AMARA Sami
PETIT Denis

TP - Génération de motifs 2D

Sommaire

1er Motif : d'un point de tangence à l'autre

Formule par récurrence

- **Exprimons ω_1 en fonction de R_1 puis de R**

$$\omega_1 = R_1 \Leftrightarrow \omega_1 = R$$

- **Exprimons ω_2 en fonction de ω_1, R_1 et R_2**

Nous pouvons nous repérer par rapport à la position la plus à droite du cercle d'affixe ω_1 :

1. $\omega_2 = \omega_1 + R_1$ place ω_2 à la position la plus à droite du cercle d'affixe ω_1
2. $\omega_2 = \omega_1 + R_1 - 1 \times 2 \times (R_1 - R_2)$ place ω_2 à la position la plus à droite du nouveau cercle de rayon R_2
3. $\omega_2 = \omega_1 + R_1 - 1 \times 2 \times (R_1 - R_2) - R_2$ place ω_2 au centre du nouveau cercle de rayon R_2

- **Exprimons ω_3 en fonction de ω_2, R_2, R_3 et N**

De la même manière que précédemment, mais en tenant compte de la distance entre les cercles de rayon R_2 et R_3, nous parvenons à :

$$\omega_3 = \omega_2 + R_2 - \frac{3}{4} \times 2 \times (R_2 - R_3) - R_3$$

A partir des précédentes expression des affixes des centres, nous déduisons :

$$\omega_3 = \omega_2 + R_2 - (1 - \frac{1}{N-2}) \times 2 \times (R_2 - R_3) - R_3$$, avec $N > 2$

- **Exprimons $\omega_{\mathrm{n\,+\,1}}$ $(1 \leq n < N)$ en fonction de ω_{n}, R_{n}, $R_{\mathrm{n\,+\,1}}$, N et n**

À partir de ce qui précède, nous pouvons déduire une expression générale de ω_{n} :

$$\omega_{\mathrm{n}} = \omega_{\mathrm{n\,-\,1}} + R_{\mathrm{n\,-\,1}} - (1 - \frac{n-2}{N-2}) \times 2 \times (R_{\mathrm{n\,-\,1}} - R_{\mathrm{n}}) - R_{\mathrm{n}}$$

et par conséquent une expression de $\omega_{\mathrm{n}\,+\,1}$:

$$\omega_{\mathrm{n}\,+\,1} = \omega_{\mathrm{n}} + R_{\mathrm{n}} - (1 - \frac{n-1}{N-2}) \times 2 \times (R_{\mathrm{n}} - R_{\mathrm{n}\,+\,1}) - R_{\mathrm{n}\,+\,1}$$

qui représente $(E_{\mathrm{n+1}})$.

- **Simplifions $(E_{\mathrm{n+1}})$ et exprimons $\omega_{\mathrm{n}\,+\,1}$ en fonction de ω_{n}, R, q et N**

Sachant que $R_{\mathrm{n}} = q^{n-1}R$, nous pouvons développer cette expression au sein de $\omega_{\mathrm{n}\,+\,1}$, puis factoriser le résultat. Nous parvenons une expression simplifiée de $\omega_{\mathrm{n}\,+\,1}$:

$$\omega_{\mathrm{n}\,+\,1} = \omega_{\mathrm{n}} + Rq^{n}(q^{-1} - 1)(\frac{2n-N}{N-2})$$

- **Exprimons, grâce à $(E_{\mathrm{n+1}})$, ω_{N} en fonction de $\omega_{\mathrm{N\text{-}1}}$, R, q et N**

$$\omega_{\mathrm{N}} = \omega_{\mathrm{N\text{-}1}} + Rq^{N-1}(q^{-1} - 1)(\frac{2(N-1)-N}{N-2})$$

L'expression la plus à droite se simplifie : $(\frac{2(N-1)-N}{N-2}) = (\frac{N-2}{N-2}) = 1$

d'où :

$$\omega_{\mathrm{N}} = \omega_{\mathrm{N\text{-}1}} + Rq^{N-1}(q^{-1} - 1)$$

- **Implémentons $(E_{\mathrm{n+1}})$ et vérifions sa validité**

L'implémentation par récurrence en Python se trouve dans `src/Szen1_recurrence.py`. Les images ci-dessous se trouvent dans `img/Szen1_recurrence/`.

Voici quelques illustrations des résultats obtenus (l'image est de 1000x1000 px) :

