Федеральное государственное бюджетное
образовательное
учреждение высшего образования
«Московский государственный университет
имени М.В.Ломоносова»

Механико-математический факультет

Кафедра теории функций и функционального анализа

Отчет

Выполнил студент 404 группы
Воротников Александр Валерьевич

Преподаватель:
Друца Алексей Валерьевич

Москва, 2019

Содержание работы

1 Постановка исходной задачи

Построить разностную схему со вторым порядком аппроксимации и найти ее решение при различных h, f:

$$-u'' + x^2 \cdot u^3 = f(x)$$

$$u(1) = 1, \quad \int_0^1 \sin(x)u(x)dx = 1$$

2 Разностная схема

Итак, введем основные обозначения.
$U = C^4[0,1], \quad F = C^6[0,1], \quad \Phi = \mathbb{R}^2$
$L : U \to F, \quad L(u) = -u'' + x^2 \cdot u^3$
$\ell : U \to \Phi, \quad \ell(u) = \{u(1), \int_0^1 \sin(x)u(x)dx\}$
Зададим нормы в пространствах U, F, Φ следующим образом :

$$\|u\|_U = \max_{x\in[0,1]} |u(x)|, \ \|f\|_F = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|, \ \|(\xi,\eta)\|_\Phi = \max\{|\xi|, |\eta|\}.$$

Рассмотрим равномерное разбиение отрезка $\{ih\}_{i=0}^N$, где $h = \frac{1}{N}$. Обозначим $\overline{\Omega}_h = \{ih\}_{i=0}^N$, $\Omega_h = \{ih\}_{i=0}^{N-1}$. Введем следующие пространства функций

$$U_h = \{\overline{\Omega}_h \to \mathbb{R}\}, \quad \|u_h\|_{U_h} = \max_{i=0,\dots,N} |u_h(ih)|$$

$$F_h = \{\Omega_h \to \mathbb{R}\}, \quad \|f_h\|_{F_h} = \max_{i=0,\dots,N-1} |f_h(ih)|$$

$$\Phi_h = \mathbb{R}^2, \quad \|(\xi,\eta)\|_{\Phi_h} = \max\{|\xi|, |\eta|\}.$$

Теперь определим "проекцию" пространств U, F, Φ на дискретные U_h, F_h, Φ_h:

$$[u_h](ih) = u(ih), \quad [f]_h(ih) = f(ih), \quad [\varphi]_h = \varphi$$

Найдем приближенное значение интеграла $\int\limits_0^1 (\sin(x)u(x))dx$ с помощью составного метода трапеции :

$$\int\limits_0^1 (\sin(x)u(x))dx \approx \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{N-1} (\sin(ih)u(ih) + \sin(ih+h)u(ih+h))$$

Введем

$$L_h(u_h)|_{x=ih} = -\frac{u_h(ih+h) - 2u_h(ih) + u_h(ih-h)}{h^2} + (ih)^2 \cdot u_h^3(ih)$$

$$l_h(u_h) = \left(u_h(1), \ \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{N-1} (\sin(ih)u(ih) + \sin(ih+h)u(ih+h))\right)\Bigg)$$

$$f_h = [f]_h, \ \varphi_h = [\varphi]_h$$

Рассмотрим задачу вида

$$\begin{cases} L_h(u_h) = f_h, \ x \in \Omega_h, \\ l_h(u_h) = \varphi_h \end{cases}$$

А именно

$$\begin{cases} -\frac{u_h(ih+h)-2u_h(ih)+u_h(ih-h)}{h^2} + (ih)^2 \cdot u_h^3(ih) = f_h(ih), \ x \in \Omega_h, \\ u_h(1) = 1, \\ \frac{h}{2}\sum\limits_{i=0}^{N-1} (\sin(ih)u(ih) + \sin(ih+h)u(ih+h)) = 1 \end{cases}$$

Покажем, что полученная задача (разностная схема) является аппроксимацией второго порядка исхожной задачи, т.е. $\exists\, h_0\, \forall u \in U\, \exists c : \forall\, h < h_0$ выполнено :

$$\|[Lu]_h - L_h[u]_h\|_{F_h} + \|[lu]_h - l_h[u]_h\|_{\Phi_h} + \|f_h - [f]_h\|_{F_h} + \|\varphi_h - [\varphi]_h\|_{\Phi_h} \leqslant ch^2$$

$$([Lu]_h - L_h[u]_h)(ih) = -u''(ih) + (ih)^2 u^3(ih) + \frac{u_h(ih+h) - 2u_h(ih) + u_h(ih-h)}{h^2} - (ih)^2 u_h^3(ih) =$$

$$= -u''(ih) + \frac{u_h(ih+h) - 2u_h(ih) + u_h(ih-h)}{h^2}$$

Запишем разложение Тейлора в точке ih:

$$u(ih \pm h) = u(ih) \pm hu'(ih) + \frac{h^2}{2}u''(ih) \pm \frac{h^3}{6}u'''(ih) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(\xi_i^{\pm})$$

Подставляем и получаем после сокращения:

$$([Lu]_h - L_h[u]_h)(ih) = \frac{h^2}{24}(u^{(IV)}(\xi_i^+) + u^{(IV)}(\xi_i^-))$$

