Direct Method

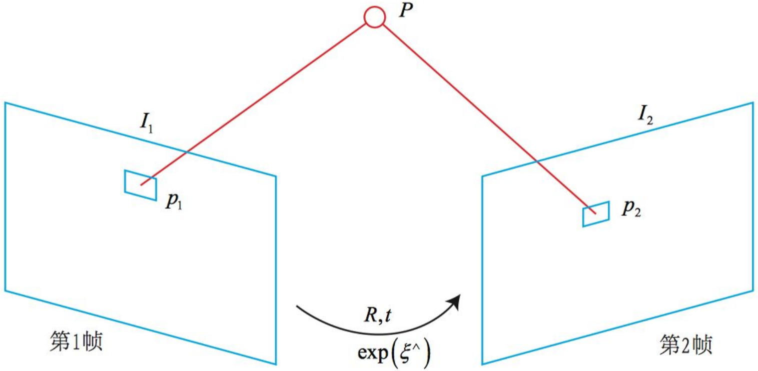
2019/03/10
Jungju Oh

Direct Method 원리

- 공간 지점 P의 월드 좌표는 [X, Y, Z], non-homogeneous 픽셀 좌표는 p1, p2
- 첫 번째 카메라에 대해 두 번째 카메라의 상대적인 포즈 변환 찾기
- 내부 파라메터 K는 동일

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix}_1 = \frac{1}{Z_1}\boldsymbol{K}\boldsymbol{P},$$

$$\boldsymbol{p}_2 = \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix}_2 = \frac{1}{Z_2}\boldsymbol{K}\left(\boldsymbol{R}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{t}\right) = \frac{1}{Z_2}\boldsymbol{K}\left(\exp\left(\boldsymbol{\xi}^{\wedge}\right)\boldsymbol{P}\right)_{1:3}.$$



- 어떤 p2가 p1과 같은 지점에 해당하는지 알 수 있는 방법이 없음 (특징점 매칭 X)
- 현재 포즈 추정치를 기반으로 p2의 위치를 찾음
- 카메라의 포즈를 최적화하여 p2와 p1을 유사하게 만듬

Direct Method 유도

- 최적화 문제 → 측광 오차 (Photometric error) 를 최소화

$$e = \boldsymbol{I}_1(\boldsymbol{p}_1) - \boldsymbol{I}_2(\boldsymbol{p}_2). \tag{8.10}$$

- 최적화 목표는 오류의 L2 norm

$$\min_{\boldsymbol{\xi}} J(\boldsymbol{\xi}) = \|e\|^2. \tag{8.11}$$

- 가정: 그레이 스케일은 불변
- 다수의 포인트에 대한 전체 카메라 포즈 추정 문제는 다음과 같음 (카메라 포즈 ξ 최적화)

$$\min_{\boldsymbol{\xi}} J(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{N} e_i^T e_i, \quad e_i = \boldsymbol{I}_1(\boldsymbol{p}_{1,i}) - \boldsymbol{I}_2(\boldsymbol{p}_{2,i}). \tag{8.12}$$

- 카메라 포즈에 따라 오차 e가 어떻게 변할까? → 미분

Direct Method 유도

- Lie 대수 에 대한 섭동 모델 사용
  - exp (ξ)에 작은 섭동 exp (δξ)를 곱하기

$$e = I_1(p_1) - I_2(p_2).$$

$$\Downarrow$$

지수함수의 Taylor 급수

$$\begin{aligned} e(\xi \oplus \delta\xi) &= I_1\left(\frac{1}{Z_1}KP\right) - I_2\left(\frac{1}{Z_2}K\exp(\delta\xi^\wedge)\exp(\xi^\wedge)P\right) \\ &\approx I_1\left(\frac{1}{Z_1}KP\right) - I_2\left(\frac{1}{Z_2}K\boxed{(1+\delta\xi^\wedge)}\exp(\xi^\wedge)P\right) \\ &= I_1\left(\frac{1}{Z_1}KP\right) - I_2\left(\frac{1}{Z_2}K\exp(\xi^\wedge)P + \frac{1}{Z_2}K\delta\xi^\wedge\exp(\xi^\wedge)P\right). \end{aligned}$$

