1}{2x} = 4x$; в) $\frac{x^2+3}{x^2+1} = 2$; г) $\frac{3x^2+5}{x^2-1} = 4$;

б) $\frac{5x^2+4}{2x} = 3x$; г) $\frac{3x^2-4}{2x} = x$; д) $\frac{9-4x^2}{3x} = -x$.

Користуючись властивістю пропорції, розв'яжіть рівняння (409–412).

409. а) $\frac{1}{23-3x} = \frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{29} = \frac{1}{34y-5}$; в) $\frac{x}{x+1} = \frac{2}{3}$.

410. а) $\frac{0,5}{18-x} = \frac{1}{4}$; б) $\frac{5}{7x-2} = \frac{13}{0,2}$; в) $\frac{2}{x-1} = \frac{5}{x}$.

411. а) $\frac{1}{x^2+4} = \frac{1}{4}$; б) $\frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{12}$; в) $\frac{5x^2-16}{12x} = \frac{x}{3}$.

412. а) $\frac{4}{x-1} = \frac{x+1}{6}$; б) $\frac{3z-1}{2} = \frac{1}{3z+1}$; в) $\frac{2x^2+8}{6x} = \frac{2x}{3}$.

413. Яке одне й те саме число треба додати до чисельника і знаменника дробу $\frac{11}{17}$, щоб одержати $\frac{3}{4}$?

414. Знаменник даного дробу на 2 більший від чисельника. Якщо його чисельник збільшити в 3 рази, а до знаменника додати 67, то одержимо $\frac{1}{8}$. Знайдіть даний дріб.

415. Чисельник дробу на 5 менший від знаменника. Якщо до чисельника додати 11, а від знаменника відняти 2, то одержимо дріб, обернений до даного. Знайдіть даний дріб.

Рівень Б

Розв'яжіть рівняння (416–427).

416. а) $\frac{3x^2 - 5}{x+2} = 3x + 1$; в) $\frac{4x^2 - x}{2x+3} + 3 = 2x$; г) $\frac{2}{x+3} = \frac{3-x}{4x^2}$;

б) $\frac{6x^2 + 5}{3x+2} = 2x - 1$; г) $\frac{2-x}{3x^2} = \frac{1}{x+2}$; д) $\frac{x+1}{5} = \frac{3}{x-1}$.

417. а) $\frac{3x^2 - 4}{x} = 3x + 1$; в) $\frac{1}{x-1} = \frac{2}{x+1}$; г) $\frac{y-2}{y-6} = \frac{y}{y-5}$;

б) $\frac{2x^2 - 3}{2x+1} = x + 1$; г) $\frac{2}{z-3} = \frac{3}{z-2}$; д) $\frac{c+1}{c-1} = \frac{c-5}{c-3}$.

418. а) $\frac{x-2}{x+2} = \frac{x+3}{x-4}$; в) $\frac{y-5}{y-3} = \frac{y+1}{y-1}$; г) $\frac{1+3x}{1-2x} = \frac{5-3x}{1+2x}$;

б) $\frac{x}{x-3} = \frac{x+4}{x+5}$; г) $\frac{2x+3}{2x-1} = \frac{x-5}{x+3}$; д) $\frac{5y+1}{y-2} = \frac{5y-2}{y-3}$.

419. а) $\frac{6}{x^2 - 9} + \frac{2}{x+3} = \frac{3}{x-3}$; б) $\frac{7x}{4-x^2} + \frac{5}{2+x} = \frac{3}{2-x}$.

420. а) $\frac{2x+4}{3-x} + 1 = \frac{5-x}{x+2}$;

б) $\frac{3x-5}{x+1} - \frac{x+5}{x-3} = 2$.

421. а) $\frac{2x^2 + 8x - 5}{x+3} - 2x = 1$; б) $2x - \frac{4x^2 + 3}{2x-1} = 5$.

422. а) $\frac{4}{1+x} - \frac{x+1}{x-1} = \frac{x^2 - 3}{1-x^2}$;

б) $\frac{2z-1}{2z+1} - \frac{2z+1}{2z-1} = \frac{8}{1-4z^2}$.

423. а) $\frac{3}{(x+2)^2} + \frac{2}{(x-2)^2} = \frac{5}{x^2 - 4}$;

б) $\frac{1}{(x+5)^2} - \frac{3}{(x-5)^2} = \frac{2}{25 - x^2}$.

424. а) $\frac{8+9x}{36x^2 - 1} + \frac{1}{1-6x} = \frac{2}{6x+1}$;

б) $\frac{1-2x}{1+2x} = \frac{1+2x}{1-2x} + \frac{16}{4x^2 - 1}$.

425. а) $\frac{5}{2-2t} - \frac{5}{18} = \frac{8}{3t-3} - \frac{2+t}{t-1};$

б) $\frac{3}{8-2x} - \frac{5}{6} = \frac{14}{3x-12} - \frac{2+x}{x-4}.$

426. а) $\frac{2z-1}{z+4} - \frac{3z-1}{4-z} - \frac{96}{z^2-16} = 5;$

б) $\frac{6n+5}{4n+3} + \frac{3n-7}{3-4n} + \frac{12n^2+30n+7}{9-16n^2} = 0.$

427. $\frac{7}{(5+2x)(1+2x)} = \frac{3}{(5+2x)^2} + \frac{4}{(1+2x)^2}.$

428. Відкрита задача. Замініть праву частину рівнянь 425–427 так, щоб їх коренем було число 0.

Розв'яжіть систему рівнянь (429–434).

429. Задача Леві бен Герсона (1288–1344).

$$\frac{x+y}{z-x} = 4 \frac{1}{2}; \quad \frac{y+z}{y-x} = 5; \quad x = 10 \frac{3}{4}.$$

430. а) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{4}, \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{4}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \frac{5}{x} + \frac{2}{y} = 2, \\ \frac{10}{x} - \frac{6}{y} = -1. \end{cases}$

431. а) $\begin{cases} \frac{5}{x} + \frac{4}{y} = 51, \\ \frac{1}{x} - \frac{8}{y} = 8; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \frac{4}{x} + \frac{9}{y} = 35, \\ \frac{15}{x} - \frac{7}{y} = 9. \end{cases}$

432. а) $\begin{cases} \frac{1}{x-y} + \frac{1}{x+y} = \frac{5}{8}, \\ \frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y} = \frac{3}{8}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \frac{10}{z-5} + \frac{1}{x+2} = 1, \\ \frac{25}{z-5} + \frac{3}{x+2} = 2. \end{cases}$

433. а) $\begin{cases} 1 + \frac{x}{1-x} = \frac{y}{1-x^2}, \\ \frac{x-5}{3-y} = \frac{1}{2}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \frac{3y}{9-x^2} + \frac{x}{x-3} = 1, \\ \frac{5-y}{x-5} = 2. \end{cases}$

434. а) $\begin{cases} x - \frac{xy+13}{y+6} = 2, \\ y - \frac{xy-13}{x+4} = 2; \end{cases}$

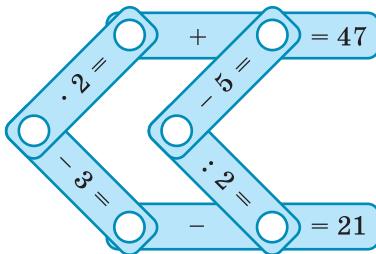
б) $\begin{cases} \frac{11-xy}{y+2} + x = 2\frac{1}{7}, \\ \frac{13-xy}{x-1} + y = 8. \end{cases}$

- 435.** Сума двох чисел дорівнює 50. Якщо більше з них розділити на менше, то в частці дістанемо 3 і 2 в остачі. Знайдіть ці числа.
- 436.** Максимальний вік журавля виражається двозначним числом, у якого цифра десятків на 4 більша від цифри одиниць. Якщо це число розділити на суму його цифр, то в частці буде 7 і в остачі 6. Скільки років може прожити журавель?
-  **437.** Для виготовлення українського віночка від атласної стрічки від-різали 4 м. З'ясувалося, що відрізана частина відноситься до решти, як $2 : 7$. Якої довжини була стрічка?
- 438.** Брат старший за сестру на 6 років. По скільки років братові та сестрі, якщо три роки тому їх літа відносились як $4 : 3$?
- 439. (ЗНО 2020).** Човен пройшов 18 км проти течії річки, витративши вдвічі менше часу, ніж на подолання 48 км за течією. Власна швидкість човна є сталою. Визначте власну швидкість човна (у км/год), якщо швидкість течії становить 2,5 км/год.
- 440.** Два трактористи, працюючи разом, можуть зорати поле за 6 год, а один перший — за 10 год. За скільки годин може зорати поле другий тракторист?
- 441.** Басейн наповнюється водою через одну трубу за 4 год, через другу трубу — за 2 год. За який час наповниться басейн, якщо відкрити одночасно обидві труби?
-  **442.** Під час екологічного заходу «Чисте озеро» дві групи студентів працювали разом над очищенням берегів озера 4 години. За скільки годин може виконати такий самий обсяг робіт кожна група окремо, якщо відомо, що продуктивність праці першої групи у 1,5 раза вища від продуктивності другої.
- 443. Стародавня задача.** Один чоловік випиває барильце квасу за 14 днів, а із жінкою — за 10 днів. За скільки днів таке барильце квасу випиває одна жінка?
- 444. Задача-жарт.**
- | | |
|-----------------------------|--------------------------------|
| Для тата з мамою десяток | а мама з сином — тільки шість. |
| на рік потрібно поросяток, | За скільки тижнів кожен сам |
| із сином тато вісім з'їсть, | упорався б із поросям? |
-  **445.** Будь-яка людина, яка потрапила у скрутну ситуацію, може звернутися у Товариство Червоного Хреста України по допомогу. Для забезпечення потерпілих у надзвичайних ситуаціях речами першої необхідності залишають натуральну допомогу від населення і створюють банки одягу. Відношення кількості банків, що діяли до 1996 року, до створених пізніше дорівнює $5 : 16$. Скільки банків одягу в системі ТЧХУ діє сьогодні, якщо в 1996 році їх налічувалося 150. Дізнайтеся про найближчий до вас.

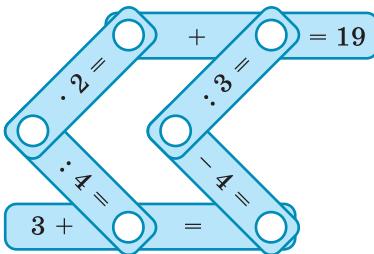
446. Сплав міді і цинку вагою 16 кг містить 55 % міді. Скільки міді потрібно додати у сплав, щоб одержаний новий сплав містив 60 % міді?

447. Два комбайні за 10 год зібрали всю картоплю з поля. Причому комбайн, потужність якого на 25 % більша, був змушений через несправність простояти 4 год. За який час може зібрати цей урожай картоплі кожен комбайн?

448. Розв'яжіть математичні кросворди, які зображені на малюнках 19 і 20.



Мал. 19



Мал. 20

449. Пасажирський поїзд, швидкість якого на 20 км/год більша за швидкість товарного, затрачає на шлях між станціями A і B на 3 год менше, ніж товарний поїзд. Швидкий поїзд, швидкість якого на 20 км/год більша за швидкість пасажирського, витрачає на проїзд від A до B у 2 рази менше часу, ніж товарний. Знайдіть відстань між станціями A і B та швидкості поїздів.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

450. Які із чисел $7, 84, 0, \frac{2}{9}, 0, 5, -8, 2\frac{1}{3}, -24, 9$ натуральні; які — цілі; які — раціональні?

451. Доведіть, що: а) $10^{12} + 2$ ділиться на 3; б) $1 + 10^{10} + 10^{100}$ ділиться на 3.

452. Доведіть, що: а) $10^{15} + 8$ ділиться на 9; б) $10^{10} - 1$ ділиться на 9.

453. Побудуйте графік функції: а) $y = 3 - 2x$; б) $y = \frac{6-x}{2}$.

СКАРБНИЧКА ДОСЯГНЕНЬ

- ✓ Знаю, що таке рівносильні рівняння і вмію розв'язувати рівняння зі змінною в знаменнику, замінюючи його рівносильним.
- ✓ Умію переходити від дробового рівняння до цілого рівняння.
- ✓ Знаю, що обов'язково слід перевірити, чи задовільнять отримані корені початкове рівняння.
- ✓ Умію розв'язувати рівняння, використовуючи основну властивість пропорції.

Використовуємо набуті компетентності

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:

- Означення степеня з натуральним показником (с. 241).
- Властивості степеня з натуральним показником (форзац 1).
- Квадрати натуральних чисел (форзац 4).
- Степені чисел 2 і 3 (форзац 4).
- Дії з одночленами (с. 242).

§ 10 | Степені з цілими показниками

Деякі дроби часто записують у вигляді степенів з від'ємними показниками. Наприклад, замість $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{m^5}$ пишуть a^{-1} , x^{-2} , m^{-5} .

Згадайте, як ділять степені з однаковими основами:

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Розглядаючи степені тільки з додатнimi показниками, наголошують, що остання рівність правильна тільки за умови, що $m > n$. Знявши це обмеження, приходимо до таких наслідків.

$$1 = a^n : a^n = a^{n-n} = a^0.$$

Тому й домовились вважати, що $a^0 = 1$ (коли $a \neq 0$).

$$1 : a^n = a^0 : a^n = a^{0-n} = a^{-n}.$$

Тому є сенс домовитися, що

$$\frac{1}{a^n} = a^{-n}.$$

Отже, можна розглядати степені з довільними цілими показниками. Коротко зміст цього поняття пояснюється так:

$$a^n = \begin{cases} \underbrace{aa\dots a}_{n \text{ раз}} \text{, якщо натуральне число } n > 1; \\ a, \text{ якщо } n = 1; \\ 1, \text{ якщо } n = 0 \text{ і } a \neq 0; \\ \frac{1}{a^{-n}}, \text{ якщо число } n \text{ — ціле від'ємне і } a \neq 0. \end{cases}$$

Властивості степенів із цілими показниками такі самі, як і степенів з натуральними показниками:

$$1) a^m \cdot a^n = a^{m+n};$$

$$3) (a^m)^n = a^{mn};$$

$$5) \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

$$2) a^m : a^n = a^{m-n};$$

$$4) (ab)^n = a^n b^n;$$

Доведемо першу із цих тотожностей (її називають **основною властивістю степенів**) для випадку, якщо m і n — цілі від'ємні числа. За цієї умови $m = -p$ і $n = -q$, де p, q — натуральні числа. Тому

$$a^m \cdot a^n = a^{-p} \cdot a^{-q} = \frac{1}{a^p} \cdot \frac{1}{a^q} = \frac{1}{a^{p+q}} = a^{-(p+q)} = a^{m+n}.$$

Так само можна довести рівність $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ для випадку, якщо один із показників m і n від'ємний, а інший — додатний або дорівнює 0.

Зверніть увагу на степені, в яких основа або показник дорівнюють нулю.

Якщо a і n відмінні від нуля, то

$$a^0 = 1, \quad 0^n = 0$$

Вираз 0^0 не має змісту, це не число, як і вираз $\frac{0}{0}$.

Вирази, що містять степені із цілими показниками, можна перетворювати двома способами: замінюючи їх дробами або користуючись властивостями степенів. Наприклад, спростили вираз $9x^{-3} \cdot 3^{-2} x^6$.

Перший спосіб. $9x^{-5} \cdot 3^{-2} x^6 = 9 \cdot \frac{1}{x^5} \cdot \frac{1}{3^2} \cdot x^6 = x$.

Другий спосіб. $9x^{-5} \cdot 3^{-2} x^6 = 3^2 \cdot 3^{-2} \cdot x^{-5} \cdot x^6 = 3^{2-2} \cdot x^{-5+6} = 3^0 x = x$.

ХОЧЕТЕ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Зверніть увагу на те, як здійснюється розширення поняття степінь. Спочатку вам були відомі тільки квадрат числа і куб числа. Потім дізналися про степені чисел і змінних із довільним натуральним показником. Тепер ви ознайомлюєтесь зі степенями з довільними цілими показниками. Згодом ви дізнаєтесь також про степені, показники яких — довільні раціональні і навіть нераціональні числа.

Тривалий час математики намагалися ввести єдине позначення степенів і скоротити кількість уживаних символів. Сучасні позначення степенів: x^3, y^4, a^5 тощо, які швидко здобули загальне визнання, належать Декарту. Декартові позначення степенів на від'ємні показники поширив англійський математик Дж. Валліс (детальніше про це на с. 120).

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Що таке квадрат числа, куб числа?
2. Сформулюйте означення степеня числа з натуральним показником n .
3. Що розуміють під степенем числа з показником 1?
4. Що розуміють під степенем числа з показником 0?
5. Що розуміють під степенем числа із цілим від'ємним показником?
6. Запишіть у вигляді формули означення степеня з довільним цілим показником.

ВИКОНАЄМО РАЗОМ

1 Обчисліть:

a) $100 \cdot 2^{-2}$; б) $81 \cdot (-3)^{-4}$.

Розв'язання. а) $100 \cdot \frac{1}{2^2} = \frac{100}{4} = 25$; б) $81 \cdot \frac{1}{(-3)^4} = \frac{81}{81} = 1$.

Відповідь. а) 25; б) 1.

2 Запишіть без знаменника вираз $\frac{2}{ax^2}$.

Розв'язання. $\frac{2}{ax^2} = 2 \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{x^2} = 2a^{-1}x^{-2}$.

Відповідь. $2a^{-1}x^{-2}$.

3 Спростіть вираз: а) $(0,2x)^{-2} y \cdot 5x^3y^{-1}$; б) $(a-c)^{-1} \cdot (a^{-1} - c^{-1})$.

Розв'язання.

а) $(0,2x)^{-2} y \cdot 5x^3y^{-1} =$
 $= (0,2)^{-2} \cdot 5 \cdot x^{-2} \cdot x^3 \cdot y \cdot y^{-1} = \left(\frac{2}{10}\right)^{-2} \cdot 5 \cdot x = 5^2 \cdot 5x = 125x.$

б) $(a-c)^{-1} \cdot (a^{-1} - c^{-1}) = \frac{1}{a-c} \cdot \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right) = \frac{1}{a-c} \cdot \frac{c-a}{ac} = \frac{1}{a-c} \cdot \frac{a-c}{-ac} = -\frac{1}{ac}$.

Відповідь. а) $125x$; б) $-\frac{1}{ac}$.

ВИКОНАЙТЕ УСНО

454. Обчисліть: а) 35^0 ; $(-8)^0$; $\left(\frac{2}{3}\right)^0$; $1,23^0$; $\left(4\frac{1}{3}\right)^0$;

б) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$; $\left(\frac{3}{7}\right)^{-1}$; $(-5)^{-1}$; $0,3^{-1}$; $0,02^{-1}$.

455. Як записати вираз без знаменника: $\frac{1}{2^3}; \frac{1}{3^2}; \frac{1}{5}; \frac{1}{7^4}; \frac{1}{a^2}; \frac{1}{c^5}$?

456. Обчисліть: а) $31^0 + 2^{-1}$; б) $3 + 3^{-1}$; в) $2^2 + 2^{-2}$; г) $(-1)^{-4}$.

457. Згрупуйте степені: $a^{-3}; a^{-2}; a^{-1}; a; a^2; a^3$ по два так, щоб їх добутки дорівнювали один одному.

РІВЕНЬ А

458. Замініть степінь із цілим від'ємним показником дробом:

- | | | |
|---------------|----------------|-------------------|
| а) 2^{-3} ; | в) 77^{-1} ; | г) $(xy)^{-3}$; |
| б) 3^{-2} ; | г) b^{-3} ; | д) $(m-n)^{-2}$. |

459. Замініть дріб степенем із цілим від'ємним показником:

- | | | |
|----------------------|-----------------------|--------------------------|
| а) $\frac{1}{5}$; | в) $\frac{1}{33^2}$; | г) $\frac{1}{x^9}$; |
| б) $\frac{1}{7^3}$; | г) $\frac{1}{ab}$; | д) $\frac{1}{m^2+n^2}$. |

460. Подайте числа:

- а) $16, 8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ у вигляді степеня з основою 2;
 б) $81, 27, 9, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}$ у вигляді степеня з основою 3;
 в) $625, 125, 25, 1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \frac{1}{625}$ у вигляді степеня з основою 5;
 г) $10\ 000, 1000, 100, 10, 1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}$
 у вигляді степеня з основою 10.

Знайдіть значення виразу (461–462).

- 461.** а) $3^{-4} \cdot 3^2$;
- в) $0,5^{-3} \cdot 0,5^2$;
- г) $(-2)^{-3} \cdot (-2)^5$;
- е) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \cdot 2^2$;
- б) $5^4 \cdot 5^{-4}$;
- г) $\left(\frac{2}{3}\right)^7 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5$;
- д) $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$;
- е) $100 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$.

- 462.** а) $7 \cdot 14^{-1}$;
- г) $10 : (-5)^{-2}$;
- е) $0,36 \cdot 0,3^{-2}$;
- б) $-2^{-4} \cdot 48$;
- г) $-0,3^{-4} \cdot 0,81$;
- е) $0,1 : (-0,5)^{-3}$;
- в) $(-4)^{-3} : \frac{1}{8}$;
- г) $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-3} : \frac{2}{9}$;
- ж) $(1,5)^{-3} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^4$.

463. Спростіть вираз:

а) $a^{-10} \cdot a^8$; б) $x^5 \cdot x^0$; в) $c^{12} \cdot c^{-10}$; г) $a^3 : a^{-3}$.

464. Подайте у вигляді дробу вираз:

а) $3x^{-2}$; б) a^2c^{-3} ; в) $4a^{-2}x^{-3}$; г) $\frac{2}{3}a^2c^{-5}x^{-3}$.

465. Знайдіть значення виразу:

- а) $800a^{-5}$, якщо $a = 2$;
б) $0,5a^{-2}x^{-5}$, якщо $a = 4$, $x = 0,5$.

Спростіть вираз (466–467).

466. а) $6x^{-2}c \cdot 1,5xc^{-3}$; в) $\frac{3}{4}a^2n^{-4} \cdot 8a^{-3}n^2$; г) $\frac{8x^2}{z} \cdot \frac{z^{-3}}{16x^{-3}}$;

б) $1,6x^{-1}y^{-5} \cdot \frac{5}{8}xy$; г) $\frac{6x^{-5}}{a^{-6}} \cdot \frac{a}{36x^{-9}}$; д) $\frac{14c^{-17}}{x^{-8}} \cdot \frac{x}{7c^{-18}}$.

467. а) $\frac{1}{6}p^2q^{-5} \cdot \frac{1}{2}p^{-1}q^{-3}$; в) $3,6x^4y^5 : xy^5$; г) $\frac{5x^{-1}c}{3} \cdot \frac{9x^5}{c^{-3}}$;

б) $15ac^{-2} : a^2c$; г) $\frac{6x^{-5}}{y^{-6}} \cdot \frac{y}{36x^{-7}}$; д) $\left(\frac{a^{-2}}{10^4x}\right)^2 \cdot (ax^{-1})^2$.

Подайте степінь у вигляді добутку (468–469):

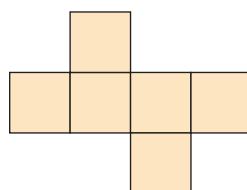
468. а) $(0,5x^{-3}y^2)^{-2}$; в) $(-0,2m^2n^{-4})^{-3}$; г) $\left(\frac{5}{6}m^{-8}n\right)^{-1}$;

б) $(6a^2b)^{-1}$; г) $\left(\frac{1}{2}x^3y^{-2}\right)^{-3}$; д) $(-0,3x^{-3}y)^2$.

469. а) $(xz^{-2})^{-3}$; в) $(5a^{-3}b)^{-1}$; г) $(-0,1ab)^{-2}$;

б) $(a^3y^{-2})^4$; г) $\left(1\frac{1}{3}a^4b^{-2}\right)^2$; д) $(-2m^5n^{-1})^{-1}$.

470. На малюнку 21 зображена розгортка куба. Напишіть на кожній її грані один з виразів a , b , c , a^{-1} , b^{-1} , c^{-1} так, щоб добуток на двох протилежних гранях дорівнював добутку на двох інших протилежних гранях.



Мал. 21

РІВЕНЬ Б

Обчисліть значення виразу (471–474).

471. а) $\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4^{-1} \cdot 5;$

в) $2\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} + 35 \cdot 2^{-3};$

б) $-\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} + 0,25^2 \cdot 11^2;$

г) $0,6^{-3} : 1\frac{2}{3} - \left(\frac{3}{4}\right)^{-2}.$

472. а) $1000^{-2} : 0,1^5 + \frac{2}{5};$

в) $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (0,05)^{-2} + (-0,2)^{-3};$

б) $0,1^{-1} - 1,1^0 : 10^{-1};$

г) $(-0,8)^3 : \left(-1\frac{1}{4}\right)^{-2} + 2,8.$

473. а) $0,064^2 : 0,16^3;$

в) $\frac{125^5}{25^8 \cdot 5^{-3}};$

г) $\frac{0,8^7 \cdot 0,16^{-4}}{0,64^3 \cdot 0,4^{-7}};$

б) $0,0081^3 \cdot 0,3^{-10};$

г) $\frac{(6^6)^2 \cdot 36^{-2}}{6^{10}};$

д) $\frac{9^{-4} \cdot 27^3}{100^5 \cdot 10^{-12}}.$

474. а) $\left(\frac{1}{2}\right)^2 : \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-7};$ в) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-5} \cdot \frac{32}{81} - \left(\frac{3^0}{3}\right)^{-1};$

б) $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right)^5 : \left(\frac{2}{3}\right)^{-9} : \frac{2}{3};$ г) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)^{-2} : \frac{6}{7} - \left(1\frac{8}{17}\right)^{-1};$ д) $\left(\frac{4}{5} + 4^{-2} + 0,2 : 5^{-2}\right)^{-1}.$

Спростіть вираз (475–477).

475. а) $0,2x^{-3} \cdot 5x^2y^3;$ в) $0,2c^{-5}x \cdot 5^{-2}c^3x^{-1};$ г) $8a^{-3}b^3 \cdot 0,25a^5b^{-1};$

б) $3^{-3}a^{-1}x \cdot 81a^2x;$ г) $0,5x^{-6}y^2 \cdot 4x^7y^{-2};$ д) $9a^6b^{-2} : (-3a^2b^{-5}).$

476. а) $\frac{27x^{-1}y^2}{10} \cdot \frac{5x^6}{9y^{-4}};$

в) $\frac{16a^4b^6}{c^7} : \frac{8b^6c^{-6}}{3a^{-3}};$

б) $\frac{12x^2}{7y^7} \cdot \frac{14y^9}{3x^{-2}};$

г) $\frac{3x^8}{4y^3z^{-2}} : \frac{x^7y^{-4}}{12z^{-2}}.$

477. а) $\left(\frac{x^2y^{-3}}{6z}\right)^{-3} : \left(\frac{x^3y^{-5}}{9z}\right)^{-2};$ в) $\left(2a^{-2}x^3\right)^2 \cdot \left(\frac{a}{6}\right)^6;$ г) $\frac{a^{-2}}{9c^3} : \left(\frac{3a^2}{c^{-2}}\right)^{-3};$

б) $\left(\frac{a^{-3}b^4}{5}\right) \cdot \left(\frac{10}{a^{-2}b^3}\right)^{-3};$

г) $4a^7c^{-1} \cdot \left(\frac{ac}{5}\right)^{-1};$ д) $(x^{-1}y) : \left(\frac{y^2}{2x^2}\right)^{-1}.$

Спростіть вираз і знайдіть його значення (478–479).

478. а) $2,2a^{-8}b^5 \cdot 5a^{10}b^{-4}$ при $a = -0,2, b = 50$;

б) $2,8x^9y : (0,7x^{10}y^{-2})$ при $x = 0,125, y = -0,25$.

479. а) $\frac{14a^{-7}}{b^{-3}} \cdot \frac{b^{-2}}{56a^{-5}}$ при $a = 1,5, b = 45$;

б) $\frac{21x^{15}}{10y^{-5}} : \frac{7x^{12}}{5y^{-2}}$ при $x = \frac{3}{7}, y = 2\frac{1}{3}$.

480. Доведіть, що вираз набуває одного й того самого значення при будь-якому цілому n :

а) $\frac{5^{2n+1}}{25^n};$ б) $\frac{2^{n-1} \cdot 3^{n+1}}{6^n};$ в) $\frac{4^{n+1} - 4^n}{2^{2n}};$ г) $\frac{2 \cdot 3^n + 3^n}{2 \cdot 3^{n+1}}$.

481. Скоротіть дріб (n — ціле число):

а) $\frac{4^{n+2} - 4^n}{15};$ б) $\frac{5^{n+1} + 5^{n+3}}{26};$ в) $\frac{3^n + 1}{3^{-n} + 1};$ г) $\frac{6^{-n} + 6^n}{36^n + 1}$.

482. Спростіть вираз (n — ціле число):

а) $\frac{x^{6n}y^{n+4}}{x^{2n}y^{n+5}};$ б) $\frac{a^{3n}b^{n-3}}{a^{2n}b^{n-5}};$ в) $\frac{x^{-2n} + x^n}{x^{-n}};$ г) $\frac{a^{2n} - a^{-3n}}{a^{-2n}}$.

Спростіть вираз (483–486).

483. а) $\frac{x^7 + x^{13}}{x^{-3} + x^3};$ б) $\frac{a^8 + a^{12}}{a^{-8} + a^{-12}};$ в) $\frac{x^4 + 2x^6 + x^7}{2 + x + x^{-2}};$ г) $\frac{x^4 + 3x^5 + x^6}{x^{-4} + 3x^{-5} + x^{-6}}$.

484. а) $(a^{-1} - c^{-1}) : \frac{a^2 - c^2}{ac};$ в) $\frac{1}{a^{-3} - x^{-3}} - \frac{1}{a^{-3} + x^{-3}};$

б) $(x^{-1} - y^{-1})^2 \cdot (x - y)^{-2};$ г) $(a^{-2} + c^{-2}) \cdot (a^2 + c^2)^{-1}$.

485. а) $(m^{-1} + n^{-1})^2 + (m^{-1} - n^{-1})^2;$ б) $(c^{-2} - c^2)^2 - c^{-4} + 2.$

486. а) $(x - y)^{-2}(x^2 - y^2);$ б) $(a^{-3} - b^{-3})^{-1} - (a^{-3} + b^{-3})^{-1}.$

Розв'яжіть рівняння (487–488).

487. а) $2x^{-1} - x^{-1} = 2;$ б) $x^{-2} - x^{-1} = 0;$ в) $x^{-1} - 4x^{-3} = 0.$

488. а) $x^{-1} + x = 2;$ б) $(2x - 1)x^{-1} = x.$

489. Чи може значення виразу $\frac{c^{-2}}{c^{-2} - 1}$ дорівнювати 0 або 1?

Чи може воно бути більшим за 1?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

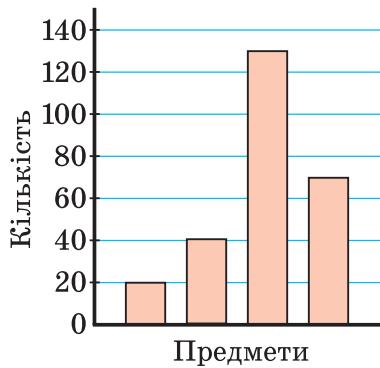
490. Виконайте множення:

- а) $(2x - 3)(y + 1)$; в) $(m + 5)(n - m)$;
 б) $(x - a)(y - b)$; г) $(6 - a)(2b - a)$.

491. Подайте вираз у вигляді добутку трьох або чотирьох множників:

- а) $16a^4 - 1$; в) $(x^2 + xy + y^2)^2 - x^2y^2$;
 б) $81 - x^{12}$; г) $a^2b^2 - (a^2 + ab - b^2)^2$.

492. На діаграмі (мал. 22) вказано кількість зошитів, альбомів, блокнотів і ручок, проданих у крамниці за тиждень. Назви предметів не вказані, але відомо, що зошитів продали найбільше, альбомів — удвічі менше, ніж блокнотів. Скільки чого було продано?



Мал. 22

493. Побудуйте графік рівняння: а) $2x - 3y = 0$; б) $2x + 3y = x$.

СКАРБНИЧКА ДОСЯГНЕНЬ

- ✓ Можу навести приклад степеня із цілим показником.
- ✓ Формулюю означення степеня з нульовим показником і степеня із цілим від'ємним показником:

$$a^0 = 1, \quad a \neq 0$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a \neq 0, \quad n \in N$$

- ✓ Можу обґрунтувати властивості степеня із цілим показником.
- ✓ Умію розв'язувати вправи, що передбачають перетворення степенів із цілим показником.
- ✓ Умію використовувати формули:

$$\frac{1}{a} = a^{-1}$$

$$\frac{k}{a^n} = k \cdot a^{-n}$$

$$\left(\frac{A}{B}\right)^{-1} = \frac{B}{A}$$

$$\left(\frac{A}{B}\right)^{-n} = \left(\frac{B}{A}\right)^n$$

Використовуємо набуті компетентності

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:

- Як виконують дії зі степенями (властивості степенів, с. 96).
- Правила множення і ділення чисел на 10

$$5,374 \cdot 10 = 53,74$$



$$5,374 \cdot 100 = 537,4$$



$$5,374 \cdot 1000 = 5374$$



$$\underline{5550} : 10 = 555$$

$$\underline{5550} : 100 = 55,5$$

$$\underline{5550} : 1000 = 5,55$$

§ 11 Стандартний вигляд числа

Якщо мають справу з дуже великими або дуже малими числами, то такі числа зручно записувати в *стандартному вигляді*, тобто у вигляді $a \cdot 10^n$, де $1 \leq a < 10$ і число n — ціле. Показник степеня n називають *порядком числа* $a \cdot 10^n$.

Масу Землі, яка дорівнює 6 000 000 000 000 000 000 т, у стандартному вигляді записують так: $6 \cdot 10^{21}$ т. А масу атома Гідрогену 0,000000000000000000017 г у стандартному вигляді записують так: $1,7 \cdot 10^{-21}$ г. Порядок маси Землі дорівнює 21, а маси атома Гідрогену становить -21 .

Над числами, записаними у стандартному вигляді, математичні дії можна виконувати так само, як їх виконують над одночленами. Але, щоб уміти робити це, треба навчитися перетворювати добутки вигляду $a \cdot 10^n$ у рівні їм добутки з іншими показниками степенів. Щоб значення такого добутку не змінилося, при збільшенні показника степеня n на 1, 2, 3 значення a слід відповідно зменшувати в 10, 100, 1000 разів. І навпаки, зменшуючи n на 1, 2, 3, значення a слід відповідно збільшувати в 10, 100, 1000 разів.

$$\text{Наприклад, } \begin{aligned} 35 \cdot 10^5 &= 3,5 \cdot 10^6; & 0,23 \cdot 10^8 &= 2,3 \cdot 10^7; \\ 227 \cdot 10^{-4} &= 2,27 \cdot 10^{-2}; & 0,024 \cdot 10^{14} &= 2,4 \cdot 10^{12}. \end{aligned}$$

Як виконувати дії над числами, записаними в стандартному вигляді, покажемо на прикладах.

Якщо $a = 1,5 \cdot 10^8$, $b = 2,4 \cdot 10^7$, то:

$$a \cdot b = (1,5 \cdot 10^8) \cdot (2,4 \cdot 10^7) = 1,5 \cdot 2,4 \cdot 10^8 \cdot 10^7 = 3,6 \cdot 10^{15};$$

$$a : b = (1,5 \cdot 10^8) : (2,4 \cdot 10^7) = (15 \cdot 10^7) : (2,4 \cdot 10^7) = 6,25;$$

$$a + b = 1,5 \cdot 10^8 + 0,24 \cdot 10^8 = (1,5 + 0,24) \cdot 10^8 = 1,74 \cdot 10^8;$$

$$a - b = 1,5 \cdot 10^8 - 0,24 \cdot 10^8 = (1,5 - 0,24) \cdot 10^8 = 1,26 \cdot 10^8.$$

Зверніть увагу! Числа, записані у стандартному вигляді, виражают переважно наближені значення величин. Це пояснюється тим, що у такий спосіб найчастіше записують значення відстаней, площ, мас, об'ємів, швидкостей, температур, які майже завжди є наближеними.

Наприклад, маса Місяця дорівнює $7,35 \cdot 10^{22}$ кг, тобто $73\,500\,000\,000\,000\,000$ кг. Чи є це значення точним? Ні, це наближене значення. Усі нулі в цьому числі — цифри не точні, а округлені. Точними є тільки три перші цифри: 7, 3 і 5. А всі нулі поставлено замість невідомих нам точних цифр.

Узагалі, якщо значення величин записують у стандартному вигляді, тобто $a \cdot 10^n$, то число a — точне. А всі нулі, які одержують від множення a на 10^n , є результатом округлення.

ХОЧЕТЕ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Як треба розуміти вислів число x більше від числа y на порядок?

Це передбачає, що число x більше за число y приблизно в 10 разів. Наприклад, $2 \cdot 10^7$ і $9 \cdot 10^7$ — числа одного порядку;

$2 \cdot 10^7$ більше за $9 \cdot 10^6$ на порядок, оскільки $7 - 6 = 1$;

$2 \cdot 10^7$ менше від $8 \cdot 10^{10}$ на три порядки, оскільки $10 - 7 = 3$.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

- Що таке стандартний вигляд числа?
- Наведіть приклад числа, записаного в стандартному вигляді.
- Що таке порядок числа?
- Укажіть порядок чисел 327, 0,5, 0,000026.
- Перше число менше від другого у 100 разів. На скільки порядків друге число більше від першого?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ

- 1 Запишіть у стандартному вигляді число:
- а) 320; б) 0,4; в) 1 000 000; г) 0,00000027.
- Розв'язання.
- а) $320 = 3,2 \cdot 10^2$; в) $1\,000\,000 = 1 \cdot 10^6$;
 б) $0,4 = 4 \cdot 10^{-1}$; г) $0,00000027 = 2,7 \cdot 10^{-7}$.

- 2** Знайдіть добуток, частку, суму, різницю чисел $x = 4,5 \cdot 10^{-7}$ і $y = 1,5 \cdot 10^{-6}$.

Розв'язання.

$$xy = (4,5 \cdot 1,5) \cdot 10^{-7} \cdot 10^{-6} = 6,75 \cdot 10^{-13};$$

$$x : y = (4,5 : 1,5) \cdot (10^{-7} : 10^{-6}) = 3 \cdot 10^{-7-(-6)} = 3 \cdot 10^{-1};$$

$$x + y = 4,5 \cdot 10^{-7} + 1,5 \cdot 10^{-6} = 19,5 \cdot 10^{-7} = 1,95 \cdot 10^{-6};$$

$$x - y = 4,5 \cdot 10^{-7} - 1,5 \cdot 10^{-6} = 0,45 \cdot 10^{-6} - 1,5 \cdot 10^{-6} = -1,05 \cdot 10^{-6}.$$

Виконайте усно

- 494.** Яке із чисел записане в стандартному вигляді:

- а) $0,35 \cdot 10^{12}$; в) $32,4 \cdot 10^8$; г) $5 \cdot 100^4$;
б) $2 \cdot 10^{30}$; г) $2,5 \cdot 10^{-4}$; д) $0,23 \cdot 10^6$?

- 495.** Назвіть порядок числа:

- а) $3,07 \cdot 10^7$; в) $6,2 \cdot 10^{-8}$; г) 8 320 000;
б) $5,9 \cdot 10^8$; г) 300 000; д) 0,000008.

- 496.** Обчисліть:

$$\text{а) } 2 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^4; \text{ б) } (2 \cdot 10^7) \cdot (3 \cdot 10^7); \text{ в) } (6 \cdot 10^9) : (3 \cdot 10^9).$$



Рівень А

Запишіть без показника степеня (497–498).

497. а) $7 \cdot 10^5$; б) $2,3 \cdot 10^8$; в) $4,7 \cdot 10^{10}$; г) $3,02 \cdot 10^{13}$.

498. а) $9 \cdot 10^{-8}$; б) $3,5 \cdot 10^{-12}$; в) $1,9 \cdot 10^{-9}$; г) $9,83 \cdot 10^{-11}$.

Запишіть у стандартному вигляді число (499–500).

499. а) 370 000 000; б) 4 250 000 000; в) 1 002 000 000.

500. а) 0,000 000 053; б) 0,000 000 000 27; в) 0,000 000 034 05.

-  **501.** На території Києво-Печерської лаври розташовано Музей мікromініатюри знаного в усьому світі українського майстра Миколи Сядристого. Тут експонуються: гілочка троянди, що має товщину 0,05 мм, фігурка чоловічка завтовшки 0,005 мм, найменша у світі книжка — «Кобзар» Шевченка розміром 0,6 мм² (товщина букв у середньому 0,0035 мм), найменший у світі діючий електромотор, об'єм якого 1/20 мм³. Запишіть числові дані в стандартному вигляді. Подайте кожне з них у системі СІ.

- 502.** Маса Землі дорівнює 5 980 000 000 000 000 000 т, а маса Місяця — 73 500 000 000 000 000 т. На скільки тонн маса Землі перевищує масу Місяця?

- 503.** Виразіть: а) $2,6 \cdot 10^3$ т у грамах; в) $1,44 \cdot 10^9$ г у тоннах;
б) $4,75 \cdot 10^{12}$ см у метрах; г) $9,6 \cdot 10^5$ см у кілометрах.

504. Виконайте дії і результати запишіть у стандартному вигляді:

а) $8 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^5$; в) $(2 \cdot 10^7) \cdot 30$;
 б) $15 \cdot 10^{-8} - 8 \cdot 10^{-8}$; г) $(8 \cdot 10^{-9}) : 400$.

505. Виконайте дії над числами, записаними в стандартному вигляді:

а) $(5,2 \cdot 10^9) \cdot (5 \cdot 10^{-2})$; в) $(9,6 \cdot 10^{-12}) : (3,2 \cdot 10^{-16})$;
 б) $8,4 \cdot 10^6 + 5,6 \cdot 10^6$; г) $9,5 \cdot 10^{-5} - 8,6 \cdot 10^{-5}$.

506. Знайдіть добуток чисел $5 \cdot 10^6$ і $8 \cdot 10^9$, а також порядок кожного множника та добутку.

507. Знайдіть квадрат і куб числа: а) $4 \cdot 10^{-12}$; б) $1,3 \cdot 10^{-6}$.

508. Густина алюмінію становить $2,7 \cdot 10^3$ кг/м³. Знайдіть масу алюмінієвого куба, ребро якого дорівнює:

а) 0,2 м; б) 10^{-3} м; в) $2,5 \cdot 10^{-2}$ дм.

509. Швидкість світла становить $3 \cdot 10^5$ км/с. Яку відстань світло проходить за: а) 5 с; б) за 1 год?

510. У таблиці подано маси і радіуси семи планет Сонячної системи.

Планета	M , кг	R , м
Меркурій	$3,26 \cdot 10^{23}$	$2,42 \cdot 10^6$
Венера	$4,88 \cdot 10^{24}$	$6,10 \cdot 10^6$
Марс	$6,43 \cdot 10^{23}$	$3,38 \cdot 10^6$
Юпітер	$1,90 \cdot 10^{27}$	$7,13 \cdot 10^7$
Сатурн	$5,69 \cdot 10^{26}$	$6,04 \cdot 10^7$
Уран	$8,69 \cdot 10^{25}$	$2,38 \cdot 10^7$
Нептун	$1,04 \cdot 10^{26}$	$2,22 \cdot 10^7$

За даними таблиці:

- а) виразіть діаметри планет у кілометрах;
- б) знайдіть маси планет у тоннах;
- в) перелічіть планети в порядку зростання їх мас;
- г) обчисліть, у скільки разів маса Нептуна більша за масу Меркурія;
- г) порівняйте радіуси Урана і Марса. Який із них більший? Обчисліть, на скільки метрів;
- д) порівняйте радіуси і маси Урана та Нептуна. Зробіть висновок.

РІВЕНЬ Б

511. Виконайте дії:

а) $(1,5 \cdot 10^{-3}) \cdot (9,2 \cdot 10^{-4})$; в) $(1,56 \cdot 10^{-2}) : (2,6 \cdot 10^{-6})$;
 б) $(5,7 \cdot 10^4) : (3,8 \cdot 10^{-3})$; г) $5,1 \cdot 10^5 - 2,9 \cdot 10^6$.

Знайдіть суму, різницю, добуток і частку чисел (512–513).

512. а) $1,8 \cdot 10^4$ і $6 \cdot 10^3$; б) $8 \cdot 10^{-6}$ і $4 \cdot 10^{-6}$.

- 513.** а) $6,5 \cdot 10^7$ і $5 \cdot 10^6$; б) $3,2 \cdot 10^{-5}$ і $4 \cdot 10^{-4}$.
- 514.** Округліть число до десятків і одержаний результат запишіть у стандартному вигляді:
 а) 1427; б) 155,678; в) 54,23; г) 4911,2.
- 515.** Округліть число до одиниць і одержаний результат запишіть у стандартному вигляді:
 а) 157,415; б) 8901,5; в) 18,9; г) 315,5.
- 516.** Порівняйте числа:
 а) $4,2 \cdot 10^6$ і $3,95 \cdot 10^6$; г) $7,3 \cdot 10^{-7}$ і $6,4 \cdot 10^{-6}$;
 б) $2,1 \cdot 10^{-5}$ і $2 \cdot 10^{-5}$; д) $2,26 \cdot 10^{20}$ і $8,12 \cdot 10^{19}$;
 в) $5,8 \cdot 10^9$ і $7,5 \cdot 10^8$; д) $4,71 \cdot 10^{-12}$ і $5 \cdot 10^{-13}$.
- 517.** Порядок числа a дорівнює -12 . Який порядок числа:
 а) $1000a$; б) $0,0001a$; в) $a \cdot 10^{15}$; г) $\frac{a}{10^{-20}}$?
- 518.** Знаючи наближені значення $x \approx 3,7 \cdot 10^{11}$ і $y \approx 8,5 \cdot 10^{10}$, обчисліть:
 а) xy ; б) $x : y$; в) $x + y$; г) $x - y$.
- 519.** За даними таблиці:
- запишіть наведені значення величин у стандартному вигляді;
 - округліть значення швидкості світла у вакуумі так, щоб воно мало тільки одну значущу цифру;
 - порівняйте (приблизно) радіус Сонця і відстань від Землі до Місяця;
 - обчисліть, на скільки порядків відстань від Землі до Сонця більша за відстань від Землі до Місяця;
 - обчисліть, на скільки порядків діаметр еритроцита більший (чи менший) за діаметр молекули води.

Числа-ліліпупти	Числа-велетні
0,000 000 000 28 м — діаметр молекули води	299 792 458 м/с — швидкість світла у вакуумі
0,000 000 000 6 м — товщина плівки мильної бульбашки	696 000 000 м — радіус Сонця
0,000 003 75 м — радіус еритроцита	510 083 000 км ² — площа поверхні Землі
0,000 000 000 000 000 001 7 мг — маса атома Гідрогену	384 400 000 м — відстань від Землі до Місяця
0,000 000 000 001 с — час існування атома надважкого Гідрогену	149 600 000 000 м — відстань від Землі до Сонця

- 520.** Відомо, що перша космічна швидкість дорівнює $7,9 \cdot 10^3$ м/с, друга — $1,12 \cdot 10^4$ м/с, третя становить $1,667 \cdot 10^4$ м/с. Виразіть ці швидкості в кілометрах за секунду і запишіть одержані результати числами у стандартному вигляді.
- 521.** Яку відстань у метрах пролетить супутник, що має першу космічну швидкість, за 1 год?
- 522.** Швидкість світла $v = 3 \cdot 10^8$ м/с. Яку відстань воно проходить за 1 рік? За скільки секунд світло проходить 10 км?
- 523.** Виразіть: а) $2,5 \cdot 10^3$ м² у см² і км²; б) $3,7 \cdot 10^2$ м³ у см³ і км³.
- 524.** Маса Юпітера дорівнює $1,90 \cdot 10^{27}$ кг, а Землі — $5,98 \cdot 10^{24}$ кг. Що більше: маса Юпітера чи маса Землі? У скільки разів? На скільки порядків?
- 525.** Густина сталі дорівнює $7,8 \cdot 10^3$ кг/м³. Знайдіть масу сталевого листа розміром $1,5 \times 8 \cdot 10^{-1} \times 2 \cdot 10^{-3}$ м.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

- 526. (ЗНО 2019, 2020).** Спростіть вираз: а) $0,8b^9 : (8b^3)$, де $b \neq 0$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^2$.
- 527.** Найшвидший наземний ссавець — африканський гепард, наздо-ганяючи жертву, здатен розганятися до 110 км/год всього за 3 се-кунди. За скільки секунд він пробіжить 50 м, якщо рухатиметься зі швидкістю 90 км/год.
- 528.** Розв'яжіть рівняння: а) $|2x - 1| = 5$; б) $|6 - x| = 2x$.
- 529.** Подайте у вигляді многочлена:
- а) $(x^n + 1)^2$; б) $(x^{n-1} - x)^2$; в) $(0,5y^m + y^{2m})^2$; г) $\left(\frac{1}{4}b^n - 2b^2\right)^2$.

СКАРБНИЧКА ДОСЯГНЕНЬ

✓ Можу пояснити, що таке стандартний вигляд числа

$$a \cdot 10^n, 1 \leq a < 10, n \text{ — ціле}$$

✓ Умію записувати числа в стандартному вигляді

$$273 = 2,73 \cdot 10^2 \quad 0,0003 = 3 \cdot 10^{-4}$$

- ✓ Умію розв'язувати вправи, що передбачають запис числа у стан-дартному вигляді.
- ✓ Розумію, що стандартний вигляд числа використовують для запису дуже малих і великих чисел.
- ✓ Зможу використовувати ці знання на уроках фізики, хімії, гео-графії та під час опрацювання різних відомостей.

Використовуємо набуті компетентності

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:

- Що таке система координат і координати точки (мал.).
- Що таке функція (с. 243–244).
- Що таке область визначення і область значень функції.
- Як задають функції.
- Що таке графік функції.
- Яку функцію називають:

лінійною

$$y = kx + b$$

прямою пропорційністю

$$y = kx$$



§ 12 | Функція $y = \frac{k}{x}$

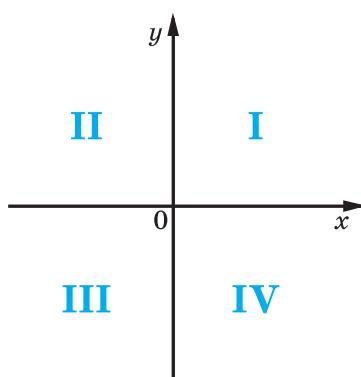
Ви вже знаєте, що **функція** — це відповідність між двома змінними, при якій кожному значенню однієї змінної відповідає єдине значення іншої.

Пригадайте, що таке **аргумент функції**, її **область визначення**, **множина значень**, як можна задавати функції (див. с. 243).

Із 7 класу відомо, що осі координат поділяють координатну площину на чотири координатні кути, їх називають також координатними чвертями, або квадрантами, і нумерують, як показано на малюнку 23.

Розглянемо таку ситуацію. Відстань між містами A і B легковий автомобіль подолав за 2 години. Як зміниться час перебування в дорозі цього автомобіля, якщо його швидкість: а) збільшили вдвічі; б) зменшили вдвічі?

З досвіду відомо: якщо при сталій відстані збільшили швидкість руху у 2 рази, то час



Мал. 23

руху зменшиться також у 2 рази. Якщо при сталій відстані швидкість руху зменшити у 2 рази, то час руху збільшиться також у 2 рази. З передніх класів ви знаєте, що така відповідність називається *оберненою пропорційністю*.

З курсу фізики відомо, що у загальному випадку при сталій відстані залежність між швидкістю і часом можна задати відомою формулою $t = \frac{s}{v}$.