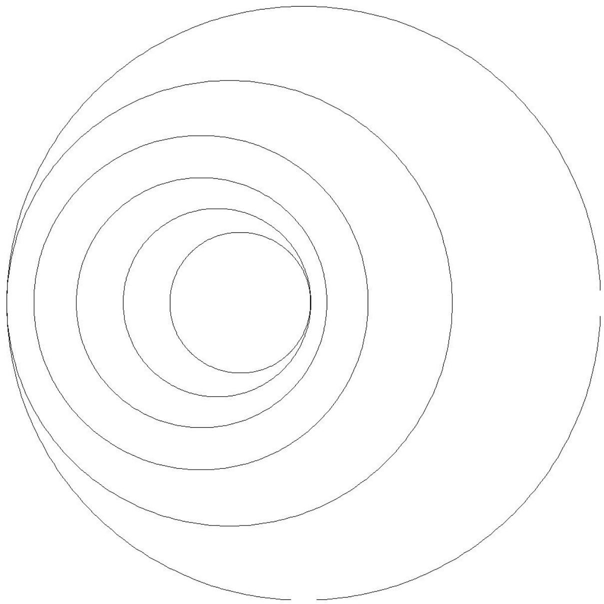


Fig. 1 : $R = 500,\ q = 0.75,\ N = 6$

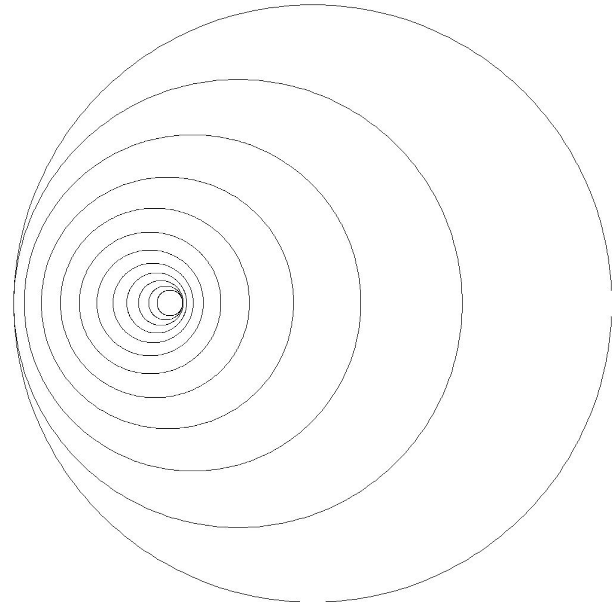


Fig. 2 : $R = 500,\ q = 0.75,\ N = 12$

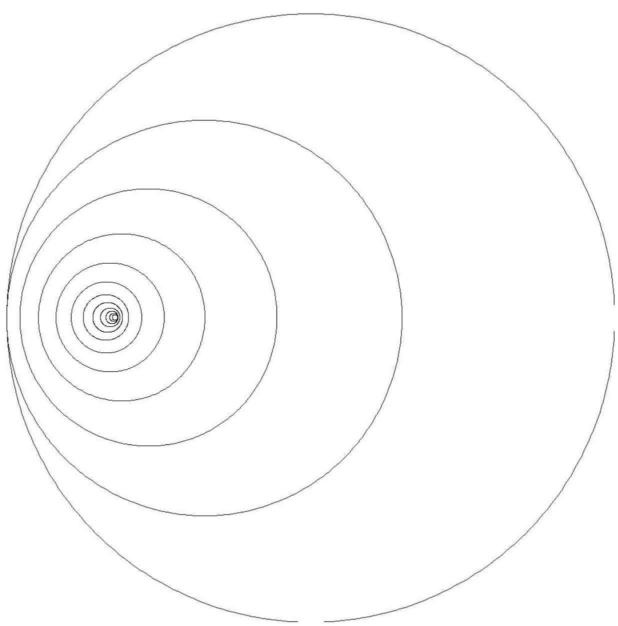


Fig. 3 : $R = 500,\ q = 0.65,\ N = 12$

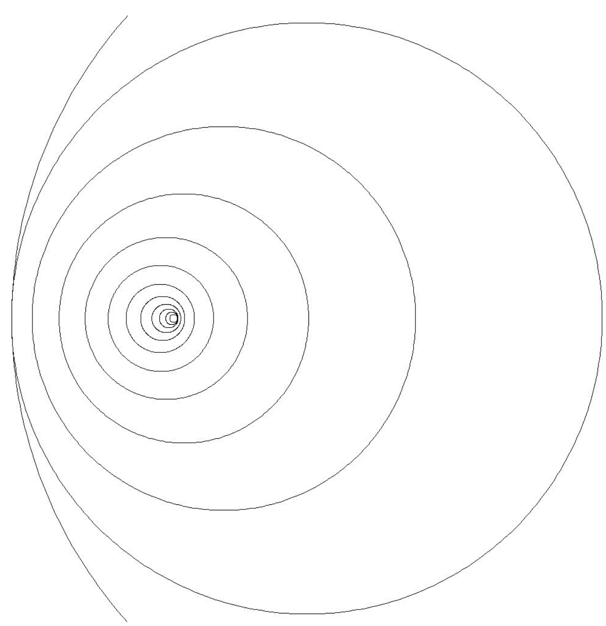


Fig. 4 : $R = 750,\ q = 0.65,\ N = 12$

Les "trous" dans le cercle extérieur sont dus à sa proximité aux bords de l'image.

- **Interprétons géométriquement $f(n) = \omega_{\mathrm{n+1}} - \omega_{\mathrm{n}}$**

Cette fonction s'exprime :
$f(n) = Rq^n(q^{-1} - 1)(\frac{2n - N}{N - 2})$ avec $1 \leqslant n \leqslant N - 1$, R, q et N connus (toujours avec $N > 2$).

Cette fonction représente la différence d'abscisse entre une affixe et celle qui la précède pour des configurations prédéfinies (R, q et N fixes).

Une valeur positive indique que l'affixe ω_{n} est positionnée "avant" ou "à gauche de" $\omega_{\mathrm{n+1}}$.
Formellement, ω_{n} aura une partie réelle inférieur à celle de $\omega_{\mathrm{n+1}}$.

Une valeur négative indique que l'affixe ω_{n} est positionnée "après" ou "à droite de" $\omega_{\mathrm{n+1}}$.
Formellement, ω_{n} aura une partie réelle supérieur à celle de $\omega_{\mathrm{n+1}}$.

Une valeur nulle indique que l'affixe ω_{n} est confondue avec $\omega_{\mathrm{n+1}}$.
Formellement, ω_{n} aura une partie réelle strictement égale à celle de $\omega_{\mathrm{n+1}}$.

- **Déduisons empiriquement l'influence de q et N sur f**

Voici la représentation graphique de f :

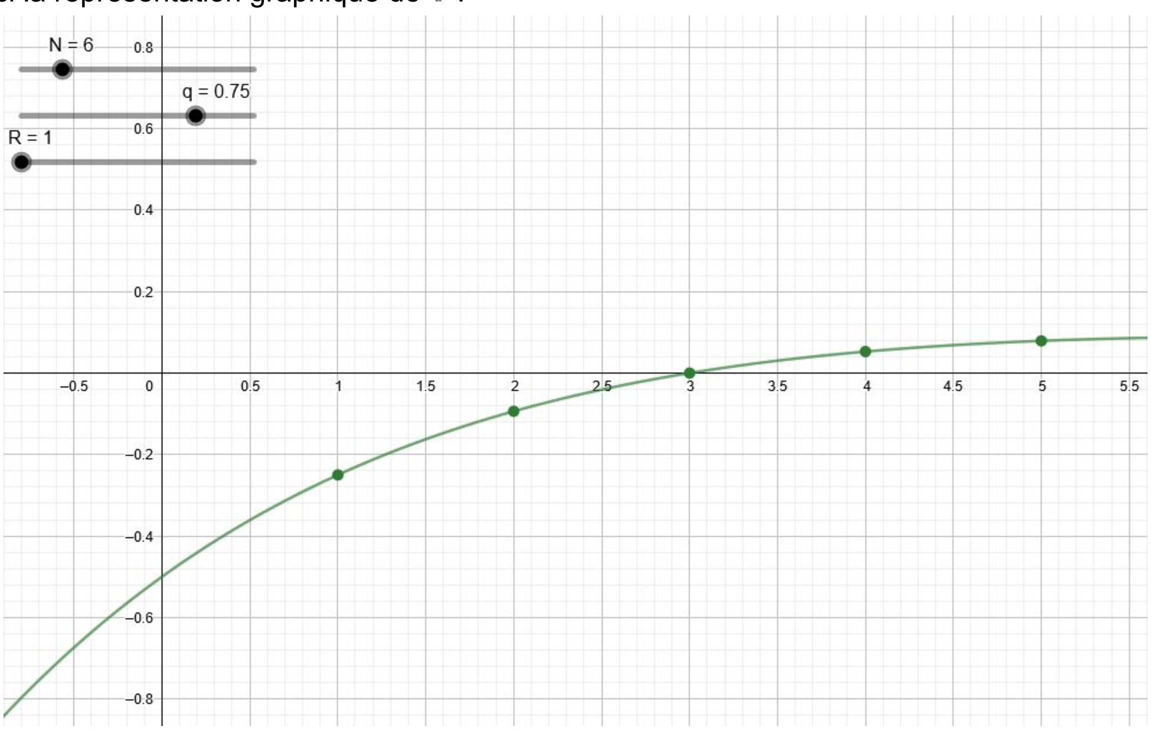


Fig. 5 : Représentation graphique de f pour $R = 1$, $N = 6$, $q = 0.75$

En figeant R, nous observons l'influence des paramètres restant :

- q influe non-uniformément sur l'écartement entre les centres des cercles :
  - lorsque $f(n)$ est négative ($n < 3$), plus q est petit, plus l'écart avec l'affixe suivante est grand
  - lorsque $f(n)$ est positive ($n > 3$), plus q est petit, plus l'écart avec l'affixe suivante est petit
- N influe sur la valeur de n à partir de laquelle le signe de la fonction devient positif, c'est-à-dire sur l'affixe à partir de laquelle le sens de progression des centres sur les abscisses change (passage d'une progression "vers la gauche" à une progression "vers la droite", éventuellement après 2 centres consécutifs confondus).
  N influe aussi uniformément sur la distance entre les affixes : plus N augmente, plus l'écart entre centres est grand.
  Enfin, la parité de N influe sur l'apparition de 2 centres confondus.

- **Expliquons l'évolution des positions relatives des centres consécutifs**

Considérons le motif donné en exemple ($R = 1$, $q = 0.75$, $N = 6$, voir figure 5) :

La valeur de $f(n)$ représente l'écart entre $\omega_{\mathrm{n+1}}$ et ω_{n}. En observant la représentation graphique de la fonction associée à ce motif, et à partir de nos précédentes interprétations, nous pouvons deviner que :

- De ω_1 vers ω_3 inclus, les affixes diminuent sur les abscisses, "vers la gauche"
- ω_3 et ω_4 sont confondus, car $f(3) = 0$
- De ω_5 vers ω_6 inclus, les affixes montent sur les abscisses, "vers la droite"

Le motif est bien en accord avec ces déductions.

