TP: Génération de motifs 2D

Nombres complexes

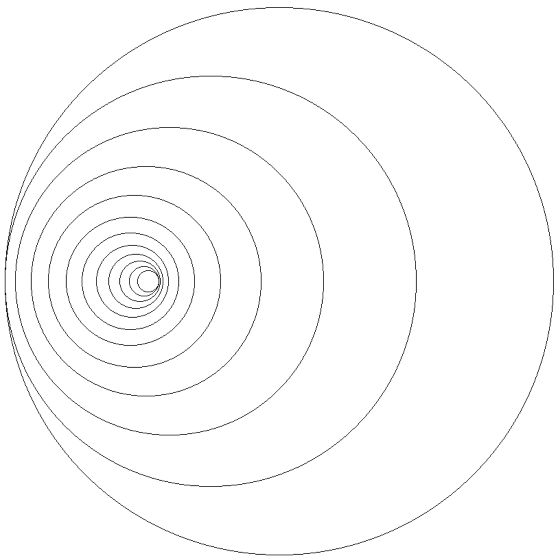
Suites et séries (sommes partielles) : expressions par récurrence, expressions explicites

Objectifs

L'objectif de ce TP est
- de modéliser mathématiquement, à l'aide de suites de nombres complexes, divers motifs géométriques 2D
- de visualiser les résultats informatiquement grâce à un programme en Python

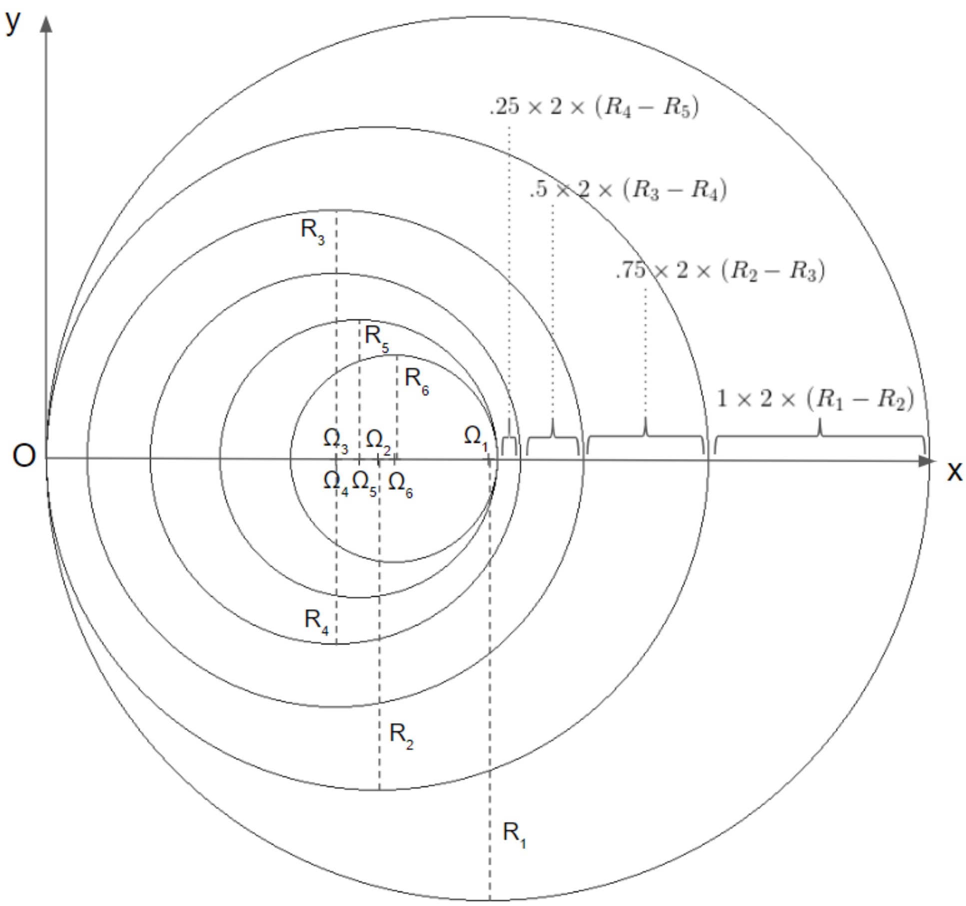
Les motifs proposés sont inspirés de l'oeuvre "Szen", réalisée par Victor Vasarely en 1978.