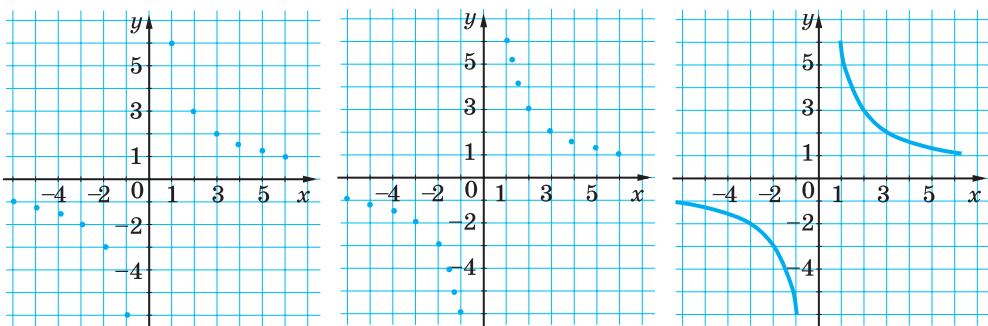
Далі ми розглянемо функцію, задану формулою $y = \frac{k}{x}$, де k — довільне дійсне число, відмінне від нуля; аргумент x може набувати не тільки додатних, а й від'ємних значень.

Наприклад, дано функцію $y = \frac{6}{x}$. Область її визначення — множина всіх дійсних чисел, окрім $x = 0$ (бо на 0 ділити не можна). Складемо таблицю значень цієї функції для кількох значень аргументу:

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
y	-1	-1,2	-1,5	-2	-3	-6	—	6	3	2	1,5	1,2	1

Позначимо на малюнку 24, *a* точки, координати яких наведено в таблиці. Коли б на цій самій координатній площині позначили більше точок, координати яких задовольняють рівність $y = \frac{6}{x}$, вони розмістилися б, як показано на малюнку 24, *b*. Якщо для кожного дійсного значення x , крім $x = 0$, за формулою $y = \frac{6}{x}$ обчислити відповідне значення y і нанести всі точки з одержаними координатами на координатну площину, матимемо графік даної функції (мал. 24, *c*). Таку лінію називають *гіперболою*. Гіпербола складається з двох віток.

Графік функції $y = \frac{6}{x}$ — гіпербола, симетрична відносно початку координат. Її вітки розміщені в I і III координатних кутах.



Мал. 24 *a*

b

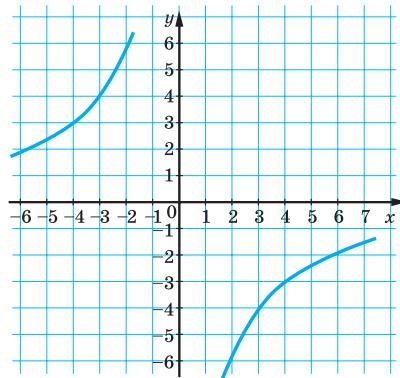
c

Якщо таким способом побудувати графік функції $y = \frac{-12}{x}$, дістанемо також гіперболу; тільки її вітки розміщені в II і IV координатних кутах (мал. 25).

Графік кожної функції $y = \frac{k}{x}$, де k — відмінне від нуля дане число, — це гіпербола, симетрична відносно початку координат.

Якщо $k > 0$, вітки такої гіперболи розміщені в I і III координатних кутах, коли $k < 0$ — у II та IV.

Властивості функції $y = \frac{k}{x}$ для різних значень k можна визначити за графіками, наведеними, наприклад, на малюнках 24, в і 25. Подаємо їх у вигляді таблиці.



Мал. 25

Властивості функції	Вид функції	
	$y = \frac{k}{x} (k > 0)$	$y = \frac{k}{x} (k < 0)$
Область визначення	Усі числа, крім $x = 0$	Усі числа, крім $x = 0$
Область значень	Усі числа, крім $y = 0$	Усі числа, крім $y = 0$
Додатні значення	$x > 0$	$x < 0$
Від'ємні значення	$x < 0$	$x > 0$
Проміжки спадання	$x < 0$ і $x > 0$	—
Проміжки зростання	—	$x < 0$ і $x > 0$

ХОЧЕТЕ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Функцію, задану формулою $y = \frac{k}{x}$, часто називають *оберненою пропорційністю* (на відміну від функції $y = kx$, яку називають *прямою пропорційністю*). Раніше оберненою пропорційністю ви називали відповідність, при якій зі збільшенням однієї змінної в кілька разів значення іншої зменшувалися в стільки само разів. Так буває тільки у випадку, коли k і x — додатні числа.



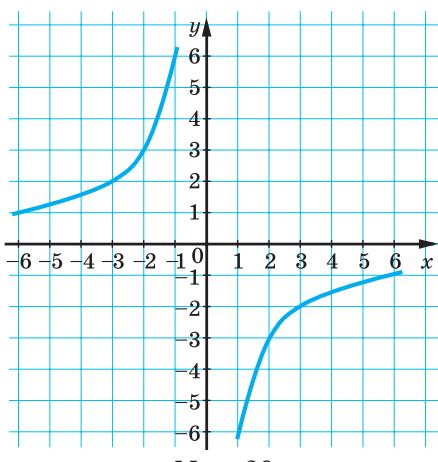
Якщо у функції $y = \frac{k}{x}$ число k від'ємне, то з із збільшенням значень x у кілька разів значення y також збільшуються у стільки само разів. Це видно з мал. 26.

Використовуючи степінь з від'ємним показником, функцію $y = \frac{k}{x}$ можна записати так: $y = kx^{-1}$. Іноді її записують і у вигляді: $yx = k$.

Приклад. Чи є оберненою пропорційністю залежність, задана рівністю:

$$\text{а) } y = \frac{k}{|x|}; \text{ б) } y = \frac{k}{x^2}?$$

Відповідь. а) Ні; б) ні.



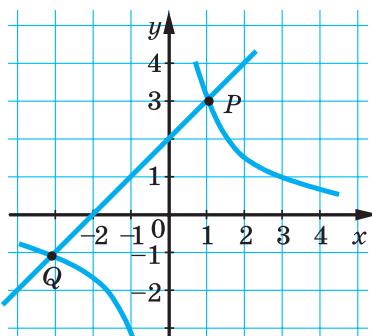
Мал. 26

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

- Що таке функція, аргумент функції?
- Що таке область визначення функції?
- Яку функцію називають лінійною, яку — прямою пропорційністю?
- Наведіть приклади прямої пропорційності.
- Як називають графік оберненої пропорційності?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ

- Функцію задано формулою $y = \frac{n}{x}$. Знайдіть значення n , якщо графік функції проходить через точку $A(5; 2)$.
 - Розв'язання.** Підставимо значення $x = 5$ і $y = 2$ у формулу, якою задано функцію. Одержано $2 = \frac{n}{5}$. Отже, $n = 10$.
- Розв'яжіть графічно рівняння $x + 2 = \frac{3}{x}$.
 - Розв'язання.** Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = x + 2$ і $y = \frac{3}{x}$ (мал. 27).



Мал. 27

Ці графіки перетинаються в точках P і Q , абсциси яких дорівнюють приблизно 1 і -3. Перевіряємо, чи це точне значення, чи наближене: $1 + 2 = 3$, $-3 + 2 = -1$.

Відповідь. $x_1 = 1$, $x_2 = -3$.

Виконайте усно

530. Яка із заданих функцій є прямою пропорційністю:

a) $y = 2x$; б) $y = -\frac{2}{3}x$; в) $y = 3x - 1$?

531. Яка із заданих функцій є оберненою пропорційністю:

a) $y = \frac{6}{x}$; б) $y = \frac{x}{6}$; в) $y = 3x^{-1}$; г) $y = -3x$?

532. Укажіть область визначення функції:

a) $y = \frac{5}{x-2}$; б) $y = \frac{5}{x} - 2$; в) $y = \frac{1}{x^2 - 4}$; г) $y = \frac{x-3}{x^2 - 9}$.

533. У яких чвертях координатної площини розміщений графік функції:

a) $y = \frac{12}{x}$; б) $y = -\frac{8}{x}$; в) $y = x^{-1}$?

534. Чим відрізняються графіки функцій:

a) $y = \frac{-3}{x}$ і $y = -\frac{3}{x}$; б) $y = \frac{1}{z}$ і $y = z^{-1}$?

Рівень А

535. Сторони прямокутника дорівнюють x і y , а площа — 60 см^2 . Виразіть формулою залежність y від x .

536. Відомо, що сила струму I в провіднику пропорційна напрузі на кінцях провідника U і обернено пропорційна його опору R . Зобразіть цю залежність формулою.

537. Складіть таблицю значень функції $y = \frac{-6}{x}$ для цілих значень x , якщо $-6 \leq x \leq 6$. Побудуйте графік цієї функції.

538. Складіть таблицю значень функції $y = \frac{12}{x}$ для натуральних значень x , менших від 13. Запишіть кілька пропорцій із чисел цієї таблиці.

539. Функцію задано формулою $y = \frac{16}{x}$. Заповніть таблицю.

x	-32		-2	-0,5				8
y		-1			16	8	4	

- 540.** Обернену пропорційність задано формулою $y = -\frac{10}{x}$.

Знайдіть значення функції, що відповідає значенню аргументу, яке дорівнює $-1000; -100; 0,1; 0,02; 50$. При якому значенні аргументу значення функції дорівнює $-100; -40; 2; 100; 200$?

- 541.** Функцію задано формулою $y = \frac{10}{x}$. Яке значення функції

відповідає значенню $x = 0,2$? При якому значенні аргументу значення функції дорівнює -5 ?

- 542.** На малюнку 28 побудовано графік оберненої пропорційності, заданої формулою $y = -\frac{4}{x}$. Знайдіть за графіком:

- а) значення y , яке відповідає значенню x , що дорівнює $-5; -4; -1; -0,8; 1,6; 2; 4$;
 б) значення x , якому відповідає значення y , що дорівнює $-4; -2,6; -2; 0,8; 1; 1,6; 5$.

- 543.** Які з точок $A(-8; 1)$, $B(16; 0,5)$, $C(0; 0)$, $D(0,01; -800)$, $E(-32; 0,25)$, $G(100; -0,08)$, $K(-0,08; 1000)$ належать графіку функції $y = -\frac{8}{x}$?

- 544.** Побудуйте графік функції:

а) $y = \frac{12}{x}$; б) $y = -\frac{12}{x}$; в) $y = \frac{4}{x}$; г) $y = -\frac{1}{x}$.

- 545.** Знайдіть область визначення функції:

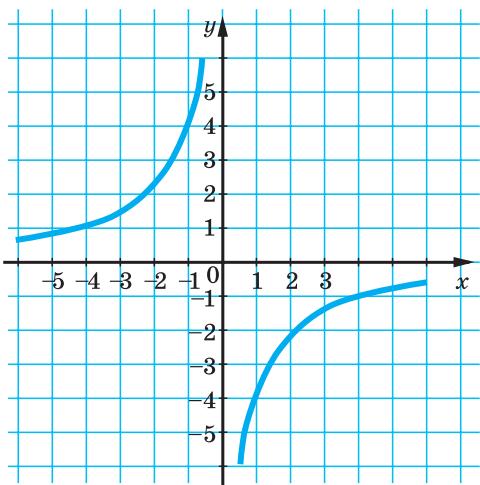
а) $y = \frac{0,5}{x}$; б) $y = \frac{3}{x+1}$; в) $y = -\frac{5}{x-5}$; г) $y = \frac{1}{x} - 2$.

- 546.** Побудуйте графік функції, заданої формулою:

а) $y = \frac{2}{x}$; б) $y = -\frac{2}{x}$; в) $y = \frac{9}{x}$; г) $y = -\frac{9}{x}$.

- 547.** Знайдіть область визначення функції:

а) $y = \frac{1}{2x}$; в) $y = \frac{12}{x-5x}$; г) $y = \frac{3}{x} + 1$; е) $y = \frac{1}{x-2}$;
 б) $y = \frac{8}{x}$; г) $y = \frac{4}{3x} - \frac{3}{2x}$; д) $y = 2 - \frac{1}{x}$; е) $y = \frac{16}{x+4}$.



Мал. 28

548. Функцію задано формулою $y = \frac{8}{x}$. Заповніть таблицю.

x							
y	1	2	4	8	16	32	64

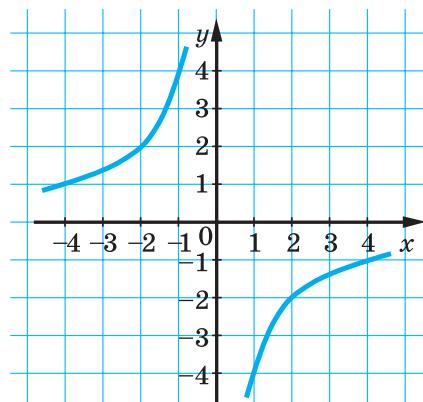
549. Чи перетинає графік функції $y = \frac{8}{x}$ вісь абсцис; вісь ординат?

550. При якому значенні k графік функції $y = \frac{k}{x}$ проходить через точку:
 а) $A(1; 1)$; б) $B(2; 3)$; в) $C(1; -3)$?

551. Графік якої функції зображені на малюнках 29, 30?



Мал. 29



Мал. 30

552. Графік функції $y = \frac{k}{x}$ проходить через точку $A(2; 1)$. Чи проходить він через точку: $B(1; 2)$, $C(-2; -1)$, $K(-1; -2)$?

553. Графік функції $y = \frac{k}{x}$ проходить через точку $A(-3; 3)$. Покажіть, що він проходить і через точку $B(3; -3)$. Узагальніть задачу.

554. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y = \frac{30}{x}$

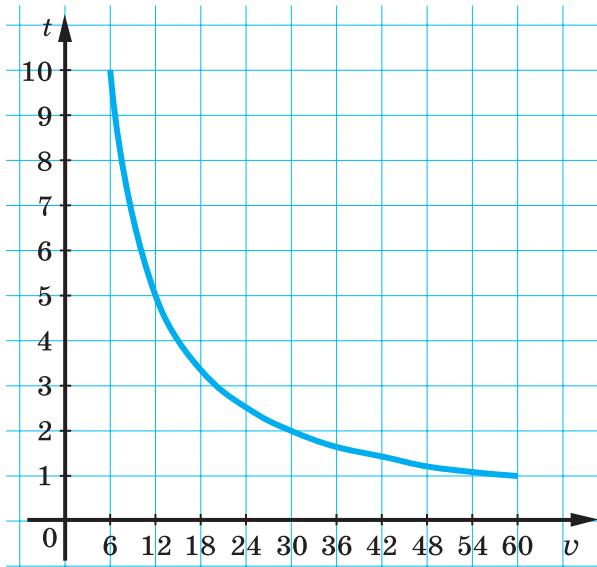
і $y = -\frac{30}{x}$ для $x > 0$. Як розміщені ці графіки?

555. Чи правильно, що при рівномірному русі час, який витрачає потяг на проїзд 10 км, обернено пропорційний швидкості?

556. Три трактори мають зорати поле за 48 год. За скільки годин зоруть це поле чотири таких самих трактори?

РІВЕНЬ Б

- 557.** На малюнку 31 зображене графік залежності часу, витраченого на шлях з пункту A в пункт B , від швидкості руху. Яка відстань між A і B ? Скільки часу потрібно, щоб прибути з A до B , рухаючись зі швидкістю 6 км/год; 30 км/год; 60 км/год? З якою швидкістю треба рухатись, щоб дістатися з A до B за 1 год; 2 год; 10 год?



Мал. 31

- 558.** Зобразіть формулою залежність тиску сталої сили F на площину поверхні S . Чи є ця залежність оберненою пропорційністю?
- 559.** Зі збільшенням висоти над рівнем моря зменшується атмосферний тиск і температура повітря. Чи кожна із цих залежностей є оберненою пропорційністю?
- 560.** Мідний і алюмінієвий бруски мають однакову масу. Який із них має більший об'єм і в скільки разів? Густина міді становить $8,6 \text{ г}/\text{см}^3$, алюмінію — $2,6 \text{ г}/\text{см}^3$.
- 561.** Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y = \frac{6}{x}$ і $y = 5 - x$. За допомогою цих графіків назвіть корені рівняння $\frac{6}{x} = 5 - x$.
- 562.** Побудуйте в одній системі координат графіки функцій:
- а) $y = \frac{8}{x}$ і $y = 2x$; б) $y = \frac{12}{x}$ і $y = x - 4$;

$$\text{в)} \ y = -\frac{6}{x} \text{ і } y = 1 - \frac{x}{3}; \quad \text{г)} \ y = -\frac{4}{x} \text{ і } y = -2x - 2.$$

Укажіть координати точок їх перетину.

563. Відкрита задача. Розв'яжіть графічно систему рівнянь $y = \frac{?}{x}$

і $y = [?]$, якщо один з її розв'язків $(1; 1)$.

564. При яких значеннях k і b гіпербола $y = \frac{k}{x}$ і пряма $y = kx + b$ проходять через точку:

- а) $K(3; 4)$; б) $L(-4; 6)$; в) $M(-1; -8)$; г) $N(2; -2)$?

565. Побудуйте графік рівняння:

$$\text{а)} \ \frac{1}{4}xy = 4; \quad \text{б)} \ xy = -6; \quad \text{в)} \ 2xy = 1.$$

Знайдіть область визначення функції і побудуйте її графік (566–567).

$$\text{566. а)} \ y = \frac{32}{(2-x)^2 - (2+x)^2}; \quad \text{б)} \ y = \frac{48}{(x-1)^2 - (x+1)^2}.$$

$$\text{567. а)} \ y = \frac{3x(x+2)-3x^2-18}{x(x-3)}; \quad \text{б)} \ y = \frac{16+7x}{x^2+4x} - \frac{3}{x+4}.$$

568*. Побудуйте графік функції:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \ y = \frac{2}{|x|}; & \text{в)} \ y = \left| \frac{6}{x} - 1 \right|; & \text{г)} \ y = \frac{1}{|x+1|}; \\ \text{б)} \ y = -\frac{12}{|x|}; & \text{г)} \ y = -\frac{24}{|x|}; & \text{д)} \ y = \frac{1}{|x|} + 1; \\ & & \text{е)} \ y = x^{-2} - 2. \end{array}$$

Побудуйте графік функції, заданої формулою (569–570).

$$\text{569*. а)} \ y = \begin{cases} -x-4, & x < -6, \\ -\frac{12}{x}, & -6 \leq x < -2, \\ 6, & x \geq -2; \end{cases} \quad \text{б)} \ y = \begin{cases} -\frac{8}{x}, & x < -2, \\ -4, & -2 \leq x < 2, \\ \frac{8}{x}, & x \geq 2. \end{cases}$$

$$\text{570*. а)} \ y = \begin{cases} \frac{6}{x}, & x < -2, \\ 1,5x, & -2 \leq x < 2, \\ \frac{6}{x}, & x \geq 2; \end{cases} \quad \text{б)} \ y = \begin{cases} -x-3, & x < -5, \\ -\frac{10}{x}, & -5 \leq x < 0, \\ \frac{10}{x}, & 0 < x \leq 5, \\ x-3, & x \geq 5. \end{cases}$$

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

571. Обчисліть і порівняйте:

- суму кубів чисел 3 і 2 та куб їх суми;
- різницю кубів чисел 5 і 2 та куб їх різниці;
- півсуму кубів чисел 7 і 5 та куб їх півсуми.

572. Спростіть вираз і знайдіть його значення:

- $-4x(x^2 - x - 3) + 2x(2x^2 + x - 5)$, якщо $x = -3$;
- $3a(4a^2 - 3a) - 6(4 + 2a^3) - 5a(2 - 5a)$, якщо $a = \frac{1}{2}$;
- $(5a(a - 4b) + 12ab) \cdot 2b + 16ab^2$, якщо $a = 3, b = 1,2$.

 **573.** З одного гектара цукрових буряків, урожайністю 60 т/га, можна отримати 4,3 т біоетанолу. Якою має бути врожайність буряків, щоб з одного гектара можна було одержати 5 т біоетанолу?

 **574.** З 2016 року частка біоетанолу в бензинах має зрости до 7 %. Скільки біоетанолу необхідно щорічно виробляти в Україні для реалізації такої вимоги при внутрішньому споживанні бензинів на рівні 4,5 млн т/рік.

СКАРБНИЧКА ДОСЯГНЕНЬ

- ✓ Знаю, що графіком функції $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) є гіпербола, симетрична відносно початку координат і розташована:
 - у I і III координатних чвертях ($k > 0$);
 - у II і IV координатних чвертях ($k < 0$).
- ✓ Умію будувати графік функції $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$).
- ✓ Умію знаходити область визначення функції $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$).
- ✓ Умію описувати властивості функції $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) за її графіком.
- ✓ Розумію, чому функцію $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) називають оберненою пропорційністю.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

ВАРИАНТ I

- 1°. Спростіть вираз: а) $\frac{9ax^3}{x^2-a^2} \cdot \frac{a+x}{6x^2} - \frac{3a^2}{2x-2a}$; б) $\left(n + \frac{1}{2+n}\right) : \frac{n+1}{n+2} - n$.
- 2°. Розв'яжіть рівняння: $\frac{3}{x-2} = \frac{10}{x} - \frac{7}{x+2}$.
- 3°. Побудуйте графік функції $y = \frac{6}{x}$.

ВАРИАНТ II

- 1°. Спростіть вираз: а) $\frac{8cn^2}{c^2-n^2} \cdot \frac{n+c}{4n} - \frac{2n^2}{c-n}$; б) $\left(\frac{a^2+c^2}{c} - 2a\right) : \frac{a-c}{2c} - a$.
- 2°. Розв'яжіть рівняння: $\frac{1}{x} + \frac{4}{x-3} = \frac{5}{x-2}$.
- 3°. Побудуйте графік функції: $y = -\frac{6}{x}$.

ВАРИАНТ III

- 1°. Спростіть вираз: а) $\frac{6ac^2}{c^2-a^2} \cdot \frac{a+c}{4c} + \frac{3a^2}{2a-2c}$; б) $\left(1 + \frac{a^2}{2a+1}\right) : \frac{a+1}{2a+1} - a$.
- 2°. Розв'яжіть рівняння: $\frac{2z^2-7z+3}{2z-1} = 1+z$.
- 3°. Побудуйте графік функції: $y = \frac{4}{x}$.

ВАРИАНТ IV

- 1°. Спростіть вираз: а) $\frac{4xa^3}{a^2-x^2} \cdot \frac{x+a}{6ax} + \frac{2ax}{3(x-a)}$; б) $\left(a+2+\frac{1}{a}\right) : \frac{1-a^2}{a} - 1$.
- 2°. Розв'яжіть рівняння: $\frac{x+9}{x-1} + \frac{x+1}{x+5} = 2$.
- 3°. Побудуйте графік функції: $y = -\frac{4}{x}$.

ІСТОРИЧНІ ВІДОМОСТІ

Звичайні дроби в Стародавніх Вавилоні та Єгипті були відомі ще 4 тис. років тому. Грецькі математики вміли виконувати над звичайними дробами всі арифметичні дії. В «Арифметиці» Діофанта (III ст.) є також багато дробів зі змінними. Наприклад, у ній показано, що

$$\frac{96}{x^2 + 36 - 12x^2} - \frac{12}{6 - x^2} = \frac{12x^2 + 24}{x^4 + 36 - 12x^2}.$$

Записували тоді дробові вирази зовсім не так, як тепер.

Дробову риску для запису дробів уперше застосував італійський математик Л. Фіbonacci (1180–1240).

Дроби зі змінними стали широко використовувати після появи «Загальної арифметики» відомого англійського вченого I. Ньютона (1643–1727). У цій книжці, зокрема, пояснювалось:

«... $\frac{a}{b}$ — це величина, що утворюється при діленні a на b , ... $\frac{ab - bb}{a + x}$

означає величину, утворену при діленні $ab - bb$ на $a + x$ і т. п. Величини такого роду називають дробами». Тоді замість b^2 ще писали bb .

Степені з цілими показниками впроваджувалися в математику поступово. Майже 4 тис. років тому вчені Вавилона розглядали квадрат і куб числа, обчислюючи площину квадрата та об'єм куба. До нашого часу збереглися глиняні плитки з таблицями квадратів і кубів натуральних чисел, зроблені стародавніми вавилонянами. Згодом учени стали розглядати четвертий, п'ятий та вищі степені, називаючи їх спочатку квадрато-квадратом, кубо-квадратом і т. п.

Степінь із нульовим показником запровадили в XV ст. незалежно один від одного самарканець аль-Каші і француз Н. Шюке. Степені з від'ємними показниками Н. Шюке також використовував. Теорію степенів з від'ємними показниками розробив у XVII ст. Дж. Валліс. Він ототожнював послідовності

$$a, 1, \frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^3}, \dots,$$

$$a, a^0, a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, \dots.$$

Стандартний вигляд числа введено в науку тільки в XX ст. у зв'язку з використанням електронних обчислювальних машин (ЕОМ).

ГОЛОВНЕ В РОЗДІЛІ

Частку від ділення виразу A на вираз B можна записати у вигляді дробу $\frac{A}{B}$. Дріб має зміст тільки тоді, коли його знаменник не дорівнює нулю. *Раціональним дробом* називають дріб, чисельник і знаменник якого — многочлени. Вираз, складений зі змінних і чисел за допомогою дій додавання, віднімання, множення, ділення або піднесення до степеня з цілим показником, називають *раціональним*. При будь-яких значеннях A , B і $C \neq 0$ $\frac{A}{B} = \frac{AC}{BC}$ (основна властивість дробу). На основі цієї властивості дроби можна скорочувати або зводити до спільногого знаменника.

Дії над будь-якими дробами можна виконувати так само, як над звичайними дробами. Якщо знаменники не дорівнюють 0, то завжди

$$\frac{A}{C} + \frac{B}{C} = \frac{A+B}{C}, \quad \frac{A}{C} - \frac{B}{C} = \frac{A-B}{C}, \quad \frac{A}{C} \cdot \frac{B}{D} = \frac{AB}{CD}, \quad \frac{A}{C} : \frac{B}{D} = \frac{AD}{CB}.$$

Дробовий вираз $\frac{1}{a^n}$ записують також у вигляді a^{-n} .

Степінь із цілим показником $a^n = \begin{cases} \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ разів}}, & \text{якщо } n \in N, n > 1 \\ a, & \text{якщо } n = 1, \\ 1, & \text{якщо } n = 0, a \neq 0, \\ \frac{1}{a^{-n}}, & \text{якщо } n < 0. \end{cases}$

Властивості степенів із цілими показниками аналогічні властивостям степенів із натуральними показниками. Якщо числа m і n — цілі, a і b — відмінні від 0, то завжди:

$$\begin{aligned} a^m \cdot a^n &= a^{m+n}; & (ab)^n &= a^n \cdot b^n; & \left(\frac{a}{b}\right)^n &= \frac{a^n}{b^n}. \\ a^m : a^n &= a^{m-n}; & \left(a^m\right)^n &= a^{mn}; \end{aligned}$$

Якщо число x записане у вигляді $a \cdot 10^n$, де n — ціле число, а $1 \leq a < 10$, то кажуть, що воно записане в *стандартному вигляді*, а n — *порядок* числа x .

Функція $y = \frac{k}{x}$ визначена на множині всіх дійсних чисел, за винятком $x = 0$. Якщо $k > 0$, то вона спадна. Її графік — гіпербола.

Готуємось до тематичного оцінювання

Тестові завдання № 2

- 1** Дріб $\frac{1}{16}$ можна записати у вигляді:
- a) 2^4 ; б) 2^6 ; в) 2^{-4} ; г) 2^{-6} .
- 2** Значення виразу $(3,75 - 5,75)^{-2}$ дорівнює:
- a) 4; б) -4; в) 0,5; г) 0,25.
- 3** Подайте у вигляді дробу вираз $4a^{-2}c^{-3}$:
- a) $\frac{1}{4a^2c^3}$; б) $\frac{4}{a^2c^3}$; в) $\left(\frac{2}{ac}\right)^2$; г) $\frac{4}{a^{-2}c^{-3}}$.
- 4** Порядок числа $3,07 \cdot 10^5$ дорівнює:
- a) 3; б) 10; в) 7; г) 5.
- 5** Яке із чисел записане в стандартному вигляді:
- a) $255 \cdot 10^2$; б) $0,1 \cdot 10^5$; в) $3,5 \cdot 10^{21}$; г) 35 700?
- 6** Скільки коренів має рівняння $x^{-2} = 0$:
- a) один; б) два; в) жодного; г) безліч?
- 7** Вираз: $\frac{x^3+1}{x+1} : (x^2 - x + 1)$ тотожно дорівнює:
- a) 0; б) 1; в) -1; г) x .
- 8** Укажіть корені рівняння $\frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9} = 0$:
- a) $x = 0$; б) $x = 3$; в) $x = 0$ і $x = 3$; г) $x = 3$ і $x = -3$.
- 9** Графіком якої з функцій є гіпербола:
- a) $y = 5$; б) $y = 5x$; в) $y = \frac{5}{x}$; г) $y = \frac{x}{5}$.
- 10** Графік функції $y = \frac{2}{x}$ проходить через точку:
- a) (0; 2); б) (1; 2); в) (2; 2); г) (3; 2).

Типові завдання до контрольної роботи № 2

1 Виконайте ділення:

a°) $\frac{6x^5}{y^4} : \frac{12x^5}{y^2};$

б°) $\frac{4a^2 - 1}{a^2 - 9} : \frac{6a + 3}{a + 3}.$

2 Обчисліть:

a°) $\frac{3^5 \cdot 3^{-3}}{5^0};$

б°) $\frac{4^{-6} \cdot 16^{-5}}{8^{-10}};$

в°) $2,8 \cdot 10^{-12} \cdot 4,5 \cdot 10^7.$

3 Запишіть число в стандартному вигляді:

a°) 257 000 000;

б°) 0,000 000 002 2.

4 Розв'яжіть рівняння:

a°) $\frac{2}{x-3} = \frac{3}{x-2};$

б°) $\frac{x+7}{x} - \frac{x+6}{x+4} = \frac{8}{x^2 + 4x}.$

5° Розв'яжіть графічно рівняння $\frac{6}{x} = 6x.$

6° Катер проходить 160 км за течією річки за той самий час, що й 136 км — проти течії. Знайдіть власну швидкість катера, якщо швидкість течії річки дорівнює 2,4 км/год.

7 Знайдіть значення виразу:

a°) $\frac{(x-1)^2}{x} \cdot \frac{2x}{x-1},$ якщо $x = 1,5;$

б°) $\frac{2(a+b)}{3a+b} + \frac{1}{a+b} : \frac{3a+b}{a^2 - b^2},$ якщо $a = 1,5;$ $b = -1\frac{1}{3}.$

8° Доведіть, що для всіх допустимих значень змінних значення виразу ϵ сталим:

a) $\frac{x}{x+2} - \frac{(x-2)^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{x^2 - 4} + \frac{1}{x^2 - 4x + 4} \right);$

б) $\left(\frac{a^{-1} + b^{-1}}{a^{-2} + b^{-2}} \right)^{-1} \cdot \left(\left(\frac{b}{3a} \right)^{-1} + \left(\frac{a}{3b} \right)^{-1} \right)^{-1} \cdot \frac{3(a^{-1} + b^{-1})}{(ab)^{-1}}.$

Розділ 2



КРЕЙН МАРК ГРИГОРОВИЧ

(1907–1989)

Всесвітньо відомий український математик, лауреат Міжнародної премії Вольфа в галузі математики

У 1982 р. Марк Григорович був удостоєний Міжнародної премії Вольфа.

У передмові до неї, зокрема, написано: «Його дослідження привели до відчутного зростання застосувань математики у різноманітних галузях, від теоретичної механіки до електроінженерії та проблем керування. Його стиль у математиці, особисті лідерство і чистота заклали стандарти найвищої майстерності».

Одна з найкращих книжок відомих американських математиків П. Лакса і Р. Філліпса «Теорія розсіювання для автоморфних функцій» присвячена М. Крейну, «одному з математичних гігантів ХХ століття як данина його надзвичайно широкому і глибокому внеску в математику».

ПРЕМІЯ імені М. Г. КРЕЙНА

Присуджується по Відділенню математики НАН України за видатні наукові роботи в галузі функціонального аналізу і теорії функцій.

Засновано Національною академією наук України у 2007 році.

ЛАУРЕАТИ ПРЕМІЇ

Горбачук М. Л.
Адамян В. М.
Гохберг І. Ц.
Березанський Ю. М.
Гайнц Лангер
Нудельман А. А.
Буслаєв В. І.
Романюк А. С.
Тіман М. П.
та інші

Квадратні корені і дійсні числа

Раціональні числа, з якими ви ознайомилися в попередніх класах, — це тільки незначна частина множини усіх чисел. На числовій прямій, окрім чисел раціональних, є ще більше нераціональних чисел. Без засвоєння і цих чисел, без уміння виконувати дії з ними неможливо далі вивчати математику та інші прикладні науки.

У цьому розділі розглянемо такі теми:

§ 13	Функція $y = x^2$ Function $y = x^2$	§ 16	Квадратний корінь із добутку, дробу, степеня Fraction, Degree, Derivative Square Root
§ 14	Квадратні корені Square Roots	§ 17	Перетворення виразів з коренями Expressions with Radicals Transformation
§ 15	Числові множини Numerical Sets	§ 18	Функція $y = \sqrt{x}$ Function $y = \sqrt{x}$

Навчальний проєкт № 2
«ІСТОРІЯ РОЗВИТКУ ЧИСЛА»

Використовуємо набуті компетентності

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:

- Що таке функція (с. 109).
- Що таке область визначення і область значень функції (с. 243).
- Як складають таблицю значень функції (с. 110).
- Як будують графік функції (с. 110).
- Як за графіком визначають властивості функції (с. 111).
- Як розв'язують рівняння графічно (с. 112).

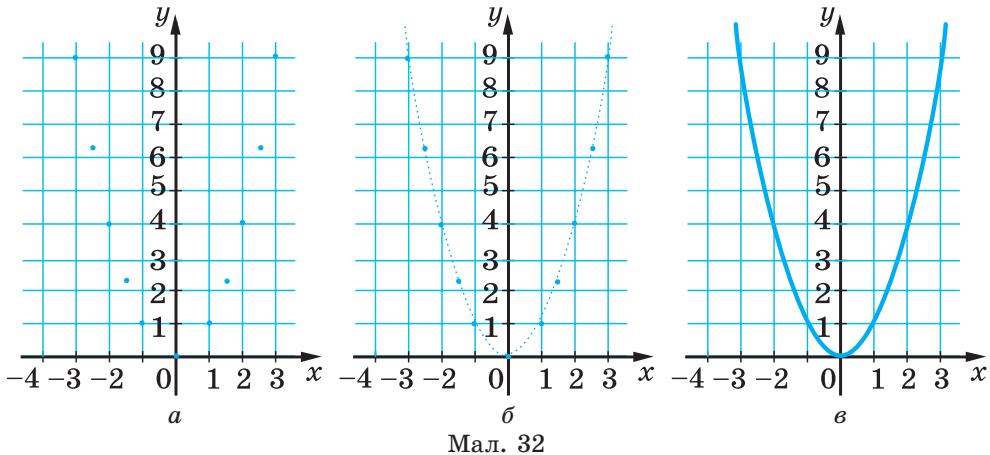
§ 13 | Функція $y = x^2$

Розглянемо функцію, задану формулою $y = x^2$. Область її визначення — множина всіх чисел.

Складемо таблицю значень функції для деяких значень аргументу x .

x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	0	1	1,5	2	2,5	3
y	9	6,25	4	2,25	1	0	1	2,25	4	6,25	9

Позначимо на малюнку 32, а точки, координати яких подано в цій таблиці. Якщо на координатній площині позначити більше точок з координатами x і y , що задовільняють формулу $y = x^2$, вони розмістилися би так, як показано на малюнку 32, б. Якщо для кожного дійсного



значення x за формулою $y = x^2$ обчислити відповідне значення y і позначити точки з такими координатами на координатній площині, одержимо неперервну криву лінію, яку називають *параболою* (мал. 32, в). Парабола має дві нескінчені вітки, що плавно сходяться в одній точці — *вершині параболи*.

Для функції $y = x^2$ вершиною параболи є точка $(0; 0)$. Тобто графік функції $y = x^2$ проходить через початок координат.

Оскільки протилежним значенням аргументу відповідають рівні значення функції, то її графік симетричний відносно осі y .

Побудований графік дає змогу наочно виявити властивості функції $y = x^2$.

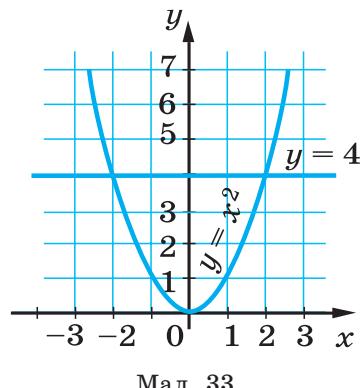
Властивості функції $y = x^2$, що їх визначено за графіком, можна подати у вигляді таблиці.

Властивості функції	Вид функції
	$y = x^2$
Область визначення	Усі числа (R)
Область значень	Усі невід'ємні числа ($y \geq 0$)
Додатні значення	$x \neq 0$
Від'ємні значення	—
Проміжки спадання	$x < 0$
Проміжки зростання	$x > 0$

Навіщо треба знати, яким є графік функції? Докладніше про це ви дізнаєтесь в старших класах. А зараз звернемо увагу тільки на те, що графіки функцій дають змогу розв'язувати рівняння, які іншими способами розв'язувати або надто важко, або й взагалі неможливо.

Скільки розв'язків має рівняння $x^2 = 4$? Пряма, рівняння якої $y = 4$, перетинає графік функції $y = x^2$ у двох точках (мал. 33). Їх абсциси $x = 2$ і $x = -2$ — розв'язки рівняння.

А скільки розв'язків має рівняння $x^2 = 2$? Спробуйте відповісти на це запитання самостійно.



Мал. 33

ХОЧЕТЕ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Функція $y = x^2$ — найпростіша із квадратичних функцій. Приклади інших квадратичних функцій:

$$y = x^2 + 1, y = x^2 - 3, y = -x^2.$$

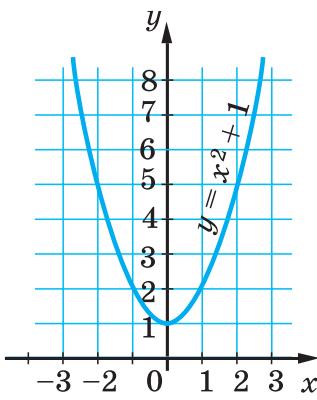
Кожне значення функції $y = x^2 + 1$ на одиницю більше за відповідне значення функції $y = x^2$. Тому графік функції — така сама парабола, тільки зміщена вверх на 1 одиницю (мал. 34).

Спробуйте самостійно побудувати графіки функцій:

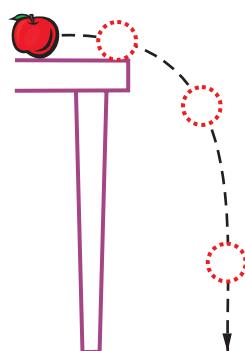
$$y = x^2 - 1, y = -x^2, y = 2x^2.$$

З кривими у вигляді парабол мають справу фізики, астрономи, архітектори та інші фахівці. Графічне зображення траєкторії струменя води

або кинутого (не вертикально) предмета — це параболи (мал. 35), арки мостів і споруд часто мають форму парабол. У багатьох прожекторів і різних приймачів радіохвиль також осьові перерізи мають параболічну форму.



Мал. 34



а



б



в

Мал. 35

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Як називають лінію, що є графіком функції $y = x^2$?
2. Назвіть основні елементи параболи.
3. Укажіть основні властивості функції $y = x^2$.
4. На яких проміжках функція $y = x^2$ зростає, на яких — спадає?

Виконаємо разом

- 1** Побудуйте графік залежності площині квадрата S від довжини його сторони a .
- **Розв'язання.** Якщо сторона квадрата a , то його площа $S = a^2$. Це та сама функція $y = x^2$, тільки позначена буквами a і S . Тому такими самими буквами слід позначити і координатні осі.
- Оскільки довжина сторони квадрата може набувати тільки додатних значень, то область визначення розглядуваної функції — множина додатних чисел. Її графік — на малюнку 36.
- 2** Розв'яжіть графічно рівняння

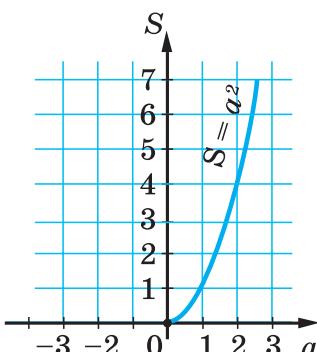
$$x^2 + 2x - 3 = 0.$$

- **Розв'язання.** Запишемо рівняння у вигляді

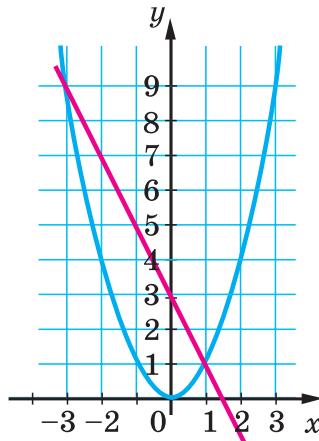
$$x^2 = 3 - 2x.$$

В одній системі координат побудуємо графіки функцій $y = x^2$ і $y = 3 - 2x$ (мал. 37). Перетинаються вони в точках, абсциси яких дорівнюють (можливо, наблизено) 1 і -3 . Перевірка переконує, що це — точні корені.

Відповідь. $x_1 = 1$, $x_2 = -3$.



Мал. 36



Мал. 37

Виконайте усно

575. При яких значеннях аргументу значення функції $y = x^2$ дорівнює: 4, 9, 16, 25, 0,01, 0,04, 0,36?
576. Чи при всіх відповідних значеннях аргументу значення функцій $y = x^2$ і $y = (-x)^2$ рівні? Чим різняться графіки цих функцій?

577. Як називають криві лінії, що є графіками функцій $y = x^2$ і $y = x^{-1}$? Які з точок належать графіку функції $y = x^2$, а які — графіку функції $y = x^{-1}$:

$$A(-1; 4); \quad B(0; 0); \quad C(1; 1); \quad D(0; 1)?$$

578. Чи може функція $y = x^2$ набувати від'ємних значень?

579. Як, маючи графік функції $y = x^2$, побудувати графік функції $y = x^2 + 3$? А функції $y = -x^2$?

РІВЕНЬ А

580. Заповніть таблицю для функції $y = x^2$.

x	-5	-4,5	-3	-1,5	-1	0	0,5	2	2,5	3,5	4	5
y												

Побудуйте графік.

581. Побудуйте графік функції $y = x^2$:

а) для $0 \leq x \leq 4$; б) для $-4 \leq x \leq 0$; в) для $-3 \leq x \leq 3$.

582. Користуючись графіком функції $y = x^2$ (мал. 38), знайдіть:

а) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює:

$-2,6; -1,7; -0,9; 0,9; 1,4;$

б) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює:
2, 3, 4, 5, 6.

583. Користуючись графіком функції $y = x^2$,

зображенім на малюнку 38, знайдіть:

а) значення функції, якщо значення x дорівнює: 1,2; 3,1; 2,3;

б) значення x , при яких значення y дорівнюють: 4; 5; 6;

в) цілі значення x , при яких значення функції менші від 5;

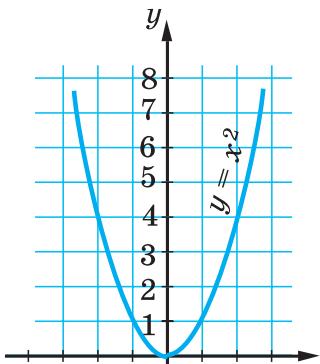
г) значення аргументу, при яких значення функції — цілі числа, не більші від 7.

584. Чи проходить графік функції $y = x^2$ через точки: A (5; 25); B (-5; 25); C (5; -25)?

585. Які з точок належать графіку функції $y = x^2$:

$$A (0,1; 0,01); \quad B (0,2; 0,4); \quad C (-10; 100);$$

$$D (-1,1; 1,21); \quad E \left(1\frac{1}{2}; 2\frac{1}{4}\right); \quad F \left(-\frac{1}{2}; -\frac{4}{9}\right)?$$



Мал. 38

586. Заповніть порожні клітинки таблиці.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$-x^2$							

Побудуйте графік функції $y = -x^2$.

587. Побудуйте графік функції, яка виражає залежність площі квадрата від його периметра.

588. Одна сторона прямокутника дорівнює x , а друга — вдвічі довша. Як залежить площа прямокутника від його меншої сторони?

589. Як залежить площа S прямокутного рівнобедреного трикутника від довжини його катета a ? Заповніть таблицю.

a	1	2	3	4	5	6	7	8
S								

РІВЕНЬ Б

590. У скількох точках перетинаються графіки функцій:

- а) $y = x^2$ і $y = x + 2$; в) $y = x^2$ і $y = x^{-1}$;
 б) $y = x^2$ і $y = -2x + 4$; г) $y = x^2$ і $y = -3x$?

591. При яких значеннях аргументу функції $y = x^2$ і $y = 2x + 3$ набувають рівних значень?

592. Знайдіть координати точок перетину графіків функцій $y = x^2$ і $y = 8x^{-1}$.

593. Дано графік функції: 1) $y = x^2$; 2) $y = -x^2$.

Чи перетинає кожний графік пряму:

- а) $y = 1$; б) $y = -1$; в) $y = 8$; г) $y = -8$; г') $y = 1000$; д) $y = -1000$?

Якщо перетинає, то в якій точці?

594. Доведіть, що кожна пряма, паралельна осі y , перетинає графік функції $y = x^2$. Чи кожна пряма, паралельна осі x , перетинає графік цієї функції?

595. При яких значеннях x значення функції $y = x^2$ менші від 9? А при яких — більші за 9?

596. Знайдіть значення c , при яких графіки функцій $y = x^2$ і $y = c$ перетинаються в точці з абсцисою 5. Яка ордината цієї точки? Знайдіть координати другої точки перетину цих графіків.

597. На якому проміжку функція $y = x^2$ зростає швидше: коли x змінюється від 1 до 2, чи — від 3 до 4?

598. Чим графіки функцій $y = x^2$ і $y = |x|$ подібні і чим вони відрізняються? Побудуйте ці графіки в одній системі координат.

599. Побудуйте графік залежності площині круга від довжини його радіуса.

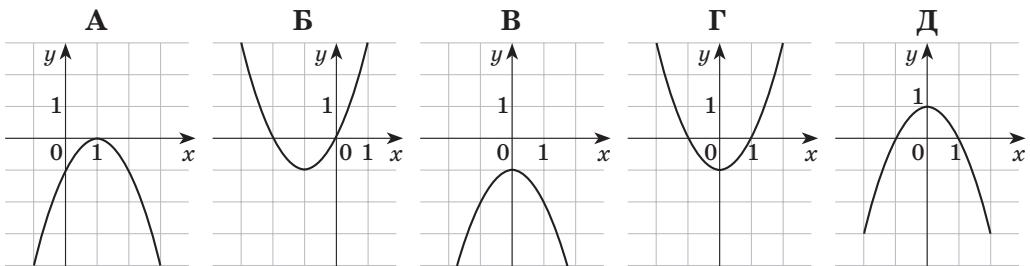
600. Чи має розв'язки рівняння:

а) $x^2 = -\frac{1}{3}x - 1$; б) $x^2 + 3 = x$; в) $\frac{4}{x} = x^2$?

601. Розв'яжіть графічним способом рівняння:

а) $x^2 = x + 2$; в) $\frac{1}{x} - x^2 = 0$; г) $x^2 - x = 6$;
 б) $x^2 = 3x - 2$; г) $x^2 = \frac{8}{x}$; д) $x^2 + 2x - 3 = 0$.

602. (ЗНО 2017). На одному з малюнків зображеніо графік функції $y = 1 - x^2$. Укажіть цей малюнок.



Відкриті задачі (603–604).

603. Складіть і розв'яжіть графічно рівняння, яке мало б:

- а) один розв'язок у I чверті; в) один розв'язок у III чверті;
 б) один розв'язок у II чверті; г) один розв'язок у IV чверті.

604*. Складіть і розв'яжіть графічно рівняння, яке мало б корені:

- а) $x_1 = 0, x_2 = 2$; в) $x = 4$; г) $x = 9$;
 б) $x_1 = -1, x_2 = 1$; г) $x_1 = -3, x_2 = 0$; д) $x_1 = -1, x_2 = 2$.

605*. Розв'яжіть графічно рівняння:

а) $x^2 = 2|x|$; б) $x^2 = \frac{1}{|x|}$.

606*. Побудуйте графік функції, заданої формулою:

а) $y = x^2 + 2$; б) $y = 3 - x^2$; в) $y = (x + 1)^2$.

607*. Розв'яжіть графічно рівняння:

а) $x^2 = 2 - x^2$; б) $x^2 - 1 = \frac{6}{x}$; в) $(x - 3)^2 = x - 1$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

608. Запишіть у стандартному вигляді число:

- а) 47 000 000; в) $803 \cdot 10^9$; г) $0,42 \cdot 10^{-7}$;
 б) 0,00000407; г) $0,067 \cdot 10^7$; д) 2000^5 .

609. Назвіть порядок числа:

а) $2,3 \cdot 10^8$; б) $7,8 \cdot 10^{-12}$.

610. Спростіть вираз:

а) $2a^2 + 3 - ((a^2 - 5ab) - (7 - 3ab))$;
 б) $-(1 - 6xy) + (7 + x^4 - (4xy + 6 - 2x^4))$;
 в) $4a^3 + b^3 - (a^3 - 5ab + (3a^3 - (3b^3 + 4ab - a^3)))$.

611. Доведіть, що для будь-якого натурального n значення дробу є натуральним числом:

а) $\frac{6^n - 1}{5}$; б) $\frac{10^n + 5}{3}$; в) $\frac{10^n - 1}{9}$; г) $\frac{3^{4n} + 4}{5}$; г) $\frac{7^{4n} - 1}{10}$; д) $\frac{9^{2n-1} + 1}{10}$.

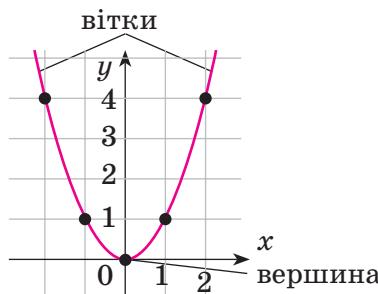
612. При якому значенні x :

- а) значення виразу $|x - 5| + 9$ найменше;
 б) значення виразу $13 - |2x + 3|$ найбільше?

613. Розв'яжіть рівняння:

а) $|x - 5| = 8$; б) $|2x - 3| = 2,5$; в) $|x - 3| = x$.

СКАРБНИЧКА ДОСЯГНЕНЬ



- ✓ Знаю, що графік функції $y = x^2$ — парабола, симетрична відносно осі ординат.
- ✓ Умію будувати графік функції $y = x^2$ за точками

(0; 0); (1; 1); (2; 4); (-1; 1); (-2; 4)

- ✓ Умію характеризувати властивості функції $y = x^2$ за її графіком.
- ✓ Умію графічно розв'язувати деякі рівняння, що містять x^2 .
- ✓ Спробую побудувати графіки функцій $y = x^2 - 1$ і $y = 2x^2$.

Використовуємо набуті компетентності

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:

- Квадрати натуральних чисел (форзац 4).
- Степені числа 2 і 3 (форзац 4).
- Розкладання чисел на прості множники.
- Правило округлення чисел $5,231 \approx 5,2$; $17,281 \approx 17,3$.
- Запис числа у стандартному вигляді $a \cdot 10^n$, $1 \leq a < 10$, n — ціле число.

§ 14 | Квадратні корені

Рівняння $x^2 = 9$ має два розв'язки: 3 і -3. Говорять, що 3 і -3 — квадратні корені із числа 9.

 **Квадратним коренем із числа a називають число, квадрат якого дорівнює a .**

Приклади. Квадратними коренями із числа:

а) 1600 є 40 і -40, тому що $40^2 = 1600$ і $(-40)^2 = 1600$;

б) 0,49 є 0,7 і -0,7, тому що $0,7^2 = 0,49$ і $(-0,7)^2 = 0,49$.

