分类号____________________ 论文选题类型_______________

U D C____________________ 编号_________________________

華中師範大學

本科毕业论文（设计）

浅谈我们的我们的大学的大大
大学我们的大学的大大大大

学　　院	数学与统计学学院
专　　业	数学与应用数学(师范)
年　　级	**2017级**
学生姓名	作者
学　　号	**2015123456**
指导教师	张三丰教授　三丰教授

二〇二二 年 四 月

华中师范大学

学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文是本人在导师指导下独立进行研究工作所取得的研究成果。除了文中特别加以标注引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写的成果作品。本人完全意识到本声明的法律后果由本人承担。

学位论文作者签名：　　　　　　　　　　日期：　　　年　　月　　日

学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解学校有关保障、使用学位论文的规定，同意学校保留并向有关学位论文管理部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅。本人授权省级优秀学士学位论文评选机构将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

本学位论文属于

1、保密　□，在______年解密后适用本授权书。

2、不保密　□。

（请在以上相应方框内打“√”）

学位论文作者签名：　　　　　　　　　　日期：　　　年　　月　　日

导师签名：　　　　　　　　　　　　　　日期：　　　年　　月　　日

目　录

内容摘要: 摘要的字数控制在400个汉字左右. 尽量不要出现公式参考文献. 介绍本文的主要工作以及创新点.

关键词: 关键词1　　关键词2　　关键词3

Title: Discuss

Abstract: For.

Keywords: keywords1　　keywords2　　keywords3

1 相关概念与理论介绍

1.1 圆锥曲线准线及焦点

定义 1.1 (圆锥曲线统一定义) 坐标轴上一个动点P到定点 (焦点F) 的距离与到定直线 (准线ℓ) 的距离的比是定值时, 动点P的点的轨迹叫做**圆锥曲线**.

当$e < 1$圆锥曲线为椭圆; 当$e > 1$时圆锥曲线为双曲线; 当$e = 1$时圆锥曲线为抛物线. 定义1.1中的定点F为圆锥曲线的焦点, 直线ℓ为圆锥曲线的准线. 我们有

- 圆上动P点坐标(x_0, y_0), $0 < \frac{c}{a} < 1$. 当动点P 到定点F (焦点)和到定直线ℓ的距离之比为离心率时, 该直线ℓ便是椭圆的准线, 其方程为$x = \pm\frac{a^2}{c}$.
- 双曲线上P点坐标(x_0, y_0), $\frac{c}{a} > 1$. 当动P 点到定点F 和到定直线ℓ的距离之比为离心率时, 该直线ℓ便是双曲线的准线, 其方程为$x = \pm\frac{a^2}{c}$.
- 抛物线上动P点坐标为(x_0, y_0), $\frac{c}{a} = 1$. 当动点P到焦点F和到定直线ℓ的距离之比恒等于离心率1时, 该直线ℓ是抛物线的准线, 其方程为$x = -\frac{p}{2}$. 抛物线方程为$x^2 = 2py(p > 0)$.

圆锥曲线上任意一点与焦点之间所连的长度叫做焦半径; 过圆锥曲线焦点的直线被曲线截得的线段叫做焦点弦.

1.2 圆锥曲线切线

如图1, 设Q曲线上不同于P的一点, 这时, 直线PQ成为曲线C的割线. 随着点Q沿曲线C向点P运动, 割纸PQ在P点附近越来越逼近曲线C. 当点Q无限逼近点P时, 直线PQ最终就成为在点P处最逼近且曲线的直线ℓ, 这条直线ℓ就成为曲线在点P点的切线.