- **Démontrons que 2 centres successifs peuvent être confondus seulement si N est pair**

Nous cherchons N tel qu'il existe un n pour lequel $f(n) = 0$. Cela revient à poser :

$$Rq^n(q^{-1} - 1)(\frac{2n - N}{N - 2}) = 0$$

Ce qui se réduit à : $2n - N = 0$ $\quad$ $R \neq 0$ (pour et $0 < q < 1$)

On en déduit que pour qu'il existe deux centres confondus, il faut que $N = 2n$, ce qui implique nécessairement que N est pair.

Formule explicite

- **Effectuons la somme des égalités (E_{k}), $1 \leqslant k \leqslant n$, pour en déduire une formule explicite de ω_{n} en fonction de q, R et N et n**

Développer la somme des égalités (E_{k}) permet de faire apparaître $(E_{\mathrm{k+1}})$:

$$\sum_{k=1}^{n}(E_{\mathrm{k}}) = E_1 + (E_2 + \ldots + E_{\mathrm{n\text{-}1}} + E_{\mathrm{n}}) = E_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(E_{\mathrm{k+1}})$$

ce qui nous permet de développer cette somme, $(E_{\mathrm{k+1}})$ étant connu :

$$\sum_{k=1}^{n}(E_{\mathrm{k}}) = \omega_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\omega_{\mathrm{k+1}} = \omega_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left[\omega_{\mathrm{k}} + Rq^k(q^{-1}-1)\frac{2k-N}{N-2}\right]$$

En distribuant la somme, puis en isolant les coefficients constants de la somme, nous parvenons à :

$$\sum_{k=1}^{n}(E_{\mathrm{k}}) = \omega_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\omega_{\mathrm{k}} + \frac{R(q^{-1}-1)}{N-2}\left[2\sum_{k=1}^{n-1}kq^k - N\sum_{k=1}^{n-1}q^k\right]$$

ce qui amène à l'égalité :

$$\sum_{k=1}^{n}(E_{\mathrm{k}}) - \sum_{k=1}^{n-1}\omega_{\mathrm{k}} = \omega_1 + \frac{R(q^{-1}-1)}{N-2}\left[2\sum_{k=1}^{n-1}kq^k - N\sum_{k=1}^{n-1}q^k\right]$$

Nous remarquons que les sommes à gauche de l'égalité se simplifient :

$$\sum_{k=1}^{n}(E_{\mathrm{k}}) - \sum_{k=1}^{n-1}\omega_{\mathrm{k}} = \sum_{k=1}^{n}\omega_{\mathrm{k}} - \sum_{k=1}^{n-1}\omega_{\mathrm{k}}$$

$$\sum_{k=1}^{n}(E_{\mathrm{k}}) - \sum_{k=1}^{n-1}\omega_{\mathrm{k}} = \omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_{\mathrm{n\text{-}1}} + \omega_{\mathrm{n}} - \omega_1 - \omega_2 - \ldots - \omega_{\mathrm{n\text{-}1}}$$

$$\sum_{k=1}^{n}(E_{\mathrm{k}}) - \sum_{k=1}^{n-1}\omega_{\mathrm{k}} = \omega_{\mathrm{n}}$$

Cela nous amène à une première expression explicitée de ω_{n} :

$$\omega_{\mathrm{n}} = \omega_1 + \frac{R(q^{-1}-1)}{N-2}\left[2\sum_{k=1}^{n-1}kq^k - N\sum_{k=1}^{n-1}q^k\right]$$

- **Simplifions les sommes restantes dans l'expression explicite de ω_{n}**

La somme des q^k correspond à la somme des termes d'une suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$, et de raison $r = q$. Une telle somme se simplifie :

$$\sum_{k=1}^{n-1} q^k = q\frac{1-q^{n-1}}{1-q} = \frac{q-q^n}{1-q},\ q \neq 1$$

La somme des kq^k peut se réécrire sous une autre forme :

$$\sum_{k=1}^{n-1} kq^k = \sum_{k=1}^{n-1} qkq^{k-1} = q \times \sum_{k=1}^{n-1} \frac{d(q^k)}{dq} = q \times \frac{d}{dq}\left[\sum_{k=1}^{n-1} q^k\right]$$

Introduire la forme simplifiée de la somme des q^k nous mène à une expression simplifiée de la somme des kq^k:

$$\sum_{k=1}^{n-1} kq^k = q \times \frac{d}{dq}(\frac{q-q^n}{1-q})$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} kq^k = \frac{q-nq^n+q^{n+1}(n-1)}{(1-q)^2},\ q \neq 1$$

- **Simplifions de nouveau l'expression de ω_{n} en fonction de R, q, et N et n, grâce aux précédentes simplifications**

Dans :

$$\omega_{\mathrm{n}} = \omega_1 + \frac{R(q^{-1}-1)}{N-2}\left[2\sum_{k=1}^{n-1} kq^k - N\sum_{k=1}^{n-1} q^k\right]$$

en remplaçant les 2 sommes, nous obtenons l'expression explicite de ω_{n} :

$$\omega_{\mathrm{n}} = \omega_1 + \frac{R(q^{-1}-1)}{N-2}\left[2 \times \frac{q-nq^n+q^{n+1}(n-1)}{(1-q)^2} - N \times \frac{q-q^n}{1-q}\right]$$

- **Implémentons cette expression de ω_n afin d'atteindre le même motif que précédemment**

L'implémentation par la formule explicite en Python se trouve dans `src/Szen1_explicit.py`. Les images ci-dessous se trouvent dans `img/Szen1_explicit/`.

Voici quelques illustrations des résultats obtenus (l'image est de 1000x1000 px) :

