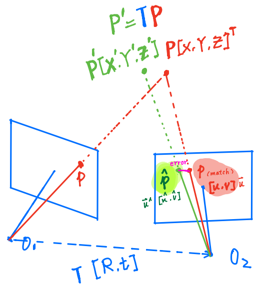
PnP. (Perspective-n-Point)

描述了当知道 n 个 3D空间点及投影 如何求解相机位姿.

BA 优化. (bundle adjustment)

最小化重投影误差求解 PnP.



$s\vec{u}^{\wedge} = KTP$

$s\vec{u} = KP'$

$\vec{u_i} = [u_i, v_i]$

$$T^* = \underset{T}{\arg\min} \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \left\| \vec{u_i} - \frac{1}{s_i}\underbrace{KTP}_{P'} \right\|_2^2$$

$s_i \vec{u_i} = KTP$

s_i: 尺度因子; $\vec{u_i}$: 像素坐标; K: 相机内参矩阵; T: 前一帧坐标系转换到当前帧坐标系 (相机运动); P: 前一帧坐标系

(error)
残差 $\text{residual} = \vec{u} - \frac{1}{s}KTP$

G-N . L-M 优化.

线性化残差, 迭代求解 Δx 更新 x, 待优化变量.

$$e(x+\Delta x) \approx e(x) + J_{(x)}^T \Delta x$$

其中 J 为 残差函数对待优化变量 x 的导数.

待优化变量为 T, 然而不能对其求导, 将其转换为对 T 对应的李代数求导. $TP = \exp(\xi^{\wedge})$

$$\frac{\partial(\vec{u} - \vec{u}^{\wedge})}{\partial(TP)} \rightarrow -\frac{\partial(\vec{u}^{\wedge})}{\partial(TP)}$$

$$s\begin{bmatrix} u^{\wedge} \\ v^{\wedge} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x & 0 & c_x \\ 0 & f_y & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix}$$

$\vec{u}^{\wedge}$

$u^{\wedge} = f_x \frac{X'}{Z'} + c_x$

$v^{\wedge} = f_y \cdot \frac{Y'}{Z'} + c_y$

$\frac{\partial(TP)}{\partial \xi}$ SE(3) 李代数求导推导.

$$= \lim_{\delta\xi \to 0} \frac{\exp(\delta\xi^{\wedge})\exp(\xi^{\wedge})P - \exp(\xi^{\wedge})P}{\delta\xi}$$

$$= \lim_{\delta\xi \to 0} \frac{(I + \delta\xi^{\wedge})\exp(\xi^{\wedge})P - \exp(\xi^{\wedge})P}{\delta\xi}$$

$$= \lim_{\delta\xi \to 0} \frac{\delta\xi^{\wedge}\exp(\xi^{\wedge})P}{\delta\xi}$$

$$= \lim_{\delta\xi \to 0} \frac{\begin{bmatrix} \delta\phi^{\wedge} & \delta\rho \\ 0^T & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} RP+t \\ 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \delta\rho \\ \delta\phi \end{bmatrix}}$$

$$= \lim_{\delta\xi \to 0} \frac{\begin{bmatrix} \delta\phi^{\wedge}(RP+t) + \delta\rho \\ 0^T \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \delta\rho \\ \delta\phi \end{bmatrix}}$$

$a^{\wedge}b = -b^{\wedge}a$

$$= \lim_{\delta\xi \to 0} \begin{bmatrix} \frac{\delta\phi^{\wedge}(RP+t) + \delta\rho}{\delta\rho} & \frac{\delta\phi^{\wedge}(RP+t) + \delta\rho}{\delta\phi} \end{bmatrix}$$

$$= [I, \underbrace{-(RP+t)^{\wedge}}_{-P'^{\wedge}}] \overset{def}{=} (TP)^{\odot}$$

优化变换 T, 求 Jacobi:

$$\frac{\partial(\vec{u} - \frac{1}{s}KTP)}{\partial \xi}$$

$$= \frac{\partial(\vec{u} - \frac{1}{s}KTP)}{\partial(TP)} \frac{\partial(TP)}{\partial \xi}$$

$$= -\frac{\partial \begin{bmatrix} f_x \frac{X'}{Z'} + c_x \\ f_y \frac{Y'}{Z'} + c_y \end{bmatrix}}{\partial \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix}} (TP)^{\odot}$$

$$= -\underbrace{\begin{bmatrix} f_x \frac{1}{Z'} & 0 & -f_y \frac{X'}{Z'^2} \\ 0 & f_y \frac{1}{Z'} & -f_y \frac{Y'}{Z'^2} \end{bmatrix}}_{2\times 3} \underbrace{[\overset{3\times3}{I}, \overset{3\times3}{-P'^{\wedge}}]}_{3\times 6}.$$

$$= -\begin{bmatrix} f_x \frac{1}{Z'} & 0 \\ 0 & f_y \frac{1}{Z'} \\ -f_y \frac{X'}{Z'^2} & -f_y \frac{Y'}{Z'^2} \\ -f_x \frac{X'Y'}{Z'^2} & -f_y - f_y \frac{Y'^2}{Z'^2} \\ f_x + f_x \frac{X'^2}{Z'^2} & -f_y \frac{X'Y'}{Z'^2} \\ -f_x \frac{Y'}{Z'} & -f_y \frac{X'}{Z'} \end{bmatrix}^T$$

$$se(3) = \left\{ \xi = \begin{bmatrix} \rho \\ \phi \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6, \rho \in \mathbb{R}^3, \phi \in so(3), \xi^{\wedge} = \begin{bmatrix} \phi^{\wedge} & \rho \\ 0^T & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

ρ: translation; ϕ: rotation

$$\xi = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ a \\ b \\ c \end{bmatrix} \qquad \xi^{\wedge} = \begin{bmatrix} 0 & -c & b & x \\ c & 0 & -a & y \\ -b & a & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

优化特征点位置.

$$\frac{\partial(\vec{u} - \frac{1}{s}KTP)}{\partial P}$$

$$= \frac{\partial(\vec{u} - \frac{1}{s}KTP)}{\partial(TP)} \frac{\partial(TP)}{\partial P}$$

$$= -\begin{bmatrix} f_x \frac{1}{Z'} & 0 & -f_y \frac{X'}{Z'^2} \\ 0 & f_y \frac{1}{Z'} & -f_y \frac{Y'}{Z'^2} \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial(RP+t)}{\partial P}$$

$$= -\begin{bmatrix} f_x \frac{1}{Z'} & 0 & -f_y \frac{X'}{Z'^2} \\ 0 & f_y \frac{1}{Z'} & -f_y \frac{Y'}{Z'^2} \end{bmatrix} \cdot R$$