1er Motif : d'un point de tangence à l'autre



Le motif ci-dessus est constitué de *N* cercles imbriqués (12 cercles sur l'exemple en noir & blanc ci-dessus). Tous les centres $\Omega_k \quad (1 \leqslant k \leqslant N)$ sont alignés horizontalement:

- Le 1er cercle, d'indice 1, le plus grand, est de rayon *R*.
- Le 2ème cercle, plus petit, est de rayon $qR \quad (q \in \mathbb{R},\ 0 < q < 1)$, tangent "à gauche" au 1er cercle. (pour l'exemple ci-dessus: $q = 0.75$)
- Le 3ème cercle est de rayon q^2R, tangent à aucun cercle.
- Le cercle d'indice *k* est de rayon $q^{k-1}R$
- On retrouve un point de tangence "à droite" entre les cercles d'indice *N* et $N-1$, soit entre le dernier et l'avant-dernier cercle
- La position des centres successifs est donc progressivement décalée vers la droite pour assurer les points de tangence "au départ" et "à l'arrivée". La figure ci-dessous explicite plus avant le calcul de ce décalage sur un exemple à 6 cercles.



Sur ce schéma sont notés:

- les centres des cercles $\Omega_k \quad (1 \leqslant k \leqslant 6)$
- les rayons R_k
- les formules des écarts "à droite" entre deux cercles successifs. L'écart est maximal (100% de la différence des diamètres) entre le 1er et le 2ème cercle, il est minimal, soit 0, entre le 5ème et le 6ème cercle. Vous pouvez vous rendre compte sur la figure que la

fraction de l'écart “à droite” évolue de manière linéaire, il s'agit de la série $\{1, .75, .5, .25, 0\}$.

Notez que les centres $\Omega_3\ et\ \Omega_4$ sont confondus. Il s'agit d'une coïncidence (toutefois logique) due au fait que l'exemple comporte un nombre pair de cercles (à démontrer ultérieurement).

On se munit d'un plan complexe. L'origine du plan est notée O. L'axe des réels est *(Ox)*, l'axe des nombres imaginaires purs *(Oy)*. *(Oxy)* forme un repère orthonormé. A chaque point du plan complexe, de coordonnées *(x,y)*, on associe une affixe complexe notée $z = x + iy$ (avec $i^2 = -1$, attention à ne pas confondre *i* nombre imaginaire pur avec *i* indice entier éventuel).

Les affixes des points Ω_k sont notés ω_k (omega minuscule indicé *k*). Pour ce motif, toutes les affixes sont réelles.

Les paramètres du motif sont:

- *R* rayon du premier cercle
- *q* coefficient multiplicateur pour calculer les rayons successifs, $(q \in \mathbb{R},\ 0 < q < 1)$
- *N* nombre de cercles supérieur ou égal à 3