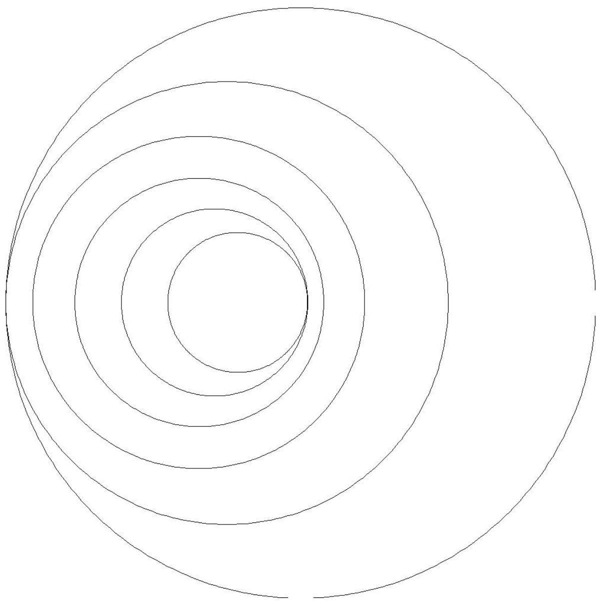


Fig. 6 : $R = 500,\ q = 0.75,\ N = 6$

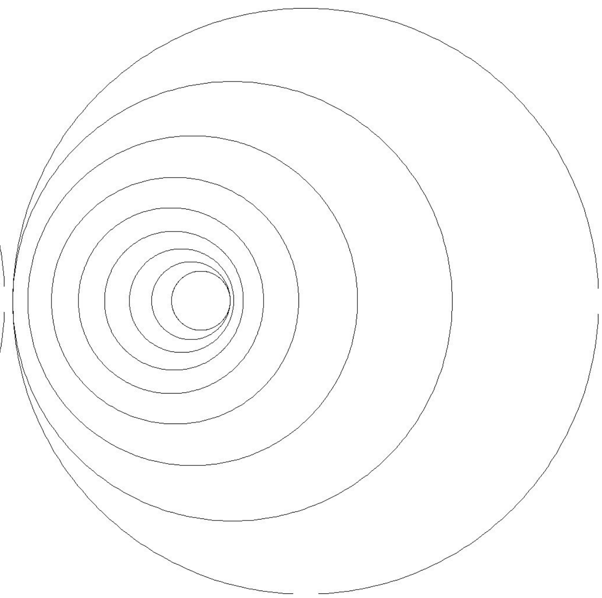


Fig. 7 : $R = 500,\ q = 0.75,\ N = 9$

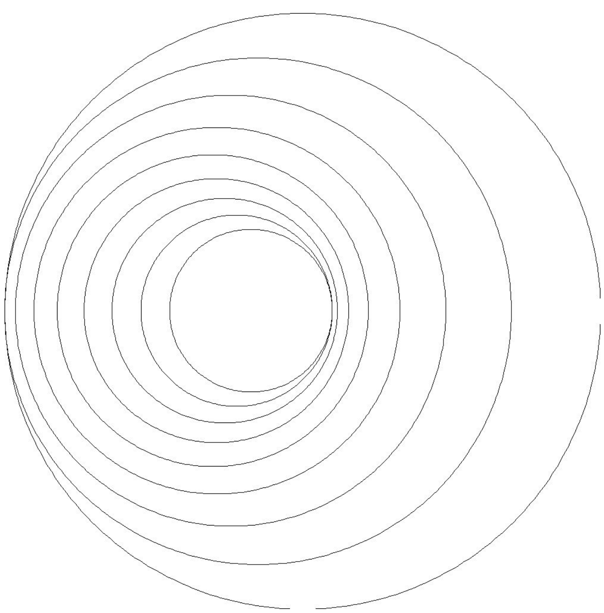


Fig. 8 : $R = 500,\ q = 0.85,\ N = 9$

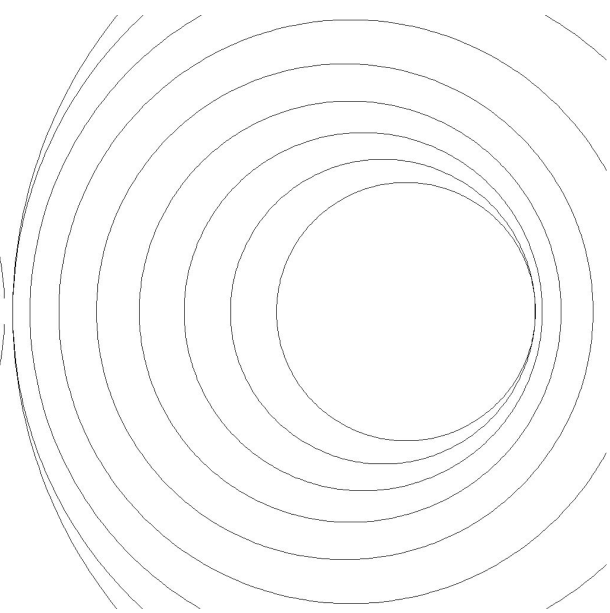


Fig. 9 : $R = 800,\ q = 0.85,\ N = 9$

Les "trous" dans le cercle extérieur sont dus à sa proximité aux bords de l'image.

$2^{\text{ème}}$ Motif : de “simples” rotations appliquées aux cercles

Formule par récurrence

- **Exprimons l'affixe u_1 associée au vecteur $\frac{\overrightarrow{O\Omega_1}}{||\overrightarrow{O\Omega_1}||}$ unitaire**

Ω_1 se trouvant sur l'axe des réels, on peut établir $u_1 = 1 + 0i$

- **Exprimons ω_1 en fonction de u_1 et R_1, puis de R**

ω_1 correspond à la quantité projetée de $\overrightarrow{O\Omega_1}$ sur le vecteur d'affixe u_1. Comme $||\overrightarrow{O\Omega_1}|| = R_1$, on en déduit : $\omega_1 = u_1 \times R_1 = u_1 \times R$

- **Exprimons u_2 en fonction de u_1 et α**

Multiplier u_1 par $e^{\alpha i}$ permet de tourner le vecteur de manière à lui donner la direction de u_2
$u_2 = u_1 \times e^{\alpha i}$

- **Exprimons u_2 en fonction de α**

Comme $u_1 = 1$, nous pouvons simplifier la précédente expression de u_2 en $u_2 = e^{i\alpha}$

- **Exprimons ω_2 en fonction ω_1, u_2, R et q**

Pour trouver ω_2, on part du point ω_1 que l'on déplace avec l'inverse du vecteur u_2 que l'on multiplie par la différence entre R_1 et R_2
$\omega_2 = \omega_1 - u_2 \times (R - qR)$

- **Exprimons ω_2 en fonction ω_1, α, R et q**

$\omega_2 = \omega_1 - e^{i\alpha} \times (R - qR)$

- **Exprimons u_{n+1} en fonction de α et n**

$$u_{n+1} = 1 \times e^{i\alpha n}$$

- **Exprimons $\Omega_{n+1}\Omega_n$ en fonction de R, q et n**

$$\Omega_{n+1}\Omega_n = q^{n-1}R - q^n R$$

- **Exprimons ω_{n+1} en fonction ω_n, α, R, q et n**

$$\omega_{n+1} = \omega_n - e^{n\alpha i}(q^{n-1}R - q^n R)$$
$\omega_{n+1} = \omega_n - e^{n\alpha i}(Rq^n)(q^{-1} - 1)$, qui correspond à $(E_{\mathrm{n+1}})$

- **Implémentons $(E_{\mathrm{n+1}})$ et vérifions sa validité**

L'implémentation par récurrence en Python se trouve dans `src/Szen2_recurrence.py`. Les images ci-dessous se trouvent dans `img/Szen2_recurrence/`.

Voici quelques illustrations des résultats obtenus (l'image est de 1000x1000 px) :

