

# Содержание

<b>Введение</b>	<b>2</b>
Теханимация и математика . . . . .	2
Структура курса . . . . .	4
О языке . . . . .	5
<b>Система координат. Наивный подход</b>	<b>6</b>
Мотивировка . . . . .	6
Координаты идейно . . . . .	7
Координаты символьно . . . . .	8
FAQ . . . . .	9
<b>Функции</b>	<b>10</b>
Функция как формула . . . . .	10
Функция как соответствие . . . . .	11
График функции . . . . .	12
Кривые и поверхности как графики функций . . . . .	13
Примеры функций и их графиков . . . . .	14
<b>Тригонометрия</b>	<b>16</b>
Мотивация . . . . .	16
Астрономия и хорды . . . . .	17
Отношения в треугольнике . . . . .	18
Эйлер и тригонометрия . . . . .	19
Связь всего со всем . . . . .	20
Мотивация . . . . .	20
Отношения в прямоугольном треугольнике . . . . .	20
Точка на окружности . . . . .	21
Графики . . . . .	22
Обратные тригонометрические функции . . . . .	24
Зачем это все? . . . . .	25
<b>Криволинейные системы координат</b>	<b>27</b>
Полярная система координат . . . . .	27
Сферическая система координат . . . . .	27
Цилиндрическая система координат . . . . .	27
<b>Векторы</b>	<b>28</b>
История . . . . .	28
Развилки в понимании . . . . .	28
Наивное определение и базовые операции . . . . .	29
Вектор и координаты . . . . .	31
<b>Матрицы</b>	<b>36</b>
? . . . . .	36
<b>Откуда взялись кватернионы, и вообще?</b>	<b>36</b>

# Введение

## Теханимация и математика

Разберемся с тем, что является задачей теханиматора и какое место занимает математика в его работе.

Игра работает следующим образом:

- движок загружает данные о сцене, начинается бесконечный цикл вычисления фреймов
- на основе этих данных движок вычисляет на CPU данные для шейдеров (программ для вычисления цветов на GPU)
- на GPU вычисляются шейдеры, в итоге выдавая матрицу цветов с нужным разрешением, эту картинку мы видим на экране
- на следующем кадре на основе запрограммированной логики данные обновляются, все повторяется

С математической точки зрения, можно эту схему еще упростить до следующей

- на вход в движок подступает набор данных (сценарии, текстуры, анимации, акторы, их параметры и т.п.)
- на выходе получаем картинку (матрицу цветов)

То есть движок осуществляет некоторое сложное преобразование различных данных в достаточно понятный результат — цвета. Это преобразование можно назвать функцией (хотя дотошные математики скорее использовали бы слово "отображение"). Функция эта в таком виде — трудноосязаемая вещь: мало кто может похвастаться знанием всех аспектов реализации движка и игровой логики. Однако, если декомпозировать эту функцию на множество подфункций, которыми занимаются более узкоспециализированные люди, то про них уже можно говорить более конкретно.

В случае с теханиматорами подфункция следующая. Каждый кадр в нетворк приходит набор параметров, которые преобразуются в изменение трансформации некоторых объектов, как правило, это трансформации твердого тела. В нашей ситуации это как правило кость.

Кость это вспомогательный объект в моделировании персонажей, вместе кости образуют скелет. Поза скелета, т.е. совокупность позиций его костей определяет геометрическую форму меша. Роль костей заключается именно в возможности удобной анимации персонажа: без костей пришлось бы анимировать отдельно каждую вершину меша.

\* \* \*

Итак, сформулируем утверждение: задача теханиматора состоит в определении функции изменения положения геометрического объекта.

Тогда встают естественные вопросы:

- Как задать положение объекта?
- Как задать изменение положения объекта?

Для ответов на эти вопросы зададимся еще одним: что такое положение объекта?

Но, вообще, что такое объект с точки зрения геометрии? Это множество точек, определенным образом расположенных в пространстве. Это значит, что между этими точками есть некоторые отношения, например, в виде расстояний между ними.

В случае, если мы имеем дело с твердым телом, суть которого в том, что расстояния между всеми точками объекта сохраняются при любых его преобразованиях, то для описания движения всего объекта достаточно задать преобразование положения только для одной точки.

Движение объекта задается его поворотом и сдвигом относительно некоторой точки. Сдвиг определяется вектором, а поворот можно задать матрицей, углами Эйлера или кватернионами. Отсюда и возникает вся эта история с этими понятиями, которые находятся на стыке алгебры и геометрии.

С этого момента мы начнем разбираться с тем, откуда берутся векторы, матрицы, кватернионы, заглянем в их алгебраическую природу и постараемся полностью разобраться, как это все работает.

Изложение рассчитано на то, что читатель имеет школьное образование и некоторый опыт работы с теханимацией (то есть "знаю/слышал, что это есть и работает, но как — не понимаю"). Мы последовательно разберемся со всеми понятиями, при этом стараясь излишне не углубляться, но с другой стороны, будем придерживаться достаточно высокой степени строгости, чтобы каждый смог при желании получить стройное представление о математической стороне дела.

## Структура курса

Задача курса состоит в том, чтобы разъяснить математическую сторону работы теханиматоров. Ключевые темы, которые мы ставим целью покрыть:

- работа с векторами (системы координат, скалярное и векторное произведения, проекции и т.д.)
- способы задания поворотов (матрицы, углы Эйлера, кватернионы)
- прочее: функции, тригонометрия, линейная интерполяция

\* \* \*

Поэтому в первой части курса мы разберемся с темами, касающимися описания точек на плоскости и пространстве:

- Декартова система координат
- Функции
- Тригонометрия
- Полярная система координат, сферическая система координат, цилиндрическая система координат

затем введем понятие вектора и рассмотрим скалярное произведение векторов и его свойства:

- Вектор. Геометрическое представление, аналитико-геометрическое (координатное), алгебраическое (комплексные числа). Правило сложения векторов и умножения на скаляр.
- Скалярное произведение, угол между векторами, билинейность и симметричность. Длина вектора. Проекция вектора на прямую, на плоскость.

после этого можно будет изучать преобразование векторов с помощью матриц:

- Матрицы  $2 \times 2$ ,  $3 \times 3$ . Умножение матрицы на вектор. Умножение матрицы на матрицу. Геометрический смысл.
- Скалярная матрица (масштабирующая). Матрица поворота. Обратная матрица. Как получить глобальные координаты, если есть локальные и наоборот.
- Определитель. Что такое ортогональные матрицы и почему мы всегда (наверно) используем именно их?
- Векторное произведение векторов, его геометрический смысл.

далее рассмотрим способы задания положения объекта:

- Твердое тело. Задание положения с помощью вектора и матрицы поворота.
- Задание положения с помощью вектора и углов Эйлера. Гимбал лок. Связь углов Эйлера с матрицей поворота.
- Линейная интерполяция. Сферическая интерполяция. (может и не здесь?)

и, наконец, поговорим о кватернионах:

- Числа. От единицы до кватернионов.
- Комплексные числа. Геометрическое представление двумерного вектора комплексным числом. Полярная форма. Фокусы с возведением в степень. Как задать поворот и сдвиг твердого (двумерного) тела с помощью комплексных чисел. Связь с двумерной матрицей поворота.
- Кватернионы. Сходства и различия с комплексными числами. Операции сложения и умножения. Модуль (длина) кватерниона. Связь с трехмерной матрицей поворота.

## О языке

*Математика — это искусство  
называть разные вещи одним и  
тем же именем.*

— Jules Henri Poincaré

Любая область знаний это во многом язык: надо понимать слова и оперировать ими. Математика это демонстрирует очень хорошо, потому что она в принципе строится на абстракциях и на названиях этих абстракций. При этом каждое слово имеет четкое определение, которое очень желательно понимать, а это не всегда просто.

В нашем случае будет прекрасно видно, насколько язык нас способен запутывать, потому что мы будем постоянно находиться на стыке алгебры и геометрии, и часто одно слово будет иметь сразу два представления: алгебраическое и геометрическое. Здесь хочется сразу об этом предостеречь и дать пояснения.

Вообще, что такое алгебра и геометрия? Это не все математики понимают, а те, кто понимает, понимают по-разному. Но если углубиться в тему, то общие черты становятся вполне ясными.

До эпохи Возрождения, 15-16 века, многие математики считали, что единственно правильная математика это геометрия. Под этим термином понималось то, чем занимались древние греки, начиная со времен Пифагора. А пифагорейцы и их последователи считали, что числа выражают геометрические фигуры. И все рассуждения были через призму геометрических идеальных платоновских тел. Впрочем, можно сказать сильно проще: когда мы что-то рисуем, это геометрия, а числа просто описывают ее свойства.

При этом, конечно, была торговля, размены товарами, т.е. арифметика существовала и до Пифагора, еще в Египте и Вавилоне. И дальше уже индийцами и арабами развивались символьные вычисления, решение уравнений, отрицательные числа и т.п. Это называлось алгеброй и считалось "трушными" европейскими математиками чем-то недостойным.

И вот, когда уже алгебра достигла результатов таких, что не считаться с ней было никак нельзя, два этих течения начали сливаться. Геометрия стала "цифровизироваться", потому что оказалось, что геометрические фигуры можно описывать алгебраическими уравнениями. Новую геометрию стали называть аналитической.

Процесс этот сейчас напоминает рефакторинг кода, когда был написан движок, но потом поняли, что надо менять концепцию и все переписывать под нее, но старое тоже нужно сохранить. Это может путать того, кто весь процесс не застал.

Так что нам полезно почаще себе задавать вопрос, о чем мы говорим, когда проносим те или иные слова: "точка", "система координат", "сдвиг" и т.д. Все эти слова

пришли из геометрической интуиции, но после "цифровизации" стали иметь строгие алгебраические определения.

Но есть и чисто алгебраические понятия, например, "матрица", "кватернион".

## Система координат. Наивный подход

### Мотивировка

Идея о том, что число что-либо говорит о геометрии, идет из древности — пифагорейцы считали, что все есть число. То есть все в мире можно как-то выразить числами, да и число в их учении понималось как геометрический объект, а не арифметический. Например, любое единое — это единица, отрезок — это двойка, треугольник — тройка, четверка это квадрат со стороной 2. Более сложные числа описывают все более замысловатые объекты. Тот же  $\sqrt{2}$  это длина диагонали квадрата со стороной 1.

Эта концепция видеть за числами нечто большее, чем просто счеты, и лежит в основе математики как таковой. Далее этот мыслительный прием продлевается на все более высокие степени абстракции, крутится в играх разума так и сяк, в результате чего время от времени выкристаллизовываются удивительно красивые абстрактные объекты.

Что касается систем координат, то само по себе это изобретение древнее — всегда нужна была навигация. Как говорят специалисты, в "Географии" Птолемея (150 г. н.э.) приведено множество томов с координатами различных мест на карте Земли. Но то были координаты сферические — широта и долгота.

А вот привычная нам со школы и по работе с 3D-движками прямоугольная система координат с осями  $x, y, z$  и всеми атрибутами, сформировалась гораздо позже, между 16-18 веками. Идейно тут важен момент не придумывания типа системы координат, а именно понимание того, что система координат (любая) позволяет построить мостик между алгеброй и геометрией, т.е. между символьными преобразованиями формул по определенным правилам и определением позиций точек в пространстве.