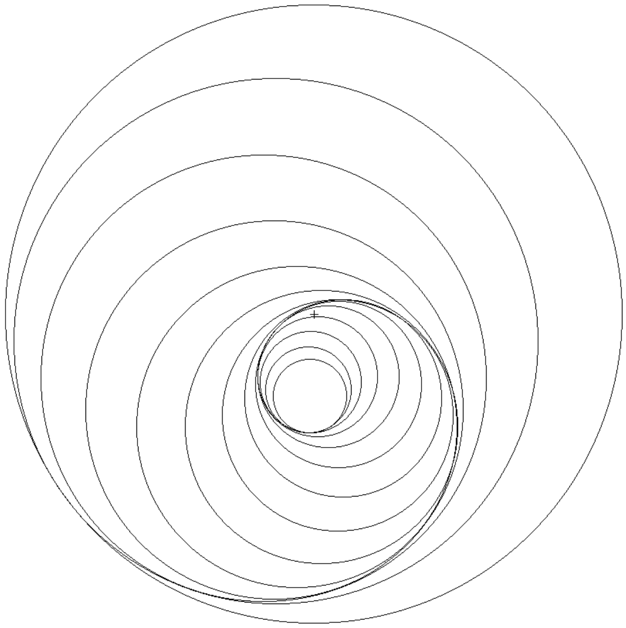
Travail à effectuer

- Etablissez la formule par récurrence
  - Exprimez ω_1 en fonction de R_1, puis en fonction de R
  - Exprimez ω_2 en fonction de ω_1, R_1, R_2
  - Exprimez ω_3 en fonction de ω_2, R_2, R_3 et *N*
  - Exprimez ω_{n+1} $(1 \leq n < N)$ en fonction de ω_n, R_n, R_{n+1}, *N* et *n*. Cette égalité est notée (E_{n+1}) et constitue votre formule de récurrence.
  - Simplifiez (E_{n+1}) et exprimez ω_{n+1} en fonction de ω_n, *R*, *q*, *N* et *n.*
  - Exprimez, grâce à (E_{n+1}), ω_N en fonction de ω_{N-1}, *R*, *q* et *N*
  - Vérifiez informatiquement que votre formule par récurrence est fonctionnelle en écrivant le programme de traçage correspondant en Python. Testez différentes valeurs de *R*, *q* et *N*.
  - Pour *q, R* et *N* constantes, on définit la fonction réelle $f(n) = \omega_{n+1} - \omega_n$, $(1 \leqslant n \leqslant N-1)$. Comment interprétez-vous géométriquement (sur le motif) des valeurs positives ou négatives de f ?
  - Prenez *R = 1*. Tracez f à l'aide de Geogebra pour différentes valeurs de *q* et *N*. Déduisez-en empiriquement l'influence de chaque paramètre *q* et *N* sur f.
  - Expliquez, grâce à la courbe représentative de f, l'évolution des positions relatives des centres des cercles successifs. Le motif exemple satisfait-il vos déductions ?

- Démontrez à l'aide de f que deux centres successifs peuvent être confondus uniquement dans le cas où *N* est pair. Où se situent alors ces centres confondus dans la série des centres Ω_k ?

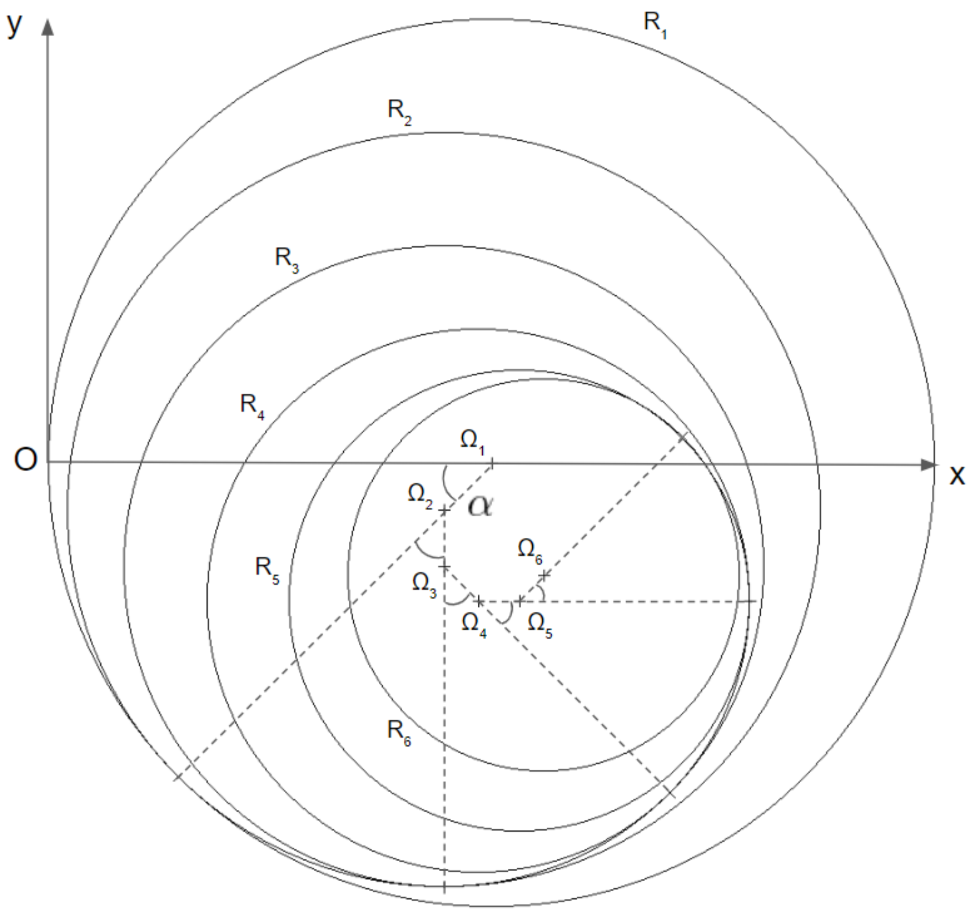
- Etablissez la formule explicite
  - Effectuez la somme des égalités (E_k), $(1 \leqslant k \leqslant n)$, et déduisez-en une formule explicite de $\omega_n \quad (1 \leq n \leq N)$ en fonction de *q, R*, *N* et *n* (utilisez le symbole $\sum$ pour exprimer une somme de manière compacte)
  - Vous devriez obtenir dans votre formule des sommes partielles des deux séries entières $\sum q^k$ et $\sum kq^k$.
    i. La première n'est rien d'autre que la somme des premiers termes d'une suite géométrique de raison *q*, dont vous connaissez certainement la formule explicite.
    ii. La deuxième est plus subtile mais il vous suffira de dériver par rapport à *q* l'expression trouvée en (i) pour en établir l'expression explicite.
  - Simplifiez maintenant votre expression de $\omega_n \quad (1 \leq n \leq N)$ en fonction de *R*, *q, N* et *n* , débarrassée du symbole $\sum$.
  - Vérifiez informatiquement (programme Python) que cette formule explicite est fonctionnelle.Vous devez obtenir ici le même résultat obtenu précédemment par récurrence.