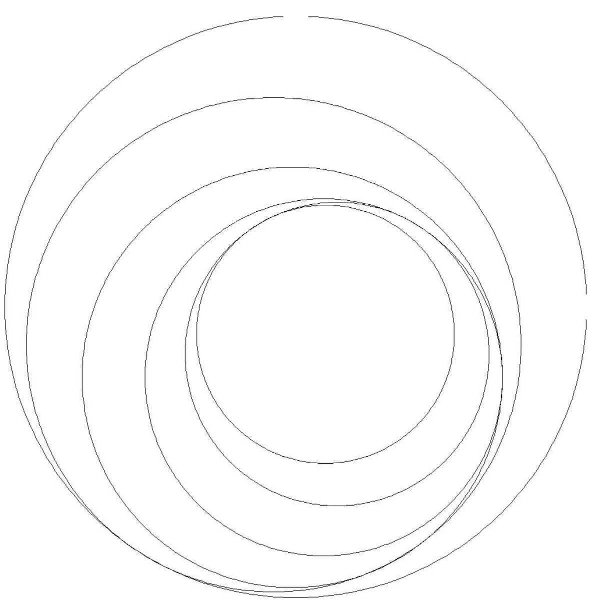


Fig. 10 : $R = 500$, $q = 0.85$, $N = 6$, $\alpha = \frac{\pi}{3}$

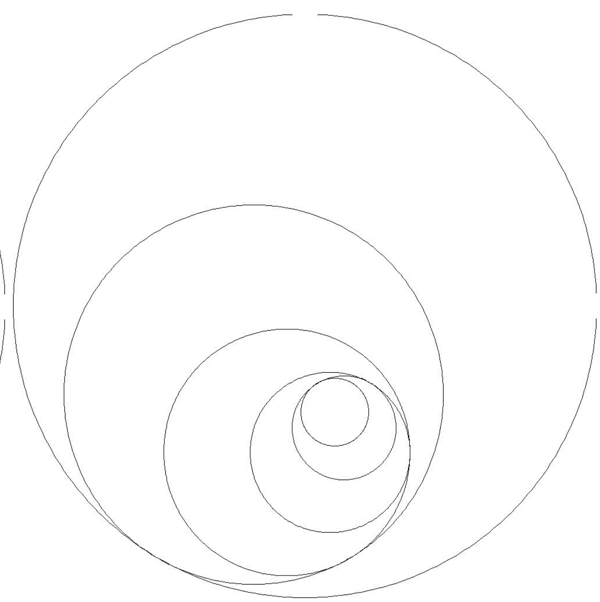


Fig. 11 : $R = 500$, $q = 0.65$, $N = 6$, $\alpha = \frac{\pi}{3}$

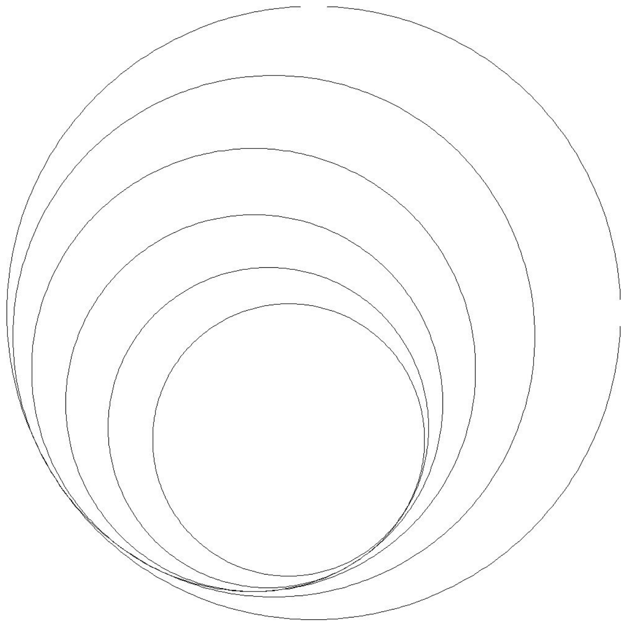
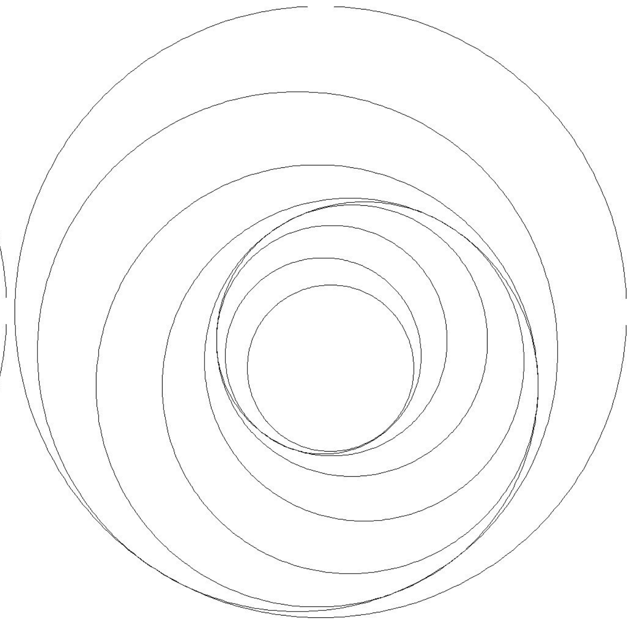
 

Fig. 12 : $R = 500$, $q = 0.85$, $N = 6$, $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$ *Fig. 13 :* $R = 500$, $q = 0.85$, $N = 9$, $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$

Formule explicite

- **Effectuons la somme des égalités (E_k), $1 \leqslant k \leqslant n$, pour en déduire une formule explicite de ω_n en fonction de α, R q, et n**

Comme pour le précédent motif, la somme des égalités (E_k) se décompose similairement. Cette somme se simplifie, ce qui nous amène à :

$$\omega_\mathrm{n} = \omega_1 - R(q^{-1} - 1)\sum_{k=1}^{n-1}(qe^{i\alpha})^k$$

(le développement est analogue à celui dans la section "Formule explicite" du 1er motif)

- **Débarrassons-nous de la somme restantes dans l'expression explicite de ω_n, pour obtenir une expression explicite simplifiée de ω_n**

La somme des $(qe^{\alpha i})^k$ correspond à la somme de termes d'une suite géométrique de premier terme $u_1 = qe^{i\alpha}$, et de raison $r = qe^{i\alpha}$. Une telle somme se simplifie :

$$\sum_{k=1}^{n-1}(qe^{i\alpha})^k = \frac{qe^{i\alpha} - q^n e^{in\alpha}}{1 - qe^{i\alpha}}$$

On arrive donc à la formule simplifiée :

$$\omega_{\mathrm{n}} = \omega_1 - R(q^{-1} - 1)\frac{qe^{i\alpha} - q^n e^{in\alpha}}{1 - qe^{i\alpha}}$$

- **Implémentons cette expression de ω_{n} afin d'atteindre le même motif que précédemment**

L'implémentation par la formule explicite en Python se trouve dans `src/Szen2_explicit.py`. Les images ci-dessous se trouvent dans `img/Szen2_explicit/`.

Voici quelques illustrations des résultats obtenus (l'image est de 1000x1000 px) :

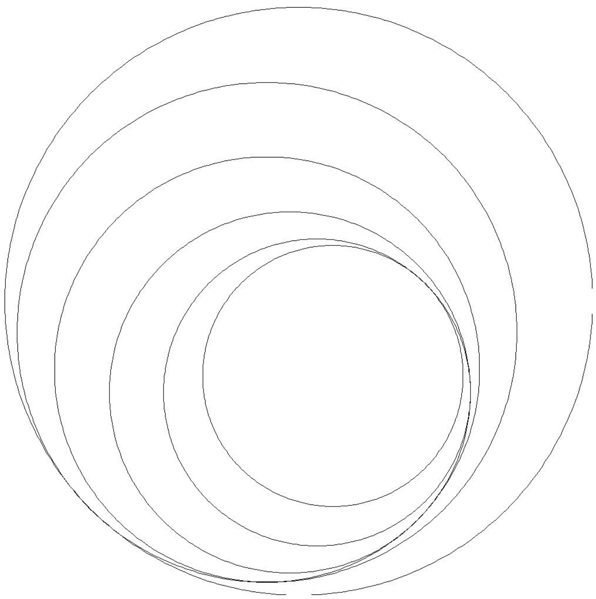


Fig. 14 : $R = 500$, $q = 0.85$, $N = 6$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$

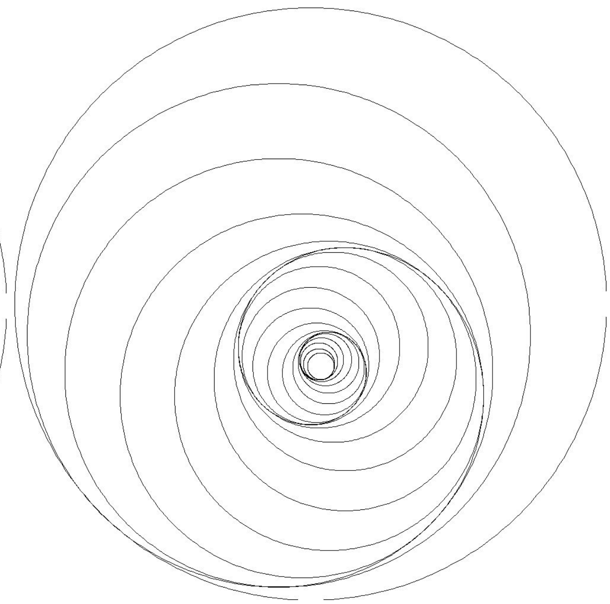


Fig. 15 : $R = 500$, $q = 0.85$, $N = 20$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$