图 1: 图形1的说明

定理 1.2 (椭圆切线方程) 如果$P(x_0, y_0)$是已知椭圆$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$上任意一点, 那么过$P$点并与该椭圆相切的直线$\ell$的方程是

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1.$$

证明: 设$Q(x_1, y_1)$为直线$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$上的任意一点, 则由基本不等式有

$$\left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}\right) + \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}\right) \geq 2\left(\frac{x_0x_1}{a^2} + \frac{y_0y_1}{b^2}\right) = 2,$$

即

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} \geq 1,$$

当且仅当$x_1 = x_0, y_1 = y_0$时等号成立, 即直线与椭圆只有一个交点, 故直线ℓ是椭圆的切线. $\square$

推论 1.3 (双曲线和抛物线的切线方程) (1) 如果$P(x_0, y_0)$ 是已知双曲线$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > 0, b > 0)$上任意一点, 那么过P点并与该戏曲线相切的直线ℓ的方程是

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1.$$

(2) 如果$P(x_0, y_0)$是已知抛物线$y^2 = 2px(p > 0)$上任意一点, 那么过P点并与该执物线相切的直线ℓ的方程是

$$y_0 y = p(x_0 + x).$$

1.3 圆锥曲线切点弦

定义 1.4 (切点弦) 过圆锥曲线外一点向圆锥曲线引两条切线 *(*如果存在*)* 那么经过两个切点的圆锥曲线的弦叫做**切点弦**.

如图2, AB为椭圆的切点弦.

图 2: 图形的说明

- 由椭圆$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$ 外一点$P(x_1, y_1)$确定的切点弦方程
$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1;$$
- 由双曲线$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1(a > 0, b > 0)$ 外一点$P(x_1, y_1)$确定的切点弦方程
$$\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1;$$
- 由抛物线$y^2 = 2px$外一点$P(x_1, y_1)$确定的切点弦方程
$$y_1 y = p(x_1 + x).$$

1.4 圆锥曲线中点弦

定义 1.5 对于给定点P和给定的圆锥曲线C, 若C的某条弦AB 过P 点且被P点平分, 则称该弦AB为圆锥曲线C上过P点的**中点弦**. 其中连接圆锥曲线C上不同两点A, B的线段AB称为圆锥曲线C 的弦.

- 设$M(x_0, y_0)$是椭圆的弦$\widehat{AB}$的中点, 则椭圆$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$ 的中点弦方程为$\frac{x_0(x-x_0)}{a^2} + \frac{y_0(y-y_0)}{b^2} = 0$, 化为点斜式是
$$y - y_0 = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}(x - x_0)(y_0 \neq 0).$$

图 3: 图形说明

- 设$M(x_0,y_0)$是双曲线的弦$\widehat{AB}$的中点, 则双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的中点弦方程为$\frac{x_0(x-x_0)}{a^2}-\frac{y_0(y-y_0)}{b^2}=0$, 化为点斜式为
$$y-y_0=\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x-x_0)(y_0\neq 0);$$
- 设$M(x_0,y_0)$是抛物线的弦$\widehat{AB}$的中点, 则抛物线$y^2=2px$的中点弦方程为$y_0(y-y_0)=p(x-x_0)$, 化为点斜式为
$$y-y_0=\frac{p}{y_0}(x-x_0)(y_0\neq 0).$$

2 有关焦点弦的一般性结论

2.1 结论1

性质 2.1 已知O为坐标原点, 椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$, F是椭圆的焦点. 准线与x轴相交于M, 过点F的直线ℓ与C相交于A,B, 则$\angle OMA=\angle OMB$.

证明: (1) 当直线ℓ与x轴重合时, $\angle OMA=\angle OMB=0°$;

(2) 当直线ℓ与x轴垂直时, OM为AB的垂直平分线, 故$\angle OMA=\angle OMB$;