Оскільки серед відомих вам чисел немає такого, квадрат якого дорівнював би від'ємному числу, то **квадратний корінь з від'ємного числа не існує**.

Квадратний корінь із числа 0 дорівнює нулю. Квадратний корінь з додатного числа має два значення: одне з них додатне, інше — протилежне йому від'ємне число.

 **Невід'ємне значення квадратного кореня називають арифметичним значенням цього кореня.**

Арифметичне значення квадратного кореня із числа a позначають символом \sqrt{a} . Наприклад,

$$\sqrt{9} = 3, \quad \sqrt{1600} = 40, \quad \sqrt{0,49} = 0,7, \quad \sqrt{0} = 0.$$

Зауваження. Символом \sqrt{a} позначають тільки арифметичне значення квадратного кореня із числа a , хоч і читають його коротше: «квадратний корінь із числа a ».

 **Обчислення арифметичного значення квадратного кореня називають добуванням квадратного кореня.**

З невеликих чисел, що є точними квадратами натуральних чисел, добувати квадратні корені бажано усно.

a	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144
\sqrt{a}	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Квадратні корені з більших натуральних чисел можна знаходити, користуючись таблицею квадратів (див. форзац 2). Наприклад, $\sqrt{5329} = 73$, $\sqrt{1000} \approx 32$.

Користуючись калькулятором, можна добувати квадратні корені з більшою точністю. Наприклад, щоб добути квадратний корінь із 1000, набираємо це число, після чого натискаємо клавішу « $\sqrt{}$ ». На екрані висвітиться число $31,622776$. Отже, $\sqrt{1000} \approx 31,622776$.

Якщо таким способом знайти значення $\sqrt{0,0035}$, то деякі калькулятори висвітять два числа: 5,9160797 і -2. Число -2 тут показує порядок шуканого значення, записаного в стандартному вигляді. Отже,

$$\sqrt{0,0035} \approx 5,9160797 \cdot 10^{-2} = 0,059160797.$$

ХОЧЕТЕ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Добувати квадратні корені з натуральних чисел вавилонські вчені вміли ще 4 тис. років тому. Вони склали таблицю квадратів багатьох натуральних чисел і, користуючись нею, знаходили квадратні корені із чисел, які були в тій таблиці. Якщо число m не було точним квадратом натурального числа, то вони шукали найближче наближене значення a квадратного кореня з m , подавали число m у вигляді $m = a^2 + b$ і застосовували правило, яке тепер можна записати у вигляді формули

$$\sqrt{a^2 + b} = a + \frac{b}{2a}.$$

Наприклад, якщо $m = 108$, то $\sqrt{108} = \sqrt{10^2 + 8} = 10 + \frac{8}{2 \cdot 10} = 10,4$.

Перевірка. $10,4^2 = 108,16$.

Таке правило добування квадратних коренів знали і вчені Стародавньої Греції.

Обчисліть у такий спосіб значення виразів:

$$\sqrt{5}, \sqrt{10}, \sqrt{26}, \sqrt{629}, \sqrt{1029}.$$

Перевірте отримані значення за допомогою калькулятора. Зробіть висновок, для яких чисел доцільно використовувати вказану формулу.

Відомі й інші алгоритми добування квадратних коренів, але тепер це найзручніше робити, користуючись калькулятором.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Що таке квадратний корінь із числа a ?
2. Скільки існує різних квадратних коренів з додатного числа a ? А із числа 0?
3. Що таке арифметичне значення квадратного кореня із числа a ?
4. Скільки існує арифметичних значень квадратних коренів з додатного числа a ? А із числа 0?
5. Як читають вираз: $\sqrt{0,9}$; $\sqrt{a^2 + b^2}$?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ

- 1** Покажіть, що 28 — арифметичне значення квадратного кореня із 784.
- **Розв'язання.** $28^2 = 784$; 28 — число додатне, тому $\sqrt{784} = 28$.
- 2** Чи є число $\frac{1}{7}$ квадратним коренем із числа $\frac{1}{49}$? А число $-\frac{1}{7}$?
- **Розв'язання.** $\left(\frac{1}{7}\right)^2 = \frac{1}{49}$, $\left(-\frac{1}{7}\right)^2 = \frac{1}{49}$.

Відповідь. Числа $\frac{1}{7}$ і $-\frac{1}{7}$ — квадратні корені із числа $\frac{1}{49}$.

- 3** Обчисліть $2,5\sqrt{64} - 3\sqrt{0,64}$.

- **Розв'язання.** $\sqrt{64} = 8$, $\sqrt{0,64} = 0,8$. Тому

$$2,5\sqrt{64} - 3\sqrt{0,64} = 2,5 \cdot 8 - 3 \cdot 0,8 = 20 - 2,4 = 17,6.$$

Відповідь. 17,6.

- 4** Розв'яжіть рівняння: а) $\sqrt{10x+9} = 7$; б) $\sqrt{x^2 - 9} = 4$.

- **Розв'язання.**

- а) За означенням квадратного кореня $7^2 = 10x + 9$, тоді $10x + 9 = 49$, $10x = 40$, $x = 4$;
- б) $4^2 = x^2 - 9$, $x^2 - 9 - 16 = 0$, $x^2 - 25 = 0$, $(x - 5)(x + 5) = 0$, $x_1 = 5$, $x_2 = -5$.

Відповідь. а) $x = 4$; б) $x_1 = 5$, $x_2 = -5$.

ВИКОНАЙТЕ УСНО

614. Обчисліть:
- | | | |
|---|--|--|
| а) $\sqrt{0}$, $\sqrt{1}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{16}$, $\sqrt{400}$, $\sqrt{90000}$; | б) $\sqrt{0,01}$, $\sqrt{0,04}$, $\sqrt{0,09}$, $\sqrt{0,16}$, $\sqrt{0,0081}$; | в) $\sqrt{\frac{1}{4}}$, $\sqrt{\frac{1}{9}}$, $\sqrt{\frac{4}{9}}$, $\sqrt{\frac{25}{36}}$, $\sqrt{\frac{16}{9}}$. |
|---|--|--|

615. Знайдіть усі квадратні корені із числа:

$$25, 36, 49, 64, \frac{4}{25}, \frac{16}{81}, 3^2, 7^2, 4, 2^2, \sqrt{81}, \sqrt{16}.$$

616. Знайдіть арифметичний квадратний корінь із числа:

$$9, 100, 400, \frac{1}{4}, \frac{9}{16}, 3^2, (-4)^2, 2\frac{1}{4}, (-0,9)^2.$$

РІВЕНЬ А

617. Покажіть, що 8 — квадратний корінь із числа 64 . Чи існують інші квадратні корені із числа 64 ?

618. Покажіть, що: а) $5,4$ — квадратний корінь із числа $29,16$;
б) $0,99$ — квадратний корінь із числа $0,9801$.

619. Знайдіть від'ємні значення квадратних коренів із чисел $29,16$ і $0,9801$.

620. Чи є число -37 арифметичним значенням квадратного кореня із числа 1369 ? А число 37 ?

Обчисліть значення виразу (621–630).

621. а) $\sqrt{169}$; в) $\sqrt{324}$; г) $\sqrt{400}$; е) $\sqrt{2500}$;

б) $\sqrt{256}$; г) $\sqrt{361}$; д) $\sqrt{900}$; е) $\sqrt{3600}$.

622. а) $\sqrt{0,04}$; в) $\sqrt{0,16}$; г) $\sqrt{1,21}$; е) $\sqrt{2,89}$;

б) $\sqrt{0,09}$; г) $\sqrt{0,64}$; д) $\sqrt{1,44}$; е) $\sqrt{3,24}$.

623. а) $\sqrt{121}$; в) $\sqrt{225}$; г) $\sqrt{100}$; е) $\sqrt{1600}$;

б) $\sqrt{196}$; г) $\sqrt{625}$; д) $\sqrt{10000}$; е) $\sqrt{2500}$.

624. а) $\sqrt{0,01}$; в) $\sqrt{1,44}$; г) $\sqrt{4,84}$; е) $\sqrt{0,0004}$;

б) $\sqrt{0,49}$; г) $\sqrt{1,69}$; д) $\sqrt{2,25}$; е) $\sqrt{0,0036}$.

625. а) $\sqrt{\frac{1}{4}}$; в) $\sqrt{\frac{4}{25}}$; г) $\sqrt{\frac{9}{16}}$; е) $\sqrt{\frac{25}{49}}$;

б) $2 \cdot \sqrt{49}$; г) $7 \cdot \sqrt{100}$; д) $4 \cdot \sqrt{64}$; е) $5 \cdot \sqrt{144}$.

626. а) $\sqrt{\frac{1}{64}}$; в) $\sqrt{\frac{25}{36}}$; г) $\sqrt{\frac{9}{25}}$; е) $\sqrt{\frac{4}{49}}$;

б) $16 : \sqrt{16}$; г) $90 : \sqrt{81}$; д) $25 : \sqrt{25}$; е) $\sqrt{36} : 4$.

627. а) $-5 \cdot \sqrt{36}$; в) $0 \cdot \sqrt{47}$; г) $-4,7 \cdot \sqrt{0}$;

б) $\frac{1}{5} \sqrt{225}$; г) $\frac{2}{3} \sqrt{81}$; д) $-\frac{3}{4} \sqrt{196}$.

628. а) $\sqrt{25} + \sqrt{49}$; в) $\sqrt{36} - 4$; г) $\sqrt{49} - 7 \cdot \sqrt{25}$;
 б) $8 + \sqrt{16}$; г) $5 \cdot \sqrt{36} + \sqrt{16}$; д) $3 \cdot \sqrt{16} - 2 \cdot \sqrt{36}$.

629. а) $3 \cdot \sqrt{0,01} + \sqrt{0,09}$; в) $\sqrt{2,25} - \frac{1}{7} \sqrt{1,96}$;
 б) $\sqrt{0,04} - 0,5 \cdot \sqrt{1}$; г) $2\sqrt{0,16} + \sqrt{1,44}$.

630. а) $\sqrt{36} \cdot \sqrt{25}$; в) $\sqrt{81} \cdot \sqrt{25} \cdot \sqrt{16}$;
 б) $-\sqrt{0,49} \cdot \sqrt{49}$; г) $\sqrt{64} \cdot \sqrt{0,25}$.

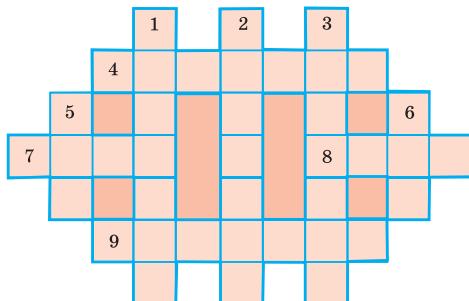
631. Розв'яжіть кросворд (мал. 39).

По горизонталі:

4. Давньогрецький математик.
7. Елемент системи координат.
8. Основна думка.
9. Компонент дії додавання.

По вертикалі:

1. Квадрат числа 1000.
2. Знак $\sqrt{}$.
3. Латинська назва многочлена.
5. Четверте просте число.
6. Латинська буква.



Мал. 39

Користуючись таблицею квадратів, обчисліть значення виразу (632–637).

632. а) $\sqrt{529}$; б) $\sqrt{729}$; в) $\sqrt{841}$; г) $\sqrt{961}$.

633. а) $\sqrt{1089}$; б) $\sqrt{2601}$; в) $\sqrt{2916}$; г) $\sqrt{3364}$.

634. а) $-\sqrt{5041}$; б) $-\sqrt{7396}$; в) $-\sqrt{8464}$; г) $\sqrt{5776}$.

635. а) $-\sqrt{48\,400}$; б) $-32,25 \cdot \sqrt{0}$; в) $24\sqrt{325 \cdot 0}$.

636. а) $169 : \sqrt{169}$; б) $576 : \sqrt{576}$; в) $24 : \sqrt{144}$.

637. а) $\frac{2}{3}\sqrt{36}$; б) $\frac{3}{4}\sqrt{1600}$; в) $-\frac{2}{5}\sqrt{1225}$.

638. Чи правильна рівність:

а) $\sqrt{121} = -11$; б) $\sqrt{47^2} = 47$; в) $\sqrt{(-12)^2} = -12$?

639. Користуючись таблицею квадратів, знайдіть наближене значення виразу:

а) $\sqrt{624}$; б) $\sqrt{840}$; в) $\sqrt{5775}$; г) $-\sqrt{6725}$.

Користуючись калькулятором, знайдіть наближене значення виразу (640–641).

640. а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{3}$; в) $\sqrt{5}$; г) $\sqrt{10}$.

641. а) $\sqrt{37}$; б) $\sqrt{3,7}$; в) $\sqrt{30,7}$; г) $\sqrt{54,76}$.

642. Чи має зміст вираз:

- | | | | |
|-------------------|----------------------|----------------------------|--------------------------------|
| а) $\sqrt{48}$; | в) $-\sqrt{64}$; | г) $\sqrt{(-4)^3}$; | е) $-\sqrt{-17}$; |
| б) $\sqrt{-49}$; | г) $\sqrt{(-5)^2}$; | д) $\sqrt{8 \cdot (-4)}$; | е) $\sqrt{(-6) \cdot (-12)}$? |

643. Заповніть таблицю:

x	0	1	4	9	16	25	36
\sqrt{x}							

644. Знайдіть значення виразу:

- | | | |
|--|---|---|
| а) $\sqrt{2x+3}$, якщо $x = 11$; $x = -1$; $x = 83$; | в) $\sqrt{14-m}$, якщо $m = 5$; $m = -2$; $m = 14$; | г) $\sqrt{a+2c}$, якщо $a = 6$ і $c = 5$; $a = 0$ і $c = 8$. |
|--|---|---|

645. Знайдіть сторону квадрата (у сантиметрах), площа якого дорівнює:

- | | | |
|-------------------------|---------------------------|--------------------------|
| а) 64 см ² ; | в) 0,36 дм ² ; | г) 0,49 м ² ; |
| б) 25 дм ² ; | г) 16 м ² ; | д) 6,25 м ² . |

Рівень Б

646. Заповніть таблицю.

a	0	$\frac{1}{9}$				49	144		
\sqrt{a}			0,5	1	4			15	16

Обчисліть (647–648).

- | | | | |
|-----------------------------------|----------------------------|-----------------------------|------------------------------|
| 647. а) $\sqrt{\frac{121}{64}}$; | в) $\sqrt{1\frac{7}{9}}$; | г) $\sqrt{11\frac{1}{9}}$; | е) $\sqrt{6\frac{19}{25}}$; |
| б) $\sqrt{\frac{225}{81}}$; | г) $\sqrt{6\frac{1}{4}}$; | д) $\sqrt{6\frac{1}{4}}$; | е) $\sqrt{5\frac{1}{16}}$. |

- | | | | |
|---------------------------|----------------------|---------------------|---------------------|
| 648. а) $\sqrt{0,0001}$; | в) $\sqrt{0,0081}$; | г) $\sqrt{10,24}$; | е) $\sqrt{12,25}$; |
| б) $\sqrt{0,0025}$; | г) $\sqrt{0,0169}$; | д) $\sqrt{10,89}$; | е) $\sqrt{98,01}$. |

Обчисліть значення виразу (649–652).

- | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|
| 649. а) $\sqrt{225} - \sqrt{196}$; | в) $\sqrt{2025} + \sqrt{2704}$; |
| б) $\sqrt{676} + \sqrt{196}$; | г) $\sqrt{1681} - \sqrt{5929}$. |
| 650. а) $2\sqrt{256} + 3\sqrt{169}$; | в) $0,5\sqrt{1936} - 0,1\sqrt{256}$; |
| б) $4\sqrt{225} - 3\sqrt{169}$; | г) $2,5\sqrt{676} + 1,2\sqrt{625}$. |

651. а) $\frac{2}{3}\sqrt{784} - \frac{3}{4}\sqrt{676}$; в) $-\frac{1}{2}\sqrt{1156} + 17\sqrt{0,04}$;

б) $\frac{3}{5}\sqrt{3025} - 29\sqrt{0,01}$; г) $\frac{1}{4}\sqrt{576} + \sqrt{1,96} : 0,35$.

652. а) $\sqrt{1296} - 0,2\sqrt{2025}$; в) $5,4 : \sqrt{3,24} - \frac{1}{3}\sqrt{144}$;

б) $0,4\sqrt{1225} + \sqrt{256}$; г) $-\sqrt{7056} - 380\sqrt{0,25}$.

653. Знайдіть значення виразу:

а) $\sqrt{a+b}$, якщо $a = 102$, $b = 19$; $a = -4$, $b = 85$; $a = 1,21$, $b = 0,75$;

б) $\sqrt{2x+y}$, якщо $x = 32$, $y = 0$; $x = 17$, $y = -18$; $x = \frac{1}{8}$, $y = 2$.

Знайдіть наближене значення виразу (654–655).

654. а) $27\sqrt{321} - 15\sqrt{105}$; в) $(\sqrt{353} - \sqrt{187}) : 12$;

б) $32\sqrt{635} + 15\sqrt{483}$; г) $(\sqrt{879} + \sqrt{1125}) \cdot 0,5$.

655. а) $34 : \sqrt{127} + 127$; в) $0,24 : \sqrt{0,15} + 2,4$;

б) $85 : \sqrt{325} - 12$; г) $1,37 : \sqrt{0,2} - 73,8$.

656. Знайдіть число, квадратний корінь з якого дорівнює:

а) 48; б) -37 ; в) 0,07; г) $-0,0004$.

657. Знайдіть значення виразу: а) $\sqrt{x^2 - 2x + 1}$, якщо $x = 3,5$;

б) $\sqrt{x^2 + 2x + 1}$, якщо $x = -2,8$;

в) $\sqrt{4x^2 - 4x + 1}$, якщо $x = 0,25$.

658. Чи існує значення змінної x , при якому:

а) $\sqrt{x} = 4$; в) $\sqrt{x} = -2$; г) $\sqrt{x} = 100$; е) $\sqrt{x-3} = 5$;

б) $\sqrt{x} = 0$; г) $5 + \sqrt{x} = 0$; д) $\sqrt{x} = 360$; е) $\sqrt{-x} = 2$?

Розв'яжіть рівняння (659–662).

659. а) $\sqrt{x} = 7$; в) $2 \cdot \sqrt{x} = 12$; г) $-3 + \sqrt{y} = 0$;

б) $3 - \sqrt{x} = 0$; г) $5\sqrt{y} = 10$; д) $z\sqrt{z} = 0$.

660. а) $\sqrt{x+3} = 5$; в) $\sqrt{2+x} = -3$; г) $\sqrt{5x-1} = 3$;

б) $\sqrt{11-y} = 7$; г) $\sqrt{1+x^2} = 1$; д) $1 + \sqrt{1-x} = 0$.

661. а) $\sqrt{x+2} = 3$; в) $\sqrt{x-12} = 8$; г) $\sqrt{14+5x} = 8$;

б) $\frac{36}{\sqrt{x-5}} = 4$; г) $\frac{15}{\sqrt{x-3}} = 3$; д) $\sqrt{6-\sqrt{x}} = 3$.

662. а) $\sqrt{\sqrt{x+5}} = 4$; в) $\sqrt{58-x^2} = 7$; г) $\sqrt{7+\sqrt{6-\sqrt{x}}} = 3$.
 б) $\sqrt{x^2+20} = 6$; г) $\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{x}}} = 2$;

663. (ЗНО 2018). Укажіть проміжок, якому належить значення виразу $(1-\sqrt{2})^2$.

- А (-3; 0) Б [0; 0,5) В [0,5; 1) Г [1; 2) Д [2; 5)

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

664. Подайте многочлен у вигляді степеня:

а) $a^3 - 3a^2 + 3a - 1$; б) $8y^3 - 36y^2 + 54y - 27$.

665. Доведіть, що значення виразу не залежить від значення змінної:

а) $(x+5)(x^2-2x-3) - (5x+x^2)(x-2) + 3(x+5)$;
 б) $(2x^2-3x+6)(x+4) - (x^2+4x+3)(2x-3)$.

666. Обчисліть значення виразу:

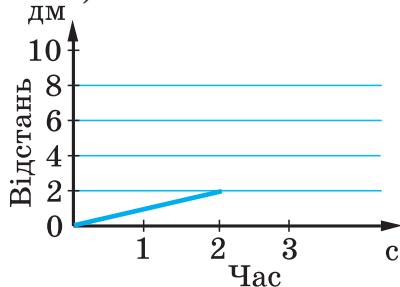
а) $(3x-7y)^2 - (7x-3y)^2$,

якщо $x = 2,8$, $y = 2,2$;

б) $(3x-4y)^2 + (4x+3y)^2$,

якщо $x = 1,8$, $y = 2,6$.

667. На малюнку 40 зображено графік руху жука, який повзе прямолінійно і рівномірно. За який час він подолає відстань 6 дм, рухаючись із тією самою швидкістю?



Мал. 40

СКАРБНИЧКА ДОСЯГНЕНЬ

- ✓ Розумію, що таке квадратний корінь із числа.
- ✓ Знаю, що існує два різні квадратні корені з додатного числа.
- ✓ Знаю, що таке арифметичний квадратний корінь із числа a і як він позначається:

$$\sqrt{a} = b, \quad b^2 = a, \quad b > 0 \quad \sqrt{0} = 0$$

- ✓ Умію формулювати означення арифметичного квадратного кореня із числа.
- ✓ Умію добувати квадратні корені з невід'ємних чисел.
- ✓ Умію обчислювати значення виразів, що містять знак кореня.
- ✓ Умію розв'язувати деякі види рівнянь, що містять знак кореня.

Використовуємо набуті компетентності

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:

- Види числових множин та їх позначення (форзац 1).

$$N \subset Z \subset Q$$

- Закони дій (форзац 1).

§ 15 | Числові множини

Ви знаєте, що таке набір фломастерів, табун коней, група у Facebook, зграя птахів, футбольна команда. У математиці будь-які сукупності називають одним словом — *множина*. Можна говорити, наприклад, про множину точок числової прямої, коренів рівняння, правильних дробів із знаменником 7, геометричних фігур тощо. Говорять також про множину квартир у будинку, учнів у класі, хімічних елементів у таблиці Менделєєва, мінералів, що видобуваються на території України тощо.

Множини позначають величими латинськими буквами: A, B, C, \dots, M, \dots і записують за допомогою фігурних дужок. Наприклад:

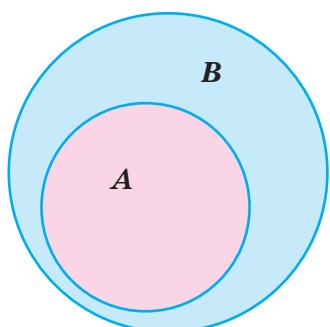
$C = \{\square, \diamond, \circ\}$ — множина фігур \square, \diamond, \circ .

$M = \{1, 3, 5, 9\}$ — множина непарних одноцифрових чисел.

Об'єкти, які входять до множини, називаються її *елементами*. Вважають, що елементи множини різні. Якщо a — елемент множини A , то пишуть $a \in A$. Якщо c — не є елементом множини A , то пишуть $c \notin A$. Якщо множина не містить жодного елемента, її називають *порожньою множиною* і позначають символом \emptyset .

Якщо A частина множини B (мал. 41), то її називають *підмножиною* множини A і записують $A \subset B$. Наприклад, натуральні числа є підмножиною цілих чисел: $N \subset Z$ (мал. 42).

Відомі вам досі числа — цілі й дробові, додатні і від'ємні — становлять множину *раціональних чисел*. Раціональними їх називають тому, що кожне з них можна записати у вигляді частки, відношення двох чисел ($\frac{m}{n}$, де m — число ціле, а n — натуральне), а слово «відношення» латинською мовою — *ratio*.



Мал. 41

Спробуємо записати раціональні числа $\frac{9}{8}$, $\frac{7}{6}$, $\frac{4}{11}$ у вигляді десяткових дробів. Для цього їх чисельники поділимо на знаменники.

$$\text{Отже, } \frac{9}{8} = 1,125, \quad \frac{7}{6} = 1,16666\dots, \quad \frac{4}{11} = 0,363636\dots.$$

У двох останніх прикладах ділення можна продовжувати без кінця (чому?). Утворені частки — нескінчені десяткові дроби, цифри яких періодично повторюються. Це *некінчені періодичні десяткові дроби*.

Некінчені періодичні десяткові дроби записують коротше:

$$0,363636\dots = (0,36); \quad 1,16666\dots = 1,1(6).$$

Цифру або групу цифр, які повторюються, називають *періодом* періодичного десяткового дробу.

Будь-який десятковий дріб і навіть ціле число можна подати у вигляді нескінченого періодичного десяткового дробу, якщо дописати до його дробової частини безліч нулів: $1,125 = 1,125000\dots$, $18 = 18,000\dots$, $-3,7 = -3,7000\dots$

Можна довести, що:

кожне раціональне число можна подати у вигляді нескінченого періодичного десяткового дробу; кожний нескінчений періодичний десятковий дріб зображає деяке раціональне число.

Чи існують числа, відмінні від раціональних? Існують. Наприклад, обчислюючи значення $\sqrt{2}$, $\sqrt{10}$, π , дістають нескінчені неперіодичні десяткові дроби:

$$\sqrt{2} = 1,4142135\dots, \quad \sqrt{10} = 3,1622776\dots, \quad \pi = 3,1415926\dots.$$

Ці числа — нераціональні.

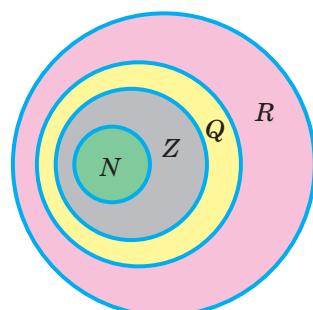
Числа, які зображаються нескінченними неперіодичними десятковими дробами, називають *іrrаціональними*. Іrrаціональний — означає нераціональний (латинське *ir* відповідає заперечувальній частці *не*).

→ **Іrrаціональні числа разом з раціональними утворюють множину дійсних чисел.**

Множини натуральних, цілих, раціональних і дійсних чисел позначають відповідно буквами N , Z , Q і R . Кожна із цих множин є підмножиною (частиною) наступної множини (мал. 42).

Кожне натуральне число є водночас і цілим, і раціональним, і дійсним.

Кожне ціле число є також раціональним і дійсним. Наприклад, усі числа $12, -3, \frac{3}{7}, \sqrt{10} —$



Мал. 42

дійсні, три перших — раціональні, два перших — цілі і тільки число 12 — натуральне.

Дійсні числа, записані у вигляді нескінченних десяткових дробів, порівнюють за тим самим правилом, що й десяткові дроби. Наприклад, число 3,131313... менше від 4,0111..., і від 3,25, і від π , але більше за 3,1222..., за -2, за 0.

Дійсні числа можна додавати, віднімати, множити, підносити до степеня і ділити (на числа, відмінні від 0). Для додавання і множення їх справедливі переставний, сполучний і розподільний закони.

Наприклад,

$$\begin{aligned}\sqrt{2} + \pi &= \pi + \sqrt{2}, \quad (3 + \pi) + \sqrt{5} = 3 + (\pi + \sqrt{5}), \\ \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} &= \sqrt{3} \cdot \sqrt{2}, \quad (\sqrt{5} \cdot \sqrt{20}) \cdot \sqrt{8} = \sqrt{5} \cdot (\sqrt{20} \cdot \sqrt{8}), \\ \pi \cdot (1,020202\dots + 5,12345\dots) &= \\ &= \pi \cdot 1,020202\dots + \pi \cdot 5,12345\dots.\end{aligned}$$

Усі правила дій над виразами зі змінними, доведені раніше для раціональних значень змінних, справедливі і для довільних дійсних значень цих змінних. Зокрема, для будь-яких дійсних чисел правильні відомі вам властивості пропорцій, дробів, степенів.

Розв'язуючи прикладні задачі, ірраціональні числа звичайно округлюють, відкидаючи їх нескінченні «хвости» десяткових знаків. Наприклад, якщо треба знайти значення суми чисел π і $\sqrt{2}$ з точністю до тисячних, пишуть:

$$\pi + \sqrt{2} \approx 3,1416 + 1,4142 \approx 4,556.$$

ХОЧЕТЕ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Ірраціональність числа $\sqrt{2}$ можна довести так. Припустимо, що число $\sqrt{2}$ раціональне, тобто дорівнює деякому нескоротному звичайному дробу $\frac{m}{n}$.

Тоді: $2n^2 = m^2$, тобто число m^2 , а отже, і m — парне: $m = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$. Тоді, підставивши $m = 2k$ у рівність $2n^2 = m^2$, одержимо $2n^2 = 4k^2$, $n^2 = 2k^2$, число n також парне. Виходить, що дріб $\frac{m}{n}$ можна скоротити на 2. А припускалось,

що цей дріб нескоротний. Отже, припущення приводить до протиріччя, тому число $\sqrt{2}$ не є раціональним.

Доведіть таким способом, що числа $\sqrt{3}$ і $\sqrt{5}$ — ірраціональні.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Які числа називають дійсними? Наведіть приклади.
2. Які числа називають раціональними, які — ірраціональними?
3. Наведіть приклади множини та її підмножини.
4. Чи бувають ірраціональні числа від'ємними?
5. Чи є число 0 цілим, раціональним, дійсним?
6. Які дії можна виконувати над ірраціональними числами?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ

1 Подайте у вигляді десяткового дробу: а) $\frac{3}{8}$; б) $\frac{5}{11}$; в) $\frac{13}{6}$.

Розв'язання. а) Щоб перетворити звичайний дріб у десятковий, потрібно чисельник даного дробу поділити на його знаменник. Маємо:

$$\text{а)} \frac{3}{8} = 0,375; \quad \text{б)} \frac{5}{11} = 0,4545\dots = 0,(45); \quad \text{в)} \frac{13}{6} = 2,1666\dots = 2,1(6).$$

Відповідь: а) 0,375; б) 0,(45); в) 2,1(6).

2 Порівняйте числа: а) $-\frac{4}{3}$ і $-1,33$; б) $-\frac{4}{3}$ і $-1,34$; в) $-\frac{4}{3}$ і $-1,333\dots$

Розв'язання. а) Поділивши чисельник даного дробу $\frac{3}{4}$ на знаменник, одержимо $1,333\dots$. Число $1,333\dots$ більше від $1,33$. Тому

$$-1,333\dots < -1,33, \text{ або } -\frac{4}{3} < -1,33;$$

б) $1,333\dots < 1,34$, отже, $-\frac{4}{3} > -1,34$;

в) $\frac{4}{3} = 1,333\dots$, отже, $-\frac{4}{3} = -1,333\dots$

Виконайте усно

668. Які із чисел 35 , -128 , π , $\sqrt{25}$, $\sqrt{10}$, $-\sqrt{0,04}$ — раціональні, які — ірраціональні, які — дійсні?

669. Яке з тверджень правильне:

- а) кожне натуральне число є дійсним;
- б) кожне ціле число є дійсним;
- в) кожне раціональне число є дійсним;
- г) кожне ірраціональне число є дійсним;
- ґ) не кожне дійсне число є раціональним;
- д) не кожне дійсне число є ірраціональним?

670. Укажіть правильні твердження:

- а) 2π — число дійсне; в) $1+\pi$ — число ірраціональне;
 б) $-\pi$ — число ірраціональне; г) $\pi : 2\pi$ — число раціональне.

671. Чи правильні схеми а, б на малюнку 43?



Мал. 43

672. Як називається: а) множина жоржин у вазі; б) множина людей, які вкладають гроші з метою їхнього збереження та примноження у будівництво, наприклад торгових центрів; в) множина чотирьох співаків, які виступають разом; г) множина осіб, які добровільно безкорисливо підтримують розвиток культури, освіти, охорони здоров'я та незахищенні категорії населення?

673. Який із записів правильний:

- а) $10,5 \in N$; в) $10,7 \in Q$; г) $\sqrt{3} \in N$; е) $12 \in Q$; ж) $\sqrt{5} \in Q$;
 б) $10,6 \in Z$; г) $10,8 \in R$; д) $\sqrt{4} \in Z$; е) $13 \in R$; з) $\sqrt{6} \in R$?

Рівень А

674. З наведених чисел випишіть — а) цілі, б) ірраціональні:

$$5; \frac{3}{4}; \sqrt{-4}; -32; \sqrt{3}; 0,7; -\sqrt{49}; \frac{12}{3}; 0,7\frac{1}{2}; 2\sqrt{\frac{25}{4}}; -1,1111; \sqrt{3\frac{1}{16}}.$$

675. Які із чисел $-3,5; -\sqrt{39}; 6; 1,010010001; \frac{2}{3}; \sqrt{7}; -\sqrt{1024}; 5\frac{1}{3}$ є раціональними?

676. Які з наведених чисел є:

- а) натуральними; б) цілими; в) ірраціональними; г) дійсними?

$$\sqrt{17}; \sqrt{17,64}; 49; -1,21; 1; -2,5\sqrt{100}; 3; 0; \sqrt{1000};$$

$$4\sqrt{3}; \quad 3\sqrt{4}; \quad \sqrt{2\frac{7}{9}}; \quad 5+\sqrt{2}; \quad -0,30033000333; \quad \pi; \quad -2\pi.$$

677. Установіть і запишіть за допомогою символів, підмножиною яких із числових множин N , Z , Q , R є множина A , якщо:

- а) множина A — це множина чисел, протилежних до чисел $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$;
- б) множина A — це множина чисел, протилежних до чисел 3; 5; 7;
- в) множина A — це множина чисел, обернених до чисел $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$.

678. Подайте у вигляді звичайного дробу:

- а) 0,7; б) 0,53; в) 3; г) 1,25.

679. Подайте у вигляді десяткового дробу:

- а) $\frac{9}{4}$; б) $\frac{2}{5}$; в) $\frac{13}{25}$; г) $\frac{17}{16}$; г) $\frac{1}{125}$.

680. Подайте у вигляді нескінченого десяткового дробу:

- а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{5}{6}$; в) $\frac{16}{15}$; г) $\frac{38}{12}$; г) $\frac{1}{7}$.

681. (ЗНО 2020). Скільки всього цілих чисел містить інтервал $(\sqrt{8}; \sqrt{81})$?

А 8 Б 7 В 6 Г 5 Д 4

Порівняйте числа (682–685).

682. а) $\frac{5}{6}$ і $\frac{6}{7}$; б) $\frac{8}{3}$ і $\frac{9}{4}$; в) $-\frac{3}{8}$ і $-\frac{4}{9}$.

683. а) $\frac{2}{3}$ і 0,66; б) $\frac{2}{3}$ і 0,67; в) $\frac{2}{3}$ і 0,666... .

684. а) $\sqrt{2}$ і 1,41; б) $\sqrt{2}$ і 1,42; в) $\sqrt{2}$ і 1,414141... .

685. а) π і 3,14; б) π і $\frac{27}{7}$; в) π і $\sqrt{10}$.

Рівень Б

686. Користуючись калькулятором, обчисліть з точністю до тисячних:

а) $\frac{2}{3} + \sqrt{15}$; в) $\sqrt{23} + \pi$; г) $\sqrt{45} \cdot \sqrt{20}$;

б) $4,13 - \sqrt{10}$; г) $\sqrt{35} \cdot \sqrt{10}$; д) $\pi : \sqrt{5,7}$.

687. Користуючись калькулятором, обчисліть із точністю до сотих:

а) $\sqrt{18} \cdot \sqrt{50}$; в) $\pi + \sqrt{18}$; г) $\sqrt{40} + \sqrt{90}$;

б) $\frac{2}{3} + 2\sqrt{3}$; г) $3 \cdot \sqrt{30} - \frac{2}{3}$; д) $\pi \cdot \sqrt{10} - \frac{2}{7}$.

688. Задайте переліком елементів множину:

- а) букв, якими записують ваше ім'я та прізвище;
- б) цифр, якими записують дату народження ваших близьких;
- в) цифр, якими записують рік народження Михайла Васильовича Остроградського;
- г) букв, з яких складається назва множини, що не містить жодного елементу.

689. Записи $0,(6)$ і $0,(58)$ означають нескінченні періодичні десяткові дроби $0,666\dots$ і $0,585858\dots$. Яке із цих чисел більше? Знайдіть таке раціональне число, яке менше одного з них, але більше за друге.

690. Відкрита задача. Складіть якомога більше задач про числа:

- | | |
|---------------------------|--------------------------------|
| а) $0,257$ і $0,26$; | в) $7,666\dots$ і $7,67$; |
| б) $-3,0973$ і $-3,098$; | г) $-0,0222\dots$ і $-0,019$. |

691. Відомо, що числа a і b : 1) натуральні; 2) цілі; 3) раціональні. Яким буде в кожному з випадків 1)–3) число:

- | | | | |
|--------------|--------------|-----------|----------------------------|
| а) $a + b$; | б) $a - b$; | в) ab ; | г) $a : b$ ($b \neq 0$)? |
|--------------|--------------|-----------|----------------------------|

692. Раціональне чи ірраціональне число $2,001001001\dots$, якщо група його цифр 001 нескінченно повторюється?

693. Раціональне чи ірраціональне число $2,010010001\dots$, якщо післяожної його одиниці на один нуль більше, ніж перед нею?

694. Порівняйте числа:

- | | |
|--|--|
| а) $3,5 + \sqrt{2}$ і $\sqrt{10} \cdot \sqrt{2}$; | в) $\pi + \sqrt{2}$ і $\sqrt{2} \cdot \pi$; |
| б) $\frac{1}{3} + \sqrt{10}$ і $\sqrt{10} + 0,4$; | г) $3 : \pi$ і $\pi : \sqrt{10}$. |

695. Запишіть у порядку зростання числа:

$$3\sqrt{20}; \sqrt{37} - 1,5; 5,74 - \sqrt{74}; \sqrt{50} - \sqrt{30}; 2\sqrt{13} + \sqrt{3}; \pi - \sqrt{37}.$$

696. Доведіть, що сума двох раціональних чисел — число раціональне.

697. Доведіть, що добуток двох раціональних чисел — число раціональне.

698. Чи правильно, що різниця двох будь-яких раціональних чисел є раціональним числом? А частка?

699. Чи може сума двох ірраціональних чисел бути числом раціональним? Наведіть приклад.

700. Наведіть приклад двох ірраціональних чисел, добуток яких дорівнює раціональному числу.

701. Доведіть, що сума раціонального та ірраціонального чисел завжди є числом ірраціональним.

702. Доведіть, що ірраціональним є число: а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{3}$; в) $\sqrt{6}$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

703. Спростіть вираз: а) $(x + 4)(2x^4 - x^3 + 3x^2)$; б) $(a^3 + a^2 + a + 1)(a - 1)$.

704. Щоб пошити одну сорочку, потрібно 2,5 м тканини. Запишіть формулу для обчислення залишку тканини після пошиття x сорочок, якщо в сувої 200 м тканини. Яких значень може набувати x ?

705. Обчисліть: а) $\sqrt{3^2 + 4^2}$; б) $\sqrt{10^2 - 8^2}$; в) $\sqrt{0,7^2 + 2,4^2}$.

706. Виразіть: а) $2,4 \cdot 10^3$ т у грамах; в) $5,4 \cdot 10^{-6}$ км у міліметрах;
б) $6,23 \cdot 10^{12}$ кг у тоннах; г) $3,8 \cdot 10^{-10}$ см у метрах.

707. Знайдіть суму, різницю, добуток і частку чисел:

- а) $8 \cdot 10^9$ і $4 \cdot 10^9$;
- б) $4,8 \cdot 10^7$ і $4 \cdot 10^6$;
- в) $6 \cdot 10^{-5}$ і $3 \cdot 10^{-5}$;
- г) $4,5 \cdot 10^{-6}$ і $1,5 \cdot 10^{-7}$.

708. Перенесіть у зошит малюнок 44 і представте числа так, щоб чотири суми — у двох горизонтальних і двох вертикальних рядах — стали рівними. Знайдіть найменшу з таких сум.

	1		2	
3	4	5	6	7
	8		9	
10	11	12	13	14
	15		16	

Мал. 44

СКАРБНИЧКА ДОСЯГНЕНЬ

✓ Можу пояснити, що таке множина і підмножина, та навести приклади.

$Z \subset R$; Якщо A — множина букв українського алфавіту,
 $N \subset Q$ а G — множина голосних букв, то $G \subset A$.

✓ Можу пояснити, що таке раціональне, іrrаціональне та дійсне число і навести приклади цих чисел.

$$\left\{ -50, 5, -10, \frac{1}{3}, 1\frac{1}{5}, 2, 4, 6, 800 \right\} \subset Q; \left\{ -3\frac{1}{7}, -\sqrt{3}, 0, \sqrt{5}, 2, 5, \sqrt{7} \right\} \subset R.$$

✓ Знаю, що кожне раціональне число можна подати у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу, а кожне іrrаціональне число зображається нескінченим неперіодичним десятковим дробом.

✓ Можу порівнювати значення виразів, використовуючи правила порівняння десяткових дробів: $7,8654 > 7,85643$.

Використовуємо набуті компетентності

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:

- Розкладання числа на множники

$$84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7;$$

$$\begin{array}{r|l} 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ \hline & 7 \end{array}$$

$$4356 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11^2$$

$$350 = 2 \cdot 5^2 \cdot 7;$$

$$\begin{array}{r|l} 350 & 2 \cdot 5 \\ 35 & 7 \\ 5 & 5 \\ \hline & 1 \end{array}$$

- Квадрати натуральних чисел (форзац 4).
- Степени числа 2 і 3 (форзац 4).
- Закони арифметичних дій (форзац 1).
- Що таке арифметичний квадратний корінь із числа a .

$$\sqrt{a} = b, \text{ якщо } b \geq 0 \text{ і } b^2 = a$$

§ 16 Квадратний корінь із добутку, дробу, степеня

Арифметичний корінь з a — невід'ємне значення квадратного кореня з невід'ємного числа a . Тому для будь-якого невід'ємного числа a справджується тотожність $(\sqrt{a})^2 = a$.

Приклади. $(\sqrt{7})^2 = 7$, $(\sqrt{0,3})^2 = 0,3$, $(\sqrt{0})^2 = 0$.

Правильні й такі тотожності:

1. $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ — для невід'ємних значень a і b .

2. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ — для невід'ємного a і додатного b .

3. $\sqrt{a^{2k}} = a^k$ — для невід'ємного a і натурального k .

Доведемо ці тотожності.

1. Якщо a і b — довільні невід'ємні числа, то числа \sqrt{a} , \sqrt{b} , \sqrt{ab} і $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ також невід'ємні. Крім того,

$$(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = ab.$$

Отже, $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ — невід'ємне число, квадрат якого дорівнює ab , тобто

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

2. Якщо $a \geq 0$ і $b > 0$, то числа \sqrt{a} , $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ і $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ невід'ємні, а \sqrt{b} — додатне. Крім того,

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a}{b}.$$

Отже, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ — невід'ємне число, квадрат якого дорівнює $\frac{a}{b}$, тобто

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

3. Якщо число a — невід'ємне, а k — натуральне, то числа a^k , a^{2k} і $\sqrt{a^{2k}}$ — невід'ємні. Крім того, $(a^k)^2 = a^{2k}$. Отже, a^k — невід'ємний квадратний корінь з a^{2k} , тобто

$$\sqrt{a^{2k}} = a^k$$

Доведені три теореми коротко можна сформулювати так.

1. Корінь із добутку двох невід'ємних чисел дорівнює добутку коренів із цих чисел (теорема про корінь із добутку).

2. Корінь із дробу, чисельник якого невід'ємний, а знаменник додатний, дорівнює кореню із чисельника, поділеному на корінь із знаменника (теорема про корінь із дробу).

3. Корінь із степеня a^{2k} , у якому числа a — невід'ємне і k — натуральне, дорівнює a^k (теорема про корінь із степеня).

Зауваження. Тут під «коренем» розуміють тільки квадратний арифметичний корінь.

Теорему про корінь із добутку можна поширити на три і більше множників. Справді, якщо числа a , b і c — невід'ємні, то

$$\sqrt{abc} = \sqrt{(ab) \cdot c} = \sqrt{ab} \cdot \sqrt{c} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c}.$$

Якщо в доведених тотожностях поміняти місцями їх ліві й праві частини, одержимо:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

Ці тотожності показують, як можна множити і ділити корені.
Наприклад,

$$\sqrt{20} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{20 \cdot 5} = \sqrt{100} = 10, \quad \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{45}{5}} = \sqrt{9} = 3.$$

З теореми про корінь із степеня випливає, що $\sqrt{a^2} = a$, якщо $a \geq 0$. Якщо $a < 0$, то рівність $\sqrt{a^2} = a$ неправильна, оскільки число $\sqrt{a^2}$ невід'ємне і не може дорівнювати від'ємному числу a .

Рівність

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

правильна при кожному значенні a , оскільки число $|a|$ — невід'ємне і його квадрат дорівнює a^2 .

Приклади. $\sqrt{7^2} = 7$, $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$.

ХОЧЕТЕ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

У сформульованих вище теоремах ідеться тільки про найпростіші випадки перетворення арифметичних значень квадратних коренів: коли усі числа під коренями додатні або невід'ємні. Але нерідко доводиться мати справу і з такими виразами, у яких під знаком кореня — добуток чи частка двох від'ємних чисел. У таких випадках можна користуватися означенням квадратного кореня, арифметичного значення квадратного кореня тощо. Наприклад,

$$\sqrt{(-4)(-9)} = \sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 2 \cdot 3 = 6; \quad \sqrt{\frac{-4}{-9}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}; \quad \sqrt{(-2)^4} = \sqrt{16} = 4.$$

З теореми 3 неважко одержати такий наслідок.

Якщо натуральне число k — парне, то для будь-яких значень a правильна тотожність

$$\sqrt{a^{2k}} = a^k$$

Адже обидві частини цієї рівності — числа невід'ємні, іх квадрати — рівні.

Наприклад. $\sqrt{(-3)^{12}} = (-3)^6 = 729$.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

- Сформулюйте теорему про корінь з добутку.
- Сформулюйте теорему про корінь з дробу.
- Сформулюйте теорему про корінь зі степеня.
- При яких значеннях змінної правильні тотожності:

$$\sqrt{a^2} = a; \quad \sqrt{a^2} = -a; \quad \sqrt{a^2} = |a|; \quad (\sqrt{a})^2 = a?$$

Виконаємо разом

1 Знайдіть значення виразу:

а) $\sqrt{49 \cdot 25}$; б) $\sqrt{9 \cdot 0,16}$; в) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$; г) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}}$.

- Розв'язання.
- а) $\sqrt{49 \cdot 25} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{25} = 7 \cdot 5 = 35$;
- б) $\sqrt{9 \cdot 0,16} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{0,16} = 3 \cdot 0,4 = 1,2$;
- в) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{3 \cdot 12} = \sqrt{36} = 6$;
- г) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}} = \sqrt{\frac{3}{12}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$.

Відповідь. а) 35; б) 1,2; в) 6; г) $\frac{1}{2}$.

Виконайте усно

Знайдіть значення виразу (709–712).

709. а) $\sqrt{25 \cdot 36}$; б) $\sqrt{18 \cdot 2}$; в) $\sqrt{10 \cdot 0,1}$.

710. а) $\sqrt{3 \cdot 0,03}$; б) $\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}$; в) $\sqrt{0,2 \cdot 0,2}$.

711. а) $\sqrt{\frac{1}{4}}$; б) $\sqrt{\frac{2}{18}}$; в) $\sqrt{\frac{64}{81}}$; г) $\sqrt{\frac{5}{45}}$.

712. а) $\sqrt{2^2}$; б) $\sqrt{3^4}$; в) $\sqrt{(-3)^2}$; г) $\sqrt{0}$.

713. Знайдіть добуток чисел: а) $\sqrt{30} \cdot \sqrt{30}$; б) $\sqrt{18} \cdot \sqrt{2}$.

714. Знайдіть значення x , якщо: а) $x \cdot \sqrt{2} = 2$; б) $x \cdot \sqrt{7} = 7$; в) $x \cdot \sqrt{2} = 4$.

Рівень А

Обчисліть значення виразу (715–722).

715. а) $\sqrt{64 \cdot 100}$; б) $\sqrt{25 \cdot 121}$; г) $\sqrt{121 \cdot 64}$;

б) $\sqrt{49 \cdot 144}$; г) $\sqrt{36 \cdot 900}$; д) $\sqrt{900 \cdot 81}$.

716. а) $\sqrt{0,01 \cdot 25}$; б) $\sqrt{0,25 \cdot 0,01}$; г) $\sqrt{0,01 \cdot 0,04}$;

б) $\sqrt{0,04 \cdot 144}$; г) $\sqrt{0,16 \cdot 49}$; д) $\sqrt{0,16 \cdot 0,09}$.

717. а) $\sqrt{\frac{16}{25}}$; б) $\sqrt{\frac{9}{144}}$; в) $\sqrt{\frac{121}{144}}$; г) $\sqrt{\frac{0,04}{0,49}}$.

718. а) $\sqrt{2\frac{1}{4}}$; б) $\sqrt{2\frac{7}{9}}$; в) $\sqrt{3\frac{6}{25}}$; г) $\sqrt{11\frac{1}{9}}$.

719. а) $\sqrt{8 \cdot 50}$; в) $\sqrt{20 \cdot 45}$; г) $\sqrt{72 \cdot 72}$; е) $\sqrt{2,5 \cdot 6,4}$;
 б) $\sqrt{40 \cdot 90}$; г) $\sqrt{7 \cdot 63}$; д) $\sqrt{18 \cdot 98}$; е) $\sqrt{9,8 \cdot 7,2}$.

720. а) $\sqrt{10 \cdot 490}$; в) $\sqrt{7 \cdot 700}$; г) $\sqrt{72 \cdot 32}$; е) $\sqrt{1,6 \cdot 90}$;
 б) $\sqrt{360 \cdot 40}$; г) $\sqrt{12 \cdot 48}$; д) $\sqrt{80 \cdot 45}$; е) $\sqrt{6,4 \cdot 250}$.

721. а) $\sqrt{4 \cdot 9 \cdot 25}$; в) $\sqrt{144 \cdot 36 \cdot 25 \cdot 9}$; г) $\sqrt{25 \cdot 16 \cdot 81}$;
 б) $\sqrt{36 \cdot 225 \cdot 144}$; г) $\sqrt{64 \cdot 100 \cdot 9}$; д) $\sqrt{1,69 \cdot 0,0001 \cdot 0,16}$.

722. а) $\sqrt{2\frac{7}{9} \cdot \frac{1}{4}}$; в) $\sqrt{12\frac{1}{4} \cdot 10\frac{6}{25}}$; г) $\sqrt{\frac{8 \cdot 50 \cdot 49}{27 \cdot 81 \cdot 3}}$;
 б) $\sqrt{5\frac{1}{16} \cdot 9}$; г) $\sqrt{\frac{9}{4} \cdot \frac{25}{49} \cdot \frac{81}{121}}$; д) $\sqrt{\frac{16}{25} \cdot \frac{49}{36} \cdot \frac{64}{81}}$.

Обчисліть значення добутку (723–727).

723. а) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{32}$; г) $\sqrt{11} \cdot \sqrt{44}$; е) $\sqrt{200} \cdot \sqrt{0,18}$;
 б) $\sqrt{14} \cdot \sqrt{56}$; г) $\sqrt{15} \cdot \sqrt{60}$; е) $\sqrt{12,5} \cdot \sqrt{24,5}$;
 в) $\sqrt{75} \cdot \sqrt{3}$; д) $\sqrt{135} \cdot \sqrt{15}$; ж) $\sqrt{3,2} \cdot \sqrt{80}$.

724. а) $\sqrt{50} \cdot \sqrt{8}$; г) $\sqrt{11} \cdot \sqrt{99}$; е) $\sqrt{1,2} \cdot \sqrt{120}$;
 б) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$; г) $\sqrt{37} \cdot \sqrt{3700}$; е) $\sqrt{40} \cdot \sqrt{62,5}$;
 в) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{242}$; д) $\sqrt{444} \cdot \sqrt{111}$; ж) $\sqrt{1,44} \cdot \sqrt{0,49}$.

725. а) $\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{6}{25}}$; б) $\sqrt{\frac{5}{9}} \cdot \sqrt{5}$; в) $\sqrt{\frac{3}{8}} \cdot \sqrt{6}$.