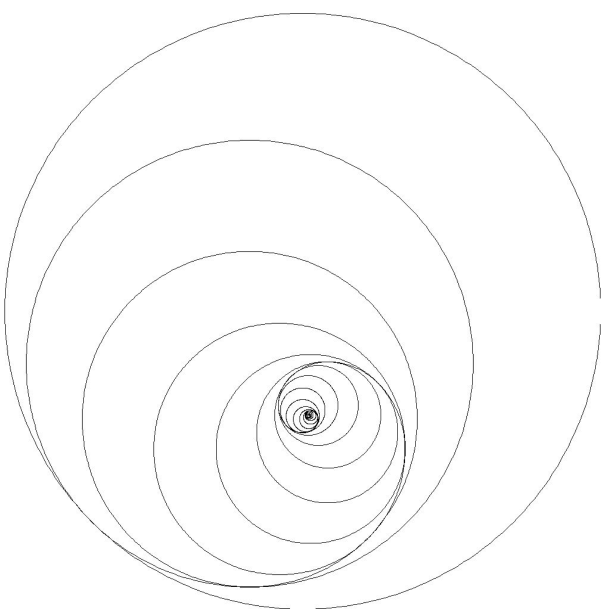


Fig. 16 : $R = 500$, $q = 0.75$, $N = 20$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$

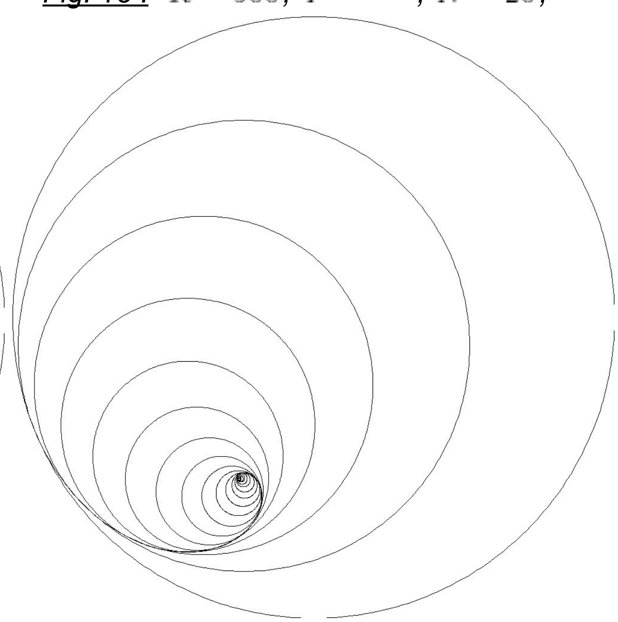


Fig. 17 : $R = 500$, $q = 0.75$, $N = 20$, $\alpha = \frac{\pi}{8}$

Calcul du centre de la spirale

- **Trouvons le point de convergence de la spirale, et déduisons-en ses coordonnées cartésiennes**

On peut trouver une approximation du centre de la spirale en calculant la limite avec n qui tend vers l'infini :

$$\lim_{n\to\infty} \omega_\mathrm{n} = \omega_1 - R(q^{-1}-1)\frac{qe^{i\alpha}}{1-qe^{i\alpha}} - \lim_{n\to\infty}\frac{q^n e^{in\alpha}}{1-qe^{i\alpha}}$$

comme $0 < q < 1$, q^n va tendre vers 0, ce qui nous donne :

$$\lim_{n\to\infty} \omega_\mathrm{n} = \omega_1 - \frac{Rqe^{i\alpha}(q^{-1}-1)}{1-qe^{i\alpha}} = C$$

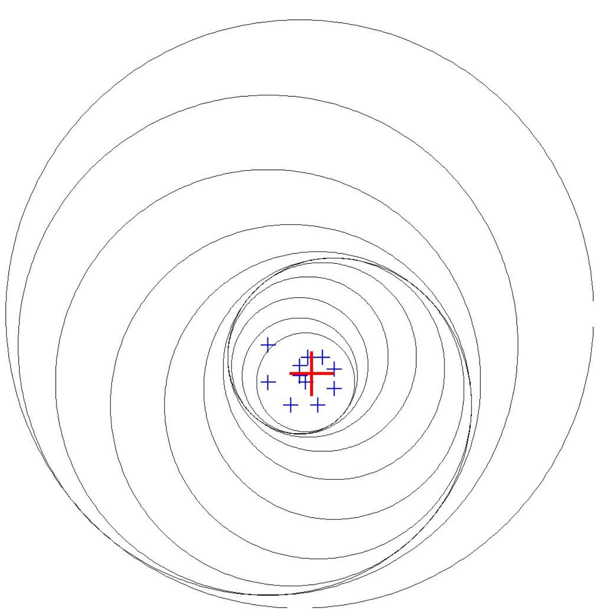
C'est vers cette affixe que la spirale converge. La développer pour distinguer sa partie réelle de sa partie complexe nous amène à :

$$\Re(C) = R\left[1 - \frac{q(q^{-1}-1)(cos(\alpha)-q)}{1-2qcos(\alpha)+q^2}\right]$$

$$\Im(C) = \frac{Rq(q^{-1}-1)sin(\alpha)}{1-2qcos(\alpha)+q^2}$$

qui correspondent à ses coordonnées cartésiennes en abscisses et ordonnées

Ce point est visualisable en passant "show_converge=True" à la fonction Szen2_recurrence et/ou Szen2_explicit. En voici un exemple :



<u>Fig. 18 :</u> $R = 500$, $q = 0.85$, $N = 12$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$.
Croix bleues : centres des cercles
Croix rouge : centre de convergence

$3^{ème}$ Motif : combinons les règles de traçage des deux premiers motifs

Formule par récurrence

- **Déterminons la formule par récurrence liant** $\omega_{\mathrm{n+1}}$**,** $1 \leqslant n < N$**, à** ω_{n}**,** α**,** R q**,** n **et** N

Pour le 1^{er} motif, la formule par récurrence était :

$$\omega_{\mathrm{n}\,+\,1} = \omega_{\mathrm{n}} + Rq^{n}(q^{-1} - 1)(\frac{2n - N}{N - 2})$$

Pour le $2^{ème}$ motif, la formule par récurrence était :

$$\omega_{n+1} = \omega_n - e^{n\alpha i}(Rq^n)(q^{-1} - 1)$$

Pour le 1^{er} motif, $Rq^n(q^{-1} - 1)\dfrac{2n - N}{N - 2}$ nous permettait de connaître la distance entre 2 cercles. Cela correspond à une translation sur l'axe des abscisses, on peut donc arriver à la formule de référence du motif 3 en appliquant la rotation du motif 2 $e^{i\alpha n}$. Nous obtenons ainsi une translation correspondant au motif 1 et une rotation semblable à celle du motif 2.