Считается, что первыми, кто применил эту идею, были Рене Декарт (René Descartes, 1596-1650) и Пьер Ферма (Pierre de Fermat, 1601-1665). Основным поворотным трудом, определяющим начало так называемой аналитической геометрии, считается "Геометрия" Декарта (1637) — приложение к философскому трактату "Рассуждение о методе, чтобы хорошо направлять свой разум и отыскивать истину в науках".

Правда, если открыть "Геометрию", то найти привычные оси координат не получится ни на одной странице. В чем же тогда дело?

Философия Декарта заключалась в том, что человеческие чувства могут подводить, на них опираться нельзя. Настоящие истины может производить только разум, производя чисто логические рассуждения. А геометрия в классическом ее понимании, в которую главную роль играют соотношения между длинами и углами, хитрые построения, чертежи (так называемая синтетическая геометрия, именно ее в основном мы и проходим в школе), представлялась Декарту скорее наукой чувственной, а значит, трудно проверяемой, ограниченной в своем потенциале.

При этом, уже неплохо развитая к тому времени алгебраическая техника, показывала альтернативный путь математики, когда утверждения носят чисто формальный характер. Его геометрический (вещественный) смысл совершенно может быть непонятен, но истинность его зависит лишь от корректности логических рассуждений, которую можно проверить.

Отсюда становится понятно, почему Декарту пришла в голову идея придать геометрии алгебраический характер. Это он и сделал в "Геометрии". Там он привел примеры решения не самых простых древних геометрических задач об описании кривых на плоскости в виде уравнений на неизвестные  $x$  и  $y$ .

Мы знаем из школы, например, что любая прямая на плоскости задается уравнением вида

$$y = kx + b,$$

а окружность радиуса  $R$  задается уравнением

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Декарт понял, что конические сечения (окружность, эллипс, гипербола, парабола), сильно волновавшие древних греков, задаются уравнениями второго порядка, т.е. следующего вида

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = 0,$$

и, более того, уравнение любого порядка от переменных  $x, y$  задает некоторую кривую на плоскости.

И это уже, пожалуй, первый очень заметный шаг, который демонстрирует мощь алгебраического подхода. Ведь до этого — удивительно об этом думать — считалось бессмысленным говорить о степенях выше третьей, так как непонятно было, что такое  $x^4$  геометрически ( $x$  — отрезок длины  $x$ ,  $xy$  — прямоугольник со сторонами  $x$  и  $y$ ,  $xyz$  — параллелепипед со сторонами  $x, y, z$ ). А теперь парадигма меняется: непонятно геометрически? ну и ладно, зато это дает практический результат в той же геометрии кривых.

\* \* \*

В общем, имя Декарта было необходимо выделить, чтобы показать переломный момент истории, который нас и привел к нынешнему образу жизни, включая все то, о чем мы планируем поговорить в курсе.

Говоря об истории, появляется желание перечислять все больше имен, мы этого делать не будем, но все же упомянем еще пару довольно известных личностей. Исаак Ньютон опирался на метод Декарта и Ферма, описывая траектории движения тел, подошел к понятию "функция" (вместе с Лейбницем) [5]. А уже во вполне современном виде о функциях, кривых, координатах писал Леонард Эйлер [7].

## Координаты идейно

Смысл координат в том, чтобы закодировать некоторое множество объектов числами (такая цифровизация), но не абы как, а чтобы было удобно по этому множеству как бы перемещаться. В этом, кстати, этимологический смысл слова ордината — в ней должен быть заложен некий порядок.

Для нас привычно использовать координаты точек пространства, но можно же занумеровать что угодно: номер счета в банке, номер паспорта, сиденье в кинотеатре (причем тут уже две координаты: ряд и место), номер такта в музыкальном произведении (тоже могут быть дополнительные размерности, если это ноты оркестра) и т.д.

В случае геометрии, конечно, речь о неких абстрактных точках пространства. Можно представлять, что это пространство физического мира, который состоит из мельчайших частиц, причем они заполняют все так плотно, что пустоты между ними нигде не образуются.

Тогда удобно договориться о единице измерения, например, метр, и откладывать прямолинейные участки любой длины. Если мы работаем с шоссе между двумя городами, то достаточно одного числа, чтобы описать любую точку на этом шоссе. Тогда пространство называется одномерным.

Если же мы наблюдаем за футбольным матчем, то позиция игрока определяется уже двумя числами: относительно линий вдоль поля и поперек. Тут одним числом никак не обойдешься, а двух хватает, поэтому это пространство считается двумерным.

Ну, а если нужно определить позицию мяча, который часто отрывается от поверхности земли на различную высоту, понадобится еще одна координата, собственно, для задания высоты полета. Тогда мы говорим о трехмерном пространстве.

Если описывается динамика точки, то появляется необходимость в четвертой координате — времени. Для описания пространства, в классическом понимании, больше размерностей не требуется. Хотя, конечно, благодаря развитию идеи Декарта, нас ничто не ограничивает изучать пространства любой размерности. Но мы в рамках этого курса об этом говорить не будем.

\* \* \*

У координатного подхода большой плюс: точки закодированы числами, значит, можно решать любую задачу алгебраически с помощью уравнений. Но за это наступает расплата.

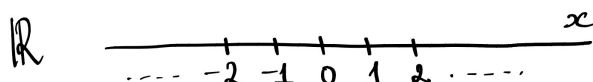
Закодировать точки можно поразному: во-первых координаты зависят от выбора начала отсчета, во-вторых, от выбора направлений осей и в-третьих, от единицы измерения. Это может приводить к дополнительным техническим трудностям пересчета из одной системы координат в другую (могут же два человека жить в разных городах и считать свой город центром), и вообще для решения задачи от выбора системы координат может зависеть многое: в одной системе будет простое решение, а в другой получится трактат на сто страниц.

## Координаты символично

Здесь мы введем обозначения, которыми будем в дальнейшем пользоваться. Понятно, что все со школы умеют обозначать координаты точки, рисовать оси, подписывать буквы. Но на самом деле эти обозначения часто различаются то там, то сям. Поэтому лучше аккуратно проговорить один раз то, какими будут обозначения в этом курсе и почему они именно такие.

Про эволюцию понятия числа мы подробнее поговорим ближе к концу курса, когда замахнемся на кватернионы. Но множество всех чисел нам потребуется уже сейчас, оно в себя включает все целые, дробные и иррациональные числа, и обозначается буквой  $\mathbb{R}$  от слова Real. На русском эти числа называют вещественные (т.е. характеризует вещество: масса, длина, угол, температура) или действительные (в пике комплексным) числа.

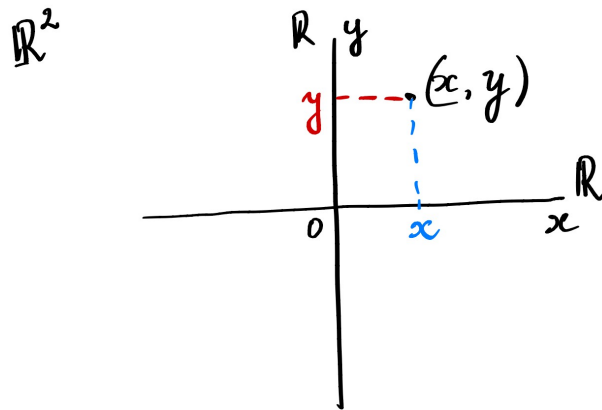
Множество  $\mathbb{R}$  часто представляется в виде прямой. Тут уже все и так закодировано. Координата  $x$  бегает по прямой. Начало отсчета — число 0, единица измерения — число 1, все готово.



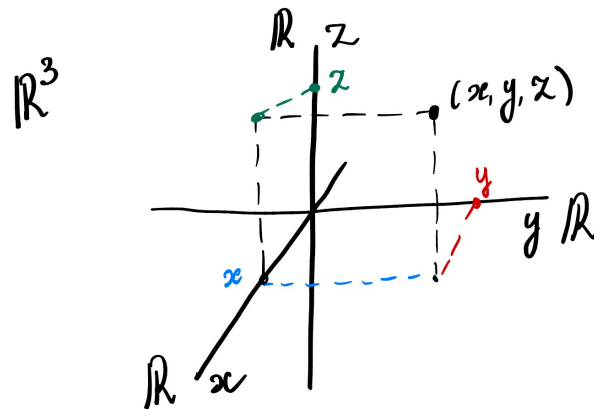
Для задания двумерного пространства нужно два числа. Множество всех пар чисел обозначается  $\mathbb{R}^2$ , читается как "эр два". Координаты обозначаются как  $(x, y)$ .



Геометрически это представляется как две прямые, пересекающиеся в своих нулях под прямым углом.



Аналогично, для трехмерного пространства  $\mathbb{R}^3$  добавляется еще одна прямая, перпендикулярная двум другим. Таким образом, координата точки имеет вид  $(x, y, z)$ .



## FAQ

**С чего это все-таки оси рисуются именно перпендикулярно друг другу?**

Дело в том, что система координат и не обязана быть прямоугольной. Само по себе понятие угла на языке координат будет определено чуть позже, когда мы будем говорить о скалярном произведении векторов. А когда дойдем до матриц, будет ясно, как связаны различные системы координат между собой. Кстати, Декарт в "Геометрии" тоже не ограничивался прямоугольными координатами.

Но сейчас мы рассматриваем привычную нам модель описания пространства, где координата точки — это длина ее проекции на соответствующую координатную прямую (ось).

**Зачем пишешь  $\mathbb{R}$  на концах?**

Буквы  $\mathbb{R}$  рядом с осями я нарисовал, чтобы подчеркнуть, что мы как бы склонировали один и тот же объект (множество чисел) и геометрически их расположили в пространстве. Как правило, так не пишут, и я не буду в дальнейшем, ибо нет смысла.

**Какая разница между черными  $x, y, z$  и цветными? Это одно и то же?**

Буквы  $x, y, z$  на "концах" просто указывают, какая переменная бежит по какой из прямых. Цветные  $x, y, z$  указывают конкретное значение этих переменных для данной точки. Часто, чтобы не путаться, конкретные значения обозначают с индексом, например,  $x_0, y_0, z_0$ .

**Почему координаты в круглых скобках? В школе/универе/видосах преподавал фигурные/квадратные.**

Координаты самой точки указываются в круглых скобках через запятую. Круглые скобки — стандартное обозначение упорядоченного набора чисел. На языке программирования можно сказать, что круглые скобки это **Array**, а фигурные скобки — **Set**.

**Где стрелочки?**

Стрелки специально не указаны, потому что это задания направления, а про это, думается, лучше поговорить позже, когда обсудим векторы. Хочется, чтобы изложение было последовательным. Таким образом, обращаем внимание на то, что в принципе стрелки тут ни при чем. Важно то, как прямые расположены друг относительно друга.

**Важно ли где какая координата? Почему  $x, y, z$  именно так нарисованы?**

Да, есть понятие ориентации системы координат. По сути это значит, что направления осей имеют определенное расположение относительно друг друга.