726. а) $\sqrt{41} \cdot \sqrt{\frac{1}{41}}$; б) $\sqrt{3\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{1\frac{1}{5}}$; в) $\sqrt{3\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{8}{7}}$.

727. а) $\sqrt{1\frac{4}{9}} \cdot \sqrt{1\frac{3}{13}}$; б) $\sqrt{1\frac{1}{16}} \cdot \sqrt{1\frac{8}{7}}$; в) $\sqrt{3\frac{1}{5}} \cdot \sqrt{1\frac{1}{4}}$.

728. Користуючись таблицею квадратів, обчисліть:

а) $\sqrt{202\ 500}$; в) $\sqrt{33,64}$; г) $2\sqrt{230\ 400}$;
 б) $\sqrt{4\ 840\ 000}$; г) $-\sqrt{152\ 100}$; д) $\frac{1}{2}\sqrt{7\ 290\ 000}$.

Знайдіть значення частки (729–730).

729. а) $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{50}}$; б) $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{112}}$; в) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{108}}$; г) $\frac{\sqrt{52}}{\sqrt{13}}$.

730. а) $\frac{\sqrt{2,5}}{\sqrt{90}}$; б) $\frac{\sqrt{96}}{\sqrt{1,5}}$; в) $\frac{\sqrt{4,8}}{\sqrt{0,3}}$; г) $\frac{\sqrt{2,7}}{\sqrt{4,8}}$.

Обчисліть значення виразу (731–734).

731. а) $\sqrt{3^4}$; в) $\sqrt{0,2^6}$; г) $5 \cdot \sqrt{12^2}$; е) $-0,4 \cdot \sqrt{(-10)^6}$;

б) $\sqrt{975^2}$; г) $\sqrt{1,2^4}$; д) $3 \cdot \sqrt{(-2)^8}$; е) $-0,1 \cdot \sqrt{3^6}$.

732. а) $3 \cdot \sqrt{5^2}$; в) $4\sqrt{0,1^4}$; г) $\sqrt{(-5)^2}$; е) $-\sqrt{(-7)^2}$;

б) $-\sqrt{4^4}$; г) $-8\sqrt{0,2^4}$; д) $\sqrt{(-3)^2}$; е) $-2\sqrt{(-4)^2}$.

733. а) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{50}$; б) $\sqrt{15} \cdot \sqrt{135} - \sqrt{24} \cdot \sqrt{6}$.

734. а) $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{8}} + \sqrt{\frac{3}{8}} \cdot \sqrt{\frac{2}{27}}$; б) $\sqrt{2,5} \cdot \sqrt{9} - \sqrt{0,1} \cdot \sqrt{4}$.

Обчисліть найраціональнішим способом (735–737).

735. а) $\sqrt{20^2 - 16^2}$; в) $\sqrt{17^2 - 8^2}$; г) $\sqrt{41^2 - 40^2}$;

б) $\sqrt{29^2 - 20^2}$; г) $\sqrt{25^2 - 24^2}$; д) $\sqrt{50,5^2 - 49,5^2}$.

736. а) $\sqrt{100^2 - 96^2}$; в) $\sqrt{37^2 - 12^2}$; г) $\sqrt{13^2 - 6,6^2}$;

б) $\sqrt{61^2 - 60^2}$; г) $\sqrt{6,8^2 - 3,2^2}$; д) $\sqrt{3,73^2 - 2,52^2}$.

737. а) $\sqrt{660^2 + 880^2}$; б) $\sqrt{333^2 + 444^2}$; в) $\sqrt{666^2 + 888^2}$.

738. Гіпотенуза і катет прямокутного трикутника дорівнюють c і a .

Знайдіть другий катет, якщо:

а) $c = 13$ см, $a = 12$ см; в) $c = 21,8$ дм, $a = 18,2$ дм;

б) $c = 8,2$ м, $a = 1,8$ м; г) $c = 45,8$ км, $a = 44,2$ км.

Рівень Б

739. Обчисліть, розкладавши підкореневий вираз на множники:

а) $\sqrt{640\,000}$; в) $\sqrt{20\,736}$; г) $\sqrt{30\,976}$; е) $\sqrt{213\,444}$;

б) $\sqrt{6\,250\,000}$; г) $\sqrt{50\,625}$; д) $\sqrt{86\,436}$; е) $\sqrt{104\,976}$.

Обчисліть значення виразу (740–741).

740. а) $\sqrt{12 \cdot 27}$; в) $\sqrt{297 \cdot 33}$; г) $\sqrt{250 \cdot 160}$; е) $\sqrt{243 \cdot 108}$;

б) $\sqrt{80 \cdot 45}$; г) $\sqrt{48 \cdot 768}$; д) $\sqrt{600 \cdot 150}$; е) $\sqrt{125 \cdot 245}$.

741. а) $\sqrt{\frac{2}{5}} \cdot \sqrt{6 \frac{2}{3}}$; в) $\sqrt{\frac{2}{5}} \cdot \sqrt{12} \cdot \sqrt{1 \frac{1}{5}}$; г) $\sqrt{\frac{4}{15}} \cdot \sqrt{1 \frac{7}{8}} \cdot \sqrt{2 \frac{13}{18}}$;

б) $\sqrt{4 \frac{9}{24}} \cdot \sqrt{1 \frac{23}{40}}$; г) $\sqrt{3 \frac{5}{7}} \cdot \sqrt{13} \cdot \sqrt{\frac{9}{14}}$; д) $\sqrt{10 \frac{5}{7}} \cdot \sqrt{\frac{8}{11}} \cdot \sqrt{1 \frac{1}{21}}$.

742. При яких значеннях змінної правильна рівність:

а) $\sqrt{a^4} = a^2$; б) $\sqrt{a^6} = a^3$; в) $\sqrt{a^4} = a\sqrt{a^2}$?

743. Замініть вираз тотожно рівним йому, користуючись знаком модуля:

а) $(\sqrt{x})^2$; б) $5\sqrt{a^2}$; в) $b\sqrt{b^2}$; г) $-\sqrt{m^2}$.

744. При яких значеннях змінної правильна рівність:

а) $\sqrt{x^2} = x$; б) $(\sqrt{a})^2 = a$; в) $m\sqrt{m^2} = m^2$?

745. Спростіть вираз:

а) $\sqrt{9n^2}$, якщо $n < 0$; б) $x\sqrt{x^2}$, якщо $x < 0$.

746. Замініть вираз тотожно рівним:

а) $(\sqrt{a-1})^2$; б) $\sqrt{(a-1)^2}$; в) $-\sqrt{(a-1)^2}$.

747. Спростіть вираз:

а) $\sqrt{(-x)^2}$, якщо $x > 0$; в) $\sqrt{(a-b)^2}$, якщо $a < b$;
б) $\sqrt{(x-1)^2}$, якщо $x < 1$; г) $\sqrt{(a-b)^2}$, якщо $a > b$.

748. Знайдіть значення виразу:

а) $\sqrt{4m^2}$, якщо $m = -3$; в) $\sqrt{\left(\frac{a}{a-1}\right)^4}$, якщо $a = 2$;
б) $\sqrt{(-4m)^2}$, якщо $m = -3$; г) $\sqrt{\left(\frac{a}{1-a}\right)^4}$, якщо $a = 2$.

749. Знайдіть значення виразу $\sqrt{b^2 - 4ac}$:

- а) якщо $a = 3$, $b = 5$, $c = -2$;
б) якщо $a = 100$, $b = 160$, $c = 63$.

750. Знайдіть значення виразу:

а) $\sqrt{c^2}$, якщо $c = 3$, $c = -6$, $c = -12$;
б) $x\sqrt{x^2}$, якщо $x = 5$, $x = -5$, $x = -7$.

751. Спростіть вираз, якщо a , b , c — додатні числа:

а) $\sqrt{9a^4b^2c^6}$; в) $-\sqrt{16a^4b^4c^6}$;
б) $\sqrt{0,25a^2b^6c^{10}}$; г) $-\sqrt{2,25a^2b^2c^8}$.

752. Спростіть вираз, якщо x , y , z — від'ємні числа:

а) $\sqrt{x^2y^2z^2}$; в) $-\sqrt{4x^2y^2z^2}$;
б) $\sqrt{x^2y^2z^4}$; г) $-\sqrt{0,81x^4y^4z^2}$.

753. Спростіть вираз:

а) $\sqrt{a^2 + 2ab + b^2}$; б) $\sqrt{(a+1)^2(a^2+1)^2}$; в) $\sqrt{(2n-1)^2(n^4+1)^2}$.

754. Обчисліть:

а) $\sqrt{(1-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$; в) $\sqrt{(\sqrt{17}-3)^2} + \sqrt{(12-\sqrt{17})^2}$;
 б) $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} - \sqrt{(\sqrt{5}+3)^2}$; г) $\sqrt{(\sqrt{11}-4)^2} + \sqrt{(3-\sqrt{11})^2}$.

755*. Спростіть вираз:

а) $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$; в) $\sqrt{21-8\sqrt{5}}$; г) $\sqrt{17-12\sqrt{2}}$;
 б) $\sqrt{7+2\sqrt{6}}$; г) $\sqrt{31+12\sqrt{3}}$; д) $\sqrt{67+12\sqrt{7}}$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

756. Замініть «зірочки» одночленом, щоб утворилася тотожність:

а) $(* + 2a)^2 = * + 8ab + 4b^2$; в) $(4a^2 + *)^2 = * + * + b^6$;
 б) $(3x - *)^2 = 25y^2 + * - 30xy$; г) $(* - 6b)^2 = * - 60a4b + *$.

757. Розкладіть на множники:

а) $-1 + 4a - 4a^2$; в) $2xy - 0,01x^2y^2 - 100$;
 б) $0,36x^2 + 25y^2 - 6xy$; г) $2ab - 25a^2b^2 - 0,04$.

758. Подаїть у вигляді добутку:

а) $x^{2n} - 1$; б) $a^{4p} - 4$; в) $9x^{2n+2} - y^{6n}$; г) $a^{4m-2} - 49b^2m^{-4}$.

759. *Відкрита задача.* Добова потреба у вітаміні С дорослої людини 70–100 мг, а дитини — 50–60 мг. Дізнайтесь про вміст вітаміну С у різних овочах і фруктах і складіть план поповнення цього вітаміну, доступний для вашої родини, на тиждень: а) узимку; б) навесні. Врахуйте втрати вітаміну під час кулінарної обробки.

СКАРБНИЧКА ДОСЯГНЕНЬ

✓ Розумію та можу сформулювати властивості арифметичного квадратного кореня:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}, \quad a \geq 0, \quad b \geq 0;$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \quad a \geq 0, \quad b > 0;$$

$$\sqrt{a^{2k}} = a^k, \quad a \geq 0.$$

✓ Умію застосовувати властивості арифметичного квадратного кореня до обчислення значень виразів та виконання дій.

Використовуємо набуті компетентності

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:

- Означення арифметичного квадратного кореня із числа (с. 135).
- Властивості арифметичного квадратного кореня (с. 153).

§ 17 | Перетворення виразів з коренями

Вирази, що містять квадратні корені, можна додавати, віднімати, множити, підносити до степеня і ділити (на дільник, відмінний від 0).

Приклади.

$$\begin{aligned} 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} &= 7\sqrt{3}; & 12\sqrt{6} : 3\sqrt{6} &= \frac{12\sqrt{6}}{3\sqrt{6}} = 4; \\ 4\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{2} &= 12\sqrt{10}; & (3\sqrt{2})^2 &= 3\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 18. \end{aligned}$$

Розглянемо ще деякі перетворення виразів із коренями.

$$\sqrt{200} = \sqrt{100 \cdot 2} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{2} = 10\sqrt{2}.$$

Таке перетворення називають *винесенням множника з-під знака кореня*. В останньому прикладі з-під знака кореня винесено множник 10.

Перетворення, обернене до винесення множника з-під знака кореня, називають *внесенням множника під знак кореня*.

$$0,3\sqrt{10} = \sqrt{0,09} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{0,09 \cdot 10} = \sqrt{0,9}.$$

У цьому прикладі під знак кореня внесено множник 0,3. Розглянуті перетворення здійснюються на основі теореми про корінь з добутку.

Якщо знак кореня міститься в знаменнику дробу, то такий дріб можна замінити тотожним йому дробом, знаменник якого не містить коренів. Досить домножити члени дробу на відповідно підібраний вираз. Наприклад,

$$\begin{aligned} \frac{3}{\sqrt{2}} &= \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}; \\ \frac{1}{2-\sqrt{3}} &= \frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \frac{2+\sqrt{3}}{2^2 - (\sqrt{3})^2} = 2 + \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Такі перетворення називають *звільненням дробу від ірраціональності в знаменнику*.

Наведені перетворення можна виконувати і над виразами зі змінними. Наприклад,

$$\begin{aligned} a\sqrt{2} \cdot x\sqrt{3} &= ax\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}ax; \\ \sqrt{9a} &= \sqrt{9} \cdot \sqrt{a} = 3\sqrt{a}; \\ 2\sqrt{\frac{x}{2}} &= \sqrt{4 \cdot \frac{x}{2}} = \sqrt{2x}; \\ \frac{x}{a-\sqrt{x}} &= \frac{x(a+\sqrt{x})}{(a-\sqrt{x})(a+\sqrt{x})} = \frac{x(a+\sqrt{x})}{a^2-x}. \end{aligned}$$

Зауваження. Виносячи з-під знака кореня змінну, слід пам'ятати, що рівність $\sqrt{a^2c} = a\sqrt{c}$ правильна тільки при невід'ємних значеннях a і c . Якщо $a < 0$, $c \geq 0$, то $\sqrt{a^2c} = -a\sqrt{c}$.

При будь-яких дійсних значеннях a і невід'ємних c правильною є тотожність:

$$\boxed{\sqrt{a^2c} = |a| \cdot \sqrt{c}.}$$

Приклад. Внесіть множник з-під знака кореня:

$$\text{а) } \sqrt{16a^2c^4d^3}, \quad a > 0, \quad d > 0; \quad \text{б) } \sqrt{50x^6y}, \quad x < 0, \quad y > 0.$$

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \text{а) } \sqrt{16a^2c^4d^3} &= 4|a| \cdot c^2 \cdot |d| \cdot \sqrt{d} = 4ac^2d\sqrt{d}; \\ \text{б) } \sqrt{50x^6y} &= 5|x^3|\sqrt{2y} = -5x^3\sqrt{2y}. \end{aligned}$$

Відповідь. а) $4ac^2d\sqrt{d}$; б) $-5x^3\sqrt{2y}$.

Вносячи змінну під знак кореня, слід пам'ятати, що під знак кореня можна вносити лише додатні числа.

Приклад. Внесіть множник під знак кореня:

$$\text{а) } 2a\sqrt{3ab^2}, \quad a \geq 0; \quad \text{б) } mn^2\sqrt{5mn}, \quad m < 0, \quad n < 0.$$

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \text{а) } 2a\sqrt{3ab^2} &= \sqrt{(2a)^2 \cdot 3ab^2} = \sqrt{12a^3b^2}; \\ \text{б) } mn^2\sqrt{5mn} &= -(-m) \cdot n^2\sqrt{5mn} = -\sqrt{((-m) \cdot n^2)^2 \cdot 5mn} = \\ &= -\sqrt{m^2n^4 \cdot 5mn} = -\sqrt{5m^3n^5}. \end{aligned}$$

Відповідь. а) $\sqrt{12a^3b^2}$; б) $-\sqrt{5m^3n^5}$.

ХОЧЕТЕ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Вживаючи словосполучення «вирази з коренями», у цьому розділі ми маємо на увазі тільки «вирази з арифметичними квадратними коренями». Насправді вирази з коренями в математиці мають ширший зміст. Бо корені бувають не тільки квадратні, а й кубічні четвертого, п'ятого, ..., n -го степенів. Корені із числа a таких степенів позначають символами:

$$\sqrt{a}, \sqrt[3]{a}, \sqrt[4]{a}, \dots, \sqrt[n]{a}.$$

Вирази, що містять будь-які з таких коренів, називають виразами з коренями. Вирази з арифметичними квадратними коренями — це тільки частина ірраціональних виразів (мал. 45).

Раніше знаки коренів \sqrt{a} , $\sqrt[3]{a}$, ..., $\sqrt[n]{a}$ називали *радикалами*, тому в деяких публікаціях дотепер ірраціональні вирази називають виразами з радикалами.



Мал. 45

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

- Які дії можна виконувати над виразами з коренями?
- Чи можна перетворювати вирази з коренями за формулами скороченого множення?
- Наведіть приклади винесення множника з-під знака кореня.
- Покажіть на прикладах, як можна вносити множник під знак кореня.
- Як можна позбутися ірраціональності в знаменнику дробу?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ

- 1** Спростіть вираз:

а) $\sqrt{50} - \sqrt{18}$; б) $(\sqrt{17} - 1)(\sqrt{17} + 1)$; в) $(\sqrt{5} + 2)^2 - 4\sqrt{5}$.

● Розв'язання.

а) $\sqrt{50} - \sqrt{18} = \sqrt{25 \cdot 2} - \sqrt{9 \cdot 2} = 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$;

б) $(\sqrt{17} - 1)(\sqrt{17} + 1) = (\sqrt{17})^2 - 1 = 17 - 1 = 16$;

в) $(\sqrt{5} + 2)^2 - 4\sqrt{5} = (\sqrt{5})^2 + 2\sqrt{5} \cdot 2 + 4 - 4\sqrt{5} = 9$.

Відповідь. а) $2\sqrt{2}$; б) 16; в) 9.

2 Розкладіть на множники вираз:

а) $\sqrt{28} - \sqrt{2}$; б) $n + \sqrt{n}$; в) $a - 1$, якщо $a > 1$.

● **Розв'язання.**

а) $\sqrt{28} - \sqrt{2} = \sqrt{2 \cdot 14} - \sqrt{2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{14} - \sqrt{2} = \sqrt{2}(\sqrt{14} - 1)$;

б) $n + \sqrt{n} = \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} + \sqrt{n} = \sqrt{n}(\sqrt{n} + 1)$;

в) якщо a — число додатне, то $a = (\sqrt{a})^2$. Тому

$$a - 1 = (\sqrt{a})^2 - 1 = (\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} + 1).$$

Відповідь. а) $\sqrt{2}(\sqrt{14} - 1)$; б) $\sqrt{n}(\sqrt{n} + 1)$; в) $(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} + 1)$.

3 Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

а) $\frac{4}{\sqrt{6}}$; б) $\frac{c}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$.

● **Розв'язання.**

а) $\frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{4 \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{4\sqrt{6}}{6} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$;

б) $\frac{c}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{c(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} = \frac{c(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{a - b}$.

Відповідь. а) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$; б) $\frac{c(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{a - b}$.

«Математика володіє не тільки істинною, а й найвищою красою».

Б. Рассел

Виконайте усно

760. Спростіть вираз:

а) $2\sqrt{5} + 7\sqrt{5}$; б) $8\sqrt{3} - 4\sqrt{3}$; в) $13 - 3\sqrt{13}$.

761. Знайдіть суму, різницю, добуток і частку чисел:

а) $6\sqrt{2}$ і $3\sqrt{2}$; б) $-10\sqrt{3}$ і $5\sqrt{3}$.

762. Знайдіть квадрат числа:

а) $\sqrt{23}$; б) $3\sqrt{2}$; в) $-\sqrt{0,4}$.

763. Піднесіть до квадрата вираз:

а) $\sqrt{7}$; б) $\sqrt{8}$; в) $-\sqrt{31}$; г) $-0,1\sqrt{0,1}$.

764. Винесіть множник з-під знака кореня:

а) $\sqrt{12}$; б) $\sqrt{18}$; в) $\sqrt{32}$; г) $\sqrt{98}$; г) $\sqrt{500}$.

765. Внесіть множник під знак кореня:

- а) $5\sqrt{3}$; б) $6\sqrt{6}$; в) $-3\sqrt{2}$; г) $7\sqrt{10}$.

РІВЕНЬ А

Внесіть множник з-під знака кореня (766–768).

- 766.** а) $\sqrt{250}$; в) $\sqrt{5000}$; г) $\sqrt{6000}$; е) $-\sqrt{7500}$;
б) $\sqrt{490}$; г) $\sqrt{1600}$; д) $-\sqrt{7200}$; е) $\sqrt{17500}$.

- 767.** а) $\sqrt{242}$; в) $\sqrt{484}$; г) $\sqrt{605}$; е) $\sqrt{720}$;
б) $\sqrt{363}$; г) $\sqrt{847}$; д) $\sqrt{882}$; е) $\sqrt{2178}$.

- 768.** а) $\sqrt{2,5}$; б) $\sqrt{12,1}$; в) $\sqrt{6,75}$; г) $\sqrt{28,88}$.

Внесіть множник під знак кореня (769–773).

- 769.** а) $2\sqrt{3}$; в) $12\sqrt{2}$; г) $0,1\sqrt{10}$; е) $1,2\sqrt{0,1}$.
б) $3\sqrt{10}$; г) $2\sqrt{21}$; д) $0,2\sqrt{5}$;

- 770.** а) $11\sqrt{11}$; в) $10\sqrt{7}$; г) $1,5\sqrt{2}$;
б) $5\sqrt{3}$; г) $0,1\sqrt{0,1}$; д) $2,5\sqrt{10}$.

- 771.** а) $0,3\sqrt{10}$; в) $0,04\sqrt{65}$; г) $0,2\sqrt{0,5}$;
б) $0,2\sqrt{35}$; г) $0,5\sqrt{0,2}$; д) $\sqrt{1,2} \cdot 1,5$.

- 772.** а) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}$; в) $1\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{33}}$; г) $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}$;
б) $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$; г) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$; д) $\frac{3}{5}\sqrt{\frac{3}{5}}$.

- 773.** а) $1\frac{1}{5}\sqrt{2\frac{1}{2}}$; в) $2\frac{1}{4}\sqrt{5\frac{1}{3}}$; г) $3\frac{2}{5}\sqrt{\frac{5}{17}}$.

774. Відкрита задача. Дайте відповіді на запитання, наведені на малюнку 46. Спробуйте зробити узагальнення.

Що більше:
16 чи $\sqrt{16}$,
400 чи $\sqrt{400}$?

Що більше:
0,25 чи $\sqrt{0,25}$,
0,64 чи $\sqrt{0,64}$?

Що більше:
 a чи \sqrt{a} ?



Мал. 46

Порівняйте значення виразів (775–777).

775. а) $2\sqrt{3}$ і $\sqrt{15}$; б) $3\sqrt{2}$ і $\sqrt{17}$; в) $\sqrt{26}$ і $3\sqrt{3}$.

776. а) $3\sqrt{5}$ і $5\sqrt{3}$; в) $1,5\sqrt{1,1}$ і $1,3\sqrt{1,2}$;
б) $4\sqrt{10}$ і $10\sqrt{2}$; г) $3\sqrt{7}$ і $6\sqrt{2}$.

777. а) $\frac{2}{3}\sqrt{27}$ і $7\sqrt{\frac{2}{3}}$; б) $0,2\sqrt{150}$ і $\frac{1}{3}\sqrt{54}$.

Виконайте дії (778–783).

778. а) $(\sqrt{12} + \sqrt{75}) \cdot \sqrt{3}$; в) $(4\sqrt{3} - \sqrt{24}) \cdot \sqrt{12}$;
б) $(\sqrt{18} - \sqrt{50}) \cdot \sqrt{2}$; г) $(2\sqrt{18} + \sqrt{12}) \cdot \sqrt{8}$.

779. а) $(\sqrt{20} + \sqrt{45}) \cdot \sqrt{5}$; в) $(7\sqrt{3} + 5\sqrt{2}) \cdot \sqrt{6}$;
б) $(\sqrt{63} - \sqrt{28}) \cdot \sqrt{7}$; г) $(5\sqrt{12} - 3\sqrt{3}) \cdot 2\sqrt{3}$.

780. а) $(\sqrt{7} - 2)(\sqrt{7} + 3)$; в) $(3 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5})$;
б) $(2 - \sqrt{3})(5 - 2\sqrt{3})$; г) $(\sqrt{7} - 2)(\sqrt{7} + 2)$.

781. а) $(2 - \sqrt{3})(4 + 2\sqrt{3})$; в) $(2\sqrt{3} + 1)(2\sqrt{3} - 1)$;
б) $(6 - 3\sqrt{2})(2 - \sqrt{2})$; г) $(4 + 3\sqrt{7})(3\sqrt{7} - 4)$.

782. а) $(1 + \sqrt{3})^2$; в) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 - 2\sqrt{6}$;
б) $(3 - \sqrt{5})^2$; г) $(\sqrt{5} - \sqrt{2})^2 + 2\sqrt{10}$.

783. а) $(2\sqrt{3} - \sqrt{5})^2$; в) $(\sqrt{5} - 1)^2 + \sqrt{20}$;
б) $(3\sqrt{2} + 5\sqrt{3})^2$; г) $(1 + \sqrt{3})^2 - \sqrt{12}$.

784. Внесіть множник з-під знака кореня, якщо $a > 0$:

а) $\sqrt{2a^2}$; б) $\sqrt{12a^2}$; в) $3\sqrt{a^3}$; г) $\sqrt{8a^4}$.

785. Внесіть множник з-під знака кореня, якщо $x > 0, y > 0$:

а) $\sqrt{3x^2}$; б) $\sqrt{7y^4}$; в) $\sqrt{2x^3}$; г) $\sqrt{9x^5}$.

786. Внесіть множник під знак кореня, якщо $x > 0$:

а) $2x\sqrt{3}$; б) $x\sqrt{2x}$; в) $x^2\sqrt{5}$; г) $3x^3\sqrt{x}$.

787. Внесіть множник під знак кореня, якщо $x > 0, y > 0$:

а) $x\sqrt{2}$; б) $y\sqrt{3}$; в) $2x^2\sqrt{x}$; г) $3y\sqrt{x}$.

Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу (788–791).

788. а) $\frac{x}{\sqrt{5}}$; б) $\frac{3}{\sqrt{a}}$; в) $\frac{7}{3\sqrt{2}}$; г) $\frac{6}{5\sqrt{12}}$.

789. а) $\frac{a}{\sqrt{3}}$; б) $\frac{1}{\sqrt{x}}$; в) $\frac{a}{\sqrt{b}}$; г) $\frac{3}{2\sqrt{5}}$.

790. а) $\frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$; б) $\frac{c}{1-\sqrt{3}}$; в) $\frac{1}{\sqrt{2}+x}$; г) $\frac{x}{1-\sqrt{x}}$.

791. а) $\frac{m}{1-\sqrt{5}}$; б) $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$; в) $\frac{a}{1+\sqrt{c}}$; г) $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$.

РІВЕНЬ Б

Порівняйте значення виразів (792–793).

792. а) $-3\sqrt{10}$ і $2\sqrt{22}$; б) $-1,5\sqrt{10}$ і $-2\sqrt{5}$.

793. а) $-1,5\sqrt{2}$ і $-2\sqrt{1,1}$; б) $-0,2\sqrt{0,1}$ і $-0,1\sqrt{0,2}$.

794. Що більше:

а) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{235}\cdot\sqrt{6}$ чи $\sqrt{3}\cdot\sqrt{237}\cdot\sqrt{10}$;

б) $\sqrt{0,2}\cdot\sqrt{0,03}\cdot\sqrt{0,006}$ чи $\sqrt{0,3}\cdot\sqrt{0,06}\cdot\sqrt{0,002}$?

795. Що більше: сума десяти доданків $\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2}+\dots+\sqrt{2}$ чи добуток десяти множників $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\dots\cdot\sqrt{2}$?

Виконайте дії (796–799).

796. а) $\sqrt{48}-\sqrt{300}+\sqrt{75}$; в) $\sqrt{200}+\sqrt{8}-\sqrt{32}$;

б) $\sqrt{72}\cdot\sqrt{50}+2\sqrt{18}$; г) $3\sqrt{8}+\sqrt{98}-\sqrt{2}$.

797. а) $\sqrt{12}-\sqrt{75}+\sqrt{48}$;

б) $\sqrt{150}-\sqrt{54}+\sqrt{24}$;

в) $\sqrt{2}\cdot(\sqrt{50}+\sqrt{32})$;

г) $2\sqrt{10}\cdot(\sqrt{45}-\sqrt{80})$.

798. а) $(\sqrt{30}+\sqrt{24})\cdot\sqrt{6}$;

в) $(\sqrt{125}-2\sqrt{5})\cdot\sqrt{10}+\sqrt{32}$;

б) $(\sqrt{60}-\sqrt{15})\cdot\sqrt{15}$;

г) $(7\sqrt{3}+\sqrt{6})\cdot\sqrt{6}-\sqrt{800}$.

799. а) $(\sqrt{45}-\sqrt{20})\cdot\sqrt{5}$;

в) $\frac{3\sqrt{28}+2\sqrt{175}}{2\sqrt{112}}$;

б) $(\sqrt{28}+\sqrt{63})\cdot\sqrt{7}$;

г) $\frac{7\sqrt{108}-\sqrt{12}}{2\sqrt{75}}$.

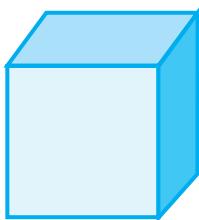
Обчисліть (800–801).

800. а) $(3\sqrt{32}+\sqrt{162}-2\sqrt{288})\cdot\sqrt{2}+15$; б) $(4\sqrt{12}-6\sqrt{48}+5\sqrt{27})\cdot\sqrt{3}-12$.

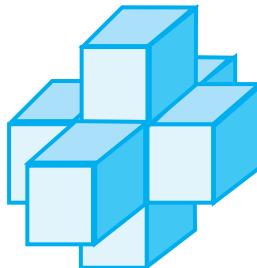
801. а) $(2\sqrt{320} - 7\sqrt{20} - \sqrt{45})^2 + 20$; б) $(4\sqrt{150} - 6\sqrt{54} + 2\sqrt{96})^2 - 20$.

802. Площа поверхні куба дорівнює $37,5 \text{ дм}^2$ (мал. 47). Знайдіть довжину його ребра.

803. Площа поверхні тіла, складеного із семи рівних кубів (мал. 48), дорівнює 480 см^2 . Знайдіть довжину ребра такого куба.



Мал. 47



Мал. 48

804. Внесіть множник з-під знака кореня, якщо $x < 0$:

а) $\sqrt{2x^2}$; б) $\sqrt{20x^4}$; в) $\frac{2}{x}\sqrt{x^2c}$; г) $\sqrt{x^6m}$.

805. Внесіть множник з-під знака кореня, якщо $a < 0, c < 0$:

а) $\sqrt{12a^4}$; в) $-\sqrt{-18a^7}$; г) $\sqrt{-48a^{11}c^2}$; е) $\sqrt{\frac{20a^4}{-9c}}$;
б) $\sqrt{3c^{10}}$; г) $-\sqrt{32c^8}$; д) $\sqrt{60a^7c^9}$; е) $\sqrt{\frac{27a^{16}}{16c^6}}$.

806. Внесіть множник під знак кореня, якщо $c < 0$:

а) $c\sqrt{a}$; б) $c^2\sqrt{a}$; в) $c^3\sqrt{x}$; г) $c^4\sqrt{p}$.

807. Внесіть множник під знак кореня, якщо $m < 0$:

а) $m\sqrt{m^2}$; б) $2m\sqrt{\frac{1}{m^2}}$; в) $m^2\sqrt{\frac{3}{m^4}}$; г) $m^3\sqrt{\frac{1}{m^8}}$.

Спростіть вираз (808–816).

808. а) $2\sqrt{a} + 3\sqrt{a} - 4\sqrt{a}$; б) $2\sqrt{x} + y\sqrt{x} - \sqrt{4x}$.

809. а) $\sqrt{25a} - \sqrt{64a} + \sqrt{9a}$; б) $9\sqrt{p} - \sqrt{9p} + \sqrt{16p}$.

810. а) $2\sqrt{20x} - \sqrt{5x} - \sqrt{45x}$; б) $\sqrt{18p} - \sqrt{8p} + \sqrt{81}$.

811. а) $(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} + 2)$; б) $(\sqrt{x} + 2)(3 + \sqrt{x})$.

812. а) $\sqrt{a}(\sqrt{a} - 2) + 2\sqrt{a}$; б) $(3 - 2\sqrt{x})\sqrt{x} - 3\sqrt{x}$.

813. а) $(-b + \sqrt{x})(-b - \sqrt{x})$;

б) $(b - \sqrt{b^2 - 4ac})(b + \sqrt{b^2 - 4ac})$.

814. а) $\sqrt{a}(\sqrt{a} - \sqrt{x}) + \sqrt{ax}$;

б) $\sqrt{xy} - \sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{y})$.

815. а) $(a - b)(\sqrt{a} - \sqrt{b})$;

б) $(x - y)(\sqrt{x} + \sqrt{y})$.

816. а) $(4a^2 - x)(2a - \sqrt{x})$;

б) $(x^4 - 9z)(x^2 + 3\sqrt{z})$.

Розкладіть на множники вираз (817–819).

817. а) $\sqrt{35} - \sqrt{5}$; б) $\sqrt{35} - \sqrt{7}$; в) $7 - \sqrt{7}$.

818. а) $a + \sqrt{a}$; б) $x\sqrt{y} - \sqrt{x}$; в) $a\sqrt{c} - c\sqrt{a}$.

819. а) $a^2 - c$; б) $a - c$; в) $x - 2$.

Скоротіть дріб (820–822).

820. а) $\frac{\sqrt{a}-1}{a-1}$; б) $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{z}}{x-z}$; в) $\frac{a+\sqrt{2}}{a^2-2}$.

821. а) $\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}+a}$; б) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{a\sqrt{x}+x\sqrt{a}}$; в) $\frac{a+2\sqrt{a}+1}{a-1}$.

822. а) $\frac{x-6\sqrt{x}+9}{x-9}$; б) $\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2+\sqrt{3}}$; в) $\frac{(\sqrt{7}-1)^2}{\sqrt{7}-4}$.

Звільніть від ірраціональності знаменник дробу (823–825).

823. а) $\frac{2a}{\sqrt{2ax}}$; б) $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$; в) $\frac{a}{\sqrt{a}-\sqrt{c}}$; г) $\frac{3}{\sqrt{11}+\sqrt{2}}$.

824. а) $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$; б) $\frac{a+1}{\sqrt{a+3}-2}$; в) $\frac{x}{\sqrt{1-x}-\sqrt{1-2x}}$; г) $\frac{10}{\sqrt{6}+1}$.

825. а) $\frac{5}{\sqrt{x}+3}$; б) $\frac{a}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}$; в) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$; г) $\frac{\sqrt{12}-\sqrt{8}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

826. Доведіть, що:

а) $\left(\sqrt{5+\sqrt{24}} + \sqrt{5-\sqrt{24}}\right)^2 = 12$; б) $\left(\sqrt{6+\sqrt{20}} - \sqrt{6-\sqrt{20}}\right)^2 = 4$.

827. Порівняйте числа:

а) $\sqrt{7} + \sqrt{3}$ і $\sqrt{19}$; в) $\sqrt{3} + \sqrt{19}$ і $\sqrt{7} + \sqrt{10}$;

б) $6 - \sqrt{15}$ і $\sqrt{37} - \sqrt{14}$; г) $\sqrt{7} - \sqrt{5}$ і $\sqrt{17} - \sqrt{15}$.

828. Що більше: $\sqrt{2017} - \sqrt{2015}$ чи $\sqrt{2018} - \sqrt{2016}$?

829. Знайдіть суму, різницю, добуток і частку виразів:

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ і } \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

830. Спростіть вираз:

$$\text{а)} \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \right) \cdot \frac{(b-a)^2}{\sqrt{ab}}; \quad \text{б)} \left(\frac{1}{x+x\sqrt{y}} + \frac{1}{x-x\sqrt{y}} \right) : \frac{2}{y-1}.$$

831*. Задача індійського математика А. Бхаскари (1114–1185).

Доведіть рівності:

$$\text{а)} \sqrt{5+\sqrt{24}} = \sqrt{2} + \sqrt{3};$$

$$\text{б)} \frac{\sqrt{9} + \sqrt{54} + \sqrt{450} + \sqrt{75}}{5 + \sqrt{3}} = 3\sqrt{2} + \sqrt{3};$$

$$\text{в)} \sqrt{10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}.$$

832*. Задача французького математика

Ж. Л. Ф. Бер特朗а (1822–1900).

$$\text{Доведіть, що } \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \sqrt{2}.$$

Вправи для повторення

833. Знайдіть квадрат і куб числа: а) $2,1 \cdot 10^6$; б) $8,3 \cdot 10^{-5}$.

834. Побудуйте графік рівняння $x^2 - y = 0$.

835. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\text{а)} \begin{cases} \frac{x+y}{3} + x = 15, \\ y - \frac{y-x}{5} = 6; \end{cases} \quad \text{б)} \begin{cases} \frac{x-y}{2} + y = 4, \\ x - \frac{y-x}{3} = 9; \end{cases} \quad \text{в)} \begin{cases} x + y = 7, \\ |x - y| = 5. \end{cases}$$

836. Один із кутів трикутника дорівнює 50° , а різниця двох інших — 50° . Знайдіть міри цих кутів.

СКАРБНИЧКА ДОСЯГНЕНЬ

- ✓ Умію виконувати дії з виразами, що містять квадратні корені.
- ✓ Розумію, що таке винесення множника з-під знака кореня, і вмію розв'язувати вправи, що передбачають такі перетворення.
- ✓ Розумію, що таке внесення множника під знак кореня, і вмію розв'язувати вправи, що передбачають такі перетворення.
- ✓ Розумію, що означає звільнити дріб від ірраціональності в знаменнику.
- ✓ Умію замінювати дріб, що містить знак кореня у знаменнику, на тотожний, знаменник якого не містить коренів.

ВИКОРИСТОВУЄМО НАБУТИ КОМПЕТЕНТНОСТІ

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:

- Що таке функція (с. 109).
- Що таке область визначення і область значень функції (с. 243).
- Як складають таблицю значень функції (с. 110).
- Як будують графік функції (с. 110).
- Як за графіком визначають властивості функції (с. 111).
- Як розв'язують рівняння графічно (с. 112).

§ 18 | Функція $y = \sqrt{x}$

Ви вже знаєте, що площа квадрата є функцією довжини його сторони: $S = a^2$. У даному параграфі ми з'ясуємо, як залежить довжина сторони квадрата від зміни його площини. Для цього розв'яжемо рівняння $a^2 = S$ ($S > 0$, $a > 0$), використавши означення арифметичного кореня. Маємо: $a = \sqrt{S}$. Користуючись цією формулою, кожному значенню S можемо поставити у відповідність єдине значення a , тобто a є функцією S .

Існують й інші задачі, розв'язування яких приводить до функцій, де аргумент розміщується під знаком квадратного кореня. Наведемо приклади.

Площу круга (S) знаходять за формулою $S = \pi R^2$, де R — радіус круга, $\pi \approx 3,14$. Звідси $R = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$.

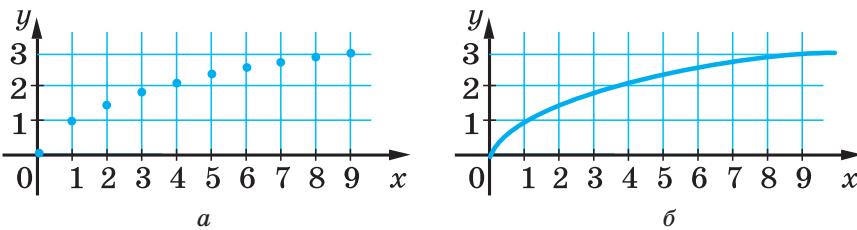
Шлях, що проходить тіло під час вільного падіння, визначається формулою $h = \frac{1}{2}gt^2$, де t — час, g — стало число. Звідси $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$.

Далі розглянемо властивості функції $y = \sqrt{x}$. Область її визначення — множина невід'ємних дійсних чисел, оскільки тільки з невід'ємного числа можна добути квадратний корінь. Складемо таблицю значень функції для кількох значень аргументу x :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	0	1	1,41	1,73	2	2,24	2,45	2,65	2,83	3

Дробові значення тут наближені. Точки з координатами, наведеними у цій таблиці, позначимо на малюнку 49, а.

Якщо на координатній площині позначити точки з координатами x і y за умови, що змінна x набуває всіх невід'ємних дійсних значень, то одержимо графік функції $y = \sqrt{x}$ (мал. 49, б). Цей графік — одна вітка параболи, вона виходить з початку координат і розміщена в першому координатному куті. Функція $y = \sqrt{x}$ зростає на всій області визначення.



Мал. 49

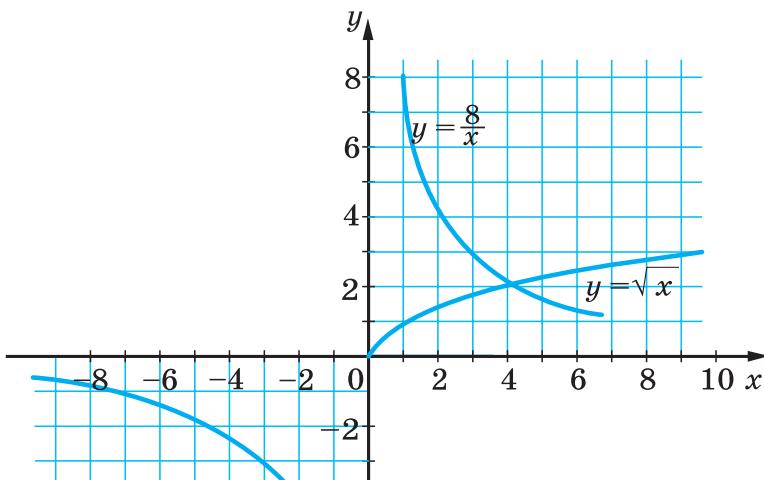
Властивості функції $y = \sqrt{x}$ можна встановити за графіком, зображенним, наприклад, на малюнку 49, б. Подаємо їх у вигляді таблиці.

Властивості функції	Вид функції
	$y = \sqrt{x}$
Область визначення	Усі невід'ємні числа ($x \geq 0$)
Область значень	Усі невід'ємні числа ($y \geq 0$)
Додатні значення	Усі числа, крім $x = 0$
Від'ємні значення	—
Проміжки спадання	—
Проміжки зростання	$x > 0$

У сучасній математиці графіки функцій використовують досить часто. Зупинимось *на графічному розв'язуванні рівнянь*.

Нехай треба розв'язати рівняння $\frac{8}{x} - \sqrt{x} = 0$.

Замінимо дане рівняння рівносильним $\frac{8}{x} = \sqrt{x}$ і побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = \frac{8}{x}$ і $y = \sqrt{x}$ (мал. 50).



Мал. 50

Ці графіки перетинаються в точці з абсцисою $x \approx 4$.

При такому значенні x вирази $\frac{8}{x}$ і \sqrt{x} набувають рівних значень, тобто число 4 — корінь (можливо, наблизений) рівняння $\frac{8}{x} = \sqrt{x}$. Підставивши $x = 4$ у дане рівняння, переконуємося, що 4 — точний корінь.

Інших спільних точок побудовані графіки не мають, отже, дане рівняння має тільки один корінь: $x = 4$.

ХОЧЕТЕ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Графік функції $y = \sqrt{x}$ не обов'язково будувати за точками. Виявляється, що цей графік для $y > x$ симетричний графіку функції $y = x^2$ відносно бісектриси першого координатного кута. Адже рівності $y = \sqrt{x}$ і $y^2 = x$ при додатному x виражают одну й ту саму залежність між змінними x і y . Якщо у другій із цих рівностей поміняти x на y , а y — на x , то це рівнозначно заміні осі x віссю y і навпаки. Такі функції, як $y = \sqrt{x}$ і $y = x^2$, називаються *оберненими*. Побудуйте їх графіки в одній системі координат і переконайтесь, що вони симетричні відносно прямої $y = x$.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

- Якою є область визначення функції $y = \sqrt{x}$?
- Яких значень може набувати функція $y = \sqrt{x}$?
- Чи має найменше значення функція $y = \sqrt{x}$?

4. Чи має найбільше значення функція $y = \sqrt{x}$?
5. У якому координатному куті лежить графік функції $y = \sqrt{x}$?

Виконаємо разом

- 1** В одній системі координат побудуйте графіки функцій $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$ та $y = -2\sqrt{x}$.

● **Розв'язання.** Складемо таблицю відповідних значень x і y .

x	0	0,5	1	2	3	4	5	6	7	8	9
\sqrt{x}	0	0,7	1	1,4	1,7	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3
$2\sqrt{x}$	0	1,4	2	2,8	3,4	4	4,4	4,8	5,2	5,6	6
$-2\sqrt{x}$	0	-1,4	-2	-2,8	-3,4	-4	-4,4	-4,8	-5,2	-5,6	-6

Дробові значення тут наближені.
Побудуємо в системі координат точки, координати яких подано в таблиці. Одержано графіки відповідних функцій (мал. 51).

Виконайте усно

837. Обчисліть:

- a) $\sqrt{1}; \sqrt{4}; \sqrt{9}; \sqrt{16}; \sqrt{25}; \sqrt{36}; \sqrt{49};$
 б) $\sqrt{1,21}; \sqrt{1,44}; \sqrt{1,69}; \sqrt{1,96}; \sqrt{2,25}.$

838. Зростаючо чи спадно є функція:

- а) $y = \sqrt{x}$; б) $y = -\sqrt{x}$?

839. Розв'яжіть рівняння:

- а) $\sqrt{x} = 0$; б) $\sqrt{x} = -1$; в) $\sqrt{x} = 2$.

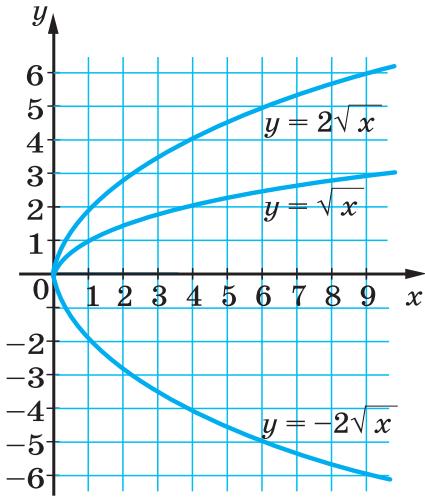
840. Скільки спільніх точок мають графіки функцій:

- | | |
|---------------------------------|--------------------------------|
| а) $y = 1$ і $y = \sqrt{x}$; | в) $y = 1$ і $y = -\sqrt{x}$; |
| б) $y = -5$ і $y = -\sqrt{x}$; | г) $y = \sqrt{x}$ і $y = -5$? |

Рівень А

841. Заповніть таблицю для функції $y = \sqrt{x}$. Побудуйте графік.

x	0	0,25	1	2,25	4	6,25	7,84	9	12,25	14,44	16
y											

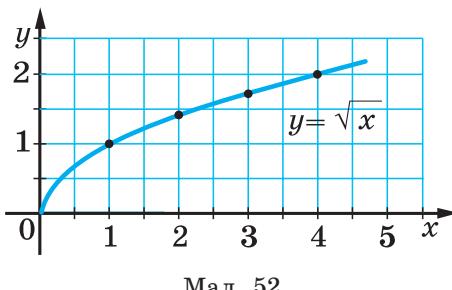


Мал. 51

842. Користуючись графіком функції

$$y = \sqrt{x}$$
 (мал. 52), знайдіть:

- a) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює: 0,8; 1,2; 2; 2,3; 5;
 б) значення аргументу, якому відповідає значення функції, що дорівнює: 0,5; 1,3; 1,7; 2; 2,4.



843. Які з точок належать графіку

$$y = \sqrt{x}:$$

- | | | |
|-----------------|--|---|
| $A(0,01; 0,1);$ | $B(0,16; -0,4);$ | $C(0,4; 0,2);$ |
| $D(0,09; 0,3);$ | $E\left(\frac{7}{9}; 1\frac{2}{3}\right);$ | $F\left(-\frac{4}{9}; -\frac{2}{3}\right)?$ |

844. Чи проходить графік функції $y = \sqrt{x}$ через точки:

- $A(16; 4);$ $B(16; -4);$ $C(-5; 25);$ $K(10; \sqrt{10})?$

845. Користуючись графіком функції $y = \sqrt{x}$ (див. мал. 52), знайдіть:

- a) значення функції, якщо значення x дорівнюють: 0,5; 1; 3; 4,5;
 б) значення x , при яких значення y дорівнюють: 0,5; 1; 1,5; 2;
 в) цілі значення x , при яких значення функції менші від 3.



846. Існує 10 точок, які належать графіку функції $y = 2\sqrt{x}$. Їх абсциси містяться у першій таблиці, а ординати — у другій. Правильно установивши відповідність між цифрами першої таблиці і буквами другої, ви дізнаєтесь прізвище відомого українського математика. Він був учителем М. Г. Крейна, вважав його одним із найкращих математиків України і писав про нього: «Мені дуже приємно вважати його своїм першим учнем». Портрет цього математика висів на стіні домашнього кабінету Марка Григоровича.

Дізнайтесь більше про вчителя М. Г. Крейна.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
49	1,21	100	25	400	0,09	169	1	0	$\sqrt{16}$

2	20	0	0,6	14	4	2,2	26	40	10
Б	Б	О	А	Ч	В	Е	Р	Т	О

Розв'яжіть графічно рівняння (847–848).

847. а) $\sqrt{x} = 3;$ б) $\sqrt{x} - 1 = 0;$ в) $\sqrt{x} + 2 = 0.$

848. а) $\sqrt{x} = 0;$ б) $\sqrt{x} + 3 = 0;$ в) $\sqrt{x} - 2 = 0.$

РІВЕНЬ Б

849. В одній системі координат побудуйте графіки функцій:

a) $y = \sqrt{x}$ і $y = -\sqrt{x}$;

в) $y = \sqrt{x}$ і $y = 2\sqrt{x}$;

б) $y = 2\sqrt{x}$ і $y = -2\sqrt{x}$;

г) $y = 2\sqrt{x}$ і $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$.

850. Побудуйте графіки функцій $y = \sqrt{x}$ і $y = x^2$, якщо $x \geq 0$, в одній системі координат. Чи симетричні ці графіки? Відносно якої прямої?

851. Дано графік функції: 1) $y = x^2$; 2) $y = \sqrt{x}$.

Чи перетинає його пряма:

а) $y = 1$;

в) $y = 4$;

г) $y = 100$;

б) $y = -1$;

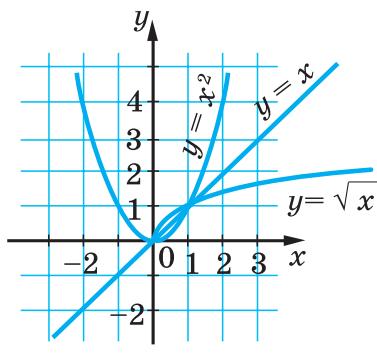
г) $y = -4$;

д) $y = -100$?

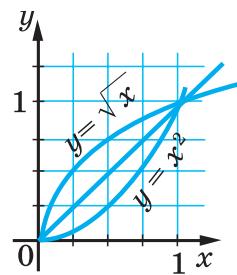
Якщо перетинає, то в якій точці?

852. На малюнку 53, а, б побудовано графіки функцій $y = x$; $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$. Користуючись графіками, порівняйте:

- а) $0,7^2$ і $0,7$; в) 2 і $\sqrt{2}$; г) $\left(\frac{4}{5}\right)^2$ і $\sqrt{\frac{4}{5}}$; е) $\left(\frac{5}{3}\right)^2$ і $\sqrt{\frac{5}{3}}$
 б) $0,2^2$ і $\sqrt{0,2}$; г) $1,3$ і $\sqrt{1,3}$; д) $0,26$ і $\sqrt{0,26}$;



а



б

Мал. 53

853. Розмістіть у порядку зростання числа:

а) $0,32$; $0,32^2$; $\sqrt{0,32}$;

б) $1,74$; $1,74^2$; $\sqrt{1,74}$.