$2^{\text{ème}}$ Motif : de “simples” rotations appliquées aux cercles ...



Le motif ci-dessus est constitué de *N* cercles imbriqués (14 cercles sur l’exemple en noir & blanc ci-dessus). Les centres $\Omega_k \quad (1 \leqslant k \leqslant N)$ des cercles sont définis ainsi:

- Le 1[er] cercle, d’indice 1, le plus grand, est de rayon *R*.
- Le $2^{\text{ème}}$ cercle, plus petit, est de rayon $qR \quad (q \in \mathbb{R},\ 0 < q < 1)$ (pour l’exemple ci-dessus, $q = 0.85$). Il est tangent “à gauche” au 1[er] cercle. La droite $(\Omega_2\Omega_1)$ fait un angle α avec l’axe horizontal *(Ox)*. (voir figure ci-dessous)
- Le $3^{\text{ème}}$ cercle est de rayon q^2R, tangent “à gauche” au $2^{\text{ème}}$ cercle. La droite $(\Omega_3\Omega_2)$ fait un angle α avec la droite $(\Omega_2\Omega_1)$.
- Le cercle d’indice *k* est de rayon $q^{k-1}R$. Il est tangent “à gauche” au cercle d’indice *k - 1*. Pour $k \geqslant 3$, La droite $(\Omega_k\Omega_{k-1})$ fait un angle α avec la droite $(\Omega_{k-1}\Omega_{k-2})$.
- Les positions successives des centres des cercles dessinent une spirale, tout comme les points de tangence. On distingue d’ailleurs assez bien cette dernière sur la figure ci-dessus.
- La figure ci-dessous explicite plus avant le positionnement des centres des cercles sur un exemple à 6 cercles, avec *q = 0.85* et $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.



Sur ce schéma sont notés:

- les centres des cercles $\Omega_k \quad (1 \leqslant k \leqslant 6)$
- les rayons R_k (à proximité des cercles, les segments rayons n'ayant pas été tracés pour ne pas encombrer la figure).
- L'angle α existant entre les droites $(\Omega_k\Omega_{k-1})$ et $(\Omega_{k-1}\Omega_{k-2})$.

Pour ce motif, les affixes ω_k associées aux centres $\Omega_k \quad (1 \leqslant k \leqslant N)$ ne sont plus uniquement réelles.

Les paramètres du motif sont:

- *R* rayon du premier cercle
- *q* coefficient multiplicateur pour calculer les rayons successifs, $(q \in \mathbb{R},\ 0 < q < 1)$
- *N* nombre de cercles supérieur ou égal à 2 . N peut être très grand, voire infini.
- α, l'angle existant entre les "lignes des centres" successives.