В двумерном случае, традиционно, ось  $y$  смотрит вверх, а ось  $x$  — вправо. Если обеим осям поменять направление на противоположное, то ориентация не поменяется: ось  $y$  смотрит все равно влево относительно оси  $x$ . А вот если, например, поменять направление только оси  $x$ , то ориентация, т.е. взаимное расположение осей, изменится.

В трехмерном случае традиционной является такая ориентация, когда ось  $y$  смотрит влево относительно  $x$  (как и раньше), а ось  $z$  смотрит влево относительно  $y$ . Как бы слепили из двух плоскостей  $(x, y)$  и  $(y, z)$  одно трехмерное пространство.

Если говорить чуть более формально, то можем дать такое определение. Две системы координат называются одинаково ориентированными, если одну можно непрерывными деформациями перевести в другую. Вернемся к этому вопросу позже, когда дойдем до векторного произведения.

TODO: добавить картинки из Goodnotes.

**Есть какой-то всемирный стандарт для этих записей?**

Нет, в математике в принципе нет высеченных в камне стандартов. Например, в C++ можно открыть документацию к версии языка и точно узнать, что и как должно работать. В математике нет создателя/ей (человека по крайней мере), поэтому и документации такой нет. Есть только школы, традиции, которые часто схожи в разных сообществах, но далеко не всегда идентичны.

Так что здесь важно понимать суть. Мы в дальнейшем будем немного по-разному рисовать эти картинки, заодно станет понятно, что тут критично, а что нет.

## Функции

### Функция как формула

История развития понятия функции в общем-то очень переплетается с сюжетом про Декарта, Ньютона и Эйлера из раздела про системы координат.

Как уже говорилось, Декарт и Ферма начали описывать геометрические кривые алгебраическими уравнениями. Так как кривые рассматривались на плоскости, то уравнения имели две переменные  $x, y$ . Но что означает уравнение двух переменных?

Посмотрим на примере уравнения прямой:

$$ax + by + c = 0$$

Решения этого уравнения это все пары:

$$\left(x, -\frac{ax+c}{b}\right)$$

Чтобы найти это решение мы *выразили*  $y$  через  $x$ :

$$y = -\frac{ax+c}{b}$$

Эйлер в "Анализе бесконечных" называл  $y$  функцией  $x$ , если  $y$  задан формулой, в которую входят только переменная  $x$  и константы, например,

$$y = 4x^5 - \sqrt{x} + \frac{x}{\sqrt{x+3}}.$$

Поэтому, по сути, в этом формульном смысле понятие функции витает и у Декарта, так как он прекрасно понимал, что уравнение задает зависимость между переменными. Но самого слова "функция" тогда еще не было. Ньютон, опять же, уже фактически использовал функциональную нотацию, указывая зависимость между величинами. Но как математический объект, определение функции дал Эйлер.

*4. Функция переменного количества есть аналитическое выражение, составленное каким-либо образом из этого переменного количества и чисел или постоянных количеств<sup>1)</sup>.*

Всякое аналитическое выражение, в котором, за исключением переменного количества  $z$ , все количества, составляющие это выражение, постоянны, будет функцией  $z$ ; так,

$$a + 3z, \quad az - 4z^2, \quad az + b\sqrt{a^2 - z^2}, \quad c^z$$

и т. д. будут функциями  $z$ .

Рис. 1: Определение функции из "Анализа бесконечных" Эйлера (1748) [7]

## Функция как соответствие

Такое определение для обычного школьника было бы вполне привычным, но в дальнейшем представление о функции становилось более широким, чем просто формула.

Ключевая суть функции заключается в том, что она устанавливает взаимосвязь между переменными. Например, можно определить зависимость положения Солнца относительно времени на часах. Или величину зарплаты в зависимости от грейда. На уровне идеи формулы никакой нет. И хотя часто зависимость можно выразить формулой, есть риск, что все же от такого подхода мы что-то теряем.

И действительно, как сейчас известно, не любую функцию можно выразить формулой (как говорят, выразить "в радикалах"), да и не всегда это нужно.

Поэтому, где-то с работ Гаусса и Дирихле (18 век), начало формироваться представление о функции как о правиле, по которому одному или нескольким параметрам сопоставляется некий результат.

Как уже говорилось во введении, нетворк — это пример функции, которая по нетворк-параметрам преобразовывает трансформации анимационных объектов. И формулу для него на листочке записывать — идея страшная.

TODO: рисунок схематично иллюстрирующий нетворк.

\*\*\*

## § 11.

Мы переходим теперь к исследованию вопроса, который интересен и сам по себе и кроме того играет важную роль в последующем изложении. Возьмем ряд натуральных чисел

$$1, 2, 3, 4, \dots, m$$

до какого-нибудь числа  $m$  и определим, сколько в этом ряду чисел, взаимно простых с числом  $m$ . Число таких чисел обозначается обыкновенно через  $\varphi(m)$ , где буква  $\varphi$  имеет значение функционального символа <sup>1)</sup>. Так как единица — число, взаимно простое с единицей, то

$$\varphi(1) = 1;$$

далее мы определяем непосредственно:

$$\varphi(2) = 1, \quad \varphi(3) = 2, \quad \varphi(4) = 2, \quad \varphi(5) = 4, \quad \dots$$

Рис. 2: Определение функции Эйлера в лекциях Дирихле [8]

Традиционно, функцию обозначают буквой  $f$ , а ее аргумент — буквой  $x$ . Значение функции  $f$  при заданном  $x \in \mathbb{R}$  обозначается символом  $f(x)$ . Чтобы сразу указать, какие обозначения для конкретной функции будут использоваться, часто говорят "задана функция  $f(x)$ ".

Есть мнение, что таких фраз нужно избегать, потому что это неграмотно: если написал  $f(x)$ , то это уже не функция, а значение функции в точке  $x$ . Тогда пишут либо просто  $f$ , либо  $f(\cdot)$ , если хотят подчеркнуть, что аргумент один.

Когда говорят о функции, важно понимать, какая у нее область определения, т.е. какие именно аргументы можно подставлять в функцию, чтобы получать корректное значение. Поэтому говорят "функция  $f$ , определенная на отрезке  $[0, 1]$ " и т.п.

В программировании есть assert-ы. Это проверки, обычно в начале функции, что некоторое условие на входящие параметры выполнено. Если условие не выполнено, кидается ошибка. По сути, это и есть задание области определения функции.

TODO: добавить примеры?.

## График функции

Функция — это понятие, делающее еще один шаг в сторону от геометрии к алгебре (привет Декарту) и далее к анализу (привет Эйлеру). Но интуиция и наглядность, присущая геометрии — никуда не денешься — вещь важная. Формула — хорошо, а формула с рисунком — еще лучше! Особенно, если ты физик, как Ньютон.

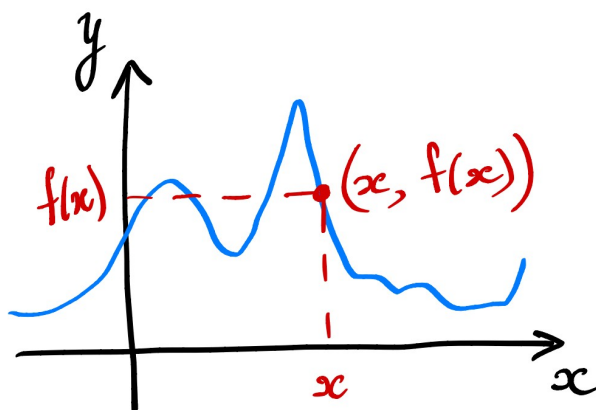
TODO: вставить картинку из Начал.

График функции является, наверное, главным виновником популярности именно прямоугольных осей координат. Для чего нужен график? Чтобы иллюстрировать то, как изменяется одна величина при изменении другой/других. И если функция числовая, т.е. принимает числовые значения (что вообще-то не обязательно), то логично изображать ее значения как бы столбиками, стоящими на аргументах функции. Все столбики, ясное дело, параллельны и стоят они все на одном уровне. Вот и получается сама собой прямоугольная система координат и привычный рисунок.

**Опр.** Графиком функции  $f$ , определенной на множестве  $X$ , называется множество пар  $\{(x, f(x))\}_{x \in X}$ . Простыми словами, взяли все значения переменной  $x \in X$ , посчитали от них значения  $f(x)$  и записали все результаты в табличку:

$x$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$\dots$
$f(x)$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$\dots$

Для наглядного изображения графика функции удобнее всего нарисовать картинку, где все эти точки образуют гладкую кривую линию:



Так что, строго говоря, как и система координат, график не является "рисунком", это не геометрический объект, а множество пар аргумент+значение. Но это множество традиционно иллюстрируют в виде рисунка в прямоугольной системе координат.

**Н.В.** Конечно, график далеко не обязан быть гладким и даже непрерывным. Отсюда возникают строгие понятия, характеризующие функцию, которые образуют теорию под названием анализ функций (по-народному "матан").

## Кривые и поверхности как графики функций

Может возникнуть мысль, что график функции нужен просто ради наглядной картинки. Это отчасти так, но здесь опять проявляется связь алгебраического и геометрического. С одной стороны, по функции, негеометрическому объекту, можно построить график, который не только дает интуитивное графическое представление о ней, но и является уже описанием геометрического объекта: кривой, поверхности и т.п.

\*\*\*

Например, мы знаем, что окружность радиуса 1 задается уравнением

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Выразим  $y$  через  $x$ :

$$y^2 = 1 - x^2,$$

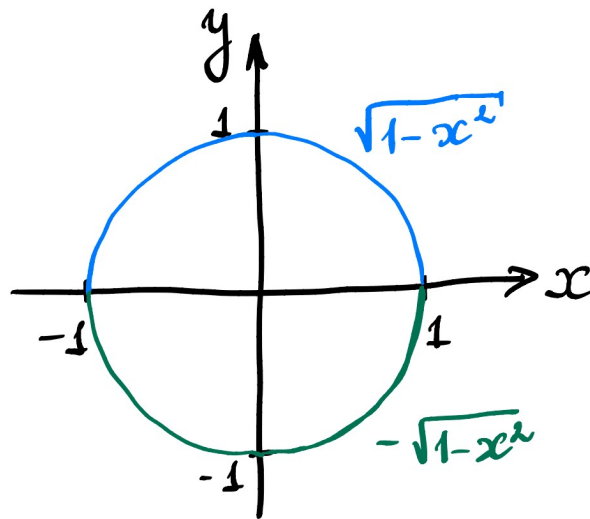
значит,

$$y = \sqrt{1 - x^2} \quad \text{или} \quad y = -\sqrt{1 - x^2}.$$

Здесь мы получили две функции  $f_1(x) = \sqrt{1 - x^2}$  и  $f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ . Построим их графики:

Мы видим, что два этих графика в объединении дают геометрический объект — окружность. И так можно делать с любыми кривыми на плоскости, если они не слишком экзотические.