854. Розв'яжіть графічним способом рівняння:

а) $\sqrt{x} + \frac{1}{x} = 0$;

в) $\sqrt{x} - \frac{1}{x} = 0$;

г) $x + \sqrt{x} = 6$;

б) $x^2 - \sqrt{x} = 0$;

г) $\sqrt{x} + 2 = x$;

д) $x^2 + \sqrt{x} = 0$.

855. Чи має розв'язки рівняння:

а) $\sqrt{x} = x + 3$; б) $x + \sqrt{x} + 1 = 0$; в) $\sqrt{x} = 0,5x - 4$?

856*. Побудуйте графік функції:

а) $y = \sqrt{x+3}$; б) $y = \sqrt{x} + 3$; в) $y = \sqrt{x} - 3$.

857. Скільки коренів має рівняння:

а) $\sqrt{x} = 0,5x + 2$; б) $\sqrt{x} = \frac{1}{3}(x+2)$; в) $\sqrt{x} = x^2 - 2$?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

Спростіть вираз (858–859).

858. а) $0,2x^{-2}y \cdot 5x^2y^{-2}$;

в) $(a^{-1} + b^{-1}) \cdot (a + b)^{-1}$;

б) $\left(\frac{m^4n^{-2}}{9p}\right)^2 \cdot \left(\frac{m^2n^{-3}}{3p}\right)^{-3}$;

г) $\left(\frac{a^4b^{-3}}{c^5}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{c^8}{ab^3}\right)^2$.

859. *Відкрита задача.* Із двох пунктів на річці, відстань між якими дорівнює 114 км, одночасно вийшли катер і човен. Через який час вони зустрінуться, якщо власна швидкість катера і човна відповідно дорівнюють 45 км/год і 15 км/год, а швидкість течії — 3 км/год?

860. У таблиці представлено результати виконання учнями контролальної роботи з 10 завдань. Скільки учнів одержали більше 7 балів? Скільки це становить відсотків від усіх учнів класу?

Кількість балів	Підрахунок	Кількість учнів
4	I	1
5	III	3
6	III II	6
7	II	2
8	III	4
9	III	3
10	I	1

СКАРБНИЧКА ДОСЯГНЕНЬ

- ✓ Умію будувати графік функції $y = \sqrt{x}$ за точками $(0; 0); (1; 1); (4; 2); (9; 3)$.
- ✓ Можу встановити, яка з точок належить графіку заданої функції, а яка — ні.
- ✓ Умію характеризувати властивості функції $y = \sqrt{x}$ за її графіком.
- ✓ Умію графічно розв'язувати деякі рівняння, що містять \sqrt{x} .

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

ВАРИАНТ I

- 1°. Обчисліть: а) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{45}$; б) $\sqrt{562^2 - 462^2}$.
- 2°. Спростіть вираз: а) $(4 - \sqrt{3})(4 + \sqrt{3})$; в) $(2 + \sqrt{9x})(2 - 3\sqrt{x})$;
- б) $(1 + \sqrt{5})^2 - \sqrt{20}$; г) $(a + \sqrt{a}) : (\sqrt{a} + 1)$.
- 3°. Розв'яжіть графічно рівняння $\sqrt{x} = 0,5x$.

ВАРИАНТ II

- 1°. Обчисліть: а) $\sqrt{7} \cdot \sqrt{28}$; б) $\sqrt{628^2 - 528^2}$.
- 2°. Спростіть вираз: а) $(6 + \sqrt{5})(6 - \sqrt{5})$; в) $(3 - \sqrt{4a})(3 + 2\sqrt{a})$;
- б) $(x - \sqrt{x}) : (\sqrt{x} - 1)$; г) $(3 - \sqrt{2})^2 + \sqrt{72}$.
- 3°. Розв'яжіть графічно рівняння $\sqrt{x} = x - 6$.

ВАРИАНТ III

- 1°. Обчисліть: а) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{75}$; б) $\sqrt{698^2 - 598^2}$.
- 2°. Спростіть вираз: а) $(\sqrt{44} - 6)(\sqrt{44} + 6)$; в) $(5 + \sqrt{4x})(5 - 2\sqrt{x})$;
- б) $(2 + \sqrt{3})^2 - \sqrt{48}$; г) $(n + 2\sqrt{n} + 1) : (\sqrt{n} + 1)$.
- 3°. Розв'яжіть графічно рівняння $x^2 = 2x$.

ВАРИАНТ IV

- 1°. Обчисліть: а) $\sqrt{22} \cdot \sqrt{88}$; б) $\sqrt{922^2 - 522^2}$.
- 2°. Спростіть вираз: а) $(2\sqrt{3} - 1)(\sqrt{12} + 1)$; в) $(4 - \sqrt{9c})(4 + 3\sqrt{c})$;
- б) $(2 - \sqrt{5})^2 + \sqrt{80}$; г) $(x^2 - 3) : (x - \sqrt{3})$.
- 3°. Розв'яжіть графічно рівняння $x^2 = x + 2$.

ІСТОРИЧНІ ВІДОМОСТІ

Квадратні корені із чисел вавилонські математики вміли добувати ще 4 тис. років тому. Знаходили навіть наближені значення квадратних коренів, користуючись правилом, яке тепер можна записати (при малих c) у вигляді такої наближеної рівності:

$$\sqrt{b^2 + c} \approx b + \frac{c}{2b}.$$

У XIII ст. європейські математики запропонували скорочене позначення кореня — замість теперішнього $\sqrt{12}$ писали $R12$ (латинське *Radix* — корінь). Згодом замість R стали писати знак V , наприклад $V7$, $V(a + b)$. Пізніше над многочленом за коренем додали риску: $V\overline{a+b}$. Р. Декарт (1596–1650) сполучив знак кореня з рискою, після чого запис набув сучасного вигляду: $\sqrt{a+b}$.

Дійсні числа входили в математику непросто. Вчені античного світу не допускали і думки, що, крім цілих і дробових, можуть існувати ще якісь інші числа. Хоча Піфагор (VI ст. до н. е.) та його учні довели: якщо довжина сторони квадрата дорівнює 1, то довжину його діагоналі не можна виразити жодним раціональним числом. Тим самим вони встановили існування відрізків, довжини яких не виражаються раціональними числами, проте іrrаціональних чисел не запровадили.

Математики Індії і Середнього Сходу користувались іrrаціональними числами, але вважали їх несправжніми, неправильними, «глухими». Тільки коли Р. Декарт запропонував кожній точці координатної прямої ставити у відповідність число, іrrаціональні числа довелось об'єднати з раціональними в одну множину дійсних чисел.

Строга теорія дійсних чисел була опрацьована тільки в XIX ст. у роботах К. Вейерштраса (1815–1897), Р. Дедекінда (1831–1916) і Г. Кантора (1845–1918).

Логічно бездоганну і у той же час елементарну побудову теорії дійсного числа у 1924 році здійснив український учений С. Я. Ремез (1896–1975).

У 8 класі розглядають не всі дійсні числа. Крім квадратних, існують також корені третього, четвертого та вищих степенів, наприклад: $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[4]{7}$, $\sqrt[5]{0,6}$. З такими дійсними числами ви ознайомитесь у старших класах.

Головне в розділі

Квадратним коренем із числа a називають число, квадрат якого дорівнює a .

Наприклад, із числа 16 існує два квадратних корені: 4 і -4. Невід'ємне значення квадратного кореня із числа a називають *арифметичним значенням кореня* і позначають символом \sqrt{a} .

Властивості квадратних коренів. Якщо $a > 0$ і $b > 0$, то

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}; \quad (\sqrt{a})^2 = a; \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}; \quad \sqrt{a^{2k}} = a^k.$$

Для будь-якого дійсного a : $\sqrt{a^2} = |a|$.

Значення багатьох квадратних коренів — числа не раціональні, а ірраціональні.

Числа цілі й дробові, додатні, від'ємні та нуль разом становлять множину *раціональних чисел*. Кожне раціональне число можна записати у вигляді дробу $\frac{m}{n}$, де m — число ціле, а n — натуральне.

Кожне раціональне число можна подати у вигляді нескінченого періодичного десяткового дробу. І кожний нескінчений періодичний десятковий дріб зображає деяке раціональне число.

Приклади: $\frac{2}{3} = 0,6666\dots$, $-\frac{13}{11} = -1,181818\dots$

Числа, які зображаються нескінченими неперіодичними десятковими дробами, називають *ірраціональними*.

Приклади ірраціональних чисел:

$$\sqrt{2} = 1,4142136\dots, \quad \pi = 3,1415927\dots$$

Ірраціональні числа разом з раціональними утворюють множину *дійсних чисел*. Множини натуральних, цілих, раціональних і дійсних чисел позначають відповідно буквами N , Z , Q , R (див. мал. 42).

Дійсні числа можна додавати, віднімати, множити, підносити до степеня і ділити (на числа, відмінні від 0). Для додавання і множення довільних дійсних чисел справедливі переставні, сполучні й розподільний закони:

$$\begin{aligned} a + b &= b + a, \\ ab &= ba, \\ a + (b + c) &= (a + b) + c, \\ a \cdot (bc) &= (ab) \cdot c, \\ (a + b)c &= ac + bc. \end{aligned}$$

Готуємось до ТЕМАТИЧНОГО ОЦІНЮВАННЯ

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ № 3

- 1** Скільки коренів має рівняння $x^2 = 4$:
- а) один; б) два; в) безліч; г) жодного?
- 2** Число $\sqrt{51}$ міститься між числами:
- а) 5 і 6; б) 6 і 7; в) 7 і 8; г) 8 і 9.
- 3** Укажіть, яке число є ірраціональним:
- а) $\sqrt{25}$; б) $-1,7$; в) $3,14$; г) $\sqrt{5}$.
- 4** Значення виразу $2\sqrt{25} - 4$ дорівнює:
- а) 5; б) 6; в) 4; г) 2.
- 5** Рівність $(\sqrt{x})^2 = -x$ виконується, якщо:
- а) $x > 0$; б) $x = 0$; в) $x < 0$; г) x — будь-яке число.
- 6** Графіком якої функції є парабола:
- а) $y = x$; б) $y = x^2$; в) $y = \frac{5}{x}$; г) $y = \frac{x}{5}$?
- 7** Знайдіть корені рівняння $\sqrt{x} = 3$:
- а) 5; б) 3; в) 9; г) 10.
- 8** Значення $\sqrt{11\frac{1}{9}}$ дорівнює:
- а) $1\frac{1}{3}$; б) $\frac{3}{10}$; в) $\frac{10}{3}$; г) $11\frac{1}{3}$.
- 9** Число $0,27777777\dots$ можна записати так:
- а) 0,27; б) 0,(27); в) 0,2(7); г) 0,28.
- 10** Графік функції $y = \sqrt{x}$ проходить через точку:
- а) (2; 4); б) (1; 2); в) (4; 2); г) (4; -2).

Типові завдання до контрольної роботи № 3

1 Обчисліть:

a°) $\sqrt{625} - 2\sqrt{144}$; 6°) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{32}$.

2 Внесіть множник під знак кореня:

a°) $5\sqrt{3}$; 6°) $2x^2\sqrt{x}$.

3 Внесіть множник з-під знака кореня:

a°) $\sqrt{980}$; 6°) $\sqrt{49x^4y^5}$.

4 Розв'яжіть графічно рівняння:

a°) $x^2 = 5$; 6°) $\sqrt{x} = 1,5$.

5 Виконайте дії:

a°) $\sqrt{2}(\sqrt{18} - \sqrt{2})$; 6°) $\sqrt{10}(\sqrt{20} - 2\sqrt{45} + \sqrt{125}) + 5\sqrt{2}$.

6 Раціональним чи ірраціональним є число:

a°) $\sqrt{10\frac{9}{16}}$; 6°) $\sqrt{19-6\sqrt{2}} + \sqrt{19+6\sqrt{2}}$?

7 Спростіть вираз:

a°) $ab\sqrt{a^3b} - 5a^2\sqrt{ab^3}$; 6°) $ab^2\sqrt{9a^6b^3} - 5a^2b\sqrt{a^4b^5}$,
якщо $a \leq 0, b \geq 0$.

8 Звільніться від ірраціональності в знаменнику:

a°) $\frac{15}{\sqrt{5}}$; 6°) $\frac{8}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$; 8°) $\frac{1}{2\sqrt{7}-1} - \frac{1}{2\sqrt{7}+1}$.

9° Спростіть вираз:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{2}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \right) \left(\sqrt{x} - \frac{x+y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right).$$

10° Розв'яжіть рівняння:

$$\sqrt{5 + \sqrt{4 + \sqrt{x}}} = 3.$$



Розділ 3

АБЕЛЬ Нільс Генрік

(1802–1829)

Норвезький математик.

«Найвідоміший його винахід належить області алгебри:

у 1824 р. він довів, що алгебраїчні рівняння 5-го степеня та вище

в загальному випадку нерозв'язні».

Ш. Ерміт

«Кращі роботи Абеля — це воїстину ліричні поеми піднесеної краси, де досконалість форми дає змогу відтінити глибину думки, в той час як вона наповнює уяву картинами мрій, що вийшли з абстрактного світу ідей, піднятого над банальністю життя і являє собою більш безпосередній твір самого духу, ніж усе, що може створити будь-який поет у звичайному сенсі слова».

Мітtag Леффлер

АБЕЛІВСЬКА ПРЕМІЯ

Щорічно присуджується видатним математикам сучасності.

Мета — заохочення математиків зі світовим ім'ям і широка реклама та популяризація сучасної математики серед молоді.

Заснована урядом Норвегії у 2002 році.

ЛАУРЕАТИ ПРЕМІЇ

Жан-П'єр Серр

Майкл Атья

Пітер Д. Лакс

Леннарт Карлесон

Срініваса С. Р. Варадхан

Жак Тітс

Михайло Громов

Джон Тейт

Джон Мілнор

Ендре Семереді

П'єр Рене Делінь

Яків Сінай

Джон Форбс

Неш Луїс Ніренберг
та інші

Квадратні рівняння

У попередніх класах ви вже навчилися складати та розв'язувати рівняння, але тільки найпростіші, до яких зводяться порівняно нескладні задачі. Для розв'язування складніших задач використовують квадратні рівняння. Вивчивши цю тему, ви зможете розв'язувати багато прикладних задач із різних галузей знань.

У цьому розділі розглянемо такі теми:

§ 19	Неповні квадратні рівняння Incomplete Quadratic Equations	§ 22	Квадратний тричлен Quadratic Trinomial
§ 20	Формула коренів квадратного рівняння Quadratic Equation Formula Roots	§ 23	Квадратне рівняння як математична модель прикладної задачі Quadratic Equations as a Mathematical Applied Problem
§ 21	Теорема Вієта Vieta Theorem		

«Замість того, щоб шукати деяке співвідношення, не знаючи заздалегідь, чи існує воно, слід з'ясувати, чи дійсно існує таке співвідношення».

H. X. Абель

«Абель залишив таку велику спадщину математикам, що їм буде чим зайнятися в найближчі 500 років».

Ш. Ерміт

Навчальний проєкт № 3
«РІВНЯННЯ У ШЕРЕНЗІ ВІКІВ
І СПОСОБИ ЇХ РОЗВ'ЯЗАННЯ»

ВИКОРИСТОВУЄМО НАБУТИ КОМПЕТЕНТНОСТІ

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:

- Що таке рівняння і корінь рівняння (с. 241).
- Що означає розв'язати рівняння (с. 241).
- Які рівняння називають лінійними з однією змінною (с. 241).
- Які рівняння називають рівняннями першого степеня з однією змінною (с. 141).
- Скільки коренів має рівняння першого степеня з однією змінною.
- Квадрати натуральних чисел (форзац 4).
- Як добувати квадратні корені з невід'ємних чисел (с. 135).

§ 19 Неповні квадратні рівняння

Задача. Одна сторона прямокутника більша за другу на 6 см. Знайдіть сторони прямокутника, якщо його площа дорівнює 112 см.

Розв'язання. Позначимо меншу із шуканих сторін буквою x . Тоді більша сторона дорівнює $x + 6$, а площа — 112. Отже,

$$x(x + 6) = 112, \text{ або } x^2 + 6x - 112 = 0.$$

Це *рівняння другого степеня з однією змінною*. Такі рівняння називають також квадратними. Як його розв'язувати, покажемо у § 20.

→ **Квадратним називають рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$, де x — змінна; a, b, c — дані числа, причому $a \neq 0$.**

Числа a, b, c — коефіцієнти квадратного рівняння:

a — перший коефіцієнт, b — другий, c — вільний член.

За означенням перший коефіцієнт квадратного рівняння не може дорівнювати нулю. Якщо хоч один коефіцієнт (b або c) дорівнює нулю, то квадратне рівняння називають *неповним*. Неповні квадратні рівняння бувають трьох видів:

$$1) ax^2 = 0; \quad 2) ax^2 + bx = 0; \quad 3) ax^2 + c = 0.$$

1. Рівняння виду $ax^2 = 0$ рівносильне рівнянню $x^2 = 0$ і тому завжди має тільки один корінь $x = 0$.

2. Рівняння виду $ax^2 + bx = 0$ рівносильне рівнянню $x(ax + b) = 0$ і завжди має два корені: $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{b}{a}$.

Приклад. Розв'яжіть рівняння $5x^2 + 4x = 0$.

Розв'язання. Винесемо змінну x за дужки:

$$x(5x + 4) = 0.$$

Отже, $x = 0$, або $5x + 4 = 0$, звідси $x = -0,8$.

Відповідь. $x_1 = 0$, $x_2 = -0,8$.

3. Квадратне рівняння виду $ax^2 + c = 0$ рівносильне рівнянню $x^2 = -\frac{c}{a}$.

Якщо $-\frac{c}{a} > 0$, то воно має два розв'язки;

якщо $-\frac{c}{a} < 0$ — жодного розв'язку.

Приклад. Розв'яжіть рівняння $4x^2 - 3 = 0$.

Розв'язання. Перетворимо дане рівняння: $4x^2 = 3$, $x^2 = \frac{3}{4}$, x — число,

квадрат якого дорівнює $\frac{3}{4}$, тобто квадратний корінь із числа $\frac{3}{4}$. Таких

коренів є два: $\sqrt{\frac{3}{4}}$ і $-\sqrt{\frac{3}{4}}$.

Відповідь. $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Зверніть увагу. Якщо знаки коефіцієнтів a і c різні, то число $-\frac{c}{a}$ — додатне і рівняння має два корені. Якщо знаки коефіцієнтів a і c однакові, то число $-\frac{c}{a}$ від'ємне і рівняння $ax^2 + c = 0$ не має коренів.

ХОЧЕТЕ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Деякі квадратні рівняння (повні) можна розв'язувати, зводячи їх до неповних квадратних рівнянь. Наприклад, користуючись формулою квадрата двочлена, рівняння

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

можна подати у вигляді $(x - 1)^2 = 0$ і розв'язати його так: $(x - 1)^2$ дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли $x - 1 = 0$, тобто $x = 1$.

Таким способом можна розв'язати кожне квадратне рівняння, ліву частину якого можна подати у вигляді квадрата двочлена.

Наприклад,

$$4y^2 + 4y + 1 = 0, \quad (2y + 1)^2 = 0, \quad 2y + 1 = 0, \quad y = -0,5.$$

$$c^2 - 2\sqrt{2}c + 2 = 0, \quad (c - \sqrt{2})^2 = 0, \quad c - \sqrt{2} = 0, \quad c = \sqrt{2}.$$

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Які рівняння називають квадратними?
2. Як інакше називають рівняння другого степеня з однією змінною?
3. Які рівняння називають неповними квадратними?
4. Назвіть три види неповних квадратних рівнянь. Як розв'язувати рівняння виду: а) $ax^2 = 0$; б) $ax^2 + bx = 0$; в) $ax^2 + c = 0$?
5. Скільки розв'язків може мати неповне квадратне рівняння?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ

- 1** Розв'яжіть квадратне рівняння:

а) $3x^2 - 6x = 0$; б) $2y^2 - 72 = 0$.

● Розв'язання.

$$\begin{array}{ll} \text{а)} & 3x^2 - 6x = 0; \\ & 3x(x - 2) = 0; \\ & x_1 = 0; \\ & x - 2 = 0; \\ & x_2 = 2. \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{б)} & 2y^2 - 72 = 0; \\ & 2(y^2 - 36) = 0; \\ & y^2 - 36 = 0; \\ & y_1 = 6; \\ & y_2 = -6. \end{array}$$

Відповідь. а) $x_1 = 2$, $x_2 = 0$; б) $y_1 = 6$, $y_2 = -6$.

- 2** Розв'яжіть рівняння $\frac{9}{x+25} + \frac{16}{x} = 1$.

● Розв'язання. $\frac{9}{x+25} + \frac{16}{x} - 1 = 0$,

$$\frac{9x + 16x + 400 - x^2 - 25x}{x(x+25)} = 0, \quad \frac{400 - x^2}{x(x+25)} = 0, \quad 400 - x^2 = 0,$$

звідси $x_1 = -20$, $x_2 = 20$.

При цих значеннях x знаменник не перетворюється на нуль. Отже, $x_1 = -20$, $x_2 = 20$ — корені рівняння.

Відповідь. $x_1 = -20$, $x_2 = 20$.

ВИКОНАЙТЕ УСНО

- 861.** Яке з даних рівнянь є квадратним:

а) $x^2 = \frac{1}{x} + 3$; в) $-x^2 + 5x + \sqrt{8} = 0$; г) $5x^2 = 4 - 3x$;
 б) $2x^2 - 3x = 0$; г) $2x^2 + x^3 = 0$; д) $2z(z + 5) = 7$?

- 862.** Яке з рівнянь є неповним квадратним:

а) $x^2 + 8 = 0$; в) $x^2 + 3x = 1$; г) $\sqrt{5}x^2 + \pi x = 0$;
 б) $\sqrt{2}x^2 = 0$; г) $x^2 + \frac{2}{x} = 0$; д) $2x^2 - \sqrt{x} = 0$?

Розв'яжіть рівняння (863–866).

- 863.** а) $3x^2 = 0$; б) $\sqrt{7}y^2 = 0$; в) $-z^2 = 0$.
864. а) $x^2 - 2x = 0$; б) $3z^2 - 6z = 0$; в) $2c = c^2$.
865. а) $y^2 - 9 = 0$; б) $2x^2 - 8 = 0$; в) $-x^2 + 1 = 0$.
866. а) $(x - 3)(x - 5) = 0$; в) $(2x - 1)(x + 3) = 0$;
 б) $3(x + 7)(x - 2) = 0$; г) $(x - 1)(x - 2)(x + 3) = 0$.

Рівень А

867. З наведених нижче рівнянь вишишіть: а) квадратні рівняння; б) неповні квадратні рівняння. Для кожного з них укажіть, чому дорівнюють його перший і другий коефіцієнти та вільний член.

- а) $3x - 7 = x^2$; г) $(x + 4)^2 = 8x$; е) $9x^2 = 0$;
 б) $-2x^2 + \sqrt{3}x = 4$; г) $\frac{1}{3}x^2 + 2x = 0$; е) $x + \frac{1}{x} + 4 = 0$.
 в) $6x^2 - x^3 = 0$; д) $x^2 - 25 = x$;

868. Замініть дане рівняння рівносильним юму квадратним рівнянням:

- а) $2x(x - 3) = 50$; г) $(1 - x)(3x - 2) = 2x + x^2$;
 б) $(x - y)y = 5y^2 - 4$; г) $(x - 1)(x - 2) = 4x$;
 в) $4z^2 = 2z(3z + 5)$; д) $3(x + 5) - 8 = -5x(x + 2)$.

Розв'яжіть рівняння (869–880).

- 869.** а) $3x^2 + 27 = 0$; в) $0,5y^2 + y = 0$; г) $\frac{1}{3}x^2 = 0$;
 б) $3x^2 - 27 = 0$; г) $z - 2z^2 = 0$; д) $(5 - 0,5)x^2 = 0$.

- 870. (ЗНО 2016, 2020).** а) $4x^2 = 1$; б) $x^2 = 25x$.

- 871.** а) $2x^2 - 8x = 0$; в) $7x^2 = \frac{1}{2}x$; г) $x - x^2 = 0$;
 б) $x^2 + 3x = 0$; г) $12x = 0,24x^2$; д) $0,5x + 9x^2 = 0$.

- 872.** а) $x^2 - 144 = 0$; в) $-2x^2 + 50 = 0$; г) $100x^2 - 225 = 0$;
 б) $9x^2 = 64$; г) $0,16x^2 + 100 = 0$; д) $x^2 + 162 = 652$.

- 873.** а) $(x - 1)x + x = 0$; в) $(z + 2)(z - 2) = 0$;
 б) $2y(y + 3) = 6y$; г) $(x + 2)(x - 2) = 4$.

- 874.** а) $2x(x + 5) = 7x$; в) $4x^2 - 2x = x(x - 2)$;
 б) $-x(2x + 3) = 8x$; г) $8 - 6z = 2z(z - 3)$.

- 875.** а) $5x^2 + 3x + 7 = 7(x + 1)$; в) $15 - 2y = 8y^2 + 3(y + 5)$;
 б) $-2x^2 + 6 = 3(x^2 + x + 2)$; г) $3(x^2 + 5) = 4x^2 + x(1 - x)$.

- 876.** а) $2(x^2 - 1) = (x - 1)(x + 1)$; б) $(x + 3)^2 = (x - 3)(x + 3)$.

877. а) $\frac{5-x^2}{3} = \frac{3x^2-2}{4};$

б) $\frac{2z^2}{5} = \frac{3z^2+1}{4}.$

878. а) $\frac{x^2-1}{7} = \frac{3}{4};$

б) $\frac{2x^2+3}{5} = \frac{4}{7}.$

879. а) $\frac{z+1}{8} = \frac{1}{z-1};$

б) $\frac{y-2}{4} = \frac{-1}{y+2}.$

880. а) $(2x+1) : 13 = 3 : (2x-1);$ б) $(3x^2 - 4) : 5 = 3x^2 : 20.$

881. Знайдіть периметр квадрата, площа якого дорівнює:

а) 289 см²;

б) 0,81 м²;

в) $S.$

882. а) Знайдіть сторону квадрата, якщо його площа дорівнює 484 м².

б) Знайдіть сторону квадрата, якщо його площа дорівнює $S.$

883. 55 га поля квадратної форми засіяли пшеницею, а решту — 89 га — житом. Знайдіть периметр поля.

РІВЕНЬ Б

Розв'яжіть рівняння (884–887).

884. а) $3x(x-1) = 12 - 3x;$

в) $x(x+\sqrt{2}) = 4 + \sqrt{2}x;$

б) $5x(x+2) = 10(1+x);$

г) $2x(3-x) = 6x - 8.$

885. а) $\frac{1}{3}(x^2+2x) = \frac{1}{4}(2x^2-3x);$

в) $5x^2 + 3x = x(3+x) + 32;$

б) $\frac{1}{5}(x^2+3x) = \frac{1}{2}(5x-x^2);$

г) $(7x-2)(x+1) = 5(x+4) - 1.$

886. а) $(x+3)(x-3) = 16;$

в) $6x - (x+2)^2 = 3x^2 - 4;$

б) $(2x+4)^2 = 16x + 20;$

г) $(2x+3)(3-2x) = 24x + 9.$

887. а) $1,5(x^2 - 2x) = 0,9(2x - x^2);$

б) $3,7(x^2 - 5x) = 2(5x - x^2).$

888. Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину графіків функцій: а) $y = x^2$ і $y = 121$; б) $y = x^2$ і $y = 25,6.$

Розв'яжіть рівняння (889–892).

889. а) $3(x-5)^2 = 0;$

в) $(x-3)^2 = 1;$

б) $0,7(2-z) = 0;$

г) $(5-y)^2 = 1.$

890. а) $23(3x-2)^2 = 0;$

в) $2(x-7)^2 = 8;$

б) $78(5z-4)^2 = 0;$

г) $3(5-z)^2 = 12.$

891. а) $(x+15)^2 + (x+15) = 0;$

б) $\left(x+\frac{2}{3}\right)^2 - x - \frac{2}{3} = 0.$

892. а) $5(3-2x)^2 + 20(3-2x) = 0;$

б) $6\left(3x-\frac{1}{3}\right)^2 + 5\left(\frac{1}{3}-3x\right) = 0.$

893. Складіть неповне квадратне рівняння, яке мало б корені:

- а) -3 і 3 ; б) $-\sqrt{2}$ і $\sqrt{2}$; в) 0 і 7 ; г) 0 і -4 .

Відкриті задачі (894–895).

894. Доповніть вираз $2x^2 + x - 8$ так, щоб утворилося рівняння, яке мало б корені:

- а) 0 і -2 ; б) -2 і 2 ; в) $x_1 = x_2$.

895. Доповніть вираз $x^2 - 3x$ так, щоб утворилося рівняння, яке мало б корені: а) -3 і 3 ; б) 0 і 3 ; в) $x_1 = x_2$.

Розв'яжіть рівняння (896–900).

896. а) $\frac{2x+5}{x-2} = \frac{9(x+2)}{8x-20};$

б) $\frac{4x+12}{x-3} = \frac{x-3}{x+3}.$

897. а) $\frac{x}{x+5} + \frac{x}{x-5} = 2\frac{2}{3};$

б) $\frac{x+2}{x-2} + \frac{x-2}{x+2} = 3\frac{1}{3}.$

898. а) $\frac{x-1}{x-2} + \frac{x-2}{x-1} = \frac{5}{2};$

б) $\frac{x-3}{x+3} - \frac{x+3}{3-x} = 4.$

899. а) $\frac{4}{3+x} = \frac{3-4x^2}{x^2-9} - \frac{5}{x-3};$

б) $\frac{5(x+2)}{x^2+6x+9} + \frac{1}{x+3} = 1.$

900. а) $(x^2 - 2)^2 - 2(x^2 - 2) = 0;$ б) $(x^2 + 3)^2 - 5(x^2 + 3) = 0.$

901. Які значення змінних задовольняють пропорцію:

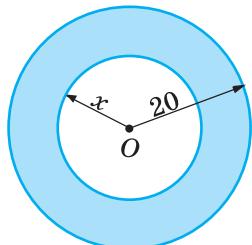
- а) $(x + 1) : 2 = 4 : (x - 1);$ в) $(3x - 6) : x = 5x : (3x + 6);$
б) $(x - 4) : 3 = 3 : (x + 4);$ г) $(0,2 - x) : 4 = (0,01 + x) : (0,2 + x)?$

902. Знайдіть довжини катетів прямокутного рівнобедреного трикутника, площа якого дорівнює $0,72 \text{ дм}^2$.

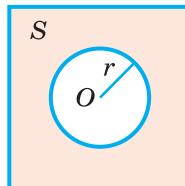
903. Площу круга радіуса r знаходять за формулою $S = \pi r^2$. Знайдіть радіус круга, площа якого дорівнює: а) 314 см^2 ; б) S .

904. Площа кільця дорівнює 942 см^2 , а радіус його зовнішнього кола — 20 см (мал. 54). Знайдіть радіус його внутрішнього кола.

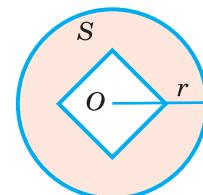
905. Знайдіть радіус кола r , якщо площа зафарбованої фігури (мал. 55) дорівнює S , а сторона квадрата — a .



Мал. 54



Мал. 55



- 906.** Добуток двох послідовних натуральних чисел на 324 більший за меншого з них. Знайдіть ці числа.
- 907.** Добуток двох послідовних натуральних чисел на 224 більший за більшого з них. Знайдіть ці числа.
- 908.** Сума квадратів трьох послідовних натуральних чисел дорівнює 365. Знайдіть ці числа. Як слід позначити їх, щоб розв'язання задачі звелось до неповного квадратного рівняння?
- 909.** За якої умови дорівнює нулю:
- один корінь квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$;
 - сума коренів рівняння $(x - a)(x + a - b) = 0$?
- 910.** Знайдіть число, яке менше від квадратного кореня із цього числа в 2,5 раза.
- 911.** На станції технічного обслуговування, виконуючи замовлення, майстер і учень працювали разом 2 год. Решту роботи учень закінчив сам за 4 год. За скільки годин майстер зміг би виконати роботу самостійно, якщо відомо, що учневі на це знадобилося б на 8 год більше?
- 912.** Знайдіть площу прямокутного трикутника, у якого гіпотенуза дорівнює 10 м, а катети відносяться як 3 : 4.
- 913.** Периметр одного квадрата на 8 см менший від периметра іншого, а їх площині відносяться як 1 : 4. Знайдіть довжини сторін квадратів.
- 914.** Майстриня вишивала серветки квадратної форми двох розмірів (мал. 56). Сторона однієї серветки на 3 дм довша за сторону іншої, а їх площині відносяться як 9 : 4. Скільки мережива їй знадобиться для оздоблення по периметру 2 великих і 6 маленьких серветок?
- 915.** Користуючись калькулятором, розв'яжіть рівняння:
- $2,324x^2 = 74,825$;
 - $4,574z^2 = 48,226z$;
 - $4,027y^2 - 12,449 = 0$;
 - $7,467x^2 = 15,227x$.

916*. Розв'яжіть рівняння:

- $x^2 - 7|x| = 0$;
- $2x^2 - \frac{8x}{|x|} = 0$;
- $x^2 + 3|x| - x = 0$;
- $x^2 + \frac{5x^2}{|x|} = 0$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

Обчисліть:

917. а) $-12 \cdot \frac{3}{80} + \left(-\frac{1}{5} + \left(-\frac{1}{2} \right) : (-0,8) \right) : (-2)$;
 б) $(3,56 - (-7,92 : 11) + (-2,54 + 1,26)) : (-1,25)$.



Мал. 56

918. Знайдіть останню цифру числа:

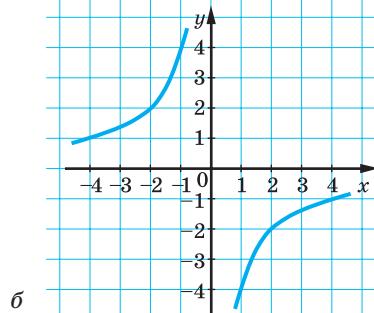
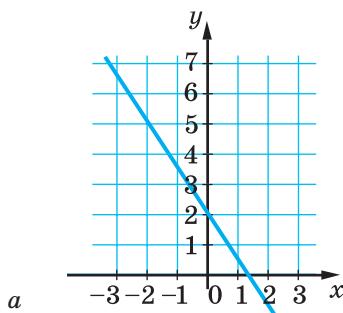
- | | | | |
|----------------|-----------------|----------------|----------------|
| а) 5^{100} ; | в) 4^{1000} ; | г) 2^{100} ; | е) 3^{101} ; |
| б) 6^{66} ; | г) 9^{999} ; | д) 2^{99} ; | е) 3^{102} . |

919. Спростіть вираз і знайдіть його значення:

- | |
|--|
| а) $(x^2 + 3xy + 2y^2)(x - 3y) + 6y^2(x + y)$, якщо $x = 6$, $y = 5$; |
| б) $(a + 5b)(a^2 - 5ab + 6b^2) - 10b^2(3b - 2a)$, якщо $a = -8$, $b = 6$. |

920. Опишіть властивості функції, заданої графіком (мал. 57).

Задайте ці функції формулою.

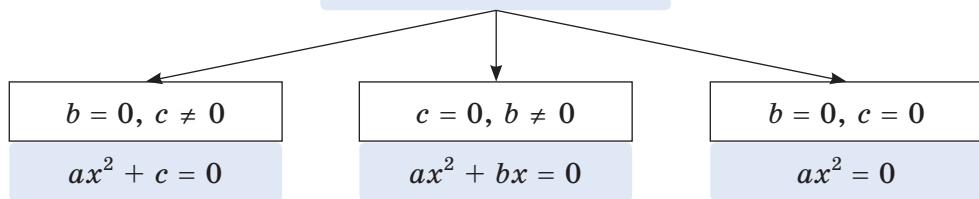


Мал. 57

СКАРБНИЧКА ДОСЯГНЕНЬ

- ✓ Можу навести приклади квадратних рівнянь.
- ✓ Можу сформулювати означення квадратного рівняння.
- ✓ Знаю, що таке неповне квадратне рівняння.

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$



- ✓ Умію розв'язувати неповні квадратні рівняння.

$$\begin{aligned} ax^2 + c &= 0 \\ ax^2 &= -c \\ x &= -\frac{c}{a}, \\ x_{1,2} &= \pm \sqrt{\frac{-c}{a}}, \text{ якщо } -\frac{c}{a} > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ax^2 + bx &= 0 \\ x(ax+b) &= 0 \\ x = 0, \text{ або } ax+b &= 0 \\ ax = -b, \quad x &= -\frac{b}{a}, \\ x_1 &= 0, \quad x_2 = -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ax^2 &= 0 \\ x^2 &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Використовуємо набуті компетентності

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:

- Формулу квадрата двочлена $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$.
- Як виділяти квадрат двочлена.

$$\begin{aligned}x^2 + 10x + 3 &= x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 - 5^2 + 3 = \\&= (x + 5)^2 + 3 - 25 = (x + 5)^2 - 22 \\a^2 + 2ab + c &= a^2 + 2ab + b^2 - b^2 + c = (a + b)^2 + c - b^2\end{aligned}$$

- Як розв'язують рівняння $x^2 = c$ і за яких умов воно має корені.

$$\begin{aligned}x^2 &= c \\c &> 0 \\x &= \sqrt{c}; x = -\sqrt{c}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x^2 &= c \\c &= 0 \\x &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x^2 &= c \\c &< 0 \\&\text{коренів немає}\end{aligned}$$

- Квадрати натуральних чисел (форзац 4).
- Як добувати квадратні корені з невід'ємних чисел (с. 135).

§ 20 | Формула коренів квадратного рівняння

Розв'яжемо рівняння $x^2 + 6x - 112 = 0$, яке ми склали за умовою задачі (с. 182).

Розв'язання. Якщо до виразу $x^2 + 6x$ додати 9, то одержимо квадрат двочлена $x + 3$. Тому дане рівняння рівносильне рівнянню

$$x^2 + 6x + 9 - 9 - 112 = 0, \text{ або } (x + 3)^2 = 121.$$

Отже, $x + 3 = 11$, звідки $x = 8$; або $x + 3 = -11$, звідси $x = -14$.

Відповідь. $x_1 = 8, x_2 = -14$.

Розглянутий спосіб розв'язування квадратного рівняння називають **способом виділення квадрата двочлена**.

Розв'яжемо цим способом рівняння

$$5x^2 - 2x - 3 = 0.$$

Щоб перший його член став квадратом одночлена із цілим коефіцієнтом, помножимо обидві частини даного рівняння на 5:

$$\begin{aligned}25x^2 - 10x - 15 &= 0, \\25x^2 - 2 \cdot 5x + 1 - 1 - 15 &= 0, (5x - 1)^2 = 16.\end{aligned}$$

Отже, $5x - 1 = 4$, звідси $5x = 5$, $x = 1$; або

$5x - 1 = -4$, звідси $5x = -3$, $x = -0,6$.

Відповідь. $x_1 = 1, x_2 = -0,6$.

Розв'яжемо таким способом рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.

Помножимо обидві частини рівняння на $4a$ (пам'ятаємо, що $a \neq 0$):

$$\begin{aligned} 4a^2x^2 + 4ax \cdot b + 4ac &= 0, \\ (2ax)^2 + 2 \cdot 2ax \cdot b + b^2 - b^2 + 4ac &= 0, \\ (2ax + b)^2 &= b^2 - 4ac. \end{aligned}$$

 **Вираз $b^2 - 4ac$ називають дискримінантом** (від латинського *discriminans* — розрізняючий) **даного квадратного рівняння і позначають буквою D .**

Якщо $D < 0$, то дане рівняння не має коренів: не існує такого значення x , при якому значення виразу $(2ax + b)^2$ було б від'ємним.

Якщо $D = 0$, то $2ax + b = 0$, звідси $x = -\frac{b}{2a}$ — єдиний корінь.

Якщо $D > 0$, то дане квадратне рівняння рівносильне рівнянню

$$(2ax + b)^2 = (\sqrt{D})^2, \text{ звідси}$$

$$\begin{aligned} 2ax + b &= \sqrt{D}, \quad x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \\ \text{або } 2ax + b &= -\sqrt{D}, \quad x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}. \end{aligned} \tag{1}$$

У цьому випадку дане рівняння має два корені, які відрізняються тільки знаками перед \sqrt{D} . Коротко записують їх так:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \text{ де } D = b^2 - 4ac.$$

Це **формула коренів квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$** .

Користуючись нею, можна розв'язати будь-яке квадратне рівняння.

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння:

$$\text{а) } 3x^2 - 5x + 2 = 0; \quad \text{б) } x^2 + 6x + 9 = 0; \quad \text{в) } 5x^2 - x + 1 = 0.$$

Розв'язання. а) $D = 25 - 24 = 1$, $D > 0$,

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{6} = \frac{5 \pm 1}{6}; \quad x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{2}{3};$$

б) $D = 36 - 36 = 0$,

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm 0}{2} = -3; \quad x_1 = -3;$$

в) $D = 1 - 20 = -19$, $D < 0$. Рівняння коренів не має.

Відповідь. а) $x_1 = 1$; $x_2 = \frac{2}{3}$; б) $x = -3$; в) рівняння коренів не має.

Формулу коренів квадратного рівняння використовують для розв'язування багатьох рівнянь, які зводяться до квадратних.

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння:

a) $4x^4 - 9x^2 + 5 = 0$; б) $(3x^2 - x - 3)(3x^2 - x + 5) = 9$.

Розв'язання. Такі рівняння зручно розв'язувати шляхом **уведення допоміжної змінної**.

а) $4x^4 - 9x^2 + 5 = 0$. Нехай $x^2 = t$, тоді $x^4 = t^2$, одержимо рівняння відносно змінної t :

$$4t^2 - 9t + 5 = 0, D = (-9)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 5 = 81 - 80 = 1, D > 0,$$

$$t_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 4} = \frac{9 \pm 1}{8}, t_1 = \frac{9+1}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}, t_2 = \frac{9-1}{8} = 1.$$

Повернемося до змінної x :

1) $x^2 = 1, x_1 = -1, x_2 = 1$;

2) $x^2 = \frac{5}{4}, x_3 = -\frac{\sqrt{5}}{2}, x_4 = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Рівняння виду $ax^4 + bx^2 + c = 0$ називають *біквадратним*.

б) $(3x^2 - x - 3)(3x^2 - x + 5) = 9$. Нехай $3x^2 - x = t$, тоді відносно змінної t одержимо рівняння:

$$(t - 3)(t + 5) = 9, t^2 + 2t - 15 = 9, t^2 + 2t - 24 = 0,$$

$$D = 4 - 4 \cdot (-24) = 4 + 96 = 100, D > 0,$$

$$t_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{-2 \pm 10}{2}, t_1 = 4, t_2 = -6.$$

1) $3x^2 - x = -6, 3x^2 - x + 6 = 0, D = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 6 = -71, D < 0$, отже, це рівняння коренів не має.

2) $3x^2 - x = 4, 3x^2 - x - 4 = 0, x_1 = -1, x_2 = 1\frac{1}{3}$.

Відповідь. а) $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = -\frac{\sqrt{5}}{2}, x_4 = \frac{\sqrt{5}}{2}$;

б) $x_1 = -1, x_2 = 1\frac{1}{3}$.

ХОЧЕТЕ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Формулу коренів рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ можна записати так:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (2)$$

Якщо другий коефіцієнт рівняння — парне число, тобто рівняння має вигляд $ax^2 + 2kx + c = 0$, то

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}. \quad (3)$$

Виведіть ці формули з основної формули коренів квадратного рівняння.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

- Як називають рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$?
- Що таке дискримінант квадратного рівняння?
- Скільки коренів має квадратне рівняння залежно від його дискримінанта?
- Який вигляд має формула коренів квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ

- 1** Зведіть рівняння $(x - 4)(2x + 1) = 3x(x - 1)$ до квадратного та знайдіть його корені.

- Розв'язання.** $(x - 4)(2x + 1) = 3x(x - 1)$. Розкриємо дужки і зведемо подібні доданки: $2x^2 - 8x + x - 4 = 3x^2 - 3x$,

$$3x^2 - 2x^2 - 3x + 8x - x + 4 = 0, \quad x^2 + 4x + 4 = 0.$$

Одержане рівняння розв'яжемо, зваживши на те, що в його лівій частині — квадрат двочлена: $x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 = (x + 2)^2$.

Отже, $(x + 2)^2 = 0$, звідси $x + 2 = 0$, $x = -2$.

Відповідь. $x = -2$.

- 2** Розв'яжіть дробове раціональне рівняння:

$$\frac{x}{x-2} + \frac{2}{(x-2)(x-3)} = \frac{2}{x-3}.$$

- Розв'язання.** $\frac{x}{x-2} + \frac{2}{(x-2)(x-3)} - \frac{2}{x-3} = 0$,

$$\frac{x(x-3) + 2 - 2(x-2)}{(x-2)(x-3)} = 0, \quad \frac{x^2 - 5x + 6}{(x-2)(x-3)} = 0.$$

Дріб дорівнює нулю, якщо чисельник дорівнює нулю, а знаменник не дорівнює нулю: $x^2 - 5x + 6 = 0$.

$$D = 25 - 4 \cdot 6 = 1, \quad x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2}, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 3.$$

Дане рівняння ці значення не задовольняють, оскільки при $x = 2$ знаменник першого дробу дорівнює 0, а при $x = 3$ знаменник другого дробу дорівнює 0.

Відповідь. Рівняння коренів не має.

- 3** Розв'яжіть рівняння $x^2 - 4x + 3 = 0$.

- Розв'язання.** У цьому рівнянні другий коефіцієнт — число парне.

Використаємо формулу 3. Маємо: $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - 3} = 2 \pm 1$.

Отже, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

Відповідь. $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

ВИКОНАЙТЕ УСНО

921. Обчисліть дискримінант рівняння:

- | | | |
|-------------------------|-------------------------|--------------------------|
| а) $x^2 - 2x + 1 = 0$; | в) $y^2 - 6y + 1 = 0$; | г) $2x^2 - x - 1 = 0$; |
| б) $x^2 + 2x + 1 = 0$; | г) $z^2 + 6z - 1 = 0$; | д) $3x^2 - 2x - 1 = 0$. |

922. Скільки коренів має рівняння:

- | | | |
|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| а) $x^2 - 2x + 2 = 0$; | в) $x^2 - 5x + 6 = 0$; | г) $x^2 - 6x + 9 = 0$; |
| б) $x^2 + 2x + 2 = 0$; | г) $x^2 + 5x + 6 = 0$; | д) $x^2 + 6x + 9 = 0$? |

923. Чому не має коренів рівняння:

- | | |
|----------------------------|----------------------------|
| а) $x^2 + (x - 1)^2 = 0$; | в) $3x^2 + \sqrt{2} = 0$; |
| б) $x^2 + x + 1 = 0$; | г) $(2x - 5)^2 + 3 = 0$? |

РІВЕНЬ А

Способом виділення квадрата двочлена розв'яжіть рівняння (924–926).

- 924.** а) $x^2 - 6x + 8 = 0$;
б) $x^2 - 12x + 35 = 0$;

- в) $x^2 - 4x - 12 = 0$;
г) $z^2 + 4z - 12 = 0$.

- 925.** а) $x^2 - 11x + 18 = 0$;
б) $y^2 - 5y - 24 = 0$;

- в) $m^2 - 12m + 36 = 0$;
г) $x^2 + 14x + 49 = 0$.

- 926.** а) $x^2 + 6x - 27 = 0$;
б) $x^2 - 10x + 9 = 0$;

- в) $x^2 + 3x - 4 = 0$;
г) $x^2 - 5x + 6 = 0$.

927. Знайдіть дискримінанти квадратних рівнянь у завданнях 924–926.

928. Яке з рівнянь не має коренів:

- | | |
|--------------------------|----------------------------|
| а) $x^2 + x + 1 = 0$; | в) $0,5x^2 + 2x + 2 = 0$; |
| б) $2y^2 - 3y + 2 = 0$; | г) $8z^2 - z + 4 = 0$? |

Користуючись формулою коренів, розв'яжіть рівняння (929–936).

- 929.** а) $x^2 - 7x - 18 = 0$;
б) $x^2 + 7x - 18 = 0$;

- в) $x^2 + x - 6 = 0$;
г) $x^2 - x - 42 = 0$.

- 930.** а) $x^2 + 3x - 130 = 0$;
б) $x^2 - 7x - 120 = 0$;

- в) $4x^2 - 4x - 3 = 0$;
г) $4x^2 - 4x - 15 = 0$.

- 931.** а) $9x^2 - 12x - 5 = 0$;
б) $9z^2 - 24z - 20 = 0$;

- в) $2y^2 - 7y + 3 = 0$;
г) $5z^2 - 8z + 3 = 0$.

- 932.** а) $2x^2 - 7x - 30 = 0$;
б) $4x^2 + 3x - 10 = 0$;

- в) $9y^2 - 13y + 4 = 0$;
г) $5x^2 + 31x - 28 = 0$.

- 933.** а) $16x^2 - 24x + 27 = 0$;
б) $25c^2 + 15c - 4 = 0$;

- в) $6x^2 - 5x - 6 = 0$;
г) $4x^2 - 19x + 12 = 0$.

- 934.** а) $2p^2 - 7p + 6 = 0$;
б) $10m^2 - 53m + 15 = 0$;

- в) $6x^2 - 12,5x + 6 = 0$;
г) $8x^2 - 8,8x + 2,1 = 0$.

935. а) $10y^2 - 0,8y = 1,92$;

б) $6x^2 - \frac{19x}{6} - 1 = 0$;

936. а) $5x^2 - 7\frac{1}{6}x + 2\frac{1}{2} = 0$;

б) $\frac{x^2}{2} - 2\frac{1}{2}x - 7 = 0$;

в) $4n^2 + 11n + 7,36 = 0$;

г) $6x^2 - 25\frac{1}{2}x + 26\frac{1}{4} = 0$.

в) $2y^2 + 3\frac{1}{3}y = 18\frac{2}{3}$;

г) $\frac{x^2}{4} + \frac{x}{9} = 1\frac{2}{9}$.

Розв'яжіть рівняння, що зводиться до квадратного (937–950).

937. (ЗНО 2017, 2019).

а) $x^2 - 10 = 5x + 14$;

938. а) $(2x - 3)^2 = 8x$;

б) $(2x + 1)^2 = 3x + 4$;

939. а) $x(7 - x) = 5x - 8$;

940. а) $3x(2x - 5) = 2(x^2 + 2)$;

941. а) $(x - 5)^2 = 3x + 25$;

б) $(x + 4)^2 = 3x^2 - 8$;

942. а) $(2x + 4)^2 = 11x^2 + 1$;

б) $(9 - 4x)^2 = 5(4x + 1)$;

б) $(x - 1)(2x - 3) = 0$;

в) $2(3z + 9) = (2z + 5)^2$;

г) $12(3 - x) = (3x - 1)^2$;

б) $2x(3x + 4) = 4x^2 + 5x + 27$;

б) $3x(5x + 3) = 2x(6x + 5) + 2$;

в) $(p - 3)^2 = 2(p + 1)$;

г) $(3c - 5)^2 = 10c + 9$.

943. а) $(x + 4)(2x - 3) - (5x - 6)(x - 3) = 10$;

б) $(2x - 8)(3x + 1) = (4x - 12)(x - 2) + 8$.

944. а) $x+3=\frac{x+3}{x}$;

б) $\frac{2c^2}{c-1}=c-2$.

945. а) $\frac{16}{x+2}=x$;

б) $y=\frac{18}{y-3}$.

946. а) $\frac{z+2}{z}=\frac{5z+1}{z+1}$;

б) $\frac{5}{5-m}=\frac{m^2-6m}{m-5}$.

947. а) $\frac{x-5}{x+3}=\frac{3+2x}{2x-1}$;

б) $\frac{2x-1}{3-2x}=\frac{x-1}{2x+3}$.

948. а) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$;

в) $x^4 - x^2 - 6 = 0$;

б) $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$;

г) $x^4 + x^2 - 6 = 0$.

949. а) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$;

в) $x^4 - 6x^2 + 5 = 0$;

б) $x^4 + 8x^2 - 9 = 0$;

г) $x^4 + 6x^2 + 5 = 0$.