Intuitivement, il nous vient que la formule par récurrence pour le $3^{ème}$ motif est :

$$\omega_{n+1} = \omega_n + e^{i\alpha n} Rq^n(q^{-1} - 1)(\frac{2n - N}{N - 2})$$

Une rotation d'angle α est effectuée entre la droite $(\Omega_{\mathrm{n}}\Omega_{\mathrm{n\text{-}1}})$ et la droite $(\Omega_{\mathrm{n+1}}\Omega_{\mathrm{n}})$, puis

- **Implémentons la formule obtenue par récurrence, et vérifions sa validité**

L'implémentation par récurrence en Python se trouve dans `src/Szen3_recurrence.py`. Les images ci-dessous se trouvent dans `img/Szen3_recurrence/`.

Voici quelques illustrations des résultats obtenus (l'image est de 1000x1000 px) :

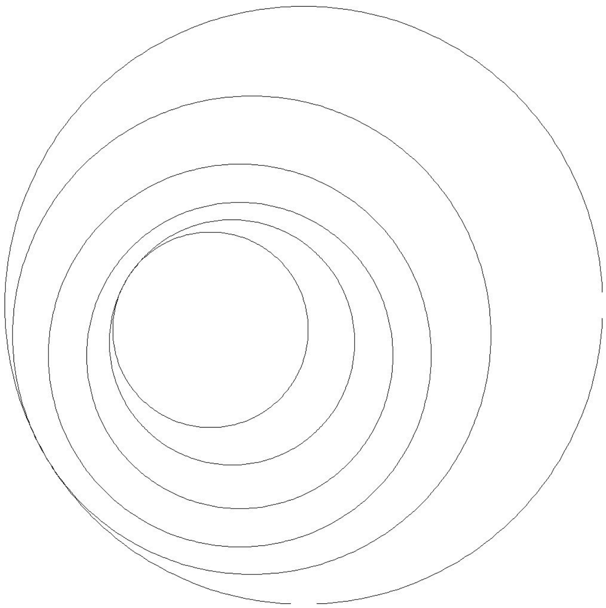


Fig. 19 : $R = 500$, $q = 0.8$, $N = 6$, $\alpha = \frac{\pi}{6}$

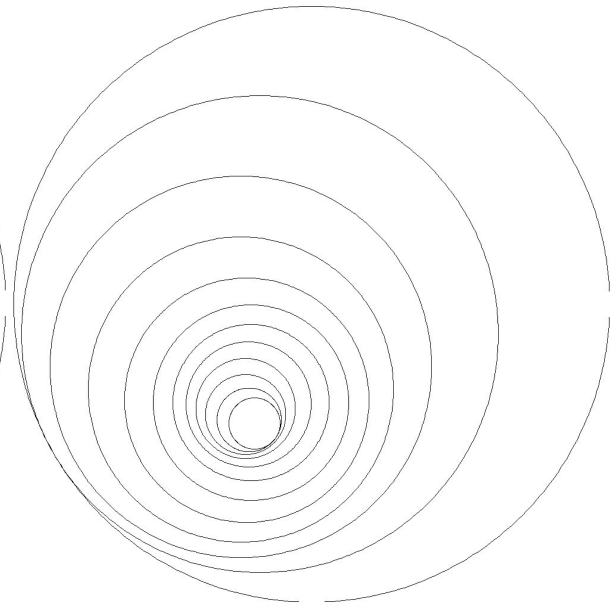


Fig. 20 : $R = 500$, $q = 0.8$, $N = 12$, $\alpha = \frac{\pi}{6}$

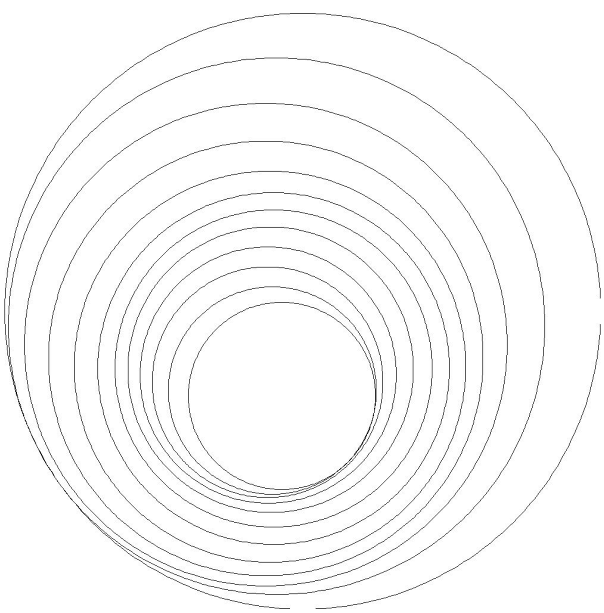


Fig. 21 : $R = 500$, $q = 0.9$, $N = 12$, $\alpha = \frac{\pi}{6}$

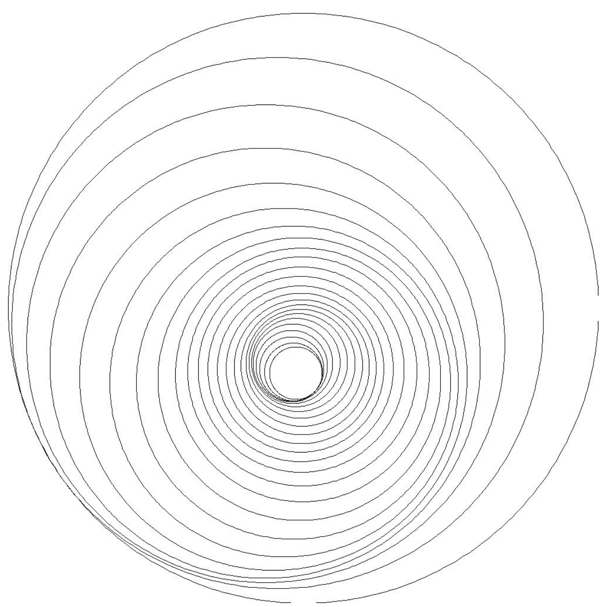


Fig. 22 : $R = 500$, $q = 0.9$, $N = 24$, $\alpha = \frac{\pi}{6}$

Formule explicite

Pour trouver la formule explicite, nous utilisons la même méthode que pour les 2 précédents motifs : dans la somme des (E_{k}), nous faisons apparaître $(E_{\mathrm{k+1}})$, puis distribuons la sommes additionnés en son sein, tout en sortant les facteurs indépendants de k hors de la somme. Les sommes de ω_{n} à gauche de l'égalité se simplifient. Nous arrivons à :

$$\omega_{\mathrm{n}} = \omega_1 + \frac{R(q^{-1}-1)}{N-2}\left[2\sum_{k=1}^{n-1} kq^k e^{ik\alpha} - N\sum_{k=1}^{n-1} q^k e^{ik\alpha}\right]$$

Les sommes se simplifient. Nous avons simplifié la somme de droite précédemment, dans le motif 2 :

$$\sum_{k=1}^{n-1} q^k e^{ik\alpha} = \sum_{k=1}^{n-1} (qe^{i\alpha})^k = \frac{qe^{i\alpha} - (qe^{i\alpha})^n}{1-qe^{i\alpha}}$$

La somme de gauche suit le même raisonnement que la somme des kq^k que nous avons simplifié dans le motif 1. Nous pouvons la réécrire :

$$\sum_{k=1}^{n-1} kq^k e^{ik\alpha} = \sum_{k=1}^{n-1} qkq^{k-1} e^{ik\alpha} = q\frac{d}{dq}\left[\sum_{k=1}^{n-1} q^k e^{ik\alpha}\right]$$

Développer cette expression nous mène à la version simplifiée finale de cette somme :

$$\sum_{k=1}^{n-1} kq^k e^{ik\alpha} = \frac{qe^{i\alpha} - n(qe^{i\alpha})^n + (n-1)(qe^{i\alpha})^{n+1}}{(1-qe^{i\alpha})^2}$$