\*\*\*



Аналогично, можно рассмотреть уравнение единичной сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

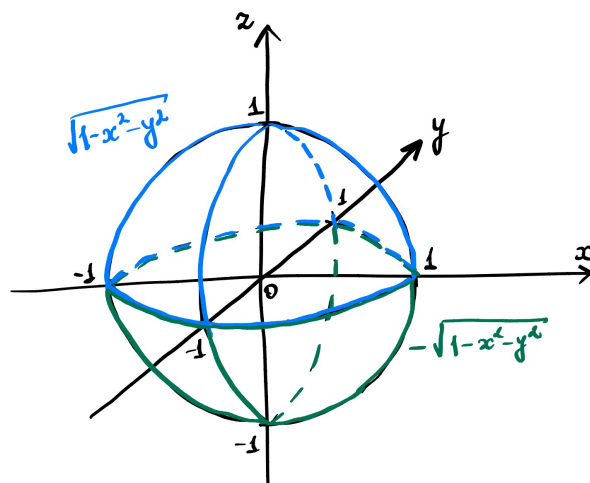
Выразим  $z^2$ :

$$z^2 = 1 - x^2 - y^2$$

откуда

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad \text{или} \quad z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Графиками функций  $f_1(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$  и  $f_2(x, y) = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$  будут две полусферы.

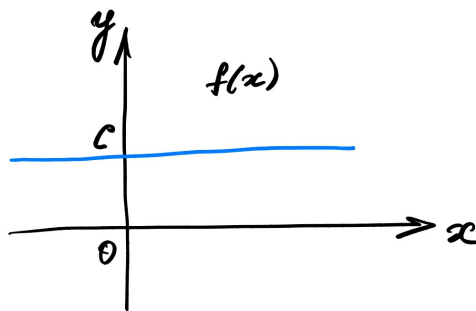


## Примеры функций и их графиков

### 1 Константа

Функция, которая всюду принимает одно значение, называется константой.

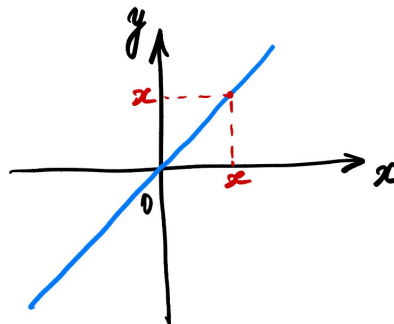
$$f(x) = C, \quad \text{где } C \in \mathbb{R} - \text{число.}$$



## 2 Тождественная функция

Функция, которая возвращает то же значение, которое получила на вход, называется тождественной.

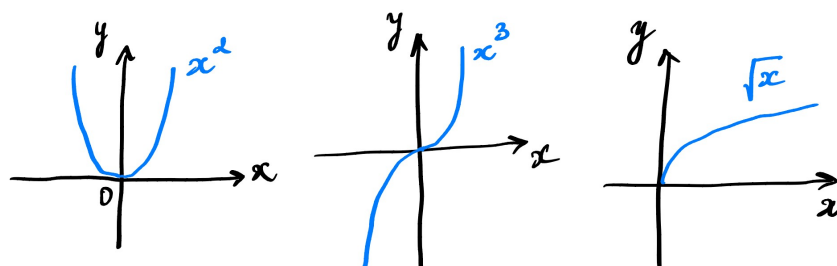
$$f(x) = x$$



## 3 Степенная функция

Степенная функция определяется формулой

$$f(x) = x^a, \quad a \in \mathbb{R}.$$



При разных значениях параметра  $a$  будут получаться различные функции:

$$a = 0 \Rightarrow f(x) = 1$$

$$a = 1 \Rightarrow f(x) = x$$

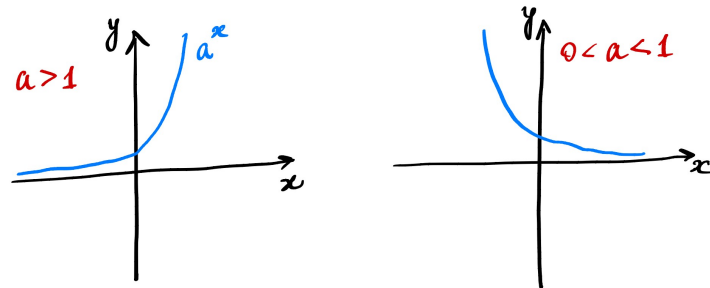
$$a = 2 \Rightarrow f(x) = x^2$$

$$a = \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = \sqrt{x}$$

## 4 Показательная функция

Показательная функция определяется формулой

$$f(x) = a^x, \quad a \geq 0.$$



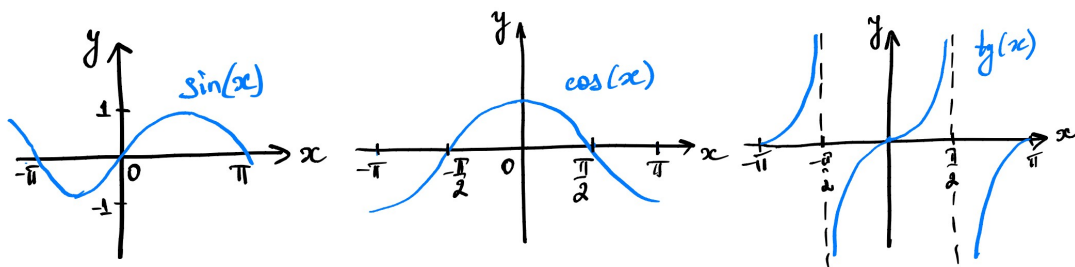
**Н.В.** Частный случай  $a = e$  дает функцию

$$f(x) = e^x,$$

которая называется экспонентой.

## 5 Тригонометрические функции

О тригонометрических функциях подробнее мы поговорим ниже, а пока просто посмотрим на их графики



## Тригонометрия

### Мотивация

В прошлом разделе мы поговорили о базовых функциях, которые еще называют элементарными в том смысле, что они как кирпичики – являются стройматериалом для более сложных функций. Но вот вопрос: все ли функции можно построить, имея только эти кирпичики?

Как было сказано, в современном понимании, термин "функция" означает соответствие между двумя множествами объектов. И в этом смысле, конечно, сложно говорить даже о том, что из себя представляет множество всех функций. Но мы не будем тягать непосильные гири, а продолжим говорить именно о числовых функциях, которые принимают на вход число и выдают тоже число. Что тогда?

Согласно Эйлеру, функция переменных  $x, y, z$  это аналитическое выражение, включающее в себя эти переменные и построенное путем арифметических операций, а также операции извлечения корня. И тогда, если принять позицию Эйлера, больше числовых функций нет.

Революцию в подходе к функциям после Эйлера совершил французский математик Жан Батист Фурье (1768–1830), который сделал несколько вещей. Во-первых,



он отметил, что методом Эйлера можно получить только непрерывные функции, а во-вторых, Фурье показал, что почти любую вразумительно выглядящую функцию можно представить в виде суммы синусов и косинусов. Такое представление называется тригонометрическим рядом. Этот поразительный вывод перевернул представление об устройстве функций и повлиял на все дальнейшее развитие математики и особенно сильно на ее приложения.

К Фурье мы еще вернемся в конце этого параграфа, а пока все же вернемся к тригонометрии.

## Астрономия и хорды

### 1 Начало тригонометрии

Слово "тригонометрия" происходит от слов triangle и measure, т.е. получается, что тригонометрия – наука об измерениях треугольника. Однако, хотя этимология слов часто помогает понять суть предмета и его истоки, в данном случае, на мой взгляд, происходит противоположное действие. Дело в том, что само это название появилось лишь в конце 16-го века, тогда как сама наука уходит корнями в древние цивилизации!

Впрочем, в Египте действительно использовались расчеты сторон треугольников для сооружения пирамид. Но по-настоящему началом истории тригонометрии считается Древняя Греция, а "отцом" тригонометрии – Гиппарх (190-120 до н.э.), чье дело развил Птолемей (100-170 н.э.). Греки активнейшим образом изучали движение звезд, планет, Луны и Солнца на небесной сфере. Это было очень важным делом, ведь астрономические знания позволяли предсказывать многие ключевые события в религиозной жизни общества, такие как:

1. затмения, полнолуния, положение звезд и т.д.
2. календари для посевов
3. составление карт, навигация для передвижения и торговли

Естественно, что астрономия сводилась во многом к тому, чтобы вычислять расстояния между небесными светилами. А что это значит на нашем языке? Расстояние между точками на сфере это хорды. Так что в то время была скорее не тригонометрия, а наука об измерении длин хорд на сфере.

TODO: рисунок из википедии History of Trigonometry.

Чем связаны будущая тригонометрия и эти хорды? Тем, что для измерения длин в окружности автоматически возникает потребность в расчете той величины, которая позже будет называться синусом.

Вот, посмотрим на картинку с окружностью, в которой из центра выпущены два радиуса под углом  $\varphi$  друг к другу. Какова длина получившейся хорды? Тот, кто часто пользуется тригонометрическими функциями быстро скажет, что

$$\text{chord } \varphi = 2r \sin \frac{\varphi}{2}$$

Позже, астрономия перетекла к индийцам, а затем к арабам, которые и придумали понятие синуса, как половина длины хорды, а потом и все остальные тригонометрические функции.

### 2 Тригонометрические функции на окружности

Мы увидели, что в измерении хорд уже вшито измерение синуса угла. Поэтому развитие науки об измерениях хорд неотделимо от истории тригонометрии. Но после расцвета древнегреческой математики ведущую роль в развитии математики захватили индийцы и арабы. Так, у индийцев появилось понятие ардха-джива (от ардха – ”полу” и джива – ”тетива”), которое означало половину хорды. Затем слово ”ардха” отпало и осталось просто ”джива”, которое позже перетекло в европейские языки, как ”синус” [4] (с. 199).

Так что под синусом изначально подразумевалась длина половины хорды. А когда определилось это понятие, то дальше пошло проще. Мы это увидим, если нарисуем синус на координатной плоскости следующим образом:

TODO картинка

Здесь синус это отрезок, полученный опусканием перпендикуляра на радиус, проведенный из центра в середину исходной дуги, то есть в наших терминах, на ось координаты  $x$ . Но есть как бы родственная дуга, которая получается проведением перпендикуляра на ось координаты  $y$ . Полученная отсюда полухорда получила логичное название косинус (**complement** к синусу).

Теперь проведем к точке начала дуги касательную и отметим ее пересечения с осями координат. Тогда два кусочка получившегося отрезка будут тангенсом и котангенсом заданной дуги (или угла, как кому нравится):

TODO: картинка.

Но и это не все. Отрезки от центра окружности до точек пересечения касательной с осями координат называются секансом и косекансом:

TODO: картинка.

Таким образом мы через измерений единичной окружности определили шесть основных тригонометрических функций: синус, косинус, тангенс, котангенс, секанс, косеканс.

В этом видео можно посмотреть все эти построения в более красивом анимированном исполнении, например здесь можно прямо регулировать угол и смотреть за изменением значений тригонометрических функций. Можете и сами сделать подобную анимацию.

Нам пришлось прибегнуть к словам ”система координат” и ”оси координат”, хотя мы знаем, что они как концепция возникли у Декарта и Ферма лишь в 17-ом веке. Это было сделано для более сжатого изложения: нам важно понимать, откуда появился синус как отрезок в окружности и то, что из него уже выросло все остальное.

## Отношения в треугольнике

*Вы, желающие изучать великие и  
замечательные вещи, кто  
интересуется движением звезд,  
должны прочитать эти теоремы о  
треугольниках*

— Regiomontanus ”De triangulis  
omnimodis”

### 1 Понимание связи с треугольником

Термин ”тригонометрия” возник в Европе. Назовем ключевые имена и события, которые сыграли определяющую роль в этом направлении.