Travail à effectuer

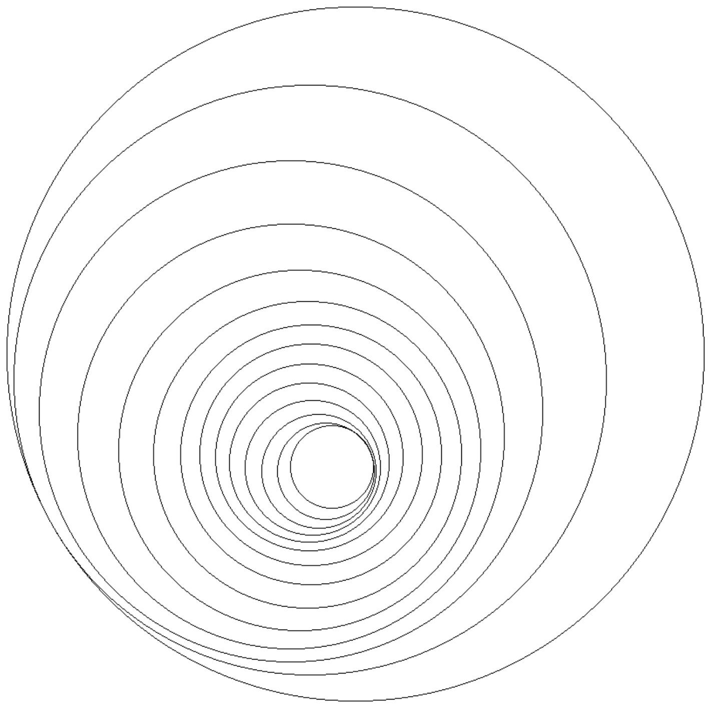
- Etablissez la formule par récurrence
  - Quelle est l'affixe, notée u_1, associée au vecteur unitaire $\dfrac{\overrightarrow{O\Omega_1}}{\left\|\overrightarrow{O\Omega_1}\right\|}$?
  - Exprimez ω_1 en fonction de u_1 et R_1, puis en fonction de R ?

- Exprimez l'affixe, notée u_2 , associée au vecteur unitaire $\frac{\overrightarrow{\Omega_2\Omega_1}}{\left\|\overrightarrow{\Omega_2\Omega_1}\right\|}$ en fonction de u_1 et α, puis uniquement en fonction de α.
- Exprimez la longueur $\Omega_2\Omega_1$ en fonction de *R* et *q*.
- Exprimez ω_2 en fonction de ω_1, u_2, *R* et *q*, puis en fonction de ω_1, α, *R* et *q*
- Exprimez l'affixe, notée u_{n+1}, associée au vecteur unitaire $\frac{\overrightarrow{\Omega_{n+1}\Omega_n}}{\left\|\overrightarrow{\Omega_{n+1}\Omega_n}\right\|}$ en fonction de α et *n* . Remarquez, pour vous aider, l'angle que fait la droite $(\Omega_{n+1}\Omega_n)$ avec l'axe horizontal.
- Exprimez la longueur $\Omega_{n+1}\Omega_n$ en fonction de *R*, *q* et *n*.
- Exprimez ω_{n+1} $(1 \leq n < N)$ en fonction de ω_n, α, *R*, *q* et *n.* Cette égalité est notée (E_{n+1}) et constitue votre formule par récurrence.
- Vérifiez informatiquement que votre formule par récurrence est fonctionnelle en écrivant le programme de traçage correspondant en Python. Testez différentes valeurs de α, *R*, *q* et *N*.

- Etablissez la formule explicite
  - Effectuez la somme des égalités (E_k), $(1 \leqslant k \leqslant n)$, et déduisez-en une formule explicite de ω_n $(1 \leq n \leq N)$ en fonction de α, *R*, *q* et *n* (utilisez le symbole $\sum$ pour exprimer une somme de manière compacte)
  - En procédant de manière similaire au motif précédent, débarrassez-vous du symbole $\sum$ pour obtenir une expression explicite simplifiée.
  - Vérifiez informatiquement (programme Python) que cette formule explicite est fonctionnelle.Vous devez obtenir ici le même résultat obtenu précédemment par récurrence.

- Centre de la spirale
  - Considérez l'expression explicite de ω_n et faites tendre *n* vers l'infini. Quelle affixe particulière obtenez-vous ? Quelles sont les coordonnées cartésiennes du point correspondant ?
  - Vérifiez informatiquement et visuellement que les centres des cercles successifs convergent bien vers ce point particulier.

$3^{\text{ème}}$ Motif : combinons les règles de traçage des deux premiers motifs