(3) 当直线ℓ与x轴既不重合又不垂直时, 点M的坐标为$(\frac{a^2}{c},0)$, 直线ℓ的方程为$y=k(x-c)$. A,B两点的坐标为$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$, 则$y_1=k(x_1-c),y_2=k(x_2-c)$. 所以
$$k_{MA}+k_{MB}=\frac{y_1}{x_1-\frac{a^2}{c}}+\frac{y_2}{x_2-\frac{a^2}{c}}=\frac{2k\alpha_1x_2-k\left(c+\frac{a^2}{c}\right)(x_1+x_2)+2ka^2}{\left(x_1-\frac{a^2}{c}\right)\left(x_2-\frac{a^2}{c}\right)}$$
联立方程
$$\begin{cases}y=k(x-c);\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\end{cases}$$
得
$$(a^2k^2+b^2)x^2-2a^2k^2cx+a^2k^2c^2-a^2b^2=0.$$
故
$$\begin{aligned}x_1+x_2&=\frac{2a^2k^2c}{a^2k^2+b^2},\\ x_1x_2&=\frac{a^2k^2c^2-a^2b^2}{a^2k^2+b^2}\\ &=\frac{2kx_1x_2-k\left(c+\frac{a^2}{c}\right)(x_1+x_2)+2ka^2}{\left(x_1-\frac{a^2}{c}\right)\left(x_2-\frac{a^2}{c}\right)}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2k\frac{2a^2k^2c}{a^2k^2+b^2} - k\left(c+\frac{a^2}{c}\right)\frac{2a^2k^2c}{a^2k^2+b^2} + 2ka^2}{\left(x_1-\frac{a^2}{c}\right)\left(x_2-\frac{a^2}{c}\right)} \\
&= \frac{k^2-2a^2}{x_{12}^2} = \frac{2a^2c^2c^2c^2c^2}{c^2}
\end{aligned}
$$

所以$k_{MA}+k_{MB}=0$. 这样得到$\angle OMA=\angle OMB$, 故性质得证. □

性质2.1是有关椭圆焦点弦的结论, 那么对双曲线和抛物线是否有同样的结论? 结论是否具有一般性?

性质 2.2 已知O为坐标原点, F是双曲线C: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $a>0, b>0$, 的焦点, 准线与x 轴相交于M. 过点F的直线ℓ与C相交于A, B. 则$\angle OMA=\angle OMB$.

类似于性质2.1的证明, 我们可以证得性质2.2.

性质 2.3 已知O为坐标原点, F是抛物线C: $y^2=2px$的焦点. 准线与x 轴相交于M. 过点F的直线ℓ与C相交于A, B, 则$\angle OMA=\angle OMB$.

证明: 设A, B两点的坐标为$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$. 由已知点M的坐标为$(-\frac{p}{2}, 0)$, 知抛物线准线方程为$x=-\frac{p}{2}$. 联立方程

$$
\begin{cases}
x = my+\frac{p}{2}; \\
y^2 = 2px
\end{cases}
$$

得

$$y^2-2pmy-p^2=0.$$

由韦达定理得

$$y_1+y_2=2pm, \quad y_1y_2=-p^2.$$

故

$$
\begin{aligned}
k_{MA}+k_{MB} &= \frac{y_1}{x_1+\frac{p}{2}+\frac{y_2}{x_2+\frac{p}{2}}} = \frac{(x_2+\frac{p}{2})y_1+(x_1+\frac{p}{2})y_2}{(x_1+\frac{p}{2})(x_2+\frac{p}{2})} \\
&= \frac{(my_2+p)y_1+(my_1+p)y_2}{(x_1+\frac{p}{2})(x_2+\frac{p}{2})} \\
&= \frac{2my_1y_2+p(y_1+y_2)}{(x_1+\frac{p}{2})(x_2+\frac{p}{2})} = 0.
\end{aligned}
$$

即

$$k_{MA}+k_{MB}=0.$$

所以$\angle OMA=\angle OMB$. □

由上述性质2.1-2.3, 我们可以得出如下结论.

推论 2.4 已知O为坐标原点, 圆锥曲线C, F是曲线C的焦点, 准线与x轴相交与M, 过点F的直线ℓ与相交于A, B, 则$\angle OMA=\angle OMB$

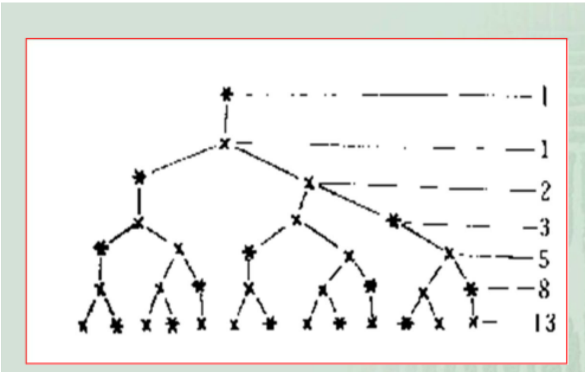
上述推论对椭圆、双曲线和抛物线均成立, 具有一般性, 可实现较为广泛的应用. 该推论在2015年福建高考(文科)数学卷19题中有所涉及, 在本文结论应用部分给出原题及解答.