Сначала отметим еще раз, что измерения синусов и прочих определенных выше длин, которые сейчас мы называем тригонометрическими функциями, и в Европе

продолжают жить в контексте прежде всего астрономии. По большому счету вся современная математика, можно сказать, вдохновлена этой наукой.

Первой ключевой фигурой выделяется европейский математик немецкого происхождения Региомонтан, который в своем труде *"De triangolis omnimodis"* (*"О треугольниках всех видов"*, 1464) [3] собрал воедино и структурировал все сведения о достижениях индийских и арабских ученых, которые помогали решать геометрические задачи в астрономии. И, что крайне важно, уже по названию видно, что Региомонтан поставил в этой дисциплине в центр именно треугольник.

Второй ключевой фигурой мы назовем австрийского математика Ретика, ученика Коперника. Ретик занимался составлением таблиц значений указанных выше шести тригонометрических функций с точностью до 10 знаков после запятой. Результаты были опубликованы в трактате *"Canon of the Science of Triangles"* в 1551 году, а позже в 1596 году ученик Ретика Валентин Отто опубликовал завершенную версию, которая заняла около 1500 страниц. Причем точность таблиц была такой, что ее хватало для астрономических вычислений до начала 20-го века.

И наконец третьей ключевой фигурой является еще один немецкий астроном Питиск, который собственно и ввел впервые термин "тригонометрия", назвав свою работу по плоской и сферической тригонометрии *"Trigonometria: sive de solutione triangulorum tractatus brevis et percipicuus"* (*Тригонометрия, или краткий и ясный трактат о решении треугольников*), 1595.

Здесь же вспомним героя рассказа раздела об элементарных функциях Джона Непера, который первым придумал логарифмы. Там не было сказано, но на самом деле он вычислял логарифмы не любых чисел, а именно тригонометрических функций. То есть составлял таблицы функций типа  $\log(\sin x)$ . Нам-то понятно, что если умеешь вычислять логарифмы любых чисел, то умеешь считать то же и для значений синуса, которые являются просто отрезком  $[-1, 1]$ , но Непер не сразу это понял. Говоря о логарифмах, мы отмечали, что Непер преследовал цель ускорить процесс перемножения чисел, переводя умножение в сложение. Так вот на самом деле, ему нужно было ускорять вычисления именно для астрономических вычислений, поэтому тригонометрические функции его и волновали в первую очередь.

## 2 Тригонометрия 8-го класса

TODO

## 3 Поиск проекции

TODO

## Эйлер и тригонометрия

### 1 Определение тригонометрических функций

С развитием понятия TODO

### 2 Графики тригонометрических функций

TODO

### 3 Обратные тригонометрические функции

TODO

## Связь всего со всем

### 1 Эйлер и экспонента

TODO

### 2 Гиперболические тригонометрические функции

TODO

### 3 Пружина с демпингом

TODO

### 4 Фурье

TODO

## Мотивация

Как говорилось выше, геометрия изучает метрические свойства фигур в плоскости или пространстве. Под фигурами можно понимать то, что можно изобразить, нарисовать. Например, прямые, кривые, окружности, эллипсы, сферы, параллелепипеды, сечения одних фигур другими и т.д.

Естественным историческим ходом развития мысли в геометрии выделялись более узкие направления. Так, известно, что в Египте строились пирамиды (3000 лет до н.э.), где требовались расчеты длин и углов в треугольнике для того чтобы понять сколько материалов нужно для выстраивания пирамиды определенных размеров.

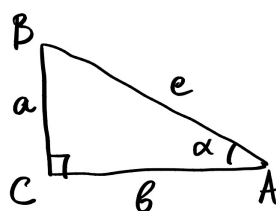
Затем греческие астрономы (190-120 лет до н.э.) стали замечать, что Солнце каждый день встает немного смещаясь в восток, и скоро поняли, что Солнце движется относительно Земли по окружности, а полный круг делает за год. Отсюда пошло разделение полного оборота вокруг своей оси на 360 градусов. Встал вопрос, а какого радиуса эта окружность, т.е. на каком расстоянии Солнце находится от Земли. Выяснилось, что эта задача решается через построения прямоугольных треугольников и поиска в них длин сторон и углов.

Таким образом, стала выкристаллизовываться тригонометрия – геометрия треугольников. Впрочем, такой взгляд скорее вреден, поскольку сейчас известно о приложениях тригонометрии в совершенно далеких друг от друга областях, от астрономии, механики, электричества до методов сжатия изображений.

Об истории тригонометрии и о ее красивых приложениях есть 40-минутная лекция канадского историка математики Glen Van Brummelen *The Story of Trigonometry: Revolutions in the Heavens, and on the Earth*. Для демонстрации он там использует сайт MyPhysicsLab.

## Отношения в прямоугольном треугольнике

Изобразим прямоугольный треугольник  $\triangle ABC$  с прямым углом  $\angle C$  и сторонами  $a, b, c$ . Обозначим угол  $\angle A = \alpha$ .



Тогда по определению синус (sine), косинус (cosine), тангенс (tangent) и котангенс (cotangent) угла  $\alpha$  есть отношения сторон:

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{a}{c} \\ \cos \alpha &= \frac{b}{c} \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{a}{b} \\ \operatorname{ctg} \alpha &= \frac{b}{a} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}\end{aligned}$$

Отметим свойства, следующие из этого определения

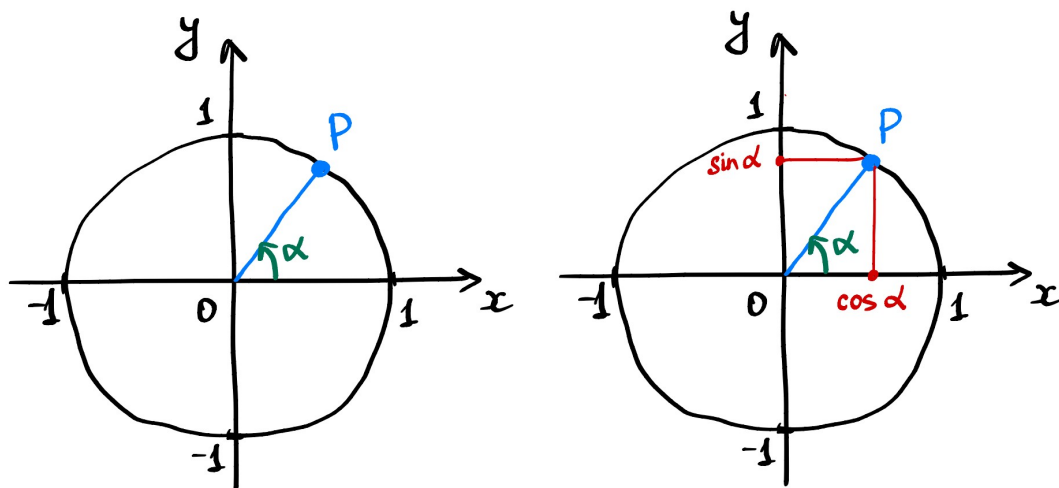
- $0 \leq \sin \alpha \leq 1, \quad 0 \leq \cos \alpha \leq 1$
- $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2} = 1$  (теорема Пифагора)
- $b = c \cdot \cos \alpha$  – проекция  $AB$  на прямую  $AC$

## Точка на окружности

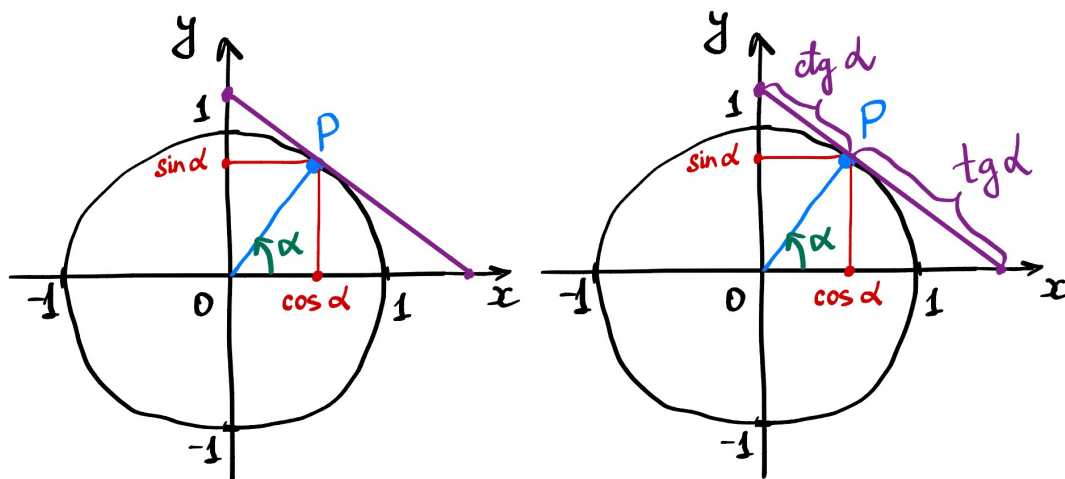
Теперь совершим эволюционный переход от египтян и вавилонян к грекам, и определим тригонометрические функции, связав их с геометрией окружности единичного радиуса.

Итак, рассмотрим окружность радиуса 1 и поместим ее в начало прямоугольной системы координат. Затем возьмем произвольную точку  $P$  на этой окружности, соединим ее с центром окружности и обозначим получившийся угол за  $\alpha$ .

Тогда по определению синусом угла  $\alpha$  называется координата  $y$  точки  $P$ , а косинусом – координата  $x$ .



Но это еще не все. Проведем касательную к точке  $P$  и продлим ее до пересечения с осями системы координат. Тогда тангенсом называется длина отрезка от точки  $P$  до пересечения с осью абсцисс, а котангенсом называется длина отрезка от точки  $P$  до пересечения с осью ординат.



Вот так с одной стороны определение получается более сложным: используется окружность, координаты, проводится касательная. А с другой стороны, такой взгляд будто открывает глубину понятий. Слово синус в греческом языке означает "хорда". И действительно, мы видим по рисунку, что синус это половина длины хорды, а косинус (ко-синус!) половина длины смежной хорды.

Тангенс означает "касание". И мы видим, что тангенс это просто длина части касательной. А котангенс (ко-тангенс!) – другая часть этой же касательной.

Рекомендую посмотреть об этом видео Beautiful Trigonometry от Numberphile.

\*\*\*

Теперь отметим, что при определении тригонометрических функций через окружность, они могут принимать и отрицательные значения. Так,

$$-1 \leq \sin \alpha \leq 1$$

$$-1 \leq \cos \alpha \leq 1$$

Сразу же видны и многие другие важные свойства, которые в школе часто пытаются зубрить:

- периодичность:  $\sin(\alpha) = \sin(\alpha + 2\pi)$
- нечетность синуса:  $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$
- четность косинуса:  $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$
- $\sin(\alpha + \pi) = -\sin \alpha$
- $\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \cos \alpha$

и так далее. Учить тяжело и не нужно, но понимать легко и полезно.