$$q = \delta\xi^\wedge \exp(\xi^\wedge)P,$$

$$u = \frac{1}{Z_2}Kq.$$

- q: 섭동 후의 제 2 카메라 좌표계에서의 P의 좌표
- u: 픽셀 좌표

Direct Method 유도

$$e(\boldsymbol{\xi} \oplus \delta\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{I}_1\left(\frac{1}{Z_1}\boldsymbol{K}\boldsymbol{P}\right) - \boldsymbol{I}_2\left(\frac{1}{Z_2}\boldsymbol{K}\exp(\delta\boldsymbol{\xi}^\wedge)\exp(\boldsymbol{\xi}^\wedge)\boldsymbol{P}\right)$$
$$\approx \boldsymbol{I}_1\left(\frac{1}{Z_1}\boldsymbol{K}\boldsymbol{P}\right) - \boldsymbol{I}_2\left(\frac{1}{Z_2}\boldsymbol{K}(1+\delta\boldsymbol{\xi}^\wedge)\exp(\boldsymbol{\xi}^\wedge)\boldsymbol{P}\right)$$
$$= \boldsymbol{I}_1\left(\frac{1}{Z_1}\boldsymbol{K}\boldsymbol{P}\right) - \boldsymbol{I}_2\left(\frac{1}{Z_2}\boldsymbol{K}\exp(\boldsymbol{\xi}^\wedge)\boldsymbol{P} + \frac{1}{Z_2}\boldsymbol{K}\delta\boldsymbol{\xi}^\wedge\exp(\boldsymbol{\xi}^\wedge)\boldsymbol{P}\right).$$

$$\Downarrow$$

1차 taylor expansion

$$e(\boldsymbol{\xi} \oplus \delta\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{I}_1\left(\frac{1}{Z_1}\boldsymbol{K}\boldsymbol{P}\right) - \boldsymbol{I}_2\left(\frac{1}{Z_2}\boldsymbol{K}\exp(\boldsymbol{\xi}^\wedge)\boldsymbol{P} + \boldsymbol{u}\right)$$
$$\approx \boldsymbol{I}_1\left(\frac{1}{Z_1}\boldsymbol{K}\boldsymbol{P}\right) - \boldsymbol{I}_2\left(\frac{1}{Z_2}\boldsymbol{K}\exp(\boldsymbol{\xi}^\wedge)\boldsymbol{P}\right) - \boxed{\frac{\partial \boldsymbol{I}_2}{\partial \boldsymbol{u}}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{q}}\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial \delta\boldsymbol{\xi}}\delta\boldsymbol{\xi}}$$
$$= e(\boldsymbol{\xi}) - \frac{\partial \boldsymbol{I}_2}{\partial \boldsymbol{u}}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{q}}\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial \delta\boldsymbol{\xi}}\delta\boldsymbol{\xi}.$$

$\partial \boldsymbol{I}_2/\partial \boldsymbol{u}$: u에서의 픽셀 기울기

$\partial \boldsymbol{u}/\partial \boldsymbol{q}$ 카메라 좌표계의 3D 점 투영 방정식의 미분

$$\boldsymbol{q} = [X, Y, Z]^T$$

$\partial \boldsymbol{q}/\partial \delta\boldsymbol{\xi}$ Lie algebra장에서 소개 된 점 변환의 미분

$$\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial \delta\boldsymbol{\xi}} = [\boldsymbol{I}, -\boldsymbol{q}^\wedge]$$