950. а) $4x^4 - 3x^2 - 1 = 0$;

в) $9x^4 - 10x^2 + 1 = 0$;

б) $4x^4 + 3x^2 - 1 = 0$;

г) $9x^4 + 10x^2 + 1 = 0$.

951. Складіть рівняння виду $(x - a)(x - b) = 0$, корені якого:

а) 2 і 3; б) 1 і 5;

в) 3 і -2;

г) -2 і -6.

952. Відкрита задача. Складіть рівняння, корені якого:

- а) 2 і 5; б) 3 і -7; в) 0,5 і 4; г) -0,2 і -8.

953. Один корінь квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ дорівнює 1. Чому дорівнює $a + b + c$?

РІВЕНЬ Б

Розв'яжіть рівняння способом виділення квадрата двочлена (954–955).

- 954.** а) $4x^2 + 4x - 15 = 0$; в) $6x^2 - 13x + 6 = 0$;
б) $9y^2 + 18y + 8 = 0$; г) $5x^2 + 31x - 28 = 0$.

- 955.** а) $2z^2 = 9z - 10$; в) $3x^2 + 4x - 7 = 0$;
б) $8 = 3y + 5y^2$; г) $5x^2 + 3x + 2 = 0$.

956. Розв'яжіть рівняння, розкладавши його ліву частину на множники:

- а) $x^2 + 5x + 4 = 0$; в) $x^2 - 8x + 15 = 0$;
б) $x^2 + 5x + 6 = 0$; г) $x^2 - x - 6 = 0$.

957. При яких значеннях змінної x правильна рівність:

- а) $(3x + 1)^2 = 3x + 1$; в) $4(3x + 1)^2 = (6x + 2)^2$;
б) $(3x + 1)^2 = 3(x + 1)$; г) $(3x + 1)^2 = 3x^2 + x$?

Розв'яжіть рівняння (958–973).

- 958.** а) $(2,5x - 7)(2x + 3) + 3x + 4 = (4x - 9)(1,5x + 1)$;
б) $(3z - 5)(4z + 1) + (2z + 3)(5z - 4) = 6z(3 + 2z) - 11$.

- 959.** а) $(2t - 3)(5t + 2) + (3t - 1)(4t + 2) = 10t^2 - 5$;
б) $(3n - 2)(3n + 2) - (2n - 3)^2 = 3n(n + 7) - 17$.

960. а) $\frac{1+3x}{2+x} + \frac{x-1}{2-x} = 1$;

б) $\frac{2y-2}{y+3} - \frac{3y-y}{3-y} = 6$.

961. а) $\frac{c-6}{c+5} - 2 = \frac{c-4}{5-c}$;

б) $\frac{7}{2x-3} + \frac{5}{x-1} = 12$.

962. а) $\frac{7}{x+2} - \frac{3}{2-x} = \frac{16}{x}$;

б) $\frac{5}{z-2} - \frac{4}{z-3} = \frac{1}{z}$.

963. а) $\frac{3}{2x-1} - \frac{39}{2x+1} + \frac{45}{4x^2-1} = 5$;

б) $\frac{2(x+7)}{x+1} - \frac{x+11}{x^2-1} + \frac{x-1}{x+1} = 4$.

964. а) $\frac{30}{x^2-1} - \frac{13}{x^2+x+1} - \frac{7+18x}{x^3-1} = 0$;

б) $\frac{x+6}{x-1} - \frac{x^2-x+16}{x^2+x+1} = \frac{x+36}{x^3-1}$.

965. а) $\frac{x+1}{4x} - \frac{8-x}{3x^2-6x} = \frac{5x-1}{2x-4}$;

б) $\frac{3-2x}{5-x} + \frac{3}{3-x} - \frac{x+3}{x+1} = 1$.

966. а) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{2x-7}{x^2-9x+14}$;

б) $\frac{1}{x-1} + \frac{3}{x^2+9x+18} = \frac{2x+7}{x^2+5x-6}$.

967. а) $\frac{5x-7}{9} + \frac{14}{2x-3} = x-1$;

б) $\frac{x-4}{12} + \frac{2x-22}{x-6} = \frac{16-x}{4}$.

968. а) $\frac{x}{x-2} + \frac{6}{x^2-7x+10} = \frac{2}{x-5}$;

б) $\frac{2}{x-7} = \frac{x}{x-2} + \frac{10}{(x-2)(x-7)}$.

969. а) $\frac{2z-3}{z-2} + \frac{z+1}{z-1} = \frac{3z+11}{z+1}$;

б) $\frac{3c+1}{c-3} + \frac{2c-1}{c-2} = \frac{5c-14}{c-4}$.

970. а) $(x+1)^2 = 7918 - 2x$;

б) $(x+2)^2 = 3131 - 2x$.

971. а) $x^2 + 2\sqrt{2}x + 1 = 0$;

б) $x^2 - 3\sqrt{2}x + 4 = 0$.

972. а) $\sqrt{2}b^2 - 3b + \sqrt{2} = 0$;

б) $c^2 - \sqrt{6}c + 2,5 = 0$.

973. а) $\frac{1}{x+x^2} + \frac{8}{x-8x^2+x^3} = \frac{6}{1-7x-7x^2+x^3}$;

б) $\frac{1}{x^4-1} + \frac{x-1}{x^3+3x^2+x+3} = \frac{x+2}{x^3+3x^2-x-3}$.

974. Розв'яжіть ребуси, зображені на малюнках 58 і 59. Розв'яжіть рівняння (975–978).

975. а) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$;

в) $x - 4\sqrt{x} + 3 = 0$;

б) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$;

г) $x - 7\sqrt{x} + 12 = 0$.

976. а) $x^2 - 5(\sqrt{x})^2 - 6 = 0$;

в) $x^2 - 4\sqrt{x^2} - 21 = 0$;

б) $x^2 + (\sqrt{x})^2 - 12 = 0$;

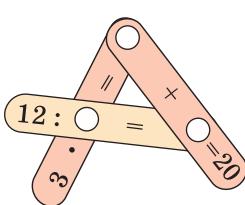
г) $x^2 + 2\sqrt{x^2} - 3 = 0$.

977. а) $x + 4\sqrt{x} - 12 = 0$;

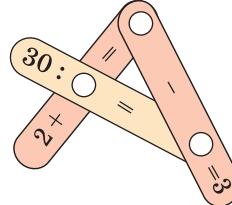
в) $3x - 8\sqrt{x} + 5 = 0$;

б) $x - 8\sqrt{x} + 15 = 0$;

г) $2x + 3\sqrt{x} + 1 = 0$.



Мал. 58



Мал. 59

978. а) $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$;

в) $(x+3)^4 - (x+3)^2 - 2 = 0$;

б) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$;

г) $(2x-1)^4 - 10(2x-1)^2 + 9 = 0$.

Знайдіть корені рівняння (979–980).

979. а) $(x-3)^2 - 6(x-3) + 8 = 0$;

в) $x^2 + 2x + 2(x+1) - 23 = 0$;

б) $(x+2)^2 - (x+2) - 6 = 0$;

г) $4x^2 - 12x + 2(2x-3) - 6 = 0$.

980. а) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$; в) $(x^2 + x)(x^2 + x - 7) = 60$;
 б) $x^3 + 7 - 7x^2 = x$; г) $x^2 + 5 = 3\sqrt{x^2 + 5}$.

981. Покажіть, що рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ навіть за умови, що $a \neq 0$, можна розв'язувати за формулою $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}$.

Знайдіть корені рівняння (982–987).

982. а) $(x^2 + 2x + 1)(x^2 + 2x + 4) = 10$; б) $(2x^2 - 5x - 4)(2x^2 - 5x) = 21$.

983. а) $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 24$;
 б) $(x - 2)(x + 1)(x + 2)(x + 5) + 20 = 0$.

984. а) $(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 3x + 3) + 1 = 0$;
 б) $(x^2 - 5x + 2)(x^2 - 5x - 1) - 28 = 0$.

985. а) $\left(\frac{x+1}{x}\right)^2 - 6\left(\frac{x+1}{x}\right) = -5$; в) $\left(\frac{x}{x-2}\right)^2 - \frac{x}{x-2} = 42$.

986. а) $\left(\frac{\sqrt{x}-1}{2}\right)^2 - \frac{\sqrt{x}-1}{2} = 12$; в) $\left(\frac{\sqrt{x}+1}{x}\right)^2 + \frac{\sqrt{x}+1}{x} = 2$.

987. а) $(x - 1)^2(x^2 - 2x) = 12$; в) $(x - 2)^2(x^2 - 4x) = -3$.

988*. Розв'яжіть рівняння з параметром m . При яких значеннях m дане рівняння має два рівних корені? При яких — не має розв'язків?

а) $x^2 + 4x + m = 0$; в) $mx^2 + 8x + 1 = 0$;
 б) $x^2 + mx + 4 = 0$; г) $mx^2 + 20x + m = 0$.

989*. При яких значеннях m рівняння матиме один корінь:

а) $5x^2 - 2x + m = 0$; в) $mx^2 + (m + 1)x + 1 = 0$;
 б) $\frac{1}{2}x^2 + mx + 4 = 0$; г) $x^2 + (m + 2)x + 2m + 1 = 0$?

990*. При яких значеннях m рівняння матиме три корені:

а) $(5x^2 - 2x - 3)(x^2 - mx + 4) = 0$;
 б) $(x^2 + 3x - 10)(mx^2 - 6x + 1) = 0$?

991. Розв'яжіть рівняння з модулем: а) $x^2 - 7|x| + 6 = 0$; б) $x^2 - 4|x| - 21 = 0$.

Розв'яжіть систему рівнянь (992–994).

992. а) $\begin{cases} x^2 + xy = 2, \\ 3x - y = -7; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x = 0, \\ x + 2y = 0. \end{cases}$

993. а) $\begin{cases} \frac{3}{x+5} + \frac{2}{y-3} = 2, \\ \frac{4}{x-2} - \frac{1}{y-6} = 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \frac{x^2 + x + 1}{y^2 + y + 1} = 3, \\ x + y = 6. \end{cases}$

994. а) $\begin{cases} \frac{y+3}{(3x-y)(3y-x)} = 0,5, \\ x-y = 0,4(x+y); \end{cases}$

б) $\begin{cases} \frac{2x-5}{x-2} + \frac{2y-3}{y-1} = 2, \\ 3x-4y = 1. \end{cases}$

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

995. Порівняйте числа $7,8 \cdot 10^5$ і $2,4 \cdot 10^6$. Знайдіть різницю їх квадратів.

996. Доведіть, що:

- | | |
|----------------------------------|---------------------------------------|
| а) $4^{20} - 1$ ділиться на 5; | г) $8^{10} - 10^8$ ділиться на 8; |
| б) $9^{60} + 5$ ділиться на 2; | г) $33^{25} - 3$ ділиться на 6; |
| в) $17^{16} + 9$ ділиться на 10; | д) $23^{24} + 24^{23}$ ділиться на 5. |

997. За підрахунками екологів одна пальчикова батарейка, яка потрапила у смітник, забруднює 20 м^2 землі. Яку частину площині своєї області збережуть від забруднення учні вашої школи, якщо віднесуть по одній використаній батарейці у спеціальний бокс?

998. Чи проходить графік функції $y = x^2 + 1$ через точку $A(3,5; 13,25)$? При яких значеннях x значення цієї функції буде дорівнювати 7,25?



Мал. 60

СКАРБНИЧКА ДОСЯГНЕНЬ

- ✓ Можу сформулювати означення квадратного рівняння.
- ✓ Знаю, що таке дискримінант квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ і можу записати його формулу

$$D = b^2 - 4ac$$

- ✓ Можу записати формулу коренів квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \text{ де } D = b^2 - 4ac$$

- ✓ Умію розв'язувати квадратні рівняння і задачі, що передбачають знаходження коренів рівнянь, що зводяться до квадратних.
- ✓ Спробую навчитися розв'язувати квадратні рівняння виду $ax^2 + 2kx + c = 0$ ($a \neq 0$)

за допомогою формули $x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$

Використовуємо набуті компетентності

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:

- Означення квадратного рівняння (с. 182).
- Формулу коренів квадратного рівняння (с. 191).
- Формулу різниці квадратів $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.
- Правила виконання дій з дробами і коренями.

§ 21 | Теорема Вієта

Квадратне рівняння називають **зведенним**, якщо перший його коефіцієнт дорівнює одиниці. У таблиці наведено приклади трьох зведених квадратних рівнянь, їх корені, а також суми і добутки коренів:

Рівняння	x_1 і x_2	$x_1 + x_2$	$x_1 \cdot x_2$
$x^2 - 5x + 6 = 0$	2 і 3	5	6
$x^2 - 3x - 4 = 0$	-1 і 4	3	-4
$x^2 + 8x + 15 = 0$	-5 і -3	-8	15

Порівняйте суму коренів кожного зведеного квадратного рівняння з його другим коефіцієнтом, а добуток коренів — з вільним членом.

Теорема Вієта.

Якщо зведене квадратне рівняння має два корені, то їх сума дорівнює другому коефіцієнту рівняння, взятому з протилежним знаком, а добуток — вільному члену.

Доведення. Якщо рівняння $x^2 + px + q = 0$ має корені x_1 і x_2 , то їх можна знайти за формулами:

$$x_1 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2} \text{ і } x_2 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2}, \quad (*)$$

де $D = p^2 - 4q$ — дискримінант рівняння.

Додамо і перемножимо ці корені:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{-p - \sqrt{D}}{2} + \frac{-p + \sqrt{D}}{2} = -p; \\ x_1 \cdot x_2 &= \frac{(-p)^2 - (\sqrt{D})^2}{4} = \frac{p^2 - (p^2 - 4q)}{4} = q. \end{aligned}$$

Отже, $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$. А це й вимагалось довести.

Примітка. Якщо $p^2 - 4q = 0$, то рівняння $x^2 + px + q = 0$ має один корінь $x = -\frac{p}{2}$. Формули (*) у цьому випадку дають $x_1 = -\frac{p}{2}$ і $x_2 = -\frac{p}{2}$.

Тому часто вважають, що дане рівняння має два рівних корені. Теорема Вієта правильна і для цього випадку, оскільки

$$x_1 + x_2 = -\frac{p}{2} + \left(-\frac{p}{2}\right) = -p,$$

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{p}{2}\right) \cdot \left(-\frac{p}{2}\right) = \frac{p^2}{4} = \frac{4q}{4} = q.$$

Кожне квадратне рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) рівносильне зведеному квадратному рівнянню $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. Тому якщо таке рівняння має корені x_1 і x_2 , то

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ і } x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Теорема (обернена до теореми Вієта).

Якщо сума і добуток чисел m і n дорівнюють відповідно $-p$ і q ,
то m і n — корені рівняння $x^2 + px + q = 0$.

Доведення. Нехай $m + n = -p$ і $m \cdot n = q$.

За цих умов рівняння $x^2 + px + q = 0$ рівносильне рівнянню $x^2 - (m + n)x + mn = 0$.

Підставимо у це рівняння замість змінної x числа m і n :

$$m^2 - (m + n)m + mn = m^2 - m^2 - nm + mn = 0,$$

$$n^2 - (m + n)n + mn = n^2 - mn - n^2 + mn = 0.$$

Отже, m і n — корені даного рівняння. А це й треба було довести.

З теореми Вієта випливає, що коли p і q — цілі числа, то цілі розв'язки рівняння $x^2 + px + q = 0$ є дільниками числа q . Користуючись оберненою теоремою, можна перевіряти, чи є та чи інша пара чисел коренями зведеного квадратного рівняння. Це дає можливість усно розв'язувати такі рівняння.

Приклад. Розв'яжіть рівняння $x^2 + 12x + 11 = 0$.

Розв'язання (усне). Якщо рівняння має цілі корені, то їх добуток дорівнює 11. Це можуть бути числа 1 і 11 або -1 і -11. Другий коефіцієнт рівняння додатний, тому корені від'ємні.

Відповідь. $x_1 = -1$, $x_2 = -11$.

ХОЧЕТЕ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Теорема Вієта правильна не тільки для зведеного квадратного рівняння, а й для рівнянь вищих степенів. Наприклад, якщо рівняння третього степеня $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ має корені x_1, x_2 і x_3 , то

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= -a, \\x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 &= b, \\x_1 x_2 x_3 &= -c.\end{aligned}$$

Якщо таке рівняння із цілими коефіцієнтами має цілі розв'язки, то вони є дільниками вільного члена.

Установіть, які з дільників вільного члена рівняння $x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = 0$ є коренями цього рівняння. Перевірте, чи виконується для цього рівняння теорема Вієта для зведеного кубічного рівняння.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Які квадратні рівняння називають зведеними?
2. Сформулюйте теорему Вієта для зведеного квадратного рівняння.
3. Сформулюйте теорему, оберену до теореми Вієта.
4. Як можна знаходити цілі розв'язки квадратного рівняння із цілими коефіцієнтами?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ

- 1 Знайдіть суму і добуток коренів рівняння:
а) $x^2 + x - 6 = 0$; б) $x^2 + 2x + 3 = 0$.
- Розв'язання. а) $D = 1 + 24 > 0$. Корені існують, тому
 $x_1 + x_2 = -1$; $x_1 \cdot x_2 = -6$;
б) $D = 4 - 12 < 0$. Корені не існують.
Відповідь. а) $x_1 + x_2 = -1$, $x_1 \cdot x_2 = -6$; б) корені не існують.
- 2 При яких значеннях m добуток коренів рівняння $x^2 + 8x + m - 7 = 0$ дорівнює 3?
- Розв'язання. $m - 7 = 3$, $m = 10$. Перевіркою переконуємося, що при цьому значенні m рівняння має корені.
Відповідь. $m = 10$.
- 3 Не розв'язуючи рівняння $x^2 - 4x + 1 = 0$, знайдіть суму квадратів його коренів.
- Розв'язання. $D = 16 - 4 > 0$. Корені існують.

$$x_1 + x_2 = 4; x_1 \cdot x_2 = 1; (x_1 + x_2)^2 = 16; x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2 = 16;$$

$$x_1^2 + 2 \cdot 1 + x_2^2 = 16; x_1^2 + x_2^2 = 16 - 2, x_1^2 + x_2^2 = 14.$$

Відповідь. $x_1^2 + x_2^2 = 14$.

Виконайте усно

999. Знайдіть суму і добуток коренів рівняння:

а) $x^2 - 7x + 10 = 0$;	в) $x^2 - 0,5x - 1,5 = 0$;
б) $x^2 - 9x + 14 = 0$;	г) $x^2 - 4x + 2 = 0$.

1000. Перевірте, чи є дані числа коренями рівняння:

а) $x^2 - 8x + 7 = 0$, 1 і 7;	в) $z^2 - 12z - 13 = 0$, -1 і 13;
б) $x^2 + 8x + 15 = 0$, 3 і 5;	г) $t^2 - 6t + 6 = 0$, 3 і 3.

1001. Визначте знаки коренів рівняння (якщо вони є), не розв'язуючи рівняння:

а) $x^2 - 4x + 3 = 0$;	в) $x^2 - 6x + 8 = 0$;	г) $y^2 - 15y + 44 = 0$;
б) $x^2 - 7x + 10 = 0$;	г) $x^2 + 10x + 21 = 0$;	д) $z^2 - 8z - 48 = 0$.

Розв'яжіть рівняння (1002–1005).

1002. а) $x^2 - 3x + 2 = 0$; б) $x^2 - 4x - 5 = 0$.

1003. а) $x^2 - 4x + 3 = 0$;

в) $y^2 - y - 12 = 0$;
б) $x^2 - 7x + 12 = 0$;

1004. а) $z^2 - 13z + 40 = 0$;

в) $x^2 + 5x + 6 = 0$;
б) $z^2 - 3z - 40 = 0$;

1005. а) $y^2 + 5y - 14 = 0$;

в) $c^2 + 2c - 8 = 0$;
б) $z^2 - 2z - 15 = 0$;

1006. Рівняння $x^2 + px + q = 0$ має корені 0,7 і 10. Знайдіть його коефіцієнти p і q .

Рівень А

Перевірте, чи є дані числа m і n коренями рівняння (1007–1008).

1007. а) $6x^2 - 5x + 1 = 0$, $m = \frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{3}$;

б) $4x^2 - 4x - 3 = 0$, $m = -\frac{1}{2}$, $n = 1\frac{1}{2}$.

1008. а) $3x^2 - 8x + 5 = 0$, $m = -1$, $n = -1\frac{2}{3}$;

б) $3x^2 + 4x + 1 = 0$, $m = -1$, $n = -\frac{1}{3}$.

1009. Знайдіть значення q , при якому рівняння має рівні корені:

а) $x^2 - 14x + q = 0$;	в) $x^2 + qx + 25 = 0$;
б) $x^2 + 12x + q = 0$;	г) $x^2 + qx + 121 = 0$.

1010. Знайдіть p і x_1 , якщо:

а) $x^2 + px + 25 = 0$ і $x^2 = 7$;

б) $x^2 + px + 21 = 0$ і $x^2 = -3$.

1011. Знайдіть q і x_1 , якщо:

а) $x^2 - 11x + q = 0$ і $x_2 = 6$; б) $x^2 + 6x + q = 0$ і $x_2 = 3$.

1012. Знайдіть k і x_1 , якщо:

а) $kx^2 + 9x - 2 = 0$ і $x_2 = -2$; б) $kx^2 - 4x - 39 = 0$ і $x_2 = -3$.

1013. Рівняння $x^2 + kx + t = 0$ має корені -3 і $\frac{1}{3}$. Знайдіть $5t$.

1014. Складіть зведене квадратне рівняння, корені якого дорівнюють:

а) 2 і 4 ; б) -3 і 5 ; в) $0,5$ і 4 ; г) $\frac{1}{7}$ і 7 ; д) $2-\sqrt{3}$ і $2+\sqrt{3}$.

1015. Один із коренів рівняння $x^2 - 5x + c = 0$ дорівнює 3 . Знайдіть c .

1016. Один із коренів рівняння $x^2 + mx + 3 = 0$ дорівнює 5 . Знайдіть m .

1017. Один із коренів рівняння $ax^2 + 7x + 8 = 0$ дорівнює -2 . Знайдіть a .

1018. Один із коренів рівняння $x^2 + 14x + c = 0$ дорівнює 7 . Знайдіть другий корінь і число c .

1019. Один із коренів рівняння $x^2 + px + 8 = 0$ дорівнює $\frac{1}{2}$. Знайдіть

другий корінь і коефіцієнт p .

1020. Дано рівняння $ax^2 + bx + c = 0$. За якої умови:

- а) сума його коренів дорівнює 0 ;
- б) добуток його коренів дорівнює 0 ;
- в) різниця його коренів дорівнює 0 ;
- г) сума квадратів його коренів дорівнює 0 ?

1021. Знайдіть корені рівняння $x^2 - 8x + c = 0$, якщо:

- а) один з них у 3 рази більший від другого;
- б) один з них на 5 менший від другого;
- в) один з них становить 20% від другого.

РІВЕНЬ Б

1022. Складіть квадратне рівняння, корені якого дорівнюють:

а) $\frac{2}{3}$ і $1\frac{1}{2}$; в) $2-\sqrt{3}$ і $2+\sqrt{3}$;
 б) $\frac{3}{5}$ і $-1\frac{2}{3}$; г) $\frac{-2-\sqrt{5}}{3}$ і $\frac{-2+\sqrt{5}}{3}$.

1023. Складіть усі можливі квадратні рівняння, які мали б по одному спільному кореню з даними рівняннями:

а) $x^2 - 3x - 28 = 0$ і $2x^2 + x - 10 = 0$;
 б) $2x^2 + 5x - 3 = 0$ і $x^2 - 4x + 4 = 0$.

- 1024.** Не розв'язуючи дане рівняння, складіть нове квадратне рівняння, корені якого менші за відповідні корені даного рівняння на одиницю:
- $3x^2 + 11x - 4 = 0$;
 - $2x^2 - 6x - 3 = 0$.
- 1025.** Не розв'язуючи дане рівняння, складіть нове квадратне рівняння, корені якого втричі більші за відповідні корені даного рівняння:
- $3x^2 + 2x - 85 = 0$;
 - $2x^2 - 6x + 3 = 0$.
- 1026.** Знайдіть корені рівняння x_1 і x_2 ($x_2 > x_1$) та вільний член q , якщо:
- $x^2 - 10x + q = 0$ і $x_2 - x_1 = 14$;
 - $x^2 + 5x + q = 0$ і $x_2 - x_1 = 9$.
- 1027.** Знайдіть корені рівняння x_1 і x_2 ($x_2 > x_1$) і значення k , якщо:
- $x^2 + kx + 10 = 0$ і $x_1 : x_2 = 0,4$;
 - $x^2 - 8x + k = 0$ і $x_1 : x_2 = -0,2$.
- 1028.** Різниця коренів рівняння $x^2 + 6x + q = 0$ дорівнює 8. Знайдіть його корені та число q .
- 1029.** Різниця коренів рівняння $2x^2 + 3x + c = 0$ дорівнює 2,5. Знайдіть число c .
- 1030.** Знайдіть корені рівняння $x^2 - 81x + q = 0$, якщо один з них:
- вдвічі більший за інший;
 - становить $\frac{4}{5}$ іншого.
- 1031.** При яких значеннях параметра c рівняння $x^2 - 4x + c = 0$ має два корені, з яких:
- один у 3 рази більший за інший;
 - один на 1 більший за інший?
- 1032.** Не знаходячи коренів x_1 і x_2 рівняння $x^2 - 8x + 6 = 0$, обчисліть:
- $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$;
 - $x_1^2 + x_2^2$;
 - $x_1^3 + x_2^3$.
- 1033.** Не розв'язуючи рівняння $x^2 - 2mx + 2m^2 - 2 = 0$, знайдіть суму квадратів його коренів.
- 1034.** Доведіть, що коли $p^2 - 4q = 0$, то $x^2 + px + q$ — квадрат двочлена. Якого?
- 1035.** Не розв'язуючи дане рівняння, складіть нове квадратне рівняння, корені якого були б обернені до відповідних коренів даного рівняння:
- $8x^2 - 14x + 5 = 0$;
 - $2x^2 - 7x + 6 = 0$.
- 1036.** Не розв'язуючи рівняння $3x^2 - 2x + 6 = 0$, обчисліть:
- $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$;
 - $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$,
- де x_1 і x_2 — корені даного рівняння.
- 1037.** Не розв'язуючи рівняння $x^2 - 2x - 9 = 0$, обчисліть:
- $x_1^2 + x_2^2$;
 - $x_1^3 + x_2^3$,
- де x_1 і x_2 — корені даного рівняння.

1038. Установіть відповідність між додатними коренями рівнянь (1–4) і значеннями виразів (А–Д).

1 $x^2 - 3x - 10 = 0$

А $(25 - 7)^\circ$

2 $x^2 + 3x - 10 = 0$

Б $0,5\sqrt{18} \cdot \sqrt{8}$

3 $x^2 + 5x - 6 = 0$

В $(-2)^8 : 128$

4 $x^2 - 5x - 6 = 0$

Г $(5^2 - 5 \cdot 2^2)^1$

Д $0,5\sqrt{441}$

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1039. Задача Ал-Кархі. Знайдіть площе прямокутника, основа якого вдвічі більша від висоти, а площа чисельно дорівнює периметру.

1040. Подайте у вигляді многочлена:

- | | |
|----------------------------------|---------------------------------|
| а) $(a + b^2)(a^2 + b)$; | г) $(2m^2 - n)(2n^2 - m)$; |
| б) $(x^2 - 3y)(2x^2 + y)$; | г) $(x^3 - 4)(3x^3 + 5)$; |
| в) $(5a^2 + b^2)(2a^2 - 3b^2)$; | д) $(x^3 - 2x^2)(3x^3 + x^2)$. |

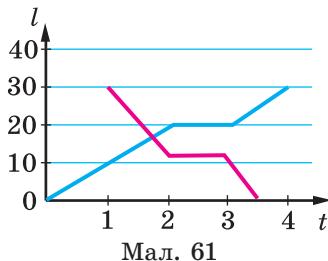
1041. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases} 0,5x + 0,3y = 8, \\ 1,2x - 0,5y = 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 1,4x - 2,5y = 39, \\ 0,8x - 1,3y = 21. \end{cases}$

1042. На малюнку 61 зображені графіки руху двох велосипедистів. Прокоментуйте, як довго кожен з них їхав, з якою швидкістю.

1043. Замініть літери цифрами, щоб виконувалась рівність

$$\text{ДІСК} + \text{РИМ} = \text{ІНАНТ}.$$



Мал. 61

СКАРБНИЧКА ДОСЯГНЕНЬ

- ✓ Знаю, які квадратні рівняння називають зведеними $x^2 + px + q = 0$.
- ✓ Розумію і можу сформулювати теорему Вієта

$$\begin{array}{ll} x_1, x_2 \text{ — корені рівняння} & \\ x^2 + px + q = 0 & ax^2 + bx + c = 0 \\ x_1 + x_2 = -p & x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \\ x_1 x_2 = q & x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{array}$$

- ✓ Розумію і формулюю теорему, обернену до теореми Вієта.
- ✓ Умію знаходити цілі розв'язки деяких квадратних рівнянь, використовуючи теорему, обернену до теореми Вієта.
- ✓ Умію складати квадратні рівняння за вказаними умовами.

Використовуємо набуті компетентності

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:

- Що таке многочлен (с. 242).
- Що означає розкласти многочлен на множники (с. 243).
- Як скорочують дроби (с. 27).

§ 22 Квадратний тричлен

→ **Квадратним тричленом називають многочлен виду $ax^2 + bx + c$, де x — змінна, a, b, c — дані числа, причому $a \neq 0$.**

Змінну квадратного тричлена можна позначати будь-якою буквою.
Приклади квадратних тричленів:

$$4x^2 - 5x + 6, \quad -y^2 + 4y + 7, \quad \frac{1}{2}z^2 + z - 1.$$

Якщо квадратний тричлен прирівняти до нуля, матимемо квадратне рівняння. Його корені й дискримінант називають відповідно коренями і дискримінантом даного квадратного тричлена. Наприклад, дискримінант і корені квадратного тричлена $5x^2 - 7x - 6$ дорівнюють відповідно 169 , 2 і $-\frac{3}{5}$, бо це дискримінант і корені рівняння $5x^2 - 7x - 6 = 0$.

З теореми Вієта випливає правило розкладання квадратних тричленів на множники.

[Якщо m і n — корені рівняння $x^2 + px + q = 0$, то $x^2 + px + q = (x - m)(x - n)$.]

$$\begin{aligned} \text{Бо } x^2 + px + q &= x^2 - (m + n)x + mn = x^2 - mx - nx + mn = \\ &= (x - m)(x - n). \end{aligned}$$

Приклад. Розкладіть на множники тричлен: $x^2 + 4x - 21$.

Розв'язання. а) Корені рівняння $x^2 + 4x - 21 = 0$ дорівнюють 3 і -7 .
Тому

$$x^2 + 4x - 21 = (x - 3)(x + 7).$$

Відповідь. $(x - 3)(x + 7)$.

Правильною є й така теорема.

Якщо корені квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ дорівнюють m і n , то його можна розкласти на множники:

$$ax^2 + bx + c = a(x - m)(x - n).$$

Доведення. $ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$, $a \neq 0$. Отже, корені m і n тричлена $ax^2 + bx + c$ є також коренями рівняння $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$.

За теоремою Вієта,

$$\frac{b}{a} = -(m+n), \quad \frac{c}{a} = mn.$$

Тому

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a(x^2 - (m+n)x + mn) = \\ &= a(x^2 - mx - nx + mn) = \\ &= a(x(x-m) - n(x-m)) = a(x-m)(x-n). \end{aligned}$$

Розглянемо приклад. Якщо треба розкласти на множники тричлен $3x^2 + 5x - 2$, розв'язуємо рівняння $3x^2 + 5x - 2 = 0$. Його дискримінант $D = 25 + 24 = 49$, тому

$$x_1 = \frac{-5+7}{6} = \frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{-5-7}{6} = -2.$$

Отже,

$$3x^2 + 5x - 2 = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x + 2).$$

Відповідь можна записати і так:

$$3x^2 + 5x - 2 = (3x - 1)(x + 2).$$

Розкладати квадратні тричлени на множники доводиться при скоченні дробів, зведенні їх до спільного знаменника тощо. Наприклад, щоб скоротити дріб $\frac{3x^2 + 5x - 2}{x^2 + x - 2}$, спочатку розкладають його чисельник і знаменник на множники. Оскільки

$$3x^2 + 5x - 2 = (3x - 1)(x + 2), \quad x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2), \text{ то}$$

$$\frac{3x^2 + 5x - 2}{x^2 + x - 2} = \frac{(3x - 1)(x + 2)}{(x - 1)(x + 2)} = \frac{3x - 1}{x - 1}.$$

Кожний квадратний тричлен $ax^2 + bx + c$ можна подати у вигляді $a(x - k)^2 + p$, де k і p — деякі числа. Таке перетворення називають **виділенням квадрата двочлена**. Як виконувати таке перетворення, покажемо на прикладі.

Щоб виділити з квадратного тричлена $2x^2 - 12x + 25$ квадрат двочлена, спочатку винесемо за дужки множник 2:

$$2x^2 - 12x + 25 = 2\left(x^2 - 6x + \frac{25}{2}\right).$$

Одночлен $6x$ подамо у вигляді добутку $2 \cdot 3x$, додамо до нього 9 і віднімемо 9:

$$x^2 - 2 \cdot 3x + 9 - 9 + \frac{25}{2} = (x - 3)^2 + \frac{7}{2}.$$

Остаточно маємо: $2x^2 - 12x + 25 = 2(x - 3)^2 + 7$.

Виділення квадрата двочлена дає можливість розв'язувати задачі на знаходження найбільшого чи найменшого значення квадратного тричлена.

Наприклад, щоб знайти, при якому значенні x значення виразу $2x^2 - 12x + 25$ найменше, виділимо з нього квадрат двочлена:

$$2x^2 - 12x + 25 = 2(x - 3)^2 + 7.$$

Другий доданок одержаної суми — число 7, а перший має найменше значення, коли дорівнює 0, тобто якщо $x = 3$.

Отже, тричлен $2x^2 - 12x + 25$ має найменше значення 7, якщо $x = 3$.

ХОЧЕТЕ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Якщо квадратний тричлен має дробові корені, то в розкладі його на лінійні множники бажано перший коефіцієнт цього тричлена внести в дужки. Наприклад:

$$3x^2 - 5x + 2 = 3(x - 1)\left(x - \frac{2}{3}\right) = (x - 1)(3x - 2).$$

$$10x^2 - 17x + 3 = 10\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{1}{5}\right) = (2x - 3)(5x - 1).$$

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

- Що називають квадратним тричленом?
- Скільки коренів може мати квадратний тричлен?
- Як розкласти на лінійні множники тричлен виду $x^2 + px + q$?
- Як розкласти на лінійні множники тричлен виду $ax^2 + bx + c$?
- Як виділити квадрат двочлена з квадратного тричлена:
 - $x^2 + px + q$;
 - $ax^2 + bx + c$?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ

- 1** Знайдіть значення функції $y = \frac{2x^2 + x - 3}{2x + 3}$ при $x = 2018$.
- **Розв'язання.** Розкладемо чисельник формули на множники:

$$y = \frac{2(x-1)\left(x+\frac{3}{2}\right)}{2x+3} = \frac{(x-1)(2x+3)}{2x+3} = x-1.$$

Якщо $x = 2018$, то $y = 2018 - 1 = 2017$.

Відповідь. $y = 2017$.

ВИКОНАЙТЕ УСНО

- 1044.** Знайдіть корені квадратного тричлена:

- | | | |
|---------------------|-----------------------|---------------------|
| a) $x^2 + 2x + 1$; | г) $x^2 - 4x + 4$; | е) $x^2 + 2x + 3$; |
| б) $x^2 + 6x + 9$; | г) $x^2 - 10x + 25$; | е) $x^2 + 6x + 5$; |
| в) $x^2 + 4 + 4x$; | д) $1 + x^2 - 2x$; | ж) $x^2 - 4x + 1$. |

РІВЕНЬ А

Знайдіть корені квадратного тричлена (1045–1046).

- 1045.** а) $x^2 + 8x - 9$;
 б) $2x^2 - 5x - 7$;
1046. а) $4x^2 + 3x - 1$;
 б) $6x^2 + 7x - 5$;
- в) $5x^2 + 2x - 3$;
 г) $y^2 - y - 6$;
 в) $-x^2 - 4x + 5$;
 г) $9x^2 + 6x + 1$;
- г) $4z^2 - 5z + 1$;
 д) $3n^2 - n - 2$.
 г) $-4x^2 + 5x - 2$;
 д) $0,4x^2 + 0,7x - 3$.

Розкладіть на множники квадратний тричлен (1047–1049).

- 1047.** а) $x^2 - 10x + 21$;
 б) $a^2 + 2a - 15$;
1048. а) $9x^2 - 12x + 4$;
 б) $0,5x^2 - 2x + 4$;
1049. а) $5 + 4z - z^2$;
 б) $x^2 + 10x + 25$;
- в) $2x^2 + 5x - 3$;
 г) $c^2 - 11c - 26$;
 в) $-x^2 + 5x - 6$;
 г) $x^2 - 5x + 6$;
 в) $2x^2 - 12x + 16$;
 г) $2x^2 - 13x + 6$;
- г) $9a^2 + 3a - 2$;
 д) $4c^2 + 25c + 25$.
 г) $x^2 - 3x + 5$;
 д) $y^2 + 2y - 8$.
 г) $6a^2 - 5a + 1$;
 д) $0,2c^2 - c + 1,2$.

Скоротіть дріб (1050–1051).

- 1050.** а) $\frac{x^2 - 2x - 3}{x+1}$;
 б) $\frac{x-4}{x^2 - x - 12}$;
 в) $\frac{2x-10}{x^2 - 3x - 10}$.
1051. а) $\frac{x+5}{x^2 + 7x + 10}$;
 б) $\frac{x-3}{x^2 - 2x - 3}$;
 в) $\frac{12+3x}{x^2 + 5x + 4}$.

Виділіть квадрат двочлена з квадратного тричлена (1052–1053).

- 1052.** а) $x^2 + 6x - 4$;
 б) $x^2 - 4x + 5$;
1053. а) $x^2 + 4x - 18$;
 б) $x^2 - 6x + 8$;
- в) $x^2 - 8x + 15$.
 в) $x^2 + 8x + 7$.

РІВЕНЬ Б

1054. Знайдіть корені квадратного тричлена:

- | | | |
|----------------------|----------------------------------|--|
| a) $2x^2 - 5x + 2$; | в) $1,5y^2 - 3y + \frac{4}{3}$; | г) $\frac{4}{49}x^2 + 1\frac{5}{7}x + 9$; |
| б) $-x^2 - 7x + 8$; | г) $z^2 - \sqrt{2}z + 0,5$; | д) $1\frac{2}{7}x^2 - 3x + 1\frac{17}{28}$. |

1055. Розкладіть на множники тричлен:

- | | |
|----------------------------|----------------------------|
| a) $6a^2 + a - 2$; | в) $0,2n^2 + 0,8n - 12$; |
| б) $c^2 - \sqrt{2}c - 4$; | г) $m^2 - \sqrt{2}m - 1$. |

Скоротіть дріб (**1056–1058**):

- | | | |
|---|--|---|
| 1056. а) $\frac{x^2 + 2x}{x^2 + 7x + 10}$; | в) $\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 4x + 3}$; | г) $\frac{x^2 - 3}{x^2 - 2\sqrt{3} + 3}$; |
| б) $\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 9}$; | г) $\frac{2a^2 - 5a + 2}{3a^2 - 3,5a + 1}$; | д) $\frac{c^2 + \sqrt{5}c - 10}{c^2 - 3\sqrt{5}c + 10}$. |

- | | | |
|---|---|---|
| 1057. а) $\frac{3x - 9}{2x^2 - 5x - 3}$; | в) $\frac{c^2 - 8c - 20}{c^2 - 11c + 10}$; | г) $\frac{a^2 + 9a + 14}{a^2 + 10a + 21}$; |
| б) $\frac{a^2 - 9}{2a^2 + 7a + 3}$; | г) $\frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 + 4x - 5}$; | д) $\frac{2c^2 - 5c - 3}{2c^2 + 7c + 3}$. |

- | | | |
|---|--|--|
| 1058. а) $\frac{a^2 - 8a + 7}{a^2 - 9a + 14}$; | в) $\frac{2x^2 - 3x + 1}{3x^2 - 4x + 1}$; | г) $\frac{x^2 + 2x - 15}{35 + 2x - x^2}$; |
| б) $\frac{2 - 3c + c^2}{c^2 - 4c + 4}$; | г) $\frac{3c^2 - 5c + 2}{3c^2 - c - 2}$; | д) $\frac{-3x^2 + 5x - 2}{x^2 - 1}$. |

1059. Знайдіть суму і різницю дробів:

- | | |
|--|--|
| а) $\frac{1}{2x^2 + 5x - 3}$ і $\frac{1}{2x^2 - 7x + 3}$; | б) $\frac{1}{6a^2 - 13a + 6}$ і $\frac{1}{3a^2 - 11a + 6}$. |
|--|--|

- 1060.** Доведіть: якщо в квадратному тричлені $ax^2 + bx + c = 0$ коефіцієнти $a + b + c = 0$, то $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{c}{a}$.

- 1061.** Доведіть: якщо в квадратному тричлені $ax^2 + bx + c = 0$ — сума коефіцієнтів $a + c = b$, то $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{c}{a}$.

З даного тричлена виділіть квадрат двочлена (**1062–1063**).

- | | | |
|---------------------------|-------------------------------|------------------------------|
| 1062. а) $x^2 - 2x + 5$; | в) $2x^2 + x - 3$; | г) $n^2 - \sqrt{2}n + 3,5$; |
| б) $a^2 - 6a + 10$; | г) $c^2 - \frac{2}{3}c + 1$; | д) $-x^2 + 4x + 5$. |

- 1063.** а) $2a^2 - 12a - 9$; в) $3a^2 - 6a - 9$; г) $5 + 4x - x^2$;
 б) $3c^2 + 30c + 5$; д) $10 + 6x - x^2$; д) $-4n^2 + 4n - 3$.

1064. Доведіть, що при будь-якому значенні x значення виразів $x^2 - 4x + 5$, $3x^2 - 12x + 7$, $\frac{1}{3}x^2 - 2x + 4$ є додатними.

1065. Обчисліть значення дробу:

- а) $\frac{2x^2 - 6x + 4}{2x^2 - 2x - 4}$ при $x = -1, 1; x = 9; x = 11; x = 99$;
 б) $\frac{a^3 - 5a^2 + 6a}{a^3 - 6a^2 + 9a}$ при $a = -2; a = 3, 5; a = 13$.

1066. Чим відрізняються графіки функцій:

- а) $y = x + 3$ і $y = \frac{x^2 - 2x - 15}{x - 5}$; б) $y = x + 6$ і $y = \frac{x^2 - 7x + 6}{x + 1}$?

1067. При якому значенні x значення даного тричлена найменше:

- а) $x^2 - 6x + 10$; б) $2x^2 + 16x + 13$; в) $\sqrt{3x^2 - 6x + 9}$?

1068. Знайдіть найбільше значення тричлена:

- а) $4 - 2x - x^2$; б) $1 - 4z - 4z^2$; в) $3 + 12c - c^2$.

1069*. При яких значеннях x значення виразу $f(x)$ найменше? Обчисліть це найменше значення $f(x)$, якщо:

- а) $f(x) = x^2 - 2x + 2$; в) $f(x) = 2x^2 - 12x + 19$;
 б) $f(x) = x^2 - 6x + 11$; г) $f(x) = 1,5x^2 - 3x + 2$.

1070*. Знайдіть відстань між найближчими точками осі x і графіка функції $y = x^2 - 2x + 7$.

1071*. При яких значеннях x значення виразу $f(x)$ найбільше? Обчисліть це значення, якщо:

- а) $f(x) = 8 + 6x - x^2$; б) $f(x) = x - x^2$.

1072*. Знайдіть область значень функції:

- а) $y = -x^4 - 6x^2 + 5$; б) $y = x^4 - 2x^3 + x^2 - 2$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1073. *Відкрита задача.* Розв'яжіть графічно систему рівнянь $y = \sqrt{x}$ і $[?]$, якщо один із її розв'язків $(1; 1)$.

1074. Розв'яжіть рівняння:

- а) $\frac{x^2 + 2}{x + 3} = \frac{x^2 + 4x}{x + 3}$; б) $\frac{x^2 + 2x}{x - 4} = \frac{x^2 - 8}{x - 4}$.

1075. Ціну на товар знизили спочатку на 20 %, а згодом ще на 15 %, і в результаті він став коштувати 540 грн 60 коп. Якою була початкова вартість товару?

1076. Розташуйте числа кожної таблиці у порядку зростання і ви дізнаєтесь: ім'я (а) та прізвище (б) відомого скульптора, автора пам'ятника Нільсу Хенріку Абелю в Осло.

$\sqrt{0,16}$	$(-2)^3$	$(0,55)^1$	$(-1,1)^4$	256°	$\sqrt{(-2)^2}$
У	Г	С	А	Т	В

a

$(\sqrt{8} - \sqrt{2})^{-2}$	5°	$\sqrt{1,21}$	$(4^2 - 5^2)^3$	$\left(\frac{2}{3}\right)^3$	$\left(-\frac{3}{2}\right)^{-2}$	$(-0,2)^{-4}$	$(\sqrt{4+9})^2$
I	Л	А	В	Г	Е	Д	Н

б

У центрі міста Осло — столиці Норвегії — в Королівському парку встановлено бронзовий пам'ятник видатному норвезькому математику Нільсу Хенріку Абелю (1802–1829). Ця споруда має вигляд гранітної глиби, на яку здіймається молодий чоловік, переступаючи через двох огидних чудовиськ.

Деякі математики жартома говорять, що ці чудовиська символізують рівняння п'ятого степеня і еліптичні функції, переможені Абелем.



СКАРБНИЧКА ДОСЯГНЕНЬ

- ✓ Можу навести приклад квадратного тричлена.
- ✓ Можу сформулювати означення квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).
- ✓ Можу записати і використати формулу розкладання квадратного тричлена.

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), \text{ де } x_1 \text{ і } x_2 \text{ — корені.}$$

- ✓ Умію розв'язувати вправи, що передбачають розкладання квадратного тричлена на множники.

Використовуємо набуті компетентності

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:

- Що таке прикладна задача.
- Що таке математична модель.
- Основні етапи розв'язування задач складанням рівнянь:

 - 1) вибрати невідоме і позначити його буквою;
 - 2) за допомогою цієї букви виразити всі інші невідомі й залежності;
 - 3) скласти рівняння;
 - 4) розв'язати рівняння;
 - 5) перевірити, як одержаний розв'язок рівняння відповідає умові задачі.

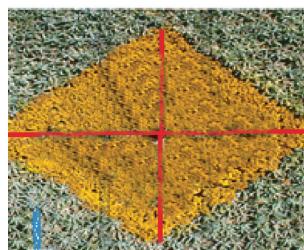
§ 23 | Квадратне рівняння як математична модель прикладної задачі

Значна частина питань життєдіяльності людини зводиться до розв'язування різного роду задач. З 7 класу вам відомо, що в математиці задачі, умови яких містять нематематичні поняття, називають прикладними. Для розв'язування таких задач створюють спеціальні математичні моделі у вигляді рівнянь, нерівностей, схем, таблиць тощо. Розв'язування багатьох прикладних задач можна спростити, якщо подати модель у вигляді квадратного рівняння. Наведемо приклад.

Задача 1. Клумба, площею 54 м^2 , має форму ромба, середнє арифметичне діагоналей якого дорівнює $10,5 \text{ м}$. Знайдіть відстані між протилежними вершинами клумби.

Розв'язання. Приймемо довжини діагоналей ромба за шукані відстані. Якщо середнє арифметичне двох чисел дорівнює $10,5$, то їх сума вдвічі більша, тобто сума діагоналей ромба дорівнює 21 м . Нехай одна з діагоналей — $x \text{ м}$, тоді друга дорівнює $(21 - x) \text{ см}$. Оскільки площа ромба дорівнює пів добутку діагоналей, то добуток діагоналей удвічі більший, тобто дорівнює 108 . Маємо рівняння:

$$x(21 - x) = 108, \text{ або } x^2 - 21x + 108 = 0.$$



Розв'яжемо це рівняння: $D = 21^2 - 4 \cdot 108 = 9$,

$$x_{1,2} = \frac{21 \pm \sqrt{9}}{2}, \quad x_1 = 9, \quad x_2 = 12.$$

Якщо $x = 9$, то $21 - x = 12$; якщо $x = 12$, то $21 - x = 9$.

Відповідь. 9 м і 12 м.

Задача 2. Власна швидкість моторного човна — 18 км/год. Відстань, що дорівнює 12 км, за течією річки він проходить на 9 хв швидше, ніж проти течії. Знайдіть швидкість течії річки.

Розв'язання. 9 хв = 0,15 год. Якщо швидкість течії річки дорівнює x км/год, то швидкість човна за течією становить $(18 + x)$ км/год, а проти течії — $(18 - x)$ км/год. Відстань, що дорівнює 12 км за течією, він проходить за $\frac{12}{18+x}$ год, а проти течії — за $\frac{12}{18-x}$ год. Маємо рівняння:

$$\frac{12}{18-x} - \frac{12}{18+x} = 0,15, \text{ або } \frac{4}{18-x} - \frac{4}{18+x} = 0,05,$$

звідси

$$4(18 + x) - 4(18 - x) - 0,05(18 - x)(18 + x) = 0, \\ x^2 + 160x - 324 = 0, \quad D = 160^2 + 4 \cdot 324 = 26\ 896.$$

$$x_{1,2} = \frac{-160 \pm \sqrt{26\ 896}}{2} = \frac{-160 \pm 164}{2}, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = -162.$$

Задачу задовольняє тільки додатний корінь.

Відповідь. 2 км/год.

Задача 3. На площині n точок розміщені так, що жодні три з них не лежать на одній прямій. Якщо кожну із цих точок сполучити відрізком з усіма іншими, то утвориться 351 відрізок. Знайдіть число n .

Розв'язання. З однієї точки виходить $n - 1$ відрізків, з усіх n даних точок виходить $n(n - 1)$ відрізків. При цьому кожен відрізок повторюється двічі, бо має два кінці. Отже, всього відрізків $\frac{n(n-1)}{2}$.

Маємо рівняння:

$$\frac{n(n-1)}{2} = 351, \text{ або } n^2 - n - 702 = 0.$$

Розв'яжемо це рівняння: $D = 1 + 4 \cdot 702 = 2809$,

$$n_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{2809}}{2} = \frac{1 \pm 53}{2},$$

звідси $n_1 = 27$, $n_2 = -26$. Від'ємний корінь умову задачі не задовольняє.

Відповідь. $n = 27$.

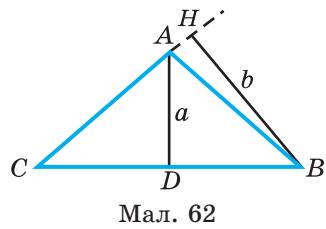
ХОЧЕТЕ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Іноді в задачах, крім числових даних, бувають і параметри. У таких випадках розв'язування задачі бажано супроводжувати відповідними дослідженнями — вказувати, яких значень можуть набувати параметри. Наприклад, розв'яжемо таку задачу.

Задача. Знайдіть сторони рівнобедреного трикутника, якщо відомо, що дві нерівні висоти його дорівнюють a і b .