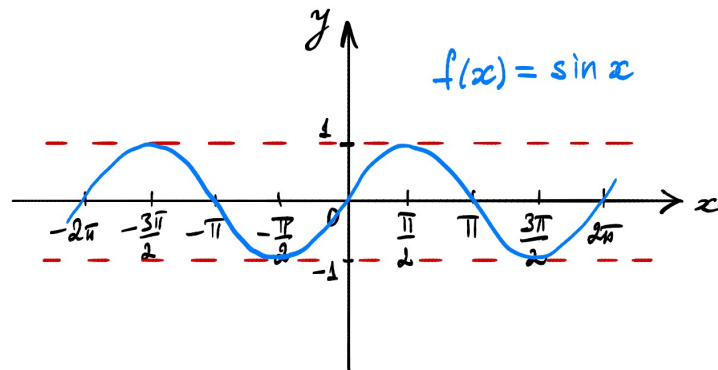
## Графики

Итак, определения синуса, косинуса, тангенса и котангенса через единичную окружность задают числовые функции

$$\sin(x), \quad \cos(x), \quad \operatorname{tg}(x), \quad \operatorname{ctg}(x),$$

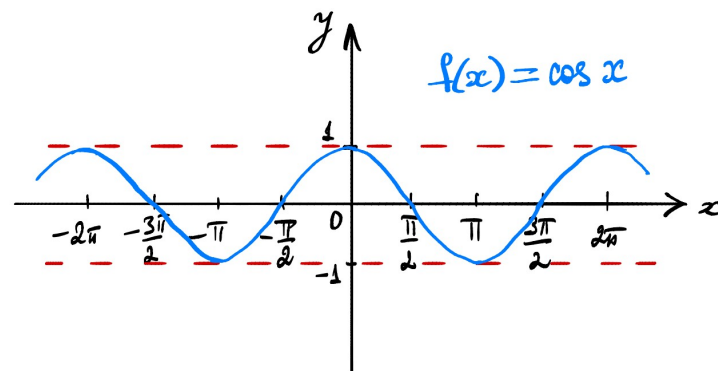
причем если  $\sin(x)$  и  $\cos(x)$  определены на всей числовой прямой, то  $\operatorname{tg}(x)$  и  $\operatorname{ctg}(x)$  имеют неопределенности.

Нарисуем график синуса.



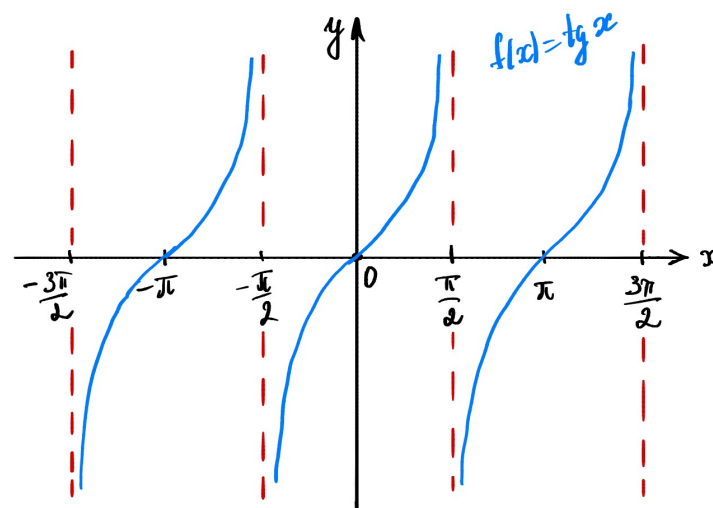
Полученная кривая напоминает волну. Она постоянно колеблется между максимальным и минимальным значениями, причем, подходя к ним, плавно замедляется, а отдаляясь, также плавно ускоряется.

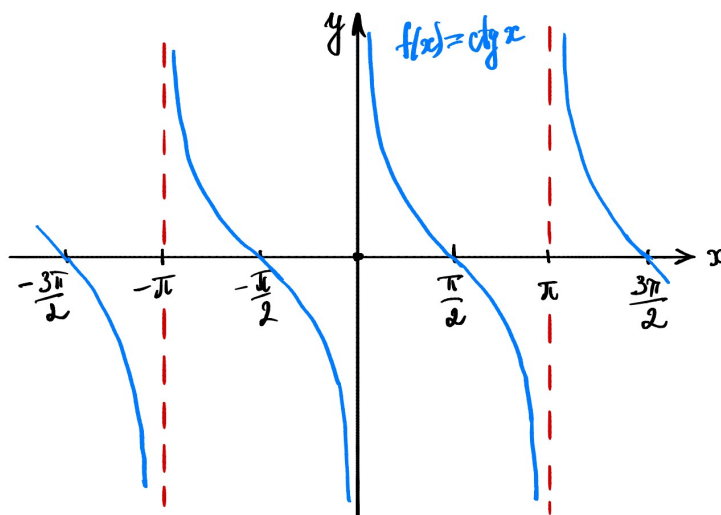
График косинуса ничем не отличается от синуса, кроме сдвига на  $\pi/2$  по горизонтали. Это видно из построения косинуса на окружности.



\*\*\*

Тангенс и котангенс имеют также схожие между собой графики, однако отличные от графиков синуса и косинуса.



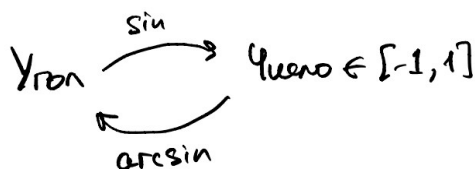


## Обратные тригонометрические функции

Чтобы получить по значению тригонометрической функции ее аргумент, т.е. угол, нужно знать соответствующую обратную тригонометрическую функцию. Например, мы знаем все стороны в прямоугольном треугольнике, а значит легко можем найти любые соотношения между ними, в том числе значения любых тригонометрических функций углов треугольника. Обратные тригонометрические функции дают возможность узнать и сами углы.

Такие функции называются также как и прямые тригонометрические функции, только с приставкой **arc** (дуга):

$$\arcsin(x), \quad \arccos(x), \quad \operatorname{arctg}(x), \quad \operatorname{arcctg}(x).$$



Тут есть, правда, одна проблема. Если снова взглянуть на график, например, синуса, то мы увидим, что каждое его значение повторяется бесконечное число раз. Это понятно, ведь функция периодическая. Отсюда возникает неоднозначность обращения функции. Допустим, мы хотим понять, чему равен  $\arcsin(0)$ . Тогда мы получаем значения  $0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots$  и что же делать? Здесь, как правило, с неоднозначностью борются очень просто: волевым усилием решается, что берется то значение, которое лежит в промежутке  $[-\pi/2, \pi/2]$ .

Тогда график арксинуса будет выглядеть таким образом:

TODO: график арксинуса.

График арккосинуса

TODO: график

График арктангенса

TODO: график

График арккотангенса

TODO: график



## Зачем это все?

Музыка, Фурье, формула Эйлера, механика и т.д.

### 1 Формула Тейлора

Итак, мы теперь знаем графики тригонометрических функций и их значения при любых аргументах. Ведь так? Конечно, нет! Ведь графики мы нарисовали очень приблизительно, еще и воспользовавшись знаниями, которые не обсуждались в этом изложении. Например, мы считаем, что известны табличные значения рассмотренных тригонометрических функций типа  $\sin(\pi/6) = 1/2$  и т.д.

Но даже знание нескольких табличных значений не дает построить точно график функции на всей области определения. Действительно, вот например, чему будет равно  $\sin(1)$ ? Очевидно, что вычислять такое нужно, ведь угол может быть любым, но как это делать?

В древности для этих целей стали искать способ найти хотя бы приближенное значение. Из идеи о том, что синус это длина хорды единичной окружности, которую образует некоторый угол, геометрическими соображениями начали приближать это значение. И получилось следующее

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots,$$

где  $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$  – факториал числа  $n$ .

Для косинуса получилась такая формула:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Сейчас эти формулы называются рядами Тейлора в честь английского математика Брука Тейлора (1685–1731), который жил уже во времена Ньютона и Лейбница, создателей дифференциального исчисления. Тейлор показал, что любую функцию, у которой есть производная, можно разложить в подобный степенной ряд. А именно, если есть функция  $f$ , то ее можно записать в виде

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots$$

О рядах Тейлора есть замечательное видео на канале 3Blue1Brown – Taylor series | Chapter 11, Essence of calculus.

### 2 Формула Эйлера

Современники Тейлора не слишком оценили этот результат, но немного позже Эйлер, Лагранж и другие математики поняли насколько мощный это инструмент, ведь теперь можно, не задумываясь о геометрической составляющей, выписывать ряды самых непонятных функций.

Так, теперь очень легко выписать разложение в ряд Тейлора для экспоненты  $e^x$ :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

Хочется спросить: ничего не напоминает? Действительно, разложения для синуса и косинуса очень похожи на разложение экспоненты. Кажется, будто нужно просто сложить синус и косинус, и получится экспонента. Посмотрим:

$$\sin(x) + \cos(x) = 1 + x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Эх, почти! Вот и Эйлер также подумал. Но не остановился на этом.

Что происходит в полученной сумме синуса и косинуса? Слагаемые те же, что в экспоненте, но знаки другие, они чередуются через два: два плюса, два минуса, потом все повторяется. Эйлер заметил, что похожее чередование происходит, если возводить в степень мнимую единицу:

$i^0$	$i^1$	$i^2$	$i^3$	$i^4$	$i^5$	$i^6$	$\dots$
1	$i$	-1	$-i$	1	$i$	-1	$\dots$

Снова два плюса, два минуса, два плюса, два минуса, ...

Тогда Эйлер подставил в формулу для экспоненты аргумент  $ix$  вместо  $x$  и получил:

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - i\frac{x^7}{7!} + \dots$$

и теперь становится очевидно, что

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

А если подставить здесь  $x = \pi$ , то получим знаменитую формулу Эйлера:

$$e^{i\pi} + 1 = 0,$$

одну из самых красивых формул в математике, соединяющую в себе самые важные константы: 0, 1,  $\pi$ ,  $e$ .

### 3 Движение груза на пружине с демпфированием

Уравнение движения груза на пружине с демпфированием:

$$mx'' + bx' + kx = 0,$$

здесь  $x(t)$  – смещение груза,  $m$  – масса груза,  $b$  – демпфирование,  $k$  – жесткость пружины (stiffness).

Положим для простоты записи  $m = 1$ . Тогда уравнение примет вид

$$x'' + bx' + kx = 0.$$

Это линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка. Для его решения найдем корни характеристического многочлена

$$\lambda^2 + b\lambda + k = 0.$$

Это обычное квадратное уравнение, его корни легко находятся через дискриминант:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4k}}{2}.$$

Тогда, согласно правилу решения уравнений такого рода, все решения описываются так:

$$x(t) = C_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2 e^{-\lambda_2 t},$$

в случае если  $\lambda_{1,2}$  – действительные, и

$$x(t) = e^{-\alpha t} (C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)),$$

если  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$  имеют мнимую часть.

Характеристические числа  $\lambda_{1,2}$  будут мнимыми в случае, если

$$b^2 < 4k,$$

тогда движение будет осциллирующим, а демпинг будет лишь оказывать затухающее действие, постепенно уменьшая амплитуду колебаний. Например, при  $k = 3$  демпинг не должен превышать значения  $2\sqrt{3} \approx 3.5$ . А если превысит, то закон движения перестанет носить осциллирующий характер и будет вести себя экспоненциально!