Direct Method 유도

$$
\begin{aligned}
e(\boldsymbol{\xi} \oplus \delta\boldsymbol{\xi}) &= \boldsymbol{I}_1\left(\frac{1}{Z_1}\boldsymbol{KP}\right) - \boldsymbol{I}_2\left(\frac{1}{Z_2}\boldsymbol{K}\exp\left(\delta\boldsymbol{\xi}^\wedge\right)\exp\left(\boldsymbol{\xi}^\wedge\right)\boldsymbol{P}\right) \\
&\approx \boldsymbol{I}_1\left(\frac{1}{Z_1}\boldsymbol{KP}\right) - \boldsymbol{I}_2\left(\frac{1}{Z_2}\boldsymbol{K}\left(1+\delta\boldsymbol{\xi}^\wedge\right)\exp\left(\boldsymbol{\xi}^\wedge\right)\boldsymbol{P}\right) \\
&= \boldsymbol{I}_1\left(\frac{1}{Z_1}\boldsymbol{KP}\right) - \boldsymbol{I}_2\left(\frac{1}{Z_2}\boldsymbol{K}\exp\left(\boldsymbol{\xi}^\wedge\right)\boldsymbol{P} + \frac{1}{Z_2}\boldsymbol{K}\delta\boldsymbol{\xi}^\wedge\exp\left(\boldsymbol{\xi}^\wedge\right)\boldsymbol{P}\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial(\boldsymbol{Tp})}{\partial\delta\boldsymbol{\xi}} &= \lim_{\delta\boldsymbol{\xi}\to\boldsymbol{0}} \frac{\exp\left(\delta\boldsymbol{\xi}^\wedge\right)\exp\left(\boldsymbol{\xi}^\wedge\right)\boldsymbol{p} - \exp\left(\boldsymbol{\xi}^\wedge\right)\boldsymbol{p}}{\delta\boldsymbol{\xi}} \\
&= \lim_{\delta\boldsymbol{\xi}\to\boldsymbol{0}} \frac{\left(\boldsymbol{I}+\delta\boldsymbol{\xi}^\wedge\right)\exp\left(\boldsymbol{\xi}^\wedge\right)\boldsymbol{p} - \exp\left(\boldsymbol{\xi}^\wedge\right)\boldsymbol{p}}{\delta\boldsymbol{\xi}} \\
&= \lim_{\delta\boldsymbol{\xi}\to\boldsymbol{0}} \frac{\delta\boldsymbol{\xi}^\wedge\exp\left(\boldsymbol{\xi}^\wedge\right)\boldsymbol{p}}{\delta\boldsymbol{\xi}} \\
&= \lim_{\delta\boldsymbol{\xi}\to\boldsymbol{0}} \frac{\begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{\phi}^\wedge & \delta\boldsymbol{\rho} \\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{Rp}+\boldsymbol{t} \\ 1 \end{bmatrix}}{\delta\boldsymbol{\xi}} \\
&= \lim_{\delta\boldsymbol{\xi}\to\boldsymbol{0}} \frac{\begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{\phi}^\wedge\left(\boldsymbol{Rp}+\boldsymbol{t}\right)+\delta\boldsymbol{\rho} \\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}}{\left[\delta\boldsymbol{\rho}, \delta\boldsymbol{\phi}\right]^{\mathrm{T}}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & -\left(\boldsymbol{Rp}+\boldsymbol{t}\right)^\wedge \\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \triangleq (\boldsymbol{Tp})^{\odot}.
\end{aligned}
$$

taylor expansion

$\partial \boldsymbol{I}_2 / \partial \boldsymbol{u}$: u에서의 픽셀 기울기

$\partial \boldsymbol{u} / \partial \boldsymbol{q}$ 카메라 좌표계의 3D 점 투영 방정식의 미분

$$\boldsymbol{q} = [X, Y, Z]^T$$

$\partial \boldsymbol{q} / \partial \delta\boldsymbol{\xi}$ Lie algebra장에서 소개 된 점 변환의 미분

$$\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial \delta\boldsymbol{\xi}} = \left[\boldsymbol{I}, -\boldsymbol{q}^\wedge\right]$$