2.2 推论2.4的应用

例 2.1 (2015年福建高考(文科)数学卷19题) 已知点F为抛物线$E: y^2 = 2px(p > 0)$的焦点, 点$A(2, m)$在抛物线E上, 且$|AF| = 3$.

(1) 求抛物线E的方程;

(2) 已知点$G(-1, 0)$, 延长AF交抛物线E于点B. 证明: 以点F为圆心且与直线GA相切的圆必与直线GB相切.



解: (1) 由抛物线的定义得$|AF| = 2 + \frac{p}{2} = 3$, 解得$p = 2$. 所以抛物线$E$ 的方程为$y^2 = 4x$.

(2) 抛物线E的方程为$y^2 = 4x$, 则抛物线准线与x轴的交点为$(-1, 0)$, 即点G又直线AB是过焦点F交抛物线于A, B, 所以由推论2.4得$\angle AGF = \angle BGF$, 即x轴平分$\angle AGB$. 因此点F到直线GA, GB的距离相等, 故以点F为圆心且与直线GA相切的圆必与直线GB相切. □

评析: 本题看似平淡, 但内涵着很多解析几何的知识一般学生很难将点G与抛物线的准线和坐标轴交点联系在一起, 而本题就用了这样的一个结论运用于题中, 很容易就可以得到角相等. 结论一大大简化了解题步骤.

3 有关切线的一般性结论

3.1 结论2

性质 3.1 若直线$y = kx + m(k \neq 0)$与椭圆$C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\ (a > b > 0)$相切, 切点为$T$. 直线$OT$ (O为坐标原点) 的斜率记为k_{OT}, 则$k_{OT} \cdot k = e^2 - 1$ (e为椭圆离心率).

证明: 设点T的坐标为(x_0, y_0), 直线$y = kx + m$代入$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$得$(a^2k^2 + b^2)\,x^2 + 2ka^2mx + a^2\,(m^2 - b^2) = 0$, 因为直线$y = kx + m(k \neq 0)$ 与$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 相切得$x_0 = -\frac{ka^2m}{a^2k^2+b^2}$, $\quad y_0 = -\frac{ka^2m}{a^2k^2+b^2} + m = \frac{b^2m}{a^2k^2+b^2}$. 故直线的斜率$k_{OT} = \frac{y_0}{x_0} = -\frac{b^2}{ka^2}$, 所以$k_{OT} \cdot k = -\frac{b^2}{a^2} = -\frac{a^2-c^2}{a^2} = e^2 - 1$ □

性质3.1是高考常见的有关椭圆切线的一个定值, 下面我们探究结论在双曲线和抛物线中是否成立, 该结论是否为圆锥曲线一般性结论.

性质 3.2 若直线$y = kx + m(k \neq 0)$与双曲线$C : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$相切, 切点为$T$直线$OT$ (O为坐标原点) 的斜率记为k_{OT}, 则$k_{OT} \cdot k = e^2 - 1$ (e为双曲线离心率).

证明: 设点T的坐标为(x_0, y_0), 直线$y = kx + m$代入$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 得

$$(b^2 - a^2k^2)x^2 - 2ka^2mx - a^2(m^2 + b^2) = 0.$$

因为直线$y = kx + m(k \neq 0)$与双曲线$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 相切, 得

$$x_0 = \frac{ka^2m}{b^2 - a^2k^2b^2}, \quad y_0 = -\frac{ka^2m}{b^2 - a^2k^2} + m = \frac{b^2m}{b^2 - a^2k^2}.$$

故直线的斜率$k_{OT} = \frac{y_0}{x_0} = \frac{b^2}{ka^2}$, 所以$k_{OT} \cdot k = \frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2-a^2}{a^2} = e^2 - 1$. 得证 □

性质3.1可以推广到双曲线.