Nous obtenons la forme explicite de ω_{n} en remplaçant les deux sommes par leur forme simplifiées :

$$\omega_{\mathrm{n}} = \omega_1 + \frac{R(q^{-1}-1)}{N-2}\left[2\times\frac{qe^{i\alpha} - n(qe^{i\alpha})^n + (n-1)(qe^{i\alpha})^{n+1}}{(1-qe^{i\alpha})^2} - N\frac{qe^{i\alpha} - (qe^{i\alpha})^n}{1-qe^{i\alpha}}\right]$$

Ce qui, une fois développé, donne une équation plus aisément implémentable :

$$\omega_{\mathrm{n}} = \omega_1 + \frac{R(q^{-1}-1)\left[(2-N)qe^{i\alpha} + N(qe^{i\alpha})^2 + (N-2n)(qe^{i\alpha})^n + (2n-2-N)(qe^{i\alpha})^{n+1}\right]}{(N-2)(1-qe^{i\alpha})^2}$$

- **Implémentons la formule explicite obtenue, et vérifions sa validité**

L'implémentation par la formule explicite en Python se trouve dans `src/Szen3_explicit.py`. Les images ci-dessous se trouvent dans `img/Szen3_explicit/`.

Voici quelques illustrations des résultats obtenus (l'image est de 1000x1000 px) :

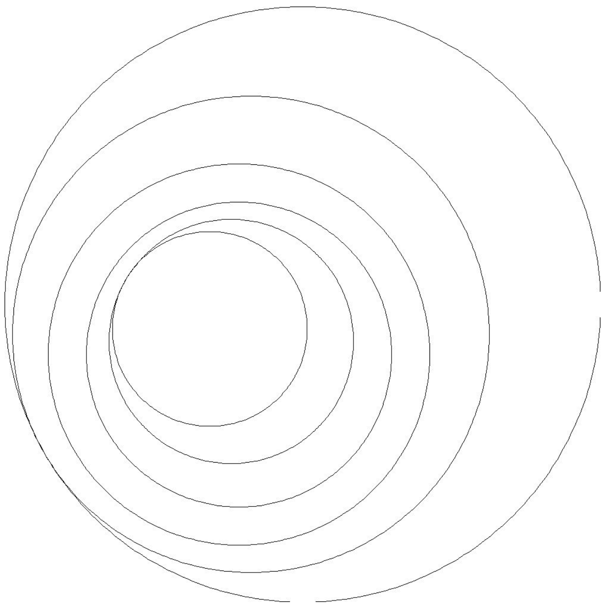


Fig. 23 : $R = 500$, $q = 0.8$, $N = 6$, $\alpha = \frac{\pi}{6}$

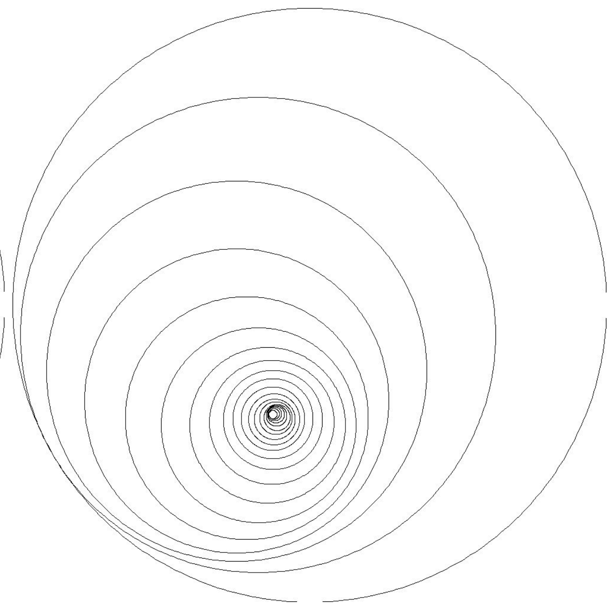


Fig. 24 : $R = 500$, $q = 0.8$, $N = 20$, $\alpha = \frac{\pi}{6}$

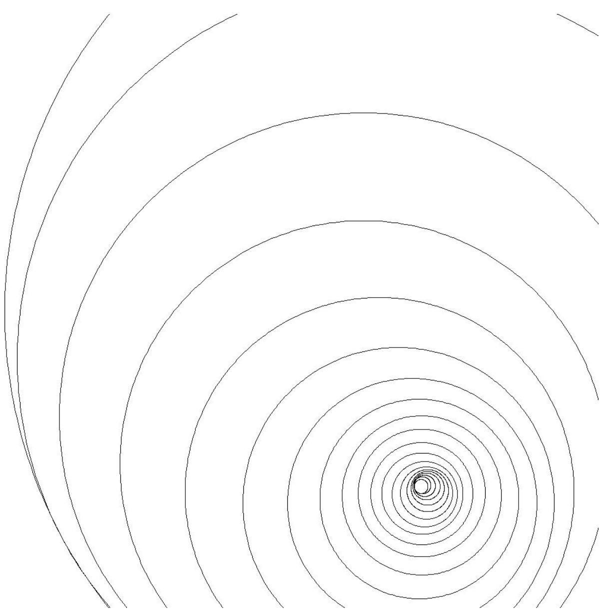


Fig. 25 : $R = 800$, $q = 0.8$, $N = 20$, $\alpha = \frac{\pi}{6}$

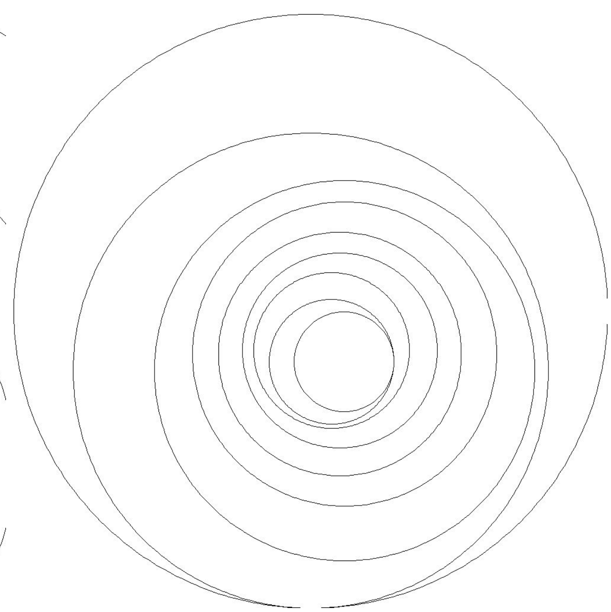


Fig. 26 : $R = 500$, $q = 0.8$, $N = 9$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$

Annexes

Dans l'archive où se trouve ce document se trouvent plusieurs annexes :

- Dossier `src/` : l'ensemble des sources en Python. Les implémentations des 3 motifs par leur formule de récurrence et explicite s'y trouve, ainsi que les fonctions de dessins.
    - `complex_draw.py`
    - `Szen1_recurrence.py`
    - `Szen1_explicit.py`
    - `Szen2_recurrence.py`
    - `Szen2_explicit.py`
    - `Szen3_recurrence.py`
    - `Szen3_explicit.py`

- Dossier `docs/` : quelques documents liés à ce TP.
    - `Geogebra.ggb` : fichier importable dans Geogebra, en glissant le fichier dans la fenêtre. Contient toutes les données nécessaires à l'analyse de la formule de récurrence du motif 1.
    - `Subject.pdf` : le sujet de ce TP, pour simplifier son accès.

- Dossier `img/` : les illustrations présentent dans ce document, triées dans le dossier nommé d'après l'implémentation avec laquelle elles ont été générées.

Enfin, ce document est aussi consultable sur Google Drive, ici.