При этом если демпинг равен нулю, т.е.  $b = 0$ , то движение будет максимально простым:

$$x(t) = C_1 \cos(\sqrt{k}t) + C_2 \sin(\sqrt{k}t).$$

и если начальная скорость равна нулю, т.е.  $x'(0) = 0$ , то находим, что  $C_2 = 0$ . А если начальное смещение равно  $L$ , то  $C_1 = L$ , т.е.

$$x(t) = L \cos(\sqrt{k}t).$$

А это просто колебательное движение с амплитудой  $L$  и частотой  $\frac{\sqrt{k}}{2\pi}$ .

Визуализацию этой модели можно посмотреть на сайте MyPhysicsLab.

#### 4 Фурье

## Криволинейные системы координат

*Решил ты вырваться за предел  
Осточертевших квадратных форм.  
— В.А. Лифшиц "Квадраты"*

Пока что мы продолжаем жить в геометрическом мире, поэтому слово криволинейное можно понимать вполне конкретно — что-то не прямолинейное. А прямолинейно — ну ясно же, что такое! Вон, палка прямая валяется.

Система координат, в сущности, это способ закодировать объекты удобным образом. Понятно, что делать это можно по-разному. Как известно, с древности навигация осуществлялась по звездам, города кодировались двумя числами: долготой и широтой. Поэтому сферическая геометрия была развита очень хорошо.

### Полярная система координат

### Сферическая система координат

### Цилиндрическая система координат

# Векторы

## История

Смело предположу, что большинству из нас понятие вектора кажется одним из самых простых в математике. С другой стороны, как мы увидели выше, тригонометрия и анализ функций – очень даже крепкие орешки, на понимание которых даже поверхностно нужно потратить некоторое количество усилий, а глубина этих наук видна так, словно стоишь на вершине каньона и смотришь вниз.

А что же векторы? Из школы помним, что вектор имеет начало и конец. Чтобы получить вектор  $\overrightarrow{AB}$  нужно как бы из конца  $B$  вычесть начало  $A$ . Складывать и умножать на число тоже понятно как. Скалярное и векторное произведения? Не так очевидно, но формулы есть: одна с косинусом, другая с синусом. И вроде бы и все ладно.

И, скорее всего, вам этих знаний хватит для 99% задач, связанных с векторами. Но есть неявные, но весомые причины разобраться в этой теме чуть глубже, которые можно увидеть, проанализировав историю становления векторов в математике. Она нас недурно удивит.

Первое удивление состоит в том, что понятие "вектор" в математике появилось лишь в 1843 году. Меньше двухсот лет назад! К этому времени Декарт и Ферма открыли аналитическую геометрию, указав метод решения геометрических задач на языке уравнений, Ньютон и Лейбниц построили дифференциальное и интегральное исчисление, Бернулли доказал первый вариант Закона Больших Чисел в теории вероятностей, Эйлер нашел выражение комплексной экспоненты через синус и косинус

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

и многое-многое другое произошло к середине 19-го века.

Второе удивление еще менее правдоподобное. Ввел понятия "вектор", а также "скалярное" и "векторное" произведения ирландский математик и физик Уильям Роуэн Хэмилтон, когда – внимание! – открыл кватернионы.

Вообще, исторически было бы более правильно сначала рассказывать о кватернионах, а только потом о векторах. Но мы, учитывая в большей степени техническую сложность тем, все же пойдем своим путем и о кватернионах подробно поговорим в соответствующей части курса.

Дело в том, что в 19-м веке было сразу множество, порядка 5-10, попыток создать нечто вроде современного векторного метода, то есть идея витала в воздухе и как бы даже перезрела. Еще Лейбниц в письмах к Гюйгенсу писал, что математике не хватает инструментов, более полно описывающих положение динамических объектов. Позицию описать можем, закон движения можем, а скорость – нет. Физики все больше нуждались в математическом языке, который бы описывал величины, имеющие не только численное значение, но и направление. Но долгое время ничего не получалось.

Мы не будем подробно окунаться в эту длинную историю с кучей имен и связанных с ними драм, это всегда можно сделать, открыв замечательную книгу Crowe – *A History of Vector Analysis* [2].

## Развилки в понимании

*Вектор это нечто, имеющее величину и направление:*

*If anything has magnitude and direction, its magnitude and direction taken together constitute what is called a vector.*

*(Gibbs, Elements of Vector Analysis, 1881 [1])*

Из этого определения можно попытаться что-то выудить. Раз есть направление, значит, есть какое-то пространство, в котором можно куда-то направляться. Если есть величина, то есть чем измерять. В принципе, это все.

Дальше понятие вектора приобретает различный смысл в зависимости от того, в какой контекст его погрузить. Есть три основные развилки, которые определяют дальнейшую работу с векторами.

Первое это физика. Под векторами понимаются силы, скорость, магнитное поле и т.п. В этой ситуации векторы описывают действия над объектами физического мира.

Второе это геометрия. Здесь вектор это отрезок между двумя точками пространства, имеющий начало и конец. Вектор указывает на то, как из одной точки попасть в другую. Или же можно понимать вектор как перенос одной точки в определенном направлении на определенное расстояние.

И третье — алгебра. Здесь векторы это нечто, что можно складывать и масштабировать, получая через эти две операции новые векторы. Слова из геометрии типа "направление", "отрезок" и т.п. здесь уже нелегитимны. Главное — операции.

\*\*\*

В каждой из этих трех концепций будут свои развилки, некоторые из которых мы затронем.

Сначала мы вспомним геометрическое представление, операции сложения и растяжения. Поговорим о проекциях и в этом контексте воспользуемся тригонометрией.

Затем перейдем к алгебраическому подходу, где воспользуемся координатным представлением вектора и увидим, как координатные операции связаны с геометрическим представлением. Поговорим о скалярном и векторном произведении, а также о действиях матриц на векторы. Это будет основная часть.

А когда будем говорить про комплексные числа и кватернионы, взглянем на векторы совсем иначе.

## Наивное определение и базовые операции

### 1 Определение

**Опр.** Две точки  $A$  и  $B$ , называемые началом и концом, называются вектором  $\overrightarrow{AB}$ .

**Опр.** Длина отрезка  $AB$  называется длиной или величиной (magnitude) вектора  $\overrightarrow{AB}$  и обозначается  $|\overrightarrow{AB}|$ .

**Опр.** Вектор, у которого начало и конец совпадают, называется нулевым вектором.

### 2 Операции

**Опр.** Сложение векторов, имеющих общее начало, осуществляется по правилу параллелограмма. Обозначается

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}.$$

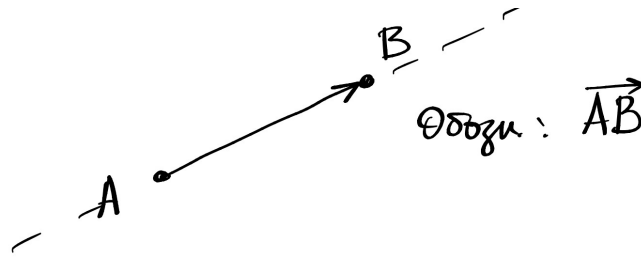


Рис. 3: Вектор как две точки

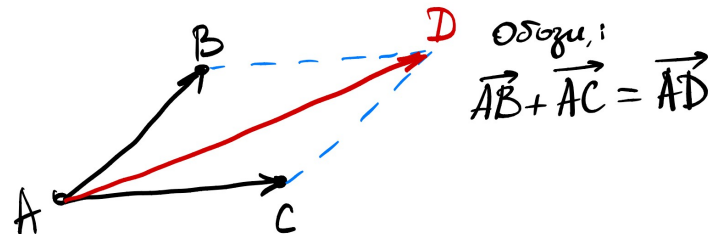


Рис. 4: Правило параллелограмма

**Опр.** Умножение вектора  $\vec{AB}$  на положительное число  $\lambda$  дает новый вектор с тем же началом и направлением, но длиной  $\lambda|\vec{AB}|$ . Если  $\lambda < 0$ , то направление меняется на противоположное.

### 3 Как же сложение векторов с разными началами?

Такое сложение не имеет понятного смысла. Но если воспринимать вектор как направление и величину, то понятно, что один вектор можно задать разными парами точек. Отсюда возникает концепция свободного вектора: все векторы с одинаковым направлением (параллельные) и величиной склеиваются в один.

Свободный вектор можно отложить от любой точки. И вот на таких векторах можно задать сложение:

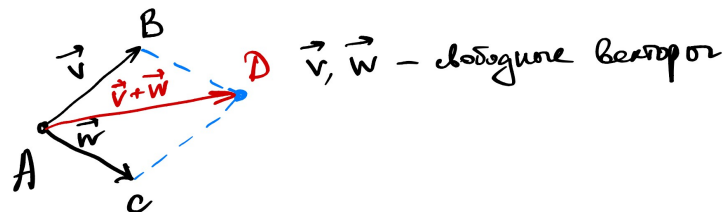
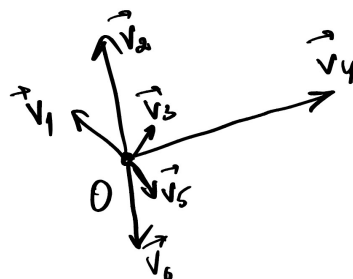


Рис. 6: Сложение свободных векторов

Можно считать, что все свободные векторы отложены от одной точки:



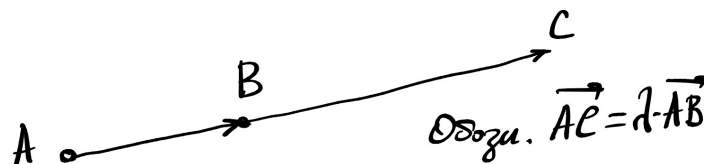


Рис. 5: Умножение вектора на скаляр

## Вектор и координаты

### 1 Что произошло?

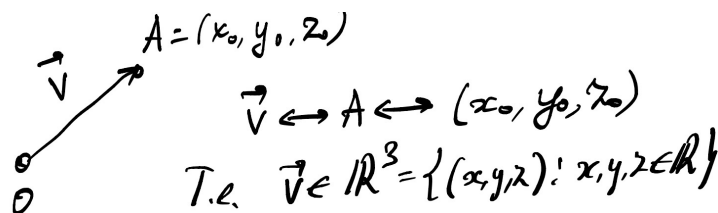
Теперь у точек есть координаты. Для простоты будем считать, что прямоугольные.

Тогда вектор логично определить точно так же, как ранее, но теперь у начала и конца вектора есть координаты  $(x, y, z)$ .

### 2 Свободные векторы

Мы будем использовать в дальнейшем только свободные векторы, поэтому слово "свободный" будем опускать, а как мы отметили, все свободные векторы можно считать отложенными от некоторой конкретной точки. Например, от начала координат, т.е. точки  $(0, 0, 0)$ .

Тогда любой вектор, по сути, задается только своим концом. Поэтому вектор можно отождествить с его концом и, соответственно, с его координатами.