性质 3.3 若直线$y = kx + m(k \neq 0)$与抛物线$C : y^2 = 2px(p > 0)$相切, 切点为T直线OT (O为坐标原点) 的斜率记为k_{OT}, 则$k_{OT} \cdot \frac{1}{k} = 2$.

证明: 设点T的坐标为(x_0, y_0), 直线$y = kx + m$代入$C : y^2 = 2px$, 得

$$(b^2 - a^2k^2)x^2 - 2ka^2mx - a^2(m^2 + b^2) = 0.$$

因为直线$y = kx + m(k \neq 0)$与双曲线$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$相切, 得

$$x_0 = \frac{ka^2m}{b^2 - a^2k^2b^2}, \quad y_0 = -\frac{ka^2m}{b^2 - a^2k^2} + m = \frac{b^2m}{b^2 - a^2k^2}.$$

故直线的斜率$k_{OT} = \frac{y_0}{x_0} = \frac{kp}{p-km} = 2k$, 即$k_{OT} \cdot \frac{1}{k} = 2$. 得证. □

由此可知椭圆有关切线的这条性质在双曲线、椭圆中都成立, 可一般化.

推论 3.4 若直线$y = kx + m(k \neq 0)$与曲线C相切, 切点为T. 直线OT (O为坐标原点) 的斜率记为k_{OT}, 则

$$\begin{cases} k_{OT} \cdot k = e^2 - 1, & C\text{为椭圆, 双曲线;} \\ k_{OT} \cdot \frac{1}{k} = 2, & C\text{为抛物线.} \end{cases}$$

推论3.4为圆锥曲线有关切线的一般性结论, 该结论在2012年高考理科数学广东卷20题中涉及到, 本文结论应用部分中有具体说明.

3.2 结论2应用

例 3.1 (2012年广东高考文科第20题) 在平面直角坐标系xoy中, 已知椭圆$C_1: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左焦点$F_1(0,1)$且点$P(0,1)$在$C_1$上.

(1) 求椭圆C的方程;

(2) 设直线ℓ同时与椭圆C_1和抛物线$C_2: y^2=4x$相切, 求直线ℓ的方程.

解: (1) 椭圆C_1的方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$ (详解略)

(2) 设直线ℓ与椭圆C_1和抛物线C_2相切的切点分别为$A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$. 直线的斜率为k. 依题意知, 椭圆C_1 的离心率$e=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 由推论3.4得

$$\frac{y_1}{x_1}\cdot k=e^2-1=-\frac{1}{2}. \tag{3.1}$$

由结论3得:

$$\frac{y_2}{x_2}=2k. \tag{3.2}$$

又

$$y_2^2=4x_2; \tag{3.3}$$

$$\frac{x_1^2}{2}+y_1^2=1. \tag{3.4}$$

又

$$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=k. \tag{3.5}$$

由(3.2)-(3.3)得

$$k=\frac{2}{y_2}. \tag{3.6}$$

由(3.3),(3.5)和(3.6)得

$$\frac{y_1-y_2}{x_1-\frac{y_2^2}{4}}=\frac{2}{y_2}. \tag{3.7}$$

由(3.1)和(3.6)得

$$y_2=-\frac{4y_1}{x_1}. \tag{3.8}$$

由(3.7)和(3.8)得$-x_1-2=0$. 解得$x_1=-1, x_2=2$ (舍去). 把$x_1=-1$代入(3.4), 得

$$y_1=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

故点A的坐标为$(-1,-\frac{\sqrt{2}}{2})$或$(-1,\frac{\sqrt{2}}{2})$.