Direct Method 유도

$$
\begin{aligned}
e(\boldsymbol{\xi} \oplus \delta\boldsymbol{\xi}) &= \boldsymbol{I}_1\left(\frac{1}{Z_1}\boldsymbol{KP}\right) - \boldsymbol{I}_2\left(\frac{1}{Z_2}\boldsymbol{K}\exp\left(\boldsymbol{\xi}^\wedge\right)\boldsymbol{P} + \boldsymbol{u}\right) \\
&\approx \boldsymbol{I}_1\left(\frac{1}{Z_1}\boldsymbol{KP}\right) - \boldsymbol{I}_2\left(\frac{1}{Z_2}\boldsymbol{K}\exp\left(\boldsymbol{\xi}^\wedge\right)\boldsymbol{P}\right) - \frac{\partial \boldsymbol{I}_2}{\partial \boldsymbol{u}}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{q}}\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial \delta\boldsymbol{\xi}}\delta\boldsymbol{\xi} \\
&= e(\boldsymbol{\xi}) - \frac{\partial \boldsymbol{I}_2}{\partial \boldsymbol{u}}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{q}}\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial \delta\boldsymbol{\xi}}\delta\boldsymbol{\xi}.
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \delta\boldsymbol{\xi}} = \begin{bmatrix} \frac{f_x}{Z} & 0 & -\frac{f_x X}{Z^2} & -\frac{f_x XY}{Z^2} & f_x + \frac{f_x X^2}{Z^2} & -\frac{f_x Y}{Z} \\ 0 & \frac{f_y}{Z} & -\frac{f_y Y}{Z^2} & -f_y - \frac{f_y Y^2}{Z^2} & \frac{f_y XY}{Z^2} & \frac{f_y X}{Z} \end{bmatrix}. \tag{8.15}
$$

$$
\boldsymbol{J} = -\frac{\partial \boldsymbol{I}_2}{\partial \boldsymbol{u}}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \delta\boldsymbol{\xi}}. \tag{8.16}
$$

- Lie 대수에 대한 오차의 Jacobian 행렬 유도
- N 점의 문제에 대해 위의 방법을 사용하여 최적화 문제의 Jacobian을 계산
- G-N (Gauss-Newton) 또는 L-M(Levenberg-Marquardt)을 사용

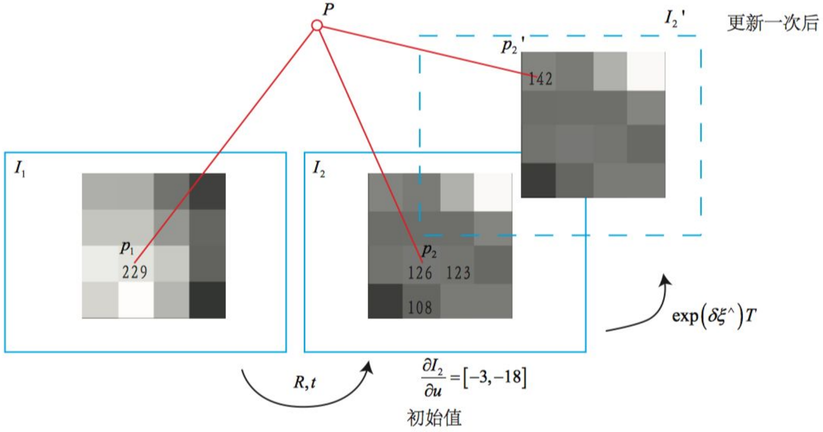
Direct Method 토론

- p는 알려진 위치의 공간 점, 단안 카메라는 더 어려움 (p의 깊이에 의해 야기되는 불확실성)
- p의 소스를 기반으로 분류
- Sparse 특징점
  - 수백~수천개 특정점. 디스크립터를 계산할 필요가 없으며 수백 픽셀 만 사용하므로 가장 빠르지만 sparse한 재구성 만 계산
- 부분 픽셀
  - 식 (8.16)에서 픽셀 그래디언트가 0이면 전체 자코비안이 0이며 모션 증가분 계산에 기여하지 않음. 따라서 그래디언트가 있는 픽셀만 사용하고 그래디언트가 명확하지 않은 부분은 무시. Semi-dense direct method
- 모든 픽셀
  - Dense direct method. 대부분 기존 CPU에서 실시간으로 계산할 수 없으며 GPU 필요. 그래디언트가 불분명한 점은 모션 추정에 크게 기여하지 않으며 재구성 중에 위치를 예측하기가 어려움