Розв'язання. Позначимо сторони трикутника буквами: $AC = AB = x$, $CB = y$ (мал. 62). Тоді, користуючись теоремою Піфагора і формулою для обчислення площини трикутника, складемо таку

систему: $\begin{cases} x^2 = \frac{y^2}{4} + a^2, \\ bx = ay. \end{cases}$



Мал. 62

Визначивши з другого рівняння y і підставивши його в перше, одержимо:

$$x^2 = \frac{b^2}{4a^2}x^2 + a^2, \quad x = \frac{2a^2}{\sqrt{4a^2 - b^2}}.$$

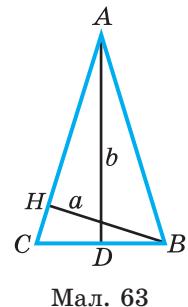
$$\text{Тоді } y = \frac{b}{a}x = \frac{2ab}{\sqrt{4a^2 - b^2}}. \quad \text{Отже, } x = \frac{2a^2}{\sqrt{4a^2 - b^2}}, \quad y = \frac{2ab}{\sqrt{4a^2 - b^2}}.$$

Дослідження. В обчислених значеннях x і y під знаком кореня маємо різницю $4a^2 - b^2$, яка має бути додатною, а це можливо тільки при $b < 2a$.

Отже, наведений розв'язок задачі правильний не при будь-яких додатних a і b , а лише при $b < 2a$.

Однак це ще не все. Ми розглянули випадок, коли на основу y опущено висоту a . Але для тих самих a і b можливий інший варіант (мал. 63). Тоді маємо:

$$\begin{cases} x^2 = \frac{y^2}{4} + b^2, \quad \text{звідси } x^2 = \frac{a^2}{4b^2}x^2 + b^2. \\ ax = by, \end{cases}$$



Мал. 63

У цьому випадку $a < 2b$, тобто $b > \frac{a}{2}$.

Відповідь. Якщо $\frac{a}{2} < b < 2a$, то задача має два розв'язки:

$$1) \ x_1 = \frac{2a^2}{\sqrt{4a^2 - b^2}}, \quad y_1 = \frac{2ab}{\sqrt{4a^2 - b^2}}; \quad 2) \ x_2 = \frac{2b^2}{\sqrt{4b^2 - a^2}}, \quad y_2 = \frac{2ab}{\sqrt{4b^2 - a^2}}.$$

Якщо $b \geq 2a$, то задача має один розв'язок: $x = \frac{2b^2}{\sqrt{4b^2 - a^2}}, \quad y = \frac{2ab}{\sqrt{4b^2 - a^2}}$.

Якщо $b \leq \frac{a}{2}$, то задача також має один розв'язок:

$$x = \frac{2a^2}{\sqrt{4a^2 - b^2}}, \quad y = \frac{2ab}{\sqrt{4a^2 - b^2}}.$$

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

- Які задачі можна розв'язувати за допомогою квадратних рівнянь?
- Що таке математична модель задачі?
- Як знайти швидкість тіла за течією?
- Як знайти швидкість тіла проти течії?

«Математика
здає свої фортеці
лише сильним і
сміливим...»

А. Г. Конфорович

ВИКОНАЄМО РАЗОМ

- 1** Знайдіть три послідовних цілих числа, сума квадратів яких дорівнює 509.

- Розв'язання.** Нехай шукані числа: $x-1$, x , $x+1$. Тоді маємо рівняння: $(x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2 = 509$. Розв'яжемо його. Розкриємо дужки та зведемо подібні доданки:

$$x^2 - 2x + 1 + x^2 + x^2 + 2x + 1 - 509 = 0,$$

$$3x^2 - 507 = 0, \text{ звідси } x^2 = 169, x_1 = 13, x_2 = -13.$$

Отже, два інші числа: 12, 14 або -12, -14.

Відповідь. 12, 13, 14 або -12, -13, -14.

- 2** Фірма зобов'язалася виготовити за певний строк 1200 одиниць продукції. Роботу було закінчено на 4 дні раніше, бо план щоденно перевиконувався на 10 одиниць. За скільки днів фірма зобов'язувалася закінчити роботу?

- Розв'язання.** Запишемо дані задачі в таблицю.

Робота	Днів	Щоденний випуск	Всього випущено
За планом	t	$\frac{1200}{t}$	1200
Фактично	На 4 менше $t - 4$	$\frac{1200}{t-4}$ На 10 більше	1200

Складаємо рівняння, скориставшись даними стовпчика «Щоденний випуск».

$$\frac{1200}{t-4} - \frac{1200}{t} = 10, \text{ або } \frac{120}{t-4} - \frac{120}{t} = 1.$$

$$\text{Звідси: } 120t - 120(t-4) = t(t-4) \text{ або } t^2 - 4t - 480 = 0.$$

Корені рівняння 24 і -20. Задачу задовольняє тільки додатний корінь: $t = 24$.

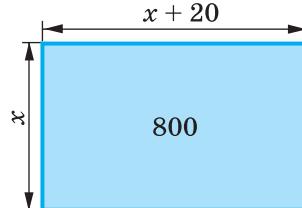
Відповідь. За 24 дні.

ВИКОНАЙТЕ УСНО

- 1077.** Площа квадратної скатертини дорівнює S . Знайдіть її:
- сторону;
 - периметр;
 - діагональ.
- 1078.** Площа поверхні іграшкового кубика дорівнює Q . Знайдіть:
- площу грані кубика;
 - ребро кубика;
 - діагональ грані кубика.
- 1079.** *Відкрита задача.* Складіть прикладну задачу, математичною моделлю до якої буде рівняння $\frac{n(n-1)}{2} = 351$ (див. задачу 3, с. 215).

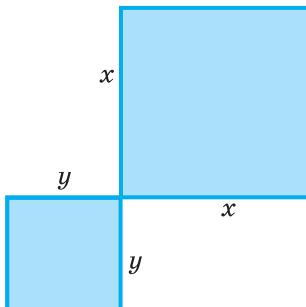
РІВЕНЬ А

- 1080.** Знайдіть два числа: а) сума яких дорівнює 61, а добуток — 900; б) різниця яких дорівнює 11, а добуток — 312.
- 1081.** Знайдіть довжину і ширину ділянки прямокутної форми, якщо її площа дорівнює 800 м^2 , а довжина на 20 м більша від ширини (мал. 64).
- 1082.** Периметр поля прямокутної форми дорівнює 6 км, а його площа — 200 га. Знайдіть довжину і ширину поля.
- 1083.** Добуток двох послідовних цілих чисел більший від їх суми на 239. Знайдіть ці числа.
- 1084.** *Задача Л. Магніцького (1669–1739).* Знайдіть число, знаючи, що, додавши до його квадрата 108, одержимо число в 24 рази більше від шуканого.
- 1085.** Знайдіть число, яке на:
- 132 менше, ніж його квадрат;
 - 0,16 більше за його квадрат;
 - 435 менше, ніж його подвоєний квадрат;
 - 240 більше за квадратний корінь із цього числа.
- 1086.** Знайдіть два числа, якщо:
- їх сума дорівнює 20, а добуток — 91;
 - їх різниця дорівнює 7, а добуток — 198;
 - їх сума дорівнює 23, а сума квадратів — 265;
 - їх різниця дорівнює 16, а сума квадратів — 257.
- 1087.** Знайдіть дві суміжні сторони прямокутника, якщо:
- їх сума дорівнює 13 м, а площа прямокутника — 40 м^2 ;
 - їх різниця дорівнює 5 м, а площа прямокутника — 66 м^2 ;
 - периметр прямокутника дорівнює 60 м, а площа — 221 м^2 .
- 1088.** Знайдіть два послідовних натуральних числа, сума квадратів яких дорівнює 545.

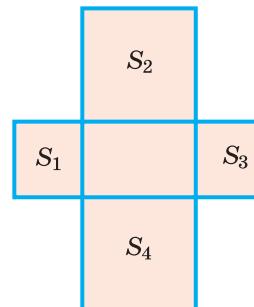


Мал. 64

- 1089.** Добуток двох послідовних парних чисел на 41 більший за їх середнє арифметичне. Знайдіть ці числа.
- 1090.** Квадрат суми двох послідовних натуральних чисел більший за суми їх квадратів на 264. Знайдіть числа.
- 1091.** Знайдіть три послідовних цілих числа, сума квадратів яких дорівнює 434.
- 1092.** Периметр прямокутника дорівнює 26 см, а сума площ квадратів, побудованих на двох суміжних сторонах прямокутника, дорівнює 89 см^2 . Знайдіть сторони цього прямокутника (мал. 65).
- 1093.** Периметр прямокутника дорівнює 32 см, а сума площ чотирьох квадратів, побудованих на його сторонах, — 260 см^2 . Знайдіть сторони прямокутника (мал. 66).
- 1094.** У кінотеатрі було 320 місць. Коли кількість місць у кожному ряді збільшили на 4 і додали ще один ряд, у залі стало 420 місць. Скільки стало рядів у кінотеатрі?
- 1095.** Теплохід пройшов за течією річки 48 км і стільки само проти течії, витративши на весь шлях 5 год. Знайдіть власну швидкість теплохода, якщо швидкість течії річки становить 4 км/год.
- 1096.** Човен пройшов проти течії 22,5 км і за течією — 28,5 км, витративши на весь шлях 8 год. Швидкість течії річки — 2,5 км/год. Знайдіть власну швидкість човна.



Мал. 65



Мал. 66

- 1097.** Електропоїзд затримався в дорозі на 4 хв і ліквідував запізnenня на перегоні в 20 км, пройшовши його зі швидкістю на 10 км/год більшою, ніж за розкладом. Якою була швидкість поїзда на цьому перегоні?
- 1098.** З пункту A відправили за течією річки пліт. Через 5 год 20 хв з пункту A слідом за плітом вийшов моторний човен, який наздогнав пліт, пройшовши 20 км. Знайдіть швидкість течії річки, якщо човен проходив щогодини на 12 км більше, ніж пліт.

1099. На середині шляху між A і B поїзд затримали на 10 хв. Щоб прибути у B за розкладом, довелось початкову швидкість поїзда збільшити на 12 км/год. Знайдіть початкову швидкість поїзда, якщо відстань між A і B дорівнює 120 км.

1100. Теплохід пройшов униз річкою 150 км і повернувся назад, затраливши на весь шлях 5,5 год. Знайдіть швидкість течії річки, якщо швидкість теплохода в стоячій воді становить 55 км/год.

1101. Турист проплив моторним човном уверх за течією річки 25 км, а назад спустився плотом. Човном він плив на 10 год менше, ніж плотом. Знайдіть швидкість течії річки, якщо швидкість човна в стоячій воді — 12 км/год.

РІВЕНЬ Б

1102. Велосипедист проїхав 96 км на 1,6 год швидше, ніж планував. При цьому за кожну годину він проїжджав на 2 км більше, ніж планував. З якою швидкістю він їхав?

1103. З A до B , відстань між якими становить 700 км, виїхав автобус. Якби він зменшив швидкість на 10 км/год, то в дорозі був би на $1\frac{2}{3}$ год довше. Скільки годин їде автобус від A до B ?

1104. Мотоцикліст їхав з одного міста в інше впродовж 4 год. Повертаючись назад, він перші 100 км їхав із тією самою швидкістю, а потім зменшив її на 10 км/год і тому на зворотний шлях витратив на 30 хв більше. Знайдіть відстань між містами.

1105. Рибалка вирушив на човні з пункту A проти течії річки. Пропливши 6 км, він кинув весла, і через 4,5 год після виходу з A течія знову віднесла його до пункту A . Знайдіть швидкість течії річки, якщо швидкість човна в стоячій воді — 90 м/хв.

1106. Батько і син пройшли 480 м, причому батько зробив на 200 кроків менше, ніж син. Знайдіть довжину кроку кожного з них, якщо крок батька довший за крок сина на 20 см.

1107. Родина готувала велиcodні крашанки і писанки (мал. 67). Вони підрахували: жовтих крашанок у стільки разів більше, ніж синіх, у скільки синіх крашанок більше, ніж писанок. А якщо з однієї жовтої крашанки зробити ще одну писанку, то писанок стане втричі менше, ніж жовтих крашанок. Скільки було тих та інших?



Мал. 67

- 1108.** Катер пройшов за течією 90 км за певний час. За той самий час він пройшов би проти течії 70 км. Яку відстань за цей час пропливе пліт?
- 1109.** Дві бригади, працюючи разом, закінчили асфальтування дороги за 4 дні. Скільки днів потрібно було б на виконання цієї роботи кожній бригаді окремо, якщо одна з них могла б закінчити асфальтування дороги на 6 днів раніше, ніж інша?
- 1110.** Два комбайнери зібрали пшеницю з поля за 4 дні. Якби один з них зібрав половину всієї пшениці, а другий — решту, то всю пшеницю зібрали б за 9 днів. За скільки днів кожний комбайнер окремо міг би зібрати всю пшеницю з поля?
- 1111. (ЗНО 2018).** У майстерні мали виготовити 240 стільців за n днів, причому щодня мали виготовляти однакову кількість стільців. Проте, на прохання замовника, завдання виконали на 2 дні раніше за планованого терміну. Для цього довелося денну норму виготовлення збільшити на 4 стільці. Визначте n .
- 1112.** Двоє мулярів, виконуючи певне завдання разом, могли б закінчити його за 12 днів. Якщо спочатку працюватиме тільки один із них, і після виконання ним половини всієї роботи, його замінить інший робітник, то на виконання завдання знадобиться 25 днів. За скільки днів кожний муляр міг би виконати всю роботу?
- 1113.** Два робітники, з яких другий починає роботу на 1,5 дня пізніше від першого, можуть виконати роботу за 7 днів. За скільки днів кожний з них окремо міг би виконати всю роботу, якщо другий робітник може виконати її на 3 дні швидше, ніж перший?
- 1114.** Водонапірний бак наповнюється за допомогою двох труб за 2 год 55 хв. Перша труба може наповнити його на 2 год швидше, ніж друга. За який час кожна труба окремо може наповнити бак?
- 1115. Стародавня індійська задача (Бхаскара, 1114 р.).**
- | | |
|---|---|
| <p>Розділивши на дві зграї,
забавлялись мавпи в гаї.
Одна восьма їх в квадраті
танцювали вельми раді.</p> | <p>А дванадцять на деревах
підняли веселий регіт,
що навколо аж гуло.
Скільки їх всього було?</p> |
|---|---|
- 1116.**
- | |
|--|
| <p>На вишні заквітчаній кілька гілок,
на них сіли порівну двісті бджілок.
Коли б на п'ять менше гілок розцвіло,
на кожній би бджіл на дві більше було б.
То ж скільки гілок на цій вишненці гожій
і скільки бджілок працювало на кожній?</p> |
|--|
- 1117.** Кілька точок розміщено на площині так, що жодні три з них не лежать на одній прямій. Якщо кожну з них сполучити відрізками зі всіма іншими даними точками, то утвориться 153 відрізки. Скільки дано точок?

1118. У шаховому турнірі було зіграно 66 партій. Знайдіть кількість учасників турніру, коли відомо, що кожний учасник зіграв із кожним по одній партії.

1119. На першості району з футболу зіграно 56 матчів, причому кожна команда грава зожною по два рази. Скільки команд брали участь у грі?

1120. Розв'яжіть математичні кросворди, які зображені на малюнку 68.

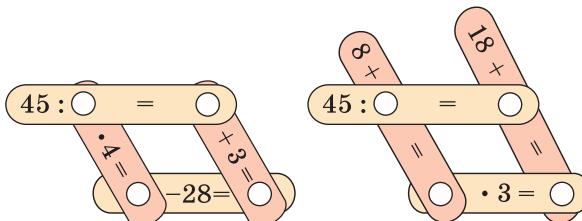
1121. Дно ящика — прямокутник, довжина якого в 1,5 раза більша за ширину. Висота ящика дорівнює 0,5 м. Знайдіть об'єм ящика, коли відомо, що площа його дна на $0,76 \text{ м}^2$ менша від площині бічних стінок.

1122. З першої ділянки землі зібрали 4,8 т картоплі. З другої ділянки, площа якої на 0,03 га менша від першої, — 2 т картоплі, причому з однієї сотки цієї ділянки зібрали на 200 кг менше, ніж з однієї сотки першої ділянки. Знайдіть площину кожної ділянки.

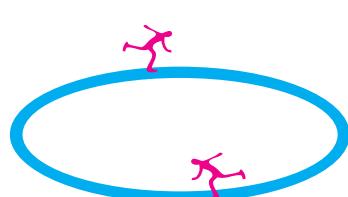
1123. Круговою доріжкою завдовжки 2 км рухаються в одному напрямку Тетяна і Сергій, які сходяться через кожні 20 хв (мал. 69). Знайдіть швидкість Тетяни і Сергія, якщо Тетяна пробігає коло на 1 хв швидше, ніж Сергій.

1124. До розчину, що містить 40 г солі, додали 200 г води, після чого його концентрація зменшилась на 10 %. Скільки води містив розчин і якою була його концентрація?

1125. Із двох кусків металу перший має масу 880 г, а другий — 858 г, причому об'єм первого куска на 10 см^3 менший від об'єму другого. Знайдіть густину кожного металу, якщо густина первого на $1 \text{ г}/\text{cm}^3$ більша за густину другого.



Мал. 68



Мал. 69

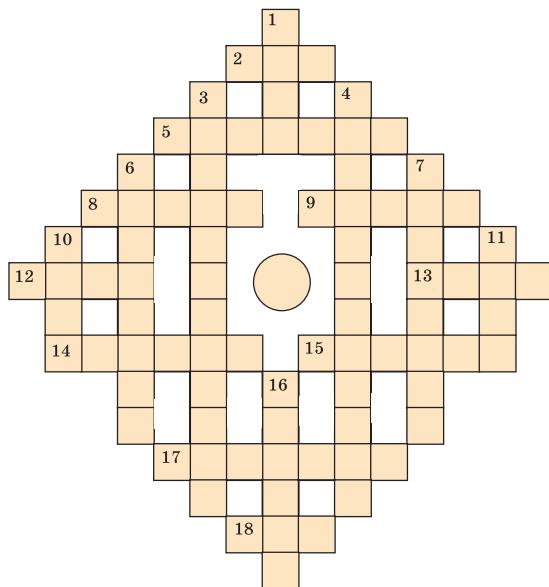
1126. До 20 %-го розчину кислоти додали 200 г води, після чого його концентрація зменшилась на 10 %. Якою стала концентрація розчину і скільки в ньому води?

1127. Сплав золота зі сріблом, який містив 80 г золота, сплавили зі 100 г чистого золота. У результаті вміст золота у сплаві збільшився на 20 %. Скільки у сплаві срібла?

1128. Скільки сторін має опуклий многокутник, якщо в ньому всього 135 діагоналей?

1129. Практичне завдання. Знаючи, що маса M Землі у 81,5 раза більша від маси m Місяця і що сила взаємного тяжіння двох космічних тіл прямо пропорційна добутку їх мас і обернено пропорційна квадрату відстані між ними, знайдіть на прямій Земля–Місяць точки, у яких сили тяжіння Землі й Місяця зрівноважені. Порівняйте власне розв'язання з тим, що є в статті «Алгебра місячного перельоту» в книжці Я. І. Перельмана «Цікава алгебра».

1130. Розв'яжіть кросворд (мал. 70).



Мал. 70.

По горизонталі: **2.** Третій степінь. **5.** Компонент ділення. **8.** Куб числа. **9.** Система штрихів на вимірювальному приладі. **12.** Нахил на бік корабля. **13.** Перше натуральне число. **14.** Найпростіша неподільна єдність. **15.** Те, чим міряють що-небудь. **17.** Вираз виду a^n . **18.** Латинська буква.

По вертикалі: **1.** Ціле число. **3.** Натуральне число, менше від 20. **4.** Вираз $b^2 - 4ac$ для рівняння $ax^2 + bx + c = 0$. **6.** Рівність із невідомою змінною. **7.** Сукупність операцій, яка приводить до розв'язування певного виду задач. **10.** Одиція маси. **11.** Податок, сплачуваний за перевезення товарів за кордон. **16.** Німецький математик і астроном, який відкрив закон руху планет.

СКАРБНИЧКА ДОСЯГНЕНЬ

- ✓ Можу розв'язувати вправи, що передбачають складання і розв'язування квадратних рівнянь і рівнянь, що зводяться до них як математичних моделей прикладних задач.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

ВАРИАНТ I

1°. Розв'яжіть рівняння:

а) $3x^2 - 27 = 0;$

в) $y^2 - 9y + 14 = 0;$

б) $4z^2 + z = 0;$

г) $\frac{15}{x} - 3x = 4.$

2°. Знайдіть сторони прямокутника, якщо одна з них на 3,5 см довша за другу, а площа прямокутника дорівнює 92 см².

ВАРИАНТ II

1°. Розв'яжіть рівняння:

а) $2x^2 - 50 = 0;$

в) $y^2 + 2y = 15;$

б) $9z^2 - z = 0;$

г) $\frac{18}{x} - 5x = 27.$

2°. Знайдіть сторони прямокутника, якщо одна з них на 2,6 см коротша від іншої, а площа прямокутника дорівнює 5,6 см².

ВАРИАНТ III

1°. Розв'яжіть рівняння:

а) $5z^2 - 20 = 0;$

в) $y^2 + y = 12;$

б) $9x^2 + 4x = 0;$

г) $\frac{16}{x} - 7x = 24.$

2°. Знайдіть два числа, сума яких дорівнює 8,5, а добуток — 15.

ВАРИАНТ IV

1°. Розв'яжіть рівняння:

а) $7c^2 - 28 = 0;$

в) $y^2 - 3y = 10;$

б) $4x^2 - 9x = 0;$

г) $\frac{12}{x} - 5x = 28.$

2°. Знайдіть два числа, сума яких дорівнює 47, а добуток — 510.

ІСТОРИЧНІ ВІДОМОСТІ

Квадратні рівняння найпростіших видів вавилонські математики вміли розв'язувати ще 4 тис. років тому. Згодом розв'язували їх також у Китаї і Греції. Особливу увагу квадратним рівнянням приділив **Мухаммед аль-Хорезмі** (IX ст.). Він показав, як розв'язувати (при додатних a і b) рівняння видів

$$x^2 + ax = b, \quad x^2 + a = bx, \quad ax + b = x^2,$$

не використовуючи будь-яких виразів, навіть числа записував словами. Наприклад, рівняння $x^2 + 21 = 10x$ він вчив розв'язувати так: «Поділи навпіл корені, вийде п'ять, і помнож це на рівне йому — буде двадцять п'ять, і відніми від цього числа двадцять один, то залишиться чотири, добудь із цього корінь, буде два, і відніми це від половини коренів, тобто від п'яти, — залишиться три; це й буде корінь, який ти шукаєш». Від'ємних коренів тоді не визначали.

Індійські вчені у вирішенні цього питання пішли далі. Вони знаходили і від'ємні корені квадратних рівнянь. Наприклад, **Бхаскара** (1114–1178), розв'язуючи рівняння $x^2 - 45x = 250$, знаходить два корені: 50 і -5. Тільки після цього зауважує: «Друге значення в даному випадку не слід брати, бо люди не схвалюють від'ємних абстрактних чисел».

Алгебраїчні задачі на складання рівнянь індійські вчені записували у віршованій формі й розглядали їх як окремий вид мистецтва. Вони пояснювали: «Як сонце затмарює зірки своїм сяйвом, так і вчена людина може затмарювати славу інших у народних зібраннях, пропонуючи алгебраїчні задачі, тим паче, розв'язуючи їх».

Формули коренів квадратного рівняння вивів **Франсуа Вієт** (1540–1603). Теорему, яку тепер називають його ім'ям, учений формулював так: «Якщо $(B + D)A - A^2$ дорівнює BD , то A дорівнює B і дорівнює D ». Від'ємних коренів він не розглядав.

Сучасні способи розв'язування квадратних рівнянь поширились завдяки працям **Рене Декарта** (1596–1650) та **Ісаака Ньютона** (1643–1727).

Способи розв'язання рівнянь третього і четвертого степенів вперше були опубліковані в книжці **Дж. Кардано** «Велике мистецтво або про правила алгебри» в 1545 році. Відкриття цих способів належить іншим італійським математикам (С. Ферро, Н. Тарталья, Дж. Кардано, Л. Феррарі), але опублікував їх уперше саме Дж. Кардано.

Головне в розділі

Рівняння — це рівність, яка містить невідомі числа, позначені буквами. Числа, які задовольняють рівняння, — його *розв'язки* (або *корені*). *Розв'язати рівняння* — це означає знайти всі його розв'язки або показати, що їх не існує.

Два рівняння називають *рівносильними*, якщо одне з них має ті самі розв'язки, що й інше. Рівняння, які не мають розв'язків, також вважають *рівносильними* одне одному.

Квадратним називають рівняння вигляду $ax^2 + bx + c = 0$, де x — змінна, a, b, c — дані числа, причому $a \neq 0$. Вираз $D = b^2 - 4ac$ — його *дискримінант*. Якщо $D > 0$, то дане рівняння має два корені:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

Якщо $D = 0$, то ці корені рівні.

Якщо $D < 0$, то таке квадратне рівняння не має дійсних коренів.

Квадратне рівняння називають *неповним*, якщо хоч один з його коефіцієнтів, крім першого, дорівнює 0. Рівняння:

$ax^2 = 0$ має єдиний корінь: $x = 0$;

$ax^2 + bx = 0$ має два корені: $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{b}{a}$;

$ax^2 + c = 0$ має два корені: $x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$, $x_2 = -\sqrt{\frac{c}{a}}$, якщо $\frac{c}{a} < 0$,

і жодного, якщо $\frac{c}{a} > 0$.

Квадратне рівняння називають *зведенім*, якщо його перший коефіцієнт дорівнює одиниці. Якщо рівняння $x^2 + px + q = 0$ має два корені, то

$$x_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \quad x_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Теорема Вієта. Якщо зведене квадратне рівняння $x^2 + px + q = 0$ має два корені x_1 і x_2 , то їх сума дорівнює $-p$, а добуток дорівнює q .

$$x_1 + x_2 = -p; \quad x_1 \cdot x_2 = q.$$

Якщо m і n — корені рівняння $x^2 + px + q = 0$, то

$$x^2 + px + q = (x - m)(x - n).$$

Якщо корені квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ дорівнюють m і n , то його можна розкласти на множники:

$$ax^2 + bx + c = a(x - m)(x - n).$$

Готуємося до тематичного оцінювання

Тестові завдання № 4

- 1** Укажіть квадратне рівняння:
- а) $x^2 + 12 = 0$; в) $3x = 9$;
 б) $20 - x = 0$; г) $x^{-2} = 100$.
- 2** Рівняння $ax^2 + c = 0$ має корені, якщо:
- а) $a > 0, c > 0$; в) $a < 0, c < 0$;
 б) $a > 0, c < 0$; г) $a = 0, c \neq 0$.
- 3** Скільки коренів має рівняння $x^2 + 2x + 1 = 0$:
- а) один; б) два; в) безліч; г) жодного?
- 4** Дискримінант рівняння $x^2 + 7x + 6 = 0$ дорівнює:
- а) 7; б) 6; в) 25; г) 5.
- 5** Перший коефіцієнт зведеного квадратного рівняння дорівнює:
- а) 1; б) 2; в) 3; г) 5.
- 6** Добуток коренів рівняння $x^2 + 12x + 20 = 0$ дорівнює:
- а) 1; б) 20; в) 3; г) 12.
- 7** Сума коренів рівняння $x^2 + 2x - 15 = 0$ дорівнює:
- а) 5; б) 2; в) -2; г) -5.
- 8** Дискримінант рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ — це вираз:
- а) $b^2 - ac$; б) $2b - 4ac$; в) $b^2 - 4ac$; г) $-b^2 - 4ac$.
- 9** Рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ має два корені, якщо:
- а) $D > 0$; б) $D = 0$; в) $D < 0$; г) $D \leq 0$.
- 10** Рівняння $x^2 + 6x - 7 = 0$ має корені:
- а) 1 і 7; б) 1 і 6; в) 1 і -7; г) -1 і 7.

Типові завдання до контрольної роботи № 4

- 1•** Розв'яжіть рівняння:
 а) $x^2 - 9x = 0$; б) $16x^2 = 49$.
- 2•** Знайдіть корені рівняння:
 а) $x^2 - 6x - 280 = 0$; б) $3x^2 + 8x - 3 = 0$.
- 3•** Розкладіть квадратний тричлен на множники:
 а) $x^2 - 5x + 4$; б) $3x^2 + 2x - 5$.
- 4•** У рівнянні $x^2 + px + 35 = 0$ один із коренів дорівнює 7. Знайдіть другий корінь і коефіцієнт p .
- 5•** Одне з двох натуральних чисел на 5 більше за інше. Знайдіть ці числа, якщо їх добуток дорівнює 266.
- 6•** Розв'яжіть рівняння:
 а) $(5x - 7)(8x + 1) = (8x + 1)^2$;
 б) $(2x - 1)^4 - 5(2x - 1)^2 + 4 = 0$.
- 7•** Розв'яжіть рівняння:
- $$\frac{2x}{x-3} - \frac{1}{x+3} = \frac{6}{x^2-9}.$$
- 8•** Сервісний центр зобов'язався відремонтувати за певний час 72 гаджети. Роботу було закінчено на 3 дні раніше, бо план щоденно перевиконували на 4 одиниці. За скільки днів сервісний центр зобов'язався виконати роботу?
- 9•** Не обчислюючи коренів x_1 і x_2 рівняння

$$x^2 - 4x - 10 = 0,$$
 знайдіть:
 а) $\frac{9}{x_1^2 + x_2^2}$; б) $x_1^4 + x_2^4$.
- 10•** При яких значеннях a рівняння

$$x^2 - (a + 2)x + a + 5 = 0$$
 має один корінь?

Мікросвіт



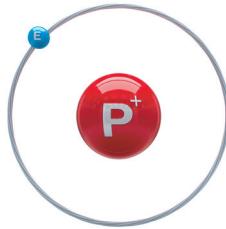
Навчальний проект № 1

СТАНДАРТНИЙ ВИГЛЯД ЧИСЛА В РІЗНИХ ГАЛУЗЯХ ЗНАНЬ

Макросвіт

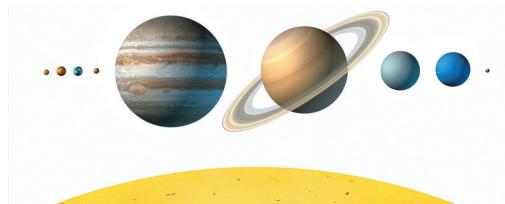


1. Учні формуються у групи і кожна група працює над однією із запропонованих нижче тем.
 - Історія запису великих чисел.
 - Нові назви великих чисел.
 - Подання числових даних у фізиці.
 - Кількісні співвідношення в хімії.
 - Кодування та збереження інформації.
 - Числа-велетні в астрономії.
 - Числові характеристики космічних просторів.
 - Числа-ліліпути в мікробіології.
 - Метрологія — наука про вимірювання.
 - Вимірювання у ювелірній справі.
 - Запис чисел у стандартному вигляді в медицині.
 - Музей мікромініатюр.
 - Світ живої природи у числах.
 - Економічні показники розвитку держави.
 - Числа навколо нас.
2. Теми для проектної діяльності повідомляються учням за кілька тижнів до вивчення теми. Учням рекомендується самостійно ознайомитися з теоретичним матеріалом, що міститься у § 11 підручника.
3. Кожен учасник проекту (або група разом) має підготувати короткі відомості про використання стандартного вигляду числа в обраній галузі знань. Розподіл діяльності в групі можна здійснити, наприклад, у такий спосіб: дослідник, учитель, дизайнер, доповідач.
4. Результати роботи над проектом бажано оформити у вигляді групового портфоліо з комп’ютерною презентацією.
5. Захист проектів доцільно провести через кілька днів після вивчення теми на позакласному заході, запросивши учнів інших класів, учителів і батьків.



Маса електрона

$$m_e = 9,1093826(16) \times 10^{-31} \text{ кг}$$



Маса Сатурна

$$m_c = 5,6846 \cdot 10^{26} \text{ кг}$$

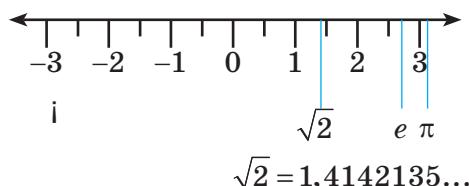
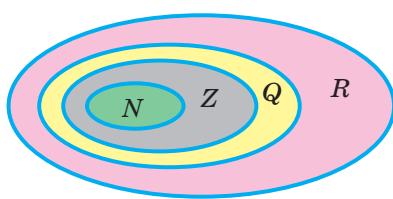


Навчальний проект № 2

ІСТОРІЯ РОЗВИТКУ ЧИСЛА

Число – це величина, що вимірює об'єкти та явища у світі та є засобом їх порівняння. Це – один із найстаріших та найважливіших математичних понять. Його виникнення та розвиток – це довгий і складний процес, який відбувся в різних народів та епохи. У цьому проекті ми дослідимо історію числа від найдавніших позиційних систем до сучасної теоретичної математики.

- Учні класу поділяються на 5 груп, кожна з яких працює над однією із запропонованих нижче тем.
 - Нумерації різних народів світу (непозиційна нумерація стародавніх єгиптян, позиційна нумерація давніх вавилонян, алфавітні нумерації, римська нумерація тощо).
 - Виникнення й розвиток звичайних і десяткових дробів (основні дроби в Стародавньому Єгипті, шестидесяткові дроби Вавилона, десяткові дроби в Китаї тощо).
 - Як винikли від'ємні числа (чорні і червоні числа в Китаї, майно і борг в Індії, істинні та абсурдні числа в Європі).
 - Несумірні відрізки та іrrаціональні числа (діагональ квадрата та його сторона як несумірні відрізки, таємниця школи Піфагора, геометрична алгебра греків).
 - Множина дійсних чисел (об'єднання множини раціональних та іrrаціональних чисел, числова пряма).
- Теми для проектної діяльності повідомляються учням перед зимовими канікулами. Учням пропонується самостійно ознайомитися з теоретичним матеріалом, що міститься у § 15 підручника, та історичними відомостями на с. 176.
- Кожна група розподіляє між собою обов'язки для проведення проектної діяльності і обирає старшого серед учнів, який за тісної співпраці з учителем організовує роботу в групі. Група має підготувати повідомлення з теми дослідження на конференцію, розробити презентацію, виготовити портфоліо і скласти запитання для вікторини.
- Результати роботи над проектом бажано оформити у вигляді групового портфоліо з комп'ютерною презентацією.
- Захист проектів доцільно провести у два етапи:
 - конференція, на якій заслуховуються 1–2 виступи від кожної групи;
 - вікторина, запитання якої формуються із запитанької групи.





Навчальний проект № 3

РІВНЯННЯ У ШЕРЕНЗІ ВІКІВ І СПОСОБИ ЇХ РОЗВ'ЯЗАННЯ



1. Учні класу поділяються на 2 групи, кожна з яких опрацьовує всі із запропонованих нижче тем.
 - Діафантові рівняння та способи їх розв'язання.
 - Геометричні способи розв'язування рівнянь у Стародавній Греції.
 - Історичні задачі, що стосуються рівнянь.
 - Розв'язування рівнянь 3 і 4 степенів італійськими математиками: Сципіоном дель Ферро, Нікколо Тартальєй, Джироламо Кардано, Лодовіко Феррарі.
 - Нестандартні способи розв'язування рівнянь.
2. Кожна група розподіляє між собою питання, визначені для проведення проектної діяльності, і обирає старшого серед учнів, який за тісної співпраці з учителем організовує роботу в групі.
3. Результати роботи над проєктом оформлюються у вигляді індивідуального і групового портфоліо. Учні в групі за допомогою індивідуальних портфоліо і консультацій мають обмінятися здобутими знаннями між собою. Наприкінці роботи над проєктом учні кожної групи складають 10 рівнянь (по два на кожне запитання) для проведення «диспуту» з іншою групою.
4. За підсумками розв'язування задач під час диспуту визначаються переможці.
5. Оцінюються: індивідуальні портфоліо, групові портфоліо, система задач для диспуту, правильність і раціональність розв'язання задач під час диспуту тощо.



Джироламо Кардано



Нікколо Тарталья

ЗАДАЧІ ТА ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

РАЦІОНАЛЬНІ ВИРАЗИ

Виконайте ділення (1131–1135).

1131. а) $7a^3 : a^2$; б) $8c^4 : c^3$; в) $5x^8 : x^7$.

1132. а) $12a^5 : 3a^4$; б) $15x^{12} : 5x^7$; в) $4c^{13} : 2c^{10}$.

1133. а) $-8c^{10} : 4c^5$; б) $-25x^{12} : x^{12}$; в) $16n^{18} : 16$.

1134. а) $(-8c)^{10} : 8c^5$; б) $36x^{13} : (-3x)^2$; в) $2x^3 : (-2x)^3$.

1135. а) $1,5x^5 : 0,5x^4$; б) $2,4a^7 : 0,3a^5$; в) $2,1n^5 : 0,3n^3$.

Знайдіть, при яких значеннях змінних не має значення дріб (1136–1138).

1136. а) $\frac{a}{x}$; б) $\frac{m}{n^2}$; в) $-\frac{a}{c^2}$.

1137. а) $\frac{1}{a-3}$; б) $\frac{5}{2a-6}$; в) $\frac{ac^2}{x(x-3)}$.

1138. а) $\frac{a+2}{a(3-a)}$; б) $\frac{x+1}{(x-2)(x+3)}$; в) $\frac{x+7}{(x^2-4)(x^2-9)}$.

1139. Знайдіть значення виразу:

а) $(3 - x)^4 : (3 - x)^3$, якщо $x = 1,4$;

б) $(2a - b)^5 : (2a - b)^3$, якщо $a = 2,3$ і $b = 5$.

1140. Знайдіть значення дробу: а) $\frac{a+1,25}{a^2-0,25}$, якщо $a = 2,5$;
б) $\frac{x-y}{x^2-y^2}$, якщо $x = 0,63$ і $y = 0,37$.

Скоротіть дріб (1141–1145).

1141. а) $\frac{5a}{10}$; б) $\frac{3x}{x}$; в) $\frac{8m}{2n}$; г) $\frac{7a}{14a}$.

1142. а) $\frac{ax}{2a}$; б) $\frac{mn}{3n^2}$; в) $\frac{cz^2}{2cz}$; г) $\frac{6a^2}{12a}$.

1143. а) $\frac{2a^2b}{6a^3c}$; б) $\frac{3cx^3}{9c^2x}$; в) $\frac{8a^3z}{6a^2z^2}$; г) $\frac{15am^3}{25a^2m}$.

1144. а) $\frac{-4ax^3}{12a^2x^5}$; б) $\frac{-5nz^5}{15n^2z^4}$; в) $\frac{8a^2c^3}{-12ac^3}$; г) $\frac{2a^5bc^2}{-a^2bc^3}$.

1145. а) $\frac{(a+x)^2}{(a+x)^3}$; б) $\frac{x^2y(2-x)^7}{(xy^2(2-x))^6}$; в) $\frac{(3+c)^5}{(c^2+6c+9)^4}$; г) $\frac{(a^2-1)^3}{(a-1)^5}$.

Спростіть вираз (1146–1148).

1146. $\frac{2x^2+7xy-9y^2}{x^2-y^2} + \frac{9x^2-7xy-2y^2}{x^2-y^2}$.

1147. $\frac{x+2y}{2x-y} + \frac{2x-2y}{2x-y} + \frac{6x-3y}{2x-y} + \frac{x-2y}{2x-y}$.

1148. $\frac{5x^2+20xy+10y^2}{3x-15y} + \frac{6x^2-30xy}{3x-15y} - \frac{10x^2-5xy+10y^2}{3x-15y}$.

1149. Доведіть тотожність:

a) $\frac{4a}{a-5} - \frac{20}{a-5} = 4$;

б) $\frac{x^2}{x^2+1} + \frac{2x^2}{x^2+1} + \frac{3}{x^2+1} = 3$.

1150. Доведіть, що значення виразу

$$\frac{a^2}{a^2+1} - \frac{2a}{a^2+1} + \frac{1}{a^2+1}$$

не може бути від'ємним числом.

Зведіть до спільного знаменника вирази (1151–1153).

1151. а) $\frac{1}{a}$ і $\frac{3}{2a}$; б) $\frac{x}{a+x}$ і $\frac{m}{3(a+x)}$; в) $\frac{1}{3c}$ і $\frac{5}{7c}$.

1152. а) $\frac{1}{3a^2x}$ і $\frac{1}{5ax^3}$; б) $\frac{c}{5b^3z}$ і $\frac{c^2}{2az^3}$; в) $\frac{4}{3ab^4z}$ і $\frac{5}{4a^2bz^3}$.

1153. а) $\frac{1}{a-x}$ і $\frac{1}{(a-x)^2}$; б) $\frac{m}{a-c}$ і $\frac{n}{a^2-c^2}$; в) $\frac{1}{x^3-1}$ і $\frac{1}{x-1}$.

1154. Додайте дроби:

а) $\frac{a}{3m}$ і $\frac{3}{4m}$; б) $\frac{a-x}{2ax}$ і $\frac{1-x}{4x}$; в) $\frac{1}{2n}$ і $\frac{3-n}{4n^2}$.

1155. Знайдіть різницю дробів:

а) $\frac{x}{5a}$ і $\frac{1}{a}$; б) $\frac{2}{3c}$ і $\frac{c-2}{2c}$; в) $\frac{x^2+2}{3x}$ і $\frac{2}{3}$.

Спростіть вираз (1156–1159).

1156. а) $\frac{1}{3a} + \frac{1}{9a}$; б) $\frac{c}{x} + \frac{5}{2x}$; в) $\frac{1}{5c} + \frac{4}{c}$.

1157. а) $\frac{1}{m} - \frac{5}{4m}$; б) $\frac{a}{2x} - \frac{4a}{x}$; в) $\frac{1}{0,5c} - \frac{2}{c}$.

1158. а) $\frac{1}{3ax^2} + \frac{2}{5az^2}$; б) $\frac{4m}{3p^2x} - \frac{1}{5m^2x}$; в) $\frac{4}{a} - \frac{3}{2ac^2x}$.

1159. а) $\frac{4a}{a-b} + \frac{2b}{a+b} - 1$; б) $\frac{x}{x-z} + \frac{3x}{x+z} - \frac{2xz}{x^2 - z^2}$.

1160. При яких значеннях m і n є тотожністю рівність

$$\frac{7}{(x-6)(x+1)} = \frac{m}{x-6} + \frac{n}{x+1}?$$

Виконайте множення дробів (1161–1165).

1161. а) $\frac{5ab^2}{3x} \cdot \frac{9x^2}{10a^2}$; б) $\frac{4an^3}{5c^2x} \cdot \frac{c^3x}{8an^4}$; в) $\frac{7xz^3}{9ac^2} \cdot \frac{3ac}{14xz}$.

1162. а) $\frac{-2x^2}{3ac} \cdot \frac{6a^2}{4x^3}$; б) $\frac{5an^3}{-4x} \cdot \frac{8x^3}{10an}$; в) $\frac{-ax^4}{3m^4} \cdot \frac{9m^3}{-2x^5}$.

1163. а) $\frac{a+1}{x} \cdot \frac{4x^2}{a^2-1}$; б) $\frac{1-a}{3x} \cdot \frac{x}{1-a^2}$; в) $\frac{a^2-1}{c} \cdot \frac{3c}{a+1}$.

1164. а) $\frac{2a}{3c} \cdot \frac{6ac^2}{5m} \cdot \frac{15m^2}{4a^2}$; б) $\frac{6n^2}{7c^2} \cdot \frac{14c^3}{15n^3} \cdot \frac{5n^2}{8c^2}$.

1165. а) $\frac{a^2 - ax}{c^2 - cx} \cdot \frac{cx - x^2}{a}$; б) $\frac{a^3 + a^2}{c^3 - c^2} \cdot \frac{ac - a}{ax + x}$.

Виконайте ділення дробів (1166–1168).

1166. а) $\frac{2ax}{3c^2} : \frac{4ax^2}{9c^3}$; б) $\frac{a^3c^2}{5xy} : \frac{2a^2c^3}{3x^2y}$; в) $\frac{12mn^3}{5ac^2} : \frac{3mn^2}{10a^2}$.

1167. а) $\frac{1,5a}{2x^2} : \frac{3a^2}{4x^3}$; б) $-\frac{2ac^2}{3mn} : \frac{4a^2}{15m^3}$; в) $-\frac{4nx}{3ac} : \left(-\frac{4x^2}{9c^2}\right)$.

1168. а) $\frac{a^2 - x^2}{a^3 - x^3} : \frac{a+x}{a^2 - x^2}$; б) $\frac{2a+2n}{3a-3n} : \frac{6a+6n}{5a-5n}$.

Спростіть вираз (1169–1173).

1169. а) $\frac{a^2b - 4b^3}{3ab^2} \cdot \frac{a^2b}{a^2 - 2ab}$; б) $\frac{4p^2 - 9q^2}{p^2q^2} : \frac{2ap + 3aq}{2pq}$.

1170. а) $\frac{a^2 - b^2}{a^2} \cdot \frac{a^4}{(a+b)^2}$; б) $\frac{a^2 - 25}{a^2 - 3a} : \frac{a^2 + 5a}{a^2 - 9}$.

1171. а) $\frac{a^2 - b^2}{(a+b)^2} \cdot \frac{3a + 3b}{4a - 4b}$; б) $\frac{5 - 5a}{(1+a)^2} : \frac{10 - 10a^2}{3 + 3a}$.

1172. а) $\left(\frac{a}{4b} - \frac{b}{4a}\right) \cdot \left(\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2} - 1\right)$; б) $\left(\frac{a^2b^{-3}}{6c}\right)^{-3} : \left(\frac{a^3b^{-5}}{9c}\right)^{-2}$.

1173. $\frac{m^3 - mn^2}{m^2 + n^2} \cdot \left(\frac{n}{m^3 - m^2n + mn^2} + \frac{m - 2n}{m^3 + n^3} \right).$

КВАДРАТНІ КОРЕНІ ТА ДІЙСНІ ЧИСЛА

Внесіть множник з-під знака кореня (1174–1175).

1174. а) $\sqrt{50}$; б) $\sqrt{300}$; в) $\sqrt{405}$.

1175. а) $\sqrt{1960}$; б) $\sqrt{2890}$; в) $\sqrt{1083}$.

1176. Внесіть множник під знак кореня:

а) $5\sqrt{10}$; б) $8\sqrt{5}$; в) $10\sqrt{13}$; г) $30\sqrt{11}$.

Обчисліть значення виразу (1177–1181).

1177. а) $\sqrt{64 \cdot 900}$; б) $\sqrt{25 \cdot 196}$; в) $\sqrt{49 \cdot 676}$.

1178. а) $\sqrt{0,01 \cdot 121}$; б) $\sqrt{0,04 \cdot 169}$; в) $\sqrt{0,09 \cdot 441}$.

1179. а) $\sqrt{10 \frac{9}{16}}$; б) $\sqrt{10 \frac{6}{25}}$; в) $\sqrt{31 \frac{93}{121}}$.

1180. а) $\sqrt{6 \cdot 10 \cdot 15}$; б) $\sqrt{15 \cdot 21 \cdot 35}$; в) $\sqrt{20 \cdot 28 \cdot 35}$.

1181. а) $\sqrt{\frac{1}{6} \cdot \frac{4}{15} \cdot \frac{10}{49}}$; б) $\sqrt{\frac{3}{5} \cdot \frac{7}{36} \cdot \frac{35}{27}}$; в) $\sqrt{1 \frac{1}{5} \cdot 2 \frac{7}{10}}$.

Обчисліть добуток (1182–1184).

1182. а) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{12} \cdot \sqrt{150}$; б) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{60}$.

1183. а) $\sqrt{44,1} \cdot \sqrt{12,1}$; б) $\sqrt{28,9} \cdot \sqrt{32,4}$.

1184. а) $\sqrt{\frac{12}{25}} \cdot \sqrt{\frac{80}{135}}$; б) $\sqrt{8 \frac{1}{9}} \cdot \sqrt{1 \frac{8}{73}}$.

Спростіть вираз (1185–1190).

1185. а) $(\sqrt{3} - 2)^2 + 4\sqrt{3}$; б) $(3 + \sqrt{5})^2 - 6\sqrt{5}$.

1186. а) $(\sqrt{17} - \sqrt{2})(\sqrt{17} + \sqrt{2})$; б) $(\sqrt{23} - \sqrt{19})(\sqrt{19} + \sqrt{23})$.

1187. а) $(2\sqrt{7} - 1)(2\sqrt{7} + 1)$; б) $(3\sqrt{11} - 2\sqrt{7})(3\sqrt{11} + 2\sqrt{7})$.

1188. а) $8 - (\sqrt{5} - \sqrt{3})^2$; б) $10 - (\sqrt{7} + \sqrt{3})^2$.

1189. а) $(\sqrt{6} + \sqrt{3}) : \sqrt{3}$; б) $(\sqrt{15} - \sqrt{5}) : \sqrt{5}$.

1190. а) $(7 - 5) : (\sqrt{7} - \sqrt{5})$; б) $(13 - 7) : (\sqrt{13} + \sqrt{7})$.

1191. Скоротіть дріб:

а) $\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$; б) $\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$; в) $\frac{\sqrt{10}-5}{\sqrt{5}}$.

1192. Звільніть від ірраціональності знаменник дробу:

а) $\frac{6}{\sqrt{3}}$; б) $\frac{10}{3\sqrt{5}}$; в) $\frac{a}{5-\sqrt{7}}$; г) $\frac{c}{2+\sqrt{15}}$.

КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ

1193. Розв'яжіть рівняння:

а) $x^2 - 3x + 2 = 0$;	г) $3y^2 - 2y - 8 = 0$;
б) $x^2 - 8x - 20 = 0$;	г) $0,25x^2 - 2x + 3 = 0$;
в) $4z^2 + z - 3 = 0$;	д) $2z^2 - 3z + 0,75 = 0$.

1194. Розкладіть на множники тричлен:

а) $x^2 - 7x + 10$;	г) $y^2 - 4y - 60$;
б) $x^2 - 9x + 18$;	г) $a^2 - a - 56$;
в) $y^2 - 2y - 35$;	д) $c^2 - 5c - 24$.

1195. Скоротіть дріб:

а) $\frac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3}$; б) $\frac{z^2+z-6}{z^2-2z-15}$; в) $\frac{a^2-5a+6}{a^2+3a-10}$.

1196. Складіть квадратне рівняння за його коренями:

а) 1 і 3; б) -2 і 7; в) 3 і $\frac{2}{3}$; г) $\sqrt{2}-1$ і $\sqrt{2}+1$.

Розв'яжіть рівняння (1197–1205).

1197. а) $\frac{x-1}{x+5} + \frac{x-1}{x-5} = 2$; в) $\frac{x-1}{x+4} - 2 = \frac{1-x}{x-4}$;
 б) $\frac{2x-1}{x+2} = \frac{1-2x}{x-2} + 4$; г) $\frac{2x-1}{2x+4} = \frac{1-2x}{2x-4} + 2$.

1198. а) $\frac{2x+2}{x^2-4} - \frac{x^2+2x+4}{x^3+2x^2+4x+8} = \frac{x^2-2x+4}{x^3-2x^2+4x-8}$;
 б) $\frac{x+10}{x^2+x-10} - \frac{x+10}{x^2-x-10} = \frac{50}{x^4-21x^2+100}$.

1199. а) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$; б) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$.

1200. а) $3x^4 - 2x^2 - 40 = 0$; б) $5y^4 + 7y^2 - 12 = 0$.

1201. а) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$; б) $z^6 - 19z^3 - 216 = 0$.

1202. а) $x - 6\sqrt{x} + 5 = 0$; б) $2x - 3\sqrt{x} - 9 = 0$.

1203. а) $(x^2 - x)^2 - 11(x^2 - x) + 18 = 0$; б) $(\sqrt{x} - 2)^2 - 6(\sqrt{x} - 2) + 8 = 0$.

1204. а) $x+2-13\sqrt{x+2}+42=0$;

б) $x-3+4\sqrt{x-3}-12=0$.

1205. а) $(2x-1)^4 - (2x-1)^2 - 12 = 0$; б) $(x+3)^2 - 13 + \frac{36}{(x+3)^2} = 0$.

1206. (ЗНО 216). Побудуйте графік функції $y = \frac{x^2 - x - 2}{|x+1|}$. Користуючись графіком, визначте область значень цієї функції.

1207. Розв'яжіть рівняння. а) $\sqrt{x+9}=11$; в) $3+\sqrt{x-2}=7$;

б) $12-\sqrt{x}=0$;

г) $\sqrt{x^2-2x+1}=3$.