### 3 Операции

Сложение двух векторов

$$v_1 = (x_1, y_1, z_1)$$

$$v_2 = (x_2, y_2, z_2)$$

определяется через покомпонентное сложение

$$w = v_1 + v_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2).$$

Умножение вектора  $v = (x, y, z)$  на скаляр  $\lambda \in \mathbb{R}$  дает вектор

$$w = \lambda v = (\lambda x, \lambda y, \lambda z).$$

### 4 Векторное пространство и его базис

**Опр.** Множество всех векторов называется векторным пространством (vector space) и обозначается  $\mathbb{R}^3$  (читается как "эр три").

**Опр.** Если через три вектора  $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}^3$  можно выразить любой вектор  $v \in \mathbb{R}^3$ , то эти три вектора  $\{e_1, e_2, e_3\}$  называются базисом векторного пространства  $\mathbb{R}^3$  (basis).

**Пример (Стандартный базис).** Зададим базис в  $\mathbb{R}^3$ :

$$e_1 = (1, 0, 0)$$

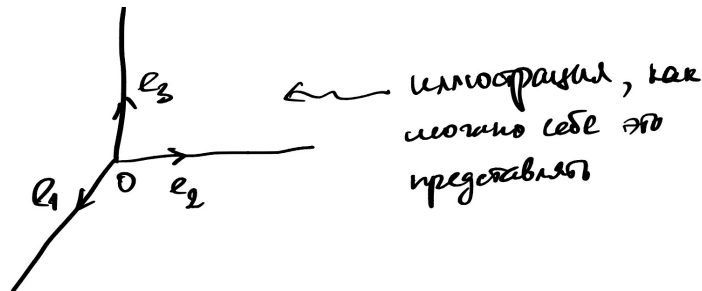
$$e_2 = (0, 1, 0)$$

$$e_3 = (0, 0, 1)$$

Тогда, если  $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , то

$$v = xe_1 + ye_2 + ze_3,$$

а само это представление называется разложением вектора  $v$  по базису  $e_1, e_2, e_3$ .



Так что, строго говоря, некорректно говорить, что  $x, y, z$  – координаты вектора, ведь координаты есть у точек, а у векторов – разложение по базису. Разницу между точками и векторами мы обсудим подробнее позже.

## 5 Скалярное произведение

**Опр.** Скалярным произведением (scalar product или dot product) двух векторов  $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$  и  $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$  называется число, заданное формулой

$$(v_1, v_2) \equiv \text{dot}(v_1, v_2) := x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Скалярное произведение обладает следующими свойствами

1.  $(v_1, v_2) = (v_2, v_1)$
2.  $(v_1 + v_2, v_3) = (v_1, v_3) + (v_2, v_3)$
3.  $(v, v) = x^2 + y^2 + z^2 \geq 0$

Заметим, что

$$(v, e_1) = x \cdot 1 + y \cdot 0 + z \cdot 0 = x$$

$$(v, e_2) = y$$

$$(v, e_3) = z$$

То есть скалярное произведение вектора  $v$  с базисным вектором  $e_i$  дает проекцию  $v$  на соответствующее вектору  $e_i$  направление. Более подробно мы поговорим о геометрических свойствах скалярного произведения немного дальше.

Об истории термина "скалярное произведение" поговорим – внезапно – в части о кватернионах.

## 6 Длина вектора



**Опр.** Длиной вектора  $v = (x, y, z)$  называется число, равное квадратному корню из скалярного квадрата вектора  $v$ :

$$|v| = \sqrt{(v, v)} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Геометрически это определение обосновано теоремой Пифагора.

**Вопрос.** Что геометрически представляет из себя множество решений уравнения

$$|v| = 1?$$

Указание. Напишите это уравнение в координатном виде (по определению  $|v|$ ).

### 7 Формула через косинус

Из школы известна формула для скалярного произведения в следующем виде

$$(v_1, v_2) = |v_1||v_2| \cos \varphi,$$

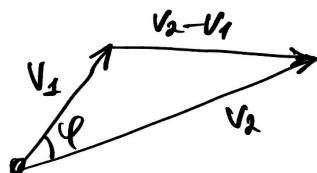
где  $\varphi$  – угол между векторами  $v_1$  и  $v_2$ .

Но как же тогда с определением через координаты? Они совпадают? Ведь совершенно неочевидно равенство

$$|v_1||v_2| \cos \varphi = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Доказательство этого факта следует из теоремы косинусов, а именно

$$|v_2 - v_1|^2 = |v_1|^2 + |v_2|^2 - 2|v_1||v_2| \cos \varphi.$$



При этом, с другой стороны,

$$|v_2 - v_1|^2 = (v_2 - v_1, v_2 - v_1) = |v_2|^2 - 2v_1v_2 + |v_1|^2.$$

Приравнивая правые части полученных равенств, получаем

$$(v_1, v_2) = |v_1||v_2| \cos \varphi.$$

**Н.В.** Здесь можно наблюдать смешение алгебраических определений и геометрических теорем. Это может у дотошного читателя вызвать тревожный синдром. Действительно, если следовать чисто алгебраическому подходу, мы определили лишь понятие вектора и скалярное произведение на векторах, а понятие угла просто не было неопределено. В этом месте курса линейной алгебры делается ход простой, но малосодержательный для нас: говорится, что косинус угла между двумя векторами есть по определению

$$\cos \varphi = \frac{(v_1, v_2)}{|v_1||v_2|}.$$

*А, соответственно, сам угол есть*

$$\varphi = \arccos \frac{(v_1, v_2)}{|v_1||v_2|}.$$

**Вопрос.** Что геометрически означает, что  $(v, w) = 0$ ?

**Вопрос.** Как геометрически выглядит множество решений уравнения  $(v, x) = 0$ ?

**Упр.** Для вектора  $(1, 2, 3)$  найти какой-нибудь ортогональный.

**Вопрос.** Что говорит об угле между векторами знак скалярного произведения?

## 8 Нормализация

**Опр.** Если вектор  $v \in \mathbb{R}^3$  имеет длину, равную единице, т.е.  $|v| = 1$ , то он называется нормированным.

Таким образом, если дан вектор  $v$ , такой что  $|v| = l$ , то чтобы его нормировать, нужно умножить его на  $1/l$ . И тогда вектор

$$w = \frac{v}{l}$$

будет нормированным:

$$|w| = \frac{l}{l} = 1.$$

Говоря на пальцах, смысл нормализации в том, чтобы привести разные объекты к единому стандарту. В случае с векторами, под стандартом понимается длина. Иногда рассматривать векторы с длиной 1 оказывается удобно.

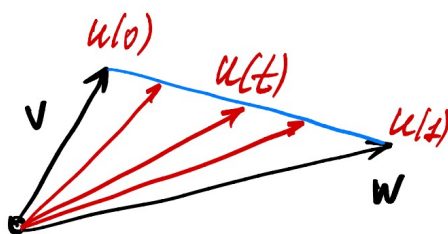
**Упр.** Нормализовать вектор  $(1, 2, 3)$ .

## 9 Линейная интерполяция

Рассмотрим два вектора  $v, w \in \mathbb{R}^3$ . Задача заключается в том, чтобы задать переход от  $v$  к  $w$  по прямой линии.

Возьмем вектор, который имеет направление от конца  $v$  к концу  $w$ . Этим вектором является вектор  $w - v$ . Его длина это длина между  $v$  и  $w$ . Поэтому можем задать вектор  $u(t)$ , зависящий от параметра  $t \in [0, 1]$  следующим образом:

$$u(t) = v + t(w - v).$$



Здесь с ростом  $t$  происходит движение по отрезку между концами  $v$  и  $w$ .

Эта формула может быть переписана иначе:

$$u(t) = (1 - t)v + tw.$$

## 10 Векторное произведение

Если скалярное произведение векторов есть число, то логично предположить, что можно как-то определить и такое произведение, которое дало бы в результате вектор.

Вообще, под произведением понимается операция, которая обладает некоторыми характерными свойствами. В частности, произведение чисел  $a, b \in \mathbb{R}$  обладает свойствами

- $ab = ba$  (коммутативность)
- $a(bc) = (ab)c$  (ассоциативность)
- $a(b + c) = ab + ac$  (дистрибутивность)

**Упр.** Скалярное произведение обладает всеми тремя этими свойствами.

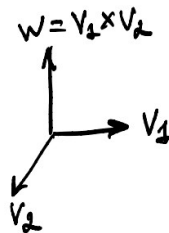
Но если мы хотим получить в результате вектор, выполнение этих свойств оказывается проблемой. Приходится чем-то жертвовать. Оказывается, что можно определить операцию  $\times$ , которая почти удовлетворяет всем этим свойствам, за исключением одного момента: операция эта не коммутативна, а антикоммутативна, т.е.

$$v \times w = -w \times v.$$

*TODO:* поискать теорему о том, что нельзя получить коммутативную операцию.

Такая операция называется векторным произведением (vector product или cross product) и обладает следующими важными свойствами:

- $v \times w \perp v, w$
- $|v \times w| = |v||w| \sin \varphi$  – площадь параллелограмма, построенного на векторах  $v, w$



**Вопрос.** Чему равняется  $e_1 \times e_2$ ,  $e_1 \times e_3$ ,  $e_2 \times e_3$ ?

**Вопрос.** Чему равняется  $e_1 \times e_1$ ,  $e_2 \times e_2$ ,  $e_3 \times e_3$ ?

**Вопрос.** Что геометрически из себя представляет множество решений уравнения  $v \times x = 0$ ?

Мы не дали определения векторного произведения в виде формулы на координаты, однако для ответы на эти вопросы этого не требуется. Далее, в разделе о кватернионах, мы естественным образом получим явную формулу.

## Матрицы

?

### Откуда взялись кватернионы, и вообще?

*Минус на минус – всегда только  
плюс*

*Отчего так бывает, сказать не  
берусь.*

*— У.Г. Оден*

## Список литературы

- [1] Gibbs J.W. *Elements of Vector Analysis: Arranged for the use of Students in Physics*. 1881-4.
- [2] Crowe M.J. *A History of Vector Analysis: The Evolution of the Idea of a Vectorial System*. Notre Dame: University of Notre Dame Press, 1967.
- [3] Regiomontanus. *De triangulis omnimodis*. 1464.
- [4] Юшкевич А.П. *История математики с древнейших времен до начала XIX столетия, в трех томах, том 1*. Наука, 1970.
- [5] Ньютон И. *Математические работы*. Объединенное научно-техническое издательство НКТИ СССР, главная редакция технико-теоретической литературы (1937), 1637.
- [6] Птолемей К. *Руководство по географии*. Государственное издательство географической литературы, Москва, 1953.
- [7] Эйлер Л. *Введение в анализ бесконечных, Том 1,2*. Государственное издательство физико-математической литературы, Москва (1961), 1748.
- [8] Дирихле П.Г. *Лекции по теории чисел*. Государственное издательство географической литературы, Москва, 1953.
- [9] Декарт Р. *Рассуждение о методе*. Академия наук СССР (1953), 1637.
- [10] Декарт Р. и Ферма П. *"Геометрия" с приложением избранных работ П. Ферма и переписки Декарта*. Государственное объединенное научно-техническое издательство НКТП СССР, редакция технико-теоретической литературы (1938), 1637.