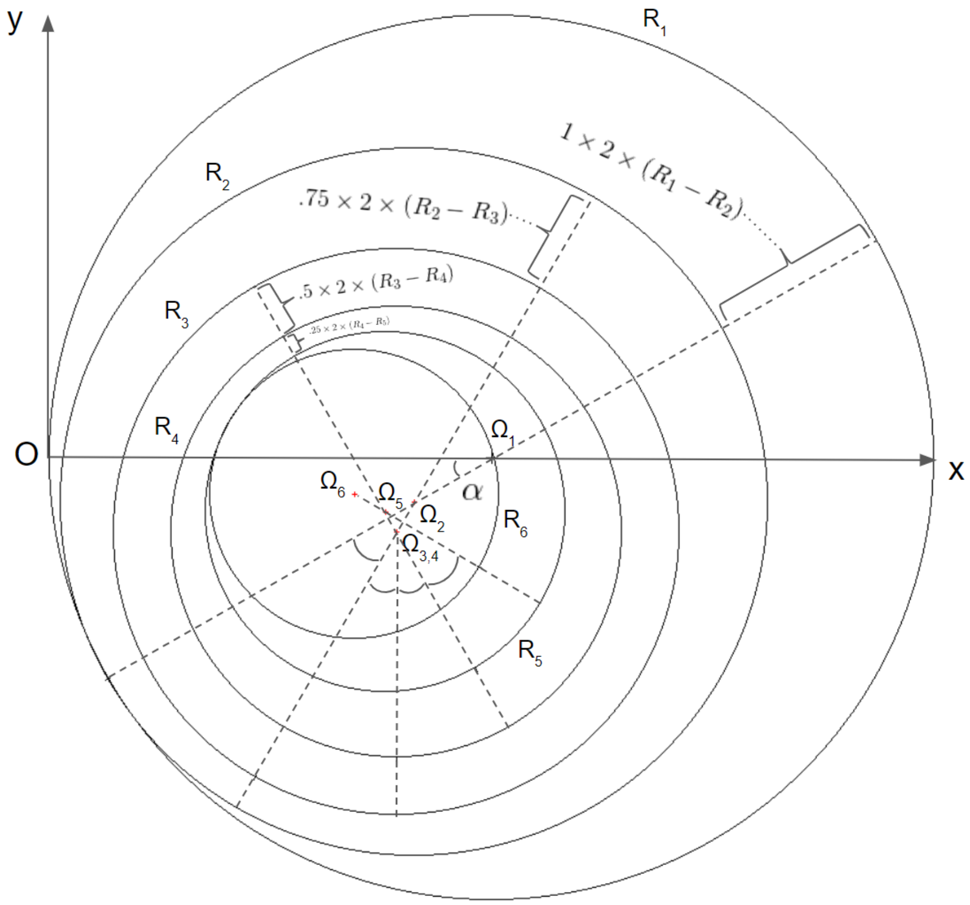


Le motif ci-dessus, à l'instar des motifs précédents, est constitué de N cercles concentriques. Il combine les règles de traçage vues précédemment:

- Le cercle d'indice *k* est de rayon $q^{k-1}R$, $(q \in \mathbb{R},\ 0 < q < 1)$
- Motif n° 1: les centres successifs sont progressivement ("linéairement") décalés pour passer d'un point de tangence "à gauche" entre les 1$^{\text{er}}$ et 2$^{\text{ème}}$ cercles à un point de tangence "à droite" entre les cercles d'indice N - 1 et N.
- Motif n° 2: Il existe un angle α entre la droite $(\Omega_2\Omega_1)$ et l'axe (Ox), puis entre les droites $(\Omega_k\Omega_{k-1})$ et $(\Omega_{k-1}\Omega_{k-2})$, pour $k \geqslant 3$.

La figure ci-dessous explicite plus avant le positionnement des centres des cercles sur un exemple à 6 cercles, avec *q = 0.8* et $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$.

La description de cette figure est similaire à celles effectuées pour les figures des motifs précédents, elle ne sera donc pas détaillée ici.



Pour ce motif, les affixes ω_k associées aux centres $\Omega_k \quad (1 \leqslant k \leqslant N)$ peuvent comporter une partie réelle et une partie imaginaire.

Les paramètres du motif sont:

- *R* rayon du premier cercle
- *q* coefficient multiplicateur pour calculer les rayons successifs, $(q \in \mathbb{R},\ 0 < q < 1)$
- *N* nombre de cercles supérieur ou égal à 3 .
- α, l'angle existant entre les “lignes des centres” successives.

Travail à effectuer

- Déterminez la formule par récurrence liant $\omega_{n+1} \quad (1 \leq n < N)$, ω_n, α, *R*, *q*, *n et N.*
- Vous vous aiderez des analyses et formules précédemment menées et établies, en particulier de l'analyse menée pour le motif n°2.
- Déterminez la formule explicite de ω_n en fonction de α, *R*, *q*, *n et N.*
- Simplifiez la formule en éliminant le symbole $\sum$ de l'expression. Attention, les calculs nécessaires sont assez longs.
- Vérifiez informatiquement que vos formules par récurrence et explicite sont fonctionnelles en écrivant le programme de traçage correspondant en Python. Testez différentes valeurs de α, *R*, *q* et *N*.