Direct Method 예제

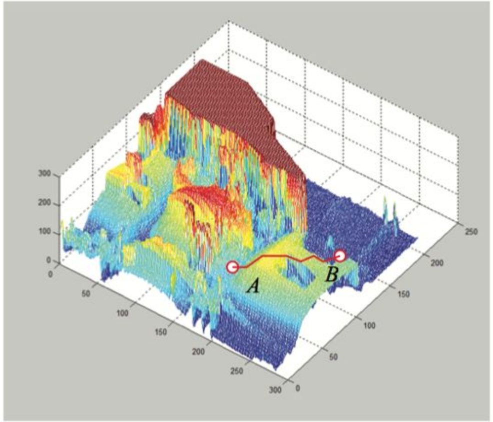
- Direct method는 카메라 포즈를 해결하기 위해 최적화에 전적으로 의존

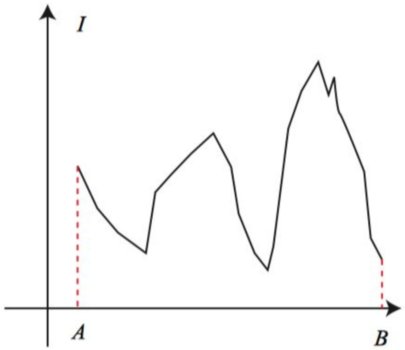
1. 회색 값이 229 인 픽셀을 측정, 공간 점 p의 위치 추론
2. 다음 타임스탬프의 새로운 이미지를 얻고 이 위치에서의 카메라 포즈를 추정해야 함 → 초기 값의 반복 최적화
3. 이 초기 값에서 공간 점 p 투영 후의 픽셀의 그레이 스케일 값은 126, 오차는 229 - 126 = 103
4. 오류를 줄이기 위해 카메라의 포즈를 미세 조정하여 픽셀을 더 밝게 만들어야 함
5. 카메라 포즈의 미세 조정 값을 알기 위해서는 주위 픽셀 그라디언트가 필요
6. 픽셀 주변에서 그라디언트는 [-3, -18]
7. 밝기를 향상 시키려면 p의 이미지가 왼쪽 상단으로 이동하도록 카메라를 미세 조정하는 최적화 알고리즘 사용
8. 많은 픽셀의 값을 참조한 후, 최적화 알고리즘은 우리가 제안한 방향에서 멀지 않은 장소를 선택하고 업데이트 수량 $\exp(\xi^\wedge)$산



Direct Method 예제

- Direct method의 그래디언트는 이미지 그래디언트에 의해 직접 결정
- 이미지 그래디언트를 따라 이동할 때 그레이 스케일 오류가 계속 감소해야 함
- But 이미지는 일반적으로 아래 그림과 같이 매우 강한 Non-convex 함수
- Direct method은 카메라가 거의 움직이지 않고 이미지의 그래디언트가 강한 Non-Convexity를 갖지 않을 때





Direct Method 요약

- 장점
  - Feature point, descriptor 계산 시간 생략
  - 특징점 매칭이 힘들 경우 사용 가능 (픽셀 그래디언트만 필요)
  - semi-dense 또는 desne 매핑 가능
- 단점
  - 그래디언트에 전적으로 의존하는 목적 함수
    - But, 이미지는 강한 non-convex 함수
    - 최적화 알고리즘이 쉽게 local minima 에 빠짐, 모션이 작을때만 성공
  - 그레이 스케일 값이 불변한다는 강력한 가정
    - 카메라의 자동 노출 보정
    - 조명 변경
    - 측광 모델을 사용한 카메라 보정 (노출시간 변경시)