Из непрерывности четвертых производных получаем, что $\|[Lu]_h - L_h[u]_h\| \leq C_1 h^2$

Осталось оценить приближение интеграла

$$\int_0^1 \sin(x)u(x)dx - \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{N-1}(\sin(ih)u(ih) + \sin(ih+h)u(ih+h)) =$$

$$= \int_0^1 g(x)dx - \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{N-1}(g(ih) + g(ih+h)) = (*)$$

$$\int_0^1 g(x)dx = \sum_{i=0}^{N-1}\int_{ih}^{ih+h} g(x)dx = \sum_{i=0}^{N-1}\int_{ih}^{ih+h}\left(g(ih) + (x-ih)g'(ih) + (x-ih)^2\frac{g''(ih)}{2} + O((x-ih)^3)\right)dx =$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1}\left(hg(ih) + g'(ih)\frac{h^2}{2} + g''(ih)\frac{h^3}{6}\right) + O(h^4)$$

Теперь легко получаем, что $(*) = O(h^3)$ при $h \to 0$.

Таким образом имеется аппроксимация 2-го порядка.

3 Решение дискретной задачи

Будем решать следующую задачу методом стрельбы

$$\begin{cases} -\frac{u_h(ih+h) - 2u_h(ih) + u_h(ih-h)}{h^2} + (ih)^2 \cdot u_h^3(ih) = f_h(ih),\ x \in \Omega_h, \\ u_h(1) = 1, \\ \frac{h}{2}\sum\limits_{i=0}^{N-1}(\sin(ih)u(ih) + \sin(ih+h)u(ih+h)) = 1 \end{cases}$$

А точнее, будем полагать значение в $u[1 - ih]$ некоторой константе и методом **shooting** пересчитаем все значения $u(ih), \quad i = 0, ..., N-2$. Затем вычисляется интеграл по формуле трапеций (метод **calculate_integral**) и методом деления отрезка пополам находится корень этой функции (метод **root**), вычисляющей интеграл.

4 Графики полученных функций

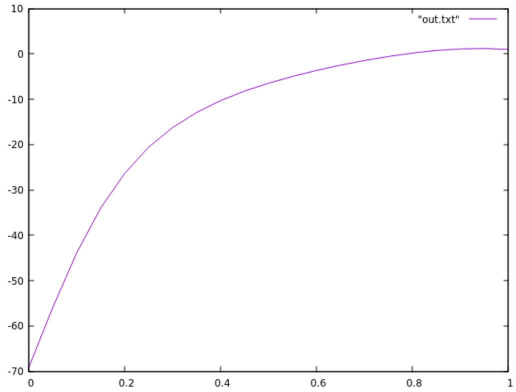

Рис. 1: $f(x) = 20e^{2x^2}, \quad N = 20$

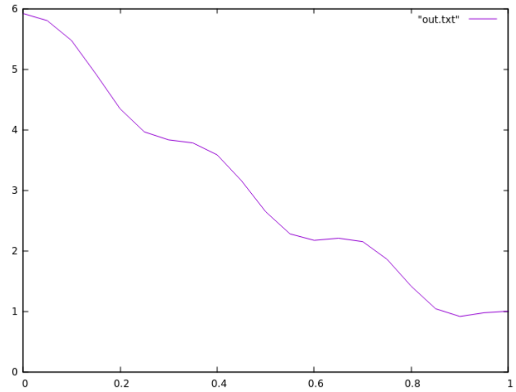

Рис. 2: $f(x) = 100 \sin 20x, \quad N = 20$

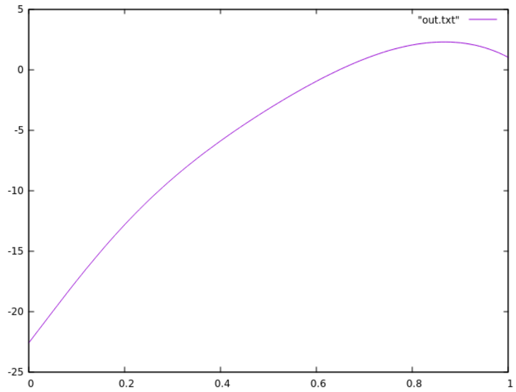

Рис. 3: $f(x) = 200x^3, \quad N = 100$

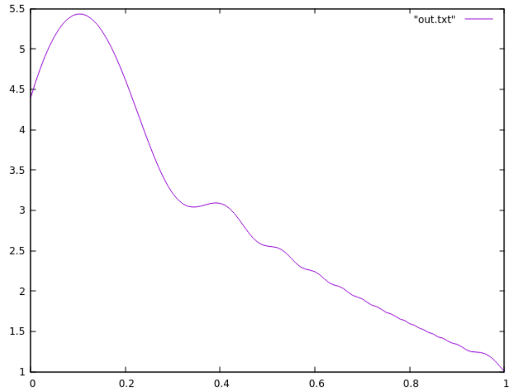

Рис. 4: $f(x) = 200\sin(e^{5x}), \quad N = 100$