Тестовое задание в Ритм

1 Постановка исходной задачи

$$\frac{d^5y}{dx^5} + 15\frac{d^4y}{dx^4} + 90\frac{d^3y}{dx^3} + 270\frac{d^3y}{dx^3} + 405\frac{d^y}{dx} + 243y = 0, \qquad x \in [0, 5]$$

$$y\Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{dy}{dx}\Big|_{x=0} = 3, \quad \frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=0} = -9, \quad \frac{d^3y}{dx^3}\Big|_{x=0} = -8, \quad \frac{d^4y}{dx^4}\Big|_{x=0} = 0$$

2 Решение

Сведем уравнение 5-го порядка к системе первого порядка:
сделаем замену

$$\begin{aligned} y_1 &= y \\ y_2 &= y' \\ y_3 &= y'' \\ y_4 &= y''' \\ y_5 &= y^{(4)} \end{aligned}$$

получим систему

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = y_4 \\ y_4' = y_5 \\ y_5' = -243y_1 - 405y_2 - 270y_3 - 90y_4 - 15y_5 \end{cases}$$

Если ввести обозначение $y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)^T$, то можно переписать эту систему в матричном виде

$$y' = f(y) \equiv My,$$

где M — матрица 5x5:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -243 & -405 & -270 & -90 & -15 \end{pmatrix}$$

Воспользуемся модифицированном методе Эйлера решения задачи Коши, основанном на формуле трапеций

$$\begin{cases} y^* = y_n + hf(y_n) = y_n + hMy_n \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(y_n) + f(y^*)) = y_n + \frac{h}{2}M(y_n + y^*) \end{cases}$$

Здесь h — это шаг по отрезку. Ошибка на отрезке в данном методе составляет $O(h^2)$, что лучше обычного метода Эйлера, который дает ошибку $O(h)$. Существуют методы Рунге-Кутта, которые могут дать более высокий порядок точности.

Таким образом, используя приведенный алгоритм, имея заданное начальное условие

$$y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -9 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

можно найти приближенное значение первых пяти производных на разбиении отрезка. Но нам нужна сама функция, поэтому мы в конце концов оставим только значения исходной функции.

Доказательство того, что эта функция действительно будет приближать решение, следует из формулы Тейлора.

3 График полученной функции

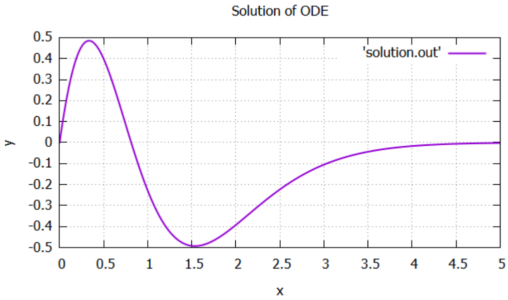

Рис. 1: $N = 1000$