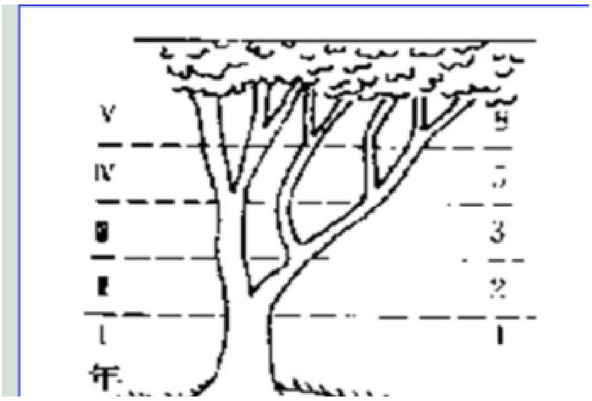
当点A的坐标为$(-1,-\frac{\sqrt{2}}{2})$时, 由(3.1)得$k=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, 此时, 直线ℓ的方程为

$$y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x-\sqrt{2}.$$

当点A的坐标为$(-1,\frac{\sqrt{2}}{2})$时, 由(3.1)得$k=\frac{\sqrt{2}}{2}$, 此时, 直线ℓ的方程为

$$y=\frac{\sqrt{2}}{2}x+\sqrt{2}.$$

□



评析: 本题主要考察学生的数形结合、逻辑推理能力及解决有关对曲线的斜率、圆锥曲线与直线的位置关系问题的能力, 本题问(2）中考察的就是有关椭圆, 抛物线的切线的斜率的结论, 让学生很容易看出AB两点与斜率k之间的关系为后面的计算带来了方便.

4 有关切点弦的一般性结论

4.1 结论3

性质 4.1 椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$, $P(x_0,y_0)$ 是椭圆外一条定直线$\ell:y=kx+m$上的动点. 过P作椭圆的两条切线PA,PB, 切点分别为A,B. 则切点弦AB所有的直线恒过点

$$N\Big(-\frac{kd^2}{m},\frac{b^2}{m}\Big).$$

证明: 设$i\frac{n}{2}A(x_i,y_1),B(x_2,y_2)$, 则切线$PA:\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1,\quad PB:\frac{x_2x}{a^2}+\frac{y_2y}{b^2}=1$

由于点$P(x_0,y_0)$ 在切线PA,PB , 所以切点弦的方程为$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_6y}{b^2}=1$

又$\frown_0=k\alpha_0+m(m\neq 0)$, 所以得$x_0\left(\frac{x}{a^2}+\frac{ky}{b^2}\right)+\left(\frac{my}{b^2}-1\right)=0$

令$\begin{cases}\frac{x}{a^2}+\frac{ky}{b^2}=0\\ \frac{my}{b^2}-1=0\end{cases}$

得$\begin{cases}x=-\frac{kd^2}{m}\\ y=\frac{b^2}{m}\end{cases}$

所以切点弦AB 过定点$\big(-\frac{kd^2}{m},\frac{b^2}{m}\big)$.得证. □

椭圆外一点作椭圆的两条切线, 切点弦过定点.

性质 4.2 双曲线C: $\frac{x^1}{a^2}-\frac{y^1}{b^2}=1(a>0,b>0)$, $P(x_0,y_0)$ 是双曲线外一条定直线ℓ: $y=kx+m$上的动点. 过P作双曲线的两条切线PA,PB, 切点分别为A,B, 则切点弦AB所有的直线恒过点$N(-\frac{ka^2}{m},-\frac{b^2}{m})$.

性质4.2可以类似性质**??**证明. 性质**??**推广到双曲线中也司以得到相同的结论, 那公在抛物线中是否成立呢?

性质 4.3 抛物线$C: y^2=2px$, $P(x_0,y_0)$是抛物线外一条定直线$\ell: y=kx+m$ 上的动点, 过P作抛物线的两条切线PA,PB, 切点分别为A,B, 则切点弦AB所有的直线恒过点$N(\frac{m}{k},\frac{p}{k})$.

注 4.4 抛物线外一定直线上的任意动点作抛物线的两条切线, 切点弦过定点.