1208. Розв'яжіть систему рівнянь.

а) $\begin{cases} 2x^2 - y = 2, \\ x - y = 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + y = 8, \\ x^2 + y^2 = 40; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 - y = 14, \\ y + 2 = x. \end{cases}$

ЗАДАЧІ ТА ВПРАВИ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ

1209. Скоротіть дріб:

а) $\frac{203203203}{405405405}$; б) $\frac{342+127 \cdot 341}{342 \cdot 127+215}$; в) $\frac{999999}{1002001}$.

1210. Яке число більше:

а) $\frac{35+17}{35+18}$ чи $\frac{35^3+17^3}{35^3+18^3}$; б) $\frac{10^9+1}{10^{10}+1}$ чи $\frac{10^{10}+1}{10^{11}+1}$?

1211. Доведіть тотожність: $\frac{a+b}{a+(a-b)} = \frac{a^3+b^3}{a^3+(a-b)^3}$.

1212. Обчисліть суму 999 дробів: $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{999 \cdot 1000}$.

1213. Скоротіть дріб:

а) $\frac{x^4+a^2x^2+a^4}{x^3+a^3}$; б) $\frac{8x^4+x}{16x^6+4x^4+x^2}$; в) $\frac{a^4+4}{a^2+2a+2}$.

1214. Доведіть тотожність Ейлера:

$$a^3 + b^3 + \left(\frac{2a^3b + b^4}{a^3 - b^3} \right)^3 = \left(\frac{a^4 + 2ab}{a^3 - b^3} \right)^3.$$

Чи існують такі натуральні числа x, y, z і t , що $x^3 + y^3 + z^3 = t^3$?

1215. Доведіть, що сума дробів $\frac{a-b}{1+ab}$, $\frac{b-c}{1+bc}$, $\frac{c-a}{1+ca}$ тотожно дорівнює їх добутку.

1216. Раціональним чи ірраціональним є число $\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}$?

1217. Доведіть, що число $\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}$ є натуральним.

1218. Чому дорівнюють $\sqrt{1156}$, $\sqrt{111556}$, $\sqrt{11115556}$? Спробуйте узагальнити задачу.

1219. Що більше:

$$\sqrt{2019}-\sqrt{2018} \text{ чи } \sqrt{2020}-\sqrt{2019}?$$

1220. Обчисліть:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{9999}+\sqrt{10000}}.$$

1221. Доведіть, що $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}} < 3$.

Розв'яжіть рівняння (1222–1225).

1222. а) $2008x^2 + 2011x + 3 = 0$; б) $2010x^2 + 2008x - 2 = 0$.

1223. а) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$; б) $(x - 1)^4 - 5(x - 1)^2 + 4 = 0$.

1224. а) $(x + 4)(x + 5)(x + 7)(x + 8) = 4$;
б) $(x^2 - 2x - 1)^2 + (3x^2 - 6x - 13) = 0$.

1225. а) $2 - \sqrt{x} = \sqrt{2 - x}$; б) $x^2 + \sqrt{5} = \sqrt{14 + 6\sqrt{5}}$.

1226. Доведіть, що корені рівняння $ax^2 + bx + a = 0$ обернені один до одного.

1227. При якому значенні m різниця коренів рівняння $x^2 + mx + 1 = 0$ дорівнює 1?

1228. При якому значенні m сума квадратів коренів рівняння $x^2 - 5mx + 4m^2 = 0$ дорівнює 68?

1229. При якому значенні m один із коренів рівняння $x^2 - 12x + 9m^2 = 0$ є квадратом другого кореня?

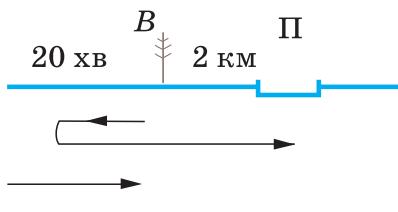
1230. При якому значенні m сума квадратів коренів рівняння $x^2 + mx + m - 2 = 0$ є найменшою? Чому дорівнює ця сума?

1231. Доведіть, що корені рівняння $x^2 + px + q = 0$ не можуть бути раціональними числами, якщо p і q — цілі непарні числа.

1232. Катер, швидкість якого в стоячій воді 15 км/год, відійшов від пристані і, пройшовши 36 км, наздогнав пліт, який відправився від тієї самої пристані на 10 год раніше, ніж катер. Знайдіть швидкість течії річки.

- 1233.** Відстань між пристанями A і B човен звичайно долає за 5 год, а від B до A — за 6 год. Якось одночасно із човном від A вирушив і пліт. Дійшовши до B і постоявши там 1 год, човен повернув назад і зустрівся з плотом на відстані 22 км від A . Знайдіть відстань від A до B .

- 1234.** Пливучи проти течії річки, біля високої верби юнак загубив порожню флягу. Через 20 хв він помітив це і повернувся, щоб наздогнати флягу. Наздогнав він її біля пристані. Знайдіть швидкість течії річки, якщо відстань від пристані до високої верби — 2 км (мал. 71).



Мал. 71

- 1235.** **Задача з несподіваною відповіддю.** Автомобіль їхав з A до B зі швидкістю 60 км/год, а з B до A — зі швидкістю 70 км/год. Знайдіть його середню швидкість.

- 1236.** Населення міста за два роки збільшилося з 20 000 до 22 050 осіб. Знайдіть щорічний середній відсоток приросту населення цього міста.

- 1237.** **Стародавня китайська задача.** Два чоловіки одночасно вийшли з одного місця: B — на схід, а A , пройшовши 10 бу на південь, повернув на північний схід до B . Яку відстань пройшов кожний із них, якщо за 1 год A проходив 7 бу, а B — тільки 3 бу?

- 1238.** **Задача Безу.** Хтось купив коня і через деякий час продав його за 24 пістолі. При цьому він втратив стільки відсотків, скільки коштував йому кінь. За скільки пістолів він купив коня?

- 1239.** **Задача Ейлера.** Знайдіть число, четвертий степінь якого, поділений на половину шуканого числа і збільшений на $14\frac{1}{4}$, дорівнює 100.

- 1240.** Розв'яжіть рівняння з праць відомих математиків:

а) $14\frac{1}{x^2} + 2 \cdot \frac{1}{x} = 1\frac{1}{4}$ (*Омар Хайям*);

б) $x^4 - 2x^2 - 400x = 9999$ (*Бхаскара*);

в) $y^3 - 9y^2 + 26y - 24 = 0$ (*Рене Декарт*).

- 1241.** Якщо між цифрами двоцифрового числа вписати число, на одиницю менше від нього, вийде чотирицифрове число, яке в 91 раз більше від нього. Знайдіть це двоцифрове число.

- 1242.** Знайдіть двоцифрове число, відношення якого до числа, записаного тими самими цифрами у зворотному порядку, дорівнює 0,375.

- 1243.** Знайдіть два натуральних числа, сума яких дорівнює 667, а частка від ділення їх найменшого спільного кратного на найбільший спільний дільник дорівнює 120.

1244. Знайдіть дріб із найменшим знаменником, який менший від $\frac{1}{2002}$

і більший за $\frac{1}{2003}$.

1245. Доведіть, що дріб $\frac{21n+4}{14n+3}$ — нескоротний при будь-якому натуральному значенні n .

1246. Задача Вієта. Доведіть, що числа a, b, c — корені рівняння $x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x = abc$.

Користуючись цим твердженням, розв'яжіть рівняння $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$.

1247. Доведіть, що коли $ac \neq 0$, то $\left(a + \frac{1}{c + \frac{1}{a}} \right) : \left(c + \frac{1}{a + \frac{1}{c}} \right) = a : c$.

1248. Розв'яжіть рівняння:

$$\text{а)} \quad 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{x}}} = \frac{13}{9};$$

$$\text{б)} \quad 1 + \frac{1}{x + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}} = \frac{29}{24}.$$

1249. Три вівторки місяця припадають на парні числа. Який день тижня припадає на 21 число цього місяця?

1250. Замініть букви цифрами, щоб виконувались рівності:

$$\text{а)} \text{ алгебра} = \text{лев}^{\delta}; \quad \text{б)} \text{ алгебра} = \text{ліг}^{\alpha}; \quad \text{в)} \text{ алгебра} = \text{бан}^{\kappa}.$$

ВІДОМОСТІ З КУРСУ АЛГЕБРИ 7 КЛАСУ

Рівняння

Рівняння — це рівність, яка містить невідомі числа, позначені буквами. Числа, які задовольняють рівняння, — його *розв'язки* (або *корені*). Розв'язати рівняння — це означає знайти всі його розв'язки або показати, що їх не існує.

Два рівняння називають *рівносильними*, якщо кожне з них має ті самі розв'язки, що й друге. Рівняння, які не мають розв'язків, також вважають рівносильними одне одному.

Основні властивості рівнянь

1. У будь-якій частині рівняння можна звести подібні доданки або розкрити дужки, якщо вони є.

2. Будь-який член рівняння можна перенести з однієї частини рівняння в іншу, змінивши його знак на протилежний.

3. Обидві частини рівняння можна помножити або поділити на одне й те саме число, відмінне від нуля.

Рівняння виду $ax = b$, де a і b — довільні числа, називається лінійним рівнянням зі змінною x . Якщо $a \neq 0$, то рівняння $ax = b$ називають рівнянням *першого степеня* з однією змінною. Кожне рівняння першого степеня $ax = b$ має один корінь $x = \frac{b}{a}$. Лінійне рівняння може мати один корінь, безліч або не мати жодного кореня.

Наприклад, рівняння:

$12x = 6$ має один корінь,

$0x = 0$ має безліч коренів,

$0x = 5$ не має жодного кореня.

Цілі вирази

Добуток кількох рівних множників називають *степенем*. Наприклад, $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$ — п'ятий степінь числа 2. Він дорівнює 32. Отже, $2^5 = 32$. Тут 2 — *основа степеня*, 5 — *показник степеня*, 2^5 , або 32, — *степінь*. Другий і третій степені називають також *квадратом* і *кубом* числа. Якщо натуральне число n більше за 1, то

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ разів}}$$

Якщо $n = 1$, то $a^1 = a$.

Основна властивість степеня: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

Перемножуючи степені одного й того самого числа, показники степенів додають, а основу залишають тією самою.

Інші властивості степенів:

$$(a^m)^n = a^{mn}; (ab)^n = a^n \cdot b^n.$$

Числа, змінні, а також різні записи, складені із чисел чи змінних і знаків дій, разом називають *виразами*. Вирази бувають *числові* (на приклад, $3 - 0,5 : 6$) і *зі змінними* (на приклад, $3x$, $2ab$, $c^2 - 3$). Якщо вираз не містить жодних дій, крім додавання, віднімання, множення, піднесення до степеня і ділення, то його називають *раціональним*. Рациональний вираз, який не містить дії ділення на вираз зі змінною, називають *цілим виразом*.

Найпростіші вирази — числа, змінні, їх степені або добутки. Їх називають *одночленами*. Приклади одночленів:

$$4x; \frac{2}{3}; -3x^2; -3\frac{1}{3}am^3; 2ax \cdot 3ax^2.$$

Якщо одночлен містить тільки один числовий множник, до того ж поставлений на перше місце, і якщо кожна змінна входить тільки до одного множника, такий одночлен називають *одночленом стандартного вигляду*. Числовий множник одночлена, записаного в стандартному вигляді, називають *коєфіцієнтом* цього одночлена.

Перемножуючи одночлени, ставлять між ними знак множення і одержаний добуток зводять до одночлена стандартного вигляду. Щоб піднести одночлен до степеня, слід піднести до цього степеня кожний множник одночлена і знайдені степені перемножити. Наприклад,

$$\begin{aligned} 2ax \cdot (-3x^2) &= 2 \cdot (-3) \cdot a \cdot x \cdot x^2 = -6ax^3; \\ (0,3nc^3)^2 &= 0,3^2 \cdot n^2 \cdot (c^3)^2 = 0,09n^2c^6. \end{aligned}$$

Суму кількох одночленів називають *многочленом*. Для зручності кожний одночлен також вважають многочленом. Як пов'язані між собою різні види цілих виразів, показано на схемі (мал. 72).



Мал. 72

Подібними членами многочлена називають такі, що відрізняються тільки коєфіцієнтами або й зовсім не відрізняються. Многочлен записано в стандартному вигляді, якщо всі його члени — одночлени стандартного вигляду і серед них немає подібних.

Додаючи многочлени, користуються правилом розкриття дужок: якщо перед дужками стоїть знак «+», то їх не пишуть. Наприклад,

$$(2a + 3) + (a^2 - 2a - 4) = 2a + 3 + a^2 - 2a - 4 = a^2 - 1.$$

Віднімаючи многочлен від многочлена, користуються правилом розкриття дужок: якщо перед дужками стоїть знак «мінус», то дужки можна не писати, змінивши знаки всіх доданків, які були в них, на протилежні. Наприклад,

$$4x^2 + 5 - (x^2 - 2x + 5) = 4x^2 + 5 - x^2 + 2x - 5 = 3x^2 + 2x.$$

Щоб помножити многочлен на одночлен, потрібно кожний член многочлена помножити на даний одночлен і результати додати. Наприклад,

$$(3a^2 + a - 8) \cdot 2ax = 3a^2 \cdot 2ax + a \cdot 2ax - 8 \cdot 2ax = \\ = 6a^3x + 2a^2x - 16ax.$$

Щоб помножити многочлен на многочлен, потрібно кожний член першого многочлена помножити на кожний член другого і отримані добутки додати. Наприклад,

$$(x + 2z - 3) \cdot (4x - 7) = x \cdot 4x + 2z \cdot 4x - 3 \cdot 4x - x \cdot 7 - \\ - 2z \cdot 7 + 3 \cdot 7 = 4x^2 + 8xz - 19x - 14z + 21.$$

Формули скороченого множення

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \quad \text{— квадрат двочлена,}$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 \quad \text{— куб двочлена,}$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \quad \text{— різниця квадратів,}$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \quad \text{— різниця кубів,}$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) \quad \text{— сума кубів.}$$

Розкласти многочлен на множники — це означає замінити його добутком кількох многочленів, тотожним даному многочлену. Найпростіші способи розкладання многочленів на множники: винесення спільного множника за дужки, спосіб групування, використання формул скороченого множення.

Функції

Якщо кожному значенню змінної x відповідає єдине значення змінної y , то змінну y називають *функцією від x* , змінну x називають *незалежною змінною*, або *аргументом* функції. Наприклад, площа S квадрата — функція від довжини його сторони a .

Функції можна задавати за допомогою формул, таблиць, графіків тощо. Графіки функцій найчастіше будують у *декартовій системі координат*, яка складається з двох взаємно перпендикулярних координатних осей — горизонтальної осі *абсцис*, або осі x , і вертикальної осі *ординат*, або осі y . Площину із системою координат називають *координатною площеиною*, кожній її точці відповідає єдина пара чисел.

Графіком функції називають множину всіх точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, а ординати — відповідним значенням функції.

Усі значення, яких може набувати аргумент функції, утворюють її *область визначення*, а всі відповідні значення функції — *область значень функції*.

Лінійною називають функцію, яку можна задати формулою $y = kx + b$, де x — аргумент, а k і b — дані числа. Якщо $b = 0$, то лінійну функцію називають *прямою пропорційністю*.

Графікожної лінійної функції — пряма. Графік прямої пропорційності — пряма, яка проходить через початок координат.

Системи лінійних рівнянь

Рівняння виду $ax + by = c$, де a, b, c — дані числа, називають *лінійним рівнянням з двома змінними* x і y . Якщо $a \neq 0$ і $b \neq 0$, його називають *рівнянням першого степеня з двома змінними*.

Кожну пару чисел, яка задоволяє рівняння з двома змінними, називають *розв'язком* цього рівняння. Наприклад, пара чисел $(3; -2)$ — розв'язок рівняння $5x + 3y = 9$. Кожне рівняння першого степеня з двома змінними має безліч розв'язків. У декартовій системі координат кожному рівнянню першого степеня з двома змінними відповідає пряма — графік цього рівняння.

Два рівняння з двома змінними називають *рівносильними*, якщо кожне з них має ті самі розв'язки, що й друге. Рівносильні рівняння з двома змінними мають однакові графіки.

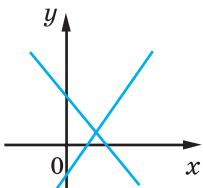
Якщо потрібно знайти спільні розв'язки двох чи кількох рівнянь, говорять, що ці рівняння утворюють *систему рівнянь*. *Розв'язком системи рівнянь* називають спільний розв'язок усіх її рівнянь. Система рівнянь може мати один розв'язок, безліч або не мати жодного розв'язку.

Дві прямі на площині можуть перетинатися, бути паралельними або збігатися. Так само можуть розташовуватися на координатній площині й графіки двох рівнянь першого степеня з двома змінними.

Взаємне розташування графіків рівнянь

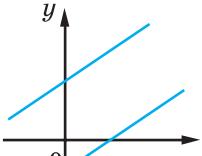
$$a_1x + b_1y = c_1 \text{ і } a_2x + b_2y = c_2$$

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$



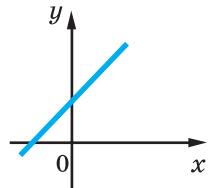
Прямі
перетинаються

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$



Прямі
паралельні

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$



Прямі
збігаються

Розв'язувати системи рівнянь з двома змінними можна способами підстановки, додавання або графічним.

ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ ДО ЗАДАЧ І ВПРАВ

РАЦІОНАЛЬНІ ВИРАЗИ

7. а) 16; в) 3,75. 8. а) 0,216; в) 10,89. 9. а) -7 ; г) 13. 10. а) x^5 ; в) n^4 ; г) x . 11. а) $81x^4$; г) $10000m^8$. 12. б) $6 - 2a$. 13. а) $2a^3x$; г) $3a^2b^2$. 14. а) $4x^3y$; г) $-6m^5n$. 15. б) $2m^5$; г) $2a$. 16. б) 16; г) 5. 17. б) 1; в) -44 . 20. а) -1372 . 21. б) 0,4. 22. а) 0; д) 1. 23. $4a^4x^4$. 24. а) ax ; е) cx^4 . 25. а) $-5ax^2$; г) $-4n^4y^4$. 26. а) $7(x - 7)$; в) $ac(a - 2c)^2$. 27. б) -9 ; г) $8 - a^3$. 28. а) -1 ; г) 1. 29. б) $36n^{10}$; в) $3a^4$. 30. б) 22,5. 31. а) a^3 ; в) x^5 . 32. а) $2xy^2n$; б) $12xnpyn$. 33. а) $x^2 + 9x + 5$; г) $x^3 - 3x^2 + 4x - 2$. 34. в) $-x^2$. 35. 1) 414 г; 2) на 30 %. 36. а) $(x - 4)(x + 4)$; г) $3(a - b)(a - b)$. 37. б) 3,5. 38. г) 5,5. 39. а) 0,4. 40. а) (4; 2). 41. б) (3; 1). 42. 40 і 136 осіб. 46.1 – Г; 2 – Д; 3 – Б; 4 – В. 54. а) 125; г) 2. 55. б) -7 ; г) 1. 56. а) $n = 0$; б) $a = 3$; в) $x = -4$. 57. а) $x = 5$. 58. б) $x = 0$, $x = 3$, $x = -3$. 60. а) $x \neq 5$; г) $x \in R$. 61. в) $x \neq -3$. 62. а) -2 . 64. а) Так; б) ні. 65. б) Ні. 68. в) -1 ; г) $5x^4$. 69. а) $-2c$; г) $0,3a^2c^3$. 70. в) 0,25; г) 4,5. 73. б) Ні. 76. а) $x = 0$, $x = -1$. 77. а) $x \neq -2$, $x \neq 0$, $x \neq 1$. 78. б) $x \neq 0,5$. 80. а) $x = \frac{5}{a-2}$, $a \neq 2$; г) $x = \frac{5-2a}{9-a^2}$, $a \neq 3$, $a \neq -3$. 81. в) $c = -7$. 82. а) $x = 0$. 83. б) 33. 84. б) -2 . 85. а) 90; д) -87 . 86. а) Ні. 87. а) Ні. 88. $\frac{4}{7} \text{ і } \frac{2}{11}$. 102. а) $-\frac{1}{2}$; в) $\frac{5}{6}$. 104. г) -1 . 105. в) $3x$. 106. б) $\frac{c}{m}$. 108. б) 1. 109. в) $\frac{1}{3}$. 110. б) а. 111. в) $-m$. 112. а) $\frac{p}{2x}$; г) $-(n + c)$. 113. а) $\frac{6a^3}{3a^4}$. 119. б) $6x$. 121. б) 0,25. 122. б) 5. 123. а) $\frac{1}{3x}$. 124. б) $x^2 + 2xz + z^2$. 125. б) $a - 1$. 126. а) $\frac{2c}{a}$; в) x^2 . 129. а) $\frac{y+1}{y-1}$. 130. а) $\frac{x-1}{x+1}$. 131. а) $1 - xy$. 132. в) Ні; д) так. 135. а) $\frac{3xy(x+y)}{9x^2y}$. 139. а) $\frac{c+x}{y+2x}$. 140. а) $\frac{x-a}{x^2+a}$. 141. а) $\frac{x^2-ax+c^2}{x^2+ax-c^2}$. 144. б) $a^2 - \pi x^2$. 151. а) 1,25. 152. а) 10,1. 153. а) $x = 0$. 154. а) $x = -3$. 155. в) $x = -1,5$. 157. а) Ні. 160. а) -3 . 161. б) 2; -2 . 164. а) 8. 165. б) 10. 166. б) 1) 4,25; 2) 100,01. 167. а) 2, якщо $a > 0$; 0, якщо $a < 0$, вираз не має змісту, якщо $a = 0$. 168. а) $\frac{100}{v+2}$ год. 171. $\frac{0,1m+0,15n}{m+n}$.

173. в) $x = -3$. 174. в) $x = 0$, $x = 4$. 176. в) Hi ; г) так. 178. 6) 5.
 179. а) 0. 180. а) Рівняння розв'язків не має. 181. 6) 1,5.
 184. 142 грн 50 коп. 185. 1 – Б; 2 – В; 3 – А; 4 – Д. 192. а) 1.
 193. 6) 0. 194. 6) 1. 195. в) x . 196. 6) а. 198. а) $a = 3$. 199. а) 3.
 200. а) -4 . 205. в) $\frac{a+5x}{6x}$. 206. а) $\frac{4-5x}{ax^2}$. 207. а) $\frac{2c-x}{3c^2x}$ і $\frac{1}{3c^2}$.
 208. 6) $\frac{a+b}{ab}$. 209. а) $\frac{15y}{2x(4x-5y)}$. 210. а) $\frac{a+b+c}{c}$. 211. в) $\frac{ax^2}{a+x}$.
 213. 6) -5 . 214. в) -2 . 215. 6) $\frac{14a+15b}{24c}$. 216. а) $\frac{-7x-51}{20x}$. 217. а) $\frac{2}{x-1}$.
 218. а) $-\frac{1}{3(x+2)}$. 219. 6) $\frac{1}{6}$. 220. 6) $\frac{4-x}{6(x+1)}$. 221. а) $\frac{20}{a^2-1}$.
 222. а) $\frac{2x^2+17x+11}{(x^2-1)(x+2)}$. 223. а) $\frac{x^2+4x+39}{12(1-x^2)}$. 224. а) $\frac{2x^2}{a(x^2-4a^2)}$. 225. $\frac{44}{x^3+64}$.
 226. $\frac{18x^2}{8a^3-27x^3}$. 227. $\frac{1}{(x-a)(x-c)}$. 228. 0. 229. а) $\frac{1}{12}$. 230. а) $\frac{1}{6x} + \frac{3}{4x^2}$.
 231. в) $x+y - \frac{xy}{x^2-xy-y^2}$. 238. 6) 0. 240. 6) -6 . 241. а) 0. 242. 6) -1 .
 243. а) 0. 255. а) $\frac{3}{x^5}$; д) $-\frac{10a^3c}{b}$. 256. а) $-\frac{3n^5}{2}$; д) $\frac{3a^2}{2c}$. 257. а) $\frac{3x}{2}$;
 д) $\frac{4}{3am}$. 258. а) $\frac{5}{a+b}$; д) $\frac{x+y}{20(x-y)}$. 259. а) $\frac{y(x-y)}{(x+y)^2}$; г) $\frac{x}{y}$.
 260. а) $\frac{x-c}{x-a}$; 6) $\frac{(a+2)^2}{a^2+4}$. 261. а) $\frac{25a^2}{16x^2}$; г) $\frac{9x^2z^2}{4a^2+4az+z^2}$. 263. а) $\frac{m^2}{9n^2}$;
 г) $\frac{16x^4}{81a^4b^4c^4}$. 264. а) $\frac{a^2-2ax+x^2}{a^2+2ax+x^2}$; г) $\frac{x^6z^3}{8a^9}$. 265. а) $\frac{(4b-4a)(x+3y)}{a+4b}$.
 267. а) $-6a$; г) a^2-1 . 268. а) $-\frac{y^4}{x^3}$. 269. а) $a+3$; в) x . 271. а) 2; 6) 18.
 273. а) $\frac{9+x^2}{6x}$. 274. а) $\frac{a^2+b^2}{8}$. 275. а) $\frac{x^4z^2}{a^6n^2}$. 276. а) $\frac{1}{3375x^6y^9}$.
 278. а) $27a^4$; в) $-27z^{12}$. 279. а) $1 - a$. 280. а) $\frac{5}{2a-5}$; в) $\frac{x}{(1-x)^2}$.
 281. $\frac{1}{c(a-b-c)}$. 282. 6) 1,5. 283. 1 – Б; 2 – В; 3 – Д; 4 – А. 289. а) -3 ;
 г) 1. 290. а) 3 і -1 . 293. а) 6 $(x-y)(x+y)$. 300. а) 6. 302. а) $2a^2c^2$; в) $27x^5$.

303. а) $x + y$. 305. б) x . 306. а) $2x(2c - x)$. 307. г) $x^{12} - 1$. 308. г) -1 .
309. а) $\frac{3c}{2a}$. 310. а) $-\frac{5m}{2ac}$. 311. а) 1,2. 313. а) 8. 314. а) $x - y$.
315. г) $x(x + 2y)$. 316. б) $y(xy + 1)$. 318. а) $0,5(3 - x)(3 + 2x)$. 319. б) 0,25.
320. а) $-0,3$. 322. а) $\frac{3(x+y)}{(x+1)(x+2)}$; б) $\frac{(a+1)^2}{ab(a+2b)}$. 323. в) $(a - 2)^2$.
324. а) $\frac{9a}{5b}$. 325. а) $\frac{9c}{2am^4}$. 326. б) a^2 . 327. а) $\frac{a}{x}$; б) $\frac{x}{x-y}$. 328. а) $\frac{1-a}{1-2a}$;
б) $\frac{10}{2x+1}$. 329. а) $a + b$. 330. а) $3ab - a^2 - b^2$. 331. а) $\frac{b}{b-a}$. 332. б) 0.
333. а) 25; б) 3. 334. а) $a(a^2 + 1)$. 335. б) $c^2 - c + 1$. 336. а) $a + b$; б) $a - 2$.
337. б) $16a - 5c$. 339. в) $6c$. 340. б) $3a^2$. 341. а) $a(b+c)$. 342. а) (3; 2).
343. а) (2; 0) і (0; 3). 349. а) $a^2 - a + 1$. 351. б) $3y$. 352. б) x . 353. а) $x - y$.
355. г) $-ab$. 357. а) 1. 362. а) 1,37. 364. а) $\frac{a+c}{a}$. 365. а) $\frac{ab+a^2-b^2}{ab+b^2-a^2}$.
366. а) $a^2 - x^2$. 367. а) $\frac{10x+3}{7x+2}$. 368. б) $(a + c)^2$. 369. а) $\frac{3c+1}{1-2c}$.
370. а) $\frac{a-x}{acx}$. 371. б) $-x$. 372. а) $3 - a^2$. 373. а) $\frac{2(3y-2x)}{y}$. 374. а) $\frac{a+1}{a-1}$.
375. а) $2a(a + b)$. 376. а) $\frac{x(a-x)}{a+x}$. 377. а) 1. 382. $x = 13$. 384. 2, 0, -2 , -4 .
386. 4, 6, 10, 24. 392. а) 5. 394. а) $\frac{a^2}{b^2}$; г) $\frac{a+b}{ab}$. 395. а) 0; б) 1.
396. а) $(x-1)(x+1)(0,2x^2+1)$. 399. а) -87 ; г) 8. 404. а) 3. 405. а) -5 .
406. а) -1 і 1. 407. б) -1 . 408. б) -2 і 2. 409. а) 7. 410. а) 16. 411. а) 0.
412. а) -5 і 5. 413. 7. 416. а) -1 . 417. а) -4 . 418. б) -3 . 419. а) -9 .
421. а) 8. 422. а) 4. 423. б) $-2,5$. 425. а) 4. 426. а) 8. 427. $-8,5$.
430. а) (2; 4). 431. а) (0,1; 4). 432. а) (5; 3). 433. а) (4; 5).
434. а) (4,5; 1). 435. 12 і 38. 436. 62 роки. 437. 18 м. 438. 27 і 21 рік.
439. 17,5 км/год. 440. 15 год. 442. 10 год і 6 хв. 443. 35 днів.
446. 2 кг. 447. 14 год, 17 год 30 хв. 449. 40, 60 і 80 км/год; 360 км.
461. б) 1. 462. г) 250. 463. а) a^{-2} . 465. а) 25. 466. а) $9x^{-1}c^{-2}$.
467. б) $15a^{-1}c^{-3}$. 468. г) $8x^{-9}y^6$. 469. а) $x^{-3}z^6$. 471. а) 1. 472. а) 0,5.
473. а) 1; г) 2. 474. г) 1. 476. а) $1,5x^5y^6$. 478. б) $-0,5$. 479. а) 5.
481. а) 4^n . 482. а) $\frac{x^{4n}}{y}$. 483. а) x^{10} . 484. а) $-\frac{1}{a+c}$. 485. а) $\frac{2(m^2+n^2)}{m^2n^2}$.
486. а) $\frac{x+y}{x-y}$. 487. б) 1. 488. а) 1. 490. а) $2xy+2x-3y-3$.

491. a) $(4a^2+1)(2a+1)(2a-1)$. 497. a) 700 000. 498. a) 0,00000009.
 499. a) $3,7 \cdot 10^8$. 500. a) $5,3 \cdot 10^{-8}$. 501. a) $\approx 5,91 \cdot 10^{21}$. 503. a) $2,6 \cdot 10^9$ г.
 504. a) $1,2 \cdot 10^6$. 507. a) $1,6 \cdot 10^{-23}$; $6,4 \cdot 10^{-35}$. 508. a) 21,6 кг.
 509. a) $1,5 \cdot 10^6$ км. 511. a) $1,38 \cdot 10^{-6}$. 512. a) $2,4 \cdot 10^4; 1,2 \cdot 10^4; 1,08 \cdot 10^8$;
 3. 514. a) $1,43 \cdot 10^3$. 515. a) $1,57 \cdot 10^2$. 517. a) -9. 518. a) $\approx 3,1 \cdot 10^{22}$.
 521. $\approx 2,8 \cdot 10^7$. 523. a) $2,5 \cdot 10^7$ см² і $2,5 \cdot 10^{-3}$ км². 525. ≈ 19 кг.
 528. a) 3 і -2. 529. б) $x^{2n-2} - 2x^n + x^2$. 541. 50; -2. 543. A, D, E, G.
 545. a) $x \neq 0$. 547. в) $x \neq 0, x \neq 5$. 550. a) $k = 1$. 552. Так. 555. Так.
 556. За 36 год. 562. a) $x_1 = -2, x_2 = 2$. 564. a) $k = 12, b = -32$. 566. a) $x \neq 0$.
 567. a) $x \neq 0$ і $x \neq 3$. 572. a) 48. 573. ≈ 70 т/га. 574. 315 000 т.

КВАДРАТНІ КОРЕНІ І ДІЙСНІ ЧИСЛА

584. Проходить через A і B. 588. $S = 2x^2$. 591. При $x = -1$ і $x = 3$.
 605. a) -1; 0; 1. 608. a) $4,7 \cdot 10^7$. 610. a) $a^2 + 2ab + 10$. 612. a) $x = 5$.
 613. a) -3 і 13. 621. a) 13. 622. б) 0,3. 623. a) 11. 624. a) 0,1. 627. a) -30.
 628. a) 12. 629. a) 0,6. 630. a) 30. 634. a) -71. 635. a) -220. 636. a) 13.
 638. a) Ні. 642. б) Ні; г) так. 644. a) 5; 1; 13. 645. в) 6 см; д) 250 см.
 647. a) $1\frac{3}{8}$; г) $2\frac{1}{2}$. 648. a) 0,01; г) 0,13. 649. a) 1. 650. a) 71. 652. a) 27.
 653. б) 8; 4; 1,5. 654. a) ≈ 330 . 655. a) ≈ 130 . 656. a) 2304; б) 1369.
 657. a) 2,5; б) 1,8. 658. a) Так; в) ні. 659. a) 49. 660. a) 22. 661. б) 86;
 г) 10. 662. б) 4 і -4. 664. б) $(2y-3)^3$. 666. a) 120. 672. г) меценати.
 679. б) 0,4. 680. a) 0,666.... 682. a) $\frac{5}{6} < \frac{6}{7}$; в) $-\frac{3}{8} > -\frac{4}{9}$. 683. a) $\frac{2}{3} > 0,66$.
 684. a) $\sqrt{2} > 1,41$. 685. a) $\pi > 3,14$. 686. в) $\approx 7,937$. 687. г) 15,81.
 715. a) 80. 716. a) 0,5. 717. a) $\frac{4}{5}$. 718. a) $1\frac{1}{2}$; г) $3\frac{1}{3}$.
 719. a) 20. 720. a) 70. 721. a) 30. 722. a) $\frac{5}{6}$; д) $\frac{112}{135}$. 723. a) 8. 724. a) 20.
 725. a) $\frac{2}{5}$. 726. a) 1. 727. a) $1\frac{1}{3}$. 728. в) 5,8. 729. a) $\frac{4}{5}$; г) 2. 730. a) $\frac{1}{6}$;
 г) $\frac{3}{4}$. 731. a) 9. 732. a) 15; г) -0,32. 733. a) 16. 734. a) $\frac{5}{12}$. 735. a) 12.
 736. a) 28. 737. a) 1100. 738. a) 5 см. 739. a) 800. 740. a) 18.
 741. a) 6; д) $2\frac{6}{7}$. 742. б) $a \geq 0$. 744. a) $x \geq 0$. 745. a) $-3n$. 746. a) $a-1$.

747. a) x . 748. б) 12. 749. а) 7. 750. а) 3; 6; 12. 751. а) $3a^2bc^3$. 752. а) $-xyz$.
 753. а) $|a+b|$. 754. а) 1. 755. а) $\sqrt{3}-1$. 757. а) $-(2a-1)(2a-1)$.
 758. в) $(3x^{n+1}-y^{3n})(3x^{n+1}+y^{3n})$. 766. а) $5\sqrt{10}$. 767. а) $11\sqrt{2}$. 768. а) $5\sqrt{0,1}$.
 769. а) $\sqrt{12}$. 771. а) $\sqrt{0,9}$. 772. г) $\sqrt{0,5}$. 778. а) 21. 779. а) 25.
 780. а) $1+\sqrt{7}$. 781. а) 2. 782. а) $4+2\sqrt{3}$. 784. а) $a\sqrt{2}$. 785. а) $x\sqrt{3}$.
 786. а) $\sqrt{12x^2}$. 787. а) $\sqrt{2x^2}$. 788. а) $\frac{x\sqrt{5}}{5}$. 789. г) $\frac{3\sqrt{5}}{10}$.
 790. а) $-2(\sqrt{2}+\sqrt{3})$. 791. а) $\frac{-m(1+\sqrt{5})}{4}$. 796. а) $-\sqrt{3}$. 797. а) $\sqrt{3}$.
 798. б) 15. 800. а) 9. 801. а) 25. 802. 2,5 дм. 803. 4 см.
 804. а) $-x\sqrt{2}$. 806. а) $-\sqrt{ac^2}$. 808. а) \sqrt{a} . 809. а) 0. 810. а) 0.
 811. а) $a+\sqrt{a}-2$. 812. а) a . 813. а) b^2-x . 814. а) a . 815. а) $\sqrt{a}+\sqrt{b}$.
 818. а) $\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)$. 822. б) 2. 825. г) $10-4\sqrt{6}$. 830. а) $2(a-b)$.
 835. а) (10; 5). 836. 40° ; 50° і 90° . 847. а) 9. 848. а) 0. 851. 1) б) Ні.
 854. б) 0 і 1. 857. в) Один.

КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ

869. б) ± 3 . 871. 0 і 4. 872. г) $\pm 1,5$. 873. а) 0. 874. а) 0 і $-1,5$.
 875. б) 0 і $-0,6$. 876. а) ± 1 . 877. а) $\pm\sqrt{2}$. 878. а) $\pm 2,5$. 880. $\pm\sqrt{10}$.
 881. а) 17 см. 883. 4800 м. 884. а) ± 2 . 885. а) 0 і 8,5. 886. а) ± 5 .
 887. а) 0 і 2. 889. а) 5. 891. а) -16 і -15 . 897. а) 10 і -10 . 898. а) 0 і 3.
 899. а) 0 і $-2,25$. 900. а) ± 2 і $\pm\sqrt{2}$. 901. а) ± 3 . 902. 1,2 дм. 903. а) ≈ 10 см.
 906. 18 і 19. 907. 15 і 16. 909. а) $c = 0$. 911. 4 год. 912. 24 м^2 . 914. 216 дм.
 916. а) 0; 7 і -7 . 929. а) -2 і 9. 930. а) -13 і 10. 932. а) 6 і $-2,5$.
 934. а) 1,5 і 2. 935. а) $-0,4$ і 0,48. 937. а) -3 і 8. 941. а) 0 і 13.
 944. а) 1 і -3 . 946. а) 1 і $-0,5$. 947. а) $-0,2$. 948. а) ± 1 і ± 2 . 949. а) ± 3 .
 950. а) ± 1 . 954. а) $-2,5$ і 1,5. 956. а) -4 і -1 . 958. б) -3 і 0,2. 959. а) 1
 і $-0,25$. 963. а) 1 і $-4,6$. 964. а) -4 і 9. 967. а) -3 і 5. 968. а) Коренів
 немає. 969. а) 1,4 і 3. 970. а) 87 і -91 . 971. а) $-\sqrt{2}-1$ і $-\sqrt{2}+1$. 973. а) 3.
 975. а) ± 1 і ± 2 . 976. а) 6. 977. а) 2. 978. а) $\pm\sqrt{3}$ і ± 2 . 979. б) -4 і 1.
 980. а) 2 і 1. 983. а) -4 і 1. 984. а) -2 і -1 . 985. а) 0,25. 986. а) 81.
 987. а) -1 і 3. 989. а) $m = 0,2$. 991. а) ± 1 і ± 6 . 992. а) $(-2; 1)$ і $(0,25; 7,75)$.
 993. а) $(-2; 5)$ і $(-7,5; 3,625)$. 1009. а) $q = 49$. 1011. а) $q = 30$; $x_1 = 5$.

- 1015.** $c = 6$. **1016.** $m = -5, 6$. **1017.** а) $a = 1, 5$. **1019.** а) $p = -16, 5$; $x_2 = 16$.
1026. а) $x_1 = -2$; $x_2 = 12$; $q = -24$. **1029.** $c = -2$. **1032.** б) 52. **1037.** а) 22.
1048. а) $(3x - 2) \cdot (3x - 2)$. **1050.** а) $x = 3$. **1053.** а) $(x + 2)^2 = 22$.
1054. а) 0,5 і 2. **1055.** б) $(c - 2\sqrt{2})(c + \sqrt{2})$. **1065.** а) -21; 0,8. **1067.** При $x = 3$.
1071. При $x = 3$, $f(3) = 17$. **1080.** а) 25 і 36; б) 24 і 13 або -13 і -24.
1081. 40 м і 20 м. **1082.** 2 км і 1 км. **1083.** 16 і 17 або -14 і -15.
1084. 6 або 18. **1085.** а) 12 і -11. **1086.** а) 13 і 7. **1087.** а) 5 і 8 м.
1088. 16 і 17. **1089.** 6 і 8. **1090.** 11 і 12. **1091.** 11, 12 і 13 або -11, -12
і -13. **1094.** 21 ряд. **1096.** 7 км/год. **1097.** 60 км/год. **1098.** 3 км/год.
1099. 60 км/год. **1101.** 2 км/год. **1102.** 12 км/год. **1103.** 10 год.
1104. 200 км або 160 км. **1105.** 2,4 км/год або 3 км/год. **1106.** 80 см
і 60 см. **1108.** 10 км. **1109.** 12 днів, 6 днів. **1110.** 12 днів, 6 днів.
1111. 12 днів. **1112.** 30 днів, 20 днів. **1113.** 14 днів, 11 днів. **1114.** 5 год,
7 год. **1115.** 48 або 16. **1116.** 25 гілок, 8 бджілок. **1117.** 18 точок.
1118. 12. **1123.** 30 км/год і 24 км/год. **1124.** 160 г, 20 %. **1125.** 8,8 г/см³,
7,8 г/см³. **1126.** 10 %, 360 г. **1127.** 120 г. **1128.** 18 сторін.

ЗАДАЧІ ТА ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

- 1133.** а) $-2c^5$. **1140.** а) 0,625. **1145.** б) $2 - x$. **1146.** 11. **1147.** 5. **1148.** $\frac{x}{3}$.
1149. 3. **1151.** а) $\frac{2}{2a}$ і $\frac{3}{2a}$. **1152.** а) $\frac{5x^2}{15a^2x^3}$ і $\frac{3a}{15a^2x^2}$. **1153.** а) $\frac{a-x}{(a-x)^2}$
і $\frac{1}{(a-x)^2}$. **1154.** а) $\frac{4a+9}{12m}$. **1155.** а) $\frac{x-5}{5a}$. **1156.** а) $\frac{4}{9a}$. **1157.** а) $-\frac{1}{4m}$.
1158. а) $\frac{5z^2+6x^2}{15ax^2z^2}$. **1160.** а) $m = 1$; $n = -1$. **1162.** б) $-n^2x^2$. **1164.** а) 3см.
1165. а) $\frac{x(a-x)}{c}$. **1166.** а) $\frac{3c}{2x}$. **1167.** а) $\frac{x}{a}$. **1168.** б) $\frac{5}{9}$. **1169.** а) $\frac{a+2b}{3}$.
1171. а) $\frac{3}{4}$. **1172.** б) $\frac{8c}{3b}$. **1173.** $\frac{m-n}{m^2+n^2}$. **1174.** а) $5\sqrt{2}$. **1175.** а) $14\sqrt{10}$.
1176. а) $\sqrt{250}$. **1177.** а) 240. **1178.** а) 1,1. **1179.** а) 3,25. **1180.** а) 30.
1182. а) 60. **1183.** а) 23,1. **1184.** б) 3. **1185.** а) 7. **1186.** а) 15. **1187.** а) 27.
1188. а) $2\sqrt{15}$. **1189.** а) $\sqrt{2}+1$. **1190.** б) $\sqrt{13}-\sqrt{7}$. **1191.** а) $\sqrt{2}$.
1192. а) $2\sqrt{3}$. **1193.** а) 1 і 2. **1194.** а) $(x - 2)(x - 5)$. **1196.** а) $x^2 - 4x +$

- + 3 + 0. **1197.** а) 25. **1198.** Коренів немає. **1199.** а) ± 2 , ± 1 . **1200.** а) ± 2 .
1201. а) 1 і 2. **1202.** а) 1 і 25. **1203.** а) -1 ; 2 і $0,5(1 \pm \sqrt{37})$. **1204.** а) 34 і 47.
1205. а) $-0,5$ і 1,5. **1207.** в) 18. **1208.** а) $(1; 0)$, $(-0,5; -1,5)$.

ЗАДАЧІ ТА ВПРАВИ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ

- 1209.** а) $\frac{203}{405}$; в) $\frac{999}{1001}$. **1210.** а) Ці числа рівні. **1212.** 0,999.
1213. а) Розкладіть на множники чисельник: $x^4 + a^2x^2 + a^4 = x^4 + 2a^2x^2 + a^4 - a^2x^2 = (x^2 + a^2)^2 - (ax)^2 = (x^2 - ax + a^2)(x^2 + ax + a^2)$. **1214.** Існують.
1216. Раціональне. **1217.** Покажіть, що $4 \pm 2\sqrt{3} = (1 \pm \sqrt{3})^2$. **1218.** 34, 334, 3334. **1219.** Перша різниця більша. **1220.** 99. **1222.** а) Розкладіть на множники ліву частину рівняння. **1224.** а) Зробіть заміну $x + 6 = y$; б) Зробіть заміну $x^2 - 2x - 1 = y$. **1227.** $\pm\sqrt{5}$. **1228.** ± 2 . **1229.** $\pm\sqrt{3}$.
1230. 1; 3. **1231.** Щоб корені даного рівняння були раціональними, необхідно, щоб виконувалась рівність $p^2 - 4q = m^2$, де m — ціле непарне число. Покажіть, що такого m не існує. **1232.** 3 км/год. **1233.** 121 км. **1234.** 3 км/год. **1235.** $\approx 64,4$ км/год. **1236.** 5 %.
1237. 10,5 бу і 24,5 бу. **1238.** 40 або 60 пістолів. **1239.** 3,5.
1240. а) Зробіть заміну $\frac{1}{x} = y$; б) дане рівняння рівносильне рівнянню $(x - 11)(x + 9)(x^2 + 2x + 101) = 0$. **1242.** 27. **1244.** $\frac{2}{2005}$. **1245.** Зверніть увагу на те, що $3(14n + 3) - 2(21n + 4) = 1$. **1248.** а) 1; б) 4 або $-1,2$.
1250. а) 193^3 .

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

- Абсциса точки 243
- Аргумент функції 243
- Вершина параболи 127
- Винесення за дужки 242
 - з-під знака кореня 158
- Вирази дробові 35
 - зі змінними 242
 - з коренями 160
 - раціональні 35, 242
 - цілі 35, 242
- Віднімання дробів 43
 - многочленів 242
- Вісь абсцис 243
- ординат 243
- Властивості рівнянь 241
 - степенів 247
 - функцій 111
- Гіпербола 110
- Графік рівняння 244
 - функції 243
- Дискримінант 191
- Ділення виразів 8
 - дійсних чисел 145
 - дробів 67
 - одночленів 9
 - степенів 8
- Добування квадратного кореня 134
- Додавання дробів 43
 - многочленів 242
 - одночленів 242
- Допустимі значення 17
- Дроби 16
 - взаємно обернені 67
 - раціональні 17
- Знаменник дробу 16
- Квадрат двочлена 243
- Квадратний тричлен 207
- Корінь арифметичний 134
 - з добутку 151
 - з дробу 151
 - зі степеня 151
 - квадратний 134
- Координатна площа 243
- Куб двочлена 243
- Многочлен 242
- Множення дробів
 - многочленів 243
 - одночленів 242
 - степенів 241
- Множина дійсних чисел 143
 - значень 243
 - порожня 142
 - раціональних чисел 142
 - цілих чисел 143
- Незалежна змінна 243
- Обернена пропорційність 110
- Область визначення функції 243
- Одночлен 242
 - стандартного вигляду 242
- Ордината точки 243
- Оси координат 243
- Основа степеня 241
- Основна властивість дробу 26
 - — степеня 96
- Парабола 126
- Перетворення виразів
 - з коренями 158–159
 - раціональних 76
- Періодичні дроби 143
- Подібні члени 242
- Показник степеня 241

-
- Порядок числа 103
 Пропорційність обернена 110
 — пряма 111, 243
- Раціональні вирази 35
 — числа 142
 Рівняння 241
 — біквадратні 192
 — дробові 86
 — дробово-раціональні 88
 — з двома змінними 244
 — квадратні 182
 — — зведені 200
 — лінійні 241
 — неповні 182
 — першого степеня 241
 — раціональні 36, 86
 — рівносильні 241
 Рівняння-наслідок 86
 Різниця квадратів 243
 — кубів 243
 — многочленів 242
 — одночленів
 Розв'язок 241
 — рівняння 244
 — — з двома змінними 244
 — системи рівнянь 244
 Розкладання многочленів 243
- Система рівнянь 244
 Скорочення дробів 27
 Стандартний вигляд числа 103
 Степінь числа 241
- — з від'ємним показником 95
 — — з нульовим показником 95
 — — з цілим показником 95
 Сума кубів 243
 — одночленів 242
- Теорема Вієта 200
 Тотожні вирази 17
 — перетворення виразів 18, 76
 Тотожність 18
- Умова рівності дробу нулю 36
- Формула квадрата двочлена 243
 — коренів квадратного рівняння 191
 Формули скороченого множення 243
 Функція 109, 243
 — $y = x^2$ 126
 — $y = \sqrt{x}$ 168
 — $y = \frac{k}{x}$ 109
 — лінійна 243
 Функції обернені 170
- Чисельник дробу 16
 Числа дійсні 143
 — ірраціональні 143
 — натуральні 144
 — раціональні 143
 — цілі 145
 Члени дробу 16

Зміст

Шановні восьмикласники й восьмикласниці! 3

Як працювати з підручником 4

Розділ 1. РАЦІОНАЛЬНІ ВИРАЗИ

§ 1. Ділення степенів і одночленів	8
§ 2. Ділення і дроби	16
§ 3. Основна властивість дробу	26
§ 4. Раціональні вирази	35
§ 5. Додавання і віднімання дробів	43
§ 6. Множення дробів	54
<i>Завдання для самостійної роботи</i>	64
<i>Готуємося до тематичного оцінювання</i>	
<i>Тестові завдання № 1</i>	65
<i>Типові завдання до контрольної роботи № 1</i>	66
§ 7. Ділення дробів	67
§ 8. Перетворення раціональних виразів	76
§ 9. Раціональні рівняння	86
§ 10. Степені з цілими показниками	95
§ 11. Стандартний вигляд числа	103
§ 12. Функція $y = \frac{k}{x}$	109
<i>Завдання для самостійної роботи</i>	119
<i>Історичні відомості</i>	120
<i>Головне в розділі</i>	121
<i>Готуємося до тематичного оцінювання</i>	
<i>Тестові завдання № 2</i>	122
<i>Типові завдання до контрольної роботи № 2</i>	123

Розділ 2. КВАДРАТНІ КОРЕНІ І ДІЙСНІ ЧИСЛА

§ 13. Функція $y = x^2$	126
§ 14. Квадратні корені	134
§ 15. Числові множини	142
§ 16. Квадратний корінь із добутку, дробу, степеня	150
§ 17. Перетворення виразів з коренями	158

§ 18. Функція $y = \sqrt{x}$	168
Завдання для самостійної роботи	175
Історичні відомості	176
Головне в розділі	177
Готуємося до тематичного оцінювання	
Тестові завдання № 3	178
Типові завдання до контрольної роботи № 3	179

Розділ 3. КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ

§ 19. Неповні квадратні рівняння	182
§ 20. Формула коренів квадратного рівняння	190
§ 21. Теорема Вієта	200
§ 22. Квадратний тричлен	207
§ 23. Квадратне рівняння як математична модель прикладної задачі	214
Завдання для самостійної роботи	224
Історичні відомості	225
Головне в розділі	226
Готуємося до тематичного оцінювання	
Тестові завдання № 4	227
Типові завдання до контрольної роботи № 4	228

ДОДАТКИ

Навчальний проект № 1. Стандартний вигляд числа у різних галузях знань	229
Навчальний проект № 2. Історія розвитку числа	230
Навчальний проект № 3. Рівняння у шерензі віков і способи їх розв'язання	231

ЗАДАЧІ ТА ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

Рациональні вирази	232
Квадратні корені та дійсні числа	235
Квадратні рівняння	236

ЗАДАЧІ ТА ВПРАВИ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ

ВІДОМОСТІ З КУРСУ АЛГЕБРИ 7 КЛАСУ	241
ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ ДО ЗАДАЧ І ВПРАВ	245
ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК	252