性质4.3的证明: 设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$, 此线$PA: yy_1=p\left(x+x_1\right),PB: yy_2=p\left(x+x_2\right)$, 由于点$P(x_0,y_0)$ 在切线PA,PB, 所以切点弦的方程为$y_0y=p(x+x_0)$, 又$y_0=kx_0+m(m\neq 0)$, 所以得$x_0(ky-p)+(my-px)=0$. 令$\begin{cases} ky-p=0 \\ my-px=0 \end{cases}$

得$\begin{cases} x=\frac{m}{k} \\ y=\frac{p}{k} \end{cases}$

即切点弦AB 过定点$\left(\frac{m}{k},\frac{p}{k}\right)$. □

由此得出圆锥曲线有关切点弦的一般性结论: 过圆锥曲线外一点作圆锥曲线两条切线, 切点弦过定点.

推论 4.5 圆锥曲线C, $P(x_0,y_0)$是圆锥曲线外一条定直线$y=kx+m(m\neq 0)$ 上的动点, 过P作C的两条切线PA,PB, 切点分别为A,B, 则切点弦AB恒过定点N, 其中

$$N=\begin{cases} (-\frac{ka^2}{m},\frac{b^2}{m}), & C\text{为椭圆;} \\ (\frac{ka^2}{m},-\frac{b^2}{m}), & C\text{为双曲线;} \\ (\frac{m}{k},\frac{p}{k}), & C\text{为抛物线.} \end{cases}$$

上述推论4.5在巴蜀中学2020届适西性月考五中有应用, 在本文应用部分有详细过程.

4.2 结论3应用

例 4.1 (巴蜀中学2020届适应性月考五11题 · 改编) 已知抛物线$y^2=4x$ 的焦点为F, 过直线设点$P(x_0,y_0)$ 在直线$y=x+2$ 上任一点引抛物线的两条切线, 切点A,B, 则F到直线AB的距离 ( ).

A. 无题小值*;* *B*. 无题大值*;*

C. 有题小值, 最小值为*1;* *D*. 有是大值, 最大值为$\sqrt{5}$.

解: 由推论4.5知切点弦AB过定点$N(2,2)$, 当$NF \perp AB$时, 焦点$F(1,0)$到AB的距离最大, 最大值为$\sqrt{(0+2)^2+(1-2)^2}=\sqrt{5}$. □

评析: 巴蜀中学的这道月考题主要考察直线与抛物线的位置关系, 以及点到直线的位置关系, 综合性比较强. 应用结论3将点到直线的距离转化成点到点的距离, 可以简化解题步骤, 降低解题难度.

5 有关中点弦的一般性结论

5.1 结论4

性质 5.1 已知椭圆$C: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$, 直线$\ell$不过原点$O$且不平行于坐标轴, ℓ与C有两个交点A, B, 线段AB的中点为M, 则$k_1 \cdot k_{\infty}=-\frac{b^2}{a^2}$.

证明: 设$A(x_1,y_1), B(x_2,y_2), M\left(x_\Delta, y_x\right)$ 将$A(x_i,y_i), B(x_2,y_2)$ 代入$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, 得

$$(1): \frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$$

$$(2): \frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1$$

由(1)-(2), 得

$$\frac{x_1^2-x_2^2}{a^2}+\frac{y_1^2-y_2^2}{b^2}=0$$

所以

$$\frac{\left(x_1+x_2\right)\left(x_1-x_2\right)}{a^2}+\frac{\left(y_1+y_2\right)\left(y_1-y_2\right)}{b^2}=0$$

即

$$\frac{\frac{x_1+x_2}{2}\left(x_1-x_2\right)}{a^2}+\frac{\frac{y_1+y_2}{2}\left(y_1-y_2\right)}{b^2}=0$$

所以

$$\frac{b^2}{a^2}=-\frac{y_x\left(y_1-y_2\right)}{x_x\left(x_1-x_2\right)}=-k_{ax} \cdot k_1$$

所以

$$k_{0N} \cdot k_1=-\frac{b^2}{a^2}$$

□

我们可以试着将性质10推广到双曲线中, 是否可以得到同样的结论.

性质11: 已知戏曲线C: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0, b>0)$, 直线$\ell$ 不过面点O且不平行

于坐标轴, ℓ与C有两个交点A, B, 线段AB 的中点为M, 则 $k_1 \cdot k_{om} = \frac{b^2}{a^2}$ 对于双曲线$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1(a > 0, b > 0)$, 直线$\ell$ 不过原点O且不平行于坐标轴, ℓ与C 有两个交点A, B, 线段AB 的中点为M, 则$k_1 \cdot k_{\alpha\nu} = \frac{a^2}{b^2}$. 我们也可以用类似椭圆的方法证明结论在双曲线中也是成立的.

性质12: 已知$C : y^2 = 2px$, 直线ℓ不过原点O且不平行于坐标轴, ℓ 与C有两个交点A, B, 线段AB的中点为$M(x_0, y_0)$, 则直线OM的斜率与l的斜率的乘积为$\frac{p}{x_0}$ $k_l \cdot k_{OM} = \frac{p}{x_0}$

证明: 设$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, A, B 所在的方程为$y = kx + b$, 代抛物线方程中

得

$$y^2 - \frac{2py}{k} + \frac{2pb}{k} = 0$$

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{p}{k} = y_0$$

故

$$y_i^2 - \frac{2py_1}{k} + \frac{2pb}{k} = 0$$

$$y_z^2 - \frac{2py_2}{k} + \frac{2pb}{k} = 0$$

又

$$k_{\mathrm{OM}} = \frac{y_0}{x_0}$$

所以

$$k_1 \cdot k_{\mathrm{ov}} = \frac{p}{x_0}$$

综上可以得到圆锥曲线有关中点弦的一般性结论.

结论4: 已知圆锥曲线C, 直线ℓ不过原点O且不平行于坐标轴, ℓ 与C 有两个交点A, B 线段AB 的中点为$M(x_0, y_0), k_1 \cdot$ $k_{\mathrm{OM}} = -\frac{b^2}{a^2}$(椭圆), $k_1 k_{\mathrm{OM}} = \frac{b^2}{a^2}$(双曲线) $k_1 \cdot k_{OM} = \frac{p}{x_0}$ (抛物线). 结论4在2018年新课标全国卷III理科20题中有应用, 本文结论应用部分详细说明.

5.2 结论4应用

例4: ((2018年新课标全国卷III理数第20题)已知斜率为k 直线ℓ与朗圆C : $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 交于A, B 两点, 线段AB 的中点为$M(1, m) m > 0$.

(1) 证明: $k < -\frac{1}{2}$

(2) 略

证明: 由结论4 得$k \cdot k_{\mathrm{OM}} = -\frac{b^2}{a^2} = -\frac{3}{4}$ 即- $\frac{3}{4m} = k$, 因为M 在椭圆内, 得$0 < m < \frac{3}{2}$

所以$0<-\frac{3}{4k}<\frac{3}{2}$, 解得$k<-\frac{1}{2}$

评析: 本题主要考察曲线方程, 中点弦以及取值范围有关的知识, 体现数学知识之间的内在联系. 而在本题中用结论4, 即$k\cdot k_{OM}=-\frac{b^2}{a^2}=-\frac{3}{4}$ 得- $\frac{3}{4m}=k$, 这样可以直接得出k, m的关系, 简化解题步骤.

6 总结

圆锥曲线统一定义及性质形成了各圆锥曲线的内在联系, 这导致有关结论之间的相似性. 圆锥曲线中的很多结论都存在着一般性, 椭圆中的有些结论可以推广到双曲线中, 双曲线中的有些结论在抛物线也成立. 高考中圆锥曲线和直线结合的题型较为常见, 本文对圆锥曲线中有关焦点弦、切线、切点弦、中点弦的结论进行探究, 以期为学生和教师提供解决类似圆锥曲线问题的途径和方法.

参考文献

[1] 王伯龙. 中学数学杂志[J]. 两道高考试题的统一推广, 2018, **07**: 65-66.

[2] 圣转红. 2018年全国高考数学卷1 理科数学19 题的多种解法的推广, 中学数学教学[J]. 2018, **4**: 36-40.

致 